

SEVERINO PEREIRA CAVALCANTI MARQUES

UM MODELO NUMÉRICO PARA ANÁLISE DE
ESTRUTURAS DE MATERIAIS COMPOSTOS
CONSIDERANDO EFEITOS VISCOELÁSTICOS
E FALHAS PROGRESSIVAS

Tese apresentada à Universidade
Federal do Rio Grande do Sul para
obtenção do título de Doutor em
Engenharia Civil

Porto Alegre

1994

23352

624.04(043)
M357M

S: 043 (816.5) UFRGS-EE

ENG
1995/256747-2
1995/06/14

ESCOLA DE ENGENHARIA BIBLIOTECA		N.º CHAMADA 624.04(043) M357m	
ORIGEM D	N.º REG. 23352	DATA 14/06/95	
FORN. CPGEC			
FUNDO		DATA 12/06/95	
		PREÇO R\$ 25,00	

Tese submetida ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA CIVIL.



Prof. Dr. Guillermo Juan Creus
Orientador

Prof. Dr. Jorge Daniel Riera
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

Aprovada pela BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Dr. Guillermo Juan Creus (Presidente)
D.Sc. COPPE/UF RJ
- Prof. Dr. Armando Miguel Awruch
D.Sc. COPPE/UF RJ
- Prof. Dr. Edgardo Tarocco
D.Sc. COPPE/UF RJ
- Prof. Dr. Ariovaldo Felix Palmerio
Ph.D. Virginia University

A Dilze,
Fernando, Gustavo e Clarissa

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Jarbas Milititsky pelo apoio prestado quando Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS.

Ao Prof. Dr. Guillermo Juan Creus pelos ensinamentos e pela eficiente orientação deste trabalho.

Aos Colegas professores do Departamento de Engenharia Estrutural da UFAL, Carlos Cardoso Pontes de Miranda, Adeildo Soares Ramos Júnior, Viviane Carrilho Leão Ramos, João Carlos Cordeiro Barbirato e Flávio Barboza de Lima, pela amizade e estímulo.

A todos os professores e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS que de forma direta ou indireta contribuíram para a viabilização do presente trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior - CAPES pela bolsa de estudos concedida.

ÍNDICE

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 - Considerações Gerais	1
1.2 - Revisão Bibliográfica	5
1.3 - Objetivo do Trabalho	11
1.4 - Organização e Conteúdo do Trabalho	13
2. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS ANISÓTROPOS.....	16
2.1 - Introdução	16
2.2 - Classificação dos Materiais Quanto à Anisotropia	16
2.3 - Relações Constitutivas de Materiais Elásticos Lineares em Função de Constantes Técnicas	23
2.4 - Relações Constitutivas de Materiais Viscoelásticos Lineares	25
2.5 - Influência da Temperatura e da Umidade	27
2.6 - Avaliação das Deformações Viscoelásticas de um Corpo Anisótropo pelo Método das Variáveis de Estado	33

3. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS E FALHAS DE UMA LÂMINA	38
3.1 - Introdução	38
3.2 - Relações Constitutivas de uma lâmina	38
3.2.1 - Matriz Constitutiva Elástica de uma Lâmina	43
3.2.2 - Funções de Fluência e de Relaxação de uma Lâmina	45
3.3 - Transformações de Coordenadas	47
3.4 - Falhas de uma Lâmina de Material Composto	50
3.4.1 - Critérios de Falhas de uma Lâmina	53
3.4.2 - Modelo de Degradação de uma Lâmina	62
4. FORMULAÇÃO NÃO LINEAR GEOMÉTRICA LAGRANGEANA TOTAL ..	64
4.1 - Introdução	64
4.2 - Equação Incremental de Equilíbrio da Mecânica do Contínuo	64
4.2.1 - Considerações Iniciais	64
4.2.2 - Medidas de Tensão e de Deformação	66
4.2.3 - Equação Incremental de Equilíbrio Linearizada	68
4.3 - Equação Incremental de Equilíbrio de um Elemento Finito	71
4.4 - Forma Incremental/Iterativa da Equação de Equilíbrio	78
4.5 - Métodos de Solução das Equações de Equilíbrio.....	80
4.6 - Determinação dos Intervalos de Tempo na Análise Viscoelástica	82

4.7 - Avaliação das Variáveis de Estado	86
5. HIPÓTESES E PROCEDIMENTOS DO MODELO COMPUTACIONAL ...	88
5.1 - Introdução	88
5.2 - Hipóteses do Modelo Computacional	88
5.3 - Aspectos da Formulação Numérica	89
5.4 - Principais Etapas do Programa Computacional	91
6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO - PARTE I: ANÁLISE ELÁSTICA ...	95
6.1 - Introdução	95
6.2 - Exemplos Numéricos de Análise Elástica	95
6.2.1 - Flambagem Térmica de uma Placa de Material Isótropo	95
6.2.2 - Flambagem Térmica de uma Placa Laminada	100
6.2.3 - Placa de Grafite/Epóxi sob Carga Higroscópica e Térmica.....	103
6.2.4 - Placa de Boro/Epóxi sob Gradiente Térmico	112
6.2.5 - Flambagem Térmica de um Painel de Grafite/Epóxi.....	117
7. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO - PARTE II: ANÁLISE VISCOELÁSTICA	120
7.1 - Introdução	120
7.2 - Exemplos Numéricos de Análise Viscoelástica	120
7.2.1 - Painel Plano de Grafite/Epóxi Submetido a	

Variação de Temperatura	120
7.2.2 - Painel de Grafite/Epóxi Submetido a Tração Axial	125
7.2.3 - Casca Esférica de Grafite/Epóxi sob Carga Térmica	128
7.2.4 - Flambagem Viscoelástica de uma Casca de Material Isótropo	132
7.2.5 - Flambagem Viscoelástica de uma Casca Esférica de Grafite/Epóxi	137
8. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO - PARTE III: ANÁLISE DE FALHAS	140
8.2 - Exemplos Numéricos de Análise de falhas	140
8.2.1 - Painel Plano de Grafite/Epóxi com uma Configuração $[\theta/-\theta]_s$ e Submetido a Carga de Tração	140
8.2.2 - Placa Laminada Simplesmente Apoiada Sujeita a Carga Uniformemente Distribuída	144
8.2.3 - Painel Plano de Grafite/Epóxi com Configuração $[\theta_4/0_4/-\theta_4]_s$ Submetido à Tração	148
8.2.4 - Painel Plano de Grafite/Epóxi Dotado de Furo Central e Configuração $[0/90/\pm 45]_{ss}$ Sujeito à Tração	154
8.2.5 - Casca Esférica Viscoelástica Laminada	159
9. CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	162

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 166

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA 174

RESUMO

Neste trabalho apresentam-se procedimentos para análise não linear de estruturas de materiais compostos laminados reforçados por fibras. A formulação é baseada em uma descrição cinemática incremental Lagrangeana Total,² que permite o tratamento de deslocamentos arbitrariamente grandes com pequenas deformações, utilizando elementos finitos tridimensionais degenerados deduzidos para a análise de cascas. As estruturas são consideradas como submetidas a cargas mecânicas e a ações de temperatura e de umidade.

O material é suposto elástico linear com propriedades dependentes, ou não, dos valores da temperatura e da concentração de umidade, ou viscoelástico linear com uma relação constitutiva em integral hereditária e com comportamento higrotermo-reologicamente simples. As lâminas são consideradas como sujeitas a falhas, as quais são detectadas através de critérios macroscópicos baseados em tensões ou em deformações.

As equações não lineares de equilíbrio são resolvidas através de procedimentos iterativos e as deformações dependentes do tempo são avaliadas pelo método das variáveis de estado.

Diversos exemplos numéricos de estruturas submetidas à flexão, flambagem elástica e viscoelástica e falhas são apresentados.

ABSTRACT

This work presents procedures for nonlinear analysis of laminated composite materials reinforced by fibers. The formulation is based on a Total Lagrangean incremental description which allows the treatment of arbitrarily large displacements and small strains, using three-dimensional degenerated finite elements derived for the shell analysis. The structures are considered as subjected to mechanics, thermal and hygroscopic loads.

The material is considered as linear elastic with mechanical properties dependent, or not, of the temperature and moisture concentration, or linear viscoelastic with a constitutive relation defined by a hereditary integral and with hygrothermal-rheologically simple behavior. The layers can be subjected to failures, which are detected by macroscopic failure criteria based on stress or strain components.

The nonlinear equilibrium equations are solved by iterative procedures and the time dependent strains are determined by a state variables approach.

Several numerical examples of structures subjected to bending, elastic and viscoelastic buckling and failures are presented.

1. INTRODUÇÃO

1.1 - Considerações Gerais

A idéia da utilização de materiais reforçados por fibras é bastante natural. O próprio corpo humano possui diversas partes em que ela se apresenta. Baseando-se nesta concepção, o homem criou vários materiais de construção, dentre eles o concreto armado, por exemplo, que consiste no material concreto reforçado por fios ou barras de aço que funcionam como as fibras. A essência da idéia, porém, é a combinação de materiais diferentes para obter como produto um novo material com características de resistência e de rigidez melhoradas em relação a aqueles que o constituem.

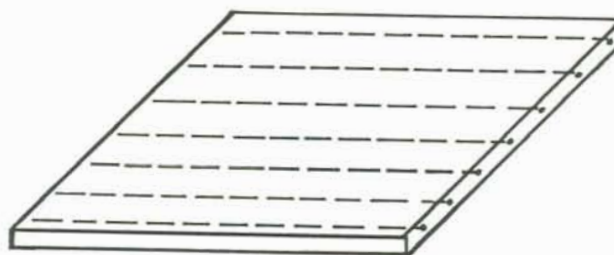
O progresso da ciência e o desenvolvimento das técnicas de fabricação de novos materiais têm permitido a obtenção de fibras de alta resistência e a confecção de modernos materiais compostos. Dentre estes, destacam-se os materiais conhecidos na literatura inglesa como "composite materials", os quais apresentam como principais características as suas elevadas relações rigidez/peso e resistência/peso. Tais materiais têm, nos últimos anos, encontrado um vasto campo de aplicações que se estende desde a confecção de utensílios esportivos até os mais sofisticados projetos das indústrias automobilística,

aeronáutica e aeroespacial. Há, inclusive, quem os chame de "materiais do futuro".

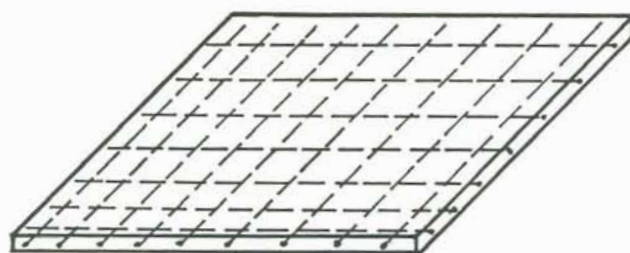
Nas aplicações estruturais, tais materiais são em geral empregados na forma de painéis planos ou curvos constituídos por lâminas compostas por fibras de elevada resistência e rigidez envolvidas por um material denominado matriz. Normalmente, as fibras nas lâminas são dispostas em uma ou em duas direções ortogonais (Figura 1.1). O papel da matriz é: a) proteger e suportar as fibras e b) transmitir os esforços para as fibras que são os principais elementos resistentes.

Vários materiais têm sido utilizados como matriz, dentre eles estão diversos tipos de resinas, metais e cerâmicas. As fibras mais usadas são aquelas de vidro, grafite, boro e carbono. Os materiais compostos que apresentam resina como matriz têm sido os mais empregados e, na literatura inglesa, são denominados de "advanced composite materials".

