UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

João Vítor Batista Vanazzi

Teorias Alternativas para a Gravitação: f(R) e Brans-Dicke

Porto Alegre - Brasil

Novembro de 2016

João Vítor Batista Vanazzi

Teorias Alternativas para a Gravitação: f(R) e Brans-Dicke

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef para obtenção de Grau em Bacharel em Física.

Porto Alegre - Brasil

Novembro de 2016

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, Professor Dimiter, pela paciência e esforços inquestionáveis que foram um grande estímulo para dar continuídade à realização deste trabalho e no aprofundamento de conceitos e ideias relevantes. Agradeço também à minha namorada, Danielle, pelo apoio incondicional nos momentos em que mais me foi necessário, além da incrível paciência e determinação em me manter sempre focado em meus estudos. Não obstante, sempre que possível, também se ateve em ajudar nos problemas externos ao ambiente acadêmico.

Sequencialmente, agradeço aos meus familiares que foram essenciais para tornar esse momento possível através de apoio emocional, psicológico, estrutural e financeiro. Sou eternamente grato ao meu pai e tios que me acomodaram nesta nova morada que se tornou o Estado do Rio Grande do Sul. Agradeço aos meus pais de Goiânia que, mesmo à distância, nunca me deixaram desistir de meus sonhos. Por fim, meu sinceros agradecimentos à todos os amigos, sejam eles de Porto Alegre ou Goiânia, que propiciaram momentos incríveis ao longo desta tragetória.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar algumas teorias alternativas para a gravitação, que vão além da Relatividade Geral. Aspectos importantes são desenvolvidos e analisados. Iniciamos revisando a equação de Einstein e o embasamento da Relatividade Geral, em seguida introduzimos um campo escalar à Lagranegeana produzindo a Teoria de Brans-Dicke. Após isso, estudamos uma função genérica do escalar de Ricci conhecida como teoria $f(R)$. Faz-se uso do método variacional e do cálculo em variedades para a obtenção das equações de campo dessas teorias.

Por fim, a equivalência entre $f(R)$ e de Brans-Dicke é provada através de uma transformada de Legendre. Além disso, modificamos a parte geométrica da Lagrangeana para produzir termos não-lineares nas derivadas da métrica. Introduzimos o termo de Gauss-Bonnet como modificação e o teorema de Lovelock é utilizado para reobter a Reltividade Geral da Lagrangeana modificada.

Abstract

This work aims to present some alternative theories for gravitation that goes beyond General Relativity. Important aspects are developed and analysed. We initiate revising the Einstein's equation and the General Relativity foundation, then we introduce a scalar field to the Lagrangean that yields the Brans-Dicke Theory. After that, we study a generic function of the Ricci scalar which is known to be the $f(R)$ theory. One does make use of the variational method and the calculus on manifolds in order to obtain the field equations of these theories.

Finally, the equivalence between $f(R)$ and Brans-Dicke is proven by a Legendre transform. Moreover, we modify the Lagrangean's geometrical term to produce non-linear terms in the derivatives of the metric tensor. We introduce the Gauss-Bonnet term as a modification and the Lovelock's Theorem is utilized for reobtain the General Relativity of the modified Lagrangean.

Sumário

Introdução

A Teoria da Relatividade Geral concebida em 1915 por Albert Einstein se tornou, ao longo do século XX, a ferramenta mais importante para explicação e resolução de problemas gravitacionais de larga escala. As equações de campo da teoria permitem visualizar uma profunda e tênue relação entre a geometria do espaço 4-dimensional e a composição energética desse espaço. Embutida nesta conotação geométrica, a métrica Riemanniana, $g_{\mu\nu}$, se torna um ente importante na construção das equações relativísticas e a arbitrariedade em sua escolha proporciona uma vasta gama de modelos gravitacionais e cosmológicos.

Logo após a publicação de 1915, soluções para as equações de Einstein foram amplamente divulgadas e analisadas. Trabalhos como o de Schwarzschild [1], Robertson [2], Oppenheimer e Volkoff [3] trouxeram resultados importantes dentre os quais se situam singularidades espaço-temporais, expansão-contração no âmbito cosmológico e dinâmicas estelares. O número crescente de trabalhos começa a revelar os limites da teoria e, naturalmente, surgem novas ideias e hipóteses que abrangem e generalizam a Relatividade Geral. Em especial podemos citar a Teoria de Brans-Dicke, ou ainda Jordan-Brans-Dicke, desenvolvida em 1961 [4] e a Teoria $f(R)$ proposta por A. Buchdahl em 1970 [5]. Ambos trabalhos sugerem uma modificação na formulação geométrica da Relatividade Geral, propiciando uma novo horizonte para o estudo de fenômenos gravitacionais.

Pascual Jordan foi um dos pioneiros na construção de uma teoria escalar-tensorial [6]. Ele se baseou na teoria de Kaluza-Klein e propôs uma simplificação que introduzia cinco coordenadas homogêneas e identificou uma das variáveis de campo como a substituição da constante gravitacional. Analogamente, Carl H. Brans e Robert H. Dicke propõem que a constante da gravitação universal newtoniana, G, possa variar e introduz-se um campo escalar ϕ, que substitui $\frac{1}{G}$ alterando a Lagrangeana da Relatividade Geral. Esta função visa contemplar o Princípio de Mach [7] à teoria relativística de maneira mais evidente, ou seja, o campo ϕ reproduz a ideia de que referenciais inerciais são afetados globalmente por corpos distantes.

A Teoria $f(R)$ supõe uma modificação do Langrangeano dada por uma função genérica f do escalar de Ricci R e, então, obtém-se uma nova equação de campo para cada função escolhida. Tal generalização providencia uma Lagrangeana de ordem mais alta e não-linear nas derivadas da métrica diferentemente da Relatividade Geral. Dessa maneira, a teoria pode conter intrisicamente um número maior de possibilidades para as soluções cosmológicas (como a introdução de matéria escura e energia escura), especialmente aquelas que envolvem a métrica de Robertson-Walker, e ser renormalizável [8]. Em especial, uma dessas funções produz a Teoria de Gauss-Bonnet [9].

As modificações feitas na Lagrangeana da Relatividade Geral requerem uma interpretação física e permitem diferentes abordagens não exploradas até então. Um dos usos possíveis deste novo maquinário é a possibilidade de abordar o problema da matéria escura - energia escura e interpretá-la como uma dessas modificações. A matéria escura surgiu como um conceito em meados do século XX, após a constatação de que as velocidades estelares no disco da galaxia não correspondiam ao esperado pela lei Kepleriana ($v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$). O primeiro a observar esse fenômeno foi o astrônomo J. Oort. Ele observou que as velocidades estelares, para estrelas na vizinhança local, eram maiores que o esperado, levando-o a supor que as massas das galáxias fossem maiores que as observadas. Mais tarde, começou-se a usar as curvas de rotação como técnica para análise das velocidades como função do raio em uma galáxia. As medidas de Vera Rubin [10] trouxeram fortes evidências de que algo estaria influenciando o movimento estelar nas galáxias. Outras evidências surgiram na constatação de variações observadas nos dados da CMB (*Cosmic Microwave Background*) sendo relevantes para aumentar a suspeita de existência de matéria escura em largas escalas espaciais. Além disso, estudos de aglomerados de galáxias e o uso de lentes gravitacionais[1] também trouxeram sinais da presença de matéria escura [11]. Já a energia escura foi sugerida para explicar o problema de inflação universal, até então sem nenhuma explicação ou agente causador.

