

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

GUSTAVO ADOLFO KELLERMANN

**Aspectos Estatísticos e Dinâmicos do Jogo
do Ultimato Espacial e Não-espacial**

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Ciência da Computação

Prof. Dr. Roberto da Silva
Orientador

Porto Alegre, agosto de 2008

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Kellermann, Gustavo Adolfo

Aspectos Estatísticos e Dinâmicos do Jogo do Ultimato Espacial e Não-espacial / Gustavo Adolfo Kellermann. – Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 2008.

69 f.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Computação, Porto Alegre, BR-RS, 2008. Orientador: Roberto da Silva.

1. Econofísica. 2. Jogo do ultimato. 3. Sistemas dinâmicos. 4. Teoria dos jogos. I. Silva, Roberto da. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Prof. José Carlos Ferraz Hennemann

Vice-Reitor: Prof. Pedro Cezar Dutra Fonseca

Pró-Reitora de Pós-Graduação: Prof^ª. Valquíria Linck Bassani

Diretor do Instituto de Informática: Prof. Flávio Rech Wagner

Coordenadora do PPGC: Profa. Luciana Porcher Nedel

Bibliotecária-chefe do Instituto de Informática: Beatriz Regina Bastos Haro

Para Márcia, com amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, dos quais o amor e exemplo foram o maior incentivo para chegar até aqui.

Este trabalho não teria sido possível sem a presença de um orientador apaixonado pelo que faz. Roberto, obrigado pela sua paciência e dedicação total à ciência.

Agradeço ao CNPq pelo custeio do mestrado através de uma bolsa, e à UFRGS, pelo uso de suas instalações e seu apoio ao PPGCC.

Foram utilizadas diversos programas livres na realização deste trabalho: agradeço aos autores do sistema operacional GNU/Linux, do \LaTeX e do Gnuplot. Também foi utilizada a linguagem Java disponibilizada gratuitamente pela Sun.

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	7
LISTA DE SÍMBOLOS	8
LISTA DE FIGURAS	9
LISTA DE TABELAS	11
RESUMO	12
ABSTRACT	13
1 INTRODUÇÃO	14
2 VISÃO GERAL DA TEORIA DOS JOGOS CLÁSSICA, EVOLUCIONÁRIA E ESPACIAL	17
3 ESTUDO COMPARATIVO DE ESTRATÉGIAS DO JOGO DO ULTIMATO NÃO ESPACIAL	24
3.1 Modelo	24
3.1.1 O jogo	24
3.1.2 A população	25
3.1.3 Estratégias	26
3.2 Cálculo analítico da média, variância, e demais momentos do ganho	27
3.3 Simulações computacionais e representação do tempo na versão não espacial do JU	29
3.4 Casos de estudo	30
3.4.1 População com jogadores teimosos, uniformes a gananciosos	30
3.4.2 Teimosos e justos com preponderância variável	32
3.4.3 Comparação de jogadores justos e teimosos	33
3.4.4 Variância do ganho de jogadores justos: comparando formas de modelar o tempo do jogo	35
3.4.5 Uma dinâmica simples do <i>cutoff</i> em jogadores justos	40
4 ANÁLISE DE ASPECTOS EVOLUTIVOS NO JOGO DO ULTIMATO ESPACIAL	44
4.1 Modelagem	44
4.1.1 Estratégias analisadas	44
4.1.2 Unidade de tempo empregada e a ordem de participação dos jogadores	45
4.1.3 Dinâmicas	46

4.1.4	Rede utilizada e demais parâmetros de simulação	46
4.2	Morte e nascimento com amostragem seletiva	47
4.2.1	Descrição	47
4.2.2	Resultados	47
4.3	Gibbs Sampling sobre vizinhança	54
4.3.1	Descrição	54
4.3.2	Resultados	56
5	CONCLUSÃO	64
5.1	Revisão dos resultados	64
5.2	Trabalhos futuros	65
	REFERÊNCIAS	66

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

JU	Jogo do Ultimato
MNAS	Morte e Nascimento com Amostragem Seletiva
GS	Gibbs Sampling

LISTA DE SÍMBOLOS

$a_k()$	Função de aceitação, componente da estratégia do grupo de índice k
$E(s)$	Custo (energia) da estratégia s
$g_p(s_p, s_a)$	Ganho da estratégia s_p atuando como proponente contra s_a
$g_a(s_a, s_p)$	Ganho da estratégia s_a atuando como aceitador contra s_p
$g(s_x, s_y)$	Ganho da estratégia s_x com os papéis escolhidos aleatoriamente
N	Tamanho da população
n_E	Quantidade de encontros realizados em uma simulação
n_P	Quantidade de participações de jogadores em uma simulação
n_T	Quantidade de turnos realizados em uma simulação
n_{Tc}	Quantidade de turnos em um ciclo
n_{run}	Quantidade de execuções em uma simulação
p	Quantidade de grupos de jogadores em uma população
$p_k()$	Função de proposta, componente da estratégia do grupo de índice k
s_k	Estratégia do grupo de índice k
T	Temperatura
t	Tempo, em ciclos
t_{conv}	Tempo de convergência
w	Valor do ultimato
w_a	Valor mínimo aceito (nível de exigência)
w_c	<i>Cutoff</i> : parâmetro das estratégias de jogadores teimosos e justos
w_{cJ}	<i>Cutoff</i> de jogadores justos
w_{cT}	<i>Cutoff</i> de jogadores teimosos
w_p	Valor desejado pelo proponente
Φ_{s_k}	Proporção relativa do grupo de índice k na população
ρ	Matriz de preponderância
$\rho_{i,j}$	Preponderância do jogador de tipo i em relação ao de tipo j

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1:	Jogo do ultimato com $w = 4$ na forma extensiva	24
Figura 3.2:	Ganho médio de um jogador fixo e seu desvio padrão	32
Figura 3.3:	Histogramas do ganho recebido por jogadores teimosos	33
Figura 3.4:	Ganho médio dos jogadores justos em função de seu <i>cutoff</i> e ρ	34
Figura 3.5:	Desvio padrão do ganho dos jogadores recíprocos em função de seu <i>cutoff</i> e ρ	35
Figura 3.6:	Ganho médio de jogadores nos embates de justos e teimosos	36
Figura 3.7:	Histogramas do ganho médio obtido a cada 10 turnos, em uma população uniforme de jogadores justos.	37
Figura 3.8:	Histogramas do ganho médio obtido a cada 1000 encontros, em uma população uniforme de jogadores justos.	38
Figura 3.9:	Variância do ganho médio recebido por um jogador em uma quantidade variável de turnos	38
Figura 3.10:	Evolução temporal das médias da idade e do ganho	41
Figura 3.11:	Lei de potência para a evolução temporal do <i>cutoff</i>	42
Figura 3.12:	Histogramas do <i>cutoff</i> no caso dinâmico	43
Figura 3.13:	Histogramas do ganho médio no caso dinâmico	43
Figura 4.1:	Diagrama esquemático para a definição de estratégias de jogadores justos e teimosos.	45
Figura 4.2:	MNAS na ordem direta: densidade das estratégias em uma execução.	48
Figura 4.3:	MNAS na ordem direta: média da densidade das estratégias em $n_{run} = 1000$ execuções.	49
Figura 4.4:	MNAS com ciclos de um turno: média da densidade das estratégias em $n_{run} = 1000$ execuções.	50
Figura 4.5:	MNAS em ciclos de 8 turnos: média da densidade das estratégias em $n_{run} = 1000$ execuções.	51
Figura 4.6:	MNAS: evolução temporal da média dos parâmetros w_p e w_a em $t = 10^4$ ciclos	51
Figura 4.7:	Histograma do tempo de convergência para os diferentes tipos de ordenamento	52
Figura 4.8:	Frequência do excedente do tempo de convergência, $F(t_{conv} > x)$	53
Figura 4.9:	Índices para as estratégias vizinhas em GS	55
Figura 4.10:	Probabilidade de escolha da estratégia s_1 , de ganho $-E(s_1)$, contra uma estratégia s_2 com ganho $-E(s_2) = 50$, para alguns valores de temperatura T	57
Figura 4.11:	GS: Médias de w_p e w_a no ordenamento direto.	58

Figura 4.12: GS: Média e desvio da média de w_p em ciclos de 1 turno.	59
Figura 4.13: Faixa de valores de w_p em função de T para GS em ciclos diretos e de 1 turno.	60
Figura 4.14: Diagramas da densidade das estratégias na convergência para o GS em ciclos de 1 turno.	60
Figura 4.15: GS: Média de w_p em ciclos de 2 turnos.	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Estratégias estudadas.	27
Tabela 4.1: Classificação de reciprocidade para análise da densidade de estratégias.	45

RESUMO

Nesta dissertação é explorado o comportamento emergente de uma população heterogênea de jogadores negociando segundo o jogo do ultimato: dois jogadores recebem uma oferta; um deles (o proponente) propõe a sua divisão, enquanto o outro jogador (o aceitador) pode aceitar ou rejeitar a proposta. A rejeição é prejudicial a ambos jogadores, pois nenhum deles recebe sua parcela dos possíveis ganhos. Neste contexto, o ganho e seus momentos são calculados a partir de métodos analíticos simples e várias simulações computacionais corroboram os resultados obtidos. Também são analisadas as flutuações estatísticas da distribuição do ganho. Além disso, é apresentada uma abordagem simples evolucionária que considera mudanças em estratégias baseadas em ganhos anteriores. Para este caso, é demonstrado que o tempo médio de permanência (idade) de uma estratégia de uma população de “justos” converge para um valor constante enquanto t se aproxima do ∞ e o *cutoff* médio decai segundo uma lei de potência em tempos altos, após uma queda inicial. Também foram observadas transições entre comportamentos de alto e baixo ganho. Adicionalmente foi estudada uma versão espacial desse modelo. Para tanto são considerados jogadores interagindo com seus primeiros vizinhos em reticulados 2D de acordo com duas dinâmicas estocásticas: (1) morte e nascimento com amostragem seletiva (MNAS), (2) Gibbs sampling sobre a vizinhança (GS). Estes resultados trazem importantes considerações sobre o projeto de simulações no contexto da teoria dos jogos evolucionários, em particular na simulação dos aspectos relevantes quando modelando grandes populações.

Palavras-chave: Econofísica, jogo do ultimato, sistemas dinâmicos, teoria dos jogos.

Statistical and Dynamical Aspects of Spatial and Non-spatial Ultimatum Game

ABSTRACT

We explore the emergent behavior of a heterogeneous population of players negotiating via an ultimatum game: two players are offered a gift; one of them (**the proposer**) suggests how to divide the offer while the other player (**the responder**) can either agree or reject the deal. Rejection is detrimental to both players as it results in no earnings. In this context, the payoff and its moments are calculated from simple analytical methods and several computer simulations corroborate the obtained results. We also analyze statistical fluctuations on payoff distribution. In addition, we present a simple evolutionary approach that considers changes in strategies based on previous earnings. For this case, we show that average permanence time (age) in a strategy of a fair population converges to a constant value when t approaches ∞ and the cutoff average decays as a power law for large times after a initial deterministic slip. We have also observed transitions between high-low payoff behaviors. Additionally we studied a spatial version of this model. For this we consider players interacting with their nearest neighbors in 2D lattices according to two different stochastic dynamics: (1) Death and birth with selective sampling (MNAS), (2) Gibbs sampling on neighborhood (GS) We believe that these results can bring important considerations to the design of simulations in the context of the evolutionary game theory, in particular in the simulation of relevant features when modeling large populations.

Keywords: Econophysics, Dynamical Systems, Game Theory, Ultimatum Game.

1 INTRODUÇÃO

A teoria dos jogos formaliza uma tomada de decisão numa situação cujo resultado depende das decisões tomadas por outros participantes, provavelmente adversários. Este processo é chamado de jogo e as escolhas disponíveis para seus jogadores são denominadas estratégias. Uma tomada de decisão que envolva um único indivíduo não necessita da teoria dos jogos para ser resolvido. Por exemplo, no início de (Von NEUMANN; MORGENSTERN, 1953)¹ dois dos fundadores da teoria dos jogos a comparam com uma “economia de Robson Crusoe”, um modelo em que cada pessoa está isolada (como o naufrago em uma ilha antes desabitada), e otimiza seus recursos apenas segundo suas próprias necessidades. A conclusão é direta: não é possível modelar um processo de tomada de decisão, onde os objetivos e preferências dos participantes está potencialmente em conflito, apenas como uma soma das preferências individuais. O poder preditivo da teoria dos jogos está em determinar o modo como os agentes irão se comportar, que é o resultado do processo em estudo e chamado de solução do jogo. O mais importante é que ao longo da teoria dos jogos foram desenvolvidos diversos conceitos de solução com aplicabilidade variável. Os mais famosos são o algoritmo minmax (Von NEUMANN, 1928) e o equilíbrio de Nash (NASH, 1950). Essas soluções dependem, na forma clássica da teoria, de que os agentes sejam perfeitamente racionais, o que por si só é motivo de debate (Von NEUMANN; MORGENSTERN, 1953; HEAP; VAROUFAKIS, 2004), pois para isso os agentes devem ter bem claras suas preferências e, de certa forma, ativamente “calcular” quais são as melhores opções. Há problemas teóricos e experimentais nessa abordagem.

Do ponto de vista teórico o equilíbrio de Nash é uma solução muito abrangente, podendo ser aplicado à uma gama muito ampla de jogos. Esse equilíbrio ocorre quando os agentes adotam um conjunto de estratégias tal que não é vantajoso para nenhum deles trocar sua estratégia individualmente. Para alguns jogos há diversos equilíbrios (soluções) e, portanto, é necessário um refinamento (critério adicional) para que os agentes possam decidir entre os equilíbrios. Há diversos refinamentos que se aplicam a diferentes classes de jogos.

O tema central desta dissertação é o jogo do ultimato (JU). No JU dois agentes irão receber um valor se um deles aceitar a divisão proposta pelo outro. Para este jogo há diversos equilíbrios de Nash possíveis. A escolha entre eles pode ser feita por *backward induction*². Se o segundo jogador for racional, ele irá preferir receber qualquer valor

¹A primeira edição desse livro é de 1944 (Von NEUMANN; MORGENSTERN, 1944), mas na maior parte da dissertação é citada a edição de 1953, pois foi a esta que o autor teve acesso.

²Conforme (HEAP; VAROUFAKIS, 2004): “backward induction is the process of reasoning backwards in time, from the end of a problem or situation, to determine an optimal course of action.” No caso do JU, primeiro são consideradas as opções do aceitador para depois voltar um passo atrás e verificar as opções do

ao invés de não receber nada, que seria o caso se ele rejeitasse a oferta. Portanto, o primeiro, sabendo que qualquer proposta que dê algum ganho ao segundo será aceita, irá reservar para si o maior ganho possível e deixar o menor valor possível para o segundo. Essa solução contraria o senso comum e o que foi encontrado em experiências onde são coletados os resultados de um grupo de pessoas participando no jogo. (OOSTERBEEK; SLOOF; KUILEN, 2004) possui um resumo dos resultados de mais de 70 experimentos com o JU, mostrando que a oferta típica fica perto dos 50% e valores abaixo de 30% costumam ser rejeitados, principalmente na cultura ocidental. Esses valores podem ser diferentes em outras culturas (HENRICH, 2000) mas de forma geral são muito diferentes dos previstos utilizando *backward induction*.

O JU foi alvo de diversos experimentos econômicos a partir de (GÜTH; SCHMITT-BERGER; SCHWARZE, 1982), alguns dos quais com o objetivo de testar novas extensões do jogo ou variações populacionais. Dessa forma, (MURNIGHAN; SAXON, 1998) descobriu diferenças de comportamento em diferentes faixas etárias; (RUFFLE, 1998) fez com que o valor a ser dividido fosse obtido pelos jogadores como o excedente de uma tarefa (em um exercício que exige habilidade) e comparou os desejos de premiar o mérito e de dividir os ganhos de forma igualitária; em (CAMERON, 1999) são divididos valores altos (*high stakes*), com uma rejeição menor mas sem que a divisão se afaste do meio a meio; (GNEEZY; HARUVY; ROTH, 2003) realizou um experimento onde o jogo podia ser repetido até os jogadores entrarem em acordo, com ou sem um limite de tempo; (WINTER; ZAMIR, 2005) adicionou jogadores virtuais (programas) que jogavam segundo a estratégia justa ou a racional; (SCHOTTER; SOPHER, 2007) incluiu a possibilidade de jogadores receberem conselhos dos que jogaram antes, com o objetivo de estudar o surgimento de uma norma social e a forma ela é passada de um grupo a outro; o livro (HENRICH et al., 2004) e o artigo (HENRICH et al., 2006) trazem os resultados de um estudo em larga escala em diferentes culturas com pouco contato com a ocidental, com o objetivo de verificar a influência cultural (ou normas sociais) nas interações entre indivíduos.

De forma geral, esses estudos estabelecem diversos fatores que modificam os valores oferecidos e os aceitos no JU, mas todos concordam que raramente a estratégia racional é adotada. No entanto, a divisão pode variar bastante entre um contexto e outro, levando ao conceito de que os níveis de “justiça” ou “reciprocidade” são diferentes. Nas palavras de (ALVARD, 2004), “As the results in this volume show, people do not universally play fair. The question is no longer why do people seem to have a preference for fairness. The question is now: do people behave more or less fair in adaptive ways?”. Esse autor continua a discussão com foco no meio de vida de diversas sociedades e em especial a economia de caçadores e coletores vigente na pré-história e também em algumas tribos onde foi realizado o experimento com o JU. Os fatores ressaltados por ele são a quase total ausência de transações anônimas e os diferentes ganhos relacionados à cooperação. É levantada a hipótese de que, quanto maior a dependência do trabalho em equipe para obter maiores resultados, maior a ênfase em uma divisão justa dos ganhos.

Certamente este é um aspecto importante, mas não o único, e continua sendo necessário o estudo dos mecanismos envolvidos no desenvolvimento de estratégias e normas sociais, que inclui a evolução da linguagem e os mecanismos de aprendizado de uma forma geral. No primeiro caso, no capítulo X de (NOWAK, 2006a), Nowak relaciona a necessidade de comunicar informações complexas³ nas interações rotineiras como um

proponente.

³Esta afirmação é feita no contexto que trata da importância da reputação direta ou indireta para o

grande estímulo evolucionário para o desenvolvimento da linguagem. No segundo, o artigo (GALE; BINMORE; SAMUELSON, 1995) estuda a relação entre aprendizado e o JU.

No presente trabalho são exploradas situações em que ocorre o estabelecimento de níveis variados de reciprocidade, sem a necessidade de agentes complexos. No caso evolucionário isso ocorre dependendo da dinâmica adotada e de seus parâmetros, como foi notado por (SÁNCHEZ; CUESTA, 2005). No capítulo 4 serão estudadas duas dinâmicas - morte e nascimento com amostragem seletiva (MNAS) e Gibbs *sampling* (GS) - e seus efeitos sobre as estratégias adotadas pelos agentes.

Esta dissertação é estruturada como se segue. No capítulo 2 é feita uma revisão de conceitos e história da teoria dos jogos. São indicadas tendências da pesquisa na área nos últimos anos, com enfoque especial na econofísica. É apresentado o conceito de racionalidade na teoria dos jogos e sua relação com o JU, além de uma apresentação um pouco mais detalhada do mesmo.

Os experimentos realizados com o JU deixaram claro que as estratégias adotadas pelos humanos não são uniformes e se distanciam do valor teórico esperado. Portanto, faz sentido realizar um estudo estatístico de populações com diferentes estratégias. Isso é feito no capítulo 3 desta dissertação, que trata de uma população de jogadores num arranjo não espacial (ou seja, quaisquer dois agentes podem se encontrar) onde é analisada a distribuição do ganho obtido e suas flutuações. Para essa população é realizado um estudo analítico e computacional de propriedades estatísticas do ganho obtido pelos agentes. Esse estudo mostra como a média e variância do ganho muda com a composição da população em termos de estratégias e de iniciativa, ou seja, da capacidade de iniciar primeiro uma negociação e ser o proponente. São empregadas duas unidades de tempo diferentes para a análise de flutuações do ganho em tempos curtos. Esse tipo de estudo não é muito comum porque a teoria dos jogos clássica deveria sempre determinar o conjunto de estratégias adotadas pelos jogadores, determinando um único valor para o ganho e podendo desprezar flutuações desse ganho. As evidências experimentais mostram que isso não pode ser desprezado.

Já no capítulo 4 é abordado o JU espacial. Neste caso os agentes estão dispostos em uma rede quadrada regular (reticulado) e podem interagir apenas com os vizinhos mais próximos. Além disso as estratégias dos agentes mudam com o tempo segundo diferentes dinâmicas. Essas dinâmicas levam em consideração o ganho do jogador e de seus vizinhos e suas estratégias no ciclo t para escolher uma nova estratégia no ciclo $t + 1$. São propostas versões modificadas tanto da regra morte e nascimento quanto da dinâmica Gibbs *sampling*.

Por último, na conclusão são apresentados um resumo dos resultados obtidos e sugestões de trabalhos futuros.

surgimento de cooperação (NOWAK, 2006b). Por exemplo, para criticar alguém que não “agiu bem” em uma divisão, é necessário referir-se a um fato ocorrido no passado e com um agente que não está presente. Para realizar um acordo, é necessário referir-se a compromissos no futuro. Conclui-se que formas mais requintadas de interação necessitam capacidades de raciocínio e comunicação que não estejam restritas ao aqui e agora, exigindo novos tempos verbais, o uso de objetos verbais e até o encadeamento de orações.

2 VISÃO GERAL DA TEORIA DOS JOGOS CLÁSSICA, EVOLUCIONÁRIA E ESPACIAL

Este capítulo expõe os principais conceitos e termos utilizados na teoria dos jogos, sem esgotar o tema. Os principais livros textos utilizados foram o trabalho clássico de Von Neumann e Oskar Morgenstern (Von NEUMANN; MORGENSTERN, 1953) assim como os mais recentes (HEAP; VAROUFAKIS, 2004; ORBORNE, 2004; SZABÓ; FÁTH, 2007).

Um jogo, no sentido econômico, é uma atividade onde participam dois ou mais agentes e cujo resultado depende das decisões desses. Essa definição abrangente inclui as mais variadas situações, como jogos de tabuleiros ou cartas, disputas entre companhias, animais em busca por alimento ou parceiros sexuais. A teoria dos jogos dispõem de diversos resultados analíticos e conceitos de soluções, compondo um *framework* com o objetivo de formalizar tais processos e prever seus resultados. Encontramos aplicações desta em campos diversos, como teoria evolucionária, psicologia, ciência da computação, pesquisa operacional, ciência política, estratégia militar, antropologia, ética e filosofia moral e, é claro, economia. Seu poder vem da capacidade de abstrair e formalizar o que é comum no processo decisório em uma determinada situação, seja biológica, social ou econômica.

O nascimento da teoria dos jogos é normalmente relacionado ao livro de von Neumann e Morgenstern em 1944. Este livro foi o primeiro tratado de escopo amplo. Entretanto, como em muitas teorias científicas, a teoria dos jogos teve predecessores muito antes. O economista francês Augustin Cournot resolvera um problema de decisão quantitativo no caso de um duopólio, utilizando uma versão restrita do equilíbrio de Nash, tão cedo quanto 1838. Sua teoria foi generalizada para disputa de preços em 1883 por Joseph Bertrand. Conceitos de teoria dos jogos cooperativa surgiram no trabalho de Ysidro Edgeworth em 1881. O conceito de uma estratégia mista e a solução minmax para jogos de duas pessoas foi desenvolvido originalmente por Emile Borel. O primeiro teorema da teoria dos jogos foi provado em 1913 por E. Zermelo, versando sobre estrita dominância em xadrez. Uma revisão detalhada da história da teoria dos jogos pode ser encontrada na cronologia de Paul Walker disponível na internet (WALKER, 2005) e nos livros (POUNDSTONE, 1992; GAMBARELLI; OWEN, 2004).

Um marco na história da teoria é a criação de John Nash de um conceito de equilíbrio para jogos não-cooperativos (NASH, 1950). O equilíbrio de Nash de um jogo é uma atribuição de estratégias aos jogadores tal que nenhum deles possua um incentivo unilateral para mudar a sua. Além de definir o equilíbrio, Nash provou sua existência para uma ampla categoria de jogos, o que torna o equilíbrio de Nash o conceito de solução mais aplicado. A solução de um jogo é uma previsão de como seus participantes irão se comportar e qual será o resultado do jogo. Um conceito de solução contém a definição

de sua aplicabilidade (premissas que o jogo deve satisfazer, como a racionalidade dos agentes) e quais propriedades uma solução deve satisfazer para ser reconhecida como tal. Nota-se que um conceito de solução não precisa definir *como* se encontra a solução. Por exemplo, vários algoritmos para encontrar equilíbrios de Nash foram propostos posteriormente, enquanto que Von Neumann logo apresentou um método que ficou conhecido como algoritmo minmax¹.

Um equilíbrio de Nash não é sempre eficiente para a coletividade. Em muitas situações, como o dilema do prisioneiro² ou a tragédia dos comuns³, o equilíbrio de Nash poderia ser melhorado pela introdução de um planejamento central que levasse os agentes a cooperarem entre si e obterem ganhos maiores. Sem esse fator, entretanto, a cooperação na sociedade se torna instável pelo incentivo a um maior ganho individual em detrimento dos demais. Tais situações são dilemas sociais. Sua solução é um tópico importante na teoria dos jogos, seja através de normas sociais ou com a identificação de situações onde a cooperação possa se estabelecer de forma espontânea.

Por outro lado, em muitas interações sociais cotidianas e em experimentos econômicos é observada uma tendência à cooperação e outros comportamentos que não são previstos pela teoria dos jogos clássica. A forma clássica se caracteriza pela perfeita racionalidade dos agentes e pelo seu conhecimento comum, ou seja, todos participantes sabem que os demais são racionais. Um argumento extremo contra a definição é de que ela é apenas tautologia: comportamento racional é aquele definido pela teoria dos jogos, a qual é baseada na presença de racionalidade. Como é de se esperar, um tema central e recorrente na história da teoria é como definir racionalidade. Um dos problemas é que qualquer definição funcional é negativa, no sentido que especifica o que os agentes não fazem. Por exemplo, a definição típica mínima estabelece que jogadores racionais não escolhem estratégias estritamente dominadas (AUMANN, 1992; GIBBONS, 1992). Justamente a aplicação direta dessa definição exclui a cooperação em jogos tais como o dilema do prisioneiro. Outro problema é que em muitos jogos, noções básicas de racionalidade permitem que o mesmo jogo possua muitas soluções, embora algumas sejam obviamente melhores do que outras em situações reais. A resposta para essas dificuldades encontrada na teoria clássica foi o refinamento do conceito de racionalidade e, por conseqüência, dos conceitos de solução (equilíbrio estratégico).