Para a execução de uma estrutura, várias lâminas são empilhadas (Figura 1.2) de modo que as características de resistência e rigidez especificadas no projeto sejam atendidas através do controle do número de lâminas e da orientação das fibras em cada uma delas. Dependendo da disposição das lâminas, o painel laminado pode resultar simétrico ou não com relação à sua superfície média. Para se evitar indesejáveis curvaturas, as quais podem ser introduzidas, por exemplo, devido a variações térmicas, é mais comum o uso de painéis com esquemas de



(a) - Fibras em uma só direção



(b) Fibras em duas direções ortogonais

Figura 1.1 - Disposição das fibras em uma lâmina

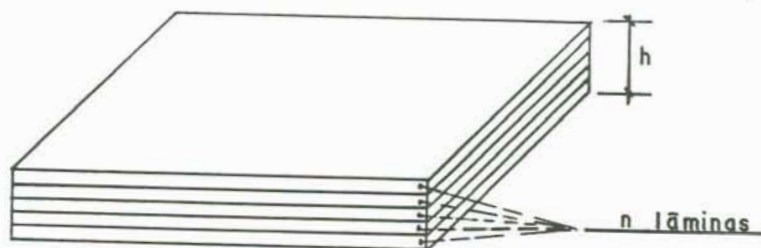


Figura 1.2 - Painel de material composto laminado

laminação simétricos.

As diferentes características mecânicas apresentadas pelas fibras e pela matriz tornam o comportamento dos materiais compostos bastante complexo. Além disto, quando a matriz é uma resina (epóxi, por exemplo), as condições ambientais podem ter uma importante influência sobre a resposta das estruturas confeccionadas com aqueles materiais. Embora a maioria das fibras apresente comportamento praticamente elástico, a resina na presença de umidade ou de temperatura elevada exhibe resposta dependente do tempo. Assim, a umidade e a temperatura, além de provocarem uma degradação nas características de resistência e de rigidez do material, acentuam o comportamento viscoelástico. Por outro lado, tais materiais, em geral, apresentam tensões térmicas residuais, as quais são introduzidas no estágio de resfriamento que ocorre após o processo de cura a que os mesmos são submetidos durante a fabricação. Estas tensões térmicas residuais podem, inclusive, assumir valores suficientes para produzir falhas no material.

As diferenças de comportamento das fibras e da matriz são também responsáveis pelos variados e complicados mecanismos de falhas exibidos pelos materiais compostos. Do ponto de vista macroscópico, os principais tipos de falhas são: quebra ou flambagem de fibras, fissuração da matriz, perda de aderência entre fibra e matriz e delaminação. Este último tipo de falha é caracterizado pela separação das lâminas e é causado por

componentes de tensões normais e de cisalhamento interlaminares, as quais se manifestam de forma mais acentuada nas proximidades de bordas livres ou de furos existentes nos painéis e são dependentes do esquema de laminação.

A elaboração de modelos numéricos que descrevam com realismo o comportamento dos materiais compostos na presença das ações ambientais, tais como da temperatura e da umidade, e principalmente quando existe a necessidade da inclusão dos mecanismos das falhas acima mencionadas, ainda constitui um grande desafio. Porém, o potencial de uso e a rapidez da disseminação do emprego daqueles materiais nos mais variados tipos de aplicação têm motivado, nos últimos anos, um grande esforço no sentido de se encontrar procedimentos que consigam, de forma precisa, descrever o comportamento dos mesmos na presença das ações e das falhas acima referidas. No que segue apresenta-se uma revisão bibliográfica que tenta mostrar a evolução dos estudos dos materiais compostos laminados com matriz polimérica.

1.2 - Revisão Bibliográfica

Os chamados "advanced composites materials" começaram a surgir no início da década de 60. Nesta época, então, foram desencadeados os primeiros estudos analíticos e experimentais do comportamento mecânico daqueles materiais. Como contribuições pioneiras e relevantes podem

ser citadas aquelas dadas por HILL (1963), HASHIN; ROSEN (1964) e TSAI (1965).

Os trabalhos iniciais tinham como objetivo central a caracterização dos citados materiais compostos. Os conceitos da micromecânica já eram empregados na tentativa de se obter modelos analíticos capazes de fornecer as propriedades macromecânicas dos materiais compostos em função das propriedades dos materiais constituintes, ou seja, das fibras e da matriz (HILL, 1963) e (HASHIN; ROSEN, 1964).

Ainda naquela década apareceram os primeiros estudos voltados à caracterização do comportamento viscoelástico daqueles materiais (HASHIN, 1966), (SCHAPERY, 1968) e (HALPIN, 1968). Por exemplo, HASHIN (1966) usou o Princípio da Correspondência e um modelo micromecânico elástico linear para obter expressões analíticas relacionando parâmetros viscoelásticos do material com propriedades das fibras e da matriz. Neste último trabalho as fibras foram admitidas como elásticas lineares e a matriz como viscoelástica linear.

Durante os anos 60 também surgiram as primeiras contribuições para o estudo de falhas nos materiais compostos. Como trabalhos pioneiros, podem ser citados aqueles de TSAI (1965), no qual foi proposto o uso do critério de escoamento de HILL (1950) como critério de falhas para materiais compostos, e HOFFMAN (1967) que incluiu termos lineares em componentes de tensão no critério de Hill objetivando torná-lo mais eficiente no que

se refere à diferença de comportamento do material à tração e à compressão.

Durante a década de 70, as investigações experimentais sobre aqueles materiais tiveram um forte impulso e, em paralelo, várias formulações analíticas e numéricas foram propostas. Na maioria, estas formulações admitiam comportamento elástico linear e eram baseadas na Teoria Clássica da Laminação (JONES, 1975). Tratando da análise de tensões térmicas em painéis planos de materiais compostos, considerados como elásticos, e dentro da linha de trabalhos analíticos, podem ser mencionados aqueles apresentados por WHITNEY; ASHTON (1971) e HAHN; PAGANO (1975).

Alguns modelos analíticos abordando o comportamento viscoelástico de materiais compostos foram também apresentados na década de 70 (LOW; SCHAPERY, 1971), (SCHAPERY, 1974) e (WEITSMAN, 1979). No que diz respeito a análise de falhas, importantes trabalhos foram publicados naquela década, dentre os quais podem ser destacados aqueles devidos a TSAI; WU (1971) e WU (1974), os quais propõem um interessante critério de falhas do tipo polinomial.

Continuando o desenvolvimento dos estudos dos materiais compostos, pode-se observar que a partir dos anos 80 o progresso na área dos modelos numéricos, especialmente daqueles que utilizam o método dos elementos finitos, foi bastante intenso. Neste período surgiram novas teorias de ordem superior para a análise de placas e cascas

laminadas, (REDDY, 1984) e (LIBRESCU, 1987), e se intensificaram os modelos de falhas (HASHIN, 1980), (LEE, 1980), (CHANG; CHANG, 1987), (ZHANG; EVANS, 1988), (HWANG; SUN, 1989) e (TOLSON; ZABARAS, 1991).

HASHIN (1980) baseando-se em invariantes de tensão estabeleceu como critério de falhas várias equações polinomiais que levam em conta os distintos modos de falhas. LEE (1980) propôs um critério de falhas, de caráter empírico que, admitindo o desacoplamento dos efeitos das tensões normais e de cisalhamento, também considera os diferentes modos de falhas. ZHANG; EVANS (1988) apresentaram um critério polinomial quadrático de falhas expresso em termos de deformações. CHANG; CHANG (1987) realizaram um estudo de falhas progressivas em painéis planos de materiais compostos, tracionados e dotados de furo central, utilizando elementos finitos bidimensionais e um simples modelo de degradação do material. HWANG; SUN (1989) usaram o critério proposto em (HASHIN, 1980) e um modelo iterativo em elementos finitos tridimensionais para analisar painéis planos sob cargas axiais considerando falhas progressivas. TOLSON; ZABARAS (1991) apresentaram um modelo para análise de falhas progressivas em placas de materiais compostos laminados, utilizando elementos finitos bidimensionais de placa com sete graus de liberdade por nó e um modelo simplificado de degradação do material.

Várias contribuições tratando da análise elástica de tensões e flambagem térmicas de placas de materiais compostos foram também publicadas. WU; TAUCHERT

(1980, 1980a) apresentaram soluções analíticas para a análise de placas laminadas com esquemas de laminação simétricos e antissimétricos submetidas à carga térmica. Com base em uma formulação em elementos finitos do tipo "semiloof", THANGARATNAM et al. (1988) apresentaram um estudo de tensões térmicas em placas e cascas elásticas, de materiais compostos laminados, com pequenos deslocamentos, considerando a variação das propriedades elásticas com a temperatura.

Posteriormente, THANGARATNAM et al. (1989) usaram elementos finitos "semiloof" para a análise de flambagem térmica linear de placas de materiais compostos, mostrando a influência de diversos fatores, tais como, condições de contorno, esquema de laminação, relação entre lados, etc., sobre os valores da temperatura crítica. CHEN et al. (1991) utilizaram uma formulação em elementos finitos para a análise de flambagem térmica linear em placas laminadas moderadamente espessas e com esquema de laminação do tipo "angle ply" antissimétrico, mostrando, como em (THANGARATNAM et al, 1989), a influência de vários fatores sobre os valores da temperatura crítica. RAM; SINHA (1991) apresentaram uma formulação, geometricamente linear, baseada em elementos finitos isoparamétricos de placas e destinada a análise elástica de placas laminadas de materiais compostos sob a ação de temperatura e umidade.

Quanto aos modelos numéricos que consideram efeitos viscoelásticos na análise de materiais compostos, pode-se afirmar que poucos têm sido encontrados na

literatura. Raras também são as publicações de testes experimentais para caracterização do comportamento viscoelástico daqueles materiais.

Usando a Teoria Clássica da Laminação e a hipótese de material viscoelástico linear e termo-reologicamente simples, FLAGGS; CROSSMAN (1981) apresentaram um estudo de painéis planos de materiais compostos laminados submetidos a cargas mecânicas e higrotérmicas. WILSON; VINSON (1984) apresentaram uma formulação quasi-elástica para análise de flambagem em placas laminadas de material viscoelástico, desenvolvido com base no Teorema da Mínima Energia Potencial e no Método de Rayleigh-Ritz. HARPER; WEITSMAN (1985) realizaram um estudo teórico e experimental sobre mudanças de curvatura de painéis planos de grafite/epóxi com esquema de laminação antissimétrico e sob efeitos de umidade, utilizando para a análise teórica a hipótese de material viscoelástico linear e termo-reologicamente simples e a Teoria Clássica da Laminação.

Com relação a trabalhos que utilizam como ferramenta numérica o método dos elementos finitos, podem ser mencionados aqueles elaborados por LIN; HWANG (1989) e LIN; YI (1991). No primeiro, os autores utilizaram elementos finitos de quatro nós, e deduzidos para estado plano de tensão, no estudo de painéis planos de materiais compostos laminados simétricos, submetidos a cargas termo-mecânicas, admitindo comportamento viscoelástico linear e material termo-reologicamente simples. No segundo,

os autores usando elementos finitos para estado plano de deformações estenderam o modelo apresentado por LIN; HWANG (1989) para análise de tensões interlaminares nas bordas livres de painéis laminados viscoelásticos sob cargas higrotérmicas.

1.3 - Objetivo do Trabalho

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um modelo numérico para a análise de painéis planos ou curvos constituídos por lâminas ortótropas e submetidos a cargas mecânicas convencionais e a ações de variações de temperatura e de umidade. O modelo permite a realização de análises elástica, viscoelástica e de falhas progressivas. Os deslocamentos e as rotações dos painéis são admitidos arbitrariamente grandes e as deformações são supostas pequenas.

Na análise elástica, considera-se que as propriedades do material são dependentes, ou não, da temperatura e da concentração de umidade. No caso da análise viscoelástica, o material é suposto higrotermo-reologicamente simples e viscoelástico linear, com uma relação constitutiva na forma de integral hereditária. Em se tratando da análise de falhas, admite-se que as lâminas são transversalmente isotropas e que estão sujeitas à quebras ou flambagem de fibras e à fissuração da matriz.

Para elaboração do modelo, os procedimentos da formulação não linear incremental Lagrangeana Total

apresentados em (BATHE, 1982) foram generalizados pela inclusão de deformações viscoelásticas, térmicas e higroscópicas. Como medidas básicas de tensão e deformação, a formulação adota, respectivamente, o Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff e o Tensor Deformação de Green-Lagrange. Para modelar a estrutura são adotados elementos finitos tridimensionais degenerados de quatro, oito e nove nós.