A presença de entidades que interagem apenas gravitacionalmente fica cada vez mais evidente e a sua participação na dinâmica de objetos astrofísicos sugere uma correlação com a dinâmica em escala global do universo. Naturalmente, procura-se uma explicação para tais fenômenos e principalmente o que poderia vir a ser matéria escura. Dentre algumas formulações estão sugestões de novas partículas em teoria de campos, como por exemplo Áxions, Neutralinos e WIMPs [12] e também há sugestões na Relatividade Geral como será prospoto neste trabalho. Podemos notar que mudanças na Relatividade Geral mostram um grau de relevância no papel da teoria como um todo. A simples inserção da constante cosmológica Λ para resolver o problema de inflação universal, à época de Einstein, é um primeiro sinal de que alterações nas equações de campo podem adicionar novos comportamentos às dinâmicas gravitacionais e cosmológicas.

[1] Lente gravitacional é nome que se dá para distribuições de matéria que curvam o espaço-tempo e promovem desvios na tragetória da luz. É possível calcular as distâncias de objetos astronômicos observando as lentes gravitacionais, ou ainda, obter suas massas.

1 Conceitos Básicos

1.1 Convenções e resultados preliminares

Iremos trabalhar em uma variedade diferenciável $(M, g_{\mu\nu})$, com fronteira ∂M[1], assumindo uma geometria Riemanniana orientada no tempo [14, 15]. Neste caso, faz-se uso de uma métrica não-euclideana cuja assinatura adotada neste trabalho será $(-+++)$. O sinal negativo é referente à coordenada temporal e os demais sinais são referentes às coordenadas espaciais.

Para quantidades tensoriais adotaremos índices gregos variando de 0 a 3, onde 0 remete à coordenada temporal e os demais ao espaço. Será utilizada a convenção de soma de Einstein com a finalidade de facilitar o cálculo tensorial. Dessa maneira, fica claro que podemos omitir o símbolo de somatório como ilustrado abaixo:

$$\sum_{\mu} A^{\mu} B_{\mu} = A^{\mu} B_{\mu} \ .$$

A noção de derivação é alterada quando passamos a trabalhar em espaços curvos, ou seja, o operador diferencial comumente usado é a derivada covariante, cujas componentes serão denotadas por ∇_{μ}. A derivada covariante de um vetor contravariante fica exemplificada por:

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} V^{\lambda} \ ,$$

onde $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ são os simbolos de Christoffel de segundo tipo. Como no exemplo acima, as derivadas usuais, referentes ao espaço plano (espaço de Minkowski no nosso caso), serão denotadas por:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} \ .$$

Um resultado importante da geometria Riemanniana que será utilizado é

$$\nabla_{\lambda} g^{\mu\nu} = \nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0 \ , \tag{1.1}$$

[1] A noção de integração em variedades é facilmente introduzida quando se supõe uma fronteira para a mesma, uma discussão detalhada pode ser encontrada em [13].

e, ao longo do trabalho, estaremos assumindo uma variadade sem a propriedade de torsão. A Relatividade Geral e as extensões dela, que serão analisadas, também assumem tal hipótese. Este fato implica diretamente na simetria dos símbolos de Christoffel,

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \ , \tag{1.2}$$

logo, devido às relações (1.1) e (1.2), podemos reescrever $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ em função da métrica:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(\partial_{\mu} g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}). \tag{1.3}$$

que é conhecida como conexão de Levi-Civita. Ficará implicado que a quantidade g é o determinante da matriz que representa o tensor de métrica, ou seja,

$$g = \det([g_{\mu\nu}]).$$

1.2 Princípio Variacional

A formulação da Relatividade Geral está calcada na Mecânica Clássica, e em seus princípios, de forma que podemos gerar as equações relativísticas pelo princípio de mínima ação. Vamos então realizar uma variação na métrica tal que $g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$, onde assumiremos que a variação se torne nula na fronteira ∂M da variedade. Antes de tudo, é necessário construir a ação que define a Relatividade Geral. Sem perda de generalidade, podemos escrever uma ação qualquer na variedade 4-dimensional com elemento de volume $\mathrm{d}V$ tal que:

$$S = \int_M \mathcal{L} \ \mathrm{d}V = \int_M \mathcal{L} \sqrt{-g} \ \mathrm{d}^4 x \ , \tag{1.4}$$

onde $\mathcal{L}$ é Lagrangeana e $\sqrt{-g}$ é a densidade tensorial ligada ao jacobiano do elemento de volume em coordenadas naturais. Em seguida, procuramos uma função $\mathcal{L}$ invariante, ou seja, procuramos alguma função escalar que seja invariante frente à mudança de coordenadas[2].

Como a dinâmica de partículas está intimamente relacionada à geometria do espaço, então, espera-se que o escalar de Ricci seja uma escolha apropriada para a Lagrangeana do sistema. De maneira qualitativa, quando se busca construir um escalar invariante, é necessário tomar derivadas da métrica. Quando se toma a segunda derivada obteremos o tensor de curvatura. Em geral, o tensor de curvatura é a medida de não-comutatividade das derivadas [16], definido pela identidade de Ricci:

[2] De maneira ainda mais geral, a Langrangeana deve ser invariante frente a transformações do Grupo Covariante *e.g.*, rotações, transformações de Lorentz, *etc*[15].

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) V^\lambda \equiv R^\lambda_{\alpha\beta\mu} V^\mu \ ,$$

e V^μ um vetor qualquer. No nosso caso, o tensor de Riemann é dado por:

$$R^\lambda_{\alpha\beta\mu} = \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\beta\mu} - \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\beta\mu} - \Gamma^\lambda_{\beta\rho}\Gamma^\rho_{\alpha\mu} \ , \tag{1.5}$$

obserando as equações (1.3) e (1.5) torna-se visível que $R^\lambda_{\alpha\beta\mu}$ é uma função da derivada segunda da métrica. Utilizando (1.5), obtemos 20 componentes independentes do tensor de curvatura e, pela escolha de um referencial inercial, excluimos 6 dessas componentes ao realizar-se uma transformação de Lorentz. Ao todo, tem-se 14 escalares invariantes, porém, o único invariante linear na derivada segunda é o conhecido escalar de Ricci. É atribuida a Hilbert [17] a escolha de R como o melhor invariante que representa a Lagrangeana.