O conceito do equilíbrio de Nash parece ter poder preditivo suficiente em jogos estáticos com informação completa. As duas maiores linhas de estudo que o seguiram, ainda na teoria dos jogos clássicos, apontam na direção de jogos dinâmicos⁴ e jogos com informação

¹Este trabalho de Von Neumann é anterior ao de Nash, mas posteriormente foi provado que o teorema minmax é um caso particular do equilíbrio de Nash, restrito a jogos de soma zero.

²No dilema do prisioneiro, dois prisioneiros acusados do mesmo crime estão em celas separadas e possuem a oportunidade de receber uma pena menor ao confessar (e, conseqüentemente, delatar o companheiro). O importante na estrutura do jogo é que a pena recebida ao trair o companheiro é a menor de todas, seguida pela pena se ambos ficarem calados (cooperando um com o outro), seguida pela de ambos confessarem, seguida pela recebida ao ser traído. O equilíbrio de Nash é ambos traírem, enquanto seria melhor se ambos cooperassem.

³Na tragédia dos comuns, um grupo de produtores depende de um recurso comum, que é esgotado por sobre-utilização, pois nenhum produtor tem suficiente estímulo para diminuir sua produção individualmente. Essa situação ocorreu com os criadores de ovelhas na Inglaterra do século 18, quando a terra para o pastoreio era de uso comum.

⁴Neste contexto, “dynamical game” é sinônimo de “sequential game”, em que há uma ordem em que os jogadores executam seus movimentos e o conhecimento das ações passadas dos outros jogadores (histórico do jogo) influencia na decisão do próximo jogador. Jogos de tabuleiro e de cartas são jogos dinâmicos, por exemplo.

incompleta. Em jogos dinâmicos, o momento em que as decisões são tomadas é importante. Nesses jogos o equilíbrio de Nash original permitiria resultados baseados em ameaças ou promessas inacreditáveis, isto é, que não podem ser cumpridas. Para que esses equilíbrios sejam excluídos da solução, Selten introduziu o conceito de um equilíbrio de Nash perfeito nos subjogos⁵, o qual requer que a solução seja um equilíbrio de Nash em todos os subjogos possíveis dentro do jogo original (SELTEN, 1965). Informação incompleta, por sua vez, significa as estratégias disponíveis aos jogadores e seus ganhos (utilidade) associados não são de conhecimento comum⁶. A teoria pode tratar esses jogos se os jogadores possuírem crenças a respeito dos parâmetros que desconhecem e essas crenças forem consistentes (racionais) de alguma forma bem definida. Isto levou ao conceito de equilíbrio de Nash Bayesiano para jogos estáticos e equilíbrio Bayesiano perfeito ou equilíbrio seqüencial para jogos dinâmicos (FUDENBERG; TIROLE, 1991; GIBBONS, 1992). Muitos outros refinamentos (eficiência de Pareto, *risk dominance*, *focal outcome*, etc.) foram propostos, com um domínio de aplicação menor, orientando a escolha de equilíbrios no caso de múltiplos equilíbrios de Nash (HARSANYI; SELTEN, 1988). Outras modificações, como *trembling hand perfection*, ainda no paradigma clássico, abriram o caminho para o abandono da premissa de racionalidade perfeita. Entretanto, esse caminho só atingiu todo seu potencial com o estabelecimento da racionalidade limitada no contexto da teoria dos jogos evolucionária.

As limitações da teoria dos jogos clássica são especialmente visíveis quando realizados experimentos psicológicos ou econômicos em que os participantes não se comportam de acordo com o previsto. Isso sugere que o modelo teórico (jogo) adotado não é adequado ou que os jogadores não preenchem todos os requisitos. De fato, há motivos para acreditar que, em muitos problemas realísticos, em face de tomar uma decisão levando em conta as ações dos demais, o comportamento humano é muito mais complexo do que previsto pela premissa de racionalidade perfeita (CONLISK, 1996). O modelo de raciocínio dedutivo perde seu apelo quando os agentes possuem limitações cognitivas, há custo na obtenção de informações sobre os possíveis resultados, as preferências dos agentes não são consistentes ou o conhecimento comum da racionalidade dos mesmos não se sustenta. Uma possibilidade para superar esse problema é o raciocínio indutivo, ou seja, uma abordagem de tentativa e erro, na qual agentes continuamente formam hipóteses sobre seu ambiente, constroem estratégias de acordo e as executam para testar seu desempenho, verificando ou descartando suas premissas de acordo com os resultados alcançados⁷. Neste caso a solução do sistema depende da evolução do estado mental (representação do mundo) dos agentes participantes e o processo de aprendizado se torna uma variável constituinte do modelo. Este tipo de racionalidade limitada pode explicar porque em certas situações pessoas respondem instintivamente, jogam de acordo com regras heurísticas e normas sociais ao invés de adotar as estratégias indicadas pela racionalidade da teoria dos jogos.

Por exemplo, a racionalidade limitada é importante quando o objetivo é entender o comportamento animal. Indivíduos em uma população animal não realizam decisões

⁵Tradução livre de *subgame perfect Nash equilibrium*.

⁶Informação incompleta difere do conceito semelhante de informação imperfeita. O segundo se refere ao caso em que parte da história do jogo é desconhecida dos jogadores no momento da tomada de decisão. Por exemplo, xadrez é um jogo com informação perfeita, pois ambos os jogadores conhecem todos os movimentos anteriores, enquanto que o dilema do prisioneiro é um jogo de informação imperfeita, pois cada jogador desconhece a escolha do outro. Entretanto, ambos são jogos com informação completa.

⁷Um modelo utilizado pela inteligência artificial e que implementa esse modo de funcionamento é o aprendizado por reforço.

conscientes sobre estratégia, embora a estrutura do processo do qual participem possa ser representada como um jogo formalizado utilizando os mesmos métodos que na teoria clássica dos jogos. Em muitos casos as estratégias estão geneticamente codificadas e mantidas durante toda a vida, o espaço de estratégias é restrito (por exemplo, estratégias mistas são excluídas) ou a adoção de estratégias é severamente restringida por regras de aprendizado pré-determinadas ou taxas de mutação. O sucesso de uma estratégia é medido pela adaptação (*fitness*), a qual está fortemente relacionada com o sucesso reprodutivo.

Além da racionalidade limitada, outro aspecto foi deixado de lado pela teoria clássica e ganha forte importância na teoria dos jogos evolucionária: características dinâmicas dos sistemas. Estas eram irrelevantes sob a hipótese de racionalidade perfeita, em que os agentes eram capazes de decidir imediatamente qual a melhor estratégia a ser adotada. Mesmo quando métodos dinâmicos eram aplicados, como nos jogos fictícios de Brown (BROWN, 1951), estes apenas serviam como um recurso técnico para a obtenção do equilíbrio. Por outro lado, a racionalidade limitada é inseparável do tratamento dinâmico das estratégias. Ao contrário da racionalidade perfeita, trata-se de uma definição positiva do que os agentes podem fazer. Tais regras comportamentais são regras dinâmicas, especificando o quanto da história anterior do jogo é levada em consideração (memória), o quanto do futuro os agentes irão prever (miopia, *short-sightedness*), como é realizada a busca por novas estratégias (espaço de busca), como é a troca para estratégias mais bem sucedidas (aprendizado adaptativo) e de que forma todos esses fatores se refletem no nível populacional, em termos de frequências de estratégias.

As primeiras aplicações da perspectiva evolucionária da teoria dos jogos surgiram na biologia, onde a idéia de racionalidade limitada é obviamente relevante. O trabalho normalmente citado como pioneiro é a análise da proporção dos sexos realizada por R. A. Fisher (FISHER, 1930)⁸ e o artigo de R. C. Lewontin é provavelmente o primeiro a realizar uma conexão formal entre evolução e teoria dos jogos (LEWONTIN, 1961). Entretanto, a teoria realmente se tornou conhecida com dois livros no início dos anos 80: “Evolution and the Theory of Games”, de J. Maynard Smith (SMITH, 1982), o qual introduziu o conceito de estratégias evolucionariamente estáveis e “The Evolution of Cooperation”, de R. Axelrod (AXELROD, 1984), o qual abriu terreno para conexões com a economia e as ciências sociais. Biólogos tem utilizado a teoria dos jogos para entender e prever alguns resultados da evolução natural e comportamento animal. Por outro lado, as ciências sociais adotaram a abordagem evolucionária para estudar o aprendizado social e tipos de “evolução cultural”, ou seja, mudanças em crenças, valores, padrões de comportamento e normas sociais nos seres humanos.

Há uma perspectiva estática e uma dinâmica para a teoria evolucionária dos jogos. A definição da estabilidade evolucionária de um equilíbrio de Nash por Maynard Smith é um conceito estático, que não requer a resolução de equações dependentes do tempo ou a realização de simulações. Em termos simples, estabilidade evolucionária significa que um mutante raro não consegue invadir a população com sucesso e tomar o lugar da estratégia dominante. Essa propriedade pode ser verificada diretamente sem o estudo de comportamento dinâmico complexo. Por outro lado, a análise dinâmica é baseada em regras de atualização (temporais) explícitas. Essas podem ser regras determinísticas no

⁸Segundo o prefácio de J. J. Bennett na edição de 2000, o livro “Genetical Theory of Natural Selection” é o primeiro trabalho significativo a unir a teoria da evolução das espécies de Darwin com a genética Mendeliana, constituindo um marco na teoria evolutiva e no estudo da genética de populações. Na sua explicação do motivo da proporção dos sexos se manter em 50:50, Fisher provou que esta é uma estratégia evolucionariamente estável, embora, é claro, o conceito ainda não tivesse sido definido a sua época.

nível da população que determinam taxas de mudança para as frequências de estratégias ou regras microscópicas estocásticas no nível dos agentes (geralmente, simulações multi-agente). Como a racionalidade limitada possui muitas formas, há muitas regras dinâmicas diferentes que podem ser consideradas. A dinâmica mais apropriada depende de aspectos específicos da situação econômica ou biológica em estudo. Em aplicações biológicas, a dinâmica de replicação⁹ é a mais utilizada, pois pode ser derivada da premissa de que os ganhos (*payoffs*) são diretamente relacionados ao sucesso reprodutivo (*fitness*). Aplicações econômicas podem requerer outros ajustes ou regras de aprendizado. Tanto a perspectiva estática quanto a dinâmica prov critérios para seleção de equilíbrios quando a forma clássica do jogo possui múltiplos equilíbrios de Nash. Mais do que isso, através da escolha adequada das regras da dinâmica é possível estabelecer condições onde os agentes não se comportam conforme previsto pela teoria clássica, uma abordagem largamente utilizada no estudo do dilema do prisioneiro.

Como foi colocado anteriormente, o objetivo da teoria evolucionária dos jogos foi contornar três importantes deficiências da teoria clássica: (1) racionalidade limitada, (2) falta de dinâmica e (3) escolha do equilíbrio no caso de múltiplos equilíbrios de Nash. Embora esses objetivos tenham sido alcançados com relativo sucesso, uma série de fraquezas permanece. A teoria evolucionária em sua forma inicial considerava a dinâmica populacional em termos de variáveis agregadas, ou seja, médias tomadas na população como as frequências relativas das estratégias. Regras comportamentais, por sua vez, são definidas no nível microscópico, especificando as ações do agente. As ações dos indivíduos são normalmente assíncronas, discretas e podem conter elementos estocásticos. Além disso, agentes podem ter diferentes preferências ou ações possíveis (serem de papéis diferentes). Quando estas flutuações microscópicas podem ser agregadas para formar uma dinâmica suave das variáveis de população? Para muitos casos a premissa de uma população homogênea e infinita com encontros aleatórios (uma aproximação de campo médio) é suficiente. Assim, nesses casos pode ser provado que regras de aprendizagem local baseadas em reforço, imitação ou jogos fictícios conduzem aos resultados da dinâmica de replicação. No entanto, o modelo de campo médio pode se tornar especialmente inadequado se a população for heterogênea nos tipos de agentes e/ou a topografia do grafo de interações (rede) for não trivial.

A importância da heterogeneidade¹⁰ e de aspectos estruturais foi reconhecida a longo tempo atrás (FÖLLMER, 1974), mas a investigação sistemática dessas questões é tema de pesquisa até os dias atuais. O desafio é grande, pois essas características eliminam a simetria dos agentes, implicando em uma mudança dramática da perspectiva na descrição do sistema do nível agregado para o nível de agente. O resultado é um grande aumento nas variáveis relevantes para o sistema que torna a maioria das técnicas analíticas disponíveis inadequadas, como o tratamento através de equações diferenciais. A ferramenta que resta é modelagem multi-agente, com o uso de simulações numéricas e técnicas analíticas. Nesta dissertação o problema da heterogeneidade no jogo do ultimato (papéis de proponente e aceitador) é resolvido pela adoção de agentes que jogam de ambas as formas, alternadamente. Entretanto, essa complexidade permanece com o uso de uma distribuição de papéis em proporções diferentes¹¹ de 50% e em formas diferentes de or-

⁹Tradução de replicator dynamics.

¹⁰Deve ser notado que uma população heterogênea se refere a tipos de agentes diferentes, por exemplo os que ocupem papéis diferentes, o que implica em conjuntos de estratégias e ganhos diferentes, e/ou diferentes capacidades de raciocínio (limitado). Pode-se falar também em heterogeneidade de estratégias, mas esta sempre ocorre em qualquer estudo na teoria dos jogos.

¹¹No caso de papéis em proporções iguais, é possível criar um “superjogo” equivalente, em que são calcu-

ganizar a participação dos agentes por unidade de tempo.

É um fato bem conhecido que interações em redes do mundo real podem possuir uma topologia razoavelmente complexa, distante do caso de campo médio. Por um lado, há um grande grupo de situações (em especial modelos biológicos) onde o grafo de interação é determinado pela localização geográfica dos agentes participantes. Nessas aplicações o modelo é tipicamente um reticulado regular de duas dimensões ou um grafo com os nodos em 2D e uma probabilidade de ligação que decai exponencialmente com a distância. Por outro lado, jogos motivados por situações econômicas ou sociais são tipicamente realizados em *scale free networks* (BARABÁSI; ALBERT, 1999) ou *small worlds* (WATTS; STROGATZ, 1998), que possuem propriedades estatísticas específicas. Há outras possibilidades, como estruturas hierárquicas e adicionar dinâmica às redes em si, permitindo que estas se modifiquem ao longo do tempo.

No caso simples de jogos evolucionários espaciais, agentes localizados nos nodos de um reticulado realizam jogos repetidos¹² entre si. Como o jogador obtém ganhos interagindo com seus vizinhos, o rendimento de uma estratégia num dado momento depende das estratégias presentes na vizinhança e não da frequência das estratégias em toda a população. Ao longo do tempo os agentes podem modificar suas estratégias com o objetivo de aumentar sua utilidade. Valendo-se da idéia básica da evolução Darwiniana, em muitos modelos os agentes adotam (aprendem) uma das estratégias vizinhas que teve o ganho mais alto. Modelos semelhantes são utilizados em diferentes áreas da ciência para obter o comportamento macroscópico a partir de interações microscópicas. Aparentemente, muitos aspectos desses modelos são similares com sistemas de muitas partículas, isto é, podem ser observadas diferentes fases à medida que variam os parâmetros do modelo. Esta analogia inspirou muitos físicos a contribuir no entendimento do campo pela adaptação sucessiva de técnicas e abordagens da física estatística. Por exemplo, jogos evolucionários podem ser relacionados aos modelos de Ising da física sob certas condições.

Deve ser observado que jogos evolucionários podem exibir comportamentos que não existem em sistemas físicos comumente estudados no equilíbrio. Estes aspectos requerem os métodos da mecânica estatística fora do equilíbrio, onde essa maior complexidade vem sendo estudada a um longo tempo (SILVA, 2002). Pela comparação de sistemas físicos com jogos evolucionários podem ser encontradas as diferenças relevantes: em jogos as interações são frequentemente assimétricas, as mudanças microscópicas deixam de ser reversíveis e muitos estados estáveis (evolucionariamente) podem coexistir com a formação de padrões congelados ou auto organizados.

Em modelos espaciais, as interações com uma vizinhança pequena limita a quantidade de outros agentes que afeta a busca de um agente pela melhor solução. Esse processo pode ser especialmente perturbado se o número de possíveis estratégias excede o de vizinhos. Essa situação favorece a formação de associações de estratégias, que podem ser consideradas como agentes complexos com sua estrutura espaço-temporal própria e cuja competição irá determinar o estado evolucionário final. A dinâmica de um tecido vivo pode ser estudada dessa forma, pois a disposição das células e suas interações são bem representadas como um jogo evolucionário espacial. Um exemplo interessante é o estudo da dinâmica do câncer no capítulo XII de (NOWAK, 2006a).

lados os ganhos para cada combinação de estratégias, formada por uma estratégia do primeiro papel e outra do segundo. O jogo formado nesse processo deixa de ser heterogêneo. Detalhes podem ser encontrados em (SZABÓ; FÁTH, 2007).

¹²Um jogo repetido, na teoria dos jogos clássica, é um jogo realizado várias vezes entre os mesmos participantes. Há jogos com soluções diferentes se a repetição ocorrer um número finito ou infinito de vezes.

As células de um tecido vivo podem ser estudadas dessa forma. Em outras palavras, jogos evolucionários espaciais servem como uma base matemática para estudar a emergência da complexidade estrutural característica de tecidos vivos.

Segundo (SZABÓ; FÁTH, 2007), apenas recentemente a pesquisa em teoria dos jogos evolucionária tem interferido com a extensiva investigação de redes, pois as redes sociais reais, criadas pela interação de seres humanos, possuem propriedades topológicas completamente não-triviais. Os primeiros resultados demonstram que as características topológicas dessas redes influenciam significativamente seu comportamento.

3 ESTUDO COMPARATIVO DE ESTRATÉGIAS DO JOGO DO ULTIMATO NÃO ESPACIAL

3.1 Modelo

3.1.1 O jogo

O ultimato é um jogo seqüencial¹ onde um jogador (o proponente) propõe uma forma de dividir uma quantia a outro jogador (o aceitador, receptor ou respondente). Se o aceitador rejeitar essa divisão, ambos não recebem nada. A quantia a ser dividida é aqui denominada w . Os termos mais utilizados em inglês são *proposer* e *responder*, respectivamente. Trata-se, portanto, de um jogo onde os agentes podem ocupar dois papéis distintos.

A maneira mais adequada de representar o jogo do ultimato é utilizando a forma extensiva. Nesta representação um jogo é uma árvore, onde cada nodo representa a decisão (ou movimento) de um dos jogadores. Nas folhas da árvore está o ganho atribuído aos jogadores caso aquele seja o resultado final do jogo. Com essa representação, fica clara a ordem dos movimentos dos jogadores e qual a história anterior do jogo que está disponível no momento da decisão, o que não é possível representar utilizando a forma normal. Dessa forma, também podem ser representados jogos com informação incompleta, o que não é o caso do jogo do ultimato.

A figura 3.1 mostra um exemplo do jogo do ultimato com $w = 4$. O nodo superior representa a escolha do proponente, enquanto que os inferiores a do aceitador.

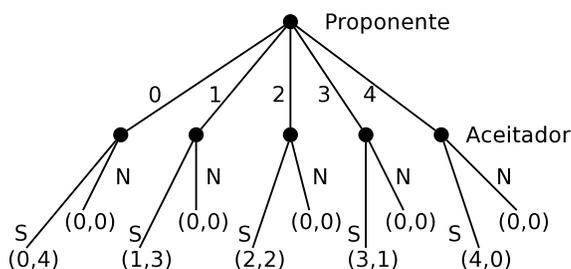


Figura 3.1: Jogo do ultimato com $w = 4$ na forma extensiva. Cada nodo representa a decisão (movimento) de um jogador e as folhas indicam o ganho recebido por cada jogador (proponente à esquerda).

Os agentes se encontram sempre aos pares, ora como proponente, ora como aceitador,

¹Um jogo seqüencial, ou dinâmico, é aquele em que um jogador conhece ao menos em parte a história prévia do jogo. No caso do JU, o aceitador sabe do valor oferecido pelo proponente.

e não guardam histórico das participações anteriores nem mudam sua escolha de acordo com qualquer característica do oponente. Trata-se de um modelo onde um jogador pode jogar com qualquer outro na população, não havendo restrições sobre qual é a vizinhança de um agente. Neste caso, ele se encontra em um grafo completo. No capítulo 4, uma versão espacial do jogo será abordada, considerando apenas jogadas com os vizinhos mais próximos em um reticulado. Quando o grafo completo é infinito e o agente joga com todos os participantes em cada etapa, caracteriza-se o que se chama de regime de campo médio. Nota-se que, nesse regime, o tempo de cada jogada (ou interação) é completamente abstraído, afinal seria necessário um tempo infinito para todos os jogadores participarem.

Neste capítulo os resultados analíticos foram obtidos com o pressuposto de um número grande de jogadas mas nenhuma restrição ao número de participantes é requerida. Foram estudados analítica e computacionalmente a média do ganho dos jogadores bem como as flutuações desse ganho. Nas simulações computacionais os jogadores podem realizar o jogo numa quantidade E de encontros. Outra possibilidade é a organização desses encontros numa unidade de tempo diferente denominada turno, onde cada jogador participa uma única vez. Dessa forma a duração de cada jogada foi bem representada no modelo, e uma análise mais detalhada das flutuações do ganho dos agentes em um número pequeno de iterações se tornou possível. Por “bem representada” entende-se que o tempo é medido em uma unidade significativa para o problema de barganha subjacente, isto é, a duração do negócio ou empreendimento que origina o valor a ser dividido.

3.1.2 A população

A população, com N agentes é composta de p grupos de jogadores com estratégias diferentes. A proporção de cada grupo na população é definida pelo vetor Φ , onde Φ_k é participação do grupo indexado por k , com $k = 1, \dots, p$. Ou seja, entende-se que cada grupo é um conjunto de jogadores com as mesmas características (mesmo fenótipo).

No modelo adotado é possível que os grupos da população sejam proponentes com frequências maiores ou menores que os demais. Essa relação é especificada para cada par de grupos por uma matriz de preponderância² ρ . Ao encontrarem-se dois jogadores de tipos i e j , o jogador de tipo i será proponente com probabilidade $\rho_{i,j}$. Quando se encontram dois jogadores do mesmo tipo, eles possuem a mesma probabilidade, e $\rho_{i,i} = 1/2$. Além disso, $\rho_{i,j} = 1 - \rho_{j,i}$, e portanto apenas a componente acima (correspondentemente, abaixo) da diagonal principal é necessária.

Note que a introdução de ρ permite modelar todo um contínuo entre dois extremos comumente estudados (ver (SZABÓ; FÁTH, 2007) nas páginas 6 e 20): o caso em que não existe preponderância e aquele em que há populações separadas, onde um grupo apenas propõe e outro apenas decide se aceita. No primeiro caso o jogo é homogêneo, no sentido que a troca de estratégia de qualquer agente irá alterar apenas a frequência das estratégias na população, enquanto que o segundo é heterogêneo, pois os dois grupos de jogadores possuem um conjunto diferente de estratégias e alteração não pode ser realizada da mesma forma. O autor não encontrou referência para uma modelagem semelhante à proposta aqui para o JU, mas ela pode ser feita para qualquer jogo bimatricial. Logo, é provável que ela tenha sido feita para algum jogo. Foi considerado que, se algum $\rho_{i,j} \neq 1/2$, trata-se de um jogo heterogêneo.

²O termo preponderância foi escolhido, ao invés de “dominância”, mais comum na língua portuguesa, para não causar confusão com o conceito de estratégia dominante.

3.1.3 Estratégias

O comportamento humano é afetado por condições ambientais e processos internos que não são facilmente reproduzidos em modelos e muitas vezes representados como ruído em simulações. Todavia, experimentos comportamentais como (HENRICH et al., 2006) não sugerem que um jogador proponha sempre a mesma divisão - em outras palavras, adote uma estratégia pura. Nessa perspectiva, utilizar uma distribuição de probabilidade para representar a estratégia de um jogador pode ser um passo na direção de uma modelagem mais complexa do comportamento dos agentes. Por essas razões foram incluídas estratégias mistas no modelo, ao contrário de outros trabalhos, como por exemplo (PAGE; NOWAK, 2000; PAGE; NOWAK; SIGMUND, 2000; SÁNCHEZ; CUESTA, 2005; NAPEL, 2003).

A estratégia s_k de um dado tipo de jogador k é um par de funções $p_k(i), a_k(i), i = 0 \dots w$, representadas como vetores quando conveniente, como no capítulo 3. Aqui $p_k(i)$ é a probabilidade de propor o valor i , e $a_k(i)$ a de aceitá-lo. Como a função do proponente representa apenas uma escolha, sua soma deve ser 1 como qualquer distribuição de probabilidade. Entretanto, a função do receptor $a_k(i)$ representa uma decisão para cada divisão que o proponente pode propor. Sendo sempre uma resposta binária por parte do receptor, a função a_k pode fornecer apenas a probabilidade de aceitação, sem restrição entre os diferentes valores. Intuitivamente, seria possível exigir uma probabilidade de aceitação não-decrescente à medida que o ganho do receptor aumenta, mas essa exigência foi relaxada nesta abordagem.

A seguinte convenção foi adotada para os valores de proposta e aceitação: estamos falando sempre do valor recebido pelo jogador. Por exemplo: se a estratégia s_k significa propor o valor i com probabilidade x , nesse caso o proponente recebe i e o aceitador $w - i$. Em outras palavras, para este jogador $p_k(i) = x$. Da mesma forma, se o foco for o aceitador e sua estratégia é aceitar o valor j com uma probabilidade y , o proponente recebe $w - j$. Isto é uma aplicação direta do fato que há uma quantia fixa w a ser dividida entre os jogadores.

Neste capítulo, as seguintes estratégias são consideradas:

Uniforme: propõem qualquer valor com a mesma probabilidade e possui 50% de chance de aceitar qualquer proposta.

Ganancioso: quanto maior seu ganho pessoal, maior a probabilidade de um valor ser proposto ou escolhido. Essa probabilidade cresce de forma linear.