As equações não lineares de equilíbrio são resolvidas de forma iterativa através do método de Newton-Raphson, em sua versão convencional ou modificada, podendo também ser utilizado em análise elástica, que não envolva cargas de temperatura ou de umidade, um outro procedimento apropriado para a análise de estruturas em regime pós-crítico, denominado de método de controle por deslocamentos generalizados (YANG; SHIEH, 1990).

Para avaliação das deformações dependentes do tempo, o modelo emprega um método que consiste na generalização, para o caso de materiais anisótropos do tipo higrotermo-reologicamente simples, dos procedimentos apresentados em (CREUS, 1986) e destinados ao cálculo daquelas grandezas em materiais isotrópicos. Tais procedimentos são chamados de método das variáveis de estado.

Para a detecção de falhas, foram implementados no modelo dois critérios macroscópicos polinomiais baseados em tensão e um outro expresso em termos de deformação, além de um critério constitutivo simplificado para levar em conta a degradação das

propriedades elásticas do material na presença de falhas. Este último é empregado quando se pretende dar prosseguimento à análise após o aparecimento da primeira falha, ou seja, quando se realiza uma análise de falhas progressivas.

Para testar a eficiência dos procedimentos do modelo, diversos exemplos numéricos são apresentados. Dentre eles podem ser citados a análise de flexão e de flambagem térmicas de placas laminadas elásticas, flambagem viscoelástica de cascas laminadas e análise de falhas em painéis laminados.

1.4 - Organização e Conteúdo do Trabalho

O presente trabalho consiste basicamente de três partes: conceituação e procedimentos gerais para a análise de materiais anisótropos, descrição do modelo computacional e exemplos de aplicação. O conteúdo do trabalho é distribuído através de sete capítulos, como descrito abaixo.

O capítulo 2 apresenta os conceitos básicos inerentes às relações constitutivas dos materiais anisótropos. Considerações sobre simetria e rigidez elásticas, funções de fluência e de relaxação e influência da temperatura e umidade sobre o comportamento dependente do tempo são apresentadas. Ainda no capítulo 2, são descritos os procedimentos utilizados para avaliação das deformações dependentes do tempo em materiais anisótropos e

que consistem na generalização do chamado método das variáveis de estado.

O capítulo 3 trata das relações constitutivas e das falhas de uma lâmina de material composto. Os conceitos e procedimentos expostos no capítulo 2 são então particularizados para o caso de uma lâmina de material ortótropo. Os principais critérios macroscópicos de falhas e um modelo simplificado de degradação da rigidez de uma lâmina de material composto são apresentados.

No capítulo 4 são descritos os procedimentos utilizados na análise não linear geométrica de cascas, tendo como base uma formulação incremental Lagrangeana Total. A formulação apresentada em (BATHE, 1982) é generalizada pela inclusão de termos relativos a efeitos de temperatura, umidade e viscoelasticidade. Apresentam-se também no capítulo 4 as equações incrementais de equilíbrio da mecânica do contínuo e de um elemento finito de casca laminada, os processos utilizados para solução destas equações e os procedimentos usados para a determinação das variáveis de estado e dos intervalos de tempo na análise viscoelástica.

O capítulo 5 apresenta as características e as principais etapas do modelo computacional. As hipóteses, as limitações e os procedimentos numéricos do modelo são relacionados.

Os capítulos 6,7 e 8 tratam dos exemplos de aplicação analisados pelo modelo proposto. No capítulo 6 constam os exemplos de análise de placas e cascas de

materiais compostos considerados elásticos e submetidos a cargas de temperatura e de umidade. Análises de flambagem térmica de placas de materiais isotrópico e laminados, elásticos, são apresentadas. O capítulo 7 trata dos exemplos de aplicação em que se considera o material como viscoelástico linear. Análises viscoelásticas de painéis de materiais compostos laminados sob cargas mecânicas e térmicas são apresentadas. Exemplos de flambagem viscoelástica de uma casca de material isotrópico e outra de material composto laminado são descritos. Finalmente, no capítulo 8 são apresentados os exemplos numéricos em que se considera a ocorrência de falhas. Análises que visam a determinação das cargas correspondentes ao surgimento da primeira falha em painéis laminados de grafite/epóxi são apresentadas. Exemplos de análises de falhas progressivas em painéis de grafite/epóxi são também descritos no capítulo 8.

2. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DE MATERIAIS ANISÓTROPOS

2.1 - Introdução

Com o objetivo de fornecer os subsídios básicos para o estabelecimento das relações constitutivas dos materiais compostos considerados no presente trabalho, são descritos neste capítulo conceitos relacionados com as propriedades mecânicas de materiais anisótropos.

Em primeiro lugar, uma sucinta descrição sobre simetria elástica e suas consequências na matriz constitutiva do material são apresentadas. Para materiais anisótropos e viscoelásticos lineares, descreve-se sobre a influência da temperatura e da concentração de umidade sobre as funções de fluência e de relaxação. O Princípio da Superposição Tempo-Temperatura e sua generalização para incluir efeitos de umidade são apresentados. Finalmente, os procedimentos que constituem o método das variáveis de estado, expostos em (CREUS, 1986) para a avaliação das deformações viscoelásticas em corpos de materiais isotropos, são generalizados para o caso de sólidos anisótropos do tipo higrotermo-reologicamente simples.

2.2 - Classificação dos Materiais Quanto à Anisotropia

As propriedades mecânicas de um material

estão fundamentalmente relacionadas com a sua estrutura interna. Dependendo desta estrutura, aquelas propriedades podem não variar de ponto para ponto do material. Neste caso diz-se que o material é homogêneo e, em caso contrário, heterogêneo. Assim, as propriedades mecânicas de um único ponto são representativas do material quando este é homogêneo. Se aquelas propriedades mudam com a direção em torno de cada ponto, diz-se que o material é anisótropo ou que ele apresenta anisotropia. Quando isto não ocorre o material é denominado isótropo.

A Figura 2.1 mostra as componentes de tensão σ_{ij} atuantes sobre um paralelepípedo infinitesimal, retirado de um ponto de um corpo homogêneo, anisótropo e elástico linear, com faces paralelas aos planos definidos pelos eixos x, y e z. Na Figura 2.1, os índices 1, 2 e 3 correspondem aos eixos x, y e z, respectivamente, e as convenções usuais de notação e sinal para as componentes de tensão são utilizadas (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970).

Em notação matricial, a relação constitutiva do material, em geral, pode ser escrita na forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

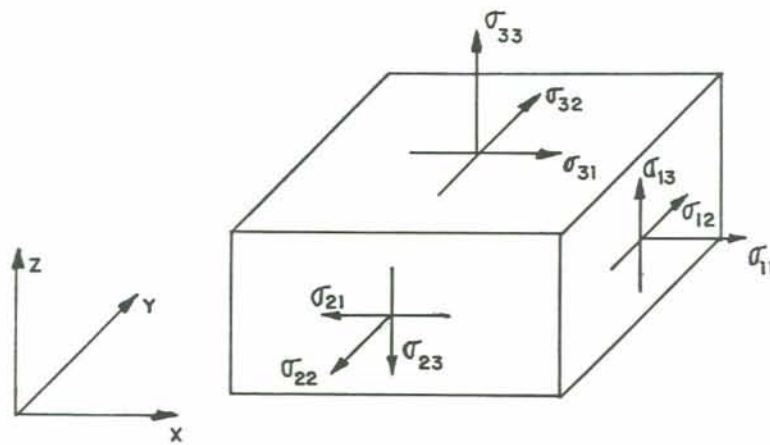


Figura 2.1 - Componentes de tensão em um elemento

onde ϵ_{ij} são as componentes do tensor deformação e os termos C_{ij} são os coeficientes de rigidez do material, os quais são reunidos na matriz de rigidez $[C]$. Por considerações de energia de deformação demonstra-se que $C_{ij} = C_{ji}$ (LEKHNITSKII, 1963). Logo, um material anisótropo apresenta, em geral, 21 coeficientes de rigidez independentes.

Quando o material possui algum tipo de simetria em sua estrutura interna, as propriedades mecânicas também se distribuem de forma simétrica (SOKOLNIKOFF, 1946). As direções com propriedades idênticas são ditas equivalentes e, nestes casos, o número de coeficientes de rigidez independentes é menor que 21. A seguir são apresentados casos particulares de simetria do material.

a) Material com um plano de simetria

Supor que $x-y$ seja o plano de simetria do material, ou seja, que as propriedades mecânicas em direções simétricas com relação ao plano $x-y$ são idênticas. Daí, se for adotado um outro sistema de eixos x' , y' e z' , tal que

$$x \equiv x', \quad y \equiv y' \quad \text{e} \quad z \equiv -z' \quad (2.2)$$

tem-se, pela simetria do material em relação ao plano $x-y$, que os coeficientes de rigidez se mantêm. Obtendo-se as

componentes de tensão relativas aos novos eixos em função daquelas referidas aos eixos x , y e z (SOKOLNIKOFF, 1946), observa-se que $\sigma'_{11} = \sigma_{11}$, $\sigma'_{22} = \sigma_{22}$, $\sigma'_{33} = \sigma_{33}$, $\sigma'_{12} = \sigma_{12}$, $\sigma'_{13} = -\sigma_{13}$ e $\sigma'_{23} = -\sigma_{23}$. Relações idênticas são obtidas entre as componentes de deformação. Escrevendo-se as equações constitutivas para os dois sistemas de eixos, introduzindo-se as relações entre as componentes de tensão, assim como aquelas entre as componentes de deformação, acima referidas, e considerando-se os mesmos coeficientes de rigidez, obtém-se a seguinte matriz constitutiva do material (SOKOLNIKOFF, 1946):

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ \text{(Simétrico)} & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Assim, um material com um plano de simetria possui treze coeficientes de rigidez independentes. A direção normal ao plano de simetria é denominada direção principal do material. Se o plano de simetria é o plano x - y , o eixo z coincide com a direção principal do material.

b) Material com três planos de simetria

Admite-se agora que o material apresente três planos de simetria mutuamente perpendiculares entre

si, os quais são paralelos aos planos x-y, y-z e x-z. Através de procedimentos idênticos a aqueles utilizados para o caso de material com um só plano de simetria pode-se deduzir que a matriz de rigidez do material apresenta a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \text{(Simétrico)} & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Logo, um material que possua três planos de simetria apresenta nove coeficientes de rigidez independentes. Tal material é denominado ortótropo e o tipo de simetria por ele apresentado é chamada de ortotropia.

Os eixos x, y e z coincidem com as direções principais do material. Observa-se, através de (2.4), que para estas direções não existem interações entre tensões normais e deformações de cisalhamento ou entre tensões de cisalhamento e deformações normais.

c) Material transversalmente isótropo

Um caso especial de simetria é apresentado por um material que possui uma direção tal que em todos os planos normais à mesma as propriedades mecânicas não variam em torno de cada ponto. Tal material é conhecido como

transversalmente isótropo. Este tipo de simetria pode ser interpretado como um caso especial de ortotropia no qual um dos planos de simetria é plano de isotropia.

Admitindo-se que o plano de isotropia do material seja y-z, pode-se demonstrar sem maiores dificuldades que a matriz de rigidez assume a forma

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \text{(Simétrico)} & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde $C_{44} = (C_{11} - C_{12})/2$. Neste caso existem cinco coeficientes de rigidez independentes. Como se verá posteriormente este tipo de simetria é particularmente importante para o presente estudo.

d) Material com infinitos planos de simetria

Quando todos os planos passando pelos pontos do material são de simetria, as propriedades mecânicas do mesmo não variam com a direção e, neste caso, como já mencionado acima, o material é denominado isótropo. A relação constitutiva de uma material isótropo tem a forma

$$\begin{bmatrix}
 C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\
 & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\
 \text{(Simétrico)} & & & C_{44} & 0 & 0 \\
 & & & & C_{44} & 0 \\
 & & & & & C_{44}
 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

sendo $C_{44} = (C_{11} - C_{12})/2$. Somente dois coeficientes de rigidez independentes existem quando o material apresenta isotropia.

