MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

PROJETO INVERSO EM CAVIDADES RADIANTES COM SUPERFÍCIES NÃO-CINZAS

por

Roger Schildt Hoffmann

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, agosto de 2008

PROJETO INVERSO EM CAVIDADES RADIANTES
COM SUPERFÍCIES NÃO-CINZAS

por

Roger Schildt Hoffmann
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Francis H. R. França

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Adriane Prisco Petry

Prof. Dr. Antônio Silva Neto

Prof. Dr. Paulo Smith Schneider

Prof. Dr. Flávio José Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, agosto de 2008.

RESUMO

Esta dissertação de mestrado tem por objetivo apresentar uma metodologia de solução inversa para cavidades compostas por superfícies não-cinzas, com transferência de calor por radiação. As superfícies da cavidade têm emissividades divididas em bandas onde são consideradas constantes. Na superfície superior, estão localizados os aquecedores, enquanto na superfície inferior, a superfície de projeto, é imposta uma condição prescrita de aquecimento, com temperatura e fluxo de calor preestabelecido. As demais superfícies são paredes na temperatura ambiente. O aquecedor não tem nenhuma condição de contorno, devendo ser determinada a distribuição do fluxo de calor (e, conseqüentemente de temperatura) que atenda as condições impostas na superfície de projeto. Essa formulação em problemas de transferência de calor por radiação é descrita por uma integral de Fredholm de primeira espécie, cuja discretização resulta em um sistema de equações mal-condicionado que deve ser resolvida por métodos de regularização. Neste trabalho, adotou-se o método TSVD (truncated singular value decomposition). Um aspecto deste problema é que apesar de o fluxo radiante total na superfície de projeto ser conhecido, sua distribuição em cada banda é desconhecida. Para resolver isto é proposto um cálculo iterativo onde a distribuição do fluxo de calor é estimada, e a correção é baseada na determinação do poder emissivo total para cada elemento aquecedor, a partir dos poderes emissivos obtidos em cada banda.

ABSTRACT

"INVERSE DESIGN OF RADIATIVE HEAT TRANSFER ENCLOSURES WITH NON-GRAY SURFACES"

This dissertation has the objective of presenting an inverse method for the solution of non-gray enclosures, with radiative heat transfer. The surfaces of the enclosure have the hemispherical spectral emissitivities divided in bands, where the emissivities can be considered constant. For the test case, the heaters are located on the top of the enclosure, while the design surface, where both the temperature and the heat flux are imposed, is located on the bottom of the enclosure. The remaining surfaces represent the wall of the enclosure, having a prescribed temperature. The heaters have no boundary condition, and both temperature and heat flux must be determined. This specific formulation in radiative heat transfer problems is described by a Fredholm integral of first kind, which can be solved by a regularization method as TSVD among others. One aspect of this problem is that, although the total heat flux of the design surface is known, the partial heat fluxes of the spectral bands are not. An iterative process is proposed where the initial heat flux distribution is guessed, and the correction is based on the determination of the total emissive power for each heating element, from the partial emissive powers.

ÍNDICE

1. Introdução 1
1.1. Motivação 1
1.2. Revisão bibliográfica 2
1.3. Objetivos do trabalho 3
1.4. Organização do texto 4
2. Problema Direto 5
2.1. Radiação Térmica entre Superfícies Negras, Cinzas e Não-Cinzas 5
2.2. O Fator de Forma 10
2.3. Método da Radiação Global 11
3. Formulação Inversa 14
3.1. Discretização dos Termos Radiantes 14
3.2. Regularização do Sistema de Equações 16
3.2.1. Equação Integral de Fredholm de Primeira Espécie 17
3.2.2. A Condição de Picard 18
3.2.3. Regularização 19
3.3. Discretização do Problema Mal-Condicionado 20
3.3.1. A Decomposição em Valores Singulares 20
3.4. Métodos de Regularização 22
3.4.1. Método da Decomposição por Valores Singulares Truncada (TSVD) 23
3.4.2. Outros Métodos de Regularização 24
4. Estratégias de Solução 27
4.1. Definição do problema 27
4.2. Método Direto 28
4.2.1. Solução Direta de Cavidades com Superfícies Cinzas 28
4.2.2. Solução Direta de Cavidades com Superfícies Não-Cinzas em Bandas Espectrais 30
4.3. Método Inverso 32
4.3.1. Solução Inversa de Cavidades com Superfícies Cinzas 32
4.3.2. Solução Inversa de Cavidades com Superfícies Não-Cinzas 39
5. Resultados 49
5.1. Caso Base (Caso 1) 50
5.1.1. Independência de Malha 51
5.1.2. Convergência 52
5.1.3. Resultados 54
5.2. Estudo da Geometria (Caso 2) 57
5.2.1. Resultados Caso 2.1 (H/L = 0,1) 58
5.2.2. Resultados Caso 2.2 (H/L = 0,3) 60
5.2.3. Resultados Caso 2.3 (H/L = 0,4) 62
5.2.4. Discussão dos resultados do Caso 2 63
5.3. Estudo da Regularização (Caso 3) 65
5.3.1. Resultados do Caso 3.1 ($p = 1$) 66
5.3.2. Resultados do Caso 3.2 ($p = 2$) 68
5.3.3. Resultados do Caso 3.3 ($p = 3$) 70
5.3.4. Resultados do Caso 3.4 ($p = 5$) 72
5.3.5. Resultados do Caso 3.5 ($p = 6$) 74
5.3.6. Discussão dos resultados do Caso 3 75
5.4. Variante das Emissividades (Caso 4) 77
5.5. Geometria do aquecedor 81
5.5.1. Aquecedores transversais (Caso 5.1) 81
5.5.2. Aquecedores Longitudinais (Caso 5.2) 84
5.5.3. Discussão dos Resultados do Caso 5 86

6. Conclusões 87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 89
APÊNDICE 92

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área	m^2
A	Matriz formada pelos fatores de forma	
b	Vetor	
B	Balanço de energia	
C_1	Constante da distribuição da energia espectral de Planck	$W \cdot \mu m^4/m^2 \cdot sr$
C_2	Constante da distribuição da energia espectral de Planck	$\mu m \cdot K$
C	Fator de correção da banda de energia	
e	Poder emissivo total	W/m^2
e_λ	Poder emissivo espectral	$W/m^2 \cdot \mu m$
erro	Erro calculado em um elemento	
f	função	
F	Fator de forma	
$F_{\Delta\lambda_l}$	Fração de energia na banda l	
g	função	
H	Altura	
i_λ	Intensidade de radiação espectral	$W/m^2 \cdot \mu m \cdot sr$
$i_{\lambda,\theta}$	Intensidade de radiação direcional espectral	$W/m^2 \cdot \mu m \cdot sr$
j	Superfícies da cavidade	
jd	Superfície de projeto	
jh	Superfície de aquecedor	
jw	Superfície de parede	
JD	Número total de superfícies de projeto	
JH	Número total de superfícies de aquecedor	
JW	Número total de superfícies de parede	
K	Kernel	
l	Número de bandas	
L	Comprimento	
N	Número de superfícies	

p	Parâmetro de regularização	
q	Fluxo de calor	W/m^2
Q_λ	Energia	W
Q	Fluxo adimensional	
r	Vetor resíduo	
S	Distância	m
s	Variável	
t	Variável	
T	Temperatura	K
T^*	Temperatura adimensional	
u	Função singular de *K*	
U	Matriz ortogonal	
v	Função singular de *K*	
V	Matriz ortogonal	
W	Largura	
x	Vetor solução	
x	Coordenada x	
y	Coordenada y	
z	Coordenada z	

Símbolos Gregos

α	Absortividade	
ε	Emissividade	
Σ	Matriz formada pelos valores singulares	
φ	Ângulo azimutal	rad
λ	Comprimento de onda	μm
Δλ	Banda	
μ	Valores singulares de *K*	
ρ	Refletividade	
σ	Constante de Stefan-Boltzmann	W/m^2K^4
θ	Ângulo polar	rad
ω	Ângulo sólido	sr

SUBÍNDICES

b	Relativo a corpo negro
i	Quantidade incidente em uma superfície
jd	Referente às superfícies de projeto
jh	Referente às superfícies de aquecedor
jw	Referente às superfícies de parede
k	Contador
l	Número da banda considerada
o	Quantidade que deixa uma superfície
r	Quantidade líquida em uma superfície
ref	Grandeza de referência

SUPERÍNDICES

*	Indicador de temperatura adimensional
-	Média
imposto	Valor imposto na condição de contorno
T	Matriz transposta

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - Lei do Cosseno de Lambert para Emissão Direcional..... 6
Figura 2.2 - Intensidade de Radiação do Elemento de área *dA* através do ângulo sólido $d\omega$. 7
Figura 2.3 – Balanço de energia em um elemento de área. 8
Figura 2.4 - Troca de energia entre superfícies..... 10
Figura 3.1 - Discretização das Superfícies do Forno para a radiação térmica..... 14
Figura 4.1 - Diagrama da cavidade radiante. 27
Figura 4.2 – Discretização da superfície inferior e das duas superfícies laterais da cavidade. 27
Figura 4.3 - Balanço de calor na superfície de projeto..... 33
Figura 4.4 - Balanço de calor na superfície de projeto..... 39
Figura 5.1 - Emissividades espectrais das superfícies..... 50
Figura 5.2 - Posição dos elementos na cavidade levando em conta simetria 51
Figura 5.3 – Fluxo líquido de calor adimensional na superfície de projeto obtido para cada refinamento de malha. 52
Figura 5.4 – Convergência das parcelas da distribuição de energia no Caso 1. 53
Figura 5.5 – Erro em cada iteração 53
Figura 5.6 - (a) Fluxo líquido total do aquecedor; (b) Fluxo líquido de calor do aquecedor, banda 1. 54
Figura 5.7 - Fluxos líquidos de calor do aquecedor (a) banda 2; (b) banda 3. 54
Figura 5.8 - Temperatura adimensional do aquecedor. 54
Figura 5.9 - Fluxo líquido total de calor da superfície de projeto. 55
Figura 5.10 - Fluxos líquidos de calor na superfície de projeto da banda 1 55
Figura 5.11 - Fluxos líquidos de calor na superfície de projeto (a) banda 2; (b) banda 3. 55
Figura 5.12 - Erro do fluxo líquido total de calor. 56
Figura 5.13 – (a) Fluxo total de calor na superfície aquecedora. 58
Figura 5.14 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.... 58
Figura 5.15 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora..... 59
Figura 5.16 –(a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto..... 59
Figura 5.17 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora..... 60
Figura 5.18 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.... 60
Figura 5.19 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora..... 61
Figura 5.20 –(a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto..... 61
Figura 5.21 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora..... 62
Figura 5.22 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.... 62
Figura 5.23 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora..... 63
Figura 5.24 – (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto..... 63
Figura 5.25 - Distribuição de energia para as diferentes alturas..... 64
Figura 5.26 - Erro médio da superfície de projeto. 64
Figura 5.27 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora..... 66
Figura 5.28 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.... 66
Figura 5.29 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora..... 67
Figura 5.30 - (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto. 67
Figura 5.31 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora..... 68
Figura 5.32 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.... 68
Figura 5.33 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora..... 69
Figura 5.34 - (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto. 69
Figura 5.35 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora..... 70
Figura 5.36 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.... 70
Figura 5.37 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora..... 71
Figura 5.38 - (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto. 71
Figura 5.39 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora..... 72

Figura 5.40 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.... 72
Figura 5.41 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora..... 73
Figura 5.42 - (a) Fluxo total na superfície de projeto (b) Erro da superfície de projeto. 73
Figura 5.43 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora; (b) Fluxo total na superfície de projeto. 74
Figura 5.44 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.... 74
Figura 5.45 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora..... 75
Figura 5.46– (a) Fluxo total na superfície de projeto (b) Erro na superfície de projeto..... 75
Figura 5.47 - Distribuição das bandas de energia para diferentes valores de regularização 76
Figura 5.48 - Erro médio nas superfícies de projeto para diferentes valores de regularização. ... 76
Figura 5.49 - Emissividades das superfícies da cavidade no Caso 4. 77
Figura 5.50 - (a) Fluxo total de calor na superfície aquecedora; (b) Fluxo total na superfície de projeto. 77
Figura 5.51 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2. 78
Figura 5.52 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 3; (b) banda 4. 78
Figura 5.53 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 4; (b) banda 5. 78
Figura 5.54 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora..... 79
Figura 5.55 - (a) Fluxo total na superfície de projeto (b) Erro na superfície de projeto. 79
Figura 5.56 - Distribuição das bandas de energia no Caso 4. 80
Figura 5.57– Distribuição dos aquecedores do Caso 5..... 81
Figura 5.58 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora. 82
Figura 5.59 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.... 82
Figura 5.60 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora..... 83
Figura 5.61 - (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto. 83
Figura 5.62 - Distribuição dos aquecedores do Caso 5.2 84
Figura 5.63 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora. 84
Figura 5.64 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.... 85
Figura 5.65 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora..... 85
Figura 5.66 – (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro da superfície de projeto..... 86

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 5.1 – Relação dos casos estudados. 49
Tabela 5.2 – Estudo da independência de malha 51
Tabela 5.3 – Valores obtidos no refinamento de malha 52
Tabela 5.4 – Valores de convergência das frações de energia. 53
Tabela 5.5 – Valores do fluxo de calor total dos aquecedores. 83
Tabela 5.6 - Valores do fluxo de calor total dos aquecedores 86

1. INTRODUÇÃO

1.1. MOTIVAÇÃO

Vários processamentos térmicos de materiais, incluindo, por exemplo, pastilhas de silício nas indústrias eletrônicas e metais na metalurgia, exigem um processo controlado de aquecimento, no qual não apenas a temperatura do material deve se elevar uniformemente, mas também seguindo uma curva de aquecimento prescrita. Resulta de uma análise de 1ª Lei que, para que essas condições sejam atendidas, o fluxo de calor no material também se torna especificado. Temos, assim, um problema em que duas condições são impostas no material submetido ao processamento térmico: temperatura e fluxo de calor.

O projeto térmico do sistema consiste em estabelecer as condições do sistema (por exemplo, características geométricas, posições e taxas de calor nos aquecedores etc.) para que essas duas condições sejam atendidas. Duas metodologias podem ser utilizadas para a solução desse tipo de projeto: os métodos direto e inverso.

O método direto é a abordagem tradicional, onde se estabelece uma condição de contorno para cada fronteira do domínio do problema, seja temperatura ou fluxo de calor. Para o tipo de problema descrito acima, é necessário prescrever a posição e fluxo de calor (ou temperaturas) dos aquecedores. A partir daí, simula-se o problema direto para verificar se o fluxo de calor na superfície de projeto corresponde ao exigido para atender à curva de elevação da temperatura do material. Se a condição desejada não foi atingida, é feita uma nova tentativa, repetindo-se o processo até encontrar uma resposta satisfatória. Esse tipo de abordagem tipicamente exige um grande número de tentativas, pois não é uma tarefa simples aperfeiçoar uma nova proposição a partir da tentativa anterior. Normalmente, o resultado obtido provém da seleção da melhor solução dentro daquelas testadas, o que ainda pode ser pouco satisfatória em face do atendimento das condições prescritas na superfície de projeto.

No projeto inverso, permite-se a imposição de duas condições de contorno na superfície de projeto, o fluxo de calor e a temperatura desejada, enquanto não se impõe nenhuma condição de contorno nas fontes aquecedoras. De fato, o fluxo de calor e a temperatura dos aquecedores são determinados a partir das duas condições de contorno impostas na superfície de projeto. Para problemas que envolvem radiação térmica, essa formulação é descrita por uma variação da equação de Fredholm de primeira espécie, que tipicamente resulta em um problema mal-condicionado. Esse tipo de problema apenas pode ser resolvido satisfatoriamente por métodos de regularização (Hansen, 1998).

Muitos avanços ocorreram no estudo desta metodologia conforme será discutido na Secção de Revisão Bibliográfica. Porém, ainda restam áreas não exploradas na metodologia inversa. Por exemplo, todos os trabalhos apresentados na literatura consideram as superfícies da cavidade como sendo independentes do comprimento de onda, ou seja, superfícies cinza.

Porém sabe-se que o modelo de superfície cinza pode não ser satisfatório em uma variedade de situações; uma abordagem mais realística exige tratar as superfícies como tendo as emissividades dependentes do comprimento de onda. Uma forma de trabalhar o problema é identificar regiões (ou bandas) no espectro onde a emissividade pode ser aproximada por um valor constante. No problema inverso, como o fluxo de calor e a temperatura nos aquecedores são desconhecidos, surge a questão de como determinar a distribuição de calor nas bandas. A principal contribuição deste trabalho consiste na extensão de projetos inversos de sistemas térmicos para considerar a dependência espectral das propriedades radiantes das superfícies. Como será apresentado neste trabalho, esse problema inverso, além de mal-condicionado, é não-linear, sendo resolvido por um processo de cálculo iterativo combinado à regularização do sistema de equações.

1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Desde os primeiros trabalhos de projetos inversos em meados dos anos de 1990, a literatura apresenta um conjunto considerável de trabalhos envolvendo o projeto inverso de cavidades radiantes. Uma revisão dos métodos inversos é feita por França *et. al.* (2002), que descreve vários métodos usados para regularização, como TSVD, MTSVD, Tikhonov, e gradientes conjugados, fazendo comparativos entre estes métodos. Mais recentemente, França e Howell (2005) apresentaram a solução de um problema transiente utilizando o método TSVD para encontrar o fluxo de calor dos aquecedores em uma cavidade radiante com superfícies cinzas. A análise inversa conduziu a resultados com menos de 1% de erro. Em Mossi *et. al.*(2008), é considerado o projeto inverso de sistemas térmicos onde a transferência de calor combinava radiação térmica e convecção turbulenta. O problema foi resolvido por um processo de cálculo iterativo combinado à regularização matricial pelo método TSVD. Também pode ser citado Rukolaine (2006) que resolveu o problema inverso de transferência de calor por radiação, utilizando a regularização pelo método Tikhonov, iterativo (Alifanov *et. al.*, 1995, Hanke, 1995) e paramétrico (Goncharsky *et. al.*, 1991, Beck *et . al.*, 1995).

Os trabalhos acima se basearam na formulação explícita do problema inverso, ou seja, as condições nos aquecedores (por exemplo, as temperaturas) aparecem explicitamente como incógnitas a serem resolvidas pelo sistema matricial. Outra abordagem possível é a implícita, em que o problema inverso é formulado como um problema de otimização. Neste caso, o problema

direto é resolvido um número de vezes até se obter a solução mais satisfatória para o problema. Porém, ao contrário do método de tentativa da abordagem convencional, empregam-se técnicas de buscas determinísticas (por exemplo, gradientes conjugados, método de Levenberg-Marquardt etc.) ou estocásticas (redes neurais, métodos evolutivos etc.). Um exemplo de aplicação de método de otimização estocástica foi apresentado no trabalho de Mossi et al. (2007), que considerou o projeto inverso de iluminação, um problema semelhante ao de transferência de calor radiante. O método empregado foi o algoritmo de otimização extrema (GEO), proposto em Sousa (2003).

Levando em conta meio participante, temos Kim *et. al.* (2007) resolveu o problema inverso para um problema de radiação e condução em um meio cilíndrico bidimensional concêntrico. Utilizou o método dos volumes finitos para resolver a conservação de energia, e o método de Leverberg-Marquardt foi usado para resolver as equações do problema inverso. Kim *et. al.*(2003) também resolvou o problema inverso de radiação térmica em uma cavidade com meio participante para estimar as emissividades em uma cavidade bidimensional, com um algoritmo genético.

Apesar do considerável progresso em projetos inversos desde a década passada, problemas que tratem de superfícies não-cinzas foram pouco abordados na literatura. Pode ser citado Seewald *et. al.* (2006), que tratou de um problema inverso em uma cavidade para um problema de iluminação. O problema consistia em encontrar o fluxo luminoso nos elementos de iluminação no topo de uma cavidade, para satisfazer à condição de iluminação uniforme na superfície inferior. As superfícies eram difusas, mas suas propriedades espectrais dependiam do comprimento de onda na região visível do espectro. Novamente, a regularização das equações foi tratada pelo método TSVD.

1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO

Esta dissertação tem por objetivo propor uma metodologia para resolver problemas inversos de transferência de calor por radiação térmica em cavidades formadas por superfícies não-cinzas, onde as emissividades das superfícies dependem do comprimento de onda. O tratamento consiste em dividir o espectro em bandas, regiões onde as propriedades espectrais podem ser consideradas constantes. Embora geralmente se considere um número pequeno de bandas, a metodologia pode, em princípio, ser estendida para considerar um número tão elevado de bandas quanto necessário.

Deseja-se determinar a potência dos aquecedores para propiciarem uma uniformidade de fluxo de calor e temperatura nas superfícies de tratamento do material, e a distribuição de energia nas bandas consideradas. Como será apresentado, a metodologia requer um procedimento de

cálculo iterativo, pois se conhece o total da energia radiante, mas não como ela se distribui nas bandas do espectro. O balanço de energia radiante em cada banda, em sua forma discretizada, conduz a um sistema de equações mal-condicionado, que é regularizado pelo método TSVD.

Espera-se dessa forma estender o conhecimento do método inverso aplicado ao estudo da transferência de calor por radiação térmica e a sua aplicação.

1.4. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta dissertação divide-se em seis capítulos.

No Capítulo 2 são apresentados os fundamentos básicos para o desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 3 são apresentados os fundamentos dos problemas inversos em cavidades com transferência de calor por radiação. Também é apresentada a metodologia de regularização dos problemas mal-condicionados para possibilitar sua solução.

O Capítulo 4 apresenta a definição física de cavidade radiante. Também são expostas as metodologias de solução direta para cavidades com superfícies cinza e não-cinza, e as metodologias inversas para superfícies cinza e não-cinza. Neste capítulo, realiza-se uma revisão das metodologias existentes, para permitir o entendimento necessário ao desenvolvimento da metodologia inversa para superfícies não-cinzas aplicada a problemas de transferência de calor por radiação térmica.

No Capítulo 5 são discutidas as condições de contorno impostas ao problema, e também o estudo de independência de malha. Também são apresentados os resultados, incluindo discussões e comparações entre os resultados.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e propostas de trabalhos futuros.

2. PROBLEMA DIRETO

Este capítulo traz uma revisão das deduções matemáticas para equacionamento do problema de transferência de calor por radiação térmica. São discutidos os conceitos de corpo negro, superfícies cinzas e não-cinzas, bem como a radiação entre superfícies, especialmente de cavidades, onde através do conceito de fator de forma é detalhada a troca radiante de calor entre as mesmas.

2.1. RADIAÇÃO TÉRMICA ENTRE SUPERFÍCIES NEGRAS, CINZAS E NÃO-CINZAS

O corpo negro é definido como uma superfície ideal que apresenta o seguinte comportamento:

1. Absorve toda a energia radiante, independentemente do comprimento de onda;
2. Para uma dada temperatura, a energia radiante emitida é máxima para cada comprimento de onda;
3. A radiação do corpo negro depende apenas da temperatura e do comprimento de onda;

Um estudo feito por Planck em 1901 utilizou exclusivamente relações termodinâmicas para deduzir a equação que descreve o poder emissivo do corpo negro a uma dada temperatura e a um dado comprimento de onda. Conhecida como distribuição de Planck do poder emissivo hemisférico espectral do corpo negro, apresenta a seguinte forma:

$$e_{\lambda,b}(\lambda,T) = \frac{2\pi C_1}{\lambda^5 e^{\left(\frac{C_2}{\pi T}\right)} - 1} \tag{2.1}$$

em W/m^2.μm, onde C_1 e C_2 são respectivamente 0,59x10^8 W. μm ^{4}/m^2 .sr e 14387,75 μm .K. Superfícies negras obedecem à lei de emissão direcional de Lambert, por isso são denominadas superfícies difusas. Segundo a lei do cosseno de Lambert, em superfícies difusas a emissão segue uma distribuição cossenoidal relativa ao ângulo θ, sendo máxima na direção normal à superfície e nula na direção paralela à mesma, como pode ser visto na Figura 2.1.

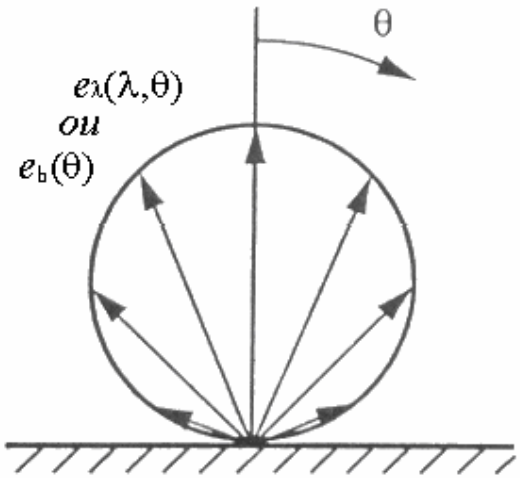


Figura 2.1 - Lei do Cosseno de Lambert para Emissão Direcional.

Seja uma superfície difusa de área infinitesimal *dA* e centrada na origem do plano cartesiano *xy,* que emite radiação em um intervalo de comprimento de onda $d\lambda$ centrado em λ através de um ângulo sólido $d\omega$, conforme ilustra a Figura 2.2. A intensidade de radiação (*i*) que cruza a superfície de controle dA_N é definida como:

$$i_{\lambda,\theta} = \frac{d^3 Q_\lambda(\lambda,\theta,\varphi,T)}{dA\cos\theta \cdot d\lambda \cdot d\omega} \tag{2.2}$$

Por ser assim definida, a intensidade de radiação do corpo negro não depende da direção de emissão, isto é:

$$i_{\lambda,\theta}(\lambda,\theta,\varphi,T) = i_\lambda(\lambda,T) \tag{2.3}$$

Além disso, em meios não participantes, a intensidade de radiação mantém-se constante.

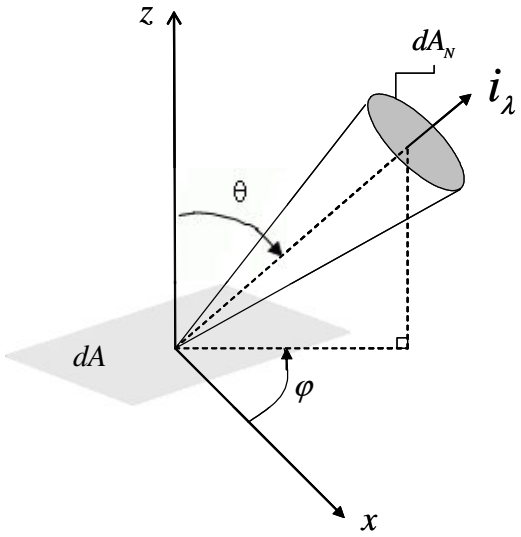


Figura 2.2 - Intensidade de Radiação do Elemento de área *dA* através do ângulo sólido $d\omega$.

Para superfícies difusas, como o corpo negro, é possível encontrar uma relação simples entre o poder emissivo e a intensidade de radiação, isto é, comparar uma quantidade emitida em todo o hemisfério, com uma quantidade emitida em uma única direção através de $d\omega$, sendo o poder emissivo definido como a totalidade da radiação emitida por uma superfície, temos que:

$$e_\lambda = \frac{d^2 Q_\lambda}{dA \cdot d\lambda} \tag{2.4}$$

Combinando as equações. (2.2) e (2.4) chega-se a:

$$d^2 Q_\lambda = \int_\theta d^3 Q_\lambda \tag{2.5}$$

isto é,

$$e_\lambda = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} i_\lambda \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\theta d\varphi d\theta \tag{2.6}$$

Como para superfícies difusas i_λ não depende da direção, conclui-se que:

$$e_\lambda = \pi i_\lambda \tag{2.7}$$

Uma vez que o comportamento do corpo negro é muito bem definido através das relações apresentadas acima, é possível modelar as demais superfícies com a utilização de parâmetros comparativos, que são exatamente as propriedades físicas da superfície. O poder emissivo de uma superfície qualquer é relacionado com o poder emissivo do corpo negro através de sua emissividade. Portanto, a emissividade direcional espectral de uma superfície é definida como:

$$\varepsilon_{\lambda,\theta} = \frac{i_\lambda(\lambda,\theta,T)}{i_{\lambda,b}(\lambda,T)} \tag{2.8}$$

Para superfícies perfeitamente difusas, as propriedades físicas da mesma não dependem da direção considerada. Logo, utilizando-se da equação (2.7) a emissividade fica:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{e_\lambda(\lambda,T)}{e_{\lambda,b}(\lambda,T)} \tag{2.9}$$

onde ε_λ é a emissividade hemisférica espectral. Conseqüentemente, o poder emissivo total hemisférico da superfície é:

$$e = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda e_{\lambda,b} d\lambda \tag{2.10}$$

A energia incidente em uma superfície é denominada irradiação e, dependendo das propriedades físicas da superfície, a irradiação pode ser parcialmente absorvida, refletida ou ainda transmitida por refração, como ilustra a figura a seguir.

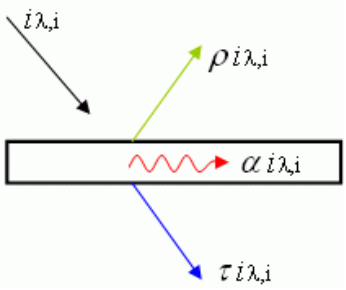


Figura 2.3 – Balanço de energia em um elemento de área.