Altruísta: oposto ao ganancioso, escolhe com maior probabilidade quanto menor seu ganho³.

Racional: joga segundo o equilíbrio de Nash, buscando o maior valor possível como proponente ($w - 1$) e aceitando qualquer valor diferente de zero⁴.

Justo (PAGE; NOWAK; SIGMUND, 2000) ou Recíproco (SÁNCHEZ; CUESTA, 2005) : aceita receber o mesmo valor que distribui quando proponente. Portanto, propõe

³Na literatura existe o conceito de *altruistic punishment*, também no contexto do JU, onde um jogador deixa de aceitar um valor baixo para punir um proponente. Dessa forma, esse aceitador incorre numa perda pessoal (o valor que recusou) pelo bem da sociedade (eliminando *free riders*, ou seja, oportunistas). Esse conceito não deve ser confundido com o de altruísmo modelado aqui, que é simplesmente uma utilidade adicional percebida pelo agente em suas “doações”.

⁴Tratando-se de uma distribuição discreta como a adotada nesta dissertação, esse valor é 1.

Tabela 3.1: Estratégias estudadas.

Estratégia	$p(i)$	$a(i)$	Parâmetros
Uniforme	$\frac{1}{(w+1)}$	$\frac{1}{2}$	nenhum
Ganancioso	$\frac{2(i+1)}{(w+1)(w+2)}$	$\frac{(i+1)}{(w+1)}$	nenhum
Altruísta	$2\frac{(w-i+1)}{(w+1)(w+2)}$	$\frac{(w-i+1)}{(w+1)}$	nenhum
Racional	$\delta_{i,w-1}$	$\delta_{i,0}$	nenhum
Teimoso	δ_{i,w_c}	$\begin{cases} 1 & w_c \leq i \leq w \\ 0 & 0 \leq i < w_c \end{cases}$	<i>cutoff</i> : w_c
Justo	δ_{i,w_c}	$\begin{cases} 1 & w - w_c \leq i \leq w \\ 0 & 0 \leq i < w - w_c \end{cases}$	<i>cutoff</i> : w_c

a divisão $(w_c, w - w_c)$ e aceita qualquer valor maior ou igual a $w - w_c$. Aqui está representado um censo de justiça - se o jogador espera receber mais quando proponente, atua de forma recíproca quando é aceitador, e vice-versa. Nota-se que o jogador racional é um caso particular do jogador justo.

Teimoso: deseja receber o mesmo valor tanto como proponente ou receptor. Joga segundo o parâmetro w_c (*cutoff*), propondo $(w_c, w - w_c)$ e aceitando qualquer valor igual ou maior a w_c . Este jogador representa alguém com uma expectativa fixa de ganho ao participar de um negócio. Ele se opõe ao jogador justo, no sentido que busca de forma egoísta o seu ganho esperado, sem se preocupar com o papel recebido.

A tabela 3.1 mostra a função de proposta $p(i)$ e a função de aceitação $a(i)$ para cada uma das estratégias acima, definidas para o intervalo discreto $[0, w]$.

Não há qualquer pretensão de que esta definição de jogador ganancioso retrate um ser humano ganancioso, o mesmo valendo para as demais. Como não foi feito nenhum estudo experimental para validar estes valores, há uma certa arbitrariedade na escolha dos nomes. Este conjunto de estratégias serve para demonstrar o uso das ferramentas computacionais e analíticas aqui demonstradas, podendo ser substituído por qualquer outro conjunto conforme necessário.

3.2 Cálculo analítico da média, variância, e demais momentos do ganho

Deseja-se calcular o ganho médio obtido por cada tipo de jogador, além dos demais momentos e sua variância. Para essa finalidade é definida a variável aleatória $Y_{s_c} \in \{0, 1, 2, \dots, w\}$, como o ganho obtido por um jogador de estratégia s_c em uma realização do JU. O valor esperado dessa variável irá depender das variáveis definidas anteriormente, ou seja: a proporção das estratégias na população Φ ; as funções de probabilidade que compõem as estratégias, p_k e a_k , e a matriz de preponderância ρ . Esta demonstração foi publicada em (SILVA; KELLERMANN, 2007).

Definindo $\Pr(Y_{s_c} = i)$ como a probabilidade do valor recebido ser igual a i , pode-se

escrever, de acordo com as regras de composição de eventos:

$$\begin{aligned}\Pr(Y_{s_c} = i) &= \Pr[(Y_{s_c} = i) \cap (s_c \text{ é proponente})] + \Pr[(Y_{s_c} = i) \cap (s_c \text{ é aceitador})] \\ &= \sum_{k=1}^p \Pr[(Y_{s_c} = i) \cap (s_c \text{ é proponente}) \cap (\text{oponente possui estratégia } s_k)] \\ &\quad + \sum_{k=1}^p \Pr[(Y_{s_c} = i) \cap (s_c \text{ é aceitador}) \cap (\text{oponente possui estratégia } s_k)]\end{aligned}$$

Utilizando a definição de probabilidade condicional é obtido:

$$\begin{aligned}\Pr(Y_{s_c} = i) &= \sum_{k=1}^p \Pr[(Y_{s_c} = i) | \{(s_c \text{ é proponente}) \cap (\text{oponente possui estratégia } s_k)\}] \cdot \\ &\quad \cdot \Pr[(s_c \text{ é proponente}) \cap (\text{oponente possui estratégia } s_k)] \\ &= \sum_{k=1}^p \Pr[(Y_{s_c} = i) | \{(s_c \text{ é aceitador}) \cap (\text{oponente possui estratégia } s_k)\}] \cdot \\ &\quad \cdot \Pr[(s_c \text{ é aceitador}) \cap (\text{oponente possui estratégia } s_k)]\end{aligned}$$

Novamente, pela definição de probabilidade condicional, obtém-se

$$\begin{aligned}\Pr[(s_c \text{ é proponente}) \cap (\text{oponente possui estratégia } s_k)] &= \\ \Pr[(s_c \text{ é proponente}) | (\text{oponente possui estratégia } s_k)] \Pr(\text{oponente possui estratégia } s_k)\end{aligned}$$

e similarmente

$$\begin{aligned}\Pr[(s_c \text{ é aceitador}) \cap (\text{oponente possui estratégia } s_k)] &= \\ \Pr[(s_c \text{ é aceitador}) | (\text{oponente possui estratégia } s_k)] \Pr(\text{oponente possui estratégia } s_k)\end{aligned}$$

Para incluir a matriz de preponderância, ρ , é necessário que a probabilidade de ser proponente ou aceitador dependa do tipo de jogador do oponente. Isto porque, conforme explicado quando se introduziu ρ , trata-se de uma característica que pode se dar de forma diferente entre os componentes da população. Portanto, se denotará: $\Pr[(s_c \text{ é proponente}) | (\text{oponente possui estratégia } s_k)] = \rho_{s_c, s_k} = 1 - \Pr[(s_c \text{ é aceitador}) | (\text{oponente possui estratégia } s_k)]$.

Como calcular a probabilidade $\Pr(\text{oponente possui estratégia } s_k)$? Esta depende da fração de jogadores com estratégia s_k e, tendo em conta que o jogador não pode jogar consigo mesmo, se a estratégia difere de s_c :

$$\Pr(\cdot \text{ possui estratégia } s_k) = \begin{cases} \frac{\Phi_{s_k} N - 1}{N - 1} & \text{se } k = c \\ \frac{N \Phi_{s_k}}{N - 1} & \text{se } k \neq c. \end{cases}$$

Aplicando as definições das funções a_{s_k} e p_{s_k} que compõem uma estratégia s_k , e o fato de que o ganho do aceitador é w menos o do proponente, obtém-se:

$$\begin{aligned}\Pr(Y_{s_c} = i | s_c \text{ é proponente}) \cap \text{oponente possui estratégia } s_k &= p_{s_c}(i) a_{s_k}(w - i) \\ \Pr(Y_{s_c} = i | s_c \text{ é aceitador}) \cap \text{oponente possui estratégia } s_k &= a_{s_c}(i) p_{s_c}(w - i)\end{aligned}$$

Realizando-se as devidas substituições:

$$\Pr(Y_{s_c} = i) = p_{s_c}(i) \sum_{k=1}^p a_{s_k}(w-i) \frac{\Phi_{s_k} N - \delta_{k,c}}{N-1} \rho_{s_c, s_k} + a_{s_c}(i) \sum_{k=1}^p p_{s_k}(w-i) \frac{\Phi_{s_k} N - \delta_{k,c}}{N-1} (1 - \rho_{s_c, s_k})$$

Com esta probabilidade calculada, podemos obter o m -ésimo momento do ganho do jogador com estratégia s_c na população:

$$\begin{aligned} E[Y_{s_c}^m] &= \sum_{i=0}^w \sum_{k=1}^p i^m \cdot p_{s_c}(i) a_{s_k}(w-i) \frac{\Phi_{s_k} N - \delta_{k,c}}{N-1} \rho_{s_c, s_k} + \\ &+ \sum_{i=0}^w \sum_{k=1}^p i^m \cdot a_{s_c}(i) p_{s_k}(w-i) \frac{\Phi_{s_k} N - \delta_{k,c}}{N-1} (1 - \rho_{s_c, s_k}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

A partir desta, considerando o primeiro ($m = 1$) e segundo ($m = 2$), pode-se calcular a dispersão (variância) do ganho do jogador com estratégia s_c , assim como seu desvio padrão:

$$\sigma_{s_c} = \sqrt{\text{var}[Y_{s_c}]} = \sqrt{E[Y_{s_c}^2] - E[Y_{s_c}]^2} \quad (3.2)$$

3.3 Simulações computacionais e representação do tempo na versão não espacial do JU

Para obter por simulação determinadas propriedades, como o ganho médio da população no limite de tempo infinito, não é necessário muito cuidado com a representação do tempo: pode-se simplesmente escolher dois jogadores aleatoriamente para um confronto, calcular seus ganhos e repetir esse passo iteradamente por um número suficientemente “grande” de vezes para que se fique satisfeito com a precisão alcançada.

Embora este método seja o mais simples para tempos longos, ele introduz problemas para a medição do ganho em tempos curtos. Aqui, estamos sempre falando do ganho médio de um jogador, definido como o ganho acumulado ($E[Y_{acc}]$) dividido pelo número de vezes que ele participou em um jogo, n_P . Quando realizamos um grande número de encontros, ou seja, $n_E \gg N$, a distribuição de participações por jogador se torna uniforme, e o ganho médio de cada jogador se aproxima do ganho médio da população. Isto é visível nos gráficos da figura 3.3, discutidos na seção 3.4.1. Para tempos curtos, a quantidade de participações de cada jogador varia muito de acordo com os valores de n_E e N , modificando assim o ganho médio. Exemplificando, podemos ter uma grande quantidade de jogadores que não tenha participado nenhuma vez ($n_P = 0$) e portanto não tem ganho médio definido, outros com $n_P = 1, 2, \dots$ e assim por diante.

Fazendo uma analogia com alguns experimentos com o JU (citados na introdução): tratando-se de participações em um grupo de caça, é razoável supor, simplificadaamente, que todos os membros da tribo podem participar durante a estação de caça. Em outras palavras, todos irão negociar, apenas deixando de participar se não chegarem a um acordo. Além disso, é razoável assumir que uma expedição tome tempo - caso um caçador não participe esta semana porque não entrou em acordo com os termos da divisão, terá de esperar até a próxima. Pode-se pensar de vários outros casos em que o objeto de negociação e a escala de tempo é muito diferente, nos quais é também razoável supor que todos os agentes tem a chance de participar, que o tempo flui de forma igual para todos e que a desistência tem um “custo de oportunidade” temporal.

Voltando ao modelo, isto foi solucionado com a divisão do tempo em turnos, representados por n_T . Em cada turno, todos os jogadores participam do JU uma única vez. Assim, ao compararmos as médias de ganho de jogadores num espaço de 10 turnos, temos 10 participações para cada jogador garantidamente. Na modelagem por encontros, há uma distribuição aleatória de participações por jogadores. Assim, estaremos comparando o ganho de jogadores que tiveram oportunidades diferentes de alcançar esse ganho - se n_E for da mesma ordem que N , muitos agentes terão ganho zero por não terem participado nenhuma vez. Assim, a divisão do tempo em turnos é melhor para comparar estratégias em tempos curtos.

Calculamos facilmente a relação entre n_E e n_T . E a cada turno, dois jogadores estão presentes em cada encontro, portanto o número de encontros por turno equivale a $N/2$. Estabelecendo uma equação:

$$n_T = \frac{2n_E}{N} \quad (3.3)$$

Se considerarmos os agentes como os nodos de um grafo e as arestas como a possibilidade de dois agentes participarem no mesmo jogo (relação de vizinhança), formar as duplas para um turno equivale a realizar um *matching* em um grafo. Em campo médio estamos tratando de um grafo completo, e outros grafos são utilizados quando se trata de uma distribuição em rede, abordada no capítulo 4. Para o grafo completo, num turno basta selecionar dois agentes em uma lista de forma aleatória e retirá-los, repetindo até que a lista fique vazia.

3.4 Casos de estudo

Na seção 3.4.1 são estudadas propriedades de uma população com jogadores teimosos, uniformes e gananciosos. Ao mesmo tempo que é desenvolvida uma solução exata no limite de infinitas iterações, esses resultados são comparados com aqueles obtidos em simulação. Segue um estudo com teimosos e justos onde há preponderância para a proposta (diferentes valores de ρ), na seção 3.4.2. Nesse caso é observado como a preponderância implica mudanças na média e variância do ganho, apresentando fases em relação às diferentes estratégias (*cutoff*) dos jogadores. Logo após, é feita uma comparação entre o ganho médio dos jogadores justos e teimosos, com ênfase na mudança provocada pelas estratégias e nas regiões onde a riqueza da população é máxima mas pode ser dividida de forma desigual. Mais adiante, na seção 3.4.4, o foco passa para as diferentes representações do tempo e seu efeito na variância, estabelecendo um paralelo com o trabalho de (SÁNCHEZ; CUESTA, 2005) para simulações evolucionárias. Por último, é apresentado um experimento com uma regra simples de atualização das estratégias, mas que provoca efeitos não esperados em parâmetros populacionais tais como: as estratégias em si, o ganho, e um indicativo da permanência (idade) das estratégias adotadas pelos agentes.

3.4.1 População com jogadores teimosos, uniformes e gananciosos

Nesta seção é considerado uma população de $N = 200$ jogadores dividida em 3 tipos ($p = 3$), onde: $k = 1$, 100 jogadores teimosos; $k = 2$, 50 jogadores uniformes; $k = 3$, 50 jogadores gananciosos (conforme a tabela 3.1).

Em primeiro lugar, será calculado o valor esperado do ganho de um jogador teimoso, considerando uma população finita de $N = 200$ jogadores. Neste exemplo não há prepon-

derância e $\rho_{1,2} = \rho_{2,3} = \rho_{1,3} = 1/2$. Então, não é difícil de mostrar, a partir da equação 3.1:

$$E[Y_1] = \begin{cases} \frac{1}{2}w_c \left[\frac{\Phi_1 N - 1}{N - 1} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_2 N}{N - 1} + \frac{(w - w_c + 1)}{w + 1} \frac{\Phi_3 N}{N - 1} \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\Phi_1 N - 1}{N - 1} (w - w_c) + \frac{\Phi_2 N}{N - 1} \frac{(w + w_c)(w - w_c + 1)}{2(w + 1)} + \right. \\ \left. + \frac{\Phi_3 N}{N - 1} \frac{(w_c - w - 1)(w_c - w - 2)(w + 2w_c)}{3(w + 1)(w + 2)} \right] & \text{se } w_c \leq w/2 \\ \\ \frac{1}{2}w_c \left[\frac{1}{2} \frac{\Phi_2 N}{N - 1} + \frac{(w - w_c + 1)}{w + 1} \frac{\Phi_3 N}{N - 1} \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\Phi_2 N}{N - 1} \frac{(w + w_c)(w - w_c + 1)}{2(w + 1)} + \right. \\ \left. + \frac{\Phi_3 N}{N - 1} \frac{(w_c - w - 1)(w_c - w - 2)(w + 2w_c)}{3(w + 1)(w + 2)} \right] & \text{se } w_c > w/2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Para o cálculo da variância, é necessário obter o segundo momento:

$$E[Y_1^2] = \begin{cases} \frac{1}{2}w_c^2 \left\{ \frac{\Phi_1 N - 1}{N - 1} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_2 N}{N - 1} + \frac{(w - w_c + 1)}{w + 1} \frac{\Phi_3 N}{N - 1} \right\} \\ + \frac{1}{2} \left\{ (w - w_c)^2 \frac{\Phi_1 N - 1}{N - 1} + \frac{(w_c - 1 - w)(2w_c^2 - w_c + 2w_c w + w + 2w^2)}{6(w + 1)} \frac{\Phi_2 N}{N - 1} + \right. \\ \left. + \frac{(w_c - 1 - w)(w_c - w - 2)(3w_c^2 - w_c + 2w_c w + w^2 + w)}{6(w + 1)(w + 2)} \frac{\Phi_3 N}{N - 1} \right\} & \text{se } w_c \leq w/2 \\ \\ \frac{1}{2}w_c^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\Phi_2 N}{N - 1} + \frac{(w - w_c + 1)}{w + 1} \frac{\Phi_3 N}{N - 1} \right\} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(w_c - 1 - w)(2w_c^2 - w_c + 2w_c w + w + 2w^2)}{6(w + 1)} \frac{\Phi_2 N}{N - 1} + \right. \\ \left. + \frac{(w_c - 1 - w)(w_c - w - 2)(3w_c^2 - w_c + 2w_c w + w^2 + w)}{6(w + 1)(w + 2)} \frac{\Phi_3 N}{N - 1} \right\} & \text{se } w_c > w/2 \end{cases} \quad (3.5)$$

O gráfico à esquerda da figura 3.2 exibe o ganho médio recebido por um jogador teimoso nas simulações. Para uma grande quantidade de números, os valores convergem para o resultado exato dado pela equação (3.4), exibido como linha contínua. No gráfico à direita da mesma figura é feita a mesma comparação com os valores obtidos para o desvio padrão. Para os resultados analíticos foram utilizadas as equações (3.5) e (3.4).

O salto que ocorre quando o *cutoff* corresponde à metade do valor em disputa, $w_c = 50$, é relacionado uma transição entre duas “fases” distintas: abaixo de $w_c = 50$ os jogadores teimosos estão abertos a negociações entre si, e na média uma quantidade muito maior de divisões é aceita. Acima de $w_c = 50$ os jogadores teimosos não aceitam ofertas uns dos outros. Como eles são o grupo mais populoso, essa transição afeta o maior componente de seu ganho médio - as negociações com jogadores uniformes e teimosos ocorrem em menor quantidade, nem sempre são bem sucedidas e resultam em um ganho variável (lembrando que a proposta desses jogadores não é fixa, ao contrário dos jogadores teimosos).

Com esta mesma população, foram realizadas simulações, onde o ganho médio dos agentes pode ser medido em tempos curtos. Os histogramas da figura 3.3 ilustram a dispersão desse ganho médio para uma quantidade pequena de encontros, e como essa

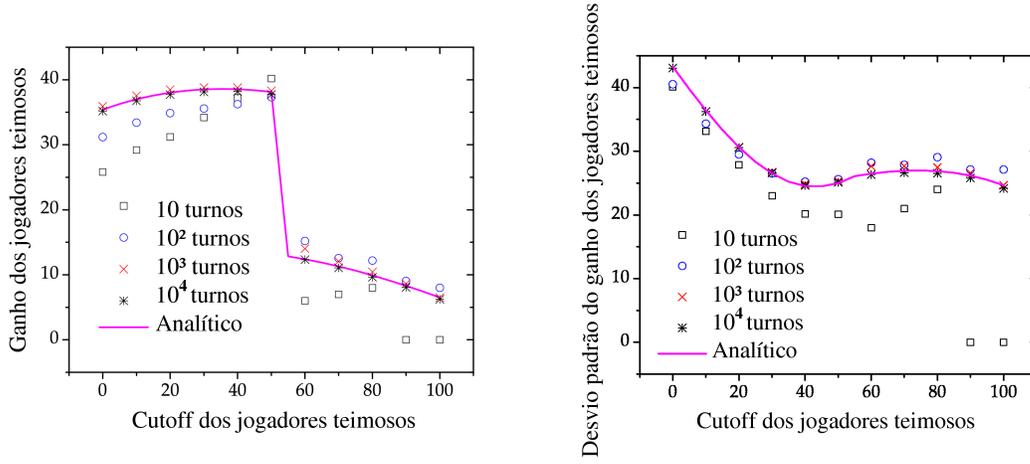


Figura 3.2: Ganho médio de um jogador fixo $E[Y_1]$ (esquerda) e seu desvio padrão $\sqrt{\text{var}[Y_1]}$ em função do *cutoff* adotado pelos jogadores teimosos. A população é composta de 100 jogadores teimosos, 50 uniformes e 50 gananciosos

medida se aproxima da calculada analiticamente à medida que a quantidade e encontros aumenta. O ganho médio calculado para esta situação é aproximadamente $\langle Y \rangle \sim 38$, o que está de acordo com o encontrado nas simulações.

3.4.2 Teimosos e justos com preponderância variável

Nesta seção é apresentado um exemplo com cálculos exatos para $\rho_{s_c, s_k} \neq 1/2$. Neste caso há uma população composta de 50% de jogadores teimosos ($k = 1$) e a outra metade de justos ($k = 2$). Para determinados valores do *cutoff* de jogadores teimosos são analisados a média e desvio padrão do ganho dos jogadores justos, que se torna uma função do cutoff dos próprios jogadores justos e do valor de ρ . Lembre-se que, pela convenção adotada, ρ mede a participação relativa dos teimosos como proponentes. Por exemplo, com $\rho_{1,2} = 0.8$, quando se encontram um jogador teimoso e um justo, o primeiro tem 80% de chance de ser o proponente. Nos encontros de jogadores do mesmo grupo, $\rho_{1,1} = \rho_{2,2} = 1/2$. Como nesta seção apenas o valor $\rho_{1,2} = 1 - \rho_{2,1}$ é uma variável independente, os índices podem ser dispensados e será utilizado apenas ρ .

A figura 3.4 mostra os resultados para a esperança do ganho dos jogadores justos $E[Y_J]$, obtida pelo cálculo da equação 3.1 com $m = 1$. Diferentes fases do ganho para os jogadores justos são determinadas pela relação do seu *cutoff* (w_{c_J}) com o cutoff dos jogadores teimosos, w_{c_T} . Nessas fases, muda completamente a relação do ganho dos jogadores justos com ρ . As diferentes fases para $E[Y_J]$ são mostradas na equação (3.6)

$$E[Y_J] = \begin{cases} \frac{w}{4} + \rho \frac{w_{c_T}}{4} & \text{se } w_{c_J} < w_{c_T} \wedge w_{c_J} \leq w - w_{c_T} \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{\rho}{2}\right)w + \frac{(\rho-1)}{2}w_{c_T} + \frac{\rho}{2}w_{c_J} & \text{se } w_{c_T} \geq w_{c_J} \geq w - w_{c_T} \\ \frac{w}{4} & \text{se } w - w_{c_T} < w_{c_J} < w_{c_T} \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{\rho}{2}\right)w + \frac{(\rho-1)}{2}w_{c_T} & \text{se } w_{c_J} > w_{c_T} \wedge w_{c_J} \geq w - w_{c_T} \end{cases} \quad (3.6)$$

Por sua vez, o desvio padrão calculado é exibido na figura 3.5, resultado da equação

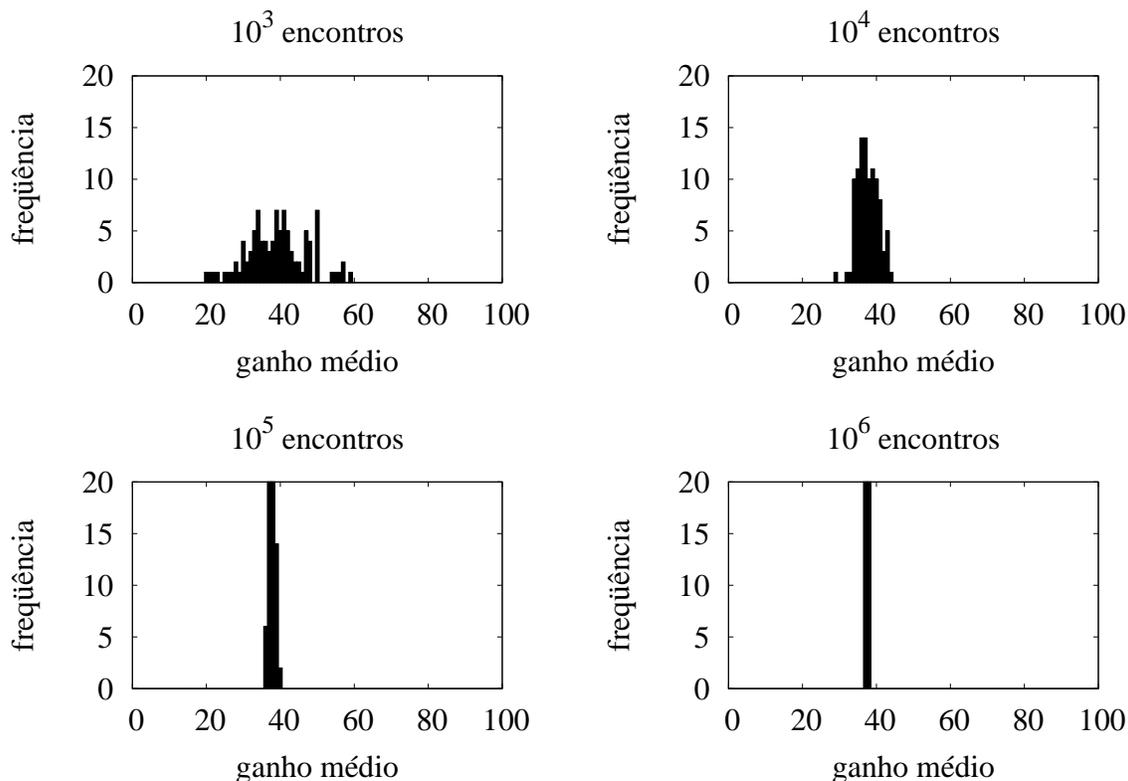


Figura 3.3: Histogramas do ganho recebido por jogadores teimosos. Nesta simulação participam 200 agentes, metade dos quais jogadores teimosos com cutoff 50, outros 25% são jogadores uniformes e o restante gananciosos. Os histogramas foram construídos para uma quantidade de encontros variável: 10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6 , respectivamente.