2.3 - Relações Constitutivas de Materiais Elásticos Lineares em Função de Constante Técnicas

As relações constitutivas dos materiais elásticos lineares frequentemente são expressas em função de grandezas tradicionais conhecidas como constantes técnicas. Tais grandezas são os módulos de Young, E_{ij} , os módulos de rigidez ao cisalhamento, G_{ij} , e os coeficientes de Poisson, ν_{ij} , de Chentsov, $\mu_{ij,kl}$, de influência mútua do primeiro tipo $\eta_{ij,k}$ e segundo tipo $\eta_{k,ij}$.

Em função destas constantes técnicas, a inversa da matriz de rigidez de um material anisótropo elástico linear, $[C]^{-1}$ pode ser escrita na seguinte forma (LEKHNITSKII, 1963):

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & \frac{\eta_{12,1}}{E_{11}} & \frac{\eta_{31,1}}{E_{11}} & \frac{\eta_{23,1}}{E_{11}} \\
 & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & \frac{\eta_{12,2}}{E_{22}} & \frac{\eta_{31,2}}{E_{22}} & \frac{\eta_{23,2}}{E_{22}} \\
 & & \frac{1}{E_{33}} & \frac{\eta_{12,3}}{E_{33}} & \frac{\eta_{31,3}}{E_{33}} & \frac{\eta_{23,3}}{E_{33}} \\
 \text{(Simétrico)} & & & \frac{1}{G_{12}} & \frac{\mu_{31,12}}{G_{12}} & \frac{\mu_{23,12}}{G_{12}} \\
 & & & & \frac{1}{G_{13}} & \frac{\mu_{23,31}}{G_{13}} \\
 & & & & & \frac{1}{G_{23}}
 \end{array} \right] \quad (2.7)$$

onde as seguintes relações são obedecidas: $\nu_{ji}/E_{jj} = \nu_{ij}/E_{ii}$, $\mu_{ij,kl}/G_{kl} = \mu_{kl,ij}/G_{ij}$ e $\eta_{ij,k}/E_{kk} = \eta_{k,ij}/G_{ij}$.

No caso de um material ortótropo elástico linear e considerando-se os eixos de referência segundo as direções principais do material, todos os coeficientes de Chentsov e de influência mútua são nulos e a matriz constitutiva (2.7) tem a forma

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\
 & & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\
 \text{(Simétrico)} & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\
 & & & & & \frac{1}{G_{23}}
 \end{array} \right] \quad (2.8)$$

Em se tratando de material transversalmente isótropo e elástico linear, com o plano de isotropia sendo y-z, tem-se $E_{22} = E_{33}$, $G_{13} = G_{12}$, $\nu_{12} = \nu_{13}$ e $G_{23} = E_{22}/2(1 + \nu_{12})$. Para materiais isótropos as seguintes relações são satisfeitas: $E_{11} = E_{22} = E_{33} = E$, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu$ e $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E/2(1 + \nu)$.

2.4 - Relações Constitutivas de Materiais Viscoelásticos Lineares

Para um material anisótropo e viscoelástico linear as tensões e as deformações podem ser relacionadas através da seguinte expressão (SCHAPERY, 1968):

$$\sigma_i(t) = \int_0^t C_{ij}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.9)$$

onde t é o tempo e C_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) são os módulos ou as funções de relaxação do material. As componentes de tensão e de deformação na equação (2.9) foram denotadas com um índice que indica a ordem das mesmas nos vetores tensão e deformação que aparecem em (2.1). Por exemplo, $\sigma_5 = \sigma_{13}$ e $\epsilon_4 = 2\epsilon_{12}$. Admite-se em (2.9) que para $t < 0$ as componentes de tensão e de deformação são nulas. Se for desejado retirar esta última restrição o limite inferior da integral pode ser substituído por $-\infty$. Vale observar que em (2.9) a notação indicial de somatória é utilizada.

Alternativamente, a relação entre as

componentes de tensão e de deformação em um material viscoelástico linear pode ser escrita como

$$\epsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(t-\tau) \frac{\partial \sigma_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.10)$$

sendo D_{ij} as funções de fluência do material. Para mais clareza na interpretação física das funções de fluência pode-se considerar o caso particular no qual as tensões satisfaçam a relação

$$\sigma_i(t) = \bar{\sigma}_i H(t) \quad (2.11)$$

onde $\bar{\sigma}_i$ são constantes e $H(t)$ é a função passo, ou seja,

$$H(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

$$H(t) = 1 \quad \text{para } t \geq 0$$

Considerando-se que dH/dt é a função Delta de Dirac (FINDLEY et al., 1976), tem-se pela equação (2.10) que

$$\epsilon_i(t) = D_{ij}(t) \bar{\sigma}_j \quad (2.12)$$

Assim, para o caso de componentes de tensão constantes, as funções de fluência têm um significado matemático semelhante ao dos termos da inversa da matriz de rigidez do material. A equação (2.12) é característica do que se denomina teste de fluência (FINDLEY et al., 1976).

Observando-se a aplicabilidade do Princípio

de Onsager, as seguintes relações de simetria das funções de relaxação e de fluência do material são satisfeitas (BIOT, 1958):

$$C_{ij}(t) = C_{ji}(t) \quad D_{ij}(t) = D_{ji}(t) \quad (2.13)$$

Como exposto na próxima seção, as funções de relaxação e de fluência de muitos materiais, especialmente os polímeros, dependem da ação de agentes ambientais, tais como temperatura e umidade, e portanto as medidas destes agentes devem figurar, juntamente com o tempo, como variáveis independentes daquelas funções.

2.5 - Influência da Temperatura e da Umidade

Estudos experimentais demonstram que muitos materiais, especialmente os polímeros, podem ter suas propriedades mecânicas significativamente afetadas por agentes atmosféricos, tais como a temperatura e a umidade (HALPIN, 1968). Em particular, o comportamento viscoelástico dos polímeros se acentua quando estes absorvem umidade ou são submetidos a aumentos de temperatura. Como consequência, os materiais compostos, com matriz polimérica, são também sensíveis às ações higrotérmicas.

Para a análise viscoelástica de materiais que apresentem as características acima mencionadas é indispensável o conhecimento das funções viscoelásticas

correspondentes à temperatura e ao teor de umidade dos mesmos. A rigor, isto exigiria, em determinadas situações, um elevado número de testes envolvendo diferentes combinações de temperatura e umidade, o que poderia até ser inviável sob o ponto de vista da praticidade. Porém, existe uma classe de materiais cujo comportamento dependente da temperatura permite um tratamento aproximado relativamente simples. Tais materiais foram chamados por SCHWARZL; STAVERMAN (1952) de termo-reologicamente simples.

Suponha-se um corpo viscoelástico linear submetido a uma temperatura T para a qual as funções de relaxação do mesmo sejam dadas por $\bar{C}_{ij}(t, T)$. Realizando-se uma mudança de variável e adotando-se uma temperatura de referência T_0 , é possível se escrever a seguinte relação:

$$L_{ij}(\log t) = \bar{C}_{ij}(t, T_0) \quad (2.14)$$

onde L_{ij} são funções que dependem do tempo.

Define-se como termo-reologicamente simples um material cujas funções de relaxação satisfazem a condição (MUKI; STERNBERG, 1961)

$$\bar{C}_{ij}(t, T) = L_{ij}(\log t + \psi_{ij}(T)) \quad (2.15)$$

com $\psi_{ij}(T_0) = 0$ e $\frac{d\psi_{ij}}{dT} > 0$. As funções $\psi_{ij}(T)$ são aqui designadas como funções de translação do tempo.

A equação (2.15) é a representação matemática do chamado Princípio da Superposição

Tempo-Temperatura. Observa-se que por este princípio as curvas das funções de relaxação do material em uma temperatura T podem ser superpostas às correspondentes curvas de relaxação do material em uma temperatura de referência T_0 através de simples translações horizontais (Figura 2.2).

Fazendo-se $\psi_{ij}(T) = -\log \chi_{ij}(T)$, a equação (2.15) pode ser escrita como

$$\bar{C}_{ij}(t, T) = L_{ij}(\log t - \log \chi_{ij}(T))$$

ou ainda,

$$\bar{C}_{ij}(t, T) = L_{ij}(\log(t/\chi_{ij}(T))) = L_{ij}(\log \xi_{ij}) \quad (2.16)$$

Daí, através das equações (2.14) e (2.16), obtém-se a relação

$$\xi_{ij} = t/\chi_{ij}(T) \quad (2.17)$$

onde os parâmetros ξ_{ij} são denominados tempos reduzidos e $\chi_{ij}(T)$ são os fatores de translação do tempo. Na literatura inglesa, estes fatores são denominados de "shift factors". Fisicamente, ξ_{kl} representa o tempo para o qual a função de relaxação \bar{C}_{kl} , correspondente à temperatura T_0 , tem o mesmo valor que \bar{C}_{kl} no tempo t e na temperatura T . Os valores de ξ_{ij} devem ser obtidos experimentalmente (CROSSMAN et al., 1978).

Quando a temperatura do corpo muda com o

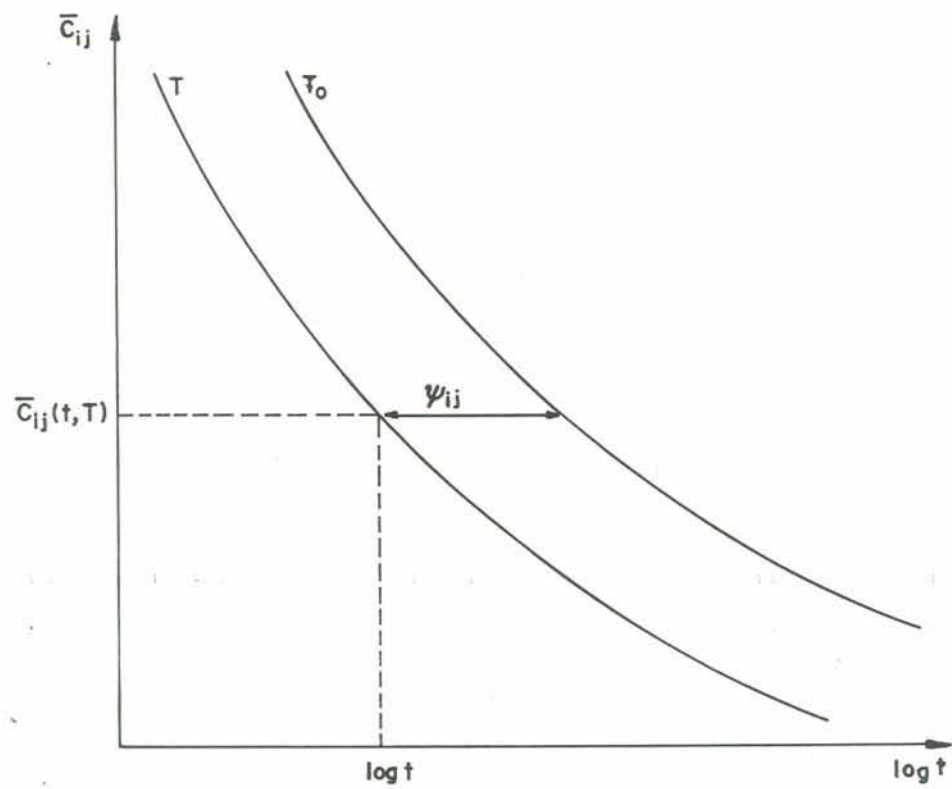


Figura 2.2 - Curvas de relaxação de um material termo-reologicamente simples

tempo, os tempos reduzidos podem ser obtidos pela expressão (MORLAND; LEE, 1960 e LIN; HWANG, 1989)

$$\xi_{ij} = \int_0^t 1/\chi_{ij}(T(\tau))d\tau \quad (2.18)$$

Os conceitos dados acima podem ser generalizados para incluir os efeitos de umidade (HALPIN, 1968 e FLAGGS; CROSSMAN, 1981). Os materiais que se comportam de acordo com esta generalização são denominados higrotermo-reologicamente simples. Os polímeros utilizados como matriz dos materiais compostos se enquadram razoavelmente bem dentro desta classificação (CROSSMAN et al, 1978 e HARPER; WEITSMAN, 1985).