As propriedades que definem este comportamento são, respectivamente, a absortividade $\alpha_{\lambda,\theta}$, a refletividade $\rho_{\lambda,\theta}$ e a transmitividade $\tau_{\lambda,\theta}$. Um balanço de energia realizado na Figura 2.3, conduz a:

$$\alpha_{\lambda,\theta} + \rho_{\lambda,\theta} + \tau_{\lambda,\theta} = 1 \tag{2.11}$$

uma hipótese comumente adotada é de que as superfícies sejam opacas, de modo que a energia não seja transmitida através da mesma, dessa forma a equação (2.11) fica:

$$\alpha_{\lambda,\theta} + \rho_{\lambda,\theta} = 1 \tag{2.12}$$

A absortividade, sendo a parcela de radiação incidente absorvida por uma superfície qualquer em relação ao corpo negro, que absorve a energia por completo, é definida como:

$$\alpha_{\lambda,\theta} = \frac{i_{\lambda,i,a}\left(\lambda,\theta,\varphi,T\right)}{i_{\lambda,i}\left(\lambda,T\right)} \tag{2.13}$$

Para superfícies irradiadas de forma difusa, a absortividade hemisférica espectral é:

$$\alpha_{\lambda} = \alpha_{\lambda,\theta} = \frac{i_{\lambda,i,a}\left(\lambda,T\right)}{i_{\lambda,i}\left(\lambda,T\right)} \tag{2.14}$$

Algumas superfícies espectrais são ditas cinzas quando a emissividade e a absortividade hemisféricas espectrais não dependem do comprimento de onda, ou seja, as superfícies cinzas emitem e absorvem parcelas fixas relativas ao corpo negro ao longo de todo espectro eletromagnético. A hipótese de superfície cinza é geralmente feita com a hipótese de superfície difusa, a qual será discutida na próxima seção, chegando-se com isso na seguinte forma funcional das propriedades:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda,\theta}\left(\lambda,\theta,\varphi,T\right) &= \varepsilon\left(T\right) \\ \alpha_{\lambda,\theta}\left(\lambda,\theta,\varphi,T\right) &= \alpha\left(T\right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

apesar disto, tais propriedades podem ainda apresentar dependência com relação à temperatura da superfície.

Gustav Robert Kirchhoff mostrou que para qualquer superfície, a seguinte relação entre emissividade e absortividade é válida:

$$\varepsilon_{\lambda,\theta} = \alpha_{\lambda,\theta} \tag{2.16}$$

Esta dependência é denominada lei de Kirchhoff, resultante de uma análise da segunda lei da termodinâmica. A lei de Kirchhoff para superfícies cinzas e difusas se simplifica em:

$$\varepsilon = \alpha \tag{2.17}$$

2.2. O FATOR DE FORMA

Fatores de forma são um importante componente para analisar a troca de calor radiante, e são usados especialmente para facilitar o cálculo desta energia.

Quando calculamos a troca de calor radiante entre superfícies, relações geométricas são necessárias para saber a fração de energia transferida entre as superfícies. Então vamos considerar o fator de forma para radiação com intensidade uniforme saindo da superfície difusa A_1 e chegando em A_2 como pode ser visto na Figura 2.4.

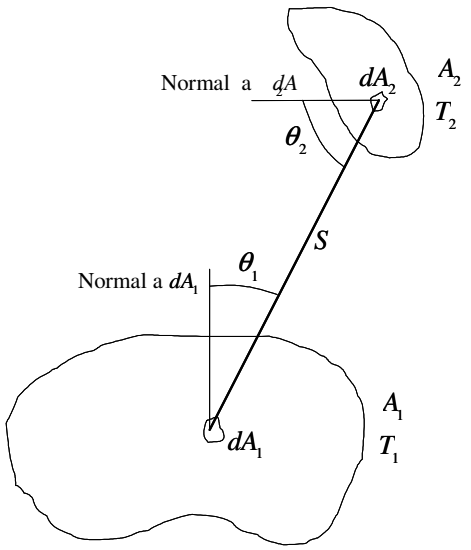


Figura 2.4 - Troca de energia entre superfícies.

A integral sobre A_1 e A_2 nos dá a energia que deixa A_1 e chega em A_2. O fator de forma é então dado pela seguinte relação:

$$F_{1-2} = \frac{1}{A_1}\int_{A_1}\int_{A_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\pi S^2}dA_2 dA_1 \tag{2.18}$$

Similarmente à equação (2.18) temos que o fator de forma de A_2 para A_1 é dado por:

$$F_{2-1} = \frac{1}{A_2}\int_{A_1}\int_{A_2}\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\pi S^2}dA_2 dA_1 \tag{2.19}$$

Então, das equações (2.18) e (2.19) temos a seguinte relação:

$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} \tag{2.20}$$

Se tivermos uma cavidade com N superfícies, toda energia que deixa uma superfície vai necessariamente para as outras, então temos a seguinte relação para uma superfície qualquer *k*:

$$F_{k-1} + F_{k-2} + F_{k-3} + \cdots + F_{k-k} + \cdots + F_{k-N} = \sum_{j=1}^{N} F_{k-j} = 1 \tag{2.21}$$

O fator F_{k-k} é incluído porque quando A_k é côncava, será interceptado por parte de sua própria energia.

Encontrar o fator de forma entre superfícies complexas não é uma tarefa muito simples. Na literatura existem métodos para encontrar o fator de forma a partir de geometrias básicas. Ainda existem técnicas matemáticas que facilitam esse trabalho, bem como alguns softwares especializados para este cálculo.

2.3. MÉTODO DA RADIAÇÃO GLOBAL

Consideremos a k-ésima superfície, cuja área é A_k, da cavidade, $q_{i,k}$ e $q_{o,k}$ são as taxas de energia radiante por unidade de área que chegam e saem da superfície k respectivamente. $q_{r,k}$ é o fluxo radiante da superfície k, e é medido através de um balanço entre $q_{i,k}$ e $q_{o,k}$, da seguinte forma:

$$q_{r,k} = q_{o,k} - q_{i,k} \tag{2.22}$$

A radiosidade $q_{o,k}$, a qual é composta pela soma das energias emitidas e refletidas, é dada pela seguinte equação:

$$q_{o,k} = \varepsilon_k \sigma T_k^4 + \rho_k q_{i,k} = \varepsilon_k \sigma T_k^4 + (1-\alpha_k) q_{i,k} = \varepsilon_k \sigma T_k^4 + (1-\varepsilon_k) q_{i,k} \tag{2.23}$$

Como as superfícies são assumidas cinzas, então $\alpha_k = \varepsilon_k$ e $\rho_k = 1-\alpha_k = 1-\varepsilon_k$. O fluxo incidente $q_{i,k}$ é derivado a partir das partes de energia radiante que saem das demais superfícies da cavidade e chegam na k-ésima superfície. Se essa superfície for côncava, então uma parte de sua própria energia contribuirá diretamente no aumento de $q_{i,k}$. Então a energia incidente é igual a:

$$A_k q_{i,k} = A_1 q_{o,1} F_{1-k} + A_2 q_{o,2} F_{2-k} + \cdots + A_j q_{o,j} F_{j-k} + \cdots + A_k q_{o,k} F_{k-k} + \cdots + A_N q_{o,N} F_{N-k} \tag{2.24}$$

Da equação (2.20) temos que:

$$A_1 F_{1,k} = A_k F_{k-1}; \quad A_2 F_{2,k} = A_k F_{k-2}; \quad \cdots \quad A_N F_{N-k} = A_k F_{k-N} \tag{2.25}$$

Então a equação (2.24) pode ser escrita da seguinte forma:

$$A_k q_{i,k} = A_k q_{o,1} F_{k-1} + A_k q_{o,2} F_{k-2} + \cdots + A_k q_{o,j} F_{k-j} + \cdots + A_k q_{o,k} F_{k-k} + \cdots + A_k q_{o,N} F_{k-N} \tag{2.26}$$

Assim, o fluxo incidente é:

$$q_{i,k} = \sum_{j=1}^{N} F_{k-j} q_{o,j} \tag{2.27}$$

Das equações (2.22)-(2.27), obtemos:

$$q_{r,k} = \frac{\varepsilon_k}{1-\varepsilon_k} \left(\sigma T_k^4 - q_{o,k} \right) \tag{2.28}$$

$$q_{r,k} = \sum_{j=1}^{N} F_{k-j} \left(q_{o,k} - q_{o,j} \right) \tag{2.29}$$

A equação (2.28) pode ser reescrita como:

$$q_{o,k} = \sigma T_k^4 - \frac{1-\varepsilon_k}{\varepsilon_k} q_{r,k} \quad \text{ou} \quad \sigma T_k^4 = \frac{1-\varepsilon_k}{\varepsilon_k} q_{r,k} + q_{o,k} \tag{2.30}$$

As equações (2.28) a (2.30) foram obtidas eliminando $q_{i,k}$ das equações (2.22) e (2.23). Se, ao invés disto, eliminássemos $q_{o,k}$, os resultados seriam:

$$q_{r,k} = \varepsilon_k \sigma T_k^4 - \varepsilon_k q_{i,k} \tag{2.31}$$

$$q_{i,k} = \sigma T_k^4 - \frac{q_{r,k}}{\varepsilon_k} \tag{2.32}$$

A Equação (2.31) mostra que a energia que deixa a superfície é a diferença entre a energia emitida e a energia absorvida pela superfície.

3. FORMULAÇÃO INVERSA

Em um problema térmico direto, condições de contorno são impostas em determinadas regiões e em outras, determina-se o fluxo de calor. Por exemplo em um forno, como o que será considerado nesta dissertação, para um problema direto, a condição de contorno imposta seria a potência dos aquecedores, e como resultado, o fluxo de calor na superfície de projeto. Mas quando se quer obter um determinado perfil de fluxo na superfície de projeto, deve-se adivinhar a potência dos aquecedores, sendo imprescindível encontrar a solução pela cansativa e demorada tentativa e erro.

O método inverso busca encontrar diretamente a solução (potência dos aquecedores) a partir do fluxo especificado na superfície de projeto, eliminando o processo de tentativa e erro, usando as mesmas equações do problema direto, mas com abordagens diferentes, como será discutido nas próximas seções deste capítulo e no capítulo 4.

3.1. DISCRETIZAÇÃO DOS TERMOS RADIANTES

A Figura 3.1 representa uma versão hipotética do forno considerado nesta dissertação, o qual será discutido com mais detalhe nas seções posteriores. Nesta seção discutiremos como foram discretizadas as equações que governam o mecanismo de transferência de calor por radiação térmica entre as superfícies.

As superfícies do forno considerado, inicialmente foram divididas em elementos uniformemente espaçados $\Delta x = \Delta y$, conforme a Figura 3.1.

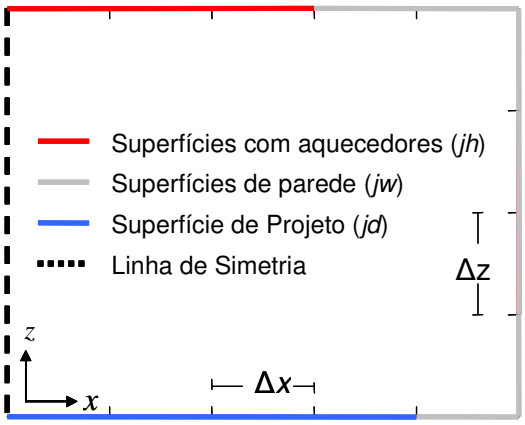


Figura 3.1 - Discretização das Superfícies do Forno para a radiação térmica

Então, das equações **(2.22)** e **(2.27)**, temos que:

$$q_{r,jd} = q_{o,jd} - q_{i,jd} \tag{3.1}$$

onde

$$q_{i,jd} = \sum_{jh=1}^{\mathrm{JH}} F_{jd-jh} q_{o,jh} + \sum_{jw=1}^{\mathrm{JW}} F_{jd-jw} q_{o,jw} \tag{3.2}$$

onde a radiosidade $q_{o,jd}$ considera a emissão e reflexão do elemento da superfície de projeto. Já que a temperatura e fluxo radiante da superfície de projeto são especificados, a radiosidade em cada um de seus elementos pode ser encontrada através da seguinte relação.

$$q_{o,jd} = \sigma T_{jd}^4 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} q_{r,jd} \tag{3.3}$$

Substituindo (3.2) em (3.1) temos que:

$$q_{r,jd} = q_{o,jd} - \sum_{jh=1}^{\mathrm{JH}} F_{jd-jh} q_{o,jh} - \sum_{jw=1}^{\mathrm{JW}} F_{jd-jw} q_{o,jw} \tag{3.4}$$

Como mencionado anteriormente, nenhuma condição térmica foi imposta nos aquecedores. Dessa forma é possível rearranjar os termos da equação (3.4) para obter uma equação que encontre as radiosidades dos elementos com aquecedores, assim:

$$\sum_{jh=1}^{\mathrm{JH}} F_{jd-jh} q_{o,jh} = q_{o,jd} - q_{r,jd} - \sum_{jw=1}^{\mathrm{JW}} F_{jd-jw} q_{o,jw} \tag{3.5}$$

As superfícies do forno que não possuem aquecedores e nem estão localizados na área de projeto, foram consideradas adiabáticas, isto é, a radiosidade de cada elemento *jw* é nulo, $q_{r,jw} = 0$. Então, da equação **(2.22)** temos que:

$$q_{o,jw} = q_{i,jw} \tag{3.6}$$

Assim,

$$q_{o,jw} = \sum_{jd=1}^{\mathrm{JD}} F_{jw-jd} q_{o,jd} + \sum_{jh=1}^{\mathrm{JH}} F_{jw-jh} q_{o,jh} + \sum_{jw^*=1}^{\mathrm{JW}} F_{jw-jw^*} q_{o,jw^*} \tag{3.7}$$

E, finalmente, uma relação para o fluxo radiante global sobre os elementos dos aquecedores é dada por:

$$q_{r,jh} = q_{o,jh} - \sum_{jd=1}^{\mathrm{JD}} F_{jh-jd} q_{o,jd} - \sum_{jw=1}^{\mathrm{JW}} F_{jh-jw} q_{o,jw} - \sum_{jh^*=1}^{\mathrm{JH}} F_{jh-jh^*} q_{o,jh^*} \tag{3.8}$$

Nas equações acima, F_{jd-jh} e F_{jd-jw} são os fatores de forma entre os elementos da superfície de projeto e os aquecedores e entre a superfície de projeto e as paredes adiabáticas respectivamente; $q_{o,jh}$ e $q_{o,jw}$ são as radiosidades dos elementos *jh* dos aquecedores e os elementos *jw* das paredes adiabáticas, respectivamente.

A temperatura dos elementos das superfícies com aquecedores bem como a das adiabáticas são obtidas através das seguintes relações, respectivamente:

$$\sigma T_k^4 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} q_{r,k} + q_{o,k} \tag{3.9}$$

onde *k* pode ser *jd*, *jh* ou *jw*, dependendo do caso.

O último termo do lado direito da equação (3.7) vem do fato de que um elemento da parede adiabática, *jw*, "enxergar" outro elemento da parede adiabática, jw^*, como mostrado na Figura 3.1. O mesmo se aplica ao último termo do lado direito da equação (3.8), relativo aos elementos dos aquecedores *jh* e jh^*. O modo como as equações apresentadas nessa seção foram resolvidas será discutido minuciosamente na próxima seção.

3.2. REGULARIZAÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Utilizando-se da formulação para as radiosidades, como a equação (3.5) apresentada na seção 3.1, chega-se a um sistema linear do tipo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde a matriz $\mathbf{A}$ é formada pelos fatores de forma entre os elementos da superfície de projeto e os elementos dos aquecedores, F_{jd-jh}; o vetor $\mathbf{x}$ é formado pelas radiosidades dos elementos dos aquecedores, $q_{o,jh}$, e o vetor $\mathbf{b}$

que é formado pela irradiação da superfície de projeto e pela reflexão das superfícies adiabáticas do forno, que é dada por $\sum_{jw=1}^{JW} F_{jd-jw} q_{o,jw}$. Este sistema linear apresenta características especiais, pois a matriz **A** geralmente não é quadrada e é mal-condicionada. Devido a isso, para encontrarmos soluções aceitáveis para esse sistema devemos condicionar a matriz, utilizando métodos de regularização que serão discutidos nas seções seguintes. Antes faremos uma discussão sobre a integral de Fredholm de primeiro tipo, devido a sua estreita relação com problemas inversos que envolvem radiação térmica, como o considerado nesta dissertação.

3.2.1. Equação Integral de Fredholm de Primeira Espécie

A equação integral de Fredholm de primeira espécie é um exemplo clássico de problemas lineares mal-condicionados, e possui uma estreita relação com o problema inverso considerado nesta dissertação. A equação pode ser genericamente apresentada da seguinte forma:

$$\int_0^1 K(s,t) f(t) dt = g(s) \tag{3.10}$$

para $0 \le s \le 1$. Na equação, a função g e o núcleo K são conhecidos, mas a função f deve ser encontrada.

A equação (3.10) pode ser resolvida pelo método da expansão dos valores singulares (SVE) do núcleo K. Um requerimento inicial para esta aplicação é que o quadrado do núcleo K seja integrável, isto é:

$$\|K\|_2^2 = \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)^2 \, ds dt \tag{3.11}$$

se a equação (3.11) for um número finito, então o método SVE pode ser aplicado para expressar o núcleo K em termos de um somatório infinito:

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i(s) v_i(s) \tag{3.12}$$

onde as funções u_i e v_i são as funções singulares de K e são ortonormais entre si com respeito ao produto interno:

$$\left(u_i, u_j\right) = \left(v_i, v_j\right) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \tag{3.13}$$

onde o produto interno é definido por:

$$\left(u_i, u_j\right) = \int_0^1 u_i\left(\xi\right) u_j\left(\xi\right) d\xi \tag{3.14}$$

os valores singulares de K são positivos. Como as funções u_i e v_i são ortonormais, a norma de K é:

$$\left\|K\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 \tag{3.15}$$

da equação (3.15) temos que os valores singulares μ_i decaem mais rápido que $i^{-1/2}$ para que a norma $\left\|K\right\|_2^2$ seja finita, como requerido inicialmente.

Os parâmetros μ_i, u_i e v_i são únicos para um dado núcleo K. A solução para a função f pode ser expressa em termos da função g e desses parâmetros da seguinte forma:

$$f\left(t\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left(u_i, g\right)}{\mu_i} v_i\left(t\right) \tag{3.16}$$

3.2.2. A Condição de Picard

A solução de f existe somente se o lado direito da equação (3.16) convergir. A condição de Picard diz que, para que a função f exista e que seu quadrado seja integrável, a função g deve satisfazer:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\left(u_i, g\right)}{\mu_i} \right)^2 < \infty \tag{3.17}$$

Esta condição impõe que os valores absolutos do produto interno de u_i e g deve ser menor que $\mu_i i^{-1/2}$ a partir de algum ponto no somatório (3.17).

Diz-se que a função g pertence à faixa de K quando esta satisfaz a condição de Picard. É claro que nem toda função g levará a equação (3.17) à convergência, especialmente quando sabe-se que os coeficientes μ_i decaem mais rapidamente do que $i^{-1/2}$. Na verdade, quanto mais suave for o núcleo K, mais rapidamente os valores singulares decaem a zero, fazendo a condição de Picard ainda mais restritiva. Mesmo que g pertença à faixa de K, uma pequena perturbação em g fará com que a condição de Picard seja violada. É esta instabilidade que faz com que a equação integral seja mal condicionada.

3.2.3. Regularização

Como discutido anteriormente, a equação integral de Fredholm é muito instável, o que torna necessário impor variáveis adicionais para a estabilização do problema, e encontrar uma solução prática e estável, denominada f_r. Está é a idéia principal dos métodos de regularização. Em geral, a regularização de problemas gera um resíduo na solução, definido por:

$$\rho(\mathrm{f_r}) = \left\| \int_0^1 K(s,t) f_r(t)\, dt - g(s) \right\|_2 \tag{3.18}$$

e então usa um dos quatro esquemas a seguir:

1. Minimiza $\rho(\mathrm{f_r})$ sobre a restrição de que f_r pertence a um conjunto específico de funções;

2. Minimiza $\rho(\mathrm{f_r})$ sujeito à restrição de que a medida $\omega(f_r)$ do tamanho de f_r seja menor que algum valor específico;

3. Minimiza $\omega(f_r)$ para que $\rho(\mathrm{f_r})$ seja menor que um valor específico;

4. Minimiza a combinação linear de $\rho(\mathrm{f_r})^2$ e $\omega(f_r)^2$:

$$\min\left[\rho(\mathrm{f_r})^2 + \lambda^2 \omega(f_r)^2\right]$$

onde λ é um fator de ponderação. Este é o clássico esquema de regularização de Tikhonov.

Todos os quatro métodos buscam encontrar soluções aproximadas f_r para a equação (3.10) quando a função g não pertence ao domínio de K, ou quando o problema é afetado por alguma perturbação.

O modo de evitar que a função f seja divergente (o que ocorre sempre que a condição de Picard não é estritamente obedecida) é imposta uma restrição no tamanho de $\omega(f_r)$, ao custo de introduzir um resíduo $\rho(f_r)$ na solução. Os diferentes métodos de regularização propõem diferentes formas de ponderar estes dois parâmetros básicos.

3.3. DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA MAL-CONDICIONADO

A grande maioria dos problemas inversos é descrito por um conjunto de equações que não podem ser resolvidas analiticamente, mas somente por discretização numérica, seguida da solução computacional de um sistema de equações algébricas, representado por:

$$\mathbf{A.x = b} \tag{3.19}$$

Quando um problema mal-condicionado é discretizado, as dificuldades inerentes à solução analítica são eliminadas. Assim como acontece com os valores singulares do núcleo K do problema contínuo, os valores singulares da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ decaem gradualmente para zero. Se as ferramentas de regularização não são aplicadas ao problema, então a solução apresentará uma norma muito grande (uma analogia ao problema contínuo, que diverge para uma solução infinita), dessa forma não tem um significado físico ou uma aplicação prática. De forma análoga à expansão do núcleo K, a matriz $\mathbf{A}$ pode ser decomposta em uma combinação de matrizes ortogonais e valores singulares, chamada de decomposição em valores singulares (SVD). A SVD tem uma função essencial na solução de problemas mal condicionados pois permite um rápido diagnóstico do quão mal condicionado é o problema, além do fato de que diversos métodos de regularização são derivados dele.

3.3.1. A Decomposição em Valores Singulares

Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \Re^{mxn}$ (onde o número de linhas m, e o número de colunas n, não são necessariamente iguais), pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$\mathbf{A = U \cdot \sum \cdot V^T} \tag{3.20}$$

onde as matrizes $\mathbf{U} \in \Re^{mxm}$ e $\mathbf{V} \in \Re^{nxn}$ são ortonormais, isto é, $\mathbf{U^T = U^{-1}}$ e $\mathbf{V^T = V^{-1}}$. $\sum$ é uma matriz diagonal formada pelos valores singulares σ_i da matriz $\mathbf{A}$. Os valores singulares são números positivos, e são ordenados de maneira decrescente, isto é, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$.

Procedimentos para encontrar as matrizes $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ e $\sum$.

1. Faz-se a seguinte multiplicação: $\mathbf{A^T \cdot A}$;
2. Encontra-se os autovetores da matriz $\mathbf{A^T \cdot A}$;
3. Os autovetores encontrados formam as colunas da matriz $\mathbf{U}$;
4. Faz-se a seguinte multiplicação: $\mathbf{A \cdot A^T}$;
5. Encontra-se os autovetores da matriz $\mathbf{A \cdot A^T}$;
6. Os autovetores encontrados formam as colunas da matriz $\mathbf{V}$;
7. Os valores singulares são extraídos a partir da raiz quadrada dos autovalores das matrizes $\mathbf{A^T \cdot A}$ ou $\mathbf{A \cdot A^T}$;

Uma aplicação imediata da decomposição em valores singulares é que a pseudo-inversa da matriz $\mathbf{A}$ pode ser encontrada diretamente a partir de manipulações simples com as matrizes $\mathbf{U}$, $\sum$ e $\mathbf{V}$, da seguinte forma:

$$\mathbf{A^{-1}} = \left(\mathbf{U} \cdot \sum \cdot \mathbf{V^T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{V^T}\right)^{-1} \cdot \sum^{-1} \cdot \mathbf{U^{-1}} = \mathbf{V} \cdot \sum^{-1} \cdot \mathbf{U^T} \tag{3.21}$$

O $\sum^{-1}$, pseudo-inversa de $\sum$, é uma matriz diagonal cujos componentes são $1/\sigma_i$. Assim, a solução do sistema de equações (3.19) é:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{V} \cdot \sum^{-1} \cdot \mathbf{U^T} \cdot \mathbf{b} \tag{3.22}$$

o que é equivalente a:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \tag{3.23}$$

Como visto, o vetor $\mathbf{x}$ corresponde a combinação linear dos vetores $\mathbf{v_i}$, onde os coeficientes são dados por $\left(\mathbf{u_i^T} \cdot \mathbf{b}\right)/\sigma_i$.

Uma breve inspeção dos valores singulares σ_i nos permite diagnosticar precisamente o tipo de mal-condicionamento da matriz $\mathbf{A}$.

- Problemas de posto deficiente: Neste caso, existe um espaço bem determinado entre os valores singulares, indicando que algumas linhas da matriz $\mathbf{A}$ são linearmente dependentes de outras;
- Problemas discretamente mal-condicionados: Estes problemas vêm da discretização numérica das equações integrais de Fredholm de primeiro tipo. Os valores singulares decaem continuamente e não há um espaço bem determinado entre eles.

As características de problemas discretamente mal-condicionados são conseqüências do fato que a decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{A}$ é muito parecida com a SVE do núcleo K.

3.4. MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO

Uma inspeção da equação (3.23) explica algumas dificuldades envolvidas nesta solução. Se os valores singulares forem muito pequenos, os componentes do vetor $\mathbf{x}$ podem assumir valores absolutos muito grandes (alternando entre valores positivos e negativos) a não ser que o vetor $\mathbf{b}$ esteja numericamente no domínio de $\mathbf{A}$ (o que implicaria que $\mathbf{u}_\mathbf{i}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{b}$ decai mais rapidamente que os valores singulares σ_i). Problemas mal-condicionados são altamente sensíveis, pois pequenas perturbações no vetor $\mathbf{b}$ são amplificadas pelos largos termos $1/\sigma_i$. Em alguns casos, os valores singulares podem assumir valores que estão abaixo da precisão dos computadores $\left(\approx 10^{-14} \text{ a } 10^{-16}\right)$; se estes termos não forem filtrados, a solução será completamente corrompida sempre que $\mathbf{b}$ estiver no domínio de $\mathbf{A}$.

Os métodos de regularização propõem estabilizar a solução introduzindo constantes adicionais ao problema. Estas modificações no sistema introduzirão, inevitavelmente, um resíduo na solução tão grande quanto a dificuldade de estabilizar o problema. Os esquemas de regularização podem ser divididos em diretos e iterativos. Os métodos diretos são baseados em algum tipo de decomposição semelhante a SVD. Os métodos iterativos geram novos vetores de solução a cada iteração, onde o número de iterações depende do parâmetro de regularização. A seguir, apresentaremos dois dos métodos de regularização mais empregados para a solução deste tipo de problema, bem como o método utilizado neste trabalho, o método de truncamento dos valores singulares (TSVD) e o método dos gradientes conjugados (CG).

3.4.1. Método da Decomposição por Valores Singulares Truncada (TSVD)

O método TSVD é um método de regularização direta para encontrar a solução de problemas mal-condicionados e segue diretamente da SVD. Se a matriz $\mathbf{A}$ for quadrada e singular, então alguns de seus valores singulares serão exatamente zero. Os vetores $\mathbf{v_i}$, correspondentes aos valores singulares σ_i nulos, formam um espaço nulo de $\mathbf{A}$, isto é:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v_i} = 0 \tag{3.24}$$

Os vetores $\mathbf{v_i}$ que correspondem aos valores singulares não nulos ampliam a faixa de $\mathbf{A}$. Se o vetor $\mathbf{b}$ encontra-se no domínio de $\mathbf{A}$ (isto é, se $\mathbf{b}$ pode ser obtido por uma combinação linear dos vetores $\mathbf{u_i}$), então há infinitas soluções $\mathbf{x}$ para o problema, já que qualquer combinação linear de vetores $\mathbf{v_i}$ no espaço nulo de $\mathbf{A}$ pode ser adicionado a $\mathbf{x}$ para formar uma nova solução. A solução da SVD é obtida eliminando-se da cominação linear da equação (3.23) os termos relativos aos valores singulares nulos:

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{p} \frac{\mathbf{u_i^T b}}{\sigma_\mathbf{i}} \mathbf{v_i} \tag{3.25}$$

onde $\sigma_{p+1}, \cdots, \sigma_n$ são menores que um valor especificado $\sigma_{\min}$. A solução pelo método TSVD é a mínima quadrática para o problema dos mínimos quadrados $\min \left| \mathbf{A_p} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \right|$. $\mathbf{A_p}$ é a matriz com posto deficiente que é obtida a partir da equação (3.21) quando os valores singulares menores que um valor específico são substituídos por zero.

Como em todo método de regularização, o método TSVD tenta estabilizar a solução de um problema mal-condicionado, ainda que isto custe na adição de um erro residual $\mathbf{r} = \left| \mathbf{A_p} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \right|$ na solução. A estabilização é alcançada pela eliminação dos termos de alta ordem da relação canônica da equação (3.23), os quais são responsáveis pela instabilidade pela instabilidade do sistema. O número de valores singulares usados na combinação linear da equação (3.25), p, é o parâmetro de regularização do método TSVD. Se p for pequeno (isto é, um valor $\sigma_{\min}$ grande), o sistema de equações é mais estável, mas o erro residual $\mathbf{r}$ é maior. Além do mais, a solução pelo método TSVD requer um ótimo balanço entre p e $\left| \mathbf{r} \right|$.

