SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
XXVIII SIC
paz no plural

Análise Numérica de Métodos de Simetria para Edo's

Giovani Bernardes Merlin

gbm1996gbm1996@gmail.com

UFRGS

Introdução

Um método geral e muito eficiente de analisar equações diferenciais ordinárias (EDO's) é o de procurar por simetrias infinitesimais associadas à equação. Em alguns casos, é possível obter soluções explicitamente. A vantagem do método é que encontrar tais simetrias de uma EDO é em geral mais simples do que resolver a EDO diretamente.

O Método

Todas as equações do tipo $\frac{dy}{dx} = \omega(x,y)$ possuem alguma simetria, a qual leva um ponto (x,y) para outro $\hat{x},\hat{y}$, transformando a solução $F(x)$ em $\hat{F}(\hat{x})$.Tomado ϵ como parâmetro de tal simetria $(\hat{x}(x,y;\epsilon),\hat{y}(x,y;\epsilon))$ se define a orbita dos pontos $(x,y)\mapsto(\hat{x},\hat{y})$ como uma função de ϵ, então:

$$\xi(\hat{x},\hat{y}) = \frac{d\hat{x}}{d\epsilon} \qquad \eta(\hat{x},\hat{y}) = \frac{d\hat{y}}{d\epsilon}$$

Logicamente,

$$\xi(x,y) = \left.\frac{d\hat{x}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \qquad \eta(x,y) = \left.\frac{d\hat{x}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$$

Utilizando a formula de derivação em outras variavies :

$$\omega(\hat{x},\hat{y}) = \frac{\hat{y}_x + \omega(x,y)\hat{y}_y}{\hat{x}_x + \omega(x,y)\hat{x}_x} \tag{1}$$

Chega-se na condição de simetria linear para EDO's de primeira ordem:

$$\eta_x - \xi_y\omega^2 + (\eta_y - \xi_x)\omega = (\xi\omega_x + \eta\omega_y) \tag{2}$$

Tal equação, em geral, é impossível de resolver. Porém aplicando algumas condições, acaba por se tornar (em alguns casos) razoavelente simples. Encontrada tal simetria, procura-se eixos (r,s) (cordenas canônicas) em que se admite simetria $(r,s)\mapsto(\hat{r},\hat{s};\epsilon) = (r, s+\epsilon)$, logo,

$$\frac{d\hat{r}}{d\epsilon} = r_x\xi(x,y) + r_y\eta(x,y) = 0$$

$$\frac{d\hat{s}}{d\epsilon} = s_x\xi(x,y) + r_y\eta(x,y) = 1$$

Resolvendo pelo método do característico, encontra-se que r é uma integral primeira (logo, uma constante) da solução de :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} \tag{3}$$

e s sendo :

$$s = \left.\int \frac{dx}{\xi(x,y(r,x))}\right)\Bigg|_{r=r(x,y)} \tag{4}$$

Caso $\xi = 0$,

$$r = x \qquad s = \left.\int \frac{dy}{\eta(x,y(r,x))}\right)\Bigg|_{r=r(x,y)}$$

Em tais eixos, a equação $\omega(x,y)$ se reduz à uma simples derivada de uma variavel $\frac{ds}{dr} = \Omega(r)$, sendo necessário apenas uma integral primeira. Resolvida a equação, simplesmente retorna-se aos eixos (y,x) encontrando a solução final $F(x)$.

Exemplo

Para resolver a equação

$$\omega(x,y) = y + e^x y^{-1}$$

procura-se uma simetria da forma $\xi = 1$, $\eta = \eta(y)$.Aplicando a formula 2 encontra-se que

$\xi = 1$, $\eta = y/2$. Para fins didáticos, integrando ξ e η em relação à ϵ e aplicando a condição inicial $(x,y) = (\hat{x}(x,y;0),\hat{y}(x,y;0))$ é encontrada a simetria como sendo $(\hat{x},\hat{y}) = (x+\epsilon, ye^{\epsilon/2})$ Figura (1).

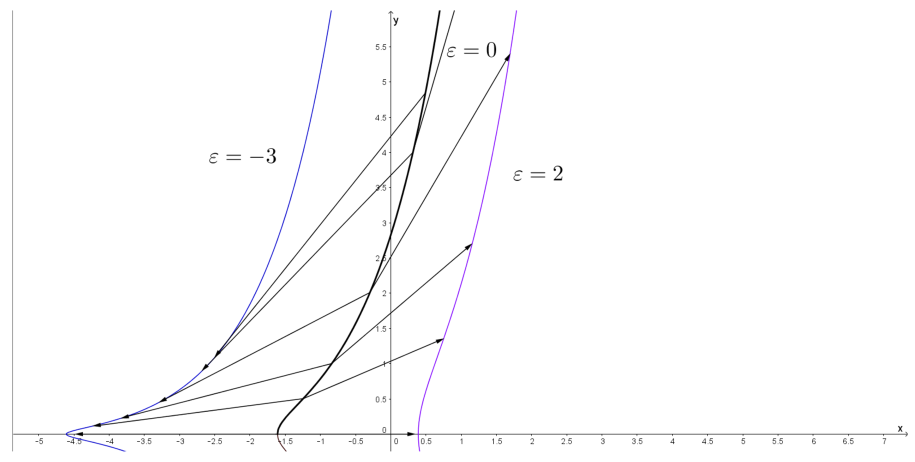

Figura 1: Mudança de pontos (x,y) em $(\hat{x},\hat{y})$ para diferentes valores de ϵ na solução F(x)