Podemos, assim, escrever a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{c^4}{16\pi G}(R - 2\Lambda) = \frac{1}{2\kappa}(R - 2\Lambda) \ , \tag{1.6}$$

onde $\frac{c^4}{8\pi G} = \frac{1}{\kappa}$. Aqui já adicionamos a constante cosmológica Λ, que claramente não altera a invariância de $\mathcal{L}$ em relação à mudança de coordenadas. Substituindo (1.6) na equação (1.4) obtemos:

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x \ , \tag{1.7}$$

em seguida aplicamos o princípio de mínima ação notando que a variável dinâmica neste caso é a métrica[3]. Dessa maneira:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2\kappa}\int \delta\left[(R - 2\Lambda)\sqrt{-g}\right]\ \mathrm{d}^4x \\ &= \frac{1}{2\kappa}\int (\delta[R - 2\Lambda]\sqrt{-g} + \delta[\sqrt{-g}](R - 2\Lambda))\ \mathrm{d}^4x \ . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Para o segundo termo iremos utilizar o resultado (A.4) do Apêndice A, o que resulta em:

$$\delta[\sqrt{-g}](R - 2\Lambda) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(R - 2\Lambda)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \ . \tag{1.9}$$

Já no primeiro termo, a variação fica:

$$\delta[R - 2\Lambda]\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\ \delta R \ . \tag{1.10}$$

[3] É possível realizar a variação tratando a métrica e a conexão afim independentemente, conhecido como método de Palatini [18]

Substituindo a definição do escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, na equação (1.10) obtem-se

$$\sqrt{-g}\ \delta R = R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ \delta R_{\mu\nu}. \tag{1.11}$$

O último termo da equação (1.11) pode ser aberto observando que $R_{\mu\nu}$ é uma contração da equação (1.5), ou seja,

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} = \partial_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\ , \tag{1.12}$$

cuja variação se torna:

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} = {} & \partial_\lambda(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - \partial_\nu(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}) + (\delta\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda})\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \\ & + \Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu})\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda})\ ,\end{aligned} \tag{1.13}$$

onde comutamos a variação em $g^{\mu\nu}$ com a derivada parcial. A variação da conexão afim tem caráter tensorial [15], ao contrário da própria conexão. Podemos utilizar a definição da derivada covariante de um tensor de ordem 2 para reescrever $\delta R_{\mu\nu}$, portanto,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})\ . \tag{1.14}$$

Substituindo este resultado em (1.11), ficamos com:

$$\sqrt{-g}\ \delta R = R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\left[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})\right]\ . \tag{1.15}$$

Podemos agora substituir as equações (1.15) e (1.9) em (1.8) tal que

$$\begin{aligned}\delta S = {} & \frac{1}{2\kappa}\int\left[R_{\mu\nu} - \left(\frac{R}{2} - \Lambda\right)g_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu}\ \mathrm{d}^4x \\ & + \frac{1}{2\kappa}\int\left[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})\right]g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x\ ,\end{aligned} \tag{1.16}$$

pelo teorema da divergência, como pode ser visto no Apêndice C, a ultima integral da equação acima se torna nula e, para finalizar, faremos o requerimento de extremização da ação ($\delta S = 0$), portanto

$$\frac{1}{2\kappa}\int\left[R_{\mu\nu} - \left(\frac{R}{2} - \Lambda\right)g_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu}\ \mathrm{d}^4x = 0\ .$$

Neste caso, a integral será nula se seu integrando também o for, resultando em:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 0 \tag{1.17}$$

que é a equação da Relatividade Geral na ausência de matéria.

1.3 Equações de Campo

Vamos observar que a equação (1.17) foi produzida sem assumirmos a existência de massa no modelo, assim, ficam representados por ela os efeitos gravitacionais no vácuo. Se queremos produzir equações que englobem massa e energia devemos modificar a Lagrangeana ao somar um novo termo referente à interação com as massas envolvidas. Assim teremos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_m \ ,$$

o subíndice G refere-se ao termo geométrico e m à interação de matéria. Para este momento, $\mathcal{L}_G$, será apenas a Lagrangeana obtida na seção anterior. Com a Lagrangeana modificada podemos gerar a ação utilizando (1.4), e enfim, utilizar o princípio variacional. Obteremos então:

$$S = \int_M (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_m) \ \mathrm{d}V \ . \tag{1.18}$$

Em seguida, devemos aplicar o princípio variacional, mas note que o primeiro termo irá produzir o lado esquerdo de (1.17), já o segundo termo ficará:

$$\delta\mathcal{L}_m = \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} \ .$$

A notação $\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}$ indica a derivada funcional de $\mathcal{L}_m$ em relação a $g^{\mu\nu}$ [19]. Vamos então definir o tensor energia-momentum

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \ . \tag{1.19}$$

e, com as modificações feitas, a integral (1.18) fica:

$$\int \left[R_{\mu\nu} - \left(\frac{R}{2} - \Lambda\right) g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}\right] \sqrt{-g} \ \delta g^{\mu\nu} \ \mathrm{d}^4x = 0 \ ,$$

finalmente, resultando em:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \ . \tag{1.20}$$

O tensor energia-momentum pode ser construido conforme se deseja, de acordo com a forma e composição do objeto a ser estudado. É muito comum obter suas componentes para o caso em que se considera um fluído homogêneo e isotrópico [20]:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2)U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu} \ ,$$

onde U_μ é a quadri-velocidade e $\rho = \frac{E}{c^2}$ é o equivalente de energia em massa. Além disso, ele possui a propriedade de ter divergência nula, ou seja, $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ e de ser simétrico em seus índices $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

2 Teoria de Brans-Dicke

2.1 Princípio de Mach e campo ϕ

O estudo da interação entre os corpos requer, naturalmente, a escolha de referenciais apropriados que nos permitam medir e computar grandezas fisicamente relevantes. A noção de referencial inercial surge como conceito chave na teoria dinâmica dos corpos e a partir daí fica estabelecido um critério na escolha de referenciais dos quais irá derivar-se as equações da dinâmica. É, então, que o discernimento sobre tempo e espaço se tornam necessários a ponto de se questionar como leis e princípios físicos estruram-se de maneira plausível a tais concepções. Neste contexto, entra em cena Ernst Mach [7], que questiona como o universo ao redor de um dado ponto alteraria um possível referencial inercial localizado no mesmo.

Imagine agora que se queira escolher um referêncial inercial, o qual interage gravitacionalmente com o universo ao seu redor. Devido ao fato de a gravitação ser uma interação de longo alcance, esperamos que a inércia deste referencial seja afetada pela distribuição de massa que o cerca e assim precisaríamos entender o universo em sua totalidade, para então escolher o melhor referencial. Claramente, o esforço para reproduzir esta ideia em uma teoria física é grandioso, no entanto, o princípio de Mach teve grande relevância na formulação da Relatividade Geral, ainda que ela não comporte o mesmo. Em sua totalidade, a teoria relativística não engloba os efeitos requisitados por Mach, de forma que a métrica, $g_{\mu\nu}$, é construída a partir da arbitrariedade na estrutura espaço-temporal e a teoria a associa com a distribuição material através das equações de campo. Dessa maneira, não há como levar em consideração, *a priori*, os efeitos que corpos massivos teriam na métrica. É usual supor um campo métrico e através dele construir as grandezas necessárias para descrever as propriedades do espaço-tempo (e.g., curvatura), ou seja, fica implícita a escolha de um referêncial inercial. Segue daí, que os efeitos gravitacionais devido à distribuição material total não são viabilizados em primeiros princípios.