Um importante aspecto do método TSVD é que ele pode ser aplicado em problemas em que o número de equações é diferente do número de incógnitas. Quando o número de equações é menor que o número de incógnitas $(m < n)$, o problema é sub-determinado, e existe um número infinito de soluções exatas. A equação (3.25) nos apresenta a solução com a menor norma-2, a qual pode ser adicionada a qualquer combinação linear de vetores com espaços nulos $\mathbf{v}_i$ do conjunto de todas as possíveis soluções. No caso em que o número de equações é maior que o número de incógnitas $(m > n)$, a equação (3.25) dá a solução mínima quadrática $\mathbf{x}$.

3.4.2. Outros Métodos de Regularização

Outro método muito usado para a solução de sistemas mal-condicionados é o método clássico dos gradientes conjugados, que foi originalmente derivado para o caso em que a matriz é positiva definida e simétrica. Para uma matriz genérica $\mathbf{A}$, o método ainda pode ser aplicado multiplicando ambos os membros da equação (3.19) por $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$. Dessa forma a nova matriz $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}$ é positiva definida e simétrica, e para esse caso, uma comum e estável implementação do método, conhecida como algoritmo CGLS, consiste nos seguintes passos:

- Faz-se uma estimativa inicial nula para $\mathbf{x}_0$, isto é, $\mathbf{x}_0 = 0$, e considera-se os seguintes parâmetros: $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0$; $\mathbf{p}_0 = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}_0$;
- Para $k \geq 0$, faz-se as seguintes iterações:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_k = \left|\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}_k\right|^2 / \left|\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_k\right|^2 \\
&\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \\
&\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_k \\
&\beta_k = \left|\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}_{k+1}\right|^2 / \left|\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}_k\right|^2 \\
&\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k
\end{aligned}
\qquad (3.26)
$$

O conjunto de equações (3.26) descreve a formação de uma série de resíduos ortogonais $\mathbf{r}_k$ e vetores ortogonais $\mathbf{p}_j$ tais que:

$$
\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = \mathbf{p}_i \cdot \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}_j\right) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \qquad (3.27)
$$

Segue dessas propriedades que o algoritmo CG, para uma infinita precisão computacional, o resíduo será exatamente zero após n iterações (onde n é a dimensão da matriz quadrada $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}$). Em problemas mal-condicionados, onde os valores singulares decaem para valores muito pequenos, a taxa de convergência usando a precisão da máquina requer mais que n iterações. É comum o fato de se usar um pré-condicionamento em $\mathbf{A}$ para melhorar a convergência, mas para problemas mal-condicionados, não há motivo para melhorar a condição de $\mathbf{A}$, pois a solução obtida não é de interesse, uma vez que esta é afetada pelas instabilidades relacionadas aos termos de alta ordem da SVD. Na verdade, na maioria dos casos, somente algumas iterações são necessárias para atingir a solução inversa desejada. Após isto, a solução se torna muito instável, apresentando grandes oscilações.

Caso a estimativa inicial para o vetor solução seja $\mathbf{x_0} = 0$, então a norma-2 do vetor solução, $|\mathbf{x}|$, aumenta com o número de iterações k, enquanto a norma-2 do resíduo, $|r|$, diminui com k. Este comportamento monotônico é essencial para o critério de parada das iterações da regularização CG.

O método CG freqüentemente produz a cada iteração vetores nos quais os componentes espectrais associados aos maiores autovalores tendem a convergir mais rapidamente do que os demais componentes. Em conexão com problemas discretos mal-condicionados, o mesmo comportamento é observado quando o método CG é aplicado à equação normal $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{b}$. Como os autovalores de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A}$ são simplesmente σ_i^2, isto significa que os elementos da SVD associados aos maiores valores singulares tendem a convergir mais rapidamente que os demais termos. Portanto, o algoritmo CG possui um efeito regularizador que lembra a TSVD.

Outros métodos podem ser encontrados em Hansen (1998), que apresentou uma excelente análise de eficazes métodos de regularização para a solução de problemas com posto deficiente e/ou mal condicionados. Os métodos podem ser divididos em esquemas diretos e iterativos. Os métodos de regularização diretos são baseados em alguns tipos de decomposição canônica, por exemplo, SVD e RRQR. Entre outros, estão o TSVD, MTSVD, Tikhonov, modelo linear de Gauss-Markov, entre outros que usam a norma-2. Os métodos de regularização iterativos mais usados são os baseados em gradientes conjugados, como o CGLS (descrito anteriormente) e as implementações de Lanczos.

Estudos anteriores de análise inversa em cavidades radiantes [Morales et al. (1996), Matsumura (1997) e Matsumura et al. (1998)] usaram o método MTSVD (TSVD modificado). Neste método uma aproximação inicial é obtida usando a solução do TSVD para um certo parâmetro de regularização p. Então, uma correção para esta primeira estimativa é calculada

fazendo-se a minimização do problema onde restrições adicionais (como, no mínimo derivada de ordem 2 para assegurar maior suavidade) são introduzidas. Morales (1998) também aplicou a regularização de Tikhonov, que propõe uma minimização de uma combinação linear da norma-2 da solução e do vetor de resíduos, onde um especifico fator de ponderação, λ, é o parâmetro de regularização. Comparações entre os métodos MTSVD e Tikhonov mostram que o primeiro gera soluções com maior suavidade.

A discussão acima focou principalmente os métodos aplicados a projetos inversos de cavidades radiantes. Há na literatura uma variedade de métodos desenvolvidos para problemas inversos gerais. Uma abordagem ampla e recente dos métodos inversos e suas aplicações pode ser encontrada em Silva Neto e Moura Neto (2005).

4. ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO

4.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O problema a ser resolvido consiste de uma cavidade fechada, formada por superfícies difusas e não-cinzas. O meio interno da cavidade é transparente, de forma que a transferência de calor ocorre somente por radiação térmica. A superfície de projeto situa-se na parte inferior da cavidade, e a superfície dos aquecedores está no topo da cavidade, conforme ilustra a Figura 4.1. O restante da cavidade é formado por paredes. O comprimento, largura e altura da cavidade são *L*, *W* e *H*.

Como mostrado na Figura 4.2 a cavidade é dividida em elementos quadrados $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ aos quais o balanço de energia é aplicado. Os elementos na superfície de projeto, aquecedor e parede são designados por *jd, jh e jw* respectivamente.

A cavidade foi calculada com condições de contorno correspondentes a um forno em um estágio inicial de aquecimento. Trata-se de um cálculo do instante de tempo inicial do aquecimento de um forno. No trabalho de França e Howell (2006), foi apresentada uma solução de marcha no tempo, onde era dado um incremento de tempo e eram ajustadas as condições de contorno de acordo com uma curva de aquecimento prestabelecida sendo o cálculo inverso feito em cada passo de tempo. Porém, a contribuição deste trabalho é o cálculo inverso considerando superfícies não-cinzas, portanto a implementação foi simplificada, considerando-se apenas o instante de tempo inicial no aquecimento de um forno. Futuramente este trabalho poderá ser estendido para uma condição transiente.

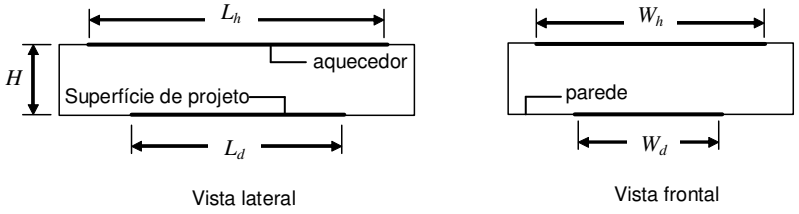


Figura 4.1 - Diagrama da cavidade radiante.

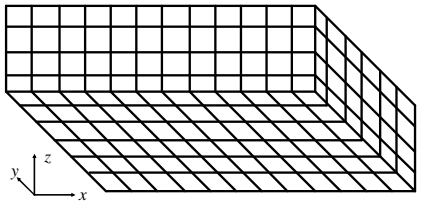


Figura 4.2 – Discretização da superfície inferior e das duas superfícies laterais da cavidade.

4.2. MÉTODO DIRETO

Ao utilizar a abordagem convencional para o projeto de um sistema térmico, o projetista normalmente irá definir um conjunto de dados que inclui a temperatura desejada das superfícies, as propriedades da superfície e a geometria do forno. O projetista deverá, a partir de sua experiência prévia, gerar uma estimativa inicial da distribuição do fluxo de calor e posição dos aquecedores.

Essa maneira de formular o problema é conveniente, pois resulta em números iguais de equações e incógnitas. Ao resolver o problema calcula-se a distribuição do fluxo de calor na superfície de projeto. Se, após resolver o problema, o resultado não atender ao especificado, o projetista deve tentar uma nova configuração de aquecedores. Esse processo deve ser repetido até que se atinja uma solução satisfatória.

Neste trabalho o método direto para superfícies não-cinzas é utilizado como uma forma de avaliar o erro do resultado do cálculo inverso, e para gerar uma nova estimativa das frações de energia em cada banda considerada. Na seção 4.2.1 aborda-se o método direto para superfícies cinzas, e na seção 4.2.2 estende-se a metodologia para o caso de superfícies não-cinzas.

4.2.1. Solução Direta de Cavidades com Superfícies Cinzas

Neste capítulo é considerada uma cavidade com superfícies cinzas, com emissividade constante, e difusas. A emissividade e absortividade espectrais não dependem da direção. Outro aspecto é a necessidade de dividir as superfícies para levar em conta as variações de temperatura na superfície. Essa divisão é uma decisão de compromisso levando em conta a precisão da solução e o tempo computacional.

Várias condições de contorno podem ser impostas nas superfícies, como temperatura, fluxo de energia, ou isolamento térmico (fluxo de calor nulo). No caso considerado, as temperaturas nas superfícies devem ser uniformes. Se houver condições que apontem para uma variação de temperatura em uma superfície, então se deve subdividi-la em áreas menores. Assume-se também que a energia refletida é difusa e uniforme em cada área, uma condição que pode ser atendida desde que cavidade seja dividida em áreas tão pequenas quanto necessário.

As hipóteses são então:

1. A temperatura é uniforme em cada elemento de superfície;

2. As propriedades das superfícies são uniformes;

3. A emissividade e a absortividade são independentes do comprimento de onda, sendo que $\varepsilon(T) = \alpha(T) = 1 - \rho(T)$;

4. Toda energia é emitida e refletida de forma difusa;

5. Os fluxos de energia incidente e refletida são uniformes em cada área.

O método direto para superfícies cinzas consiste nas seguintes etapas:

1.Identificar as condições de contorno de cada superfície: temperatura ou calor;

2.Escrever as equações de radiosidades para cada superfície;

a. Temperatura conhecida:

$$q_{o,j} = \varepsilon_j e_b(T_j) + (1-\varepsilon_j)\sum_{k=1}^{N} F_{j-k} q_{o,k} \tag{4.1}$$

b. Fluxo de calor radiante conhecido:

$$q_{o,j} = q_{r,j} + \sum_{k=1}^{N} F_{j-k} q_{o,k} \tag{4.2}$$

3.Determinar os fatores de forma;

4.Montar o sistema de N equações e N incógnitas (radiosidades);

5.Resolver o sistema;

6.Determinar a condição de contorno que falta em cada superfície:

a. Superfície com temperatura conhecida:

$$q_{r,j} = q_{o,j} - \sum_{k=1}^{N} F_{j-k} q_{o,k} \tag{4.3}$$

b. Fluxo de calor radiante conhecido:

$$e_b(T_j) = \frac{q_{o,j}}{\varepsilon_j} - \frac{(1-\varepsilon_j)}{\varepsilon_j}\sum_{k=1}^{N} F_{j-k} q_{o,k} \tag{4.4}$$

Obs: para superfície negra: $q_{o,j} = e_b(T_j)$

Para resolver este sistema pode-se utilizar o método Gauss-Seidel, pois este é um sistema bem condicionado com *JD+JH+JW* incógnitas e *JD+JH+JW* equações.

4.2.2. Solução Direta de Cavidades com Superfícies Não-Cinzas em Bandas Espectrais

O método direto para superfícies não-cinzas assume que as superfícies da cavidade são difusas, mas com emissividade e absortividade espectrais que dependem do comprimento de onda: $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\lambda(\lambda)$ e $\alpha_\lambda = \alpha_\lambda(\lambda)$. Da lei de Kirchoff (superfícies difusas): $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$.

A solução exata desse tipo de problema envolveria a aplicação do balanço de energia em cada comprimento de onda, realizando-se em seguida a integração em todos os comprimentos de onda. Esse tipo de solução é impraticável na maior parte dos problemas reais de engenharia.

Em muitos casos as emissividades espectrais hemisféricas podem ser assumidas (ou aproximadas) independentes do comprimento de onda (λ) em determinadas faixas do espectro para todas as superfícies da cavidade. Essas faixas são denominadas bandas espectrais.

Seguindo a análise apresentada para superfícies cinzas, se considerarmos as temperaturas conhecidas,

$$q_{o,\lambda,j} = \varepsilon_{\lambda,j} e_{\lambda,b,j} + (1-\varepsilon_{\lambda,j}) \sum_{k=1}^{N} F_{j-k} q_{o,\lambda,k} \tag{4.5}$$

Integrando-se em cada banda $\Delta\lambda_l$:

$$\int_{\Delta\lambda_l} q_{o,\lambda,j} d\lambda = \int_{\Delta\lambda_l} \left[\varepsilon_{\lambda,j} e_{\lambda,b,j} + (1-\varepsilon_{\lambda,j}) \sum_{k=1}^{N} F_{j-k} q_{o,\lambda,k} \right] d\lambda \tag{4.6}$$

Como $\varepsilon_{\lambda,j}$ é independente de λ na banda $\Delta\lambda_l$ e tendo que:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,j} = \int_{\Delta\lambda_l} q_{o,\lambda,j} d\lambda \tag{4.7}$$

Reescrevendo (4.6):

$$q_{o,\Delta\lambda_l,j} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,j} \int_{\Delta\lambda_l} e_{\lambda,b,j} d\lambda + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,j}) \sum_{k=1}^{N} F_{j-k} q_{o,\Delta\lambda_l,k} \tag{4.8}$$

sendo $\int e_{\lambda,b,j} d\lambda = F_{\Delta\lambda_l} e_{b,j}$, equação (4.8) fica:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,j} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,j} F_{\Delta\lambda_l} e_{b,j} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,j}) \sum_{k=1}^{N} F_{j-k} q_{o,\Delta\lambda_l,k} \tag{4.9}$$

Para cada banda teremos *JD+JH+JW* equações e *JD+JH+JW* incógnitas. Este sistema é resolvido da mesma maneira que a solução direta para superfícies cinzas. Resolvido o sistema, determina-se a radiosidade de cada superfície como:

$$q_{o,j} = \sum_{l} q_{o,\Delta\lambda_l,j} \tag{4.10}$$

O fluxo de calor é determinado com:

$$q_{r,j} = q_{o,j} - \sum_{k=1}^{N} F_{j-k} q_{o,k} \tag{4.11}$$

Caso o fluxo de calor seja conhecido em algumas superfícies, o procedimento torna-se um pouco mais complicado, pois conhece-se a energia total, mas não a energia espectral que deveria ser usada na equação:

$$q_{o,\lambda,j} = q_{r,\lambda,j} + \sum_{k=1}^{N} F_{j-k} q_{o,\lambda,k} \tag{4.12}$$

Uma possibilidade é estimar as temperaturas das superfícies em que o fluxo de calor é conhecido, e a partir disso determinar o fluxo de calor em todas as superfícies. Repete-se até atingir a convergência com os fluxos impostos nas superfícies.

4.3. MÉTODO INVERSO

No projeto convencional de cavidades radiantes, utilizando-se o método direto conforme exposto na seção 4.2 o projetista deve encontrar uma solução basicamente por tentativa-e-erro.

Este método nem sempre conduz à melhor solução possível, pois muitas vezes o projetista leva um tempo considerável, e quando os recursos financeiros ou de prazo do projeto são exauridos, deve optar pela melhor solução entre as encontradas, que não necessariamente é a melhor solução para o problema.

Uma abordagem mais interessante seria especificar as distribuições de temperatura e de fluxo de calor na superfície de projeto, e então resolver-se o problema para encontrar a distribuição de fluxo de calor nas superfícies aquecedoras. Essa abordagem constitui o *projeto inverso*. No problema inverso algumas superfícies possuem duas condições de contorno, enquanto outras não possuem nenhuma condição de contorno.

Porém, alguns problemas específicos surgem dessa abordagem. Algumas vezes, teremos mais incógnitas do que equações; em outras situações, haverá mais equações do que incógnitas. Os métodos de solução convencionais se deparam com várias dificuldades e, muitas vezes, serão incapazes de resolver o problema. Isso ocorre porque as equações são mal-condicionadas, e a matriz de coeficientes é composta de valores singulares ou *quasi* singulares. Para contornar essas dificuldades, são utilizados os métodos de regularização como o TSVD, abordado anteriormente.

As vantagens do projeto inverso são grandes. Evita-se o processo iterativo de tentativa-e-erro, pode-se atingir uma solução ótima, e pode trazer resultados pouco intuitivos, que talvez nunca fossem obtidos pelo método convencional.

A seguir na seção 4.3.1, aborda-se a metodologia de solução inversa para cavidades com superfícies cinzas, e na seção 4.3.2 expande-se a metodologia para cavidades com superfícies não-cinzas.

4.3.1. Solução Inversa de Cavidades com Superfícies Cinzas

Neste capítulo é apresentado o método de solução para cálculo inverso de transferência de calor em uma cavidade composta por superfícies cinzas. O método apresentado se propõe a especificar as condições dos aquecedores para atender a uma certa condição de aquecimento prescrita, em uma cavidade com características definidas. Algumas superfícies possuem duas condições de contorno, enquanto outras não possuem nenhuma, o que caracteriza o método inverso.

A seguir são apresentadas as equações necessárias para formular o método de cálculo, que são empregadas nos passos da solução inversa.

Como mostra a Figura 4.3, o fluxo líquido de calor radiante é dado por:

$$q_{r,jd} = q_{o,jd} - q_{i,jd} \tag{4.13}$$

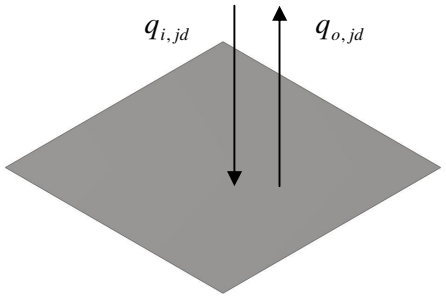


Figura 4.3 - Balanço de calor na superfície de projeto

A radiosidade $q_{o,jd}$ é a soma da emissão e a reflexão de um elemento da superfície de projeto

$$q_{o,jd} = \varepsilon_{jd} e_{b,jd} + (1 - \varepsilon_{jd}) q_{i,jd} \tag{4.14}$$

A irradiação é toda a energia incidente na superfície de projeto, incluindo a emissão e reflexão das demais superfícies da cavidade:

$$q_{i,jd} = \sum_{jh=1}^{JH} F_{jd-jh} q_{o,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jd-jw} q_{o,jw} \tag{4.15}$$

Combinando (4.13) em (4.15):

$$\sum_{jh=1}^{JH} F_{jd-jh} q_{o,jh} = (q_{o,jd} - q_{r,jd}) - \sum_{jw=1}^{JW} F_{jd-jw} q_{o,jw} \tag{4.16}$$

O fluxo de calor que o aquecedor deve fornecer é dado pela radiosidade do aquecedor menos o calor recebido das demais superfícies:

$$q_{r,jh} = q_{o,jh} - \sum_{jd=1}^{JD} F_{jh-jd}\, q_{o,jd} - \sum_{jw=1}^{JW} F_{jh-jw} q_{o,jw} \tag{4.17}$$

A radiosidade de um elemento de parede é:

$$q_{o,jw} = \varepsilon_{jw} e_{b,jw} - (1-\varepsilon_{jw}) \left(\sum_{jd=1}^{JD} F_{jw-jd}\, q_{o,jw} + \sum_{jh=1}^{JH} F_{jw-jh} q_{o,jh} + \sum_{jw^*=1}^{JW} F_{jw-jw^*} q_{o,jw^*} \right) \tag{4.18}$$

O último termo na equação (4.18) é a energia que o elemento de parede recebe de outro elemento de parede, jw^*.

Encontra-se a temperatura dos aquecedores com :

$$T_{jh} = \sqrt[4]{\frac{e_{b,jh}}{\sigma}} \tag{4.19}$$

As condições de contorno e as equações de balanço para o problema inverso e o problema direto são apresentadas em ambas as formas, dimensional e adimensional onde a temperatura de referência é T_{ref} = 800K.

- Superfícies aquecedoras: nenhuma condição de contorno
- Superfícies de projeto:

$$T_{jd} = 300K \tag{4.20}$$

$$T^*_{jd} = 0{,}375$$

$$q_{r,jd} = q^{imposto}_{r,jd} = \sigma T^4_{jd} = 23226{,}41W \tag{4.21}$$

$$Q_{r,jd} = -1{,}0$$

- Superfícies das paredes:

$$T_{jw} = 300K \tag{4.22}$$

$$T^*_{jw} = 0{,}375$$

O sistema de equações fica:

• Superfícies de projeto:

$$q_{o,jd} = e_{b,jd} - \frac{(1-\varepsilon_{jd})}{\varepsilon_{jd}} q_{r,jd} \tag{4.23}$$

$$Q_{o,jd} = \frac{e_{b,jd}}{q_{ref}} - \frac{(1-\varepsilon_{jd})}{\varepsilon_{jd}} Q_{r,jd}$$

$$q_{o,jd} = q_{r,jd} + \sum_{jh=1}^{JH} F_{jd-jh} q_{o,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jd-jw} q_{o,jw} \tag{4.24}$$

$$Q_{o,jd} = Q_{r,jd} + \sum_{jh=1}^{JH} F_{jd-jh} Q_{o,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jd-jw} Q_{o,jw}$$

• Superfícies de parede:

$$q_{o,jw} = \varepsilon_{jw} e_{b,jw} + (1-\varepsilon_{jw}) \left(\sum_{jd=1}^{JD} F_{jw-jd} q_{o,jd} + \sum_{jh=1}^{JH} F_{jw-jh} q_{o,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jw-jw^*} q_{o,jw^*} \right) \tag{4.25}$$

$$Q_{o,jw} = \varepsilon_{jw} \frac{e_{b,jw}}{q_{ref}} + (1-\varepsilon_{jw}) \left(\sum_{jd=1}^{JD} F_{jw-jd} Q_{o,jd} + \sum_{jh=1}^{JH} F_{jw-jh} Q_{o,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jw-jw^*} Q_{o,jw^*} \right)$$

• Superfícies aquecedoras:

$$q_{r,jh} = q_{o,jh} - \sum_{jd=1}^{JD} F_{jh-jd} q_{o,jd} - \sum_{jw=1}^{JW} F_{jh-jw} q_{o,jw} \tag{4.26}$$

$$Q_{r,jh} = Q_{o,jh} - \sum_{jd=1}^{JD} F_{jh-jd} Q_{o,jd} - \sum_{jw=1}^{JW} F_{jh-jw} Q_{o,jw}$$

Ao ser calculado o fluxo líquido de calor dos aquecedores pelo método inverso, parte-se para a solução direta, para encontrar o fluxo de calor na superfície de projeto. Dessa forma pode ser estimado o erro da solução inversa, pois o resultado do cálculo direto pode ser comparado ao fluxo líquido de calor imposto na superfície de projeto. As condições de contorno do problema direto para superfícies cinzas ficam:

- Superfícies aquecedoras:

$$e_{b,jh} = \sigma T_{jh}^4 \tag{4.27}$$

$$\frac{e_{b,jh}}{q_{ref}} = \frac{\sigma T_{jh}^4}{q_{ref}}$$

- Superfícies de projeto:

$$T_{jd} = 300K \tag{4.28}$$

$$T_{jd}^* = 0{,}375$$

- Superfícies de parede:

$$T_{jw} = 300K \tag{4.29}$$

$$T_{jw}^* = 0{,}375$$

As equações de balanço para as superfícies ficam:

- Superfícies aquecedoras:

$$q_{o,jh} = \varepsilon_{jh} e_{b,jh} + (1-\varepsilon_{jh})\left(\sum_{jd=1}^{JD} F_{jh-jd} q_{o,jd} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jh-jw} q_{o,jw} \right) \tag{4.30}$$

$$Q_{o,jh} = \varepsilon_{jh} \frac{e_{b,jh}}{q_{ref}} + (1-\varepsilon_{jh})\left(\sum_{jd=1}^{JD} F_{jh-jd} Q_{o,jd} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jh-jw} Q_{o,jw} \right)$$

- Superfícies de projeto:

$$q_{o,jd} = \varepsilon_{jd} e_{b,jd} + (1-\varepsilon_{jd})\left(\sum_{jh=1}^{JH} F_{jd-jh} q_{o,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jd-jw} q_{o,jd} \right) \tag{4.31}$$

$$Q_{o,jd} = \varepsilon_{jd} \frac{e_{b,jd}}{q_{ref}} + (1-\varepsilon_{jd})\left(\sum_{jh=1}^{JH} F_{jd-jh} Q_{o,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jd-jw} Q_{o,jd} \right)$$

- Superfícies de parede:

$$q_{o,jw} = \varepsilon_{jw} e_{b,jw} + (1-\varepsilon_{jw})\left(\sum_{jd=1}^{JD} F_{jw-jd} q_{o,jd} + \sum_{jh=1}^{JH} F_{jw-jh} q_{o,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jw-jw^*} q_{o,jw^*} \right) \tag{4.32}$$

$$Q_{o,jw} = \varepsilon_{jw} \frac{e_{b,jw}}{q_{ref}} + (1-\varepsilon_{jw})\left(\sum_{jd=1}^{JD} F_{jw-jd} Q_{o,jd} + \sum_{jh=1}^{JH} F_{jw-jh} Q_{o,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jw-jw^*} Q_{o,jw^*} \right)$$

O erro do fluxo líquido é calculado em relação ao imposto é:

$$erro_{jd} = \left| \frac{q_{r,jd}^{imposto} - q_{r,jd}^{calculado}}{q_{r,jd}^{imposto}} \right| \tag{4.33}$$

Também é calculado o balanço global de energia, que é a soma dos fluxos líquidos totais multiplicados pela área de cada elemento. Como as áreas são iguais temos:

$$B = \frac{\sum_{jd} q_{r,jd} + \sum_{jw} q_{r,jw} + \sum_{jh} q_{r,jh}}{\sum_{jd} \left| q_{r,jd} \right| + \sum_{jw} \left| q_{r,jw} \right| + \sum_{jh} \left| q_{r,jh} \right|} \tag{4.34}$$

Os passos da solução para superfícies cinzas são os seguintes:

1. O primeiro passo é calcular $q_{o,jd}$ com a equação (4.23).

2. Utilizando as equações (4.24) e (4.25) faz-se um cálculo iterativo para encontrar $q_{o,jw}$ e $q_{o,jh}$. Reescrevendo-se a equação (4.24) com as incógnitas à esquerda para todas as superfícies de projeto:

$$\sum_{jh} F_{jd-jh} q_{o,jh} = q_{i,jd} - \sum_{jw} F_{jd-jw} q_{o,jw} \tag{4.35}$$

$$\sum_{jh} F_{jd-jh} Q_{o,jh} = Q_{i,jd} - \sum_{jw} F_{jd-jw} Q_{o,jw}$$

Temos um sistema de equações onde o número de equações é igual ao número de superfícies de projeto *JD*, e o número de incógnitas é igual ao número de superfícies aquecedoras *JH*. Esse sistema é mal-condicionado e é resolvido com o método TSVD.

3. Os resultados de $q_{o,jh}$ são utilizados na equação (4.25) para calcular os novos valores de $q_{o,jw}$. Reescrevendo (4.25), temos:

$$q_{o,jw}^{novo} = \varepsilon_{jw} e_{b,jw} + (1-\varepsilon_{jw})\left(\sum_{jd} F_{jw-jd} q_{o,jd} + \sum_{jh} F_{jw-jh} q_{o,jh} + \sum_{jw} F_{jw-jw^*} q_{o,jw^*} \right) \qquad (4.36)$$

$$Q_{o,jw}^{novo} = \varepsilon_{jw} e_{b,jw} + (1-\varepsilon_{jw})\left(\sum_{jd} F_{jw-jd} Q_{o,jd} + \sum_{jh} F_{jw-jh} Q_{o,jh} + \sum_{jw} F_{jw-jw^*} Q_{o,jw^*} \right)$$

Este sistema de equações tem o número de equações igual ao número de superfícies de parede *JW* e o número de incógnitas também *JW*. Portanto é um sistema bem condicionado e pode ser resolvido pelo método Gauss-Seidel.

No início da solução, os valores de $q_{o,jw}$ são estimados, e à medida que os novos valores vão sendo encontrados, eles são empregados nas equações seguintes.

4. Repetem-se os passos 2 e 3 até atingir a convergência dos valores de $q_{o,jw}$ e $q_{o,jh}$.
5. A equação (4.26) é usada para calcular o fluxo líquido de calor nos aquecedores $q_{r,jh}$
6. Calcula-se a temperatura com a equação (4.19)
7. Cálculo direto: resolver sistema de equações (4.30), (4.31), (4.32).
8. Calculam-se o erro e balanço de calor: equações (4.33), (4.34)

4.3.2. Solução Inversa de Cavidades com Superfícies Não-Cinzas

Nesta seção é apresentado o método de solução para cálculo inverso de transferência de calor em uma cavidade composta por superfícies não-cinzas. O método apresentado se propõe a especificar as condições dos aquecedores para atender uma certa condição de aquecimento prescrita, em uma cavidade com características definidas. Algumas superfícies possuem duas condições de contorno, enquanto outras não possuem nenhuma, o que caracteriza o método inverso. As superfícies não-cinzas introduzem uma não linearidade ao problema, devido à dependência na quarta potência da temperatura e à distribuição dos fluxos de calor ser desconhecida.