3.2.

3.4.3 Comparação de jogadores justos e teimosos

Nesta seção são comparados os ganhos médios de diferentes estratégias em populações binárias, isto é, divididas em dois grupos de estratégias diferentes e mesmo tamanho. Este estudo abrange duas famílias de estratégias: justos e teimosos. Primeiro, é analisado o ganho médio com dois grupos de jogadores teimosos. A seguir, pode-se observar o ganho de jogadores justos com diferentes estratégias, e por último um confronto de jogadores justos e teimosos. O objetivo aqui não é realizar um torneio, o que é feito no capítulo 4, mas ilustrar o efeito das diferentes estratégias no ganho e sua variância, incluindo transições abruptas nesses parâmetros que ocorrem à medida que são escolhidos novos ⁵. Em toda esta subseção, os valores foram obtidos em simulações com uma população de 200 agentes e a realização de 10^6 encontros. Cabe uma observação sobre os gráficos: como os valores foram obtidos em incrementos de 10 nos respectivos *cutoffs*, algumas das transições aparecem menos abruptas do que realmente são. Por outro lado, muitas medições acarretariam um excesso de linhas no tipo de gráfico utilizado.

A primeira análise é sobre dois grupos de jogadores teimosos, que nas legendas dos gráficos aparecem como “teimosos-1” ($p = 1$) e “teimosos-2” ($p = 2$). A figura 3.6(a) mostra o ganho médio recebido pelo primeiro grupo. Além das regiões de ganho 0 ou

⁵Esse tipo de mudança de comportamento em parâmetros de um sistema, relacionada à mudança de outras variáveis, é chamada de transição de fase.

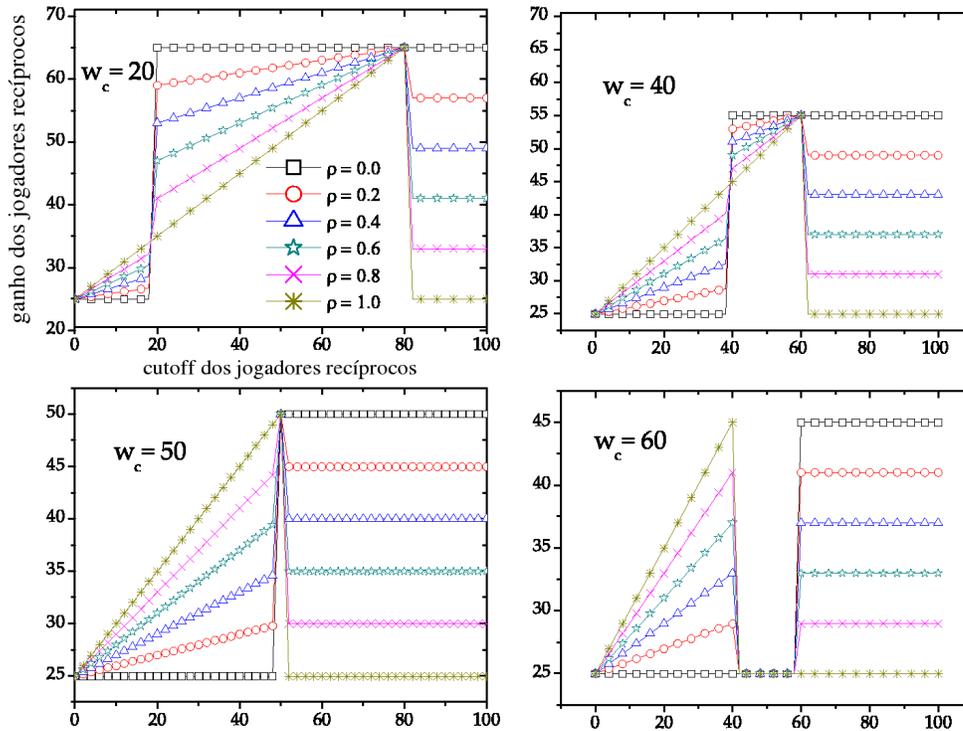


Figura 3.4: Ganho médio dos jogadores justos em função de seu *cutoff* para diferentes valores de ρ . Cada gráfico exibe os resultados com uma subpopulação de jogadores teimosos de *cutoff* 20, 40, 50 e 60, respectivamente. As linhas correspondem a diferentes de valores de $\rho_{1,2}$: 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 e 1.0. O *cutoff* dos jogadores justos está no eixo x.

de um ganho mediano, há uma região de alto ganho quando o outro grupo de jogadores escolhe um *cutoff* abaixo de 50. Tratando-se de jogadores teimosos, isso significa que o outro grupo aceita ganhar um valor baixo, permitindo que o primeiro obtenha uma parcela maior da divisão.

Observando a figura 3.6(b), percebe-se que em toda a região onde os jogadores possuem *cutoff* menor ou igual a 50 o ganho médio da população é máximo. Ou seja, se os jogadores teimosos são pouco exigentes, a proposta sempre é aceita e a eficiência das negociações é máxima. Por outro lado, como é exibido nos gráficos, um ganho maior por um jogador só pode ser alcançado às custas dos demais participantes. O único ponto onde a eficiência máxima coincide com uma distribuição de riqueza igual na população é em 50, 50, a divisão meio a meio.

Na análise da população seguinte, composta por dois grupos de jogadores justos, o ganho máximo ocorre quando o *cutoff* é igual em toda a população. A figura 3.6(c) mostra o ganho médio de um dos grupos, e a linha no centro do gráfico é a região de igual *cutoff*. Assim como no caso dos jogadores teimosos, fora dessa linha um jogador também pode alcançar altos ganhos, mas as custas de um ganho menor de outros.

Por último, é comparado o ganho médio numa população com jogadores justos e teimosos com diferentes *cutoffs*. Como o mesmo agente encontra-se aleatoriamente com outros do seu tipo ou do outro, os efeitos estudados nos casos de tipos de jogadores iguais

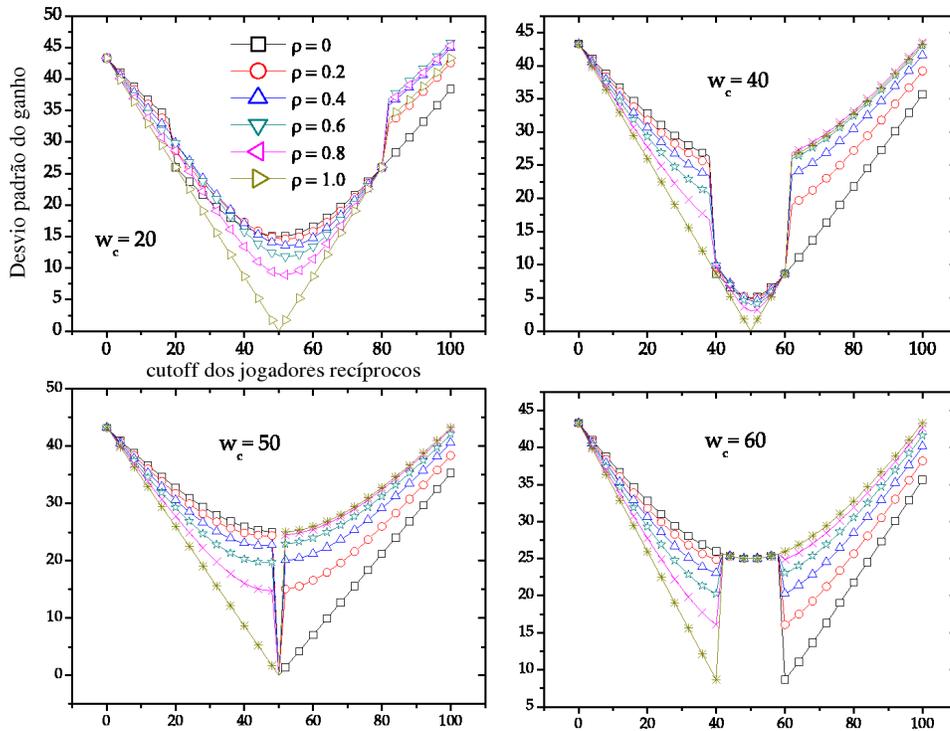


Figura 3.5: Desvio padrão do ganho dos jogadores recíprocos, com os mesmos parâmetros que na figura 3.4.

somam-se aos que ocorrem entre os encontros de tipos diferentes. A figura 3.6(d) mostra o ganho médio recebido pelos jogadores teimosos. Há uma linha onde eles recebem o máximo ganho de 50, onde o *cutoff* escolhido por ambos os grupos é igual e acima de 50. Na figura 3.6(e) pode ser observado que o jogador justo pode obter ganhos maiores. Porém, apenas se os jogadores teimosos tiverem um *cutoff* abaixo de 50. De volta para a figura 3.6(d), nota-se que nesta situação os jogadores teimosos possuem uma perda significativa. Observa-se que a divisão do ganho máximo é um fato recorrente no estudo do ganho médio de populações do JU: se uma subpopulação recebe mais de 50% dos ganhos, está recebendo mais de outro grupo que aceita ganhos menores. Nitidamente, na figura 3.6(f), esta é uma região de ganho máximo para a população, onde todas as propostas são aceitas.

3.4.4 Variância do ganho de jogadores justos: comparando formas de modelar o tempo do jogo

Na teoria dos jogos evolucionária, o *fitness* dos jogadores é uma função do ganho recebido, ou seja, a chance de uma estratégia deixar descendentes para a geração seguinte depende diretamente deste valor. Embora esse método resolva a questão da racionalidade dos agentes, provoca um amplo leque de questões relacionadas a *como* ocorre essa evolução. Esse aspecto foi brevemente discutido no capítulo 2, enquanto que no capítulo 4 são exploradas algumas dessas possibilidades para o JU. Esta seção, por sua vez, é focada nas variações do ganho médio obtido em intervalos de tempo de duração diversa.

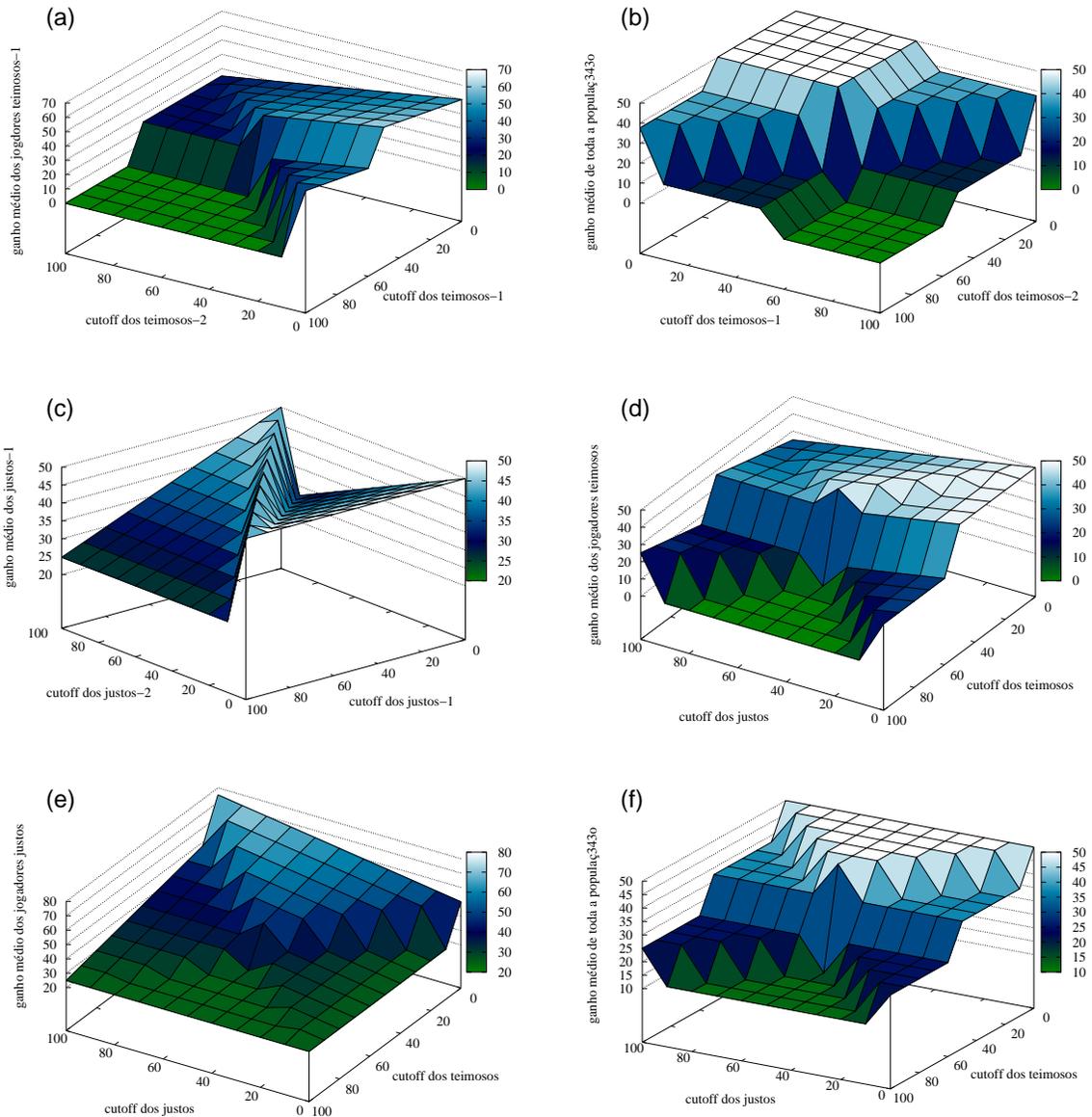


Figura 3.6: Ganho médio em confrontos com justos e teimosos. O ganho é uma função dos *cutoffs* adotados por ambos os grupos. A população é sempre dividida em dois grupos de igual tamanho, mas estratégias diferentes. **(a)** Ganho médio de um grupo de jogadores teimosos, dentro de uma população com dois grupos de teimosos com diferentes *cutoffs*. **(b)** Ganho médio de toda a população no mesmo caso. **(c)** Ganho médio de um grupo de jogadores em outra população, formada por jogadores justos em dois grupos de diferentes *cutoffs*. **(d)** Ganho médios dos jogadores teimosos em outra simulação, onde há um grupo de teimosos e outro de justos. **(e)** O mesmo para os jogadores justos. **(f)** Para toda a população.

As informações obtidas com estratégias estáticas ajudam a compreender os resultados de algumas simulações evolucionárias da literatura.

Veja-se dois trabalhos com diferentes abordagens para o tempo: em (PAGE; NOWAK, 2000) é calculado o ganho esperado em um tempo infinito, mas em (SÁNCHEZ; CUESTA, 2005) o ganho dos agentes é obtido a partir da soma dos ganhos numa quantidade

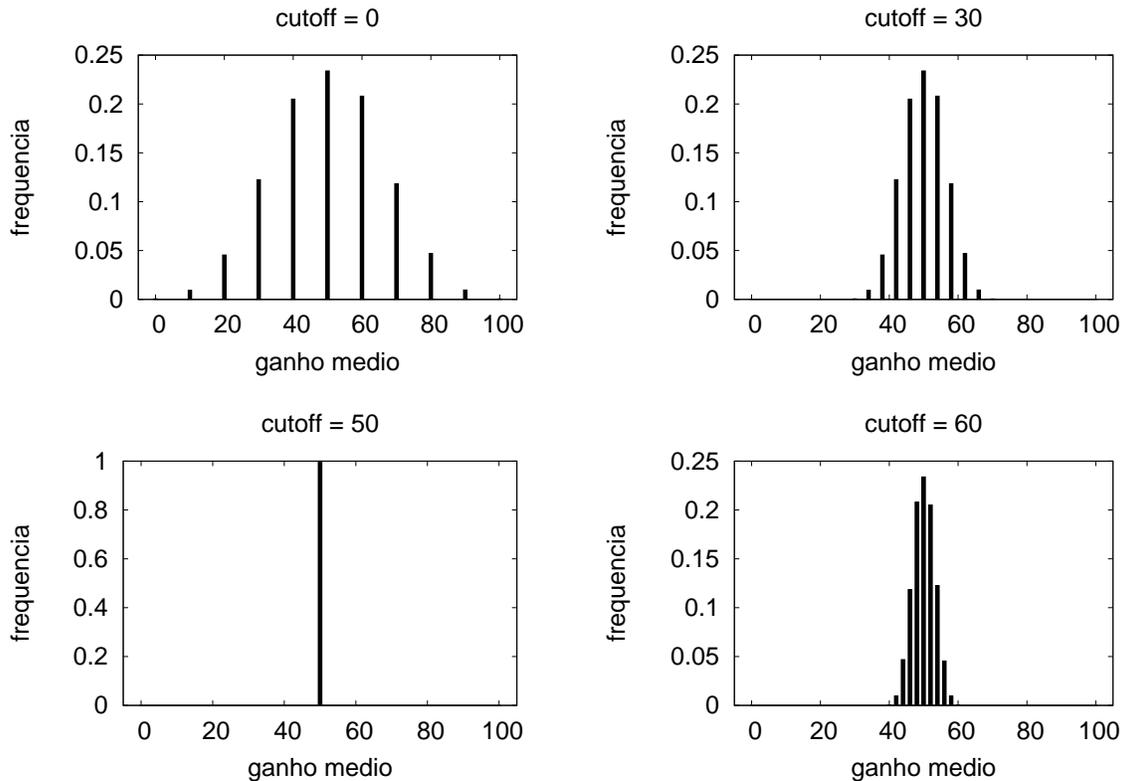


Figura 3.7: Histogramas do ganho médio obtido a cada 10 turnos, em uma população uniforme de jogadores justos.

pequena e variável de confrontos. Estes trabalhos possuem conclusões muito diferentes: no primeiro, a estratégia dos agentes se aproxima do equilíbrio de Nash, enquanto que no segundo a evolução tende à divisão meio a meio. Além disso, há diferenças importantes no comportamento do sistema, relacionadas à duração desse intervalo de coleta, ou, nos termos de (SÁNCHEZ; CUESTA, 2005), relacionadas à taxa de evolução. Em tempos curtos, o sistema se torna muito mais instável, com grandes variações nas estratégias adotadas pelos jogadores. Com tempos longos, podem ocorrer longos períodos de estagnação.

O objetivo aqui é chamar a atenção para a variância do ganho recebido pelos agentes em função do tempo adotado, a qual deve ser o fator determinante para os resultados dos dois trabalhos aqui citados. No limite em que o tempo é infinito, a variância é zero: uma determinada estratégia recebe sempre o mesmo ganho médio. Ou seja, o processo torna-se determinístico e trata-se do cálculo adotado por Page e Nowak. Por outro lado, a variância é máxima se tomarmos uma única realização do jogo, e este é o valor calculado pela equação (3.2). Nesse caso, um jogador com a mesma estratégia, jogando contra os mesmos adversários, pode ter ganhos muito diferentes, resultando na instabilidade encontrada por Sanchez e Cuesta.

No momento em que há interesse em modelar situações biológicas ou sociais, o tempo importa: um período sem adquirir comida, para um animal, ou sem fazer negócios, para um comerciante, pode representar o seu fim. É difícil estabelecer o intervalo de tempo relevante ou, em outras palavras, quantas participações no jogo terá um agente antes de ser avaliado pelo algoritmo evolutivo. Tempos curtos parecem fazer mais sentido, mas essa afirmação ainda é muito vaga. Devido a isso, tanto no trabalho de (SÁNCHEZ; CUESTA,

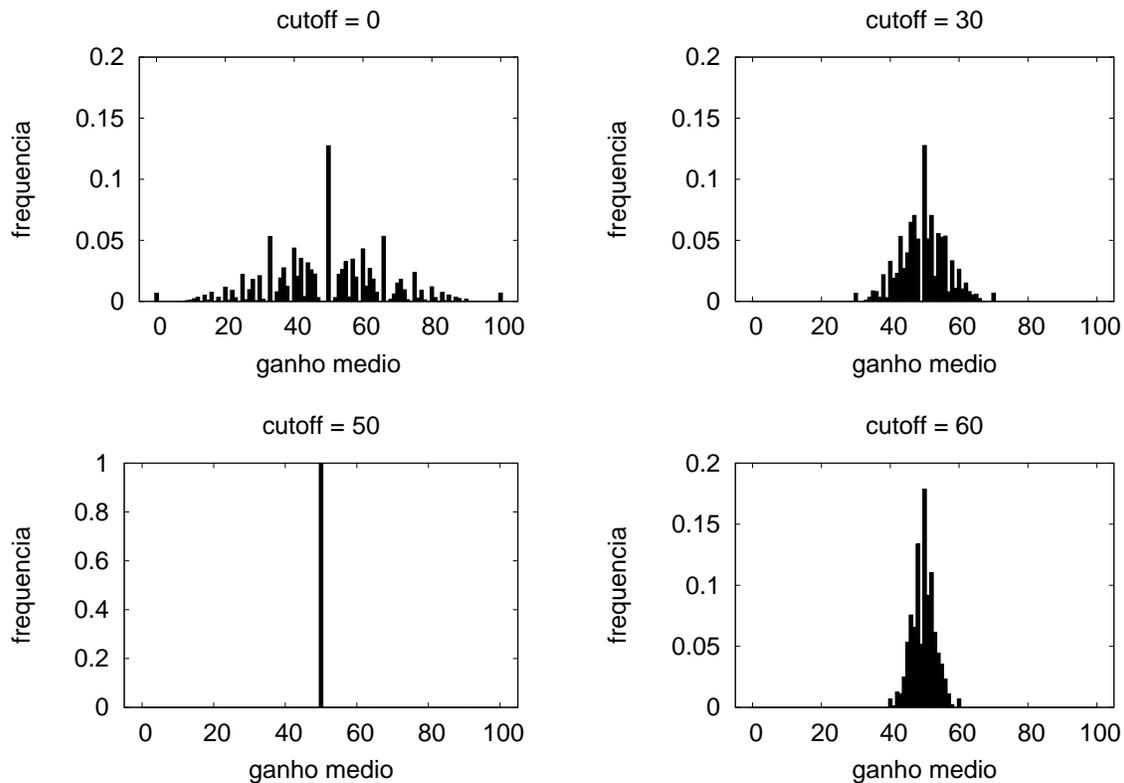


Figura 3.8: Histogramas do ganho médio obtido a cada 1000 encontros, em uma população uniforme de jogadores justos.

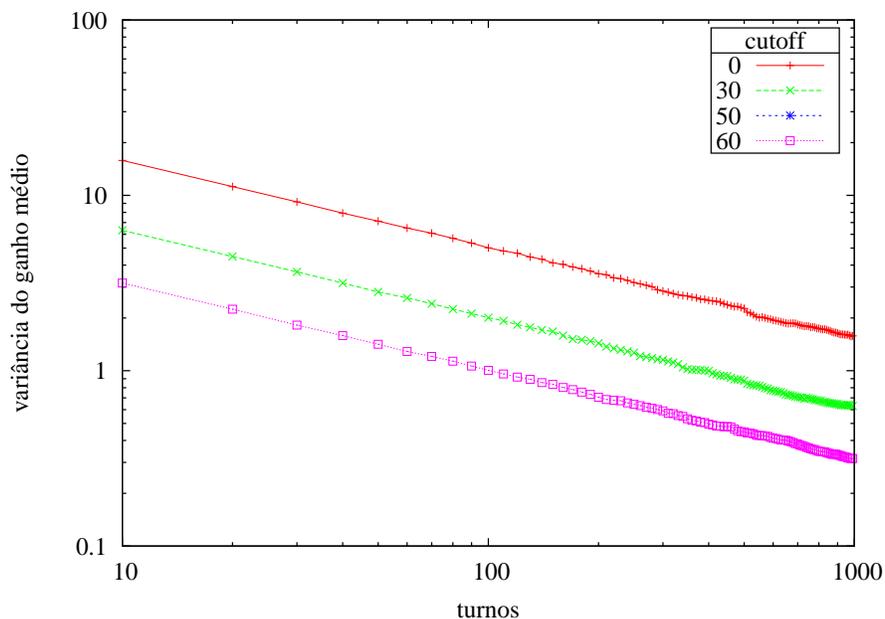


Figura 3.9: Variância do ganho médio recebido por um jogador, em uma quantidade variável de turnos, utilizando a equação (3.7), em populações uniformes de jogadores justos, com cutoff 10, 30, 50 ou 60. Não há linha para a população de cutoff 50, pois nesse caso a variância é sempre zero.

2005) quanto no capítulo 4 desta dissertação, são realizadas simulações com mais de um intervalo de tempo.

Foram vistas, na seção 3.3, duas formas de ordenar as interações dos jogadores, as quais influenciam os resultados do ganho recebido em períodos curtos. Quando é escolhido aleatoriamente um par de agentes a cada encontro, alguns participam mais que outros em um pequeno número de encontros. Entretanto, se a execução é organizada em turnos, as participações são igualmente distribuídas por unidade de tempo. Logo, em tempos curtos, as diferenças medidas devem-se apenas à variância do ganho de cada estratégia, sem a introdução de uma variável aleatória adicional, que seria a quantidade de participações dos agentes numa determinada quantidade de encontros. Pensando nesta escolha de algoritmo como um problema de modelagem, a organização por turnos simplifica a representação do tempo.

A figura 3.7 mostra a distribuição da média do ganho acumulado em 10 turnos, o que, numa população de 200 agentes, é equivalente a 1000 encontros, de acordo com a equação (3.3). Ela mostra um comportamento diferente da figura 3.8, onde o mesmo número de encontros é executado mas os jogadores participam em quantidades diferentes a cada medida.

Determinada a forma como o tempo é representado no algoritmo, resta a questão da quantidade de turnos a ser utilizada. Não há uma resposta definitiva, mas pode-se saber de que forma essa quantidade muda a variância das estratégias.