Uma alternativa para suprir este problema é a proposição de teorias escalares-tensoriais, isto é, associa-se uma nova variável dinâmica à Lagrangeana de interação, para estudar seus efeitos nas equações resultantes do princípio variacional. O uso deste conceito tem seus primórdios na simplificação que Pascual Jordan propõe à Teoria de Kaluza-Klein [6] e insere um campo escalar variável conectado com a constante gravitacional G. A teoria de Jordan, apesar de ambietada em um espaço com 5 dimensões, influenciou o trabalho de Brans e Dicke, em que o tal campo escalar agregaria parcialmente o Princípio de Mach à Relatividade, ou seja, o novo campo estaria intimamente relacionado à inércia presente no espaço.

Vamos agora propor a inserção de um novo campo escalar, ϕ, na lagrangeana de interação da Relatividade Geral. Se ϕ está relacionado à inércia devido à distribuição material do universo, é razoável conectá-lo com o volume e a matéria total deste espaço. Assim, podemos estimar uma valor médio para o campo ϕ [21], supondo que todo universo esteja dentro de uma esfera cujo o raio é até onde observa-se matéria visível. Para calcular o potencial gravitacional vamos utilizar uma densidade de matéria $\rho \sim 10^{-29}$ g cm^{-3} e o raio $R \sim 10^{29}$ cm, dessa forma teremos um potencial médio

$$\langle\phi\rangle \sim \rho R^2 \approx 10^{27} \text{ g cm}^{-1}$$

o que é próximo de $\frac{1}{G} \sim 10^{28}$ g cm^{-1}. Portanto, é plausível relacionar a constante gravitacional com o campo ϕ, tal que:

$$G \approx \frac{1}{\phi} \ . \tag{2.1}$$

Note que poderiamos escolher fazer a troca por outra quantidade escalar, tal como R, porém, recairemos em quantidades que são derivadas da métrica. Logo não se tornam bons candidatos à troca, pois queremos que $g_{\mu\nu}$ e ϕ sejam independentes.

Além disso, por ϕ ser uma variável dinâmica somos levados a incluir mais um termo na Lagrangeana do sistema que irá contabilizar a contribuição do campo escalar para a energia e momentum. Dessa maneira, é natural esperar que na equação final da teoria haja mais um termo tensorial referente à energia-momentum proveniente de ϕ.

2.2 Equação escalar-tensorial

Vamos formular a Lagrangeana da interação fazendo a soma entre a contribuição geométrica (já com a troca (2.1)), de matéria e do campo escalar de forma que obtemos:

$$S = \int_M (\mathcal{L}_G(\phi) + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_\phi)\mathrm{d}V \ .$$

Aqui, o termo $\mathcal{L}_m$ refere-se à matéria local a ser estudada. Aplicando-se o princípio variacional, a equação se torna:

$$\delta \int \left(\phi R + \frac{16\pi}{c^4}\mathcal{L}_m - \frac{\omega}{\phi}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi \right) \sqrt{-g} \ \mathrm{d}^4x = 0 \ . \tag{2.2}$$

No último termo, o denominador ϕ foi colocado para tornar a constante de acoplamento ω adimensional. Podemos agora comutar a variação com a integração e analisar o primeiro termo de (2.2),

$$\delta[\phi R\sqrt{-g}] = R\sqrt{-g}\ \delta\phi + \phi\sqrt{-g}\ \delta R + \phi R\ \delta[\sqrt{-g}],$$

do qual manteremos a variação em ϕ inalterada. O segundo termo é resultado de (1.15) e a variação presente no terceiro termo resulta em (A.4), de maneira que:

$$\begin{aligned}\delta[\phi R\sqrt{-g}] = R\sqrt{-g}\ \delta\phi &+ \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\phi\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu} \\ &+ \left[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})\right]\phi g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ .\end{aligned} \tag{2.3}$$

Para o segundo termo de (2.2), vamos apenas recorrer à definição (1.19), nos resta analisar o último termo cuja variação será:

$$\begin{aligned}\delta\left[\frac{\omega}{\phi}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi\sqrt{-g}\right] = &\left[-\frac{\omega}{\phi^2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi\ \delta\phi - \frac{\omega}{2\phi}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right. \\ &\left.+ \frac{\omega}{\phi}\left(\delta(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi + \partial^\mu\phi\partial_\mu(\delta\phi)\right)\right]\sqrt{-g}\ .\end{aligned} \tag{2.4}$$

Juntando os termos (2.3), (1.19) e (2.4) na equação (2.2) obtemos:

$$\begin{aligned}0 = &\int\left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\phi - \frac{8\pi}{c^4}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{2\phi}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi g_{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\ \mathrm{d}^4x \\ &+ \int\left(R + \frac{\omega}{\phi^2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right)\sqrt{-g}\delta\phi\ \mathrm{d}^4x \\ &+ \int\left[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})\right]\phi g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x \\ &- \int\frac{\omega}{\phi}\left[\delta(\partial^\mu\phi)\partial_\mu\phi + \partial^\mu\phi\ \delta(\partial_\mu\phi)\right]\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x\ .\end{aligned} \tag{2.5}$$

E, agora, iremos manipular as duas últimas integrais da equação acima, que chamaremos de I_1 e I_2, respectivamente. Nesta etapa usaremos dois resultados do cálculo em variedades diferenciáveis [13], o primeiro consiste na integração por partes:

$$\int_M \langle \mathrm{grad} f, X\rangle\ \mathrm{d}V = \int_{\partial M} f\langle X, n\rangle\ \mathrm{d}S - \int_M f\mathrm{div}X\ \mathrm{d}V\ , \tag{2.6}$$

onde a função $\langle,\rangle : M \times M \to \mathbb{R}$ é o produto interno na variedade M; f e X são campos escalar e vetorial, respectivamente. A quantidade n é o vetor normal à superfície S. O segundo resultado é a fórmula de Green para duas funções quaisquer f e h

$$\int_M f\Delta h\ \mathrm{d}V = \int_{\partial M} f\frac{\partial h}{\partial n}\ \mathrm{d}S - \int_M \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} h\rangle\ \mathrm{d}V\ . \tag{2.7}$$

Para o problema em questão, divergentes e grandientes serão tomados pela derivada covariante. Também temos que, para uma função escalar qualquer, $\nabla_\mu f = \partial_\mu f$. Neste contexto, o operador Δ é na verdade o operador de Laplace-Beltrami $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu$.

Retornando a I_1, vamos utilizar a equação (C.4) para modificar o integrando tal que:

$$I_1 = \int_M (g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu})\phi \ \mathrm{d}V, \tag{2.8}$$

vamos agora utilizar a equação (2.6), assim:

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_{\partial M} [\phi\nabla_\alpha(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \phi\nabla_\nu\delta g^{\alpha\nu}]\mathrm{d}\Sigma_\alpha \\ & - \int_M [\nabla_\alpha\phi\nabla_\alpha(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}]\mathrm{d}V \end{aligned}$$

e a integral realizada na superfície é nula, pois estamos considerando $\delta g^{\mu\nu} = 0$ nessa região. Já na integral realizada sobre o volume utilizaremos a equação (2.7) e, anulando também o termo de superfície, resulta em:

$$I_1 = \int_M (g_{\mu\nu}\Box\phi - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi)\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}V \ . \tag{2.9}$$