Encontrando r por (3):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2} \rightarrow y = ce^{x/2}$$

$$c = r = ye^{-x/2}$$

Sendo importante frizar que $y = ce^{x/2}$ não é a resposta do problema, e apenas a direção em que r é uma constante. Por (4)

$$s = \left.\int dx\right|_{r=r(x,y)}$$

$$s = x$$

Aplicando (1) , chega-se em :

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{e^{-x/2} + y^{-1}e^{x/2}} = \frac{r}{r^2/2+1}$$

Resolvendo essa simples EDO'S separável,

$$s = \log(r^2/2+1) + c$$

Que possui a simetria esperada como na figura (2).

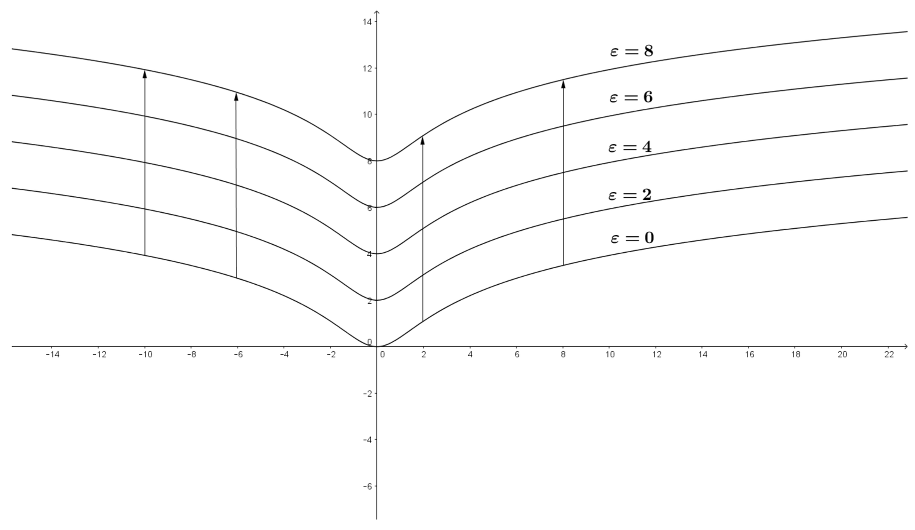

Figura 2: Diferentes curvas s(r) para valores de ϵ.
Vetores preto indicando $(r,s)\mapsto(\hat{r},\hat{s};\epsilon)$

Voltando às variáveis originais,

$$y = \pm\sqrt{de^{2x} - 2e^x}$$

Que possui a forma dada na figura (3).

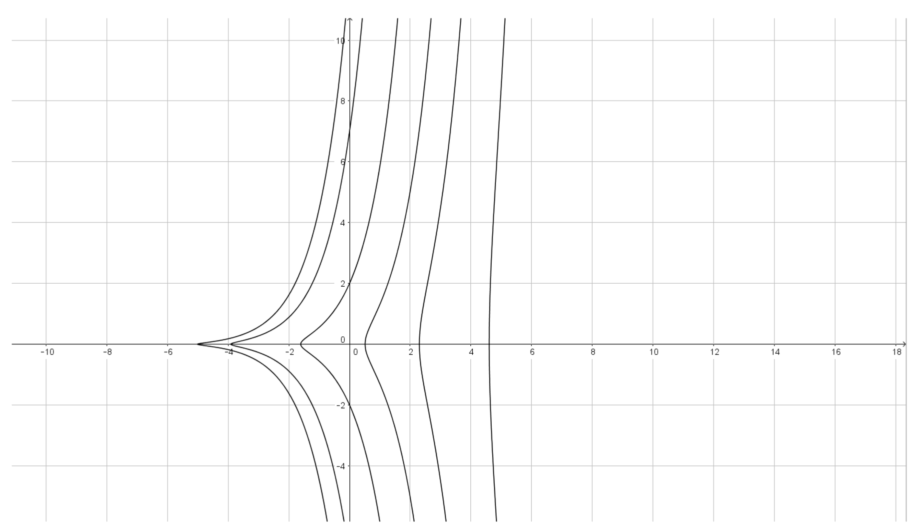

Figura 3: Diferentes funções $F(x)$ para diferentes valores de C