Seja Y_i o ganho recebido pelo jogador i em um turno. O ganho médio recebido em n_T turnos é:

$$\langle Y_i^T \rangle = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T Y_{i,j}$$

Com a média sobre a população $\overline{\langle Y^T \rangle} = (1/N) \sum_{i=1}^N \langle Y_i^T \rangle$ pode-se calcular o desvio quadrático da média pela equação:

$$\delta_{N,T} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\langle Y_i^T \rangle - \overline{\langle Y^T \rangle} \right)^2} \quad (3.7)$$

Como é esperado para o desvio padrão da média amostral (no contexto da distribuição amostral da média), este desvio quadrático segue a lei de potência $\delta_{N,T} \sim T^{-1/2}$. A figura 3.9 apresenta um exemplo, onde foram consideradas diferentes simulações, cada uma com uma população de 200 jogadores justos de diferente *cutoff*. Em todos os casos o ganho médio é o mesmo, como vimos na seção 3.4.3. Portanto, o desvio é muito mais importante que o ganho médio na comparação de populações de jogadores justos com mesma estratégia. Neste tipo de população:

$$\delta_{N,T} \sim |w_c - w/2| T^{-1/2} \quad (3.8)$$

Portanto, quanto mais próximo de $w/2 = 50$, menor o desvio. Nos embates desse tipo de jogador, a variância torna-se um fator primordial de escolha dos vencedores se for adotado o critério de escolha da menor variância, pois a divisão (50, 50) é claramente vencedora. Nesse valor, o processo é determinístico e não há variância, não importa em quantos turnos foi tomado o ganho do agente.

Esse critério é importante justamente pela variância ser dependente da escala de tempo para as demais divisões. Voltando ao trabalho de (SÁNCHEZ; CUESTA, 2005), onde são

realizadas simulações com jogadores recíprocos (justos), a conclusão que resta é a de que essa variância está intimamente ligada ao comportamento da dinâmica evolucionária. A maioria das ferramentas disponíveis utiliza apenas o ganho médio para comparar estratégias, como por exemplo as várias definições de equilíbrio, a aplicação da dinâmica de replicação para encontrar estratégias evolucionariamente estáveis e o uso de diagramas de Lotka-Volterra para representá-los. Considerando que o comportamento de tempos curtos depende fortemente da variância do ganho, enquanto este fator não for incorporado nas equações, esta análise continuará dependendo fortemente de simulações.

3.4.5 Uma dinâmica simples do *cutoff* em jogadores justos

Nesta seção é analisado um caso simples de algoritmo evolucionário em que a estratégia (*cutoff*) de um jogador justo depende do seu resultado na participação imediatamente anterior.

A simulação começa com uma população de jogadores justos com *cutoff* inicial de $w_c^{(i)}(t) = 50, i = 1, \dots, N$. A regra para alteração das estratégias é simples:

$$w_c^{(i)}(t) = w_c^{(i)}(t-1) \begin{cases} +1 & \text{se o jogador recebeu algum valor} \\ -1 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.9)$$

São respeitados os limites $\max\{w_c^{(i)}(t)\} = w$ e $\min\{w_c^{(i)}(t)\} = 0$, lembrando que em todas as simulações, $w = 100$.

Para analisar o nível de atividade no sistema, foi criado uma medida de permanência das estratégias. Defini-se a “idade” de um agente $i = 1, \dots, N$, denotada por $A_i(t)$, como h se $s_i(t) = s_i(t-1) = \dots = s_i(t-h-1)$ e $s_i(t-h-1) \neq s_i(t-h)$. A média da idade é obtida sobre n_{run} repetições do experimento e sobre todos os jogadores, resultando em

$$\langle A \rangle_t = \frac{1}{(N \cdot n_{run})} \sum_{j=1}^{n_{run}} \sum_{i=1}^N A_i^{(j)}(t) \quad (3.10)$$

Da mesma forma são estudadas as médias do *cutoff* $\langle w_c \rangle_t$ e do ganho $\langle Y \rangle_t$ na população.

Os primeiros $t = 50$ turnos são totalmente determinísticos para $\langle A \rangle_t$, $\langle w_c \rangle_t$ e $\langle Y \rangle_t$. O *cutoff* de todos os jogadores aumenta em uma unidade a cada turno de $t = 0$ até $t = 50$. Basta lembrar que todos os jogadores possuem a mesma estratégia e, tratando-se de jogadores justos, todas as propostas são aceitas. Neste intervalo, $w_c^{(i)}(t) = 50 + t$ enquanto que $\langle Y_t \rangle = 50$, pois a média de ganho para cada par de jogadores é $\langle Y_2 \rangle_t = (Y_{proposer} + Y_{responder})/2 = ((50 + t) + (50 - t))/2 = 50$. Esse comportamento se modifica quando todos atingem o máximo *cutoff* $w_c = w = 100$ em $t = t_c = 50$. Neste turno, os jogadores que atuam como aceitadores recebem 0 e os proponentes 100, logo metade dos jogadores decrementa seu *cutoff* enquanto que a outra metade permanece no mesmo valor. Deste ponto em diante o comportamento do jogo se torna estocástico e as quantidades envolvidas variam de forma imprevista.

Um gráfico da idade média em função do tempo $\langle A \rangle_t$ pode ser visto na figura 3.10. Observa-se que o sistema se encaminha em média para uma situação de alta rotatividade das estratégias, com um jogador permanecendo apenas 3 turnos em média com o mesmo *cutoff*. No gráfico inserido mostra uma evolução no tempo da média do ganho. Depois de uma queda inicial, essa média vai para um valor estacionário (~ 25). Este valor indica uma eficiência muito baixa do sistema - em média, apenas metade das propostas são aceitas, o mesmo valor que uma população formada totalmente por jogadores uniformes.

Portanto, essa regra simples não é suficiente para evoluir os jogadores no sentido de aumentar o seu ganho. Pelo contrário, partindo de uma situação de alto ganho, o sistema degenerou para uma situação de baixo ganho e pouca estabilidade. Não é o que ocorre com as simulações realizadas no capítulo 4.

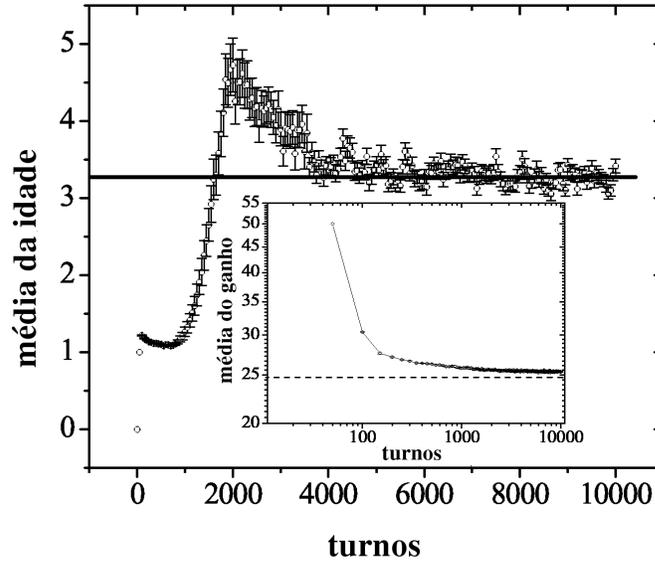


Figura 3.10: Evolução temporal da média da idade. **Detalhe:** o mesmo para a média do ganho. Gráficos para o sistema com $N = 100$ jogadores justos, que iniciaram com $w_c = 50$.

Também é analisada a evolução temporal do cutoff, exibido na figura 3.11. Pode-se observar o surgimento de uma lei de potência no intervalo aproximado $10_3 < t < 10_4$, de forma que ocorre o comportamento:

$$\langle w_c \rangle_t \sim t^{-\nu}.$$

A medição do expoente resultou em $\nu \simeq 0.154$, indicando um decaimento lento para a média do *cutoff* no intervalo $1000 < t < 9000$.

Essa evolução temporal também pode ser vista em detalhe com a utilização de histogramas que mostram a distribuição das estratégias em determinados momentos no tempo. Foram realizados $n_{run} = 100$ experimentos. Para cada um deles, um histograma foi obtido para os últimos t_{last} turnos entre T turnos. Para a obtenção do resultado final, foi realizada uma média entre todas as execuções. Os valores de T escolhidos foram 1000, 2000, 4000 e 8000.

No primeiro caso é analisada a distribuição das estratégias em diferentes instantes no tempo, todas com $t_{last} = 1$, como visto na figura 3.12. Inicialmente o *cutoff* dos jogadores segue uma distribuição exponencial ascendente. À medida que o tempo passa, ocorre um acúmulo de jogadores com $w_c = 0$, ou seja, o pico à esquerda observado na figura. Relembrando a regra de atualização das estratégias, um agente nessa situação irá permanecer indefinidamente até receber algum valor. Como com $w_c = 0$ ele não recebe nada como proponente, possui no mínimo 50% de chance de permanecer nesse estado.

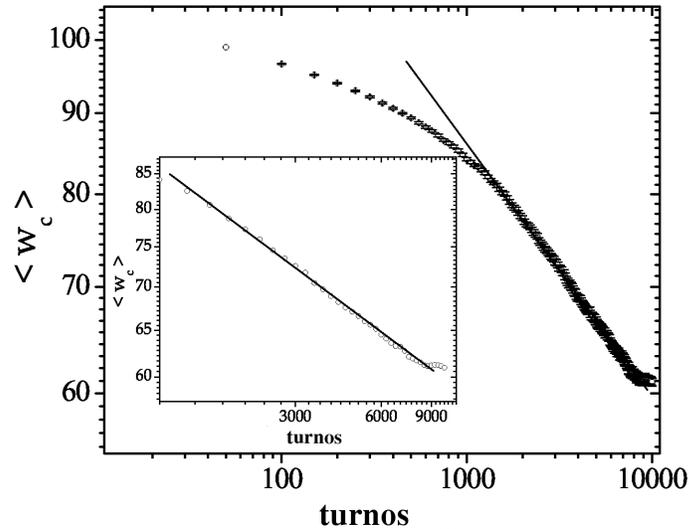


Figura 3.11: Lei de potência para a evolução temporal da média do cutoff. **Detalhe:** tempos longos ($t > 1000$ turnos). Gráficos para o sistema com $N = 100$ jogadores justos, que iniciaram com $w_c = 50$.

Enquanto aumenta o pico em $w_c = 0$, diminui a proporção de jogadores com maiores cutoffs, mas eles ainda representam a grande maioria, com mais de 90% de jogadores com $w_c > 0$. Além disso, em aproximadamente $t = 10000$ esse quadro se estabiliza. Devido a esse fator, a lei de potência da figura 3.11 deixa de valer para valores maiores de t .

Da mesma forma, foram feitos histogramas do ganho recebido. Na figura 3.13 são comparados o ganho instantâneo ($t_{last} = 1$, à esquerda), com o ganho médio em 10 participações ($t_{last} = 10$, à direita), ambos depois de um tempo longo de evolução, com $T = 10000$. Neste caso são muito nítidos os efeitos do tempo considerado para medir o ganho de um agente, discutidos na seção 3.4.4. Enquanto que em um turno há uma grande quantidade de agentes com ganho 0, se consideramos uma janela maior essa distribuição tende a ser normal, como esperado. Além disso, no detalhe do gráfico à esquerda para $t_{last} = 1$, pode-se observar que o restante da distribuição não é uniforme, mas diminui ligeiramente para os valores médio de *cutoff*, próximos a 50.

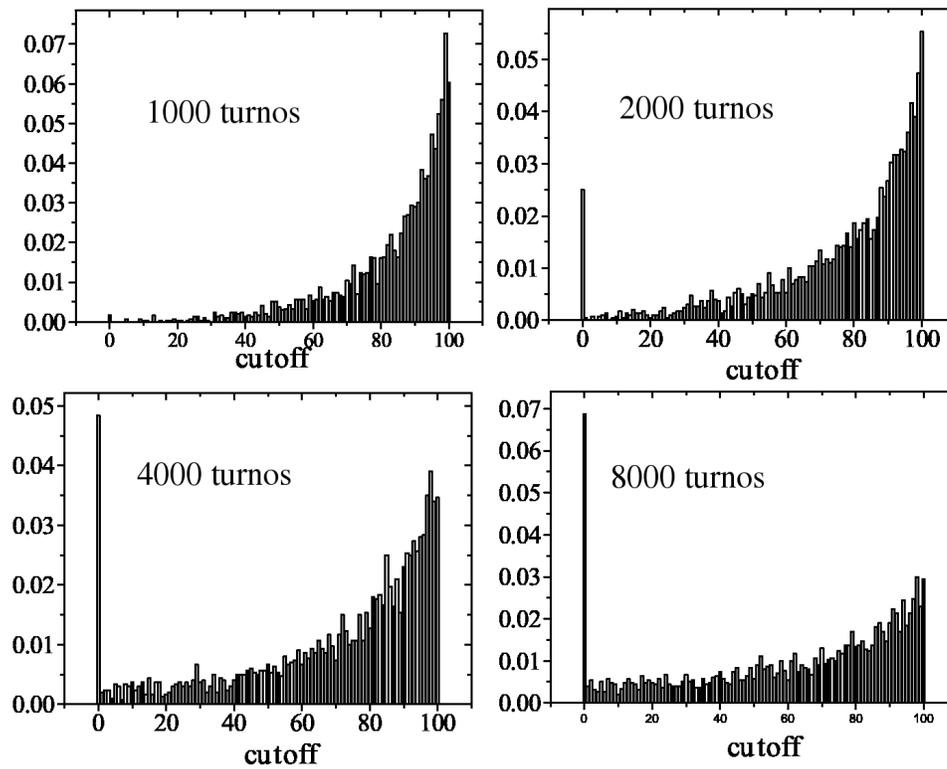


Figura 3.12: Histogramas do cutoff no caso dinâmico, obtidos com a execução de 100 experimentos.

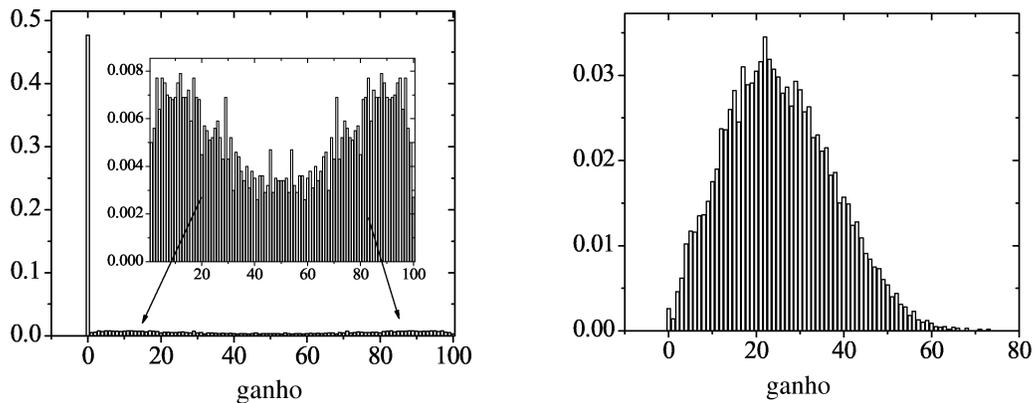


Figura 3.13: Histogramas do ganho médio no caso dinâmico. À esquerda, o histograma para $t_{last} = 1$, e à direita para $t_{last} = 10$, sendo que $T = 10000$ turnos. O gráfico interno mostra em detalhes o caso $t_{last} = 1$.

4 ANÁLISE DE ASPECTOS EVOLUTIVOS NO JOGO DO ULTIMATO ESPACIAL

Neste capítulo são analisadas as características de uma população de agentes dispostos em uma rede quadrada regular, interagindo segundo o JU e modificando suas estratégias ao longo do tempo.

Ao contrário do capítulo anterior, não é definido previamente um conjunto de estratégias. No início de cada execução uma grande quantidade de estratégias é distribuída de forma aleatória e uniforme em toda a população. Então, a cada ciclo da simulação é obtido o ganho dos jogadores e aplicadas as regras de atualização dinâmica das estratégias. São analisadas duas dinâmicas diferentes: morte e nascimento com amostragem seletiva (MNAS) e Gibbs *sampling* (GS) sobre vizinhança. Também são levadas em consideração mudanças na ordem de execução dos jogadores e na duração de cada ciclo.

4.1 Modelagem

4.1.1 Estratégias analisadas

As estratégias utilizadas neste capítulo são da forma $s = (w_p, w_a)$, onde $w_p \in \{1 \cdots w - 1\}$, $w_a \in \{1 \cdots w - 1\}$. w_p é o valor desejado quando proponente e w_a é o valor mínimo aceito quando aceitador ou nível de exigência¹. No início de cada execução cada jogador recebe uma estratégia escolhida de forma aleatoriamente uniforme entre o conjunto de estratégias.

Esse conjunto de estratégias equivale ao conjunto de estratégias puras para o JU com as seguintes restrições: primeiro, são desconsideradas as estratégias em que o ganho de algum dos jogadores é igual a zero; segundo, a aceitação não é decrescente, isto é qualquer valor menor que w_a é recusado e qualquer valor maior ou igual a w_a é aceito. Com $w = 100$ há $99^2 = 9801$ estratégias que satisfazem essas condições.

Algumas estratégias em particular são importantes, em especial as dos jogadores justos (ou recíprocos) definidas na seção 3.1.3. Essas estratégias podem ser representadas por um único parâmetro w_c (*cutoff*), de forma que $s = (w_c, w - w_c)$. Naquela seção também foram definidos os jogadores teimosos, neste caso $s = (w_c, w_c)$.

Após uma execução é possível associar a cada estratégia a sua proporção na população final. Isto cria um histograma em 3D, adaptado para 2D com o uso de tons de cinza. Com a obtenção da média dessas proporções em múltiplas execuções (uma simulação), é obtida uma representação da “população média”, que não é o resultado de nenhuma execução em

¹Em inglês, *acceptance level*. Este autor não considera apropriado chamar este valor de “nível de aceitação” pois, quanto maior w_a , menor a faixa de valores aceitos, o que seria contra intuitivo. “Nível de exigência” reflete que, quanto maior w_a , maior o ganho exigido pelo aceitador.

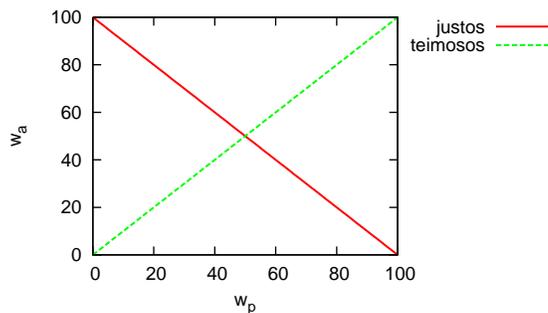


Figura 4.1: Diagrama esquemático para a definição de estratégias de jogadores justos e teimosos.

Tabela 4.1: Classificação de reciprocidade para análise da densidade de estratégias. A diagonal dos jogadores justos está demarcada na figura 4.1.

Região	Relação entre w_a e w_p	Localização no gráfico
Não-reciprocidade	$w_a > W - w_p$	Acima da diagonal dos justos
Reciprocidade	$w_a \leq W - w_p$	Diagonal dos justos e abaixo desta
Reciprocidade estrita	$w_a = W - w_p$	Diagonal dos justos
Reciprocidade não-estrta	$w_a < W - w_p$	Abaixo da diagonal dos justos

particular, mas reflete a probabilidade de sobrevivência de cada uma das estratégias. Na figura 4.1 cada ponto do gráfico (discretizado) corresponde a uma estratégia, de acordo com os valores de w_p e w_a . As estratégias de jogadores justos e teimosos² foram demarcadas. Através deste diagrama pode-se relacionar visualmente o espaço de estratégias puras com a análise que foi feita no capítulo 3 e com os histogramas que seguem nas próximas seções.

Para interpretar esses gráficos corretamente, é necessário ter em mente que: quanto maior w_a , mais exigente o aceitador e menor a faixa de valores que ele aceita; quanto maior w_p , mais exigente o proponente, maior o seu ganho e menor o ganho do aceitador; em toda a faixa de valores $w_a \leq W - w_p$, há aceitação e realização do negócio. Desse ponto de vista, fixado w_p , em todo o segmento de reta $w_a \leq W - w_p$ o ganho dos jogadores é o mesmo e essa será chamada de região de reciprocidade. Se $w_a = W - w_p$, trata-se do jogador justo, com $w_c = w_p = W - w_a$, na chamada reta de reciprocidade estrita. Acima da reta não há aceitação, ambos jogadores perdem e estamos na região de não-reciprocidade. Para indicar a região de reciprocidade que exclui a reta (onde $w_a < W - w_p$), será utilizado o termo reciprocidade não-estrta. A tabela 4.1 resume os termos introduzidos neste parágrafo.

4.1.2 Unidade de tempo empregada e a ordem de participação dos jogadores

Em um ciclo todos os agentes jogam com seus vizinhos, recebem seu ganho de acordo, para então decidir qual será sua próxima estratégia. A atualização então é realizada paralelamente em todos os jogadores (ou apenas naqueles que mudaram), antes iniciar um novo ciclo. Assim, é utilizada uma atualização síncrona. O tempo (indicado pela letra t) é sempre medido em ciclos, que equivalem aos passos de simulação. Algumas simulações

²não se falará mais de jogadores teimosos neste capítulo, pois eles são totalmente extintos nas dinâmicas estudadas.

foram realizadas por uma quantidade fixa de ciclos e outras até a convergência. O ciclo em que ocorre a convergência é indicado por t_{conv} .

No decorrer de um ciclo, a ordem em que se dá a interação entre os jogadores foi estudada de duas formas:

execução direta São realizados confrontos entre cada par de vizinhos, trocando-se os papéis de aceitador e proponente. Por exemplo, no reticulado 2D cada jogador irá interagir duas vezes com cada um de seus quatro vizinhos, num total de oito realizações do jogo.

execução em turnos Considera-se que uma participação ocupa tempo do jogador e este só pode participar de um jogo de cada vez. A execução em turnos satisfaz essa condição, escolhendo aleatoriamente cada par de vizinhos a interagir num turno, sem repetição - em outras palavras, é criado um *match* da rede, como explicado na seção 3.3.

Durante um ciclo cada jogador acumula um ganho que será utilizado na fase de aplicação da dinâmica. Pode-se fazer isso durante uma quantidade r de rodadas diretas ou turnos. Neste capítulo, foi utilizado $r = 1$ para todas as avaliações do algoritmo direto, mas foram utilizados ciclos com quantidade variável de turnos. O algoritmo em turnos permite comparar tempos muito curtos, em que cada jogador acumulou ganho em poucas jogadas antes de ser avaliado. No algoritmo direto, na rede quadrada regular, cada jogador participa de $8r$ jogadas em cada ciclo. Portanto, foi considerado que $r = 1$ no algoritmo direto é o suficiente para realizar a comparação com o algoritmo em turnos.

4.1.3 Dinâmicas

Nesta etapa do trabalho as estratégias dos jogadores podem mudar com o tempo. Esse comportamento dinâmico permite analogias com a evolução natural, com processos de aprendizado ou com mudanças culturais. Além disso, pode resolver uma das principais limitações de um sistema estático: é permitido que as estratégias efetivamente concorram entre si, levando a escolha de uma determinada estratégia porque esta supera as demais no sistema, sem a necessidade de uma avaliação externa. No modelo estático visto no capítulo 3, o resultado obtido era um conjunto simples de parâmetros como a média e a variância do ganho, a partir dos quais podem ser comparadas as estratégias, enquanto que nos modelos dinâmicos é possível obter diretamente uma probabilidade de sobrevivência para uma estratégia, assim como sua participação relativa na população após a evolução do sistema.

Em contrapartida, agora é necessário definir critérios para a adoção de novas estratégias pelos agentes. Neste trabalho serão exploradas duas regras clássicas para a evolução de sistemas dinâmicos, com modificações, explicadas nas seções a seguir.

4.1.4 Rede utilizada e demais parâmetros de simulação

Se for considerado um grande grupo de agentes, representando algum tipo de população, é razoável supor que não há como todos interagirem em um período curto. Dito de outra forma, a distribuição espacial e social da população irá limitar os encontros possíveis entre os indivíduos. Usualmente, essa estrutura é representada através de um grafo, ou no caso mais geral uma rede, onde os agentes são nodos e os vértices indicam quais agentes interagem entre si.

Nesta dissertação é utilizada uma rede quadrada regular com condições de contorno periódicas³. Essa rede é criada a partir de um reticulado de lado L e portanto com L^2 nodos. Não há espaço desocupado na rede, portanto o seu número de nodos é igual ao tamanho da população. Nas simulações foi utilizado $L = 100$ e uma população de 10 mil agentes.

Em cada simulação são realizadas n_{run} execuções com o objetivo de obter valores agregados, como a concentração média das estratégias. Foram realizadas simulações com $n_{run} = 100$ para a obtenção de médias simples e $n_{run} = 1000$ para obter dados suficientes para construir histogramas.

A cada ciclo a dinâmica de mudança de estratégias pode ser aplicada em toda ou em uma parcela da população. Nas simulações realizadas neste capítulo, essa parcela foi sempre de 10%.

4.2 Morte e nascimento com amostragem seletiva

4.2.1 Descrição

Neste algoritmo, abreviado por MNAS, são escolhidos k indivíduos a serem retirados da população em cada ciclo do algoritmo. Eles serão substituídos por um de seus vizinhos, escolhido aleatoriamente com chance proporcional ao seu ganho (*fitness*) no ciclo atual da simulação. Este é um tipo de processo de Moran (MORAN, 1958). Embora a definição original do processo de Moran não leve em consideração a estrutura da população, ou seja, não inclua uma rede ou grafo subjacente, isto tem sido abordado nos últimos anos (EREZ LIEBERMAN; NOWAK, 2005; NOWAK, 2006a).

Esta dinâmica tem uma propriedade importante para testar a sobrevivência e invasão de novas estratégias na população: ela garante que haverá um estado final com apenas uma única estratégia. Entretanto, quando se alcança um estado em que todas as estratégias possuem o mesmo ganho, não há diferença no seu *fitness* e o tempo para convergir pode ser extremamente longo. Em outras palavras, eventualmente restará apenas uma estratégia no sistema. Por isso, encerramos a execução quando a simulação alcança esse estado.

Neste trabalho foi modificada a escolha dos indivíduos retirados da população, que passou de ser completamente aleatória a ser feita por uma roleta, em que a chance de um jogador ser escolhido é inversamente proporcional ao seu *fitness*.

O que isso significa no caso do JU com estratégias puras? Pode ser comprovado que se houver apenas um tipo de proponente na população, todas as estratégias com um nível de exigência menor do que o oferecido pelos proponentes são equivalentes - isto é, a oferta será aceita e a divisão é a mesma. Portanto, a condição de parada adotada é identificar que todos os jogadores fazem a mesma proposta e recebem o mesmo valor.

O mesmo princípio se aplica a outros algoritmos que não inserem novas estratégias com o tempo, como é o caso do GS sobre vizinhança.