Para a integral I_2 notemos que $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$ e ficamos com

$$\begin{aligned} I_2 &= \omega\int [\partial^\mu(\delta\phi)\partial_\mu(\ln\phi) + \partial_\nu\phi\partial_\mu(\ln\phi)\ \delta g^{\mu\nu} + \partial^\mu(\ln\phi)\partial_\mu(\delta\phi)]\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x \\ &= \omega\int \left[2\partial^\mu(\delta\phi)\partial_\mu(\ln\phi) + \frac{1}{\phi}\partial_\nu\phi\partial_\mu\phi\delta g^{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x \ , \end{aligned}$$

agora utilizaremos (2.7) no primeiro termo da direita para obter

$$I_2 = \omega\int \left[\frac{1}{\phi}\partial_\nu\phi\partial_\mu\phi\delta g^{\mu\nu} - 2\Box(\ln\phi)\ \delta\phi\right]\mathrm{d}V$$

que, finalmente, produz:

$$I_2 = \int \left[\left(\frac{2\omega}{\phi^2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{2\omega}{\phi}\Box\phi\right)\delta\phi + \frac{\omega}{\phi}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi\delta g^{\mu\nu}\right]\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x \ . \tag{2.10}$$

Somando-se as integrais I_1 e I_2 em (2.5), obtemos a equação:

$$
\begin{aligned}
0 = \int \Bigg[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \phi - \frac{8\pi}{c^4} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{2\phi} g_{\mu\nu} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi \\
- \frac{\omega}{\phi} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi + g_{\mu\nu} \Box \phi - \nabla_\nu \partial_\mu \phi \Bigg] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \, \mathrm{d}^4 x \\
+ \int \left(\frac{2\omega}{\phi} \Box \phi - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + R \right) \sqrt{-g} \delta \phi \, \mathrm{d}^4 x
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

da qual tiramos duas equações para satisfazer a nulidade. A primeira é a equação de onda para o campo escalar (termos correspondetes à $\delta\phi$), ou seja,

$$
\frac{2\omega}{\phi} \Box \phi - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + R = 0 \ . \tag{2.12}
$$

A segunda é a esperada equação de campo com as devidas modificações:

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = & \frac{8\pi}{\phi c^4} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\nu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi \right) \\
& + \frac{1}{\phi} \left(\nabla_\nu \partial_\mu \phi - g_{\mu\nu} \Box \phi \right) \ .
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

O lado esquerdo de (2.13) e o primeiro termo da direita são os termos já conhecidos da Relatividade Geral, note que $G = \phi^{-1}$. O segundo termo refere-se à contribuição do campo escalar para a energia-momentum, ou seja, é o tensor de energia e momentum relacionado ao campo ϕ. O terceiro termo é proveniente de quantidades formadas pela derivadas de segunda ordem da métrica, as quais foram eliminadas no processo de integração realizado anteriormente.

Durante a construção das equações (2.12) e (2.13) não alteramos a definição do tensor de energia-momentum e, portanto, esperamos que este ainda respeite a condição de divergência nula, $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$. Com esta condição, garantimos que não há criação ou destruição de matéria presente na teoria, estabelecendo que a matéria se conserve indenpendetemente da dinâmica. Em contraponto, a teoria de Jordan apresentava um novo conceito para o tensor energia-momentum [6] e a quantidade que respeitava divergência nula era $\nabla_\mu(\kappa^2 T^{\mu\nu}) = 0$, onde κ é o campo escalar. Jordan então argumentou que a conservação de matéria não era respeitada e, portanto, o conceito usual do tensor energia-momentum deveria ser alterado.

No que se segue, podemos simplificar a equação (2.12). Primeiramente contraimos (2.13) com a métrica $g^{\mu\nu}$:

$$
R = -\frac{8\pi}{\phi c^4} T + \frac{\omega}{\phi^2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{3}{\phi} \Box \phi \ ,
$$

onde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = T^{\mu}_{\mu}$, e da equação de onda obtemos:

$$R = -\frac{2\omega}{\phi}\Box\phi + \frac{\omega}{\phi^2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi \ .$$

Subtraindo-se as duas últimas equações temos o resultado:

$$\Box\phi = \frac{8\pi c^{-4}}{3+2\omega}T \ , \tag{2.14}$$

que é a nova equação de onda para ϕ.

O parâmetro ω não assume nenhum valor específico, o que nos leva a analisar seus possíveis limites. Uma importante análise a ser feita é buscar obter a Relatividade Geral da Teoria Brans-Dicke, e para tal, analisaremos o limite em que $\omega \to \infty$. Neste caso, pela equação (2.14) vemos claramente que:

$$\lim_{\omega\to\infty} \Box\phi = 0 \ .$$

Dessa forma, podemos aproximar $\Box\phi \approx O(\omega^{-1})$, é razoavel então tomar ϕ com a mesma ordem de grandeza [21],

$$\phi \approx G^{-1} + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \ . \tag{2.15}$$

Usando este resultado em (2.13) vamos obter:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \ ,$$

que, no limite $\omega \to \infty$, recupera a equeação (1.20) com $\Lambda = 0$. Espera-se que as equações fenomenológicas provenientes de Brans-Dicke transformem-se naquelas previstas pela Relatividade Geral. Comparações entre as predições das duas teorias foram analisadas [22, 23] e mostram discrepâncias quando se toma $\omega \to \infty$. É possível mostrar que estas anomalias estão relacionadas ao traço nulo, $T = 0$, do tensor energia-momentum, para isso, realiza-se uma transformação conforme [24]:

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \ ,$$

tomando $\Omega = \phi^{\alpha}$, tal que α é uma constante qualquer. Com isso as equações de Brans-Dicke são transformadas e obtem-se uma nova constante de acomplamento:

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega - 6\alpha(\alpha-1)}{(1-2\alpha)^2} \ .$$

Neste caso, há simetria em relação à transformação, de forma que a teoria não tem preferências por escalas espaciais ou de massa. Já na Relatividade Geral tal invariância não ocorre [14], o que mostra que não se pode obtê-la da Teoria de Brans-Dicke no limite $\omega \to \infty$ para $T = 0$. Para o caso em que $T \neq 0$, a simetria é quebrada e a análise fica dependente de qual fenômeno está sendo estudado, dessa maneira, uma forma assintótica no estilo (2.15) deve ser obtida e analisada para o problema.

3 Teoria f(R)

3.1 Breve Introdução

Até este ponto percebemos que alterações na Lagrangeana da Relatividade Geral possam ser bem frutíferas. Na busca para explicar novas fenomenologias, podemos querer incluir ainda mais termos na Langrangeana. Seguindo por essa lógica recaímos no questionamento sobre o quão geral e abrangente poderia ser uma dada modificação da Lagrangeana. Tal construção deveria então permitir a existência de novas soluções cosmológicas, principalmente ao se fazer uso da métrica mais empregada para estudos cosmológicos, a métrica de Robertson-Walker

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\kappa r^2} + r^2 \mathrm{d}\Omega \right] \ , \tag{3.1}$$

onde κ é uma constante e $a(t)$ o fator de escala. Vamos analisar as possíveis maneiras de adquirir a nova Lagrangeana, para isso separamo-la em dois termos de base, um referente à geometria espaço-temporal, o outro referente à matéria:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_m \ ,$$

de onde percebe-se diretamente que há duas possibilidades de generalizar L. A primeira consistiria em alterar L_m (dita alteração de primeira espécie). Dessa forma, a definição (1.19) seria modificada e teríamos um novo tensor $T_{\mu\nu}$. Mas notemos que é primordial respeitar a conservação de energia e matéria ($\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$) que limitam as possibilidades de construção[1]. A modificação de segunda espécie é a nossa segunda possibilidade de generalização, para tanto generalizaremos a parte geométrica de $\mathcal{L}$ de maneira a respeitar o princípio de covariância geral [21, 14]. Vamos observar que para respeitarmos o princípio de covariância, basta termos $\mathcal{L}$ como uma função difeomórfica[2] em relação à mudança de coordenadas.