A seguir são apresentadas as equações utilizadas na formulação do método de cálculo, e que são empregadas nos passos da solução inversa.

Como mostra a Figura 4.4, o fluxo líquido de calor radiante na superfície de projeto em uma banda é dado por:

$$q_{r,\Delta\lambda_l,jd} = q_{o,\Delta\lambda_l,jd} - q_{i,\Delta\lambda_l,jd} \tag{4.37}$$

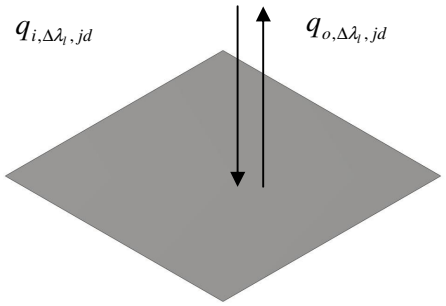


Figura 4.4 - Balanço de calor na superfície de projeto

A radiosidade $q_{o,\Delta\lambda_l,jd}$ é a soma da emissão e a reflexão de um elemento da superfície de projeto.

$$q_{o,\lambda,jd} = \varepsilon_{\lambda,jd} e_{\lambda,b,jd} + (1-\varepsilon_{\lambda,jd}) q_{i,\lambda,jd} \tag{4.38}$$

Integrando em uma banda $\Delta\lambda_l$:

$$\int_{\Delta\lambda_l} q_{o,\lambda,jd}\, d\lambda = \int_{\Delta\lambda_l} \left[\varepsilon_{\lambda,jd} e_{\lambda,b,jd} + (1-\varepsilon_{\lambda,jd}) q_{i,\lambda}\right] d\lambda \tag{4.39}$$

Como $q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = \int_{\Delta\lambda_l} q_{o,\lambda,jd} d\lambda$, resulta que:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd} \int_{\Delta\lambda_l} e_{\lambda,b,jd} d\lambda + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd}) q_{i,\Delta\lambda_l,jd} \tag{4.40}$$

Sendo $\int_{\Delta\lambda_l} e_{\lambda,b,jd} d\lambda = F_{\Delta\lambda_l} e_{b,jd}$, temos:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd} F_{\Delta\lambda_l} e_{b,jd} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd})\, q_{i,\Delta\lambda_l,jd} \tag{4.41}$$

De (4.37), obtém-se:

$$q_{i,\Delta\lambda_l jd} = q_{o,\Delta\lambda_l jd} - q_{r,\Delta\lambda_l jd} \tag{4.42}$$

Substituindo (4.42) em (4.41):

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd} F_{\Delta\lambda_l} e_{b,jd} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd})(q_{o,\Delta\lambda_l,jd} - q_{r,\Delta\lambda_l,jd}) \tag{4.43}$$

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jd} - (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd}) q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd} F_{\Delta\lambda_l} e_{b,jd} - (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd}) q_{r,\Delta\lambda_l,jd} \tag{4.44}$$

Assim temos:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = F_{\Delta\lambda_l} e_{b,jd} - \frac{(1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd})}{\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd}} q_{r,\Delta\lambda_l jd} \tag{4.45}$$

A irradiação corresponde à energia incidente na superfície de projeto, incluindo a emissão e reflexão das demais superfícies da cavidade:

$$q_{i,\Delta\lambda_l,jd} = \sum_{jh=1}^{JH} F_{jd-jh}\, q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jd-jw}\, q_{o,\Delta\lambda_l,jw} \tag{4.46}$$

Combinando (4.42) e (4.46):

$$\sum_{jh=1}^{JH} F_{jd-jh}\, q_{o,\Delta\lambda_l,jh} = (q_{o,\Delta\lambda_l,jd} - q_{r,\Delta\lambda_l jd}) - \sum_{jw=1}^{JW} F_{jd-jw}\, q_{o,\Delta\lambda_l,jw} \tag{4.47}$$

O fluxo de calor fornecido pelo aquecedor é a radiosidade do aquecedor menos o fluxo de calor recebido das demais superfícies:

$$q_{r,\Delta\lambda_l,jh} = q_{o,\Delta\lambda_l,jh} - q_{i,\Delta\lambda_l,jh} \tag{4.48}$$

$$q_{r,\Delta\lambda_l,jh} = q_{o,\Delta\lambda_l,jh} - \sum_{jd=1}^{JD} F_{jh-jd}\, q_{o,\Delta\lambda_l,jd} - \sum_{jw=1}^{JW} F_{jh-jw} q_{o,\Delta\lambda_l,jw} \tag{4.49}$$

A radiosidade de um elemento de parede é:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jw} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw} e_{\Delta\lambda_l,b,jw} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw})\left(\sum_{jd=1} F_{jw-jd}\, q_{o,\Delta\lambda_l,jw} + \sum_{jh=1} F_{jw-jh} q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \sum_{jw^*=1} F_{jw-jw^*} q_{o,\Delta\lambda_l,jw^*} \right) \tag{4.50}$$

O último termo na equação (4.50) é a energia que o elemento de parede recebe de outro elemento de parede, jw^*.

É necessário que se faça uma estimativa inicial do fluxo radiante imposto em cada banda na superfície de projeto. Como esta distribuição é desconhecida inicialmente, parte-se de uma distribuição uniforme, ou seja:

$$q_{r,\Delta\lambda_l,jd} = \frac{q_{r,jd}^{imposto}}{l} \tag{4.51}$$

As condições de contorno para o problema inverso ficam:

- Superfícies aquecedoras: nenhuma condição de contorno
- Superfícies de projeto:

$$T_{jd} = 300K \tag{4.52}$$

$$T_{jd}^{*} = 0{,}375$$

$$q_{r,\Delta\lambda_l,jd} = \frac{q_{r,jd}^{imposto}}{l} = \frac{\sigma T_{jd}^4}{l} \tag{4.53}$$

$$Q_{r,\Delta\lambda_l,jd} = \frac{Q_{r,jd}^{imposto}}{l}, \text{ onde } Q_{r,jd}^{imposto} = -1{,}0$$

- Superfícies de parede:

$$T_{jw} = 300K \tag{4.54}$$

$$T_{jw}^{*} = 0{,}375 \tag{4.55}$$

O sistema de equações fica:

- Superfícies de projeto:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = F_{\Delta\lambda_l} e_{b,jd} - \frac{(1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd})}{\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd}} q_{r,\Delta\lambda_l jd} \tag{4.56}$$

$$Q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = \frac{F_{\Delta\lambda_l} e_{b,jd}}{q_{ref}} - \frac{(1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd})}{\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd}} Q_{r,\Delta\lambda_l jd} \tag{4.57}$$

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = q_{r,\Delta\lambda_l,jd} + \sum_{jh=1}^{JH} F_{jd-jh}\, q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jd-jw}\, q_{o,\Delta\lambda_l,jw} \tag{4.58}$$

$$Q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = Q_{r,\Delta\lambda_l,jd} + \sum_{jh=1}^{JH} F_{jd-jh}\, Q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \sum_{jw=1}^{JW} F_{jd-jw}\, Q_{o,\Delta\lambda_l,jw} \tag{4.59}$$

- Superfícies de parede:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jw} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw} e_{\Delta\lambda_l,b,jw} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw}) \left(\sum_{jd=1} F_{jw-jd}\, q_{o,\Delta\lambda_l,jw} + \sum_{jh=1} F_{jw-jh} q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \sum_{jw^{*}=1} F_{jw-jw^{*}} q_{o,\Delta\lambda_l,jw^{*}} \right) \tag{4.60}$$

$$Q_{o,\Delta\lambda_l,jw} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw} \frac{e_{\Delta\lambda_l,b,jw}}{q_{ref}} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw}) \left(\sum_{jd=1} F_{jw-jd}\, Q_{o,\Delta\lambda_l,jw} + \sum_{jh=1} F_{jw-jh} Q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \sum_{jw^{*}=1} F_{jw-jw^{*}} Q_{o,\Delta\lambda_l,jw^{*}} \right) \tag{4.61}$$

- Superfícies aquecedoras:

$$q_{r,\Delta\lambda_l,jh} = q_{o,\Delta\lambda_l,jh} - \sum_{jd=1} F_{jh-jd} q_{o,\Delta\lambda_l,jd} - \sum_{jw=1} F_{jh-jw} q_{o,\Delta\lambda_l,jw} \tag{4.62}$$

$$Q_{r,\Delta\lambda_l,jh} = Q_{o,\Delta\lambda_l,jh} - \sum_{jd=1} F_{jh-jd} Q_{o,\Delta\lambda_l,jd} - \sum_{jw=1} F_{jh-jw} Q_{o,\Delta\lambda_l,jw} \tag{4.63}$$

As bandas são inicialmente resolvidas separadamente, como se fossem independentes entre si, com suas próprias propriedades (emissividades diferentes), e condições de contorno, mas com a mesma geometria.

A seguir, discute-se como se efetua a correção das bandas de energia. Essas etapas serão colocadas em ordem posteriormente nos passos da solução.

Partindo da expressão:

$$q_{o,\lambda,jh} = \varepsilon_{\lambda,jh} e_{\lambda,b,jh} + (1-\varepsilon_{\lambda,jh}) q_{i,\lambda,jh} \tag{4.64}$$

Integrando-se em uma banda $\Delta\lambda_l$:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jh} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh} \int_{\Delta\lambda_l} e_{\lambda,b,jh} d\lambda + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh}) q_{i,\Delta\lambda_l,jh} \tag{4.65}$$

onde

$$e_{\Delta\lambda_l,b} = \int_{\Delta\lambda_l} e_{\lambda,b,jh} d\lambda = F_{\Delta\lambda_l} e_{b,jh} \tag{4.66}$$

Temos:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jh} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh} e_{\Delta\lambda_l,b,jh} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh}) q_{i,\Delta\lambda_l,jh} \tag{4.67}$$

Combinando com: $q_{i,\Delta\lambda_l,jh} = q_{o,\Delta\lambda_l,jh} - q_{r,\Delta\lambda_l,jh}$ e isolando $e_{\Delta\lambda_l,b}$:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jh} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh} e_{\Delta\lambda_l,b,jh} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh})(q_{o,\Delta\lambda_l,jh} - q_{r,\Delta\lambda_l,jh}) \tag{4.68}$$

$$e_{\Delta\lambda_l,b,jh} = \frac{q_{o,\Delta\lambda_l,jh} - (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh})(q_{o,\Delta\lambda_l,jh} - q_{r,\Delta\lambda_l,jh})}{\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh}} \tag{4.69}$$

$$e_{\Delta\lambda_l,b,jh} = \frac{q_{o,\Delta\lambda_l,jh} - q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + q_{r,\Delta\lambda_l,jh} + \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh} q_{o,\Delta\lambda_l,jh} - \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh} q_{r,\Delta\lambda_l,jh}}{\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh}} \tag{4.70}$$

$$e_{\Delta\lambda_l,b,jh} = q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \frac{(1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh})}{\varepsilon_{\Delta\lambda_l}} q_{r,\Delta\lambda_l,jh} \tag{4.71}$$

Somam-se os poderes emissivos de cada banda:

$$e_{b,jh} = \sum_l e_{\Delta\lambda_l,b,jh} \tag{4.72}$$

Encontra-se a temperatura dos aquecedores com:

$$T_{jh} = \sqrt[4]{\frac{e_{b,jh}}{\sigma}} \tag{4.73}$$

Com a temperatura dos aquecedores conhecida, pode-se calcular pelo método direto o fluxo de calor na superfície de projeto para cada banda. As condições de contorno do problema direto ficam:

- Superfícies aquecedoras:

$$e_{\Delta\lambda_l,b,jh} = F_{\Delta\lambda_l}(t_{jh}) e_{b,jh}(t_{jh}) \tag{4.74}$$

$$\frac{e_{\Delta\lambda_l,b,jh}}{q_{ref}} = \frac{F_{\Delta\lambda_l}(t_{jh}) e_{b,jh}(t_{jh})}{q_{ref}}$$

- Superfícies de projeto:

$$e_{\Delta\lambda_l,b,jd} = F_{\Delta\lambda_l}(t_{jd}) e_{b,jd}(t_{jd}) \tag{4.75}$$

$$\frac{e_{\Delta\lambda_l,b,jd}}{q_{ref}} = \frac{F_{\Delta\lambda_l}(t_{jd}) e_{b,jd}(t_{jd})}{q_{ref}}$$

- Superfícies de parede:

$$e_{\Delta\lambda_l,b,jw} = F_{\Delta\lambda_l}(t_{jw})e_{b,jw}(t_{jw}) \tag{4.76}$$

$$\frac{e_{\Delta\lambda_l,b,jw}}{q_{ref}} = \frac{F_{\Delta\lambda_l}(t_{jw})e_{b,jw}(t_{jw})}{q_{ref}}$$

As equações de balanço para as superfícies ficam:

- Superfícies aquecedoras:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jh} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh}e_{\Delta\lambda_l,b,jh} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh})\left(\sum_{jd} F_{jh-jd}q_{o,\Delta\lambda_l,jd} + \sum_{jw} F_{jh-jw}q_{o,\Delta\lambda_l,jw}\right) \tag{4.77}$$

$$Q_{o,\Delta\lambda_l,jh} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh}\frac{e_{\Delta\lambda_l,b,jh}}{q_{ref}} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jh})\left(\sum_{jd} F_{jh-jd}Q_{o,\Delta\lambda_l,jd} + \sum_{jw} F_{jh-jw}Q_{o,\Delta\lambda_l,jw}\right)$$

- Superfícies de projeto:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd}e_{\Delta\lambda_l,b,jd} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd})\left(\sum_{jh} F_{jd-jh}q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \sum_{jw} F_{jd-jw}q_{o,\Delta\lambda_l,jd}\right) \tag{4.78}$$

$$Q_{o,\Delta\lambda_l,jd} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd}\frac{e_{\Delta\lambda_l,b,jd}}{q_{ref}} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jd})\left(\sum_{jh} F_{jd-jh}Q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \sum_{jw} F_{jd-jw}Q_{o,\Delta\lambda_l,jd}\right)$$

- Superfícies de parede:

$$q_{o,\Delta\lambda_l,jw} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw}e_{\Delta\lambda_l,b,jw} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw})\left(\sum_{jd=1} F_{jw-jd}q_{o,\Delta\lambda_l,jw} + \sum_{jh=1} F_{jw-jh}q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \sum_{jw^*=1} F_{jw-jw^*}q_{o,\Delta\lambda_l,jw^*}\right) \tag{4.79}$$

$$Q_{o,\Delta\lambda_l,jw} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw}\frac{e_{\Delta\lambda_l,b,jw}}{q_{ref}} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw})\left(\sum_{jd=1} F_{jw-jd}Q_{o,\Delta\lambda_l,jw} + \sum_{jh=1} F_{jw-jh}Q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \sum_{jw^*=1} F_{jw-jw^*}Q_{o,\Delta\lambda_l,jw^*}\right)$$

O sistema acima é calculado para cada banda, e possui o número de equações igual ao número de incógnitas, podendo ser resolvido pelo método de Gauss-Seidel. Com o resultado do cálculo direto, encontra-se o valor do fluxo líquido de calor na superfície de projeto em cada banda $q_{r,\Delta\lambda_l,jd}$.

Calcula-se o fator de correção das bandas de energia:

$$C_{\Delta\lambda_l,jd} = \frac{q_{r,\Delta\lambda_l,jd}}{\sum_l q_{r,\Delta\lambda_l,jd}} = \frac{q_{r,\Delta\lambda_l,jd}}{q_{r,jd}} \tag{4.80}$$

O fator de correção médio em cada banda é:

$$C_{\Delta\lambda_l} = \frac{\sum_{jd} q_{r,\Delta\lambda_l,jd}}{\sum_{jd} q_{r,jd}} \tag{4.81}$$

A nova estimativa do fluxo de calor radiante prescrito fica:

$$q^{novo}_{r,\Delta\lambda_l,jd} = C_{\Delta\lambda_l,jd} q^{imposto}_{r,jd} \tag{4.82}$$

O erro do fluxo líquido é:

$$erro_{jd} = \left| \frac{q^{imposto}_{r,jd} - q^{calculado}_{r,jd}}{q^{imposto}_{r,jd}} \right| \tag{4.83}$$

O erro médio e o erro percentual médio são:

$$\overline{erro} = \frac{\sum_{jd} erro_{jd}}{JD} \tag{4.84}$$

$$\overline{erro}\% = \frac{\sum_{jd} erro_{jd}}{JD} \times 100\% \tag{4.85}$$

Também é calculado o balanço global de energia, que é a soma dos fluxos líquidos totais multiplicados pela área de cada elemento. Como as áreas são iguais temos:

$$B = \frac{\sum_{jd} q_{r,jd} + \sum_{jw} q_{r,jw} + \sum_{jh} q_{r,jh}}{\sum_{jd} \left| q_{r,jd} \right| + \sum_{jw} \left| q_{r,jw} \right| + \sum_{jh} \left| q_{r,jh} \right|} \tag{4.86}$$

Os passos da solução são os seguintes:

1. O primeiro passo é calcular o fluxo líquido de calor em cada banda, com a equação (4.51).
2. Calcular $q_{o,\Delta\lambda_l,jd}$ com a equação (4.56).
3. Utilizando as equações (4.58) e (4.60) faz-se um cálculo iterativo para encontrar $q_{o,\Delta\lambda_l,jw}$ e $q_{o,\Delta\lambda_l,jh}$. Reescrevendo-se a equação (4.58) com as incógnitas à esquerda para todas as superfícies de projeto:

$$\sum_{jh} F_{jd-jh} q_{o,\Delta\lambda_l,jh} = q_{i,\Delta\lambda_l,jd} - \sum_{jw} F_{jd-jw} q_{o,\Delta\lambda_l,jw} \tag{4.87}$$

$$\sum_{jh} F_{jd-jh} Q_{o,\Delta\lambda_l,jh} = Q_{i,\Delta\lambda_l,jd} - \sum_{jw} F_{jd-jw} Q_{o,\Delta\lambda_l,jw}$$

Temos um sistema de equações onde o número de equações é igual ao número de superfícies de projeto *JD*, e o número de incógnitas é igual ao número de superfícies aquecedoras *JH*. Esse sistema é mal-condicionado e é resolvido com o método TSVD.

4. Os resultados de $q_{o,\Delta\lambda_l,jh}$ são utilizados na equação (4.60) para calcular os novos valores de $q_{o,\Delta\lambda_l,jw}$. Reescrevendo (4.60), temos:

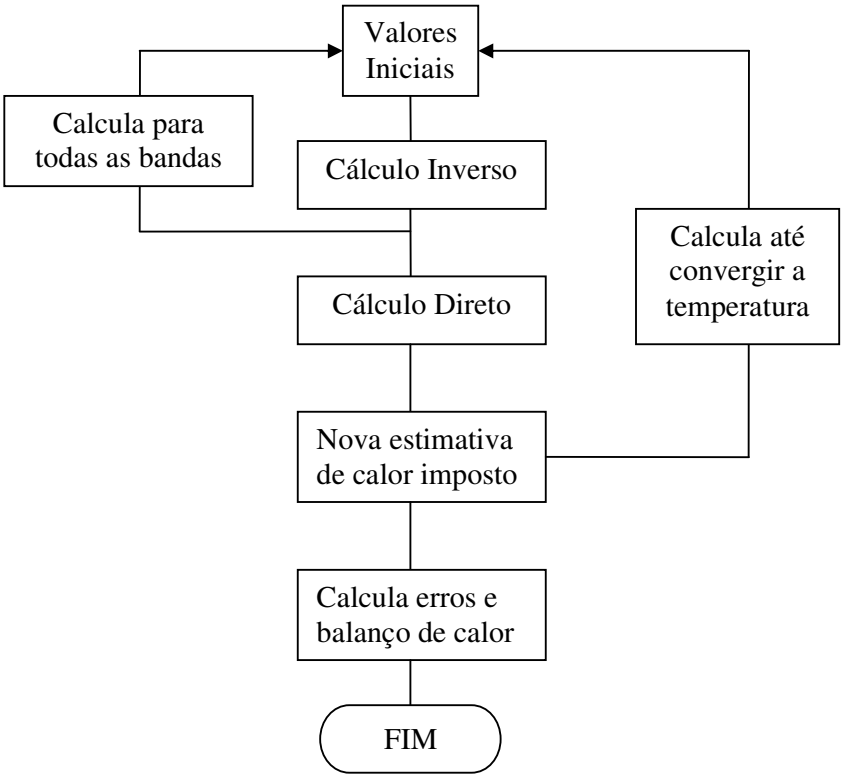
$$q^{novo}_{o,\Delta\lambda_l,jw} = \varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw} e_{b,\Delta\lambda_l,jw} + (1-\varepsilon_{\Delta\lambda_l,jw})\left(\sum_{jd=1} F_{jw-jd}\, q_{o,\Delta\lambda_l,jw} + \sum_{jh=1} F_{jw-jh} q_{o,\Delta\lambda_l,jh} + \sum_{jw^*=1} F_{jw-jw^*} q_{o,\Delta\lambda_l,jw^*} \right) \tag{4.88}$$

Este sistema de equações tem o número de equações igual ao número de superfícies de parede JW e o número de incógnitas também JW. Portanto é um sistema bem condicionado e pode ser resolvido pelo método de Gauss-Seidel.

No início da solução, os valores de $q_{o,\Delta\lambda_l,jw}$ são estimados, e à medida que os novos valores vão sendo encontrados, vão sendo utilizados nas equações seguintes.

5. Repetem-se os passos 3 e 4 até atingir a convergência dos valores de $q_{o,\Delta\lambda_l,jw}$ e $q_{o,\Delta\lambda_l,jh}$.
6. A equação (4.62) é usada para calcular o fluxo líquido de calor nos aquecedores $q_{r,\Delta\lambda_l,jh}$.
7. Calcula-se o poder emissivo da superfície aquecedora com a equação (4.71) para a banda em questão.
8. Repetem-se os passos 2 a 7 para as bandas restantes.
9. Somam-se os poderes emissivos em todas as bandas (4.72).
10. Calculam-se as temperatures dos elementos na superfície aquecedora pela equação (4.73).

11. Cálculo direto: resolver sistema de equações (4.77), (4.78), (4.79).
12. Feita nova estimativa do calor imposto em cada banda: equações (4.80), (4.82).
13. Repetem-se os passos de 2 a 12 até atingir convergência da temperatura dos aquecedores.
14. Calculam-se o erro e o balanço de calor: equações (4.83), (4.84) e (4.86).



5. RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os diversos casos calculados com a rotina desenvolvida. Todos os casos estudados neste trabalho são listados na Tabela 5.1.

Os casos estudados foram escolhidos de forma que abranjam diversas variáveis do problema. O Caso 1 tem seus parâmetros apresentados detalhadamente na seção 5.1. O Caso 1, é o caso base, a partir do qual todos os demais derivam, e foi rodado com emissividades divididas em três bandas. O Caso 2 é um estudo de diferentes geometrias ao se variar a altura da cavidade. O Caso 3 é um estudo da variação do parâmetro de regularização. O Caso 4 tem as emissividades das superfícies divididas em seis bandas. Já os casos 5.1 e 5.2 têm a superfície dos aquecedores divididos em tiras transversais e longitudinais.

Os resultados são apresentados na forma adimensional e estão agrupados em blocos. Os resultados do Caso 1 mostram o fluxo líquido de calor total e parcial de todas as bandas das superfícies de projeto e aquecedora, além do erro da superfície de projeto e a temperatura dos aquecedores.

Os resultados dos demais casos apresentam os fluxos líquidos totais das superfícies de projeto e aquecedora, e os fluxos parciais e a temperatura da superfície aquecedora além do erro da superfície de projeto.

No apêndice constam a descrição do microcomputador utilizado e o tempo de cálculo, erro médio, e balanço de calor dos casos calculados.

Tabela 5.1 – Relação dos casos estudados.

CASOS	**Descrição**
Caso 1	Caso Base
Caso 2	Geometria da cavidade
2.1	*H/L = 0,1*
2.2	*H/L = 0,3*
2.3	*H/L = 0,4*
Caso 3	Regularização do TSVD
3.1	*p = 1*
3.2	*p = 2*
3.3	*p = 3*
3.4	*p = 5*
3.5	*p = 6*
Caso 4	Variante das emissividades
Caso 5	Geometria do aquecedor
Caso 5.1	Aquecedores em tiras transversais
Caso 5.2	Aquecedores em tiras longitudinais

5.1. CASO BASE (CASO 1)

Os cálculos foram rodados em uma cavidade com dimensões W/L = 0,8, H/L = 0,2. As demais dimensões seguem algumas restrições: as dimensões da superfície de projeto não devem cobrir toda a superfície inferior, pois os cantos da cavidade são afetados pela reflexão das paredes laterais, e não pela irradiação de calor das superfícies dos aquecedores no topo da cavidade. Dessa forma as dimensões da superfície de projeto ficam: L_d/L = 0,5333 and W_d/L = 0,3333. As superfícies dos aquecedores cobrem toda a extensão superior: L_h/L = 1,0 e W_h/L = 0,8. As dimensões estão apresentadas na Figura 4.1.

O fluxo de calor adimensional é em todos os casos $Q_{r,jd} = q_{r,jd}^{imposto} \big/ \sigma T_{ref}^4 = -1{,}0$, onde $T_{ref} = 800K$. O sinal negativo resulta da convenção de que o calor líquido entrando na superfície é negativo. As temperaturas adimensionais, $T^* = T \big/ T_{ref}$, impostas na superfície de projeto e nas paredes são de $T_{jd}^* = T_{jh}^* = 0{,}375$.

As emissividades espectrais hemisféricas das superfícies são divididas em três bandas como mostrado na Figura 5.1: $\Delta\lambda_1 \le 5{,}0\mu m$, $5{,}0\mu m \le \Delta\lambda_2 \le 10{,}0\mu m$, e $\Delta\lambda_3 \ge 10{,}0\mu m$. Os valores das emissividades espectrais são os seguintes: 1) para os elementos na superfície de projeto: $\varepsilon_{jd,\Delta\lambda_1} = 0{,}5$, $\varepsilon_{jd,\Delta\lambda_2} = 0{,}7$ e $\varepsilon_{jd,\Delta\lambda_3} = 0{,}9$; 2) para os elementos aquecedores: $\varepsilon_{jh,\Delta\lambda_1} = 0{,}5$, $\varepsilon_{jh,\Delta\lambda_2} = 0{,}5$ e $\varepsilon_{jh,\Delta\lambda_3} = 0{,}7$; finalmente, para os elementos na parede: $\varepsilon_{jw,\Delta\lambda_1} = 0{,}8$, $\varepsilon_{jw,\Delta\lambda_2} = 0{,}7$ e $\varepsilon_{jw,\Delta\lambda_3} = 0{,}9$.

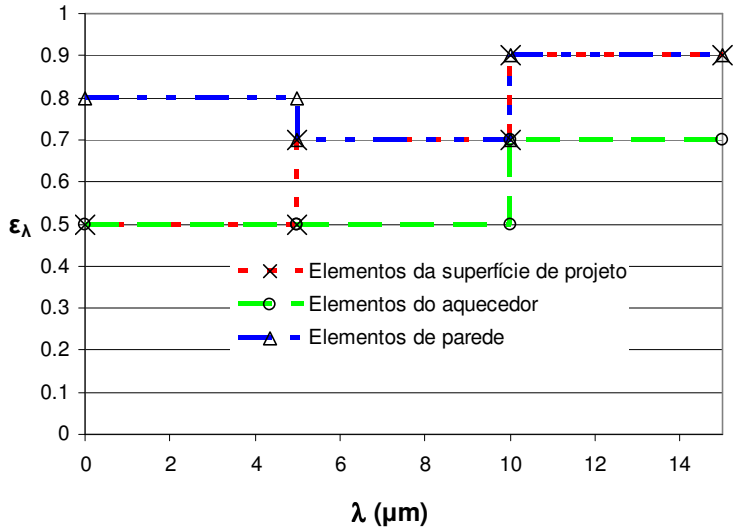


Figura 5.1 - Emissividades espectrais das superfícies.

Quanto ao parâmetro de regularização o caso 1 foi calculado com $p = 4$. Este valor de regularização foi escolhido, pois como será mostrado mais adiante, com este número de valores singulares o resultado apresenta um erro baixo, de cerca de 2,2%. Os demais casos quando apresentam regularização ou qualquer condição diferente do caso base, será informado na seção específica.