Supondo-se um corpo submetido a distribuições uniformes de temperatura (T) e de umidade (H), um princípio análogo àquele apresentado acima pode ser estabelecido através da expressão:

$$\bar{C}_{ij}(t, T, H) = L_{ij}(\log t + \psi_{ij}(T, H)) \quad (2.19)$$

onde as funções de translação do tempo satisfazem às condições:

$$\psi_{ij}(T_0, H_0) = 0, \quad \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial T} > 0 \text{ e } \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial H} > 0.$$

T_0 e H_0 são os valores de referência da temperatura e da umidade, respectivamente. A equação (2.19) representa o Princípio da Superposição Tempo-Temperatura-Umidade.

Como no caso em que se considera somente efeitos de temperatura, define-se para materiais higrotermo-reologicamente simples fatores de translação do tempo $\chi_{ij}(T,H)$, com os quais são determinados os tempos reduzidos

$$\xi_{ij} = t/\chi_{ij}(T,H) \quad (2.20)$$

Os valores dos fatores de translação do tempo devem ser obtidos através de testes experimentais de fluência ou de relaxação, considerando-se diferentes combinações de temperatura e umidade (CROSSMAN et al., 1978). Como aproximação, o valor de $\chi_{ij}(T,H)$ pode ser avaliado pela expressão (HALPIN, 1968)

$$\chi_{ij}(T,H) = \frac{1}{\chi_{ij}^T(T) \chi_{ij}^H(H)} \quad (2.21)$$

onde $\chi_{ij}^T(T)$ indicam fatores de translação do tempo obtidos para uma temperatura T e um teor de umidade constante H_0 e $\chi_{ij}^H(H)$ são os fatores de translação de tempo correspondentes à uma umidade H e uma temperatura T_0 .

A literatura apresenta expressões empíricas para avaliação dos fatores de translação do tempo de polímeros. Uma bem difundida equação é a denominada WLF (Williams, Landel, Ferry), a qual fornece o valor do fator de translação do tempo de um polímero, $\chi(T)$, considerando efeitos de temperatura (WILLIAMS et al., 1955)

$$\log \chi(T) = \frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + T - T_0} \quad (2.22)$$

sendo C_1 e C_2 constantes do material determinadas através de testes experimentais e T e T_0 devem ser medidas em graus Kelvin. Para o caso em que são considerados efeitos de umidade em polímeros, a seguinte equação empírica é proposta para avaliação do fator de translação do tempo, tomando-se com referência o material seco (HALPIN, 1968)

$$\log \chi(H) = \frac{-C_3(1 - H/\rho)}{C_4 + 1 - H/\rho} \quad (2.23)$$

onde C_3 e C_4 são constantes do material obtidas experimentalmente e ρ é a densidade do polímero. Nesta última expressão H indica a concentração de umidade, ou seja, a relação entre o peso da água contida em um volume do material úmido e o peso do volume de material seco.

É importante ressaltar que as considerações relativas ao Princípio da Superposição Tempo-Temperatura- Umidade feitas nesta seção para as funções de relaxação podem, de forma análoga, ser estendidas às funções de fluência.

2.6 - Avaliação das Deformações Viscoelásticas de um Corpo Anisótropo pelo Método das Variáveis de Estado

As componentes de deformação de um corpo anisótropo viscoelástico linear podem ser escritas na forma

$$\epsilon_i(t) = \int_0^t \bar{D}_{ij}(T, H, t-\tau) \frac{\partial \sigma_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.24)$$

onde $\bar{D}_{ij}(T, H, t-\tau)$ são as funções de fluência do material para a temperatura T e a concentração de umidade H . As deformações higrotérmicas não estão incluídas em (2.24).

Adotando-se como referência uma temperatura T_0 e uma concentração de umidade H_0 e aplicando-se o Princípio da Superposição Tempo-Temperatura-Umidade, pode-se escrever

$$D_{ij}(T_0, H_0, \xi_{ij}) = \bar{D}_{ij}(T, H, t) \quad (2.25)$$

onde D_{ij} representam as funções de fluência para T_0 e H_0 e ξ_{ij} são os correspondentes tempos reduzidos, os quais são calculados em função dos fatores de translação do tempo através dos procedimentos expostos na seção anterior. Introduzindo-se (2.25) em (2.24), obtém-se a seguinte expressão:

$$\epsilon_i(t) = \int_0^t D_{ij}(T_0, H_0, \xi_{ij} - \xi'_{ij}) \frac{\partial \sigma_j}{\partial \tau} d\tau \quad (2.26)$$

sendo em geral

$$\xi'_{ij} = \int_0^\tau 1/\chi_{ij}(T, H) ds \quad (2.27)$$

Utilizando-se a regra de integração por partes, a equação (2.26) pode ser escrita como

$$e_i(t) = \bar{D}_{ij}(T, H, 0) \sigma_j(t) - \int_0^t \frac{\partial D_{ij}}{\partial \tau} (T_0, H_0, \xi_{ij} - \xi'_{ij}) \sigma_j(\tau) d\tau \quad (2.28)$$

O comportamento das funções de fluência ao longo do tempo permite que as mesmas sejam escritas aproximadamente na forma de uma série de Dirichlet-Prony, como segue

$$D_{ij}(T_0, H_0, \xi_{ij} - \xi'_{ij}) = D_{ij}^0 + \sum_{p=1}^N D_{ij}^p [1 - \exp(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^p})] \quad (2.29)$$

onde D_{ij}^0 , D_{ij}^p e θ_{ij}^p são constantes do material que devem ser determinadas experimentalmente. Os parâmetros θ_{ij}^p são conhecidos como os tempos de retardação do material. Na equação (2.29) a notação indicial de somatória não deve ser aplicada.

Derivando-se (2.29) com relação a τ e lembrando que ξ'_{ij} é função de τ , conforme a equação (2.27), tem-se

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial \tau} = - \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \sum_{p=1}^N \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \exp(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^p}) \quad (2.30)$$

Fazendo-se

$$F_{ij}^p = \frac{1}{\chi_{ij}(T, H)} \frac{D_{ij}^p}{\theta_{ij}^p} \exp(-\frac{\xi_{ij} - \xi'_{ij}}{\theta_{ij}^p}) \quad (2.31)$$

e substituindo-se esta expressão em (2.28), obtém-se

$$\varepsilon_i(t) = \bar{D}_{ij}(T, H, 0) \sigma_j(t) + \sum_{p=1}^N \int_0^t F_{ij}^p \sigma_j(\tau) d\tau \quad (2.32)$$

Esta última equação pode também ser escrita na seguinte forma

$$\varepsilon_i(t) = \bar{D}_{ij}(T, H, 0) \sigma_j(t) + \sum_{p=1}^N \sum_{s=1}^m \phi_{is}^p(t) \quad (2.33)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_{11}^p(t) &= \int_0^t F_{11}^p \sigma_1(\tau) d\tau \\ \phi_{12}^p(t) &= \int_0^t F_{12}^p \sigma_2(\tau) d\tau \\ &\dots\dots\dots \\ \phi_{kl}^p(t) &= \int_0^t F_{kl}^p \sigma_l(\tau) d\tau \\ &\dots\dots\dots \\ \phi_{\sigma\sigma}^p(t) &= \int_0^t F_{\sigma\sigma}^p \sigma_\sigma(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.34)$$

Pela equação (2.33), observa-se que cada componente de deformação total no tempo t pode ser considerada como a soma de uma componente de deformação elástica instantânea ε_i^e e outra viscoelástica ε_i^v , dadas respectivamente por

$$\varepsilon_i^e = \bar{D}_{ij}(T, H, 0) \sigma_j(t) \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_i^v = \sum_{p=1}^N \sum_{s=1}^m \phi_{is}^p(t) \quad (2.36)$$

Derivando-se cada uma das expressões (2.34) com relação ao limite superior das integrais t , chega-se com o seguinte sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem,

$$\frac{\partial \phi_{11}^P}{\partial t} + \frac{1}{\theta_{11}^P \chi_{11}^i(T,H)} \phi_{11}^P = \frac{D_{11}^P}{\theta_{11}^P \chi_{11}^i(T,H)} \sigma_1(t)$$

$$\frac{\partial \phi_{12}^P}{\partial t} + \frac{1}{\theta_{12}^P \chi_{12}^i(T,H)} \phi_{12}^P = \frac{D_{12}^P}{\theta_{12}^P \chi_{12}^i(T,H)} \sigma_2(t)$$

(2.37)

.....

$$\frac{\partial \phi_{\sigma\sigma}^P}{\partial t} + \frac{1}{\theta_{\sigma\sigma}^P \chi_{\sigma\sigma}^i(T,H)} \phi_{\sigma\sigma}^P = \frac{D_{\sigma\sigma}^P}{\theta_{\sigma\sigma}^P \chi_{\sigma\sigma}^i(T,H)} \sigma_{\sigma}(t)$$

Este sistema de equações diferenciais desacopladas pode ser resolvido numericamente através de procedimentos envolvendo diferenças finitas, como exposto posteriormente no capítulo que trata dos procedimentos numéricos do modelo computacional aqui apresentado.

Com os valores dos diversos ϕ_{ij}^P calculados as componentes das deformações viscoelásticas são avaliadas através das equações (2.36). Estes procedimentos para avaliação das deformações viscoelásticas podem ser chamados, como em (CREUS, 1986) para o caso de materiais isotrópicos, de método das variáveis de estado.

3. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS E FALHAS DE UMA LÂMINA

3.1 - Introdução

Este capítulo trata das relações constitutivas de uma lâmina ortótropa de material composto, reforçada por fibras em uma ou em duas direções ortogonais. As expressões para sólidos tridimensionais anisótropos apresentadas no capítulo anterior são estabelecidas em espaços reduzidos de tensão e de deformação, para o caso no qual as componentes de tensão e de deformação normais ao plano médio da lâmina não são consideradas. Relações destinadas a transformações de coordenadas para tensões, deformações e matriz constitutiva em tais espaços reduzidos são apresentadas.

Apresentam-se também neste capítulo, considerações relativas aos principais tipos de falhas que ocorrem nas lâminas de materiais compostos reforçados por fibras, assim como os critérios macroscópicos mais utilizados na detecção daqueles tipos de falhas. Um modelo de degradação de rigidez de uma lâmina, devido a existência de falhas, é apresentado.

3.2 - Relações Constitutivas de uma Lâmina

A Figura 3.1 mostra uma lâmina de material

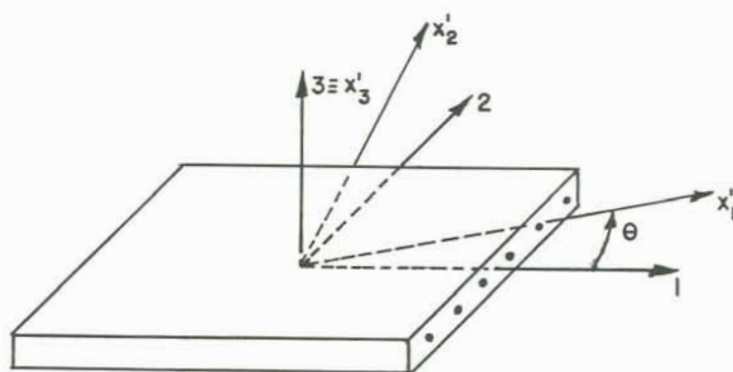


Figura 3.1 - Eixos principais e locais de uma lâmina

composto reforçada por fibras as quais são dispostas segundo a direção 1 e, possivelmente, também ao longo da direção 2. Sob o ponto de vista macroscópico, o material da lâmina pode ser considerado homogêneo e ortótropo, com os planos principais 1-2, 2-3 e 1-3.