Vamos então supor uma função genérica em termos do escalar de Ricci,

$$\mathcal{L} = f(R)\sqrt{-g} \ . \tag{3.2}$$

Dessa forma, garantimos o princípio de covariância geral pelo mesmo motivo da Lagrangeana de Einstein-Hilbert explicado no primeiro capítulo. Vamos observar que aqui iremos

[1] Não é estritamente necessário satisfazer tal condição, como na teoria de Jordan, no entanto estaremos evitando novas interpretações para o tensor energia-momentum, tornando-o mais intuitivo.

[2] Função bijetora e diferenciável que possui inversa, também diferenciável.

obter termos que vão além da segunda ordem de derivação da métrica, contrastando com as teorias trabalhadas anteriormente. Foi A. Buchdahl, em 1970, quem fez tal suposição no intuito de encontrar outras possibilidades de soluções cosmológicas para a métrica de Robertson-Walker. A teoria $f(R)$ é, na verdade, uma família de teorias, onde, para cada função f teremos um novo modelo para a gravitação. Contudo, todos estes modelos continuam a produzir teorias de campos tensoriais e em vias de provar a sua generalidade, vamos mostrar, ainda neste capítulo, que podemos retirar uma teoria escalar-tensorial da mesma.

3.2 Equações de Campo

Vamos agora fazer a modificação sugerida na seção anterior para obtermos a ação:

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int f(R)\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x\ . \tag{3.3}$$

Por hora, decidimos não incluir o termo $\mathcal{L}_m$ para não tornar os cálculos tão extensos. De todo modo, as equações serão generalizadas adiante seguindo o mesmo raciocínio dos capítulos anteriores. Faremos novamente uso do princípio variacional para gerar as equações de campo modificadas. Dessa forma:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa}\int \delta[f(R)\sqrt{-g}]\ \mathrm{d}^4x\ ,$$

e, então,

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa}\int \delta[\sqrt{-g}]f(R) + \delta[f(R)]\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x\ . \tag{3.4}$$

O primeiro termo do lado direito é dado por (A.4), já o segundo termo dentro da integral se torna

$$\delta[f(R)]\sqrt{-g} = f'(R)\sqrt{-g}\ \delta R\ ,$$

onde $f'(R)$ denota a derivada funcional em relação à $g^{\mu\nu}$. A variação de R é dada por (1.15) e assim:

$$\delta[f(R)]\sqrt{-g} = f'(R)\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu}\ \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\left(\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})\right)\right]. \tag{3.5}$$

Usando estes resultados, o princípio variacional fornece:

$$\begin{aligned}0 = &\frac{1}{2\kappa}\int\left(f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x \\ &+ \frac{1}{2\kappa}\int f'(R)g^{\mu\nu}\left(\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})\right)\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x\ .\end{aligned} \tag{3.6}$$

Podemos visualizar facilmente que a segunda integral é do mesmo tipo de (2.8), de forma que:

$$I_3 = \int_M (g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu})f'(R)\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x$$

o que nos leva a realizar o mesmo procedimento da seção 2.2, para obter:

$$I_3 = \int (g_{\mu\nu}\Box f'(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R))\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x\ , \tag{3.7}$$

e daí segue que:

$$0 = \frac{1}{2\kappa}\int\left(f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box f'(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R)\right)\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x. \tag{3.8}$$

A equação de campo no vácuo é:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box f'(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) = 0, \tag{3.9}$$

para acrescentarmos a interação com a matéria basta somar $\mathcal{L}_m$ na lagrangeana inicial e, depois de tomar a variação, usar a definição (1.19) para finalmente obter:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box f'(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}\ . \tag{3.10}$$

Para $f(R) = R$, a derivada funcional é $f'(R) = 1$ e a equação (3.10) se torna (1.20).

3.3 Equivalência entre $f(R)$ e teorias escalares-tensoriais

O objetivo agora é mostrar que a teoria $f(R)$ é equivalente à teoria de Brans-Dicke. Para tal, começaremos notando que uma Lagrangana equivalente a (3.2) pode ser dada por:

$$\mathcal{L} = [f(\chi) + f'(\chi)(R-\chi)]\sqrt{-g}\ , \tag{3.11}$$

onde χ é um novo campo escalar. Realizando uma variação em relação a χ, obtemos a condição:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= [f'(\chi)\delta\chi + f''(\chi)(R-\chi)\delta\chi - f'(\chi)\delta\chi]\sqrt{-g}\\ 0 &= f''(\chi)(R-\chi)\ ,\end{aligned}$$

que é satisfeita se $R = \chi$, recuperando (3.2). No caso em que $f''(\chi) = 0$, vamos obter que $f(\chi)$ é linear em χ e, portanto, se assemelha à Lagrangeana de Einstein-Hilbert do primeiro capítulo. Vamos então definir [9]:

$$\phi \equiv f'(\chi) \tag{3.12}$$

e inversível, que nos leva a supor um potencial dado pela transformada de Legendre de $f(\chi)$:

$$\Lambda(\phi) \equiv [\phi\chi(\phi) - f(\chi(\phi))]\ . \tag{3.13}$$

Substituindo as definições na Lagrangeana equivalente vamos obter:

$$\mathcal{L} = [\phi R - \Lambda(\phi)]\sqrt{-g}\ , \tag{3.14}$$

que é justamente a Lagrangeana de uma teoria escalar-tensorial com ω nulo. Podemos usar que $\chi = G = \phi^{-1}$ e o potencial Λ se torna:

$$\Lambda = 0\ , \tag{3.15}$$

o que recupera a teoria de Brans-Dicke, $\mathcal{L} = \phi R$, novamente com $\omega = 0$.

3.4 Termo de Gauss-Bonnet

Voltemos nossa atenção à função arbitrária $f(R)$. Poderíamos escolher qualquer função do escalar de Ricci e dela obter uma nova teoria para a interação gravitacional gerando as equações de campo a partir de (3.10). A grande liberdade de escolha da função não é suficientemente categórica para validar uma teoria fisicamente relevante, é preciso filtrar os bons candidatos a funções através de propriedades matemáticas e físicas.

As funções f tem como critério de seleção apenas o escalar de Ricci, portanto, qualquer ação construída a partir de f terá como variável dinâmica o campo métrico $g_{\mu\nu}$ e será função de suas derivadas. Na ação de Einstein-Hilbert vemos que $f(R) = R$, evidenciando que ela é função linear da derivada segunda da métrica, logo, em uma teoria de mais alta ordem (e.g., $f(R) \propto R^2, R^3$, etc) a ação dependerá de termos não-lineares nas derivadas da métrica. Vamos restringir nossa busca às ações que nos permitem construir equações de campos tensoriais de posto 2, apenas com termos lineares na métrica e em suas derivadas, em total analogia com a equação de Einstein (1.20).