4.2.2 Resultados

Esta seção apresenta o resultado de simulações realizadas nas condições da seção 4.1, com o objetivo de encontrar as estratégias sobreviventes. Descobriu-se que, embora a distribuição de vencedores seja irregular, ela obedece a regra do “aceitação menor ou igual ao ganho do aceitador”, ou $w_a \leq W - w_p$ (região de reciprocidade). Nessas condições,

³Nessas condições de contorno, um nodo numa extremidade da rede se comunica com o do lado oposto, seja na horizontal ou na vertical. Em 3D essa rede possui o formato de um toróide.

sempre há aceitação e o ganho médio é de 50%, dado que a distribuição dos papéis de proponente e aceitador é uniforme. Foram encontradas variações na proposta média e na quantidade de estratégias na região de reciprocidade não-estricta, em que $w_a < w - w_p$ (tabela 4.1).

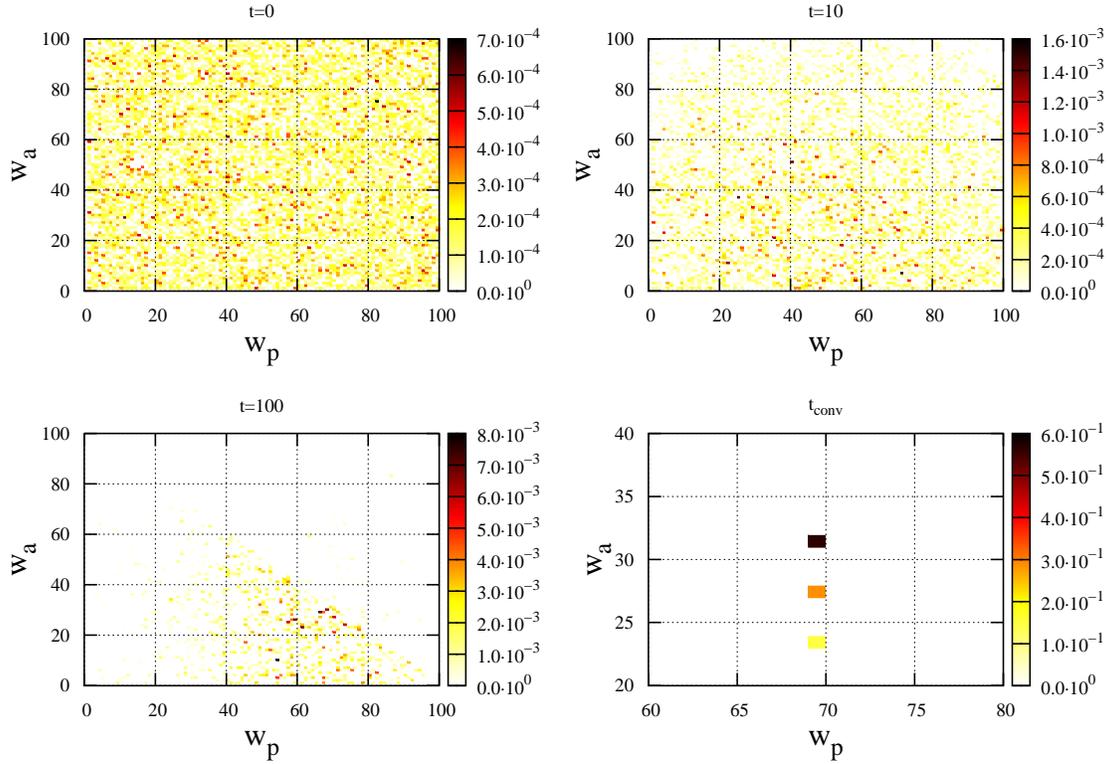


Figura 4.2: MNAS na ordem direta: densidade das estratégias em uma execução.

As figuras de 4.2 a 4.5 mostram a densidade de estratégias. Quanto mais escuro um ponto, maior a participação daquela estratégia específica na população. Trata-se de um histograma de 3 dimensões adaptado para 2 dimensões. A não ser pela primeira figura, todas as outras mostram gráficos da densidade média em $n_{run} = 1000$ execuções. É utilizada uma escala de tons logarítmica, para que os pontos onde há baixa densidade também sejam visíveis. Infelizmente, essa escala não é a mesma para todos os gráficos, pois devido à grande variação nesses valores (da ordem de 10^{-7} a 10^{-1}) o uso de uma mesma escala não permitiria a visualização de detalhes importantes. O limite inferior de 10^{-7} deve-se ao seguinte: com uma população de tamanho N e executados n_{run} experimentos, a ocorrência de uma estratégia em apenas um agente, em uma única execução, implica numa densidade média de $1/(N \cdot n_{run})$. Com os parâmetros utilizados, se torna $1/(10^4 \cdot 10^3) = 10^{-7}$. Já o limite superior indica que a estratégia de maior concentração possui até 10% de densidade média.

Na figura 4.2 observa-se como a densidade das estratégias varia com o tempo, numa única execução com ordem direta. No início ($t = 0$) há uma grande dispersão das estratégias na população, como se espera de uma distribuição uniforme. Também se observa que nem todas as estratégias estão presentes numa determinada execução, o que também é esperado (p é da mesma ordem que N). Nesta figura, não é possível encontrar a olho nu muita alteração em $t = 10$ ciclos de seleção, embora em $t = 100$ observe-se uma forte tendência para a região de reciprocidade. No final desta execução, temos apenas

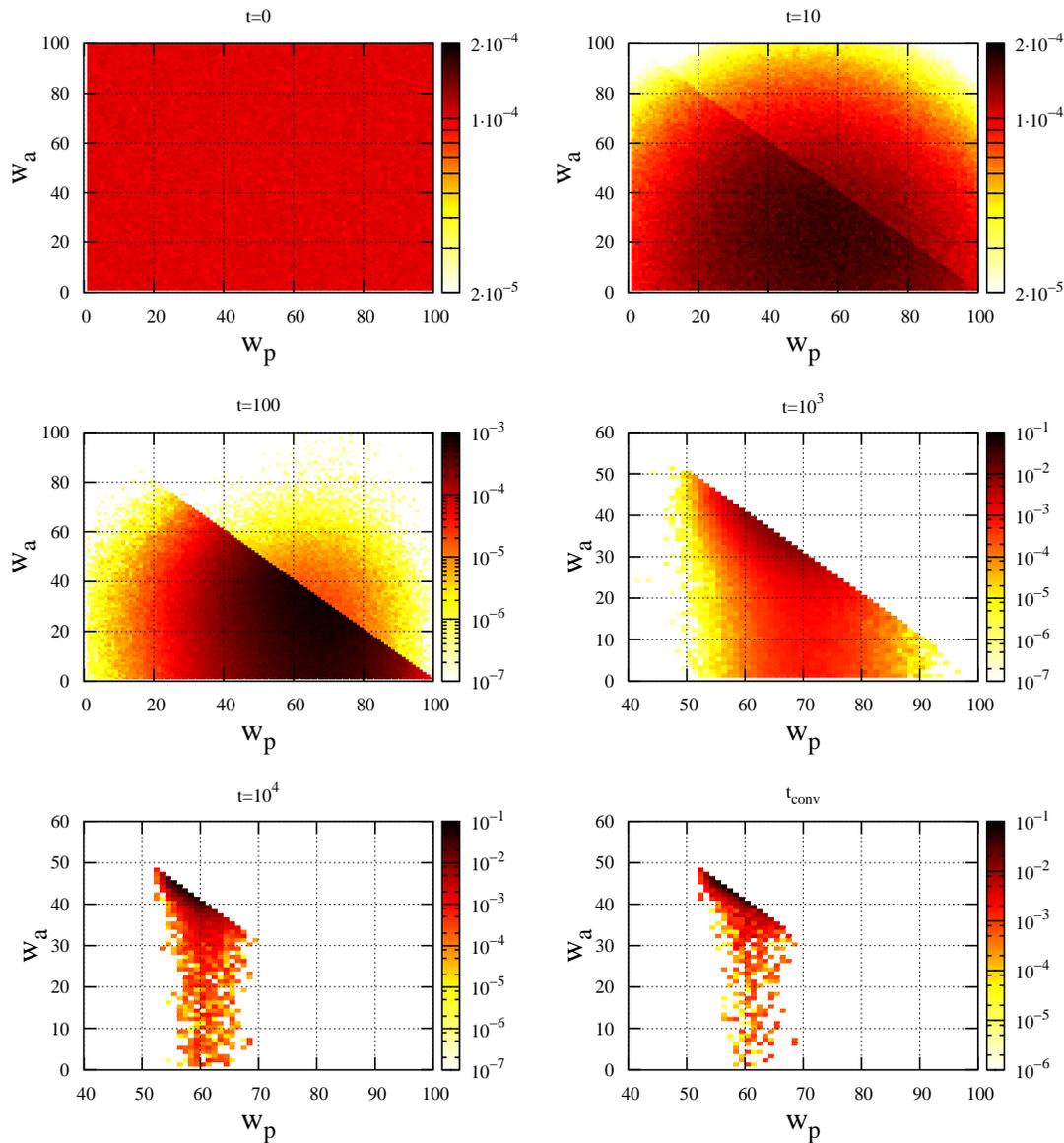


Figura 4.3: MNAS na ordem direta: média da densidade das estratégias em $n_{run} = 1000$ execuções.

um ganho do proponente, 69, com o valor de aceitação de um jogador justo (31) e outros valores (28 e 24) todos na região de reciprocidade. Todas as outras execuções terminam de forma semelhante a esta, com um único valor de proposta, que é a própria condição de convergência adotada. Os valores de aceitação estão sempre na região de reciprocidade. Esse fato deve ser levado em conta quando for analisada a média de diversas execuções. Os gráficos que seguem não representam nenhuma população em particular, mas uma probabilidade de encontrarmos uma determinada estratégia em uma população.

Logo, para obter uma aproximação das chances de uma determinada estratégia estar presente em uma população, são analisadas as médias da densidade das estratégias em várias execuções. São realizadas 10^3 execuções nas figuras seguintes, de 4.3 a 4.5. Na figura 4.6 é apresentada a evolução temporal da média dos valores de proposta e nível de exigência. É interessante relacionar essa figura (uma visão dinâmica) com os histogramas de densidade (uma série de retratos momentâneos). Mais comentários a seguir.

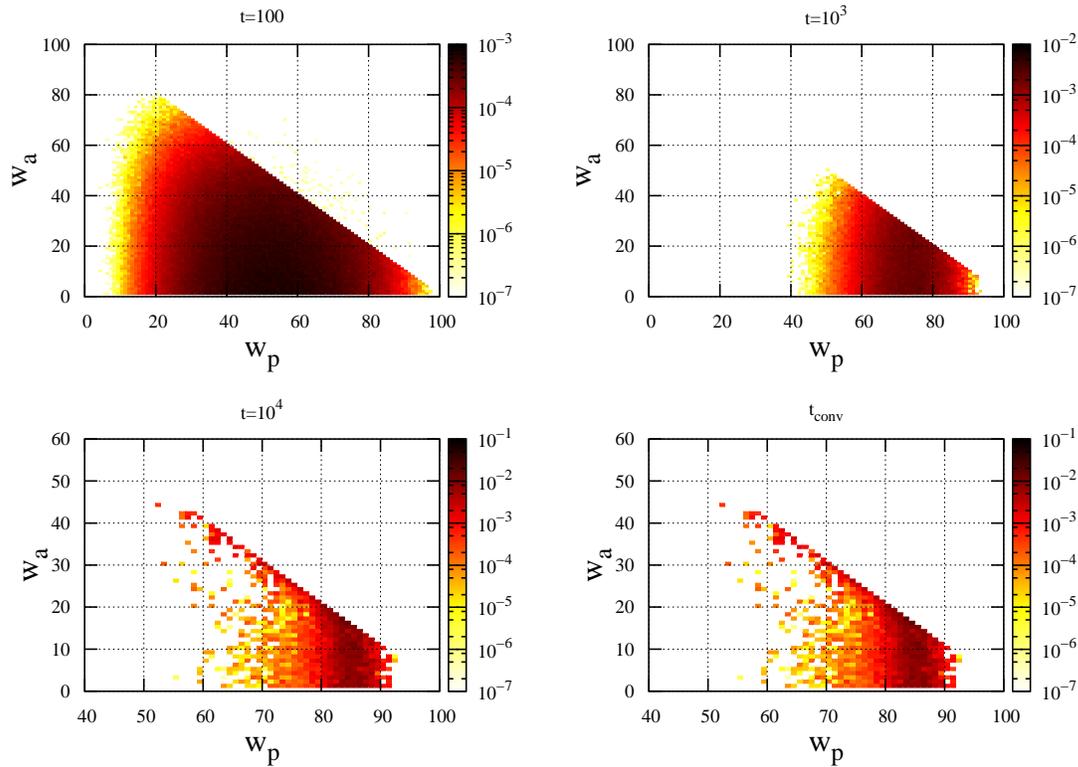


Figura 4.4: MNAS com ciclos de um turno: média da densidade das estratégias em $n_{run} = 1000$ execuções.

A figura 4.3 mostra a concentração média de estratégias em diferentes momentos no tempo. Pode-se ver que, em média, a distribuição inicial ($t = 0$) das estratégias é bastante uniforme. Esse gráfico é bastante diferente daquele apresentado na figura 4.2, mostrando que uma única execução pode apresentar variações de concentração que desaparecem quando tomada a média.

Ainda na mesma figura, trata-se de uma simulação na ordem direta, com $n_{run} = 1000$ execuções. Em comparação com a figura anterior, uma quantidade muito maior de estratégias são visitadas por se tratar de um agregado de muitas execuções. Em $t = 10$, surge a diferença de densidade das estratégias, evidenciando-se a região de convergência. Em $t = 100$ ainda encontramos estratégias na região de não reciprocidade, mas numa proporção bem pequena. No gráfico seguinte ($t = 10^3$), desapareceram as estratégias com $w_p < 50$ e as não-recíprocas, assim como estão desaparecendo as de alto w_p . Em $t = 10^4$ ciclos a distribuição já é próxima da convergência, mas ainda irá diminuir visivelmente a presença de estratégias com $w_a < W - w_p$, ou seja, de reciprocidade não-estrita. Na convergência existe uma concentração das estratégias sobreviventes na reta de reciprocidade estrita, com w_p entre 54 e 71, totalizando 48,98% das estratégias em média. A maioria (51,02%) dos casos possui um nível de exigência menor do que o necessário para a reciprocidade, portanto, não-estrito. Considerando que na condição de convergência as estratégias estritas e não-estritas possuem o mesmo ganho, essas estratégias não-estritas devem ter sido favorecidas anteriormente, quando ainda existiam outros valores de w_p na população.

Há diferenças quantitativas com a simulação realizada com o ordenamento em turnos, como pode ser visto na figura 4.4. Nesse caso as estratégias não-recíprocas são eliminadas

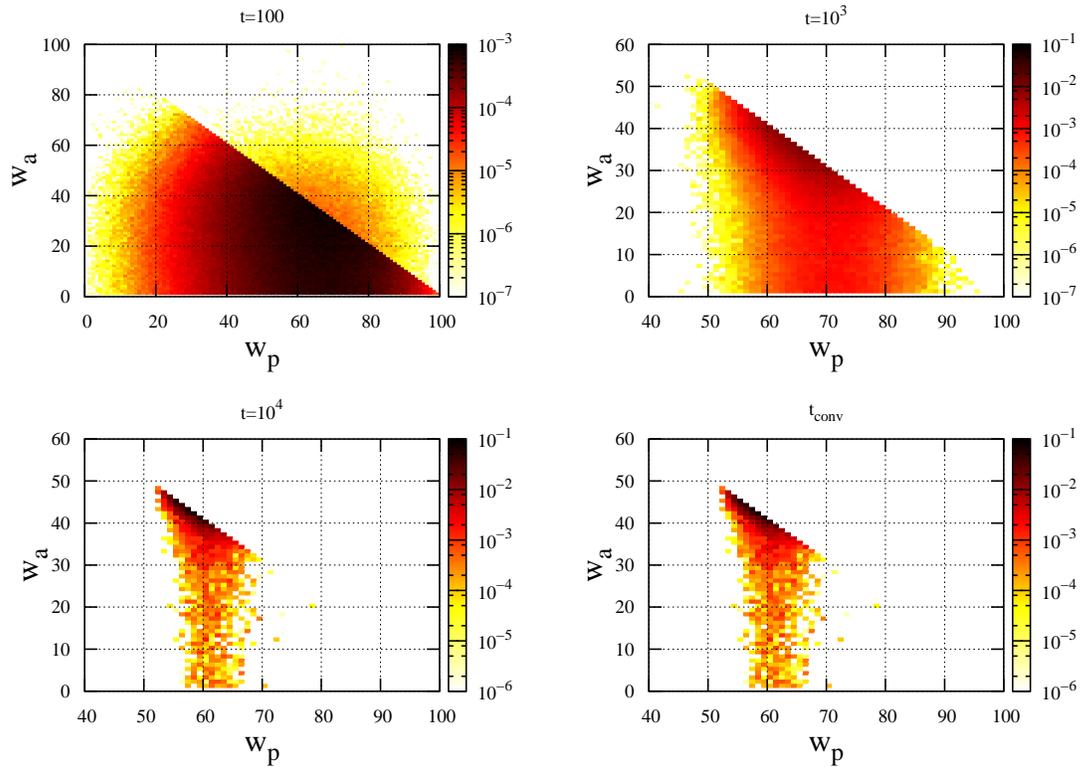


Figura 4.5: MNAS em ciclos de 8 turnos: média da densidade das estratégias em $n_{run} = 1000$ execuções.

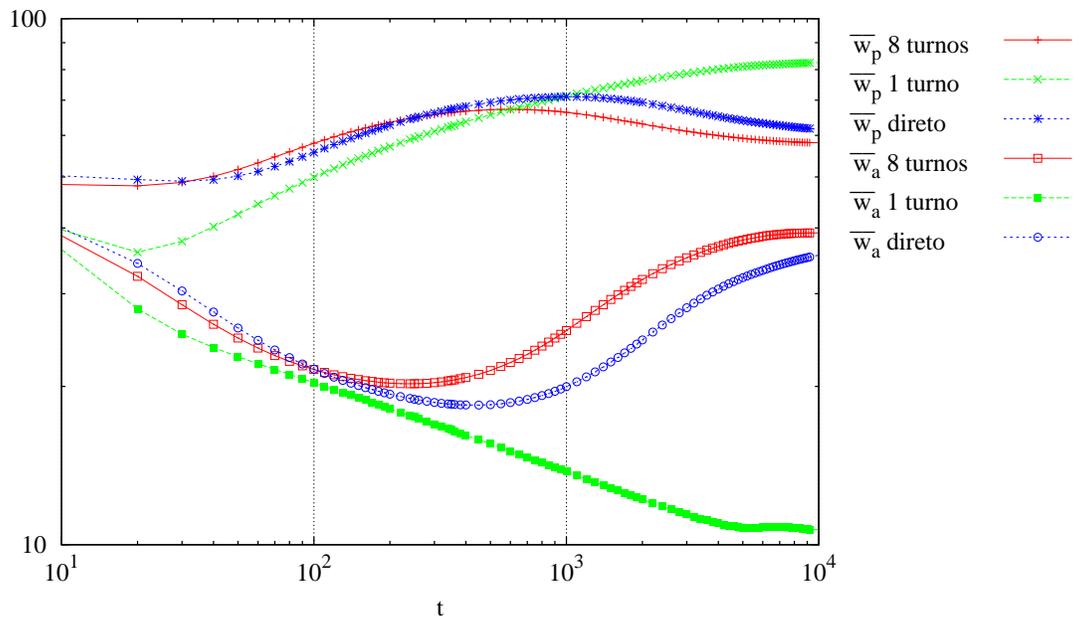


Figura 4.6: MNAS: evolução temporal da média dos parâmetros w_p e w_a em $t = 10^4$ ciclos, em escala logarítmica. São considerados ciclos na ordem direta e com um ou oito turnos.

mais rapidamente da população, mas uma porcentagem maior das estratégias sobreviventes estão na região de reciprocidade não-estrita, com 85,64% dos casos, contra 14,36% de

jogadores estritamente recíprocos.

Esses resultados são afetados por quantos turnos se passam em cada ciclo. Verifica-se na figura 4.5 que, com 8 turnos em cada ciclo, a distribuição das estratégias se aproxima daquela da ordem direta, figura 4.3. Com 8 turnos, é executado o mesmo número de encontros por ciclo que no algoritmo direto e a variância dos ganhos obtidos por cada agente diminui, de forma semelhante ao que foi observado para o JU não espacial na seção 3.4.4. Neste caso há 48,79% de jogadores estritamente recíprocos.

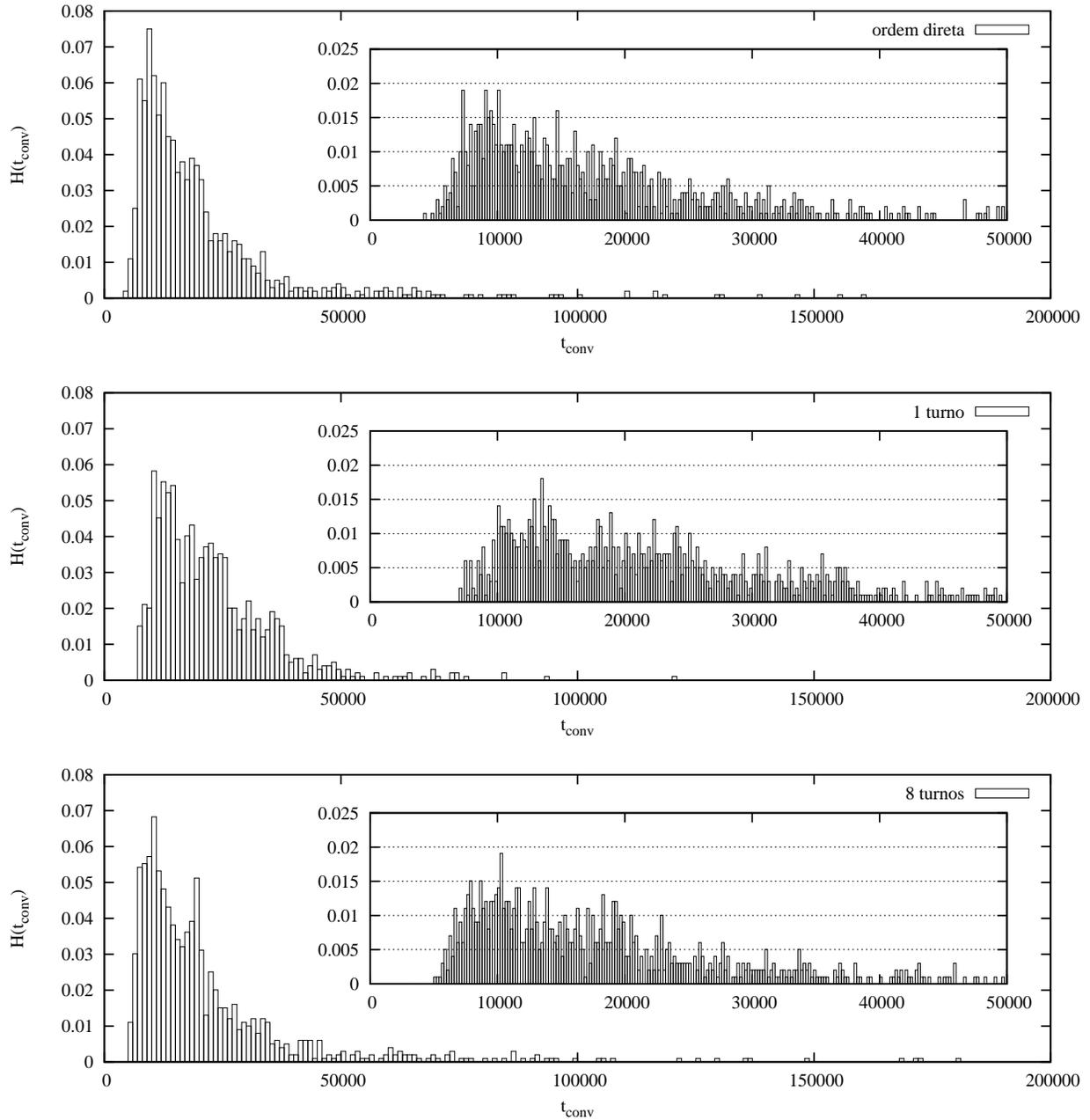


Figura 4.7: Histograma do tempo de convergência para os diferentes tipos de ordenamento estudados. Os detalhes mostram a distribuição até 50 mil turnos para cada um. No ordenamento direto e o de 8 turnos, há execuções que convergem apenas após os 200 mil turnos.