5.1.1. Independência de Malha

Antes de realizar os cálculos foi feito um teste de independência de malha, visando garantir que não haja influência do refinamento nos resultados. Este estudo de independência de malha foi rodado com as características do caso base (caso 1), somente variando-se a malha do cálculo conforme a Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Estudo da independência de malha

Malha	**Número de divisões**			**Tamanho do elemento (D_x/L)**
	X	**Y**	**Z**	
1	10	8	2	0,1000
2	20	16	4	0,0500
3	30	24	6	0,0333
4	40	32	8	0,0250
5	50	40	10	0,0200

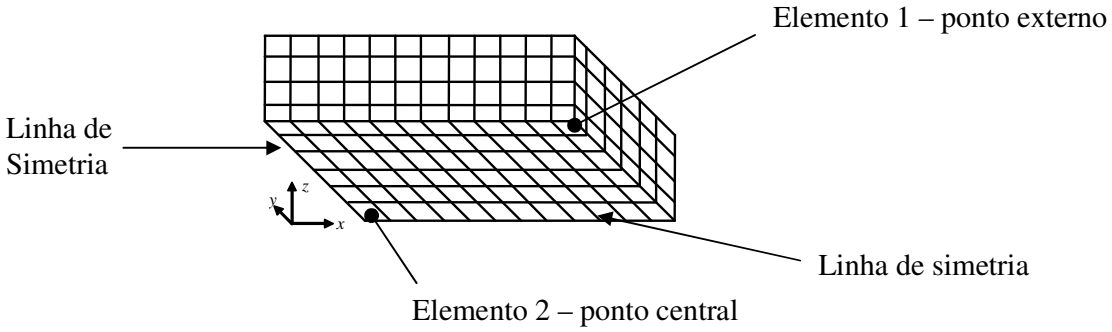


Figura 5.2 - Posição dos elementos na cavidade levando em conta simetria

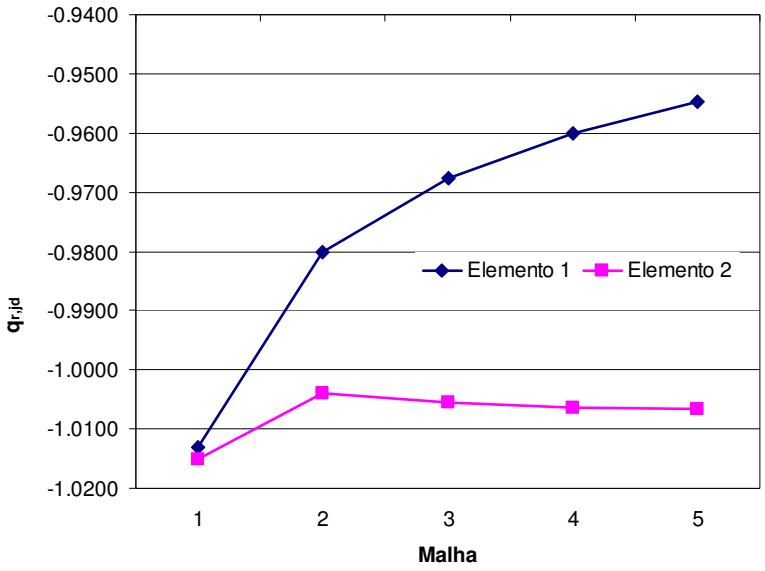


Figura 5.3 – Fluxo líquido de calor adimensional na superfície de projeto obtido para cada refinamento de malha.

Tabela 5.3 – Valores obtidos no refinamento de malha

Malha	1	2	3	4	5
Elemento 1	-1.0130	-0.9802	-0.9677	-0.9600	-0.9548
Elemento 2	-1.0152	-1.0040	-1.0056	-1.0063	-1.0067

Conforme a Figura 5.3 e a Tabela 5.3 mostram, os valores tendem a estabilizar à medida em que a malha é refinada. A Figura 5.2 mostra a posição dos pontos onde foram avaliados os valores da Figura 5.3. Nota-se que, entre as malhas 1 e 2, ocorre uma nítida variação do valor do fluxo de calor em ambos os pontos avaliados (3,2% e 1,1%). Ao passar da malha 2 para a malha 3, ocorre uma variação menor, de cerca de 1,28% e 0,16%. A partir da malha 3, as variações são menores do que 1%. Portanto assume-se que uma malha adequada para a situação é a malha 3, com divisões 30×24×6. Todos os casos posteriores foram rodados com esta malha.

5.1.2. Convergência

A convergência dos cálculos foi avaliada por meio da distribuição de energia nas bandas de energia em cada iteração.

O gráfico da Figura 5.4 e a Tabela 5.4 mostram a evolução dos valores dos fatores de correção das frações de energia em cada iteração. Inicialmente a fração de energia das três bandas foi considerada igual, cada uma tendo 1/3 do total da energia imposta. Percebeu-se que rapidamente os valores convergem, sendo que ao final da quinta iteração todos os valores das frações de energia tiveram uma variação menor que 10^{-4} como mostra a Figura 5.5. O erro apresentado é calculado por:

$$erro_{C\Delta\lambda l} = \left| \frac{C_{\Delta\lambda_l}^{n+1} - C_{\Delta\lambda_l}^{n}}{C_{\Delta\lambda_l}^{n}} \right| \tag{4.89}$$

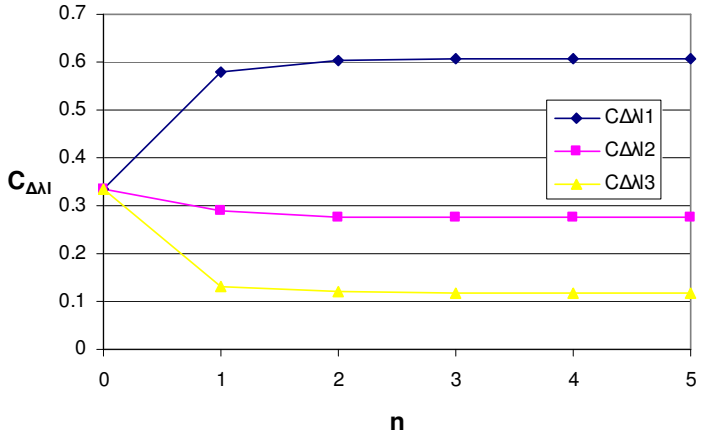


Figura 5.4 – Convergência das parcelas da distribuição de energia no Caso 1.

Tabela 5.4 – Valores de convergência das frações de energia.

Iteração (n)	$C_{\Delta\lambda 1}$	$C_{\Delta\lambda 2}$	$C_{\Delta\lambda 3}$
0	0.333333	0.333333	0.333333
1	0.579098	0.291369	0.129533
2	0.604811	0.275917	0.119272
3	0.606678	0.274782	0.11854
4	0.606811	0.274701	0.118488
5	0.606821	0.274695	0.118484

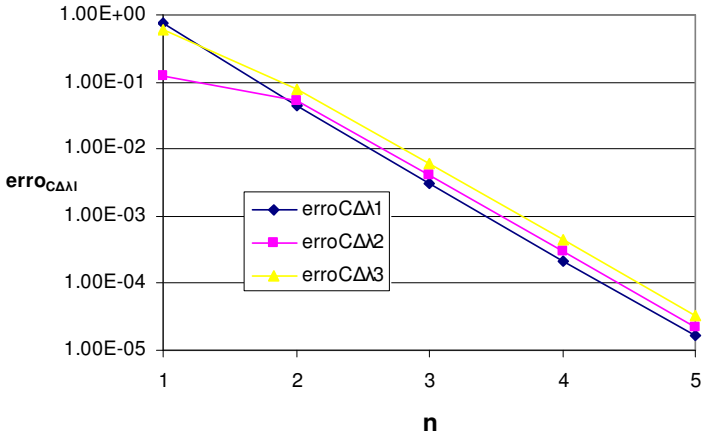


Figura 5.5 – Erro em cada iteração

Um comportamento similar de convergência do problema ocorreu também nos demais casos apresentados nas próximas seções, por isso em todos os casos foram calculadas 5 iterações.

5.1.3. Resultados

A seguir são mostrados os resultados do Caso 1. Os resultados são todos expostos em valores adimensionais.

São mostrados os fluxos líquidos total e parciais das superfícies de projeto e dos aquecedores, a temperatura, e o erro do fluxo líquido total de calor da superfície de projeto.

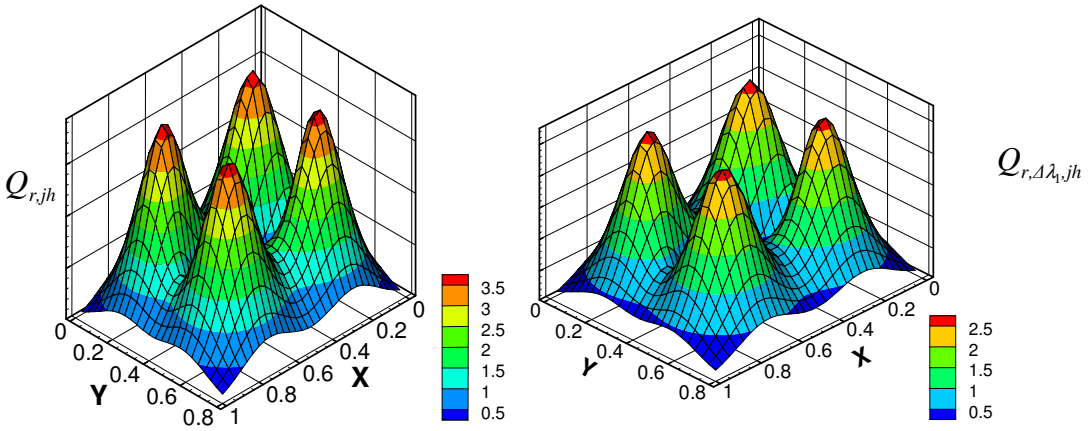


Figura 5.6 - (a) Fluxo líquido total do aquecedor; (b) Fluxo líquido de calor do aquecedor, banda 1.

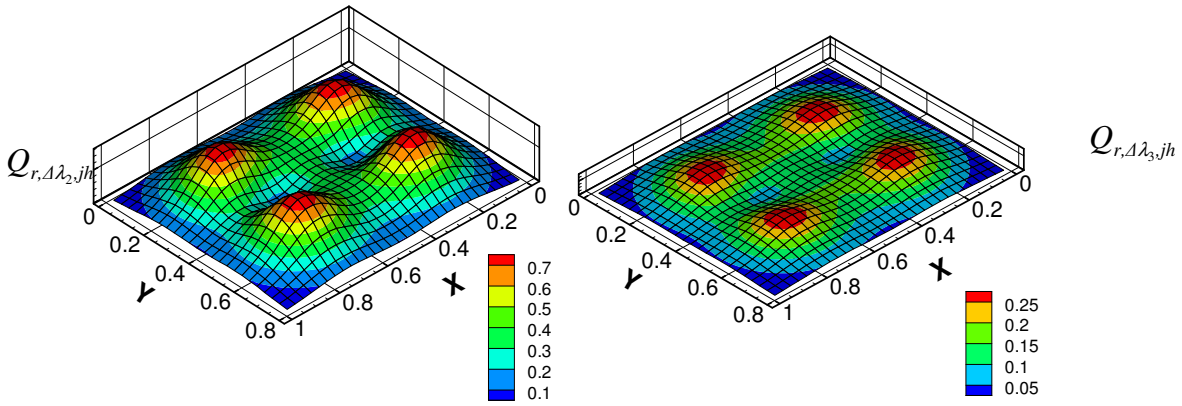


Figura 5.7 - Fluxos líquidos de calor do aquecedor (a) banda 2; (b) banda 3.

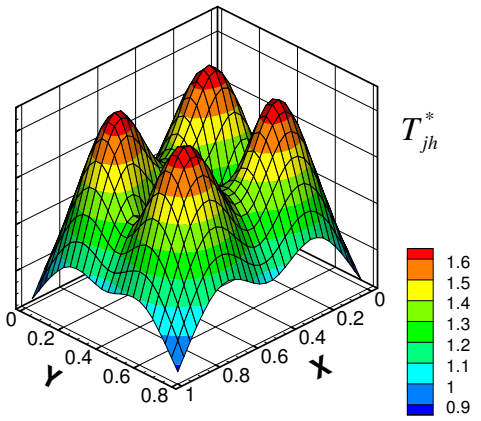


Figura 5.8 - Temperatura adimensional do aquecedor.

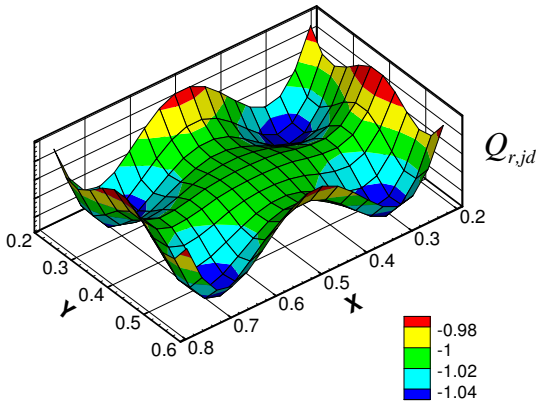


Figura 5.9 - Fluxo líquido total de calor da superfície de projeto.

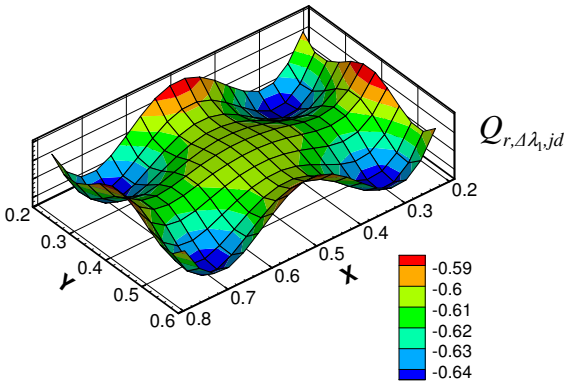


Figura 5.10 - Fluxos líquidos de calor na superfície de projeto da banda 1

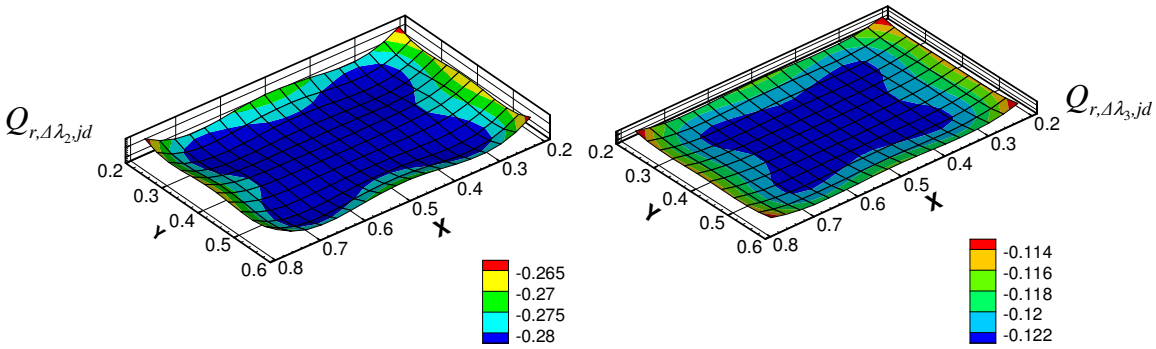


Figura 5.11 - Fluxos líquidos de calor na superfície de projeto (a) banda 2; (b) banda 3.

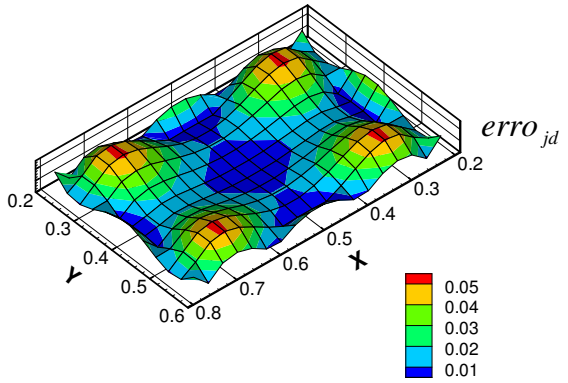


Figura 5.12 - Erro do fluxo líquido total de calor.

O erro percentual médio no resultado da superfície de projeto é de 2,2% (erro médio $2{,}2\times10^{-2}$), o balanço de energia ficou em $5{,}44\times10^{-3}$. Como pode ser observado, a distribuição de energia ficou mais concentrada na primeira banda, sendo que a distribuição de calor nas três bandas resultou respectivamente em 61%, 27% e 12%. Observa-se que o fluxo de calor na superfície de projeto ficou entre -1,04 a -0,98, para um valor especificado de $Q_{r,jd} = -1{,}0$.

5.2. ESTUDO DA GEOMETRIA (CASO 2)

A geometria do caso 1 (caso base) consiste em uma cavidade retangular com dimensões adimensionais de $1{,}0 \times 0{,}8 \times 0{,}2$.

No caso 2, a geometria foi modificada para estudar qual influência ocorre na transferência de calor quando a altura da cavidade é modificada.

Todos os parâmetros do cálculo são iguais ao caso base, e somente a geometria foi alterada em sua altura, sendo que foram simulados casos com alturas adimensionais (*H/L)* de 0,1, 0,3 e 0,4, que são respectivamente os casos 2.1, 2.2 e 2.3.

5.2.1. Resultados Caso 2.1 (*H/L* = 0,1)

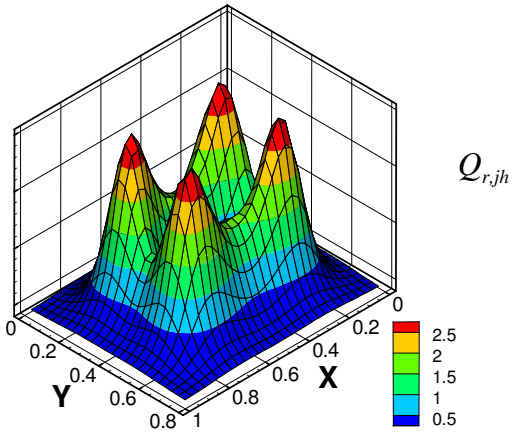


Figura 5.13 – (a) Fluxo total de calor na superfície aquecedora.

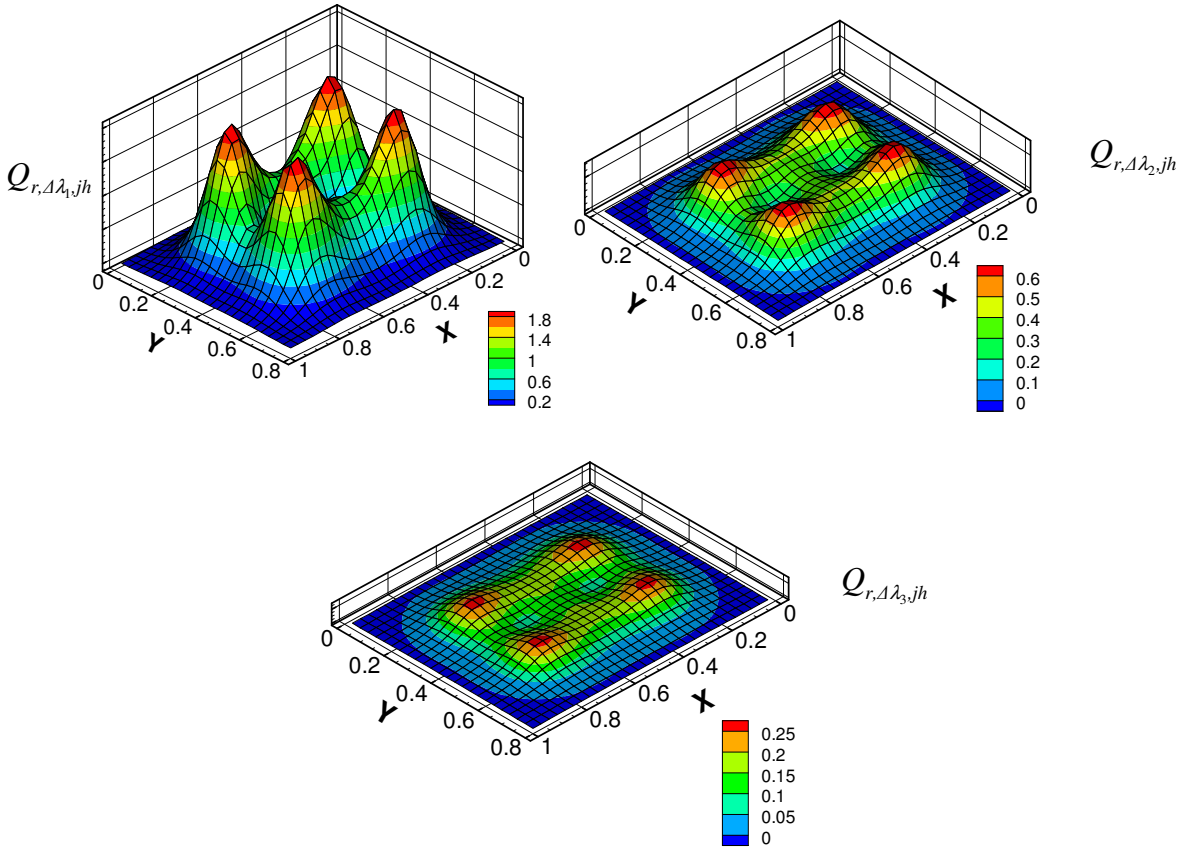


Figura 5.14 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.

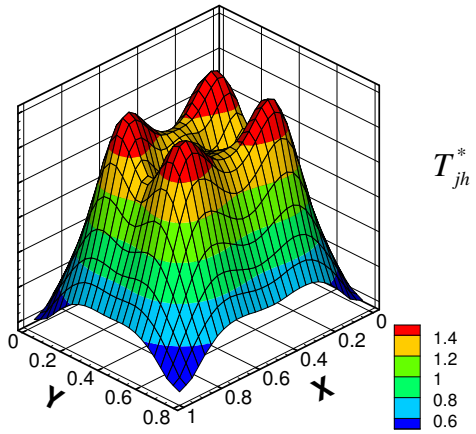


Figura 5.15 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora.

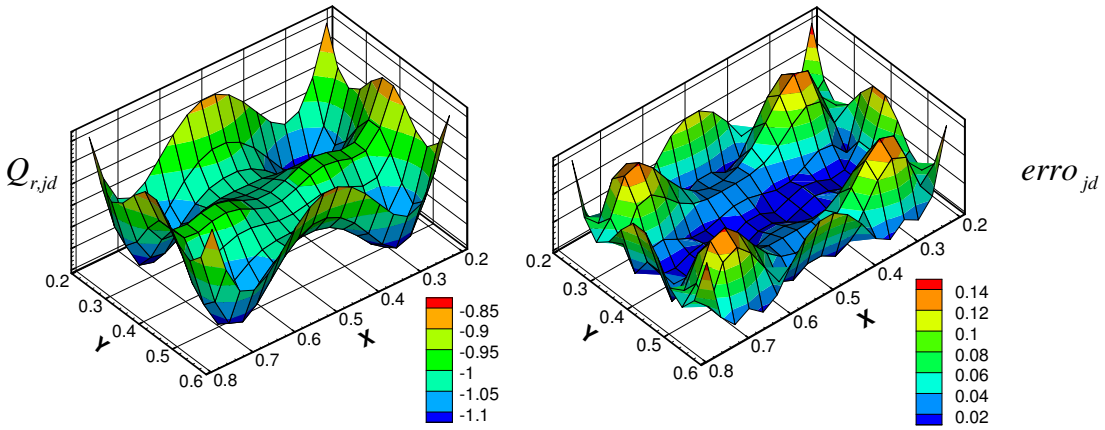


Figura 5.16 –(a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto.

O erro percentual médio no resultado da superfície de projeto é de 5,5% (erro médio de $5{,}5\times10^{-2}$), o balanço de calor ficou em $1{,}1\times10^{-2}$. A distribuição de calor nas três bandas ficou respectivamente em 59%, 28% e 13%. o fluxo de calor na superfície de projeto ficou entre -0,85 e -1,1, para um valor especificado de $Q_{r,jd} = -1{,}0$.

5.2.2. Resultados Caso 2.2 (*H/L* = 0,3)

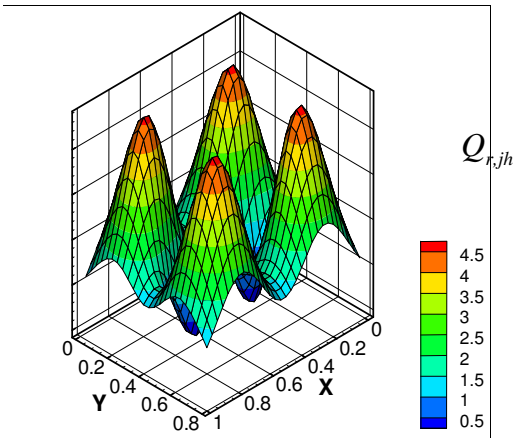


Figura 5.17 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora.

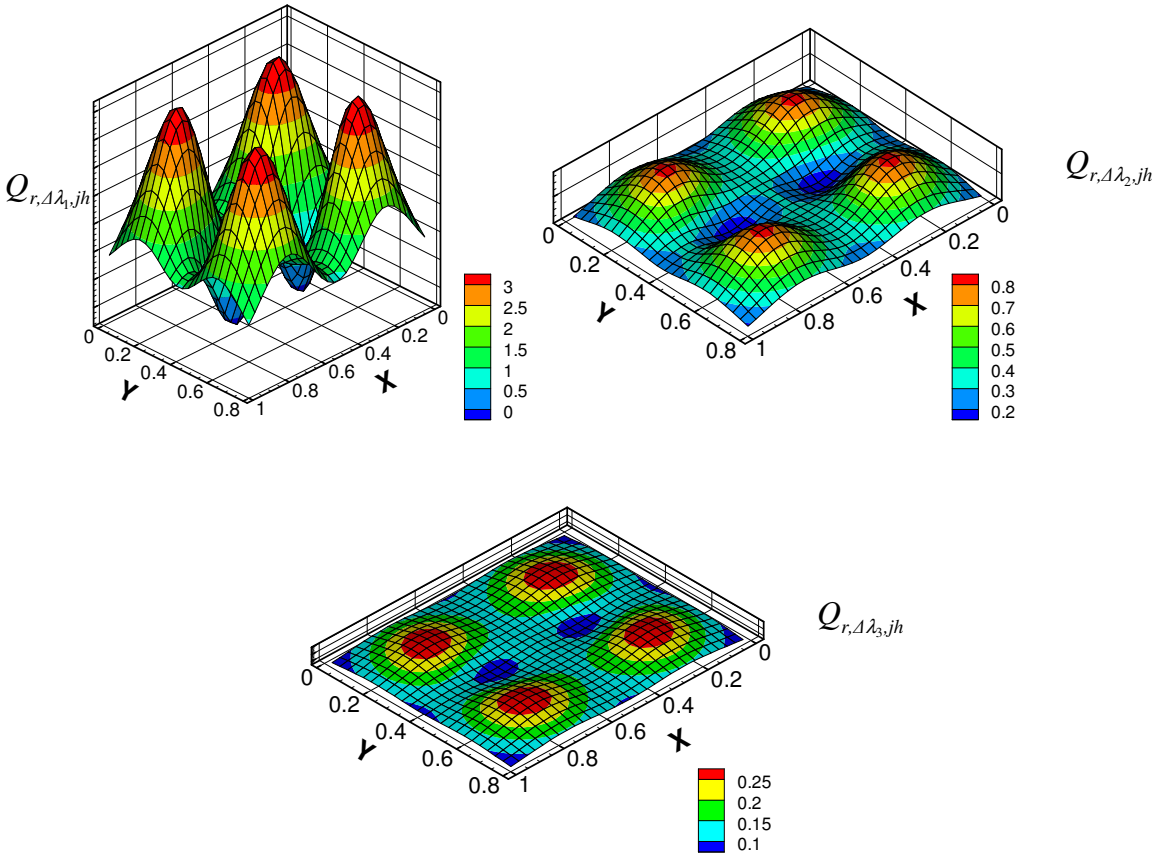


Figura 5.18 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.

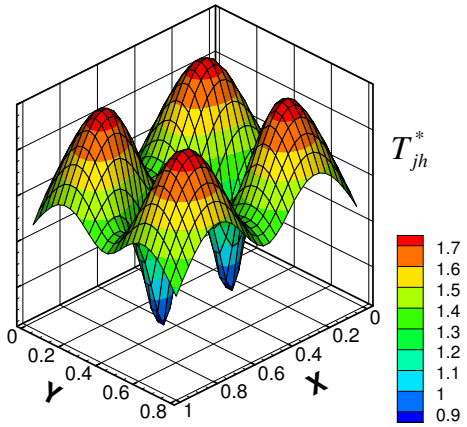


Figura 5.19 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora.

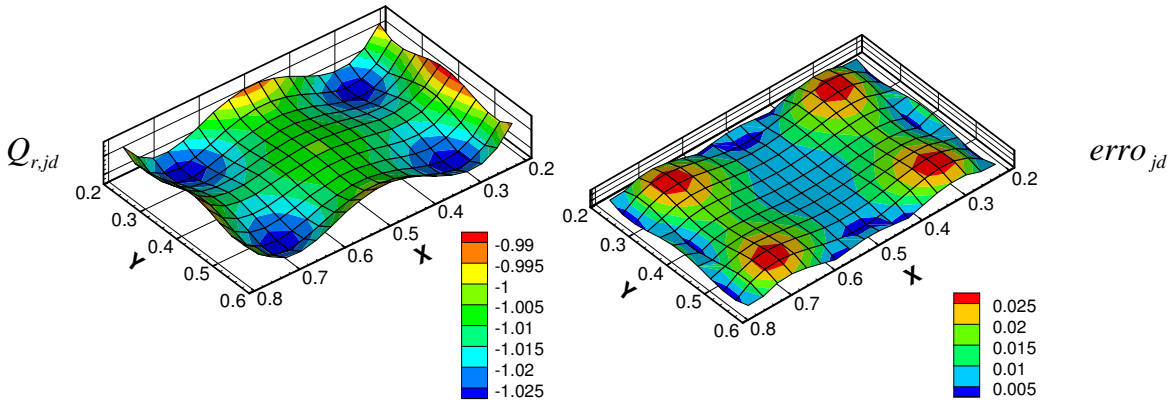


Figura 5.20 –(a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto.