Faremos uso do Teorema de Lovelock [9, 25][3], cujo resultado mostra que a única equação linear em segunda ordem, construída apenas com o campo métrico é a equação de Einstein. Com as considerações feitas pode-se construir um termo de segunda ordem de forma que:

$$\mathcal{L}_2 = (R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho})\sqrt{-g} \ . \tag{3.16}$$

Pelo Teorema de Gauss-Bonnet [27], a integral em toda variedade M gera apenas a característica de Euler:

$$\int \mathcal{L}_2 \ \mathrm{d}^4x = \chi(M) \ , \tag{3.17}$$

onde, $\chi \in \mathbb{R}$, é um invariante topológico de M. Fica claro então que, variando (3.17) em relação a $g^{\mu\nu}$, o termo de segunda ordem não contribui para as equações de campo. $\mathcal{L}_2$ dá origem à Teoria de Gauss-Bonnet para a gravitação [9], podemos ainda criar uma lagrangeana estendida em segunda ordem através de uma combinação linear:

$$\mathcal{L} = [\alpha + \beta R + \gamma(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho})]\sqrt{-g} \ . \tag{3.18}$$

em que α, β, γ são constantes.

Os termos adicionais de segunda ordem tornam a Relatividade Geral renormalizável no contexto da gravitação quântica [8, 28], onde as derivadas de mais alta ordem relacionadas a R^2 e $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ garantem estabilidade da teoria no regime de altas frequências. A Lagrangeana (3.18) está parcialmente correta em nossas condições, pois estamos considerando a variedade diferenciável com uma fronteira ∂M, então somos levaods a adicionar mais um termo a (3.18), de forma que:

$$\mathcal{L} = [\alpha + \beta R + \gamma(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho})]\sqrt{-g} + \lambda\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}R_{\alpha\beta\rho\lambda} \ . \tag{3.19}$$

A forma geral (3.19) pode ainda ser obtida através da teoria de Lovelock, que generaliza a Lagrangeana em uma gravitação D-dimensional [9, 29].

[3] Uma prova compacta do Teorema pode ser vista em [26].

4 Considerações finais

Este trabalho tem como objetivo apresentar algumas das teorias alternativas para a gravitação no intuito de evidenciar os motivos e causas que levam à proposição dessas novas teorias. Das estudadas neste trabalho, vimos que os princípais motivos para a sua formulação são os modelos cosmológicos, importantes para o entendimento e possível explicação da matéria escura e energia escura. Fica evidente a grande eficácia do método variacional e a importância da construção de uma Lagrangeana invariante e de como alterações (em relação a Relatividade Geral) podem modificar nossa visão dos modelos gravitacionais.

A teoria de Brans-Dicke traz a ideia de um campo escalar como variável dinâmica e abre uma nova classe de teorias conhecidas como escalares-tensoriais [9]. Sua origem ainda revela outras alternativas à gravitação em dimensões maiores que quatro, que são a teoria de Kaluza-Klein e Jordan, importantes na construção de conceitos como compactificação dimensional e unificação da gravitação com eletromagnetismo. Tais ideias são conceitos chave para a criação da Teoria de Yang-Mills.

Obtemos também uma outra frente alternativa para a gravitação ao analisar-se termos de maior ordem e não-lineares para derivadas da métrica, obtidos da função genérica $f(R)$. As teorias $f(R)$ trazem novos conceitos como uma possível renormalização da Relatividade Geral [8, 28] conveniente para modelar uma gravitação quântica. Fizemos uma menção breve à teoria de Lovelock, que traz um modelo gravitacional de dimensão genérica D e uma possível unificação entre ela e a teoria $f(R)$ pode ser vista em [29].

Uma abordagem dos problemas cosmológicos, matéria escura e energia escura, através destas teorias pode ser conferido em vários artigos, dentre eles destacamos [30, 31].

Referências

1 SCHWARZCHILD, K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin*, p. 189–196, Jan. 1916. Páginas: 11

2 ROBERTSON, H. P. Kinematics and world-structure. III. *The Astrophysical Journal*, v. 83, p. 257–271, May. 1936. Páginas: 11

3 OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 55, p. 374–381, Feb. 1939. Páginas: 11

4 BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, n. 3, p. 925–935, Nov. 1961. Páginas: 11

5 BUCHDAHL, H. A. Non-linear lagrangians and cosmological theory. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, n. 150, p. 1–8, Mai. 1970. Páginas: 11

6 GOENNER, H. Some remarks on the genesis of scalar-tensor theories. arXiv:1204.3455 [gr-qc], Apr. 2012. Páginas: 11, 19, 23

7 LICHTENEGGER, H.; MASHHOON, B. Mach's principle. arXiv:physics/0407078v2 [physics.hist-ph], 2008. Páginas: 11, 19

8 STELLE, K. S. Renormalization of higher derivative quantum gravity. *Phys. Rev.*, D16, p. 953–969, 1977. Páginas: 11, 31, 33

9 CLIFTON, T. et al. Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.*, arXiv:1106.2476 [astro-ph.CO], v. 513, p. 1–189, 2012. Páginas: 12, 30, 31, 33

10 RUBIN, V.; FORD, W. K. Rotation of Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *The Astrophysical Journal*, n. 159, p. 379–403, Feb. 1970. Páginas: 12

11 WU, X.-P. et al. A comparison of different cluster mass estimates: consistency or discrepancy ? *Mon. Not. R. astr. Soc.*, n. 3, p. 861–871, Dec. 1998. Páginas: 12

12 BERTONE, G.; HOOPER, D.; SILK, J. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Phys. Rept.*, v. 405, p. 279–390, 2005. Páginas: 12

13 LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. [S.l.]: Springer New York, 2012. Páginas: 13, 21

14 WALD, R. *General Relativity*. Chicago and London: The University of Chicago Press, 1984. Páginas: 13, 25, 27

15 MISNER, C. W.; S.THORNE, K.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. Páginas: 13, 14, 16

16 CHOQUET-BRUHAT, Y. *General Relativity and the Einstein Equations*. [S.l.]: Oxford University Press, 2009. Páginas: 14

17 HILBERT, D. Grundlagen der Physik. *Nachrichten von der Koeniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen, Math-physik. Klasse*, p. 395–407, Nov. 1915. Páginas: 15

18 PALATINI, A. Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di hamilton. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, v. 43, n. 1, p. 203–212, 1919. Páginas: 15

19 LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004. Páginas: 17

20 ALDROVANDI, J. P. R. *An introduction to General Relativity*. São Paulo: IFT, 2004. Páginas: 17

21 WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. New York: John Wiley and sons, Inc, 1972. Páginas: 20, 24, 27

22 MATSUDA, T.; NARIAI, H. Hydrodynamic calculations of spherical gravitational collapse in the scalar-tensor theory of gravity. *Progress of Theoretical Physics*, v. 49, n. 4, p. 1195–1204, 1973. Páginas: 24

23 ROMERO, C.; BARROS, A. Does the brans-dicke theory of gravity go over to general relativity when $\omega \to \infty$. *Physics Letters A*, v. 173, n. 3, p. 243 – 246, 1993. Páginas: 24