Até agora foram vistos retratos instantâneos da distribuição de estratégias. É mais

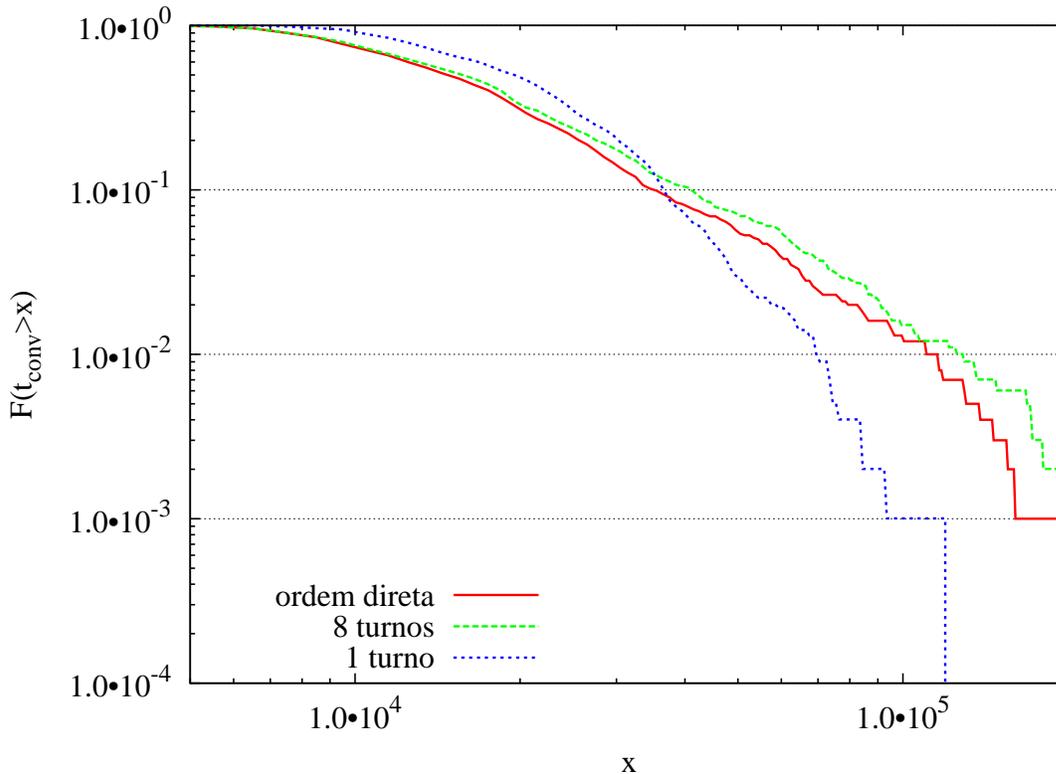


Figura 4.8: Frequência do excedente do tempo de convergência, $F(t_{conv} > x)$.

fácil de visualizar a evolução temporal dos valores médios do ganho do proponente ($\overline{w_p}$) e do nível de exigência ($\overline{w_a}$). Isso é feito na figura 4.6, em que surgem claramente dois grupos de curvas, com $\overline{w_p}$ acima de $w/2 = 50$ e $\overline{w_a}$ abaixo. Nessa figura também fica clara a aproximação das curvas médias obtidas na ordem direta e em ciclos de 8 turnos, afastando-se das médias para ciclos de um turno. O comportamento para outros valores de turnos por ciclo ($2 \leq n_{Tc} \leq 7$) é intermediário entre $n_{Tc} = 1$ e $n_{Tc} = 8$. Com tempos muito curtos e alta variância dos ganhos, tende-se a um alto ganho para o proponente e baixo para o aceitador, o que mantém variâncias altas nos ganhos em 1 turno. Mesmo nesse caso não há sobrevivência do jogador racional previsto pela teoria ($w_p = 99$, $w_a = 1$).

Por outro lado, não há jogadores que dividem meio a meio seus ganhos em qualquer uma das convergências estudadas. Os resultados se aproximam dos experimentos econômicos por eliminar o jogador racional, mas se distanciam de alguns por favorecer o ganho do proponente. Não foi incluído nenhum fator na simulação que levasse a esse resultado: as condições iniciais e as regras da dinâmica são simétricas. A falta de simetria entre ambos os jogadores deve-se ao próprio JU. Há uma assimetria temporal e de informação no JU: o proponente determina o valor exato da divisão enquanto que o aceitador determina um valor mínimo para seu ganho. É provável que no início de cada execução, onde ainda há muitos aceitadores com nível de exigência baixo, seja possível um ganho maior para o proponente, o que ocasiona um crescimento inicial da média de w_p que é observada em todas as dinâmicas estudadas neste capítulo, tanto MNAS quanto o Gibbs Sampling. O que ocorre é que, dependendo dos parâmetros e das regras da dinâmica, essa média volta a cair, provavelmente com a formação de *clusters* de jogadores com valores intermediários de w_p e w_a , capazes de tomar o lugar da maioria da

população com alto w_p e baixo w_a . Esses clusters não incluem a divisão meio-a-meio, logo algum outro fator precisa ser incluído para favorecer esse comportamento.

Para a dinâmica MNAS, o comportamento observado depende mais da quantidade de jogos que um jogador realiza em um ciclo do que a ordem das participações ser direta ou em turnos. Em um um turno há apenas uma jogada para determinar o ganho antes da mudança de estratégia, o que deve levar a uma competição mais acirrada. Os efeitos são o deslocamento para a cima da média de ganho do proponente, já visto, e a diminuição do tempo de convergência, conforme figura 4.7. Essa figura mostra um histograma do tempo de convergência para cada um dos casos. Com 8 turnos ou no caso da execução direta, um jogador tem chance de testar mais sua estratégia antes de decidir pela mudança. Este fator aproxima a média da divisão meio a meio conforme esperado, embora, como já foi dito, mantenha o viés em favor do proponente. Um dos fatores que aumenta o tempo de convergência é a menor variância do ganho obtido. Basta lembrar que a chance de escolher uma das estratégias depende da diferença de ganho entre elas, e com uma diferença pequena uma estratégia apenas um pouco desvantajosa pode permanecer por mais tempo antes de ser eliminada.

Ainda na figura 4.7, observa-se claramente que a maioria das simulações converge em um tempo relativamente baixo (como é visto nos detalhes com $t < 5 \cdot 10^4$). A distribuição se aproxima de uma poisson ou de uma exponencial. É interessante observar que no caso da ordem direta e no de 8 turnos há uma cauda longa, ocorrendo simulações que não convergiram mesmo em $t = 5 \cdot 10^5$ e que não são mostradas no gráfico. Outra forma de visualizar esse fato está na figura 4.8. Neste gráfico está o complemento da distribuição acumulada do histograma, definido por:

$$F(t_{conv} > x) = \sum_{t_{conv}=x}^{\infty} H(t_{conv}) = 1 - \sum_{t_{conv}=1}^x H(t_{conv}) \quad (4.1)$$

$F(t_{conv} > x)$ é a frequência das simulações que ainda não convergiram em t_{conv} . Na figura 4.8 observa-se que ela diminui e chega a zero para um turno, o que não ocorre para 8 turnos e ordem direta até $2 \cdot 10^5$.

4.3 Gibbs Sampling sobre vizinhança

4.3.1 Descrição

A dinâmica *Gibbs Sampling* (GS), também conhecida como banho térmico, é importada da física estatística. A uma dada temperatura, a probabilidade de mudança para estado depende apenas da energia no novo estado. Quanto menor a energia, maior a probabilidade, tendo como efeito a minimização da energia. Logo, com a adaptação à teoria dos jogos evolucionária, onde o objetivo é a maximização do *fitness*, toma-se a energia como o negativo deste, ou seja, o negativo do ganho.

A temperatura, aqui simbolizada pela letra T , constituiu um parâmetro a mais do que na dinâmica MNAS. Com a especificação dessa temperatura, é possível modificar a intensidade com que estratégias melhores são selecionadas. Em temperaturas muito baixas, a dinâmica se comporta como uma imitação cultural e de forma determinística, em que sempre é escolhida a melhor estratégia na vizinhança. Por outro lado, em temperaturas suficientemente altas a escolha de uma estratégia se torna praticamente aleatória, ocorrendo o chamado “random drift”, em que novas estratégias podem se espalhar na população por difusão, praticamente sem considerar as diferenças de energia (ganho) entre elas. Por fim,

entre esses extremos há interessantes variações de comportamento, em que graus variados da intensidade de escolha se manifestam. Essa abordagem de variação da temperatura é explorada para outros jogos no artigo (TRAULSEN; NOWAK; PACHECO, 2006).

A cada ciclo t , um agente escolhe a sua estratégia no próximo ciclo $t + 1$ dentre um conjunto S_v formado pela sua própria estratégia e a de seus vizinhos. Para a rede quadrada, este tem a forma mostrada na figura 4.9, com $S_v = \{s_l | l \in \{1 \dots 5\}\}$ e s_1 a estratégia do próprio jogador.

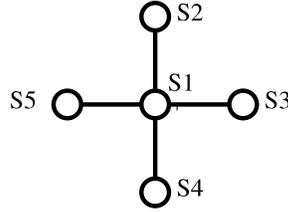


Figura 4.9: O conjunto $S_v = \{s_l | l \in \{1 \dots 5\}\}$, na rede quadrada regular. Por convenção, s_1 é o jogador escolhido para escolher uma estratégia e os demais são seus vizinhos.

Primeiro é necessário definir o custo de uma estratégia. Dada uma estratégia $s_n \in S_v$, queremos obter a energia $E(s_n)$ que é o somatório do ganho dessa estratégia jogando com seus vizinhos. Esse valor depende da ordem de participação adotada, pois esta determina quantas vezes e com quais vizinhos o agente joga em um determinado ciclo. Sendo $g_p(s_n, s_l)$ o ganho do jogador de estratégia s_n propondo uma divisão para o jogador de estratégia s_l e $g_a(s_n, s_l)$ o ganho de s_n como aceitador, na ordem direta:

$$E(s_n) = \sum_{l=2}^{|S_v|} (g_p(s_n, s_l) + g_a(s_n, s_l)) \quad (4.2)$$

Isto porque na ordem direta um agente joga como proponente e depois como aceitador com cada um de seus vizinhos. Se o ciclo for dividido em turnos, em cada turno cada agente joga uma única vez com um vizinho escolhido aleatoriamente, e o papel de proponente ou aceitador também é aleatório. Dada uma função $c(S_v)$ que escolhe aleatoriamente um dos vizinhos e uma função $g(s_n, s_l)$ que escolhe aleatoriamente os papéis e calcula o ganho, é possível escrever:

$$E(s_n) = \sum_{i=1}^{n_{T_c}} g(s_n, c(S_v)) \quad (4.3)$$

Onde n_{T_c} é a quantidade de turnos em um ciclo. Devido à aleatoriedade das funções c e g , $E(s_n)$ possui um valor diferente cada vez que é executada. Dito de outra forma: dado um determinado S_v , uma estratégia s_n possui sempre o mesmo custo $E(s_n)$ na ordem direta, mas esse valor varia na execução em turnos.

Com estas definições é possível escolher o custo que cada estratégia $s_n \in S_v$. A probabilidade de mudança para cada uma é dada por uma razão exponencial entre o custo da estratégia e o somatório de todos os custos:

$$P(\bullet \rightarrow s_n) = \frac{e^{-E(s_n)/T}}{\sum_{l=1}^{|S_v|} e^{-E(s_l)/T}} \quad (4.4)$$

Finalmente, com essas probabilidades é possível realizar um sorteio entre as estratégias para determinar qual delas será adotada no ciclo $t + 1$.

Note que a estratégia s_l é confrontada com ela própria - a estratégia está sendo avaliada pelo jogador que atualmente possui s_l , que supõe que seu vizinho que utiliza s_l não mudará de estratégia. Isso inclui efeitos de auto-interação no modelo, que de outra forma não existiriam pois um jogador não confronta a si mesmo em nenhum momento.

O efeito da temperatura pode ser ilustrado com um exemplos simples, onde são comparadas apenas duas estratégias s_1 e s_2 (veja figura 4.10). Aqui, s_2 tem ganho fixo em $w/2 = 50$ e a estratégia s_1 tem ganho variável entre 0 e $w = 100$. Na figura é exibida a probabilidade de escolher s_1 para diferentes valores de T . Não importando a temperatura, há uma probabilidade igual de escolher estratégias com ganhos iguais, portanto todas as linhas se cruzam no ponto $(50, 0.5)$ do gráfico. Com temperaturas baixas, a curva se aproxima de uma função degrau, em que a menor diferença de ganho pode determinar a escolha dessa ou daquela estratégia. Aumentando a temperatura, cresce a probabilidade de escolher uma estratégia com ganho menor. No caso extremo, com $T \rightarrow \infty$, a probabilidade de escolher s_1 ou s_2 se torna igual, independentemente do ganho de s_1 . Os valores de T escolhidos estão na mesma faixa dos valores adotados nas simulações.

Na física estatística, essa dinâmica é importante para sistemas de spins, pois, assim como Metropolis e Glauber, a cadeia de Markov definida por ela satisfaz o balanço detalhado. Essa é condição suficiente para atingir o equilíbrio, pois trata-se de sistemas microscopicamente reversíveis. Para uma introdução à física estatística são sugeridos os livros (HUANG, 1987; SALINAS, 2005).

A aplicação mais comum da dinâmica na física é em modelos de Ising, de spin $1/2$ (com 2 estados) e spin 1 (com 3 estados). Há também o modelo de Potts com q estados no qual é considerado que com $q > 4$ as simulações tornam-se onerosas. Na presente modelagem do JU, q é igual ao número de possíveis estratégias, ou seja, $q \approx 10^4$. Portanto, testar todos os q estados torna-se muito oneroso. Com o teste restrito aos vizinhos e à estratégia atual do agente, temos $q = 5$ no reticulado 2D, um valor ainda aceitável⁴. Com essa mudança, o tempo de execução não depende mais da quantidade de estratégias analisadas. Além disso, o algoritmo não insere novas estratégias ao longo do tempo, convergindo garantidamente para um estado em que todos os jogadores possuem estratégias equivalentes, assim como a dinâmica de morte e nascimento. Por equivalentes, entende-se estratégias com o mesmo w_p e dentro da região de reciprocidade.

4.3.2 Resultados

Nesta subseção são apresentados os resultados relativos ao JU considerando o GS como dinâmica para evolução das estratégias como definido na seção anterior. Inicialmente é adotado o ordenamento direto para as simulações.

O gráfico superior na figura 4.11 mostra a evolução no tempo da média da intenção de ganho para o proponente w_p , para vários valores de T . Em todos os casos, a média é iniciada em 50, pois as estratégias estão uniformemente distribuídas. Verifica-se inicialmente um aumento de w_p , o qual é maior e mais rápido para temperaturas mais baixas. O que ocorre a seguir depende da temperatura, existindo dois comportamentos no sistema. Há uma mudança de comportamento em torno de uma temperatura crítica T_c , acima da qual o sistema converge para um $\overline{w_p}$ próximo a 60, e quanto maior a temperatura, mais demorada a convergência (maior t_{conv}). Para temperaturas abaixo de T_c , $\overline{w_p}$ converge para valores

⁴O tempo de simulação é dominado por outras etapas, como a formação do *match* da rede, no caso da simulação por turnos.

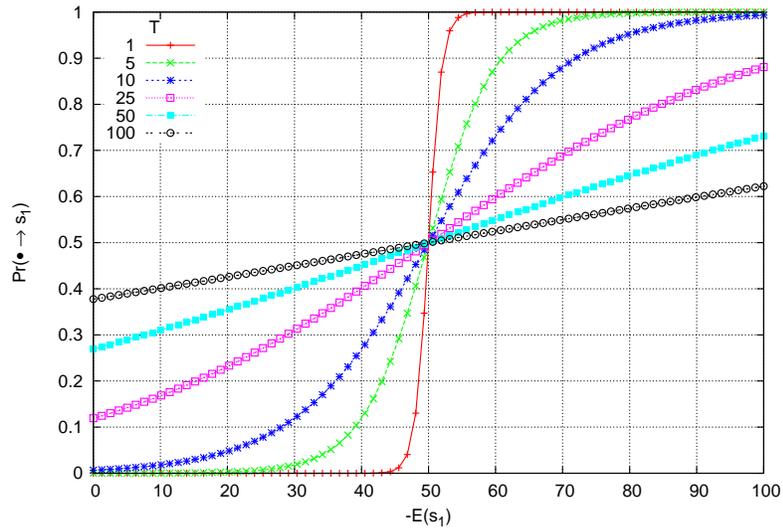


Figura 4.10: Probabilidade de escolha da estratégia s_1 , de ganho $-E(s_1)$, contra uma estratégia s_2 com ganho $-E(s_2) = 50$, para alguns valores de temperatura T .

maiores. Dito de outra forma, para temperaturas baixas a segunda etapa do sistema, que seria a volta para valores intermediários próximos a 60, não se concretiza. Para esse caso, $T_c \approx 10$.

O gráfico inferior na figura 4.11 mostra a evolução temporal do nível de exigência w_a . Como ocorre que $w_a \leq w_p$, há uma forte correlação negativa entre as duas variáveis, de tal forma que $\overline{w_a} \approx w - \overline{w_p}$. Pode-se visualizar esse fato, girando um dos gráficos e “encaixando-o” no outro. Essa relação foi encontrada para os demais casos estudados, portanto $\overline{w_a}$ não será mostrada para esses.

A seguir, o gráfico superior da figura 4.12 mostra a evolução temporal de $\overline{w_p}$ para GS com execução em ciclos de um turno. Chama a atenção que, para temperaturas intermediárias, a queda que foi observada no caso anterior é seguida por uma nova elevação, criando uma “ravina” no gráfico. De fato, o comportamento agora é bastante diferente do anterior. Mesmo para temperaturas baixas, a dinâmica converge antes de 10^5 ciclos na maioria das execuções. Há uma transição mais suave entre valores de $\overline{w_p}$, mas isso não significa que os valores médios sejam frequentes. Pode-se considerar que há três padrões de comportamento: com $T < T_{c1}$, a média atinge autos valores numa trajetória sempre crescente. Além disso, os valores altos de w_p são os mais frequentes (moda da distribuição). Com $T_{c1} < T < T_{c2}$, há uma etapa em que a média decresce para voltar a subir e estabilizar em um valor intermediário. Entretanto, os valores comuns na população são altos ou baixos (distribuição bimodal). Por fim, com $T > T_{c2}$, o sistema estabiliza em valores de proposta próximos a 60. Os valores aproximados encontrados foram $T_{c1} \approx 4$ e $T_{c2} \approx 20$.

Deve-se observar melhor a região intermediária do sistema. No gráfico inferior da figura 4.12 é representado o desvio da média⁵. Nota-se um grande pico na variância na região onde ocorre a mudança de comportamento no sistema. Isso ocorre porque, com o aumento de T , as estratégias adotadas começam a divergir cada vez mais entre si. Um pico semelhante não foi observado nos demais casos estudados neste capítulo.

⁵Trata-se do desvio da média amostral. Portanto, foi calculado o desvio da amostra e dividido por $\sqrt{n_{run}}$. Nestas simulações, $n_{run} = 100$.

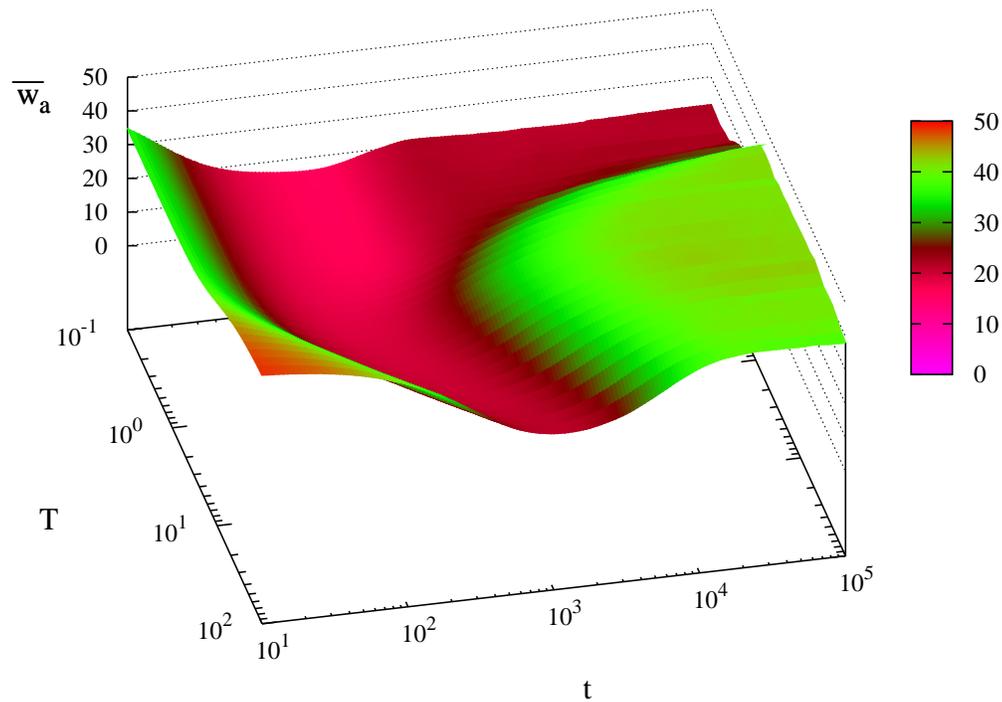
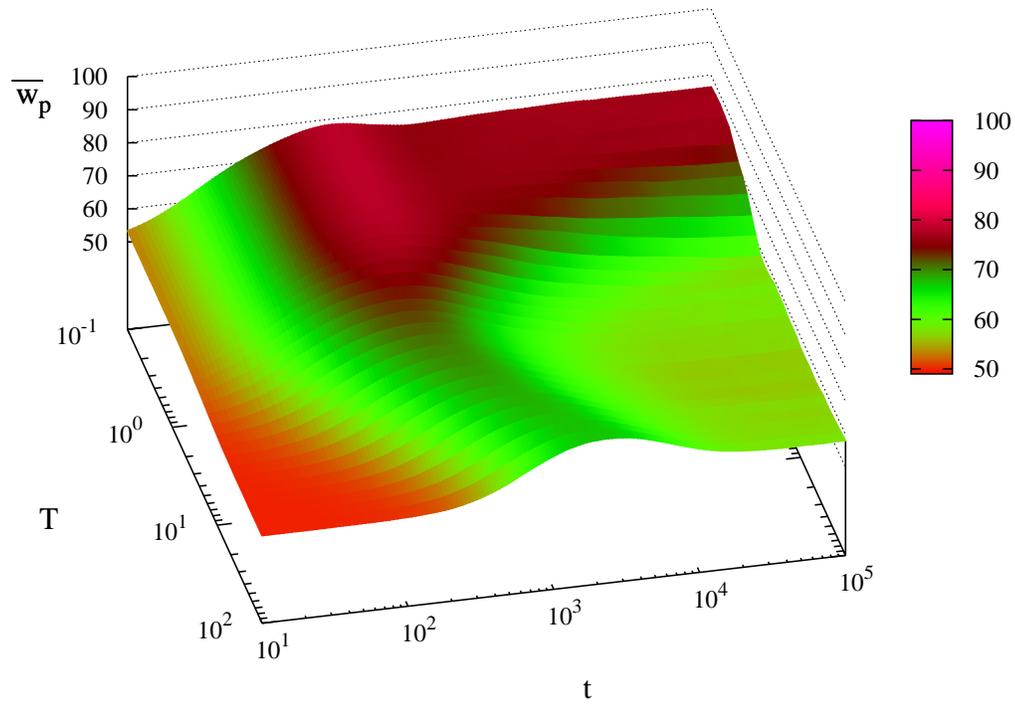


Figura 4.11: Médias de w_p e w_a em função da temperatura T e do tempo t , no ordenamento direto.

Na figura 4.13 são exibidas as densidades dos valores de w_p em diferentes temperaturas e no instante $t = 10^5$, comparando o algoritmo direto com 1 turno. Em ambos os casos as maiores concentrações são para valores altos ou baixos de w_p , ou seja, há populações

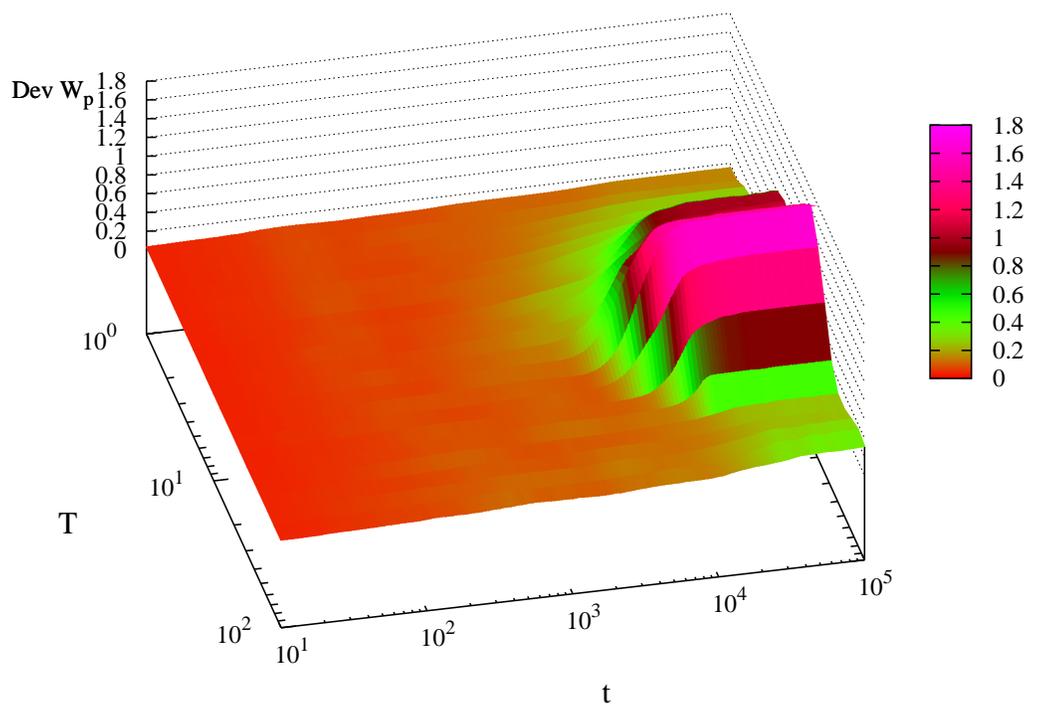
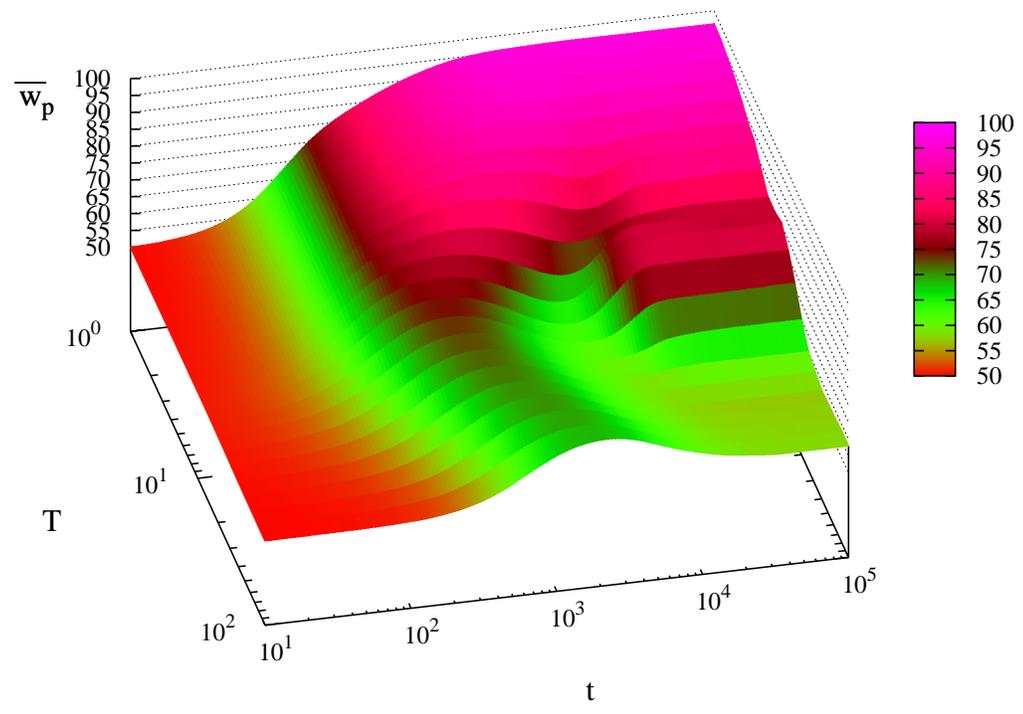


Figura 4.12: Média de w_p e seu desvio em função da temperatura T e do tempo t , em ciclos de um turno. Na faixa de temperaturas $0.1 \leq T < 1$ (não exibida) a média segue o mesmo comportamento que em $T = 1$.

formadas basicamente por jogadores que esperam um alto ganho como proponente ou um

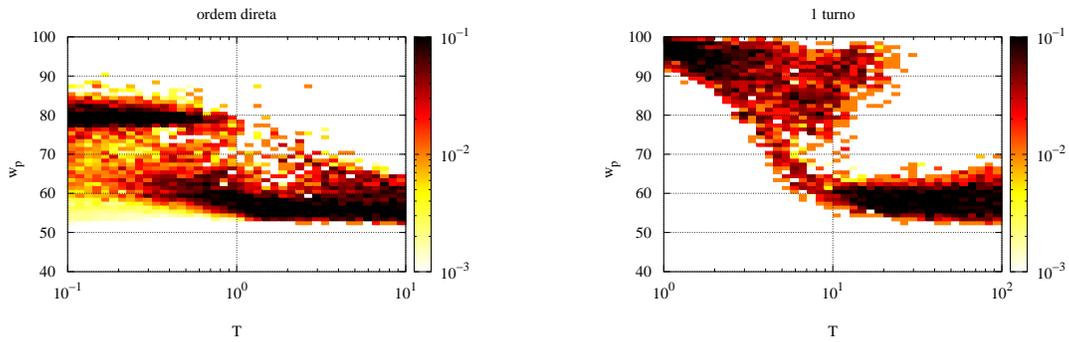


Figura 4.13: Densidade de valores de w_p em função da temperatura T , em ordem diretas e em um turno. Observa-se a mudança de alto w_p para baixo w_p e em ambos os casos essa mudança não é contínua (ou seja, em nenhuma temperatura há alta probabilidade de encontrar valores intermediários). As mudanças ocorrem em faixas diferentes de valores de T . Valores obtidos em $t = 10^5$ ciclos, com a média de $n_{run} = 100$ execuções.