Admite-se que o material, em geral, apresenta um comportamento viscoelástico linear e que a lâmina esteja submetida a cargas mecânicas e a campos de temperatura $T(x_1, x_2, x_3)$ e de umidade $H(x_1, x_2, x_3)$. Denotando-se por α_i e β_i ($i=1,2,3$), respectivamente, os coeficientes de dilatação térmica e de expansão por umidade, segundo as direções principais do material, as componentes de deformação segundo estas mesmas direções podem ser obtidas através da relação

$$\epsilon_i(x_1, x_2, x_3, t) = \int_0^t \bar{D}_{ij}(T, H, t-\tau) \frac{\partial \sigma_j(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{T^*}^T \alpha_i(T, H) dT + \int_{H^*}^H \beta_i(T, H) dH \quad (3.1)$$

onde T^* e H^* são, respectivamente, os valores da temperatura e da concentração de umidade para os quais o material não apresenta deformação. Observa-se que em (3.1) admite-se que os coeficientes de dilatação térmica e de expansão por umidade dependem de T e H .

Conforme se apresenta na seção 4.2, a formulação que aqui se utiliza é baseada na hipótese tradicional da teoria das cascas delgadas segundo a qual as deformações normais, transversais à superfície média da

estrutura, são desprezadas. Além disto, admite-se como simplificação que as tensões normais transversais àquela superfície são pequenas e, por isto, não são consideradas. Devido a estas hipóteses, os espaços das tensões e das deformações têm sua dimensão reduzida de 6 para 5. Os vetores de tensão e de deformação, portanto, são escritas como

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\} \quad (3.2)$$

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5\} \quad (3.3)$$

onde a ordenação dos termos é feita com base na seguinte relação entre índices: 1 = 11, 2 = 22, 3 = 12, 4 = 13 e 5 = 23. Na análise viscoelástica as componentes dos vetores dados em (3.2) e (3.3) são, em geral, funções do tempo.

Usando notação matricial, a relação constitutiva (3.1) pode ser escrita como

$$\{\epsilon\} = \int_0^t [\bar{D}] \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \right\} d\tau + \int_T^* \{\alpha\} dT + \int_H^* \{\beta\} dH \quad (3.4)$$

onde $[\bar{D}]$ reúne os termos $D_{ij}(T, H, t-\tau)$, $\left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \right\}$ contém as derivadas $\partial \sigma_j(\tau) / \partial \tau$ e

$$\{\alpha\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, 0, 0, 0\} \quad (3.5)$$

$$\{\beta\}^T = \{\beta_1, \beta_2, 0, 0, 0\} \quad (3.6)$$

A primeira integral que aparece em (3.1) ou (3.4) corresponde às contribuições elástica instantânea e viscoelástica (dependente do tempo) da deformação. A contribuição elástica em um tempo t é dada por

$$\varepsilon_i^e = \bar{D}_{ij}(T, H, 0) \sigma_j(t) \quad (3.7)$$

As componentes da deformação viscoelástica podem ser encontradas através do método das variáveis de estado, exposto no capítulo 2, pela expressão

$$\varepsilon_i^v = \sum_{p=1}^N \sum_{s=1}^5 \phi_{is}^p(t) \quad (3.8)$$

onde os ϕ_{is}^p são obtidos resolvendo-se o sistema (2.37) sem as equações relativas à componente σ_s , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{11}^p}{\partial t} + \frac{1}{\theta_{11}^p \chi_{11}^p(T, H)} \phi_{11}^p &= \frac{D_{11}^p}{\theta_{11}^p \chi_{11}^p(T, H)} \sigma_1(t) \\ \frac{\partial \phi_{12}^p}{\partial t} + \frac{1}{\theta_{12}^p \chi_{12}^p(T, H)} \phi_{12}^p &= \frac{D_{12}^p}{\theta_{12}^p \chi_{12}^p(T, H)} \sigma_2(t) \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial \phi_{55}^p}{\partial t} + \frac{1}{\theta_{55}^p \chi_{55}^p(T, H)} \phi_{55}^p &= \frac{D_{55}^p}{\theta_{55}^p \chi_{55}^p(T, H)} \sigma_5(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

A segunda e a terceira integrais que

aparecem em (3.1) representam, respectivamente, as componentes das deformações devidas à variação da temperatura (ϵ_i^T) e da concentração de umidade (ϵ_i^H) da lâmina. A primeira é a chamada componente da deformação térmica e, a segunda, da deformação higroscópica. Nas situações em que os valores de α_i e β_i são considerados independentes de T e de H, as componentes das deformações térmica e higroscópica podem ser obtidas pelas relações

$$\epsilon_i^T = \alpha_i \Delta T \quad (3.10)$$

$$\epsilon_i^H = \beta_i \Delta H \quad (3.11)$$

onde ΔT e ΔH indicam, respectivamente, as variações de temperatura e de concentração de umidade.

3.2.1. Matriz Constitutiva Elástica de uma Lâmina

A matriz constitutiva elástica [${}_0\bar{D}$], que reúne os termos $\bar{D}_{i,j}(T,H,0)$, pode ser colocada na forma (2.8), em função de constantes técnicas que, no presente caso são admitidas como geralmente dependentes dos valores da temperatura e da concentração de umidade. Nos espaços reduzidos de tensão e de deformação, a matriz constitutiva elástica [${}_0\bar{D}$], correspondente às direções principais do material, assume a forma

$$[{}^0\bar{D}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ \text{(Simétrico)} & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

onde os valores das constantes técnicas, para materiais compostos usuais, em diferentes níveis de temperatura e de umidade, podem ser encontrados na literatura (HAHN; PAGANO, 1975, SHEN; SPRINGER, 1977 e TSAI; HAHN, 1980).

A matriz de rigidez elástica do material da lâmina $[{}^0\bar{C}] = [{}^0\bar{D}]^{-1}$, correspondente à temperatura T e à concentração de umidade H , tem o arranjo

$$[{}^0\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{C}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & \bar{C}_{33} & 0 & 0 \\ \text{(Simétrico)} & & & \bar{C}_{44} & 0 \\ & & & & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

com os termos dados em função das constantes técnicas pelas expressões (LIAO; REDDY, 1987):

$$\bar{C}_{11} = E_{11} / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

$$\bar{C}_{12} = \nu_{12} E_{22} / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

(3.14)

$$\bar{C}_{22} = E_{22} / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$$

$$\bar{C}_{33} = G_{12} \quad \bar{C}_{44} = K G_{13} \quad \bar{C}_{55} = K G_{23}$$

sendo K um coeficiente introduzido para correção do erro que se comete ao se admitir que as deformações de cisalhamento transversais tem distribuição uniforme. No presente trabalho adota-se $K = 5/6$ (LIAO; REDDY, 1987).

3.2.2. Funções de Fluência e de Relaxação de uma Lâmina

Tendo em vista o reduzido comportamento viscoelástico exibido por certas fibras, tais como as fibras de grafite e de boro, é comum se adotar, na análise viscoelástica de estruturas constituídas de materiais compostos laminados, com matriz polimérica e reforçados com aquelas fibras, a hipótese de que na direção destas a lâmina comporta-se como elástica e que nas direções transversais às mesmas e em cisalhamento ela apresenta uma resposta viscoelástica (HASHIN; 1966 e WILSON; VINSON, 1984). Outros materiais compostos, tais como aqueles que utilizam as fibras denominadas na literatura inglesa por "Kevlar aramid fibers", apresentam comportamento dependente do tempo em todas as direções (WALRATH, 1991).

A caracterização da resposta viscoelástica dos materiais compostos laminados é geralmente realizada através de testes de fluência ou de relaxação, executados

sobre corpos de provas constituídos por lâminas dispostas de modo que as fibras tenham uma só direção (CROSSMAN et al., 1977). No caso de lâminas reforçadas por fibras em duas direções ortogonais (tecidos), os corpos de prova são normalmente constituídos por lâminas sobrepostas de modo que as direções das mesmas com igual volume de fibras sejam coincidentes. As disposições das lâminas, acima descritas, tem como explicação o fato de que os resultados obtidos nos testes sobre os corpos de prova devem ser representativos de uma única lâmina. Tais testes compreendem tração e compressão simples paralelas às fibras e na direção transversal às mesmas e cisalhamento simples nos planos principais do corpo de prova. Como resultados são estabelecidas as funções de fluência ou de relaxação correspondentes às direções principais da lâmina.

As funções de fluência $\bar{D}_{ij}(T,H,t)$ e de relaxação $\bar{C}_{ij}(T,H,t)$ podem em geral ser expressas na forma de séries exponenciais (FLAGGS; CROSSMAN, 1981), como segue

$$\bar{D}_{ij}(T,H,t) = \bar{D}_{ij}^0 + \sum_{p=1}^N \bar{D}_{ij}^p [1 - \exp(-\frac{t}{\bar{\theta}_{ij}^p})] \quad (3.15)$$

$$\bar{C}_{ij}(T,H,t) = \bar{C}_{ij}^0 + \sum_{p=1}^N \bar{C}_{ij}^p [1 + \exp(-\frac{t}{\bar{\lambda}_{ij}^p})] \quad (3.16)$$

onde os parâmetros \bar{D}_{ij}^0 , \bar{D}_{ij}^p , \bar{C}_{ij}^0 , \bar{C}_{ij}^p , $\bar{\theta}_{ij}^p$ e $\bar{\lambda}_{ij}^p$ são obtidos experimentalmente para o material da lâmina a uma temperatura T e uma concentração de umidade H . Os

parâmetros $\bar{\lambda}_{ij}^p$ são denominados tempos de relaxação do material, enquanto que os $\bar{\theta}_{ij}^p$, como já foi mencionado na seção 2.6, são os tempos de retardação. O número de termos usados na expansão das séries acima apresentadas depende da precisão almejada na análise.

Encontram-se na literatura trabalhos que objetivam a avaliação numérica das funções viscoelásticas dos materiais compostos utilizando os conceitos da micromecânica (HASHIN, 1966 e WILSON; VINSON, 1984). Nestes casos, supõem-se conhecidas as funções viscoelásticas dos materiais constituintes (matriz e fibras) e a partir delas procuram-se obter aquelas funções para a lâmina. Tendo em vista a complexidade do comportamento dos materiais compostos e as dificuldades de modelagem das condições físicas reais nas regiões das interfaces fibra-matriz, os resultados obtidos com o uso da micromecânica nem sempre são satisfatórios. Para maiores detalhes sobre o uso da micromecânica na avaliação das relações constitutivas de materiais compostos, recomenda-se a referência (CHRISTENSEN, 1979).

3.3. Transformações de Coordenadas

Na seção anterior foram apresentadas as relações constitutivas de uma lâmina referidas às direções principais do material. No entanto, para a realização da análise através da formulação aqui apresentada é importante a obtenção daquelas relações referidas a eixos locais x'_1 ,

x'_2 e x'_3 , mostrados na Figura 3.1. Os eixos local x'_3 e principal 3 são coincidentes. O eixo local x'_1 forma um ângulo θ com a direção principal 1.