O erro percentual médio no resultado da superfície de projeto é de 1,3% (erro médio de $1{,}3\times10^{-2}$), o balanço de energia ficou em $3{,}4\times10^{-3}$. A distribuição de calor nas três bandas ficou respectivamente em 63%, 26% e 11%. O fluxo de calor na superfície de projeto ficou entre -0,99 e -1,025, para um valor especificado de $Q_{r,jd} = -1{,}0$.

5.2.3. Resultados Caso 2.3 (*H/L* = 0,4)

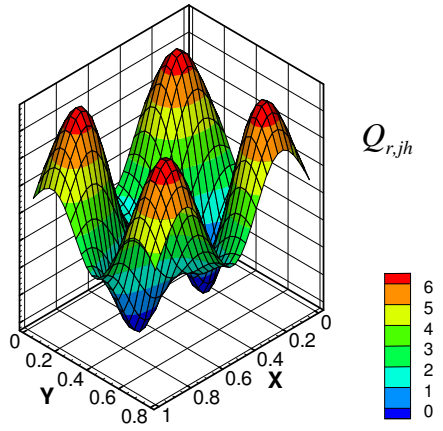


Figura 5.21 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora.

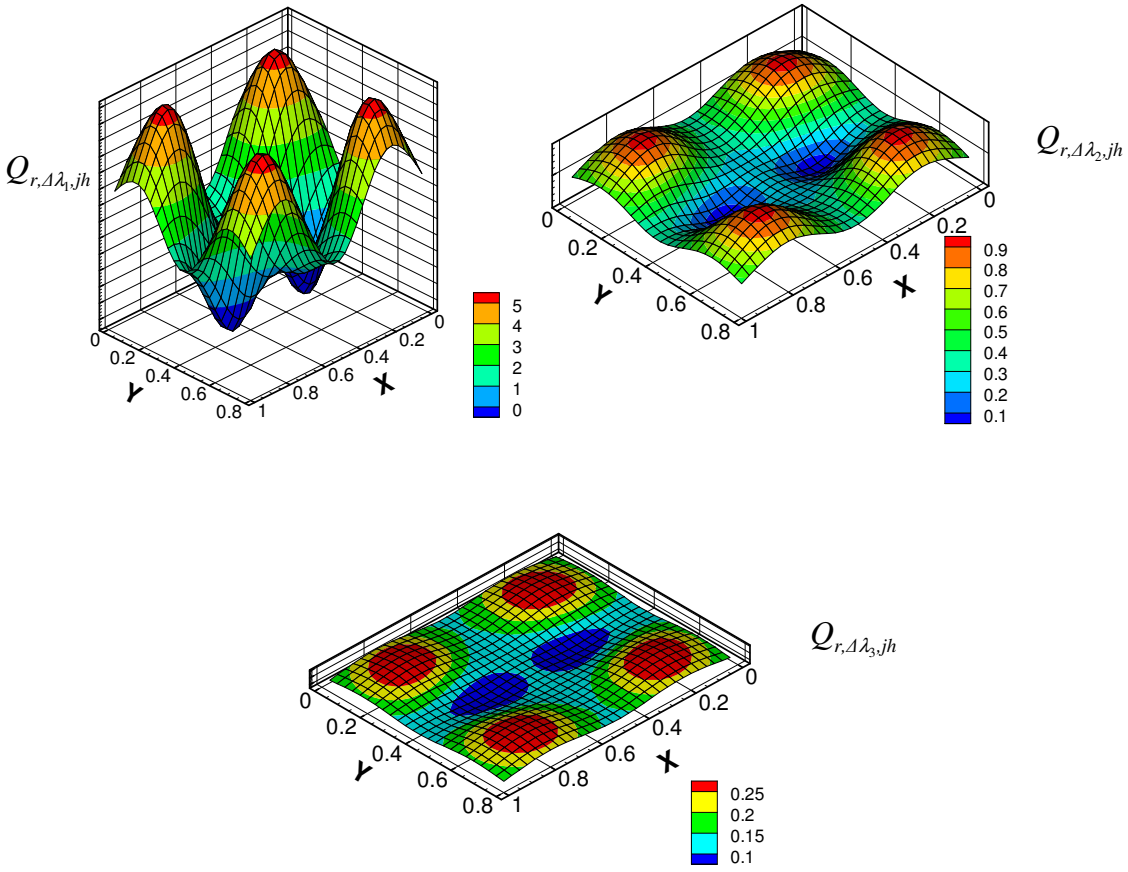


Figura 5.22 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.

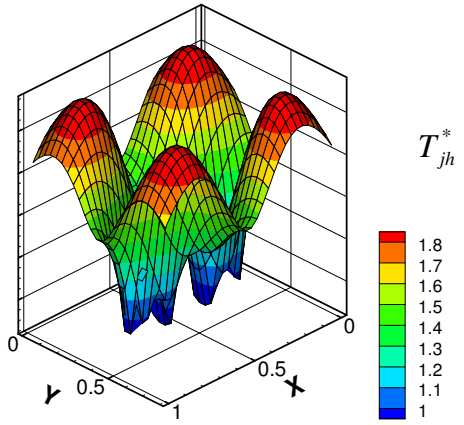


Figura 5.23 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora.

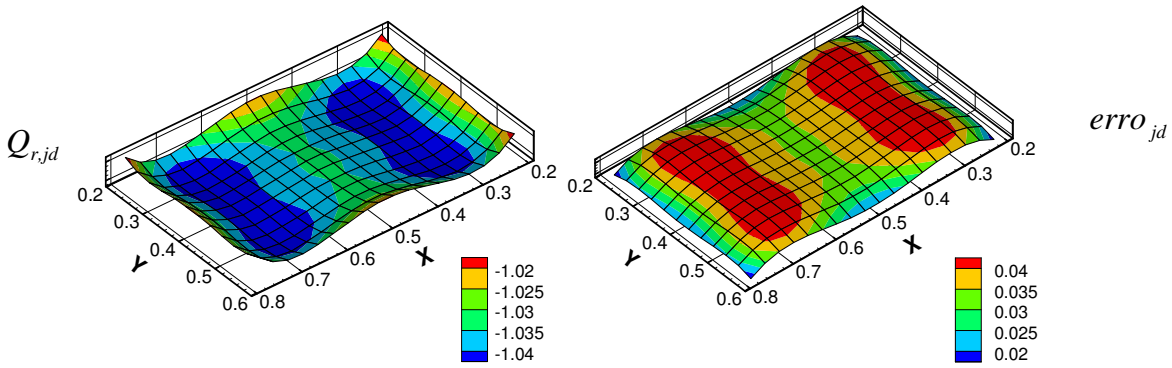


Figura 5.24 – (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto.

O erro percentual médio no resultado da superfície de projeto é de 3,5%, o balanço de energia ficou em $9{,}8\times10^{-3}$. A distribuição de calor nas três bandas ficou respectivamente em 68%, 23% e 9%. O fluxo de calor na superfície de projeto ficou entre -1,02 e -1,04, para um valor especificado de $Q_{r,jd} = -1{,}0$.

5.2.4. Discussão dos resultados do Caso 2

Fazendo uma comparação entre os resultados verificamos que a distribuição de energia varia à medida em que a cavidade aumenta de altura, deslocando-se para as bandas com comprimento de onda mais baixo.

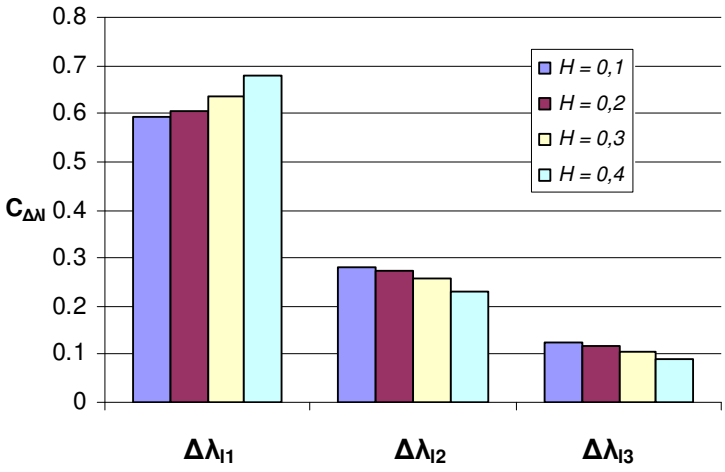


Figura 5.25 - Distribuição de energia para as diferentes alturas

Este fato pode ser explicado pelo aumento de temperatura que ocorreu à medida que a cavidade ficou mais alta, sendo que a temperatura para *H = 0,1* (caso 2.1) teve um máximo de 1,5, e para *H = 0,4* (caso 2.3) teve um máximo de 1,8.

O aumento de temperatura pode ser explicado pela influência das paredes. À medida que a altura da cavidade aumenta, é necessária uma maior transferência de calor para compensar a maior perda de calor para o meio externo.

Também foi percebida uma variação no erro médio da superfície de projeto conforme pode ser visto na Figura 5.26, onde o erro mínimo ocorreu para *H = 0,3* (caso 2.2).

Outro fato observado foi que à medida que a altura da cavidade aumenta, varia o perfil do fluxo de calor. Com alturas mais baixas os pontos de máximo estão mais próximos do centro, mas à medida que a altura aumenta, os pontos se afastam para as laterais da cavidade.

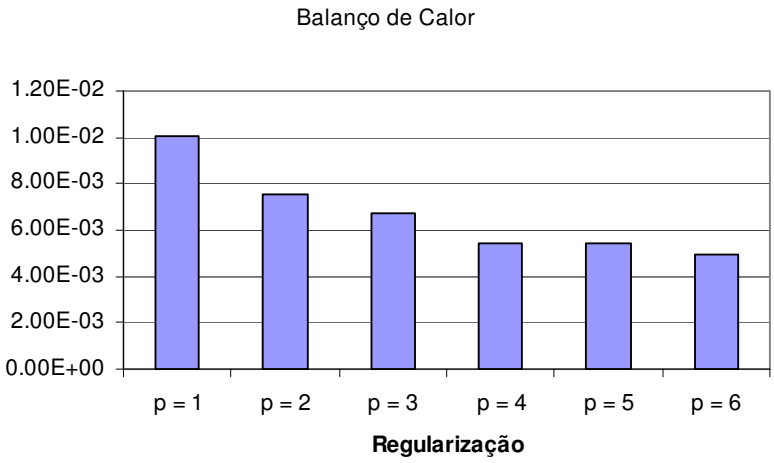


Figura 5.26 - Erro médio da superfície de projeto.

5.3. ESTUDO DA REGULARIZAÇÃO (CASO 3)

Neste capítulo são apresentados resultados de cálculos variando a regularização do problema. O caso base foi rodado com regularização $p = 4$. Os demais casos rodados foram com regularização $p = 1, 2, 3, 5$ e 6.

Com uma regularização menor, espera-se uma solução mais suave para o fluxo de calor (ou temperatura) nos elementos aquecedores, porém com um erro maior no fluxo radiante na superfície de projeto em relação ao especificado. Por outro lado, com uma regularização maior, espera-se um resultado menos suave para as condições térmicas no aquecedor, mas com um erro menor no fluxo radiante na superfície de projeto.

5.3.1. Resultados do Caso 3.1 (*p = 1*)

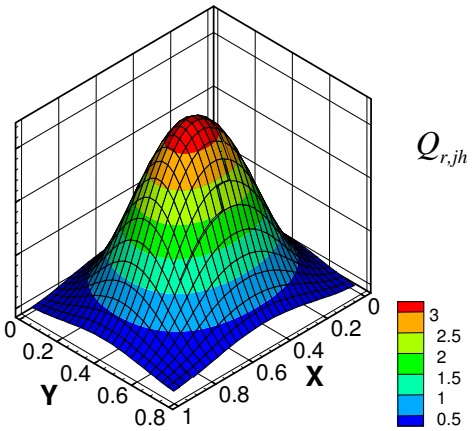


Figura 5.27 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora.

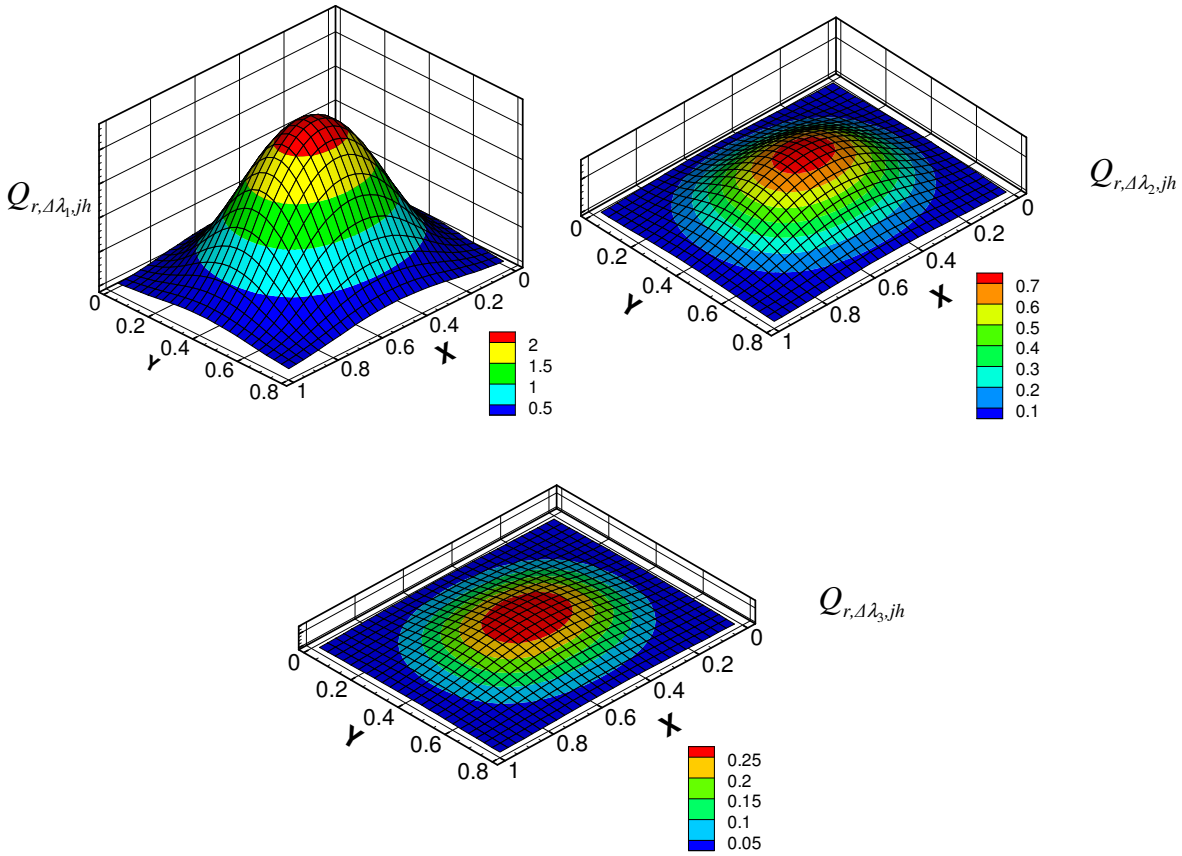


Figura 5.28 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.

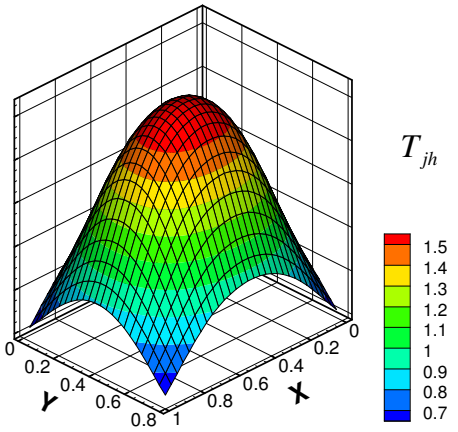


Figura 5.29 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora.

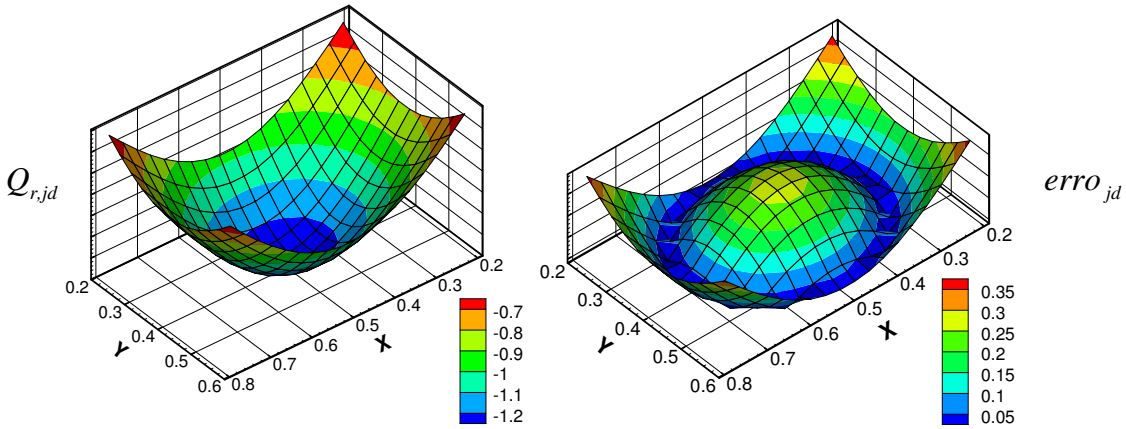


Figura 5.30 - (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto.

O erro percentual médio no resultado da superfície de projeto é de 14,1%, o balanço de energia ficou em $1{,}0\times10^{-2}$. A distribuição de calor nas três bandas ficou respectivamente em 61%, 27% e 12%. O fluxo de calor na superfície de projeto ficou entre -0,7 e -1,2.

5.3.2. Resultados do Caso 3.2 (*p = 2*)

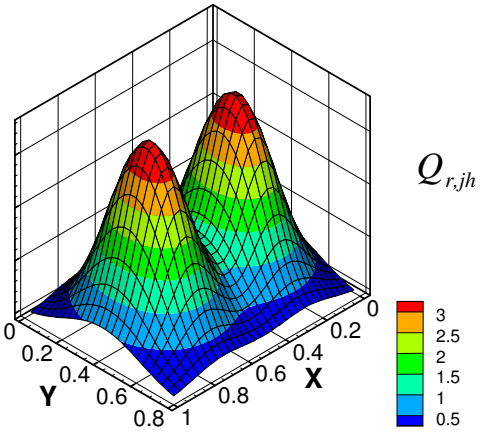


Figura 5.31 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora.

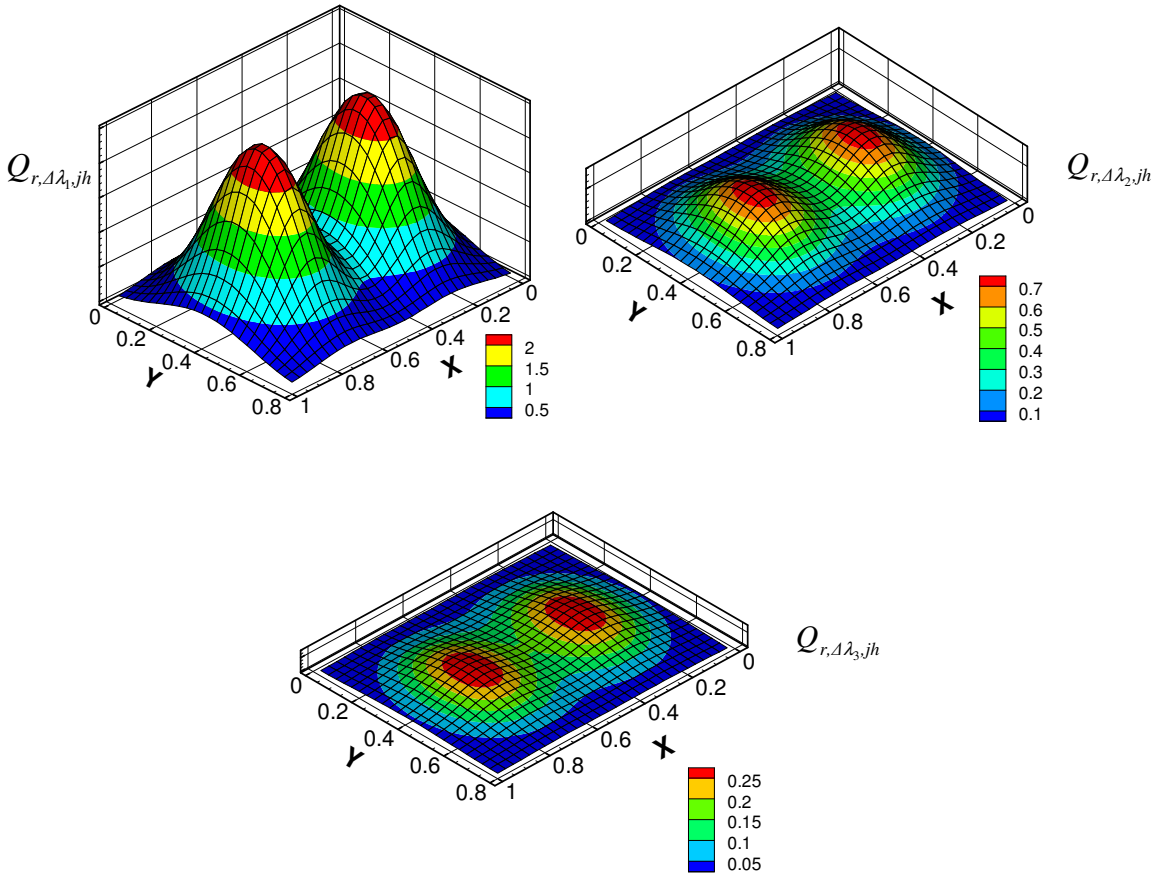


Figura 5.32 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.

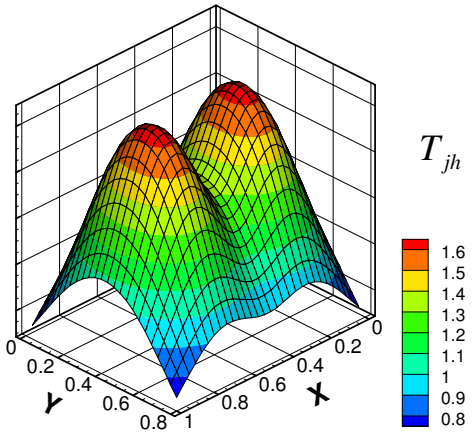


Figura 5.33 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora.

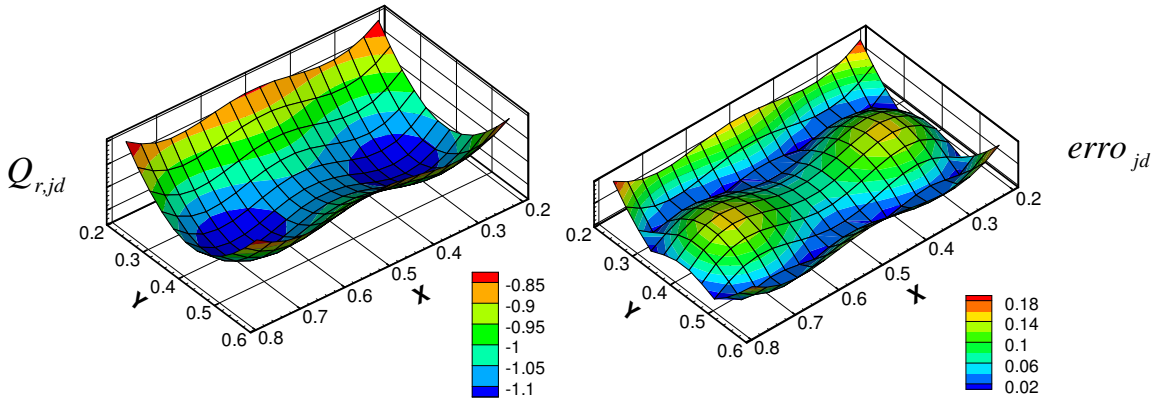


Figura 5.34 - (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto.

O erro percentual médio no resultado da superfície de projeto é de 7,93%, o balanço de energia ficou em $7{,}51\times10^{-3}$. A distribuição de calor nas três bandas ficou respectivamente em 61%, 27% e 12%. O fluxo de calor na superfície de projeto ficou entre -0,85 e -1,1.

5.3.3. Resultados do Caso 3.3 (*p = 3*)

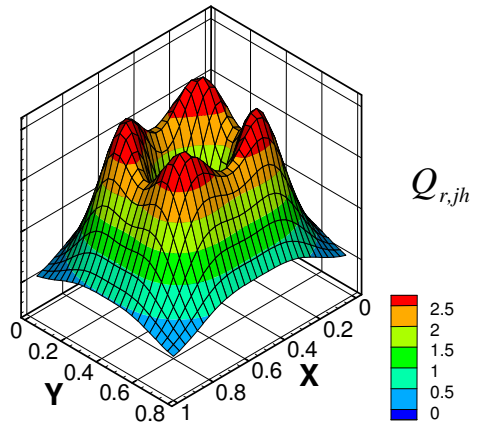


Figura 5.35 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora.

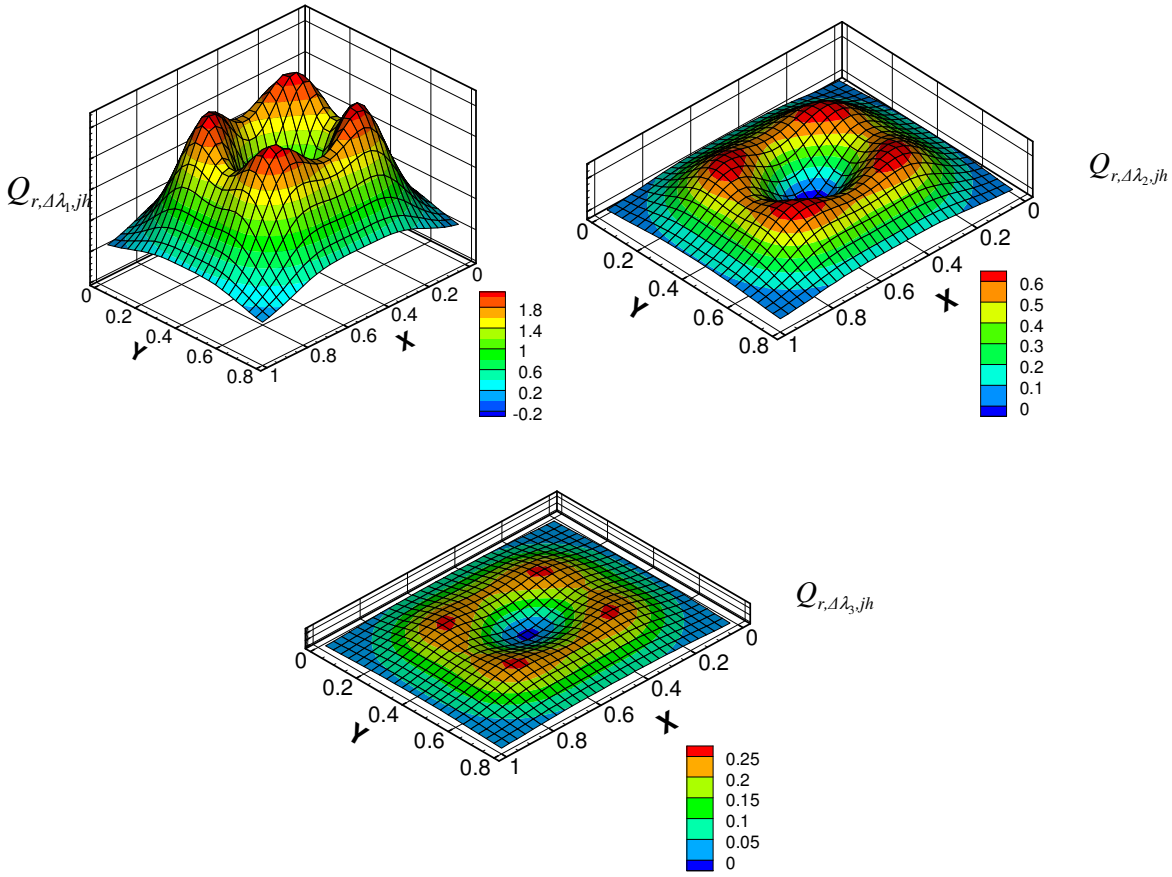


Figura 5.36 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3

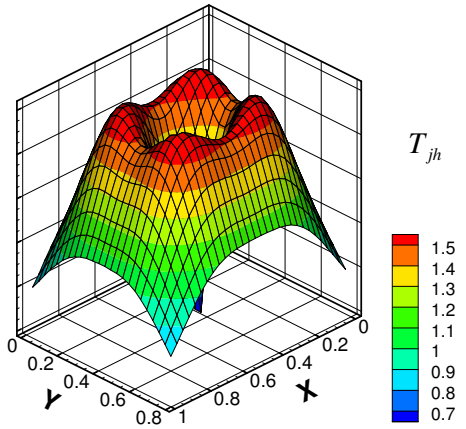


Figura 5.37 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora

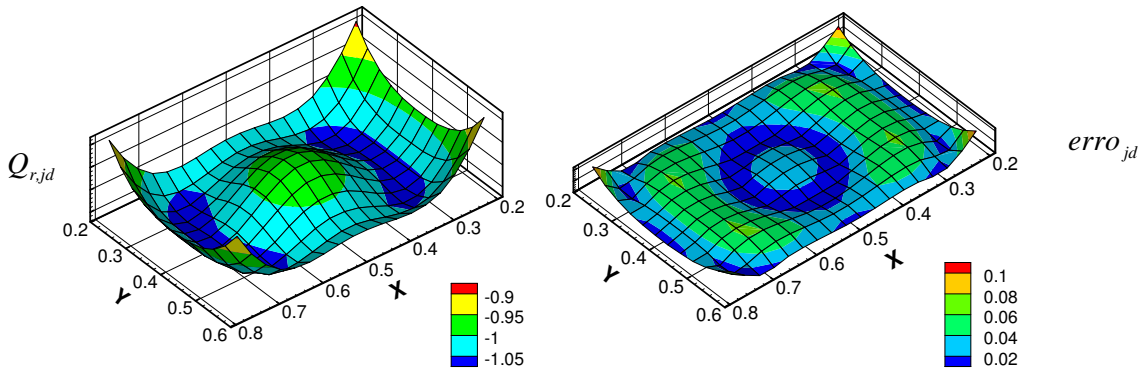


Figura 5.38 - (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto.