24 FARAONI, V. The $\omega \to \infty$ limit of brans-dicke theory. *Physics Letters A*, v. 245, n. 1, p. 26 – 30, 1998. Páginas: 24

25 LOVELOCK, D. The einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, v. 12, p. 498–501, 1971. Páginas: 31

26 NAVARRO, A.; NAVARRO, J. Lovelock's theorem revisited. *J. Geom. Phys.*, v. 61, p. 1950–1956, 2011. Páginas: 31

27 PRESSLEY, A. *Elementary Differential Geometry*. London: Springer London, 2010. 335–377 p. Páginas: 31

28 STELLE, K. S. Classical gravity with higher derivatives. *Gen. Rel. Grav.*, v. 9, p. 353–371, 1978. Páginas: 31, 33

29 BUENO, P. et al. f(lovelock) theories of gravity. *JHEP*, arXiv:1602.07310 [hep-th], v. 04, p. 028, 2016. Páginas: 31, 33

30 BOEHMER, C. G.; HARKO, T.; LOBO, F. S. N. Dark matter as a geometric effect in f(r) gravity. *Astropart. Phys.*, arXiv:0709.0046 [gr-qc], v. 29, p. 386–392, 2008. Páginas: 33

31 KIM, H. Brans-dicke theory as an unified model for dark matter - dark energy. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, arXiv:0408577 [astro-ph], v. 364, p. 813–822, 2005. Páginas: 33

Apêndices

APÊNDICE A – Variação da métrica

Primeiramente utilizaremos a ortogonalidade da métrica para mostrar a relação entre as variações dela e de sua inversa. Dessa maneira, teremos

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda}, \tag{A.1}$$

em seguida aplicamos a variação, então

$$\delta g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} + g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} = 0,$$

para inverter a relação, multilplicamos pela métrica $g^{\lambda\sigma}$ e utiliza-se a mesma relação de (A.1) para encontrar

$$\delta g^{\mu\sigma} = -g^{\lambda\sigma}g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda}. \tag{A.2}$$

O próximo passo é calcular a variação da densidade tensorial da métrica, para isso usaremos a expansão em cofatores de um determinante qualquer, ou seja,

$$g = A^{(\mu)\nu}g_{(\mu)\nu} \quad \Rightarrow \quad A^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g$$

onde o parênteses no índice μ indica que não há soma no mesmo. Vamos então fazer a variação de $\sqrt{-g}$ tal que

$$\delta\left[\sqrt{-g}\right] = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}A^{(\mu)\nu}\delta g_{(\mu)\nu}$$

e substituindo novamente o cofator $A^{\mu\nu}$ tem-se

$$\delta\left[\sqrt{-g}\right] = \frac{-g}{2\sqrt{-g}}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu},$$

portanto,

$$\delta\left[\sqrt{-g}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{A.3}$$

e, pela relação (A.2), obtemos

$$\delta\left[\sqrt{-g}\right] = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{A.4}$$

APÊNDICE B – Variação do Símbolo de Christoffel

Vamos utilizar a equação (1.3) para fazer a variação, assim teremos

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{\delta g^{\lambda\alpha}}{2}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \\ &+ \frac{g^{\lambda\alpha}}{2}[\partial_\mu(\delta g_{\alpha\nu}) + \partial_\nu(\delta g_{\alpha\mu}) - \partial_\alpha(\delta g_{\mu\nu})]\end{aligned}$$

podemos reescrever a expressão utilizando (A.2) no primeiro termo da equação acima

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -g^{\lambda\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\alpha} + \frac{g^{\lambda\alpha}}{2}[\partial_\mu(\delta g_{\alpha\nu}) + \partial_\nu(\delta g_{\alpha\mu}) - \partial_\alpha(\delta g_{\mu\nu})]. \tag{B.1}$$

Em seguida vamos utilizar o fato da conexão afim ser simétrica nos índices inferiores, o que nos leva a escrever

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}) \tag{B.2}$$

e adicionaremos a (B.1) os termos nulos

$$(\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu})\delta g_{\mu\sigma} \quad \text{e} \quad (\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu})\delta g_{\nu\sigma},$$

Rearrajando os termos (B.1) se torna

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\alpha}}{2}\Big[&(\partial_\nu\delta g_{\alpha\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\delta g_{\mu\sigma}) \\ &+ (\partial_\mu\delta g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\delta g_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}\delta g_{\nu\sigma}) \\ &- (\partial_\alpha\delta g_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha}\delta g_{\mu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}\delta g_{\nu\sigma})\Big]\end{aligned}$$

o que podemos identificar como

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\alpha}}{2}\left[\nabla_\nu(\delta g_{\alpha\mu}) + \nabla_\mu(\delta g_{\alpha\nu}) - \nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu})\right] \tag{B.3}$$

explicitando que a variação do Símbolo de Christoffel é um tensor de ordem 2.

APÊNDICE C – Teorema da Divergência

No espaço da Relatividade Geral, o teorema da divergência pode ser traduzido na seguinte relação

$$\int_M \nabla_\mu X^\mu \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x = \int_{\partial M} X^\mu \sqrt{-g}\ \mathrm{d}\Sigma_\mu, \tag{C.1}$$

a quantidade X^μ é um campo vetorial qualquer. Vamos agora considerar a seguinte integral

$$I = \int_M g^{\mu\nu} \left[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})\right] \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x, \tag{C.2}$$

pela equação (**??**) podemos comutar a métrica com a derivada covariante tal que

$$I = \int_M \left[\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})\right] \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x,$$

observe agora que as quantidades onde a derivada covariante atua são vetores, portanto, podemos utilizar o teorema da dirvegência. Obteremos então

$$I = \int_{\partial M} \left[g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\nu_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right] \sqrt{-g}\ \mathrm{d}\Sigma_\nu = 0, \tag{C.3}$$

já que nos limites da variedade queremos que $\delta g_{\mu\nu}$ seja nulo, então, pela equação (B.3) a variação dos Γ é nula.

Em alguns momentos não iremos trabalhar com o integrando da equação (C.2) e é preferível modificá-lo, chamaremo-lo de A e substituiremos a relação (B.3) nele, teremos

$$\begin{aligned} A = \frac{g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}}{2} & [\nabla_\lambda\nabla_\nu\delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\nu\nabla_\lambda\delta g_{\alpha\mu} + \nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g_{\alpha\nu} \\ & + \nabla_\nu\nabla_\alpha\delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\nu\nabla_\mu\delta g_{\alpha\lambda} - \nabla_\lambda\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu}], \end{aligned}$$

note que novamente comutamos a métrica com a derivada covariante. Agora podemos renomear índices mudos e observar: que o segundo e o quarto termo se anulam, e também que o penúltimo e último termo são iguais. Reescrevendo obteremos

$$A = \frac{g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha}}{2}(\nabla_\lambda\nabla_\nu\delta g_{\alpha\mu} + \nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g_{\alpha\nu} - 2\nabla_\lambda\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu})$$

e aqui os dois primeiros termos também são iguais frente à troca de índices, agora aplicamos o resultado (A.2) e vamos obter finalmente

$$g^{\mu\nu}\left[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})\right] = g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \tag{C.4}$$

onde usou-se a definição do operador de Laplace-Beltrami $\Box \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu$.