O vetor deformação referido aos eixos locais x'_1 , x'_2 e x'_3 , denotado por $\{\epsilon'\} = \{\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3, \epsilon'_4, \epsilon'_5\}$, está relacionado com o vetor deformação $\{\epsilon\}$ relativo às direções principais 1, 2 e 3, dado em (3.3), através da expressão

$$\{\epsilon'\} = [T_\epsilon] \{\epsilon\} \quad (3.17)$$

onde a matriz transformação $[T_\epsilon]$ é dada por

$$[T_\epsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Analogamente, o vetor tensão referido aos eixos locais x'_1 , x'_2 e x'_3 , $\{\sigma'\} = \{\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_4, \sigma'_5\}$, pode ser encontrado em função do vetor tensão relativo aos eixos principais, dado em (3.2), pela relação,

$$\{\sigma'\} = [T_\sigma] \{\sigma\} \quad (3.19)$$

onde a matriz transformação $[T_\sigma]$ é igual a $[T_\epsilon]^{-T}$ e se escreva na forma

$$[T_{\sigma}] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ -\sin 2\theta/2 & \sin 2\theta/2 & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

A relação constitutiva de uma lâmina, referida ao sistema de eixos locais acima mencionado, pode ser escrita como

$$\{\epsilon'\} = \int_0^l [\bar{D}'] \left\{ \frac{\partial \sigma'}{\partial \tau} \right\} d\tau + \int_T^T \{\alpha'\} dT + \int_H^H \{\beta'\} dH \quad (3.21)$$

Introduzindo-se (3.14) e (3.16) em (3.4), e considerando-se (3.18), chega-se com

$$[\bar{D}'] = [T_{\sigma}] [\bar{D}] [T_{\sigma}]^T \quad (3.22)$$

$$\{\alpha'\} = [T_{\sigma}] \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \cos^2\theta + \alpha_2 \sin^2\theta \\ \alpha_1 \sin^2\theta + \alpha_2 \cos^2\theta \\ -\alpha_1 \sin 2\theta + \alpha_2 \sin 2\theta \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\{\beta'\} = [T_{\sigma}] \{\beta\} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \cos^2\theta + \beta_2 \sin^2\theta \\ \beta_1 \sin^2\theta + \beta_2 \cos^2\theta \\ -\beta_1 \sin 2\theta + \beta_2 \sin 2\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Particularmente, a matriz constitutiva elástica referida aos eixos locais pode ser obtida através da expressão

$$[{}_{\circ}\bar{D}'] = [T_{\epsilon}] [{}_{\circ}\bar{D}] [T_{\epsilon}]^T \quad (3.25)$$

Considerando-se que a matriz de rigidez elástica do material, relativa aos eixos locais, pode ser definida como $[{}_{\circ}\bar{C}'] = [{}_{\circ}\bar{D}']^{-1}$ e tendo em vista a relação entre $[T_{\epsilon}]$ e $[T_{\sigma}]$, chega-se com

$$[{}_{\circ}\bar{C}'] = [T_{\sigma}] [{}_{\circ}\bar{C}] [T_{\sigma}]^T \quad (3.26)$$

3.4. Falhas de uma Lâmina de Material Composto

Os principais tipos de falha que ocorrem em estruturas constituídas por lâminas de materiais compostos reforçados por fibras e com matriz polimérica são: 1) quebra ou flambagem de fibras; 2) fissuração da matriz; 3) perda de aderência entre fibras e matriz; e 4) delaminação, ou seja, separação de lâminas. Os três primeiros tipos de falhas estão relacionados com as características dos materiais constituintes das lâminas, enquanto que o último tipo depende do esquema de laminação, ou seja, da sequência e orientação das lâminas na estrutura.

O estudo de falhas em materiais compostos pode ser conduzido em escalas microscópica e macroscópica. Do ponto de vista microscópico, as falhas são associadas à

nos materiais compostos, a análise a nível microscópico torna-se bastante complexa (REDDY; PANDEY, 1987) e difícil de ser implementada em uma formulação que vise uma descrição prática do comportamento de estruturas feitas com aqueles materiais.

A nível macroscópico, a análise de falhas geralmente é conduzida utilizando o conceito de critérios de falha, os quais tem caráter fenomenológico e, em uma interpretação geométrica, correspondem à hipersuperfícies nos espaços de tensões ou de deformações. Tais critérios, em geral, são estabelecidos para uma lâmina e se expressam em função das componentes de tensão ou de deformação, referidas às direções principais do material. Matematicamente, os critérios macroscópicos de falha, para uma lâmina, são definidos por uma ou mais funções do tipo

$$\Psi (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5) = 1 \quad (3.27)$$

ou

$$\Phi (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5) = 1 \quad (3.28)$$

Assim, quando o estado de tensão ou de deformação em, um ponto de uma lâmina satisfaz ao critério de falha, admite-se então que, naquele ponto, a lâmina deve apresentar uma falha.

Uma forma conveniente de representar matematicamente uma critério de falha é através de expressões polinomiais, as quais tem a forma geral (WU, 1974)

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = 1 \quad (3.29)$$

ou ainda, em termos de deformação,

$$G_i \varepsilon_i + G_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j + G_{ijk} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k + \dots = 1 \quad (3.30)$$

Os coeficientes destes polinômios dependem das resistências da lâmina e devem ser obtidos por meio de testes experimentais.

Existem critérios que tentam definir a ocorrência de falha através de uma única equação, sem considerar o modo da falha, ou seja, se ela corresponde à quebra, ou flambagem, de fibras ou à fissuração da matriz. Tais critérios se prestam para a análise da estrutura até o surgimento da primeira falha, o que na literatura inglesa se denomina "First Ply Failure (FPF) analysis". Para dar continuidade à análise após ter ocorrido uma ou mais falhas na estrutura é essencial o conhecimento da natureza das mesmas para que seja procedida a apropriada modificação nas constantes elásticas do material nos pontos onde as falhas ocorreram. Para atender esta necessidade, podem ser encontrados na literatura critérios que apresentam uma equação para cada modo de falha (HASHIN, 1980 e LEE, 1980) e que, portanto, são indicados para análise de estruturas em estágios posteriores ao aparecimento da primeira falha, o que se denomina de análise progressiva de falhas. Este tipo de análise pode culminar com o que se chama na

literatura inglesa de "Last Ply Failure (LPF)", ou seja, o estado limite no qual a estrutura se encontra em um estágio de degradação tão avançado que torna-se incapaz de suportar qualquer carga adicional.

A seguir são apresentados os mais usados critérios de falha de uma lâmina, considerando-se que o material que constitui a mesma seja transversalmente isótropo e com o plano de isotropia coincidente com o plano 2-3. Esta hipótese implica em se considerar iguais as resistências ao cisalhamento nos planos 1-2 e 1-3.

3.4.1. Critérios de Falhas de uma Lâmina

a) Critério da Máxima Tensão

O critério da máxima tensão é o que apresenta maior caráter intuitivo, pois ele estabelece que uma falha ocorre quando pelo menos uma das componentes de tensão atuantes segundo às direções principais da lâmina ultrapassa o seu correspondente valor limite determinado experimentalmente. Por este critério, uma lâmina apresenta falha nas seguintes condições:

Em tração

$$\sigma_1 / X_t = 1 \qquad \sigma_2 / Y_t = 1 \qquad (3.31)$$

Em compressão

$$(\sigma_1 / X_c)^2 = 1 \qquad (\sigma_2 / Y_c)^2 = 1 \qquad (3.32)$$

Em cisalhamento

$$(\sigma_3/S_A)^2 = 1 \quad (\sigma_4/S_A)^2 = 1 \quad (\sigma_5/S_T)^2 = 1 \quad (3.33)$$

onde as letras X e Y representam as resistências da lâmina nas direções 1 e 2, respectivamente, e os índices t e c indicam tração e compressão. Além disto, S_A e S_T simbolizam as respectivas resistências ao cisalhamento axial e transversal, nos planos principais 1-2 e 2-3. Observa-se que o presente critério não considera o efeito da interação entre tensões nos modos de falha.

b) Critério da Máxima Deformação

As condições impostas pelo critério da máxima deformação são semelhantes àsquelas do critério da máxima tensão, trocando-se as variáveis básicas tensões por deformações. Assim, é admitida a ocorrência de falha na lâmina quando uma das seguintes condições, no mínimo, for satisfeita:

Alongamento

$$\varepsilon_1/X_{\varepsilon t} = 1 \quad \varepsilon_2/Y_{\varepsilon t} = 1 \quad (3.34)$$

Encurtamento

$$(\varepsilon_1/X_{\varepsilon c})^2 = 1 \quad (\varepsilon_2/Y_{\varepsilon c})^2 = 1 \quad (3.35)$$

Distorção

$$(\varepsilon_3/S_{\varepsilon A})^2 = 1 \quad (\varepsilon_4/S_{\varepsilon A})^2 = 1 \quad (\varepsilon_5/S_{\varepsilon T})^2 = 1 \quad (3.36)$$

Os símbolos X_ε e Y_ε indicam os limites de deformações normais de alongamento (índice t) ou de encurtamento (índice c) ao longo das direções principais 1 e 2 da lâmina, respectivamente, enquanto que $S_{\varepsilon A}$ e $S_{\varepsilon T}$ representam os respectivos limites das deformações de cisalhamento axial e transversal, nos planos 1-2 e 2-3. Tal critério não considera o efeito da interação das deformações sobre os modos de falha.

c) Critério de Hill

Este critério é do tipo polinomial quadrático e consiste em uma adaptação para a análise de falhas do critério de escoamento para materiais anisótropos proposto por HILL (1950), o qual constitui uma extensão do conhecido critério de escoamento de von Mises. O critério de falha de Hill tem a seguinte expressão (TSAI, 1965):

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_3}{S_A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_4}{S_A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_5}{S_T}\right)^2 = 1 \quad (3.37)$$

onde os valores de X e Y devem ser tomados como X_t e Y_t quando σ_1 e σ_2 são tensões de tração e como X_c e Y_c se estas tensões são de compressão.

d) Critério de Hoffman

Basicamente, o critério de Hoffman consiste em uma extensão do critério de Hill, obtida pela inclusão neste último de termos lineares em tensões. A expressão do critério de Hoffman é polinomial quadrática, com a seguinte forma (HOFFMAN, 1967)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}\right)\sigma_2 - \frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} - \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} \\ & + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} + \frac{1}{S_A^2} (\sigma_3^2 + \sigma_4^2) + \left(\frac{\sigma_5}{S_T}\right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde nesta expressão as resistências à compressão X_c e Y_c devem ser tomados com valores negativos.

e) Critério de Tsai-Wu

O critério de falha proposto por (TSAI; WU, 1971) tem uma forma polinomial quadrática e pode ser expresso em termos de tensão ou de deformação. Em função das componentes de tensão o critério de Tsai-Wu é dado pela relação

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (3.39)$$

onde os parâmetros de resistência F_i e F_{ij} são calculados através das equações

$$F_1 = 1/X_t - 1/X_c \quad F_2 = 1/Y_t - 1/Y_c$$

$$F_{11} = 1/(X_T X_C) \quad F_{22} = 1/(Y_T Y_C) \quad (3.40)$$

$$F_{33} = F_{44} = 1/(S_A)^2 \quad F_{55} = 1/(S_T)^2$$

$$F_{12} = F_{12}^* (F_{11} F_{22})^{1/2}$$

:

Observa-se pela invariância das resistências ao cisalhamento com relação aos sinais das correspondentes tensões cisalhantes que os coeficientes dos termos lineares nestas últimas tensões devem ser nulos. Explicitamente, para o caso de uma lâmina transversalmente isótropa, o critério de Tsai-Wu é dado por

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{33} \sigma_3^2 + F_{44} \sigma_4^2 + F_{55} \sigma_5^2 = 1 \quad (3.41)$$

O fator de interação F_{12}^* deve ser tratado como uma constante empírica, a qual deve ser determinada através de resultados obtidos em testes biaxiais de tensão. Tendo em vista as dificuldades encontradas na execução destes testes e, até mesmo, as incertezas de que os valores obtidos em diferentes testes biaxiais tração-tração, tração-compressão e compressão-compressão possam ser aproximados, recomenda-se (MIDDLETON, 1990) que na ausência dos mesmos seja adotado o valor $F_{12}^* = -1/2$. Alguns autores, inclusive, chegam a propor que o termo correspondente ao

parâmetro F_{12} seja eliminado da expressão polinomial do critério. Porém, como pode ser visto em (LABOSSIERE; NEALE, 1987), para materiais compostos usuais o valor daquele parâmetro pode ter grande influência no quadrante compressão-compressão do espaço das tensões.