O erro percentual médio no resultado da superfície de projeto é de 3,4%, o balanço de energia ficou em $6{,}7\times10^{-3}$. A distribuição de calor nas três bandas ficou respectivamente em 61%, 27% e 12%. O fluxo de calor na superfície de projeto ficou entre -0,9 e -1,05.

5.3.4. Resultados do Caso 3.4 (*p = 5*)

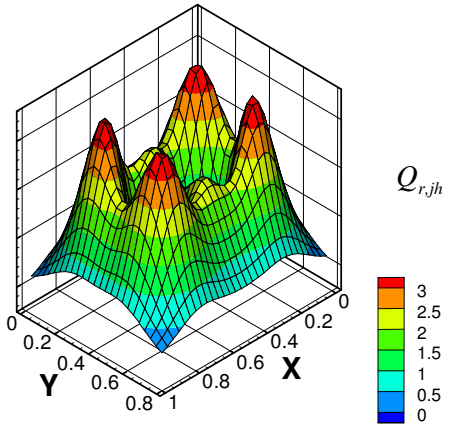


Figura 5.39 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora.

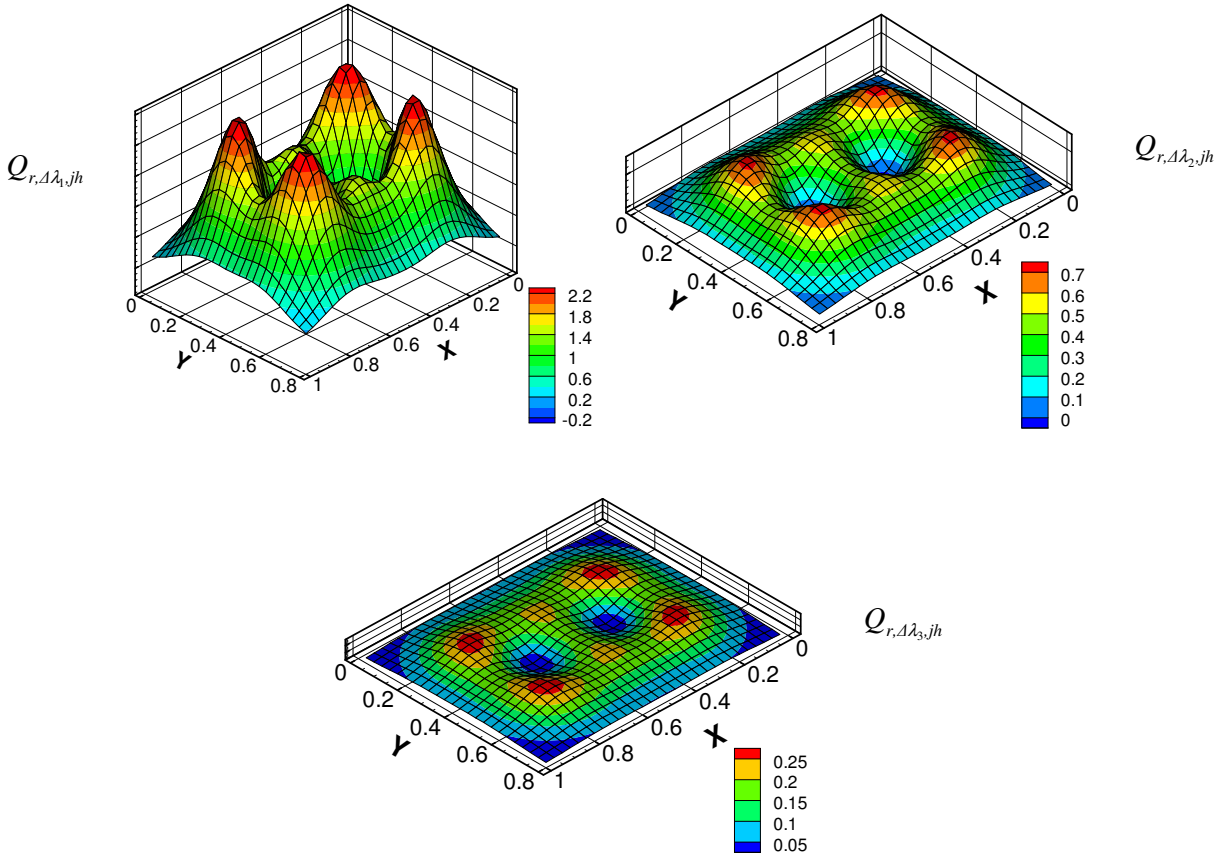


Figura 5.40 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.

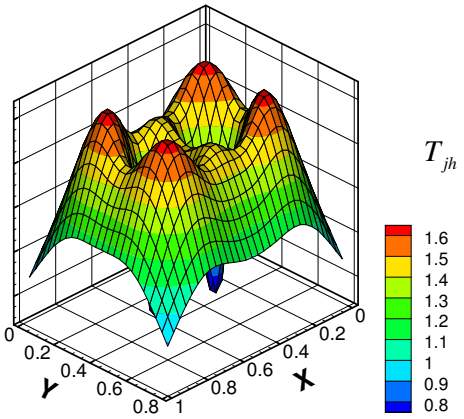


Figura 5.41 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora

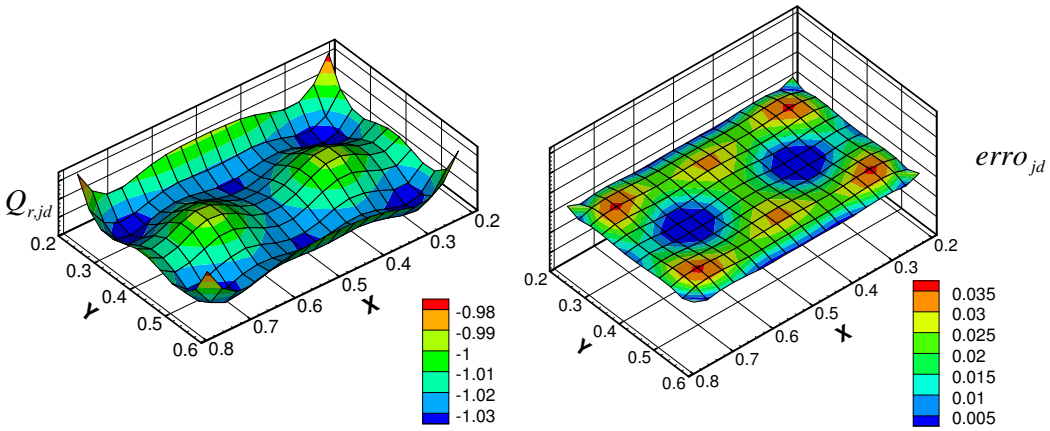


Figura 5.42 - (a) Fluxo total na superfície de projeto (b) Erro da superfície de projeto.

O erro percentual médio no resultado da superfície de projeto é de 1,74%, o balanço de energia ficou em $5{,}42\times10^{-3}$. A distribuição de calor nas três bandas ficou respectivamente em 61%, 27% e 12%. O fluxo de calor na superfície de projeto ficou entre -0,98 e -1,03.

5.3.5. Resultados do Caso 3.5 (*p = 6*)

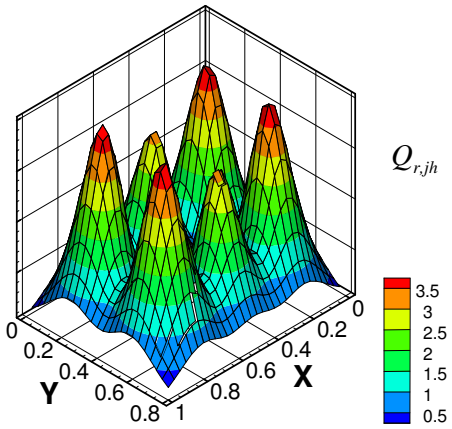


Figura 5.43 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora; (b) Fluxo total na superfície de projeto.

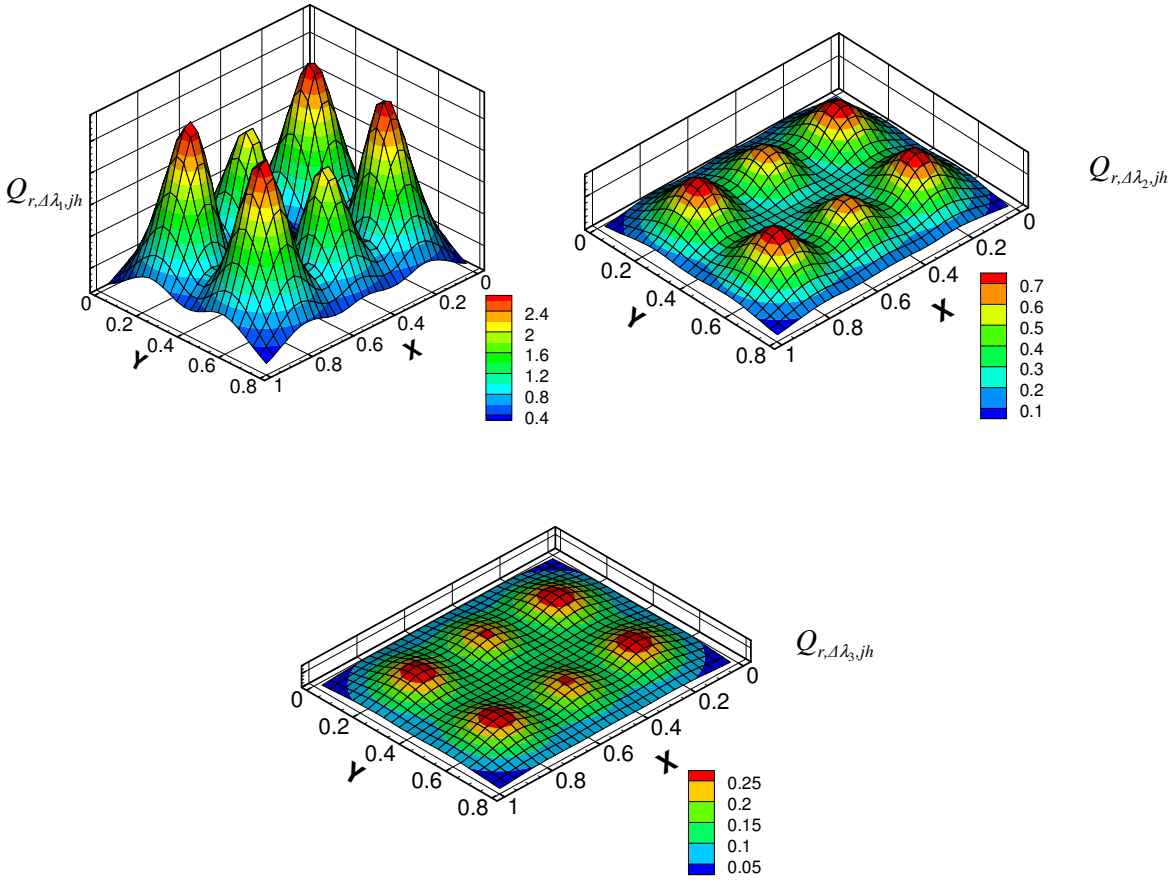


Figura 5.44 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.

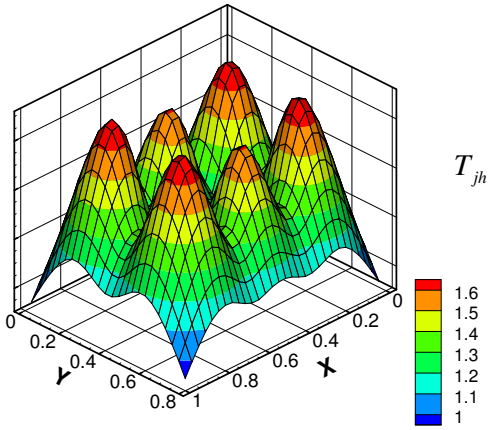


Figura 5.45 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora

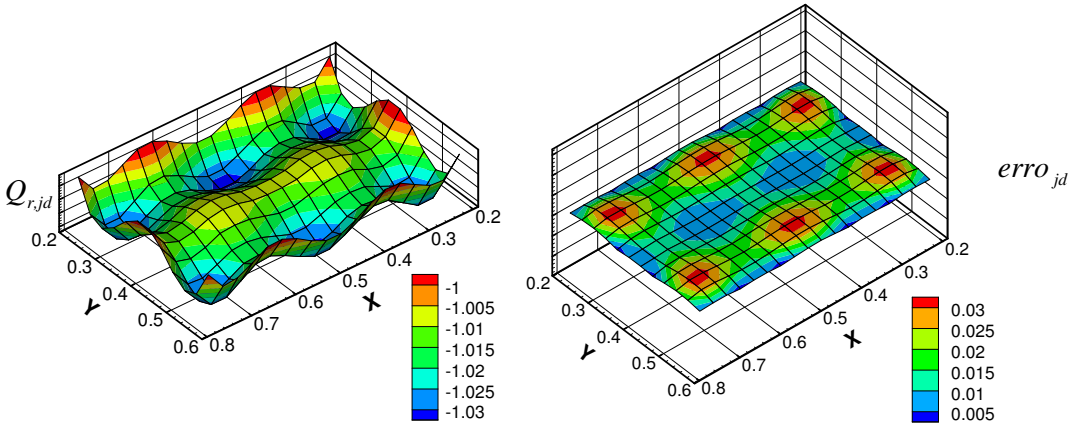


Figura 5.46– (a) Fluxo total na superfície de projeto (b) Erro na superfície de projeto.

O erro percentual médio no resultado da superfície de projeto é de 1,57%, o erro no balanço de energia ficou em $4{,}98\times10^{-3}$. A distribuição de calor nas três bandas ficou respectivamente em 61%, 27% e 12%. O fluxo de calor na superfície de projeto ficou entre -1,0 e -1,03.

5.3.6. Discussão dos resultados do Caso 3

Com a variação da regularização a distribuição das bandas de energia não variou significativamente, conforme pode ser verificado na Figura 5.47.

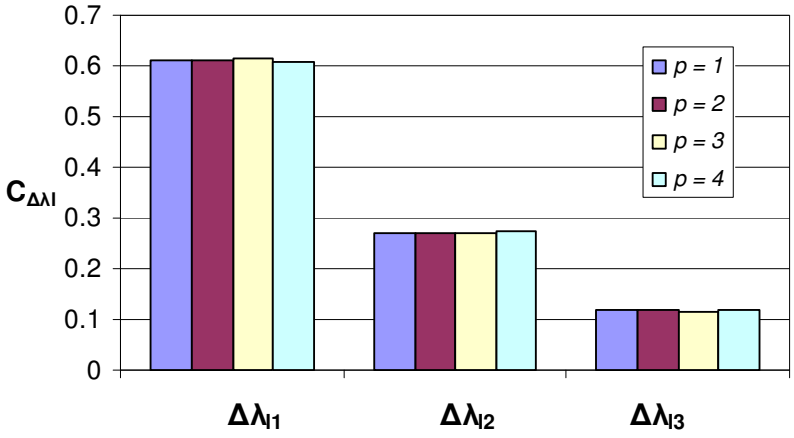


Figura 5.47 - Distribuição das bandas de energia para diferentes valores de regularização

Como era esperado o erro médio na superfície de projeto diminui à medida que aumenta-se a regularização, como mostra a Figura 5.48. O erro médio é a média aritmética do erro em todos os elementos.

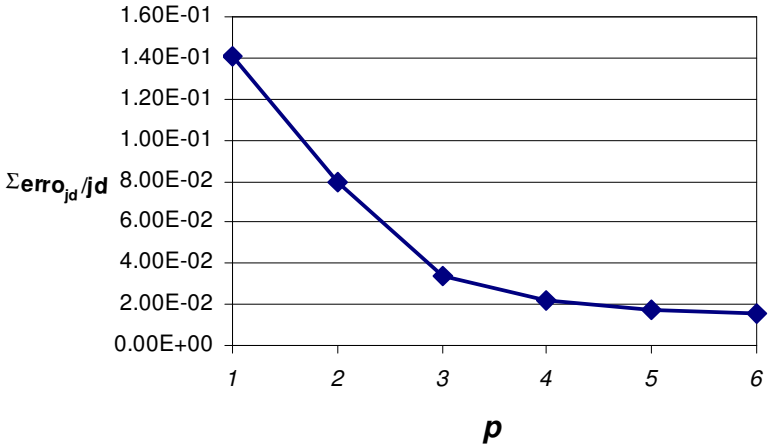


Figura 5.48 - Erro médio nas superfícies de projeto para diferentes valores de regularização.

É interessante observar que para os casos de regularização com $p = 3$ e $p = 5$, os fluxos de calor parciais para alguns aquecedores apresentaram alguns valores negativos, como mostram a Figura 5.36(a) e a Figura 5.40(a). Porém, os fluxos de calor totais, correspondentes ao somatório dos valores parciais de todas as bandas, apresentaram-se positivos, como esperado para aquecedores, o que torna as soluções aceitáveis do ponto de vista prático.

5.4. VARIANTE DAS EMISSIVIDADES (CASO 4)

No caso 4, foi testada uma configuração mais complexa de emissividades, para testar a robustez do método de cálculo. Foi criada uma condição de emissividades como mostra a Figura 5.49. A superfície do aquecedor teve seis bandas com dois valores, 0,7 e 0,8, enquanto que as superfícies de projeto e das paredes tiveram seis bandas, com valores variando de 0,2 a 0,9. Estes valores foram escolhidos arbitrariamente, para testar a rotina de cálculo. Todos os demais parâmetros, inclusive a regularização são iguais ao Caso 1.

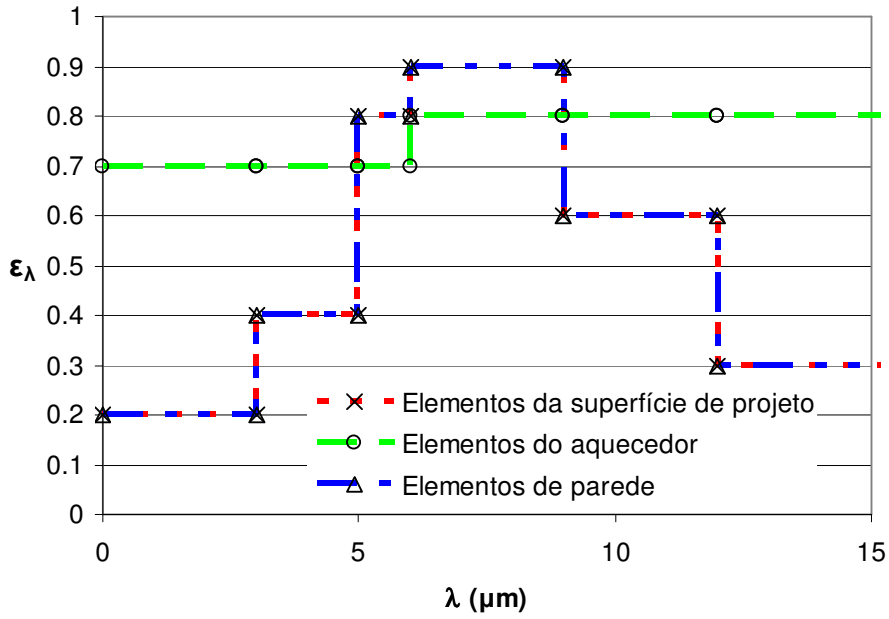


Figura 5.49 - Emissividades das superfícies da cavidade no Caso 4.

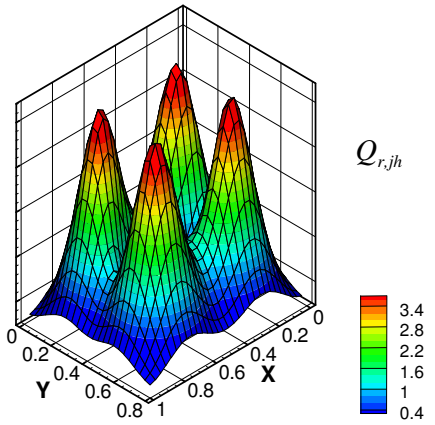


Figura 5.50 - (a) Fluxo total de calor na superfície aquecedora; (b) Fluxo total na superfície de projeto.

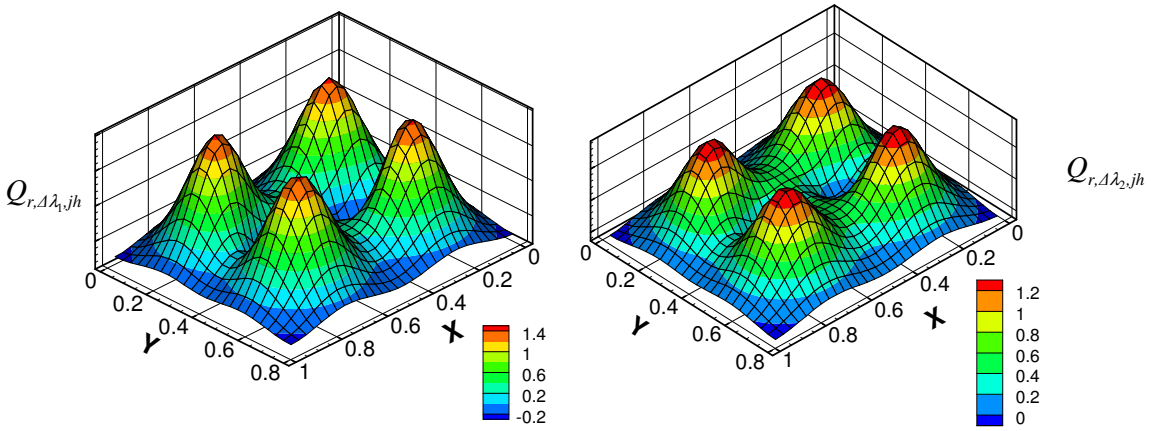


Figura 5.51 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2.

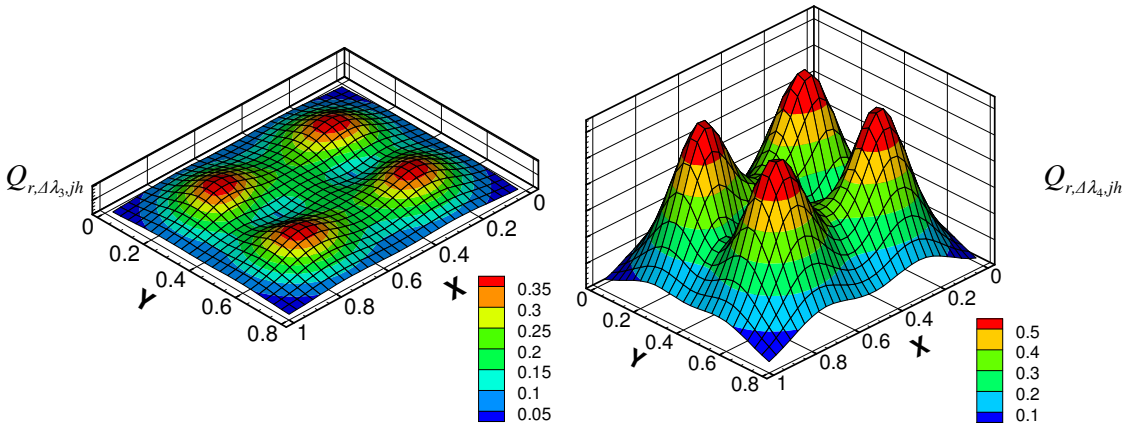


Figura 5.52 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 3; (b) banda 4.

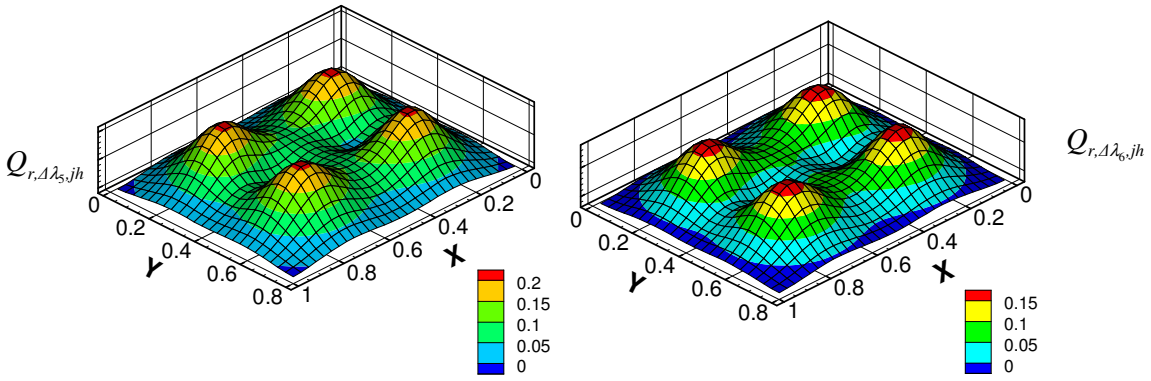


Figura 5.53 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 4; (b) banda 5.

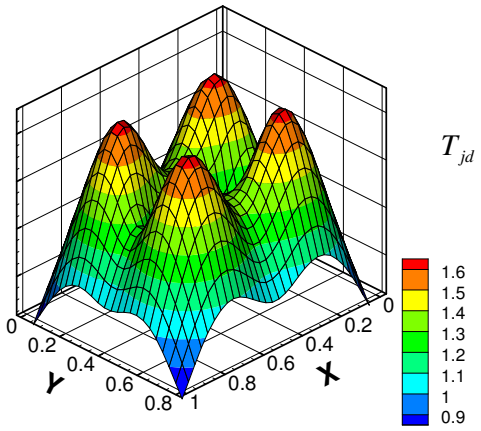


Figura 5.54 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora

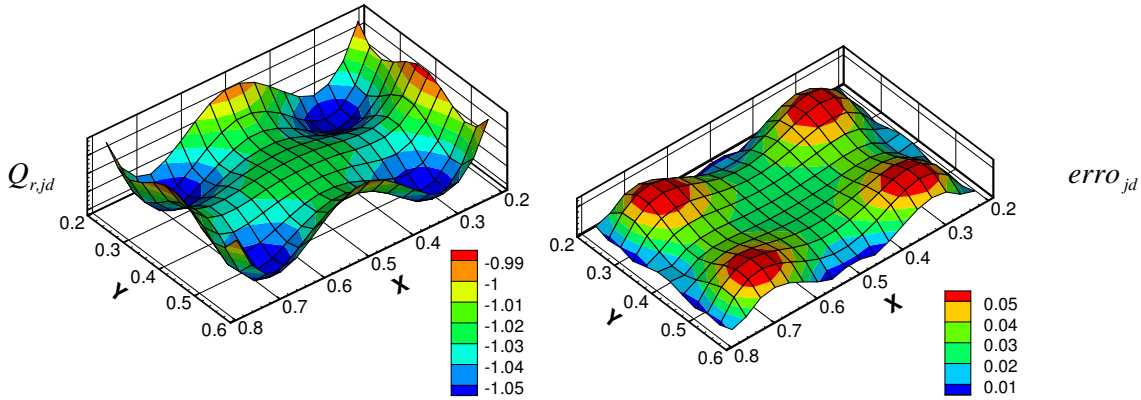


Figura 5.55 - (a) Fluxo total na superfície de projeto (b) Erro na superfície de projeto.

O erro médio no resultado da superfície de projeto foi de 3,17%, e o erro no balanço de energia ficou em $1{,}6\times10^{-2}$. A distribuição de calor nas seis bandas ficou respectivamente em 18,3%, 32,3%, 14,6%, 25,3%, 6,2% e 3,3%.

A distribuição das bandas de energia ficou conforme a Figura 5.56.

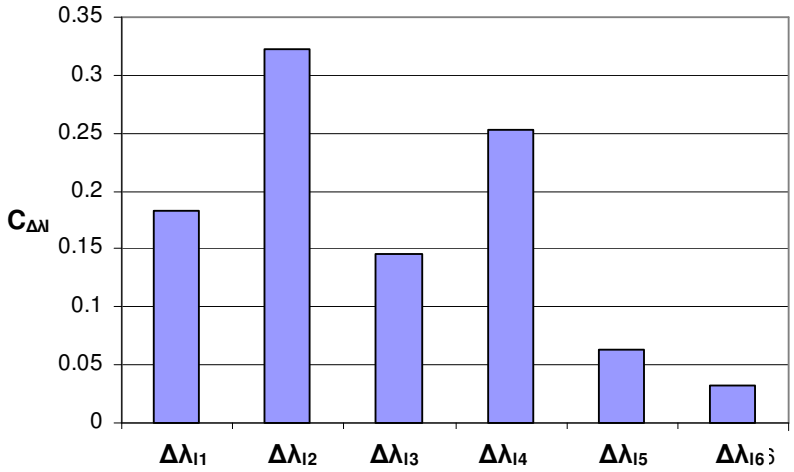


Figura 5.56 - Distribuição das bandas de energia no Caso 4.