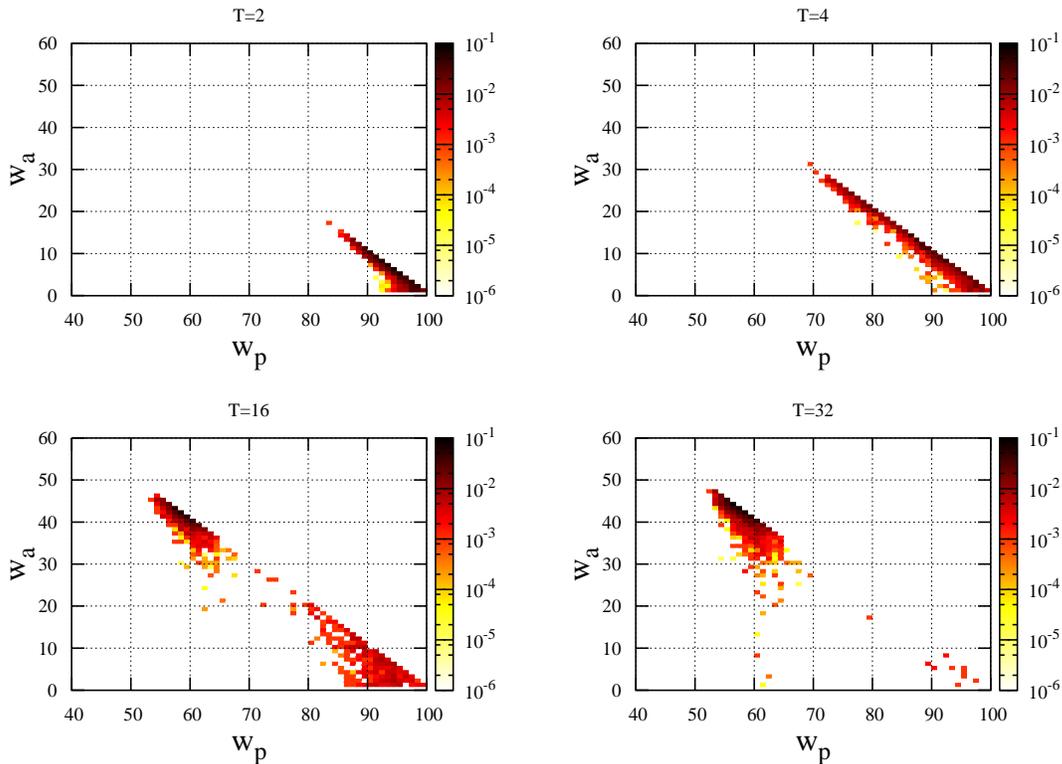


Figura 4.14: Diagramas da densidade de estratégias no tempo de convergência, para o GS utilizando ciclos de 1 turno. Foram escolhidos os valores de temperatura $T = 2, 4, 16$ e 32 para mostrar a transição de um comportamento em que a convergência é para altos valores de w_p (e, portanto, baixos de w_a) para um padrão bi-estável e por fim para valores medianos de w_p em torno de 60 , os mesmos encontrados para a maioria das demais simulações. Valores obtidos com a média de $n_{run} = 1000$ execuções.

valor típico próximo de 60 . Mas apenas na simulação com ciclos de 1 turno o sistema se torna realmente bipartido, convergindo para um caso ou para outro nos valores inter-

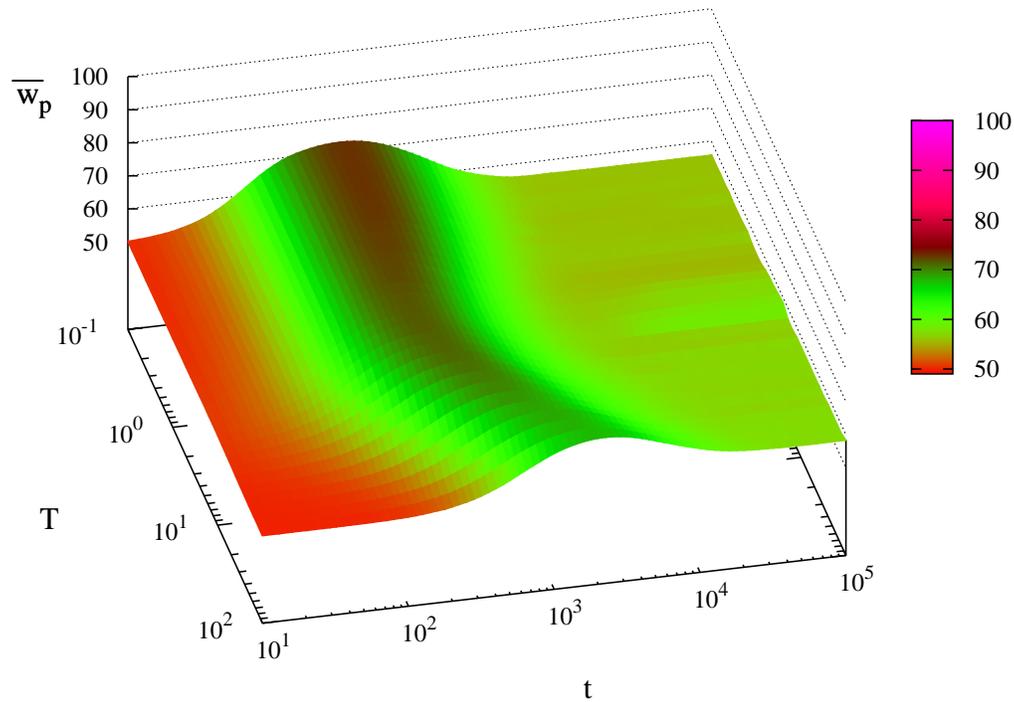


Figura 4.15: Média de w_p em função da temperatura T e do tempo t , em ciclos de dois turnos.

mediários de T citados acima. É importante observar que nem todas as execuções no caso direto convergiram nesse tempo, mas a comparação é feita com esses dados, devido ao tempo de convergência ser muito longo. Foi realizada em separado uma simulação para algumas temperaturas baixas ($T = 10^{-1}$ e $T = 10^{-0.5}$) com duração de 10^6 ciclos, mostrando que são mantidos os altos valores de w_p nessa faixa de temperaturas, no caso direto.

A figura 4.14 mostra a densidade das estratégias na convergência no caso de um turno para alguns valores de T , com o objetivo de detalhar as diferentes fases. Com $T = 2$, há uma escolha de altos valores de w_p . Em $T = 4$ observa-se que a faixa de valores de w_p está aumentando, até que em $T = 16$ apenas valores altos ou baixos são possíveis. O sistema se tornou bipartido, convergindo para uma das duas fases: altos ganhos para o proponente ou ganhos intermediários. Por fim, com $T > T_{c2}$, o sistema passa a convergir para $w_p \approx 60$, o que é visível em $T = 32$. Por isso, a variância é baixa nos dois extremos de T e alta em valores intermediários de T .

Quando passamos a ter mais de um turno por ciclo há uma nova mudança significativa de comportamento. Na faixa de temperaturas analisadas, não há uma fase em que o sistema converge para altos valores de w_p . A figura 4.15 mostra a evolução temporal de $\overline{w_p}$ para várias temperaturas, neste caso em ciclos de 2 turnos. Dessa vez não há mudança de comportamento e em toda a faixa $10^{-1} \leq T \leq 10^2$ há uma subida inicial de w_p para depois atingir valores próximos de 60. Esse comportamento também foi observado com 4 turnos. Gráficos construídos da mesma forma que a figura 4.13 e omitidos aqui mostram uma grande concentração em $52 \leq w_p \leq 67$, com poucos casos em valores maiores.

De que forma esses resultados podem ser relacionados com a dinâmica subjacente?

Há três tipos diferentes de fatores interferindo na disposição de um agente a mudar de estratégia: a taxa de mudança, a temperatura e a representação do tempo. Numa situação hipotética, um caçador negocia com um de seus pares um acordo para a divisão do produto de um dia de caça. Por simplicidade, supõe-se que ele irá encontrar alguém próximo de forma aleatória e a iniciativa da proposta também é aleatória. Também não é difícil para ele descobrir quais os acordos realizados por seus vizinhos, quando todos se reúnem à noite na aldeia. A taxa de mudança representa a tendência dos jogadores a considerar uma mudança de estratégia: quanto menor a taxa, maior a resistência à mudança dos agentes. Neste trabalho foi mantida a taxa de 10% porque a adoção de valores menores tende a aumentar o tempo de convergência mas manter os demais resultados. Essa taxa é alta comparada com taxas de mutação biológicas (ver a tabela na pág. 40 de (NOWAK, 2006a)), mas é aceitável para um processo de transferência cultural. A temperatura muda a sensibilidade do agente às diferenças de ganho das estratégias. Em baixas temperaturas, o caçador sempre adota a estratégia com maior ganho entre a sua e de seus vizinhos. De certa forma, é um comportamento mais conservador, oposto ao modo como um agente troca facilmente sua estratégia por outra com menor ganho em altas temperaturas. O comportamento conservador pode ser ocasionado pela escassez de recursos, enquanto que a fartura dá condições para os agentes experimentarem estratégias. Logo, pode existir uma relação direta entre a temperatura e a quantidade de recursos disponíveis. Por último, o algoritmo em ordem direta precisa de um caçador metódico, capaz de mudar seus critérios de proposta e aceitação e testá-los na negociação com todos os vizinhos. Se os ciclos forem divididos em turnos, trata-se de um processo que leva em conta a necessidade de avaliar a nova estratégia rapidamente negociando com quem estiver disponível.

A combinação dos fatores temperatura e quantidade de turnos induz diferentes níveis de exigência para a eficácia de uma estratégia. Ou seja, numa temperatura baixa e com uma única chance de fechar uma negociação, se torna mais importante que uma estratégia ofereça resultados rápidos. Por isso, nesse caso há uma tendência para a solução racional com baixo nível de exigência, que por sua vez leva a um alto ganho para o proponente (w_p) conforme foi visto na figura 4.12. Mas justamente aqui ocorrem os efeitos mais dramáticos da mudança de temperatura: à medida que os agentes se tornam mais abertos a suportar um baixo ganho, em mais e mais casos toda a população adota a divisão (60, 40) ou valores próximos. A pouca frequência de valores intermediários mostra que tanto o $w_p \approx 95$ quanto $w_p \approx 60$ são resistentes a invasão. O comportamento bipartido do sistema indica que essas duas estratégias são atratores e que o comportamento do sistema dinâmico na faixa intermediária de temperaturas é caótico.

Com dois ou mais turnos, o caçador experimenta mais suas estratégias antes de tomar uma decisão. A diferença crucial agora é que a estratégia com alto w_a tem uma chance maior de aceitar ao menos uma das propostas realizadas, enquanto que as de baixo w_a , embora aceitem mais vezes, também recebem valores menores. A formação de clusters de jogadores recíprocos com alto w_a e maior reciprocidade consegue se defender da invasão de jogadores “egoístas”.

Retornando ao caso direto, o efeito de se avaliar estratégias apenas após 8 jogos faz com que a diferença relativa do ganho médio entre elas seja menor. Assim, são necessárias temperaturas menores para que essa diferença seja levada em conta pelos agentes e a mudança de comportamento se dá nessa temperatura menor.

Abstraindo-se o comportamento dinâmico e quais estratégias são escolhidas no final, o que chama a atenção tanto na dinâmica GS quanto na MNAS é a forma como a distribuição de riqueza na sociedade se torna homogênea na convergência. O fato da re-

ciprocidade ser sempre respeitada ($w_a \leq w - w_p$) implica que a eficiência econômica da sociedade é ótima (os valores disponíveis são sempre divididos) e que o ganho dos agentes se torna uniforme rapidamente à medida que aumenta o período considerado (conforme diminuição da variância vista na seção 3.4.4). Este é um modelo de sociedade onde regras que não estabelecem nenhuma cooperação *a priori* levam a uma sociedade onde impera a justiça social.

5 CONCLUSÃO

5.1 Revisão dos resultados

Nesta dissertação foi apresentado o jogo do ultimato dentro de seu contexto na teoria dos jogos, destacando sua relevância para a economia experimental e as divergências entre resultados experimentais, teóricos e de diferentes simulações.

No capítulo 3, o JU foi estudado em uma abordagem não espacial, com maior foco em aspectos estatísticos. Nesse caso há uma população de agentes com diferentes estratégias onde todos podem interagir entre si. Considerando uma determinada frequência imutável das estratégias na população, foram demonstradas fórmulas analíticas para a média e demais momentos do ganho. Essas fórmulas foram comparadas com simulações, onde também é possível verificar a flutuação do ganho para tempos curtos. Foram discutidas duas formas de medir o tempo (em encontros e em turnos) que resultam em distribuições diferentes para o ganho dos jogadores, um aspecto pouco observado na literatura. Além do uso de mais de uma representação do tempo, este trabalho contribui com a inclusão de um fator de preponderância, ou iniciativa, que distingue membros da população que são proponentes com maior frequência. Esse novo parâmetro permite analisar populações num contínuo entre o caso totalmente homogêneo ($\rho_{i,j} = 1/2, \forall i, j$) e o totalmente heterogêneo ($\rho_{i,j} = 1 \wedge \rho_{j,i} = 0, \forall i, j$).

Com a análise do JU espacial no capítulo 4 foram empregadas duas novas dinâmicas para evolução das estratégias: morte e nascimento com amostragem seletiva e Gibbs sampling sobre vizinhança. Ambas são modificações de dinâmicas conhecidas. A primeira foi modificada com o objetivo de que as diferenças de *fitness* entre os agentes também influenciassem a retirada (morte) de agentes. Na definição habitual de morte e nascimento, essa retirada é totalmente aleatória. Já o GS foi modificado para que apenas as estratégias dos vizinhos influenciassem a escolha de uma nova estratégia. Com essa modificação, além do ganho em desempenho por fazer uma busca em um conjunto menor de estratégias, a dinâmica passou a ter uma convergência garantida, da mesma forma que o MNAS. Para ambas as dinâmicas também foram empregadas duas unidades de tempo, na forma de uma ordem de execução direta e uma outra em turnos.

Uma das conclusões gerais deste trabalho é a confirmação da assimetria entre o papel de proponente e de aceitador, ou seja, o fato de que normalmente o proponente irá receber mais do que o aceitador. Isso é observado na maioria dos experimentos econômicos com o JU, mas não foi de forma alguma um pressuposto na elaboração dos modelos utilizados. Dependendo da unidade de tempo e da temperatura (no caso do GS), o resultado foram graus variados de desigualdade. No final do capítulo 4 é feita uma analogia para ilustrar

como os parâmetros da dinâmica se relacionam com pessoas¹ jogando o JU.

Outra conclusão geral é a de que o tempo importa. A quantidade de jogadas que são utilizadas para avaliar uma estratégia e mesmo a ordem com que são realizadas fazem diferença. Esses fatores conduzem a evolução da sociedade para diferentes relações entre proponentes e aceitadores. Deve-se levar em conta que isso ocorre mesmo quando os agentes são muito simples, sem mecanismos de reputação direta ou indireta ou mais memória do que a necessária para medir o ganho de um pequeno conjunto de estratégias.

5.2 Trabalhos futuros

As dinâmicas estudadas podem ser realizadas em outras redes, como as *small worlds* (WATTS; STROGATZ, 1998) e *scale free networks* (BARABÁSI; ALBERT, 1999). Além disso, a temperatura no GS poderia variar segundo um algoritmo de *simulated annealing*, nesse caso inspirado em um processo de aprendizado onde os agentes diminuem sua disposição à mudança com o tempo. Por último, poderia ser estudada uma dinâmica de Glauber, em que apenas uma estratégia é comparada com a estratégia atual a cada ciclo de seleção. Nesse caso, a comparação poderia ser feita com qualquer uma das estratégias possíveis, e não apenas com a dos vizinhos mais próximos.

¹Essa relação é hipotética, pois não se sabe quais os reais mecanismos que levam à tomada de decisão pelo ser humano.

REFERÊNCIAS

- ALVARD, M. The ultimatum game, fairness, and cooperation among big game hunters. In: HENRICH, J. et al. (Ed.). **Foundations of Human Sociality: economic experiments and ethnographic evidence from fifteen small-scale societies**. [S.l.]: Oxford University Press, 2004.
- AUMANN, R. J. Irrationality in game theory. In: DASGUPTA, P. et al. (Ed.). **Economic Analysis of Markets and Games: essays in honor of frank hahn**. Cambridge, MA: MIT Press, 1992. p.214–227.
- AXELROD, R. **The Evolution of Cooperation**. New York: Basic Books, 1984.
- BARABÁSI, A. L.; ALBERT, R. Emergence of Scaling in Random Networks. **Science**, [S.l.], v.286, p.509–512, 1999.
- BROWN, G. W. Iterative solution of games by fictitious play. In: KOOPMANS, T. C. (Ed.). **Activity Analysis of Production and Allocation**. New York: Wiley, 1951. p.373–376.
- CAMERON, L. A. Raising the Stakes in the Ultimatum Game: experimental evidence from indonesia. **Economic Inquiry**, [S.l.], v.37, p.47–59, 1999.
- CONLISK, J. Why bounded rationality? **Journal of Economical Literature**, [S.l.], v.34, p.669–700, 1996.
- EREZ LIEBERMAN, C. H.; NOWAK, M. A. Evolutionary dynamics on graphs. **Nature**, [S.l.], v.433, p.312–316, January 2005.
- FISHER, R. A. **The genetical theory of natural selection**. Oxford: Clarendon Press, 1930.
- FÖLLMER, H. Random economics with noisy interacting agents. **Journal of Mathematical Economics**, [S.l.], v.1, p.51–52, 1974.
- FUDENBERG, D.; TIROLE, J. **Game Theory**. Cambridge, MA: MIT Press, 1991.
- GALE, J.; BINMORE, K. B.; SAMUELSON, L. Learning To Be Imperfect: the ultimatum game. **Games and Economic Behavior**, [S.l.], v.8, p.56–90, 1995.
- GAMBARELLI, G.; OWEN, G. The coming of game theory. **Theory of Decision**, [S.l.], v.56, p.1–18, 2004.
- GIBBONS. **Game Theory for Applied Economists**. Princeton: Princeton University Press, 1992.

- GNEEZY, U.; HARUVY, E.; ROTH, A. E. Bargaining under a deadline: evidence from the reverse ultimatum game. **Games and Economic Behavior**, [S.l.], v.45, p.347–368, 2003.
- GÜTH, W.; SCHMITTBERGER, R.; SCHWARZE, B. An experimental analysis of ultimatum bargaining. **Journal of Economic Behavior & Organization**, [S.l.], v.3, n.4, p.367–388, December 1982.
- HARSANYI, J. C.; SELTEN, R. **A General Theory of Equilibrium Selection in Games**. Cambridge, MA: MIT Press, 1988.
- HEAP, S. P. H.; VAROUFAKIS, Y. **Game Theory: a critical text**. 2nd ed. New York: Routledge, 2004.
- HENRICH, J. Does Culture Matter in Economic Behavior? Ultimatum Game Bargaining among the Machiguenga of the Peruvian Amazon. **The American Economic Review**, [S.l.], v.90, p.973–979, Sept. 2000.
- HENRICH, J. et al. **Foundations of Human Sociality: economic experiments and ethnographic evidence from fifteen small-scale societies**. [S.l.]: Oxford University Press, 2004.
- HENRICH, J. et al. Costly Punishment Across Human Societies. **Science**, [S.l.], v.312, n.5781, p.1767–1770, June 2006.
- HUANG, K. **Statistical Mechanics**. New York: Wiley, 1987.
- LEWONTIN. Evolution and the theory of games. **Journal of Theoretical Biology**, [S.l.], v.1, p.382–403, 1961.
- MORAN, P. A. P. Random processes in genetics. **Proc. Camb. Phil. Soc.**, [S.l.], v.54, p.60–71, 1958.
- MURNIGHAN, J. K.; SAXON, M. S. **Journal of Economic Psychology**, [S.l.], v.19, p.415–445, 1998.
- NAPEL, S. Aspiration Adaptation in the Ultimatum Minigame. **Games and Economic Behavior**, [S.l.], v.43, p.86–106, April 2003.
- NASH, J. Equilibrium Points in n-Person Games. **Proceeding of the National Academy of Science of the United States of America**, [S.l.], v.36, p.48–49, 1950.
- NOWAK, M. A. **Evolutionary Dynamics: exploring the equations of life**. Cambridge, Massachussets: Harvard University Press, 2006.
- NOWAK, M. A. Five Rules for the Evolution of Cooperation. **Science**, [S.l.], v.314, p.1560–1563, 2006.
- OOSTERBEEK, H.; SLOOF, R.; KUILEN, G. V. de. Cultural Differences in Ultimatum Game Experiments: evidence from a meta-analysis. **Experimental Economics**, [S.l.], v.7, p.171–188, 2004.
- ORBORNE, M. J. **An Introduction to Game Theory**. New York: Oxford University Press, 2004.

PAGE, K. M.; NOWAK, M. A. A Generalized Adaptive Dynamics Framework can Describe the Evolutionary Ultimatum Game. **Journal of Theoretical Biology**, [S.l.], v.209, n.2, p.173–179, March 2000.

PAGE, K. M.; NOWAK, M. A.; SIGMUND, K. The Spatial Ultimatum Game. **Proceedings of Royal Society B: Biological Sciences**, London, v.267, n.1458, p.2177–2182, November 2000.

POUNDSTONE. **Prisoner's Dilemma**. New York: Doubleday, 1992.

RUFFLE, B. J. More is better, but fair is fair: tipping in dictator and ultimatum games. **Games and Economic Behavior**, [S.l.], v.23, p.247–265, 1998.

SALINAS, S. R. A. **Introdução à Física Estatística**. 2nd ed. [S.l.]: Ed. da USP, 2005.

SÁNCHEZ, A.; CUESTA, J. A. Altruism may Arise from Individual Selection. **Journal of Theoretical Biology**, [S.l.], v.235, n.2, p.233–240, July 2005.

SCHOTTER, A.; SOPHER, B. Advice and behavior in intergenerational ultimatum games: an experimental approach. **Games and Economic Behavior**, [S.l.], v.58, p.365–393, 2007.

SELTEN, R. Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nashfragetragheit. **Z. Gesamte Staatswiss**, [S.l.], v.121, p.301–324, 1965.

SILVA, R. da. **Universalidade e Leis de Escala em Sistemas Fora do Equilíbrio**. 2002. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — FFCLRP-USP.

SILVA, R. da; KELLERMANN, G. A. Analyzing the Payoff of a Heterogeneous Population in the Ultimatum Game. **Brazilian Journal of Physics**, [S.l.], v.37, p.1206–1211, 2007.

SMITH, J. M. **Evolution and the Theory of Games**. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

SZABÓ, G.; FÁTH, G. Evolutionary games on graphs. **Physics Reports**, [S.l.], v.446, p.97–216, 2007.

TRAULSEN, A.; NOWAK, M. A.; PACHECO, J. M. Stochastic dynamics of invasion and fixation. **Physical Review E**, [S.l.], v.74, p.011909–1 – 011909–5, 2006.

Von NEUMANN, J. Zur theorie der gesellschaftsspiele. **Mathematische Annalen**, [S.l.], v.100, p.295, 1928.

Von NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. Princeton: Princeton University Press, 1944.

Von NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 1953.

WALKER, P. **An Outline of the History of Game Theory**. [S.l.]: University of Canterbury, Department of Economics, 2005. Disponível em: <http://www.econ.canterbury.ac.nz/hist.htm>. Acesso em: 25 jul. 2008.

WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective Dynamics of 'Small-world' Networks. **Nature**, [S.l.], v.393, n.6684, p.440–442, June 1998.

WINTER, E.; ZAMIR, S. An Experiment With Ultimatum Bargaining in a Changing Environment. **The Japanese Economic Review**, [S.l.], v.56, p.363–385, 2005.