Uma forma alternativa de escrever o critério de Tsai-Wu consiste em se tomar como variáveis básicas as componentes de deformação segundo às direções principais da lâmina. Neste caso pode-se escrever o critério como

$$G_i \varepsilon_i + G_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j = 1 \quad (3.42)$$

sendo, para o caso de uma lâmina elástica linear,

$$G_1 = F_1 \bar{C}_{11} + F_2 \bar{C}_{12}$$

$$G_2 = F_1 \bar{C}_{12} + F_2 \bar{C}_{22}$$

$$G_{11} = F_{11} \bar{C}_{11}^2 + 2F_{12} \bar{C}_{11} \bar{C}_{12} + F_{22} \bar{C}_{12}^2$$

$$G_{22} = F_{11} \bar{C}_{12}^2 + 2F_{12} \bar{C}_{12} \bar{C}_{22} + F_{22} \bar{C}_{22}^2$$

(3.43)

$$G_{12} = F_{11} \bar{C}_{11} \bar{C}_{12} + F_{12} (\bar{C}_{11} \bar{C}_{22} + \bar{C}_{12}^2) + F_{22} \bar{C}_{12} \bar{C}_{22}$$

$$G_{99} = F_{99} \bar{C}_{99}^2$$

onde \bar{C}_{ij} são os coeficientes de rigidez da lâmina.

f) Critério de Hashin

Admitindo-se uma lâmina com fibras unidirecionais, dispostas segundo a direção principal 1, e considerando-se que o plano 2-3 pode ser tratado como um plano de isotropia, tem-se que um critério de falha não deve mudar quando os eixos 2 e 3 são rotacionados em torno do eixo 1. Baseando-se neste fato, (HASHIN,1980) afirma que um tal critério de falha deve ser função dos invariantes de tensão com relação às rotações dos eixos 2 e 3 em torno do eixo 1 e, com isto, admite que um critério polinomial quadrático deve apresentar a seguinte forma geral:

$$a_1 I_1 + b_1 I_1^2 + a_2 I_2 + b_2 I_2^2 + c_{12} I_1 I_2 + a_3 I_3 + a_4 I_4 = 1 \quad (3.44)$$

onde a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , b_1 , b_2 e c_{12} são constantes do material, dependentes do modo de falha, e os invariantes de tensão I_i se expressam por

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} & I_2 &= \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_3 &= \sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} \text{ ou } \frac{1}{4}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \sigma_{23}^2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$I_4 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2$$

Nestas expressões a notação convencional que utiliza duplo índice para escrever as componentes de tensão é empregada. Vale também observar que em (3.44) e (3.45) os eixos 2 e 3 podem girar em torno do eixo 1. Assim, neste caso a componente de tensão σ_{33} pode não ser normal ao plano médio

da lâmina. Supondo que uma falha é produzida apenas pelas componentes de tensão atuantes sobre o plano da mesma, (HASHIN, 1980) estabeleceu, com base em (3.44) e (3.45), juntamente com algumas simplificações, um conjunto de expressões polinomiais que tem como objetivo descrever a ocorrência de diferentes modos de falha. Assim, o referido autor propõe o seguinte critério de falha:

Modo de tração nas fibras $\sigma_{11} > 0$

$$(\sigma_{11}/X_t)^2 + (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)/S_A^2 = 1 \quad (3.46)$$

Modo de compressão nas fibras $\sigma_{11} < 0$

$$(\sigma_{11}/X_c)^2 = 1 \quad (3.47)$$

Modo de tração na matriz $\sigma_{22} + \sigma_{33} > 0$

$$\frac{1}{X_t^2} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_T^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S_A^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (3.48)$$

Modo de compressão na matriz $\sigma_{22} + \sigma_{33} < 0$

$$\frac{1}{X_c} \left[\frac{X_c^2}{4S_T^2} - 1 \right] (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{1}{4S_T^2} (\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + \frac{1}{S_T^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S_A^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (3.49)$$

g) Critério de Lee

Através de considerações de caráter puramente empírico, LEE (1980) propõe o seguinte critério de falha:

Modo de tração nas fibras

$$\frac{\sigma_1}{X_t} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{S_A^2} (\sigma_3^2 + \sigma_4^2) = 1 \quad (3.50)$$

Modo de compressão nas fibras

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_c}\right)^2 = 1 \quad (3.51)$$

Modo de tração na matriz

$$\frac{\sigma_2}{Y_t} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{S_T^2} (\sigma_3^2 + \sigma_5^2) = 1 \quad (3.52)$$

Modo de compressão na matriz

$$\left(\frac{\sigma_2}{Y_c}\right)^2 = 1 \quad (3.53)$$

Como pode ser observado, no critério de Lee também é admitido que uma falha é produzida apenas pelas tensões atuantes no plano da mesma. Além disto, no referido critério as contribuições das tensões normais e de cisalhamento são consideradas independentemente.

No presente modelo numérico foram implementados os critérios de Tsai-Wu, de Hashin e da Máxima Deformação. O primeiro, por não considerar os diferentes modos de falha, não é utilizado na análise progressiva de falhas, ficando sua aplicação restrita aos casos onde se pretende conduzir a análise até o surgimento da primeira falha.

3.4.2. Modelo de Degradação de uma Lâmina

Para realização de uma análise progressiva de falhas é necessário o estabelecimento de um modelo de degradação da rigidez do material na presença de falhas. Devido à complexidade e à variedade dos mecanismos de falhas dos materiais compostos, a formulação de um modelo de degradação de rigidez constitui uma tarefa bastante complexa. Existem vários estudos que objetivam descrever a iniciação e a evolução das falhas em materiais compostos (TALREJA, 1989), porém, um modelo geral que traduza satisfatoriamente o problema ainda não foi formulado.

Na formulação apresentada neste trabalho emprega-se um modelo macroscópico de degradação da rigidez do material bastante simples, o qual consiste em se anular ou se reduzir convenientemente os termos da matriz de rigidez que estão relacionados com o modo da falha ocorrida. De acordo com este modelo, após a ocorrência de uma falha em um ponto de uma lâmina, a relação constitutiva correspondente às direções principais do material, no mesmo

ponto, assume as seguintes formas:

a) Modo de falha nas fibras

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

b) Modo de falha na matriz

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_\alpha \bar{C}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

O coeficiente β_α tenta levar em conta a redução de rigidez na direção das fibras quando a matriz apresenta falha. β_α depende da composição da lâmina e deve ser fornecido como um parâmetro adicional do material (DORNINGER; RAMMERSTORFER, 1990). Na falta de conhecimento deste parâmetro parece razoável supor $\beta_\alpha = 1$, como mais frequentemente encontrado na literatura (TOLSON; ZABARAS, 1991).

4. FORMULAÇÃO NÃO LINEAR GEOMÉTRICA LAGRANGEANA TOTAL

4.1 - Introdução

Apresentam-se neste capítulo os conceitos e os procedimentos matemáticos aqui utilizados para a análise não linear de cascas laminadas. As equações fundamentais de equilíbrio da mecânica do contínuo e para um elemento finito de casca constituído de várias lâminas são formuladas, tendo como base uma descrição cinemática do tipo Lagrangeana Total. Na realidade, os procedimentos que levam a tais equações consistem em uma generalização daqueles expostos em (BATHE, 1982) pela inclusão de deformações higrotérmicas e viscoelásticas. Apresentam-se também neste capítulo os métodos numéricos utilizados para a solução das equações não lineares de equilíbrio e os procedimentos usados para a avaliação das deformações viscoelásticas e para a definição dos intervalos de tempo no caso de análise viscoelástica.

4.2 - Equação Incremental de Equilíbrio da Mecânica do Contínuo

4.2.1 - Considerações Iniciais

A Figura 4.1 mostra um corpo sujeito a

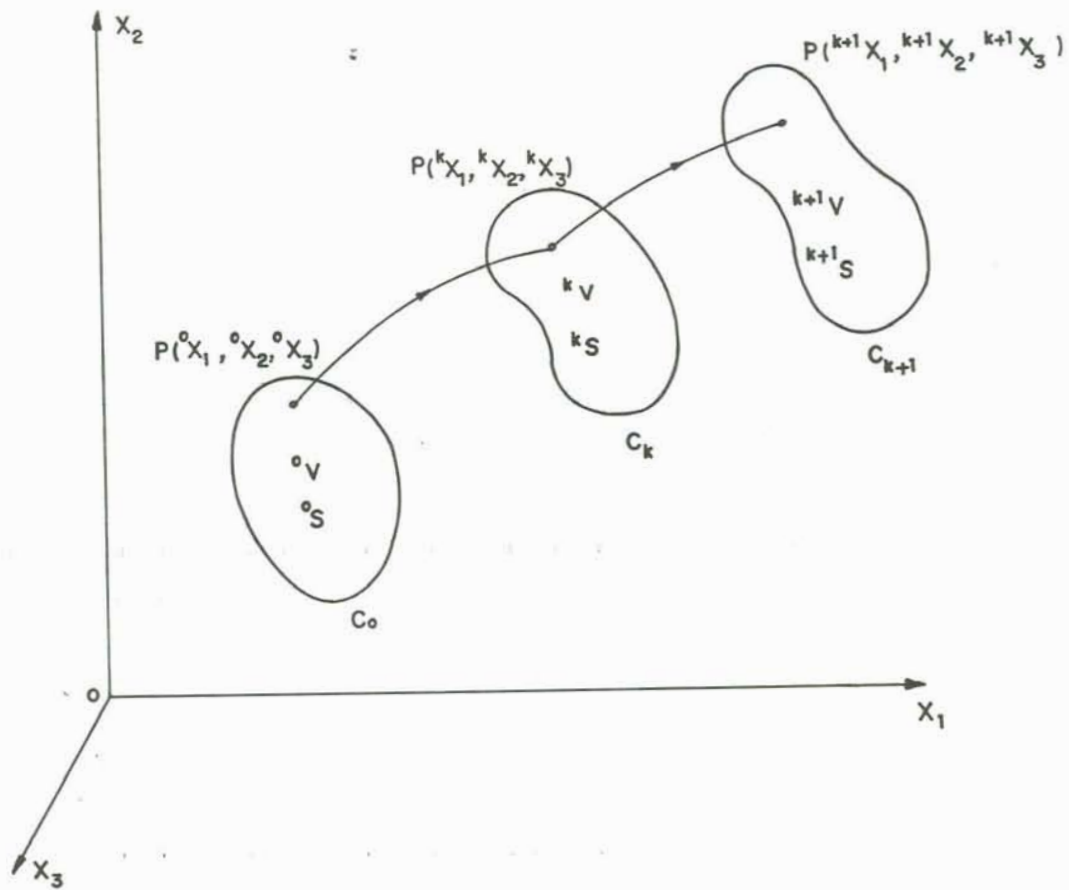


Figura 4.1 - Configurações de uma corpo no espaço $x_1 x_2 x_3$

deslocamentos e rotações finitas em um espaço definido por um sistema fixo de coordenadas cartesianas x_1 , x_2 e x_3 . Na referida figura o corpo é apresentado em sua configuração inicial C_0 e em duas configurações adjacentes indicadas genericamente por C_k e C_{k+1} . O problema básico que se pretende resolver consiste na determinação da configuração deformada do corpo em diferentes estágios de carga.

A solução do problema acima mencionado é usualmente conduzida com base em procedimentos incrementais que ao tratar da configuração em um dado estágio de carga admite como conhecidas todas as configurações correspondentes aos estágios anteriores. No modelo numérico que aqui se apresenta é utilizada uma formulação incremental baseada em uma descrição cinemática na qual todas as variáveis relevantes são referidas à configuração inicial do corpo. Tal descrição é denominada de Lagrangeana Total (BATHE, 1982).

4.2.2 - Medidas de Tensão e de Deformação

Para a descrição do comportamento de um corpo sujeito a deslocamentos e rotações finitos é conveniente o uso de medidas de tensão e de deformação que permitam o estabelecimento da equação de equilíbrio com base em uma configuração que seja, a priori, conhecida. A utilização do tradicional tensor tensão de Cauchy implica em se tomar como referência a configuração atual deformada do corpo. Como esta configuração é em geral desconhecida, o

tensor tensão de