Com estes resultados pode-se concluir que o método pode a princípio ser aplicado para quantas bandas for necessário, sendo apenas uma questão de tempo computacional. No Caso 4 o tempo de cálculo foi de 213 segundos, enquanto que para o Caso 1 o tempo foi de 66 segundos.

Ver o apêndice para uma tabela mais detalhada dos tempos de cálculo, e outros dados das soluções.

5.5. GEOMETRIA DO AQUECEDOR

Neste grupo de resultados foi mudada a configuração dos aquecedores, sendo que eles não cobrem toda a superfície superior da cavidade, mas são dispostos em linhas (tiras) transversais e longitudinais em relação às dimensões do forno.

5.5.1. Aquecedores transversais (Caso 5.1)

Neste caso foi considerado que o os elementos de aquecedor não cobrem toda a superfície aquecedora do forno. Como apresentado na Figura 5.57, os elementos aquecedores estão distribuídos em tiras transversais, que cortam o forno em sua largura. A figura mostra todo o domínio da superfície dos aquecedores, onde os elementos aquecedores com mesmo fluxo de calor tem a mesma numeração.

Esta configuração foi escolhida para reproduzir uma situação prática, pois os aquecedores são geralmente encontrados em elementos lineares. Dessa forma define-se a distribuição e calcula-se a potência de aquecedores em uma configuração com um *design* mais prático.

0	0	1	0	0	0	0	4	0	0	0	0	7	0	0	0	0	7	0	0	0	0	4	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	4	0	0	0	0	7	0	0	0	0	7	0	0	0	0	4	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	4	0	0	0	0	7	0	0	0	0	7	0	0	0	0	4	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	4	0	0	0	0	7	0	0	0	0	7	0	0	0	0	4	0	0	0	0	1	0	0
0	0	2	0	0	0	0	5	0	0	0	0	8	0	0	0	0	8	0	0	0	0	5	0	0	0	0	2	0	0
0	0	2	0	0	0	0	5	0	0	0	0	8	0	0	0	0	8	0	0	0	0	5	0	0	0	0	2	0	0
0	0	2	0	0	0	0	5	0	0	0	0	8	0	0	0	0	8	0	0	0	0	5	0	0	0	0	2	0	0
0	0	2	0	0	0	0	5	0	0	0	0	8	0	0	0	0	8	0	0	0	0	5	0	0	0	0	2	0	0
0	0	3	0	0	0	0	6	0	0	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	6	0	0	0	0	3	0	0
0	0	3	0	0	0	0	6	0	0	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	6	0	0	0	0	3	0	0
0	0	3	0	0	0	0	6	0	0	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	6	0	0	0	0	3	0	0
0	0	3	0	0	0	0	6	0	0	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	6	0	0	0	0	3	0	0
0	0	3	0	0	0	0	6	0	0	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	6	0	0	0	0	3	0	0
0	0	3	0	0	0	0	6	0	0	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	6	0	0	0	0	3	0	0
0	0	3	0	0	0	0	6	0	0	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	6	0	0	0	0	3	0	0
0	0	3	0	0	0	0	6	0	0	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	6	0	0	0	0	3	0	0
0	0	3	0	0	0	0	6	0	0	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	6	0	0	0	0	3	0	0
0	0	2	0	0	0	0	5	0	0	0	0	8	0	0	0	0	8	0	0	0	0	5	0	0	0	0	2	0	0
0	0	2	0	0	0	0	5	0	0	0	0	8	0	0	0	0	8	0	0	0	0	5	0	0	0	0	2	0	0
0	0	2	0	0	0	0	5	0	0	0	0	8	0	0	0	0	8	0	0	0	0	5	0	0	0	0	2	0	0
0	0	2	0	0	0	0	5	0	0	0	0	8	0	0	0	0	8	0	0	0	0	5	0	0	0	0	2	0	0
0	0	1	0	0	0	0	4	0	0	0	0	7	0	0	0	0	7	0	0	0	0	4	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	4	0	0	0	0	7	0	0	0	0	7	0	0	0	0	4	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	4	0	0	0	0	7	0	0	0	0	7	0	0	0	0	4	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	4	0	0	0	0	7	0	0	0	0	7	0	0	0	0	4	0	0	0	0	1	0	0

Figura 5.57– Distribuição dos aquecedores do Caso 5

No resultado do cálculo inverso os valores do fluxo de calor em cada aquecedor apresentado na Figura 5.57 têm valores diferentes em cada elemento. Para uniformizar o fluxo de

calor foi feita a média dos fluxos em cada aquecedor, e este valor é atribuído aos elementos correspondentes de cada aquecedor.

Dessa forma no cálculo direto foi adotada a média dos valores de fluxo de calor em cada aquecedor.

Abaixo estão os resultados deste cálculo. Na Tabela 5.5 estão os valores do fluxo de calor de cada aquecedor.

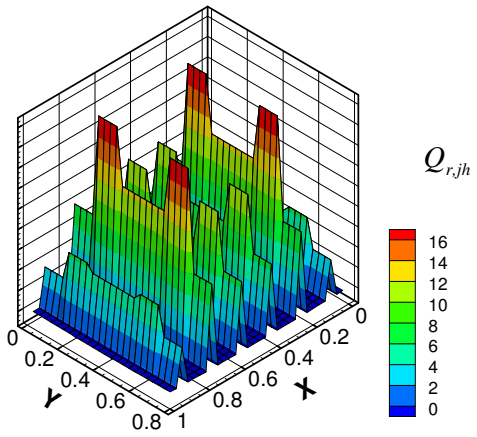


Figura 5.58 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora.

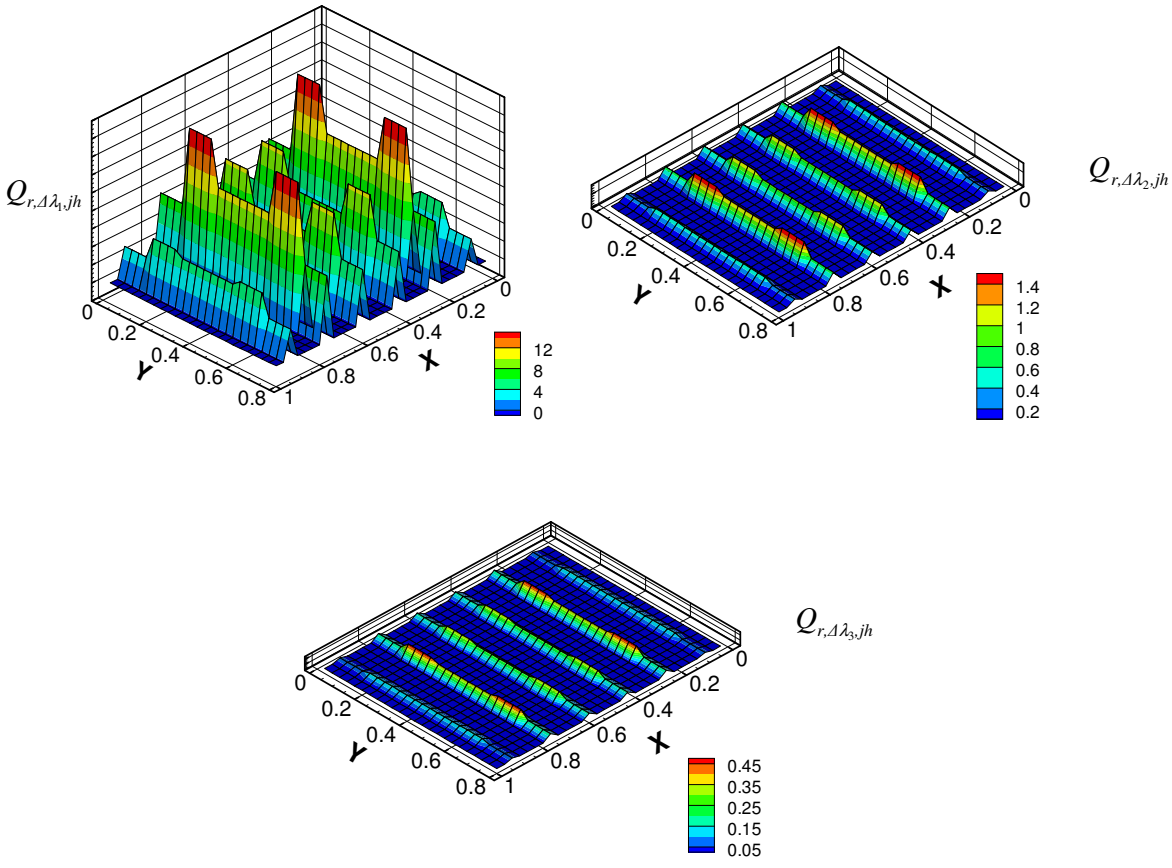


Figura 5.59 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.

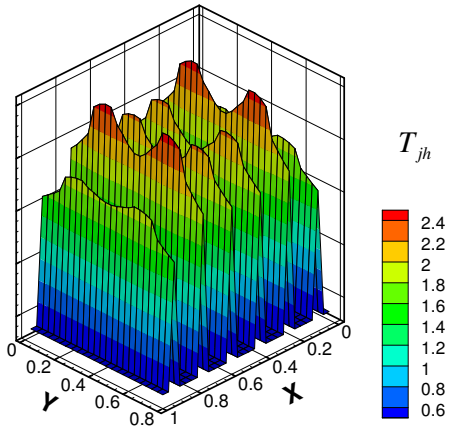


Figura 5.60 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora

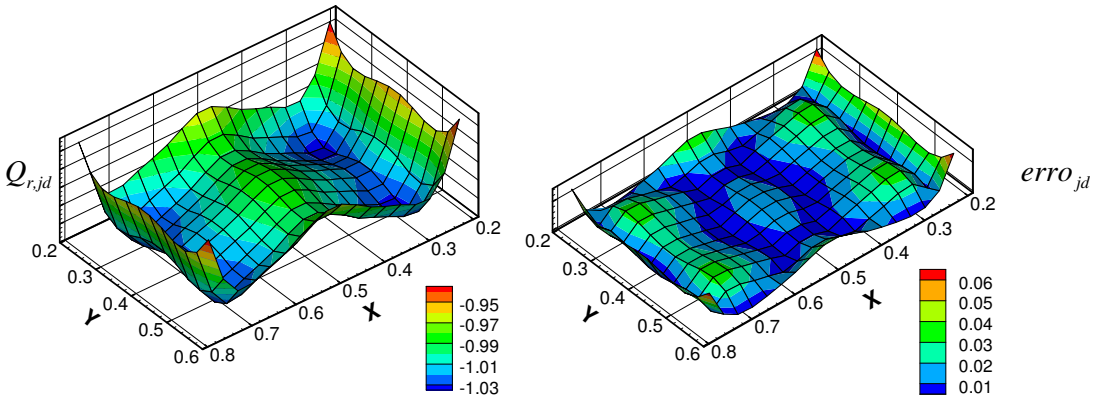


Figura 5.61 - (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro na superfície de projeto.

O erro percentual médio no resultado da superfície de projeto é de 1,8%, o balanço de calor ficou em $1{,}21\times10^{-3}$. A distribuição de calor nas três bandas ficou respectivamente em 82%, 13% e 5%. Nota-se a grande variação dos valores dos fluxos de calor como apresentado na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Valores do fluxo de calor total dos aquecedores

Aquecedor	Fluxo de calor (adimensional)
0	0
1	3,5514
2	6,3533
3	5,6675
4	8,0223
5	18,0178
6	12,4902
7	6,5777
8	12,0634
9	8,0355

5.5.2. Aquecedores Longitudinais (Caso 5.2)

Este caso é similar ao Caso 5.1, mas foi considerado que o os elementos aquecedores estão distribuídos em tiras longitudinais, que cortam o forno em seu comprimento, conforme mostra a Figura 5.62. A figura mostra todo o domínio da superfície dos aquecedores, sem simetrias.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 5.62 - Distribuição dos aquecedores do Caso 5.2

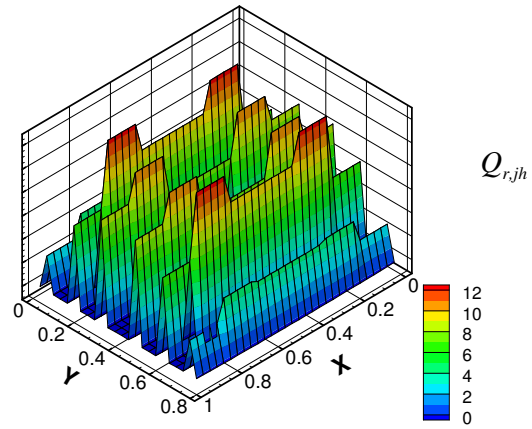


Figura 5.63 - Fluxo total de calor na superfície aquecedora.

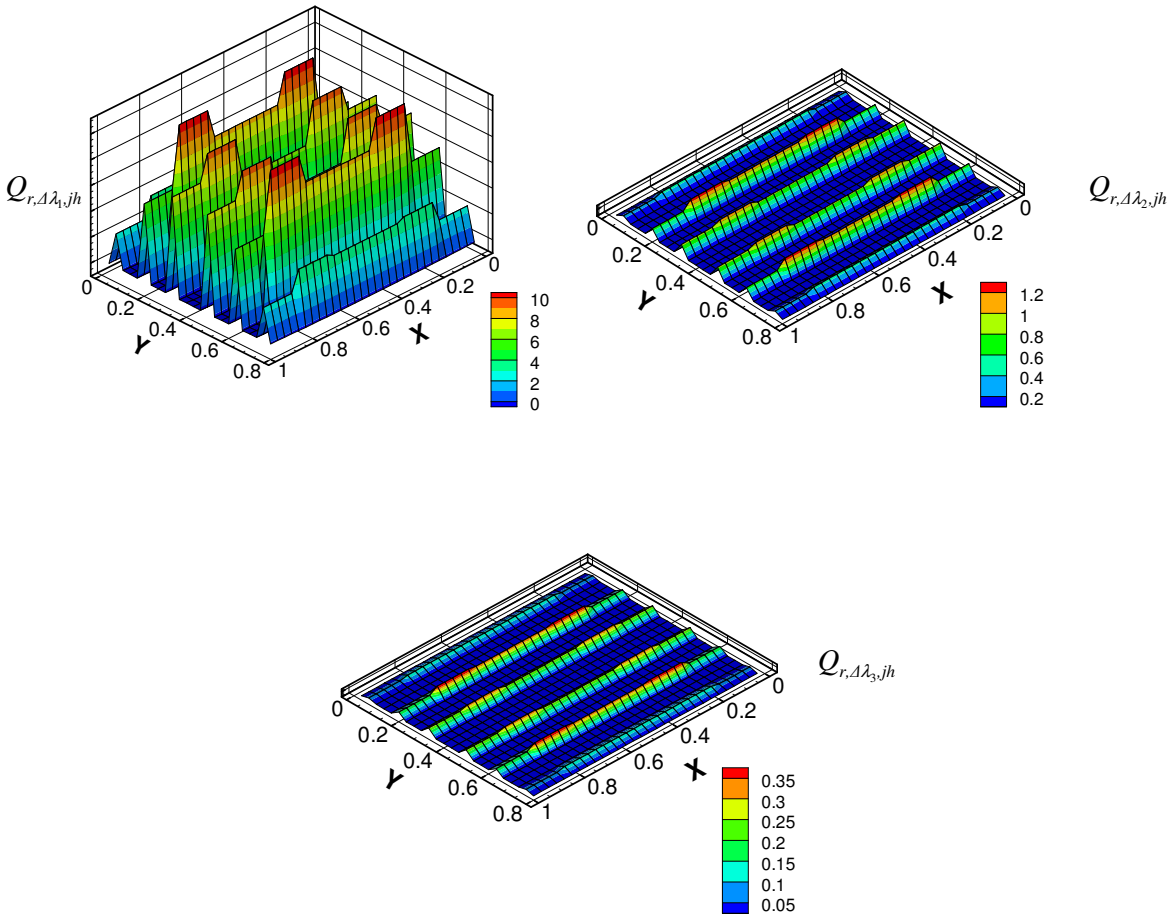


Figura 5.64 - Fluxos parciais de calor nos aquecedores (a) banda 1; (b) banda 2; (c) banda 3.

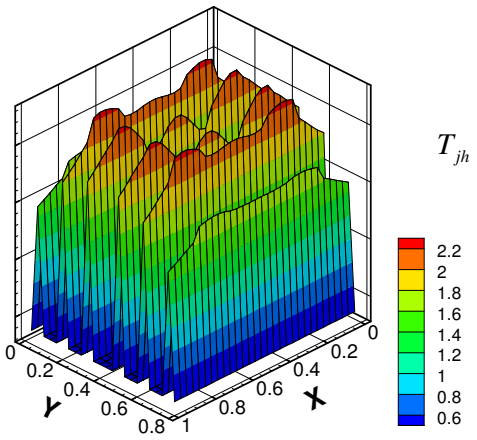


Figura 5.65 - Temperatura adimensional na superfície aquecedora

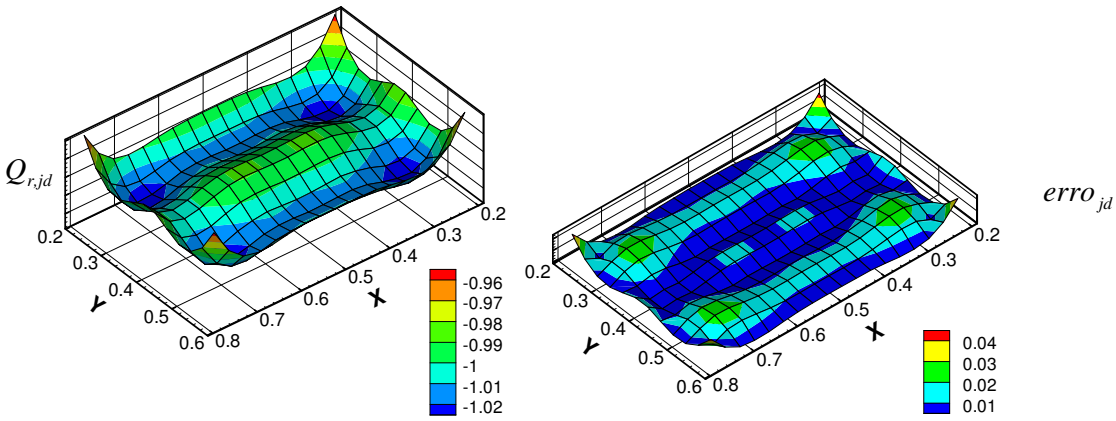


Figura 5.66 – (a) Fluxo total na superfície de projeto; (b) Erro da superfície de projeto.

O erro percentual médio no resultado da superfície de projeto é de 1,1%, e o balanço de calor ficou em $1{,}3\times10^{-3}$. A distribuição de calor nas três bandas ficou respectivamente em 80%, 15% e 5%.

Tabela 5.6 - Valores do fluxo de calor total dos aquecedores

Aquecedor	Fluxo de calor (adimensional)
0	0
1	2,8134
2	4,7007
3	4,4158
4	6,7840
5	12,3701
6	9,8302
7	8,6235
8	10,9882
9	7,4220

5.5.3. Discussão dos Resultados do Caso 5

Comparando-se os resultados notamos que o fluxo máximo de calor foi maior no Caso 5.1, tendo um valor de 18, enquanto no Caso 5.2 foi de 12,37. Isso reflete-se na maior temperatura máxima encontrada no Caso 5.1, que foi de 2,4, em relação ao Caso 5.2 que foi de 2.2.

O Caso 5.2 apresentou um erro médio de 1,1%. Para o Caso 5.1 o erro médio foi de 1,8%. Os valores máximo e mínimo do fluxo de calor na superfície de projeto apresentaram uma variação menor no Caso 5.2 em relação ao Caso 5.1. Assim percebe-se que o Caso 5.2 apresentou um resultado com menor erro, e com distribuição de calor mais uniforme do que o Caso 5.1.

6. CONCLUSÕES

Este trabalho considerou o projeto inverso de cavidades radiantes tridimensionais nas quais foram impostas simultaneamente condições de temperatura e fluxo de calor uniformes na superfície de projeto. O problema consistiu na determinação da potência dos elementos aquecedores que fossem capazes de satisfazer às duas condições impostas nas superfícies de projeto.

A contribuição deste trabalho foi a apresentação de uma metodologia de cálculo para resolver uma cavidade constituída de superfícies não-cinzas. A solução baseou-se no balanço radiante de energia em regiões espectrais (bandas) onde as emissividades espectrais das superfícies podem ser consideradas constantes. Neste cálculo, o fluxo de calor total da superfície de projeto é conhecido, mas as parcelas em cada banda são desconhecidas. Foi proposto um processo iterativo, onde os fluxos de calor em cada banda de energia são considerados inicialmente iguais. A correção das bandas de energia foi baseada na determinação da parcela de energia do poder emissivo dos elementos para cada banda.

O método empregado na solução das radiosidades parciais dos aquecedores é a regularização TSVD, pois o sistema resultante é mal-condicionado e não pode ser resolvido por métodos tradicionais. Nesta solução é formada uma séria de termos, onde apenas alguns termos são mantidos no somatório, sendo que o número de termos empregados corresponde ao parâmetro de regularização da solução.

Diversos cálculos foram realizados, variando-se a geometria da cavidade, o parâmetro de regularização, o número de bandas, e a distribuição dos elementos aquecedores. Os resultados apresentaram erros que variaram entre 1% e 14% em relação à taxa de calor imposta na superfície de projeto.

Observou-se que a altura da cavidade influencia os resultados, sendo que alturas muito pequenas e muito altas trazem um erro alto. Essa observação sugere que a escolha da altura da cavidade, objetivando a redução do erro da solução do problema inverso, pode envolver uma otimização.

A regularização do problema também trouxe variações de importância nos resultados. A escolha de valores pequenos para o parâmetro de regularização conduziram a respostas mais suaves (no sentido de menos oscilações) para o fluxo radiante líquido nos elementos aquecedores, mas um erro, em relação às condições especificados, mais elevado; por outro lado, valores mais altos geraram respostas mais oscilantes, mas com um erro mais baixo.

Outro fato observado ao variar a regularização foi o surgimento de alguns resultados onde em uma banda os aquecedores têm valores negativos de fluxo de calor, como mostram as Figura 5.36(a) e 5.40(a). Porém os resultados totais foram positivos conforme mostram a Figura 5.35 e 5.39. O surgimento de valores negativos é possível no método inverso. Isto não significa que há algum erro na metodologia. Este é um fato possível na metodologia, e estes resultados apenas devem ser descartados ao passar pela análise do projetista, pois não são resultados práticos.

O aumento do número de bandas trouxe um aumento no erro da solução inversa e um aumento no tempo de cálculo devido ao maior número de bandas a serem calculadas. Porém, de um modo geral, a metodologia proposta mostrou-se apta a resolver essa condição de maior maior complexidade, mesmo com valores de emissividade mais baixas em torno de 0,2 e 0,3.

Ao se diminuir o número de elementos aquecedores, o erro médio diminuiu. A distribuição dos elementos mostrou um perfil diferente no resultado dos fluxos de calor na superfície de projeto.

Algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Resolver o problema em regime transiente: esta metodologia poderia ser modificada para seguir uma curva de aquecimento prescrito a exemplo de França e Howell (2005).
- Cálculo com paredes adiabáticas: ao colocar-se condições de contorno com paredes adiabáticas o forno estará se comportando como em regime permanente. Teria de se levar em conta que o fluxo total de calor nas paredes é zero, mas os valores parciais podem não ser.
- Tratamento como problema de otimização: poderia ser utilizado um método de otimização combinado com o método inverso; ou então um método de otimização para fazer um refinamento do resultado do cálculo inverso de forma a obter um fluxo de calor mais uniforme na superfície de projeto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alifanov, O.M., Artyukhin, E.A., Rumyantsev, S.V, 1995. "**Extreme methos for solving ill-posed problems with applications to inverse heat transfer problems**", New York, NY: Begel House.

Beck, J.V., Blackwell, B., Clair, Jr.St., 1995. "**Inverse heat conduction: ill-posed problems**". New York, NY: Wiley.

Daun, K., França, F.H.R., Larsen, M., Leduc, G. e Howell, J.R., 2006. "**Comparison of methods for inverse design of radiant enclosures**", ASME Journal of Heat Transfer, 128, 269-282.

De Sousa, F. L., Ramos, F. M., Paglione, P., e Girardi, R. M., 2003. "**New Stochastic Algorithm for Design Optimization**", AAIA Journal, Vol. 41, No. 9, pp. 1808-1818.

França, F., Howell, J., Ezekoye, O. e Morales, J.C., 2002. "**Inverse design of thermal systems**", J.P. Hartnett and J.P. Irvine (Eds) Advances in Heat Transfer (San Diego: Academic Press) 36, 1-110.

França, F.H.R. and Howell, J.R., 2005. "**Transient inverse design of radiative enclosures for thermal processing of materials**", Inverse Problems in Science and Engineering, 14(4), 423-436.

Goncharsky, A.V, Romanov, S.Y., Cherepashchuk, A.M., 1991. "**Finite-parametric inverse problems in astrophysics**", Moscow University.

Hanke, M., 1995 "**Conjugate gradient type methods for ill-posed problems**", New York, NY, Wiley.

Hansen, P.C., 1998. "**Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion**", (Philadelphia: SIAM).

Hansen, P.C., 1992. "**Numerical Tools for Analysis and Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind**", Inverse Problems, Vol. 8, pp. 849-872.

Ki, W.K., Seung, W.B., 2007. "**Inverse radiation-conduction design problem in a participating concentric cylindrical medium",** International Journal of Heat and Mass Transfer, 50, pp., 2828-2837.

Ki, W.K., Seung, W.B., Man, Y.K., Hong, S.R., 2004. "**Estimation of emissivities in a two-dimensional irregular geometry by inverse radiation analysis using hybrid genetic algorithm",** Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 87, pp., 1-14.

Matsumura, M., 1997. "**Optimal Design of Industrial Furnaces by Using Numerical Solution of the Inverse Radiation Problem**", Tese de Mestrado, Dept. of Mechanical Engineering, The University of Texas at Austin, May.

Matsumura, M., Morales, J.C., e Howell, J.R., 1998. "**Optimal Design of Industrial Furnaces by Using Numerical Solution of the Inverse Radiation Problem**", Proc. 1998 Int. Gas Research Conf., San Diego, Nov.

Mossi, A. C., Schneider, P. S., França, F. H. R., Sousa, F. L. e Silva Neto, A. J., 2007. "**Application of the Generalized Extremal Optimization (GEO) Algorithm in an Illumination Inverse Design**", Proceedings of the 19th International Congress of Mechanical Engineering, COBEM 2007, Brasília, DF.

Mossi, A. C., Vielmo, H. A., França, F. H. R. e Howell, J., 2008. "**Inverse Design Involving Combined Radiative and Turbulent Convective Heat Transfer**", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 51, pp. 3217-3226.

Morales, J.C.; Harutunian, V.; Oguma, M. e Howell, J.R., 1996. "**Inverse Design of Radiating Enclosures with an Isothermal Participating Medium**", Radiative Transfer I:-Proc. First Int. Symp. on Radiative Heat Transfer, M. Pinar Menguc, ed., pp. 579-593, Begell House.

Rukolaine, S.A., 2007, "**Regularization of inverse bondary design radiative heat transfer problems",** Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Heat Transfer, Vol 104, pp. 171-195

Seewald, A., Schneider, P. S., e França, F. H. R, 2006. "**Inverse Design of a Illumination System Having Non-Gray Walls**", Proceedings of the 11th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences, ENCIT 2006, Curitiba, PR.

Siegel, R. Howell, J.R., 2002. "**Thermal Radiation Heat Transfer"**, Taylor & Francis, 4a. ed, Nova Iorque.

Silva Neto, A. J., e Moura Neto, F. D., 2005. "**Problemas Inversos: Conceitos Fundamentais e Aplicações**", Editora da UERJ.

APÊNDICE

Todos os cálculos foram feitos em um computador AMD Athlon XP 1700+ (1,47 GHz) com 256 Mb de memória RAM, com placa mãe ASUS A7S333 com Windows XP Professional 2002, SP 2.

O compilador utilizado foi Microsoft Visual C++ 6.0.

CASOS	Descrição	Tempo de Cálculo (s)	Erro Médio ($erro_{qr,d}$)	Balanço de Calor (B)
Caso 1	Caso Base	66.516	2.206E-02	5.439E-03
Caso 2	Geometria da cavidade			
2.1	*H/L = 0,1*	45.235	5.464E-02	1.100E-02
2.2	*H/L = 0,3*	115.203	1.316E-02	3.359E-03
2.3	*H/L = 0,4*	171.625	3.521E-02	9.784E-03
Caso 3	Regularização do TSVD			
3.1	*p = 1*	76.594	1.412E-01	1.001E-02
3.2	*p = 2*	73.672	7.931E-02	7.518E-03
3.3	*p = 3*	84.484	3.422E-02	6.708E-03
3.4	*p = 5*	80.313	1.738E-02	5.423E-03
3.5	*p = 6*	74.109	1.574E-02	4.980E-03
Caso 4	Variante das emissividades	213.812	3.174E-02	1.628E-02
Caso 5	Geometria do aquecedor			
Caso 5.1	Aquecedores em tiras transversais	93.062	1.851E-02	1.206E-03
Caso 5.2	Aquecedores em tiras longitudinais	91.625	1.086E-02	1.298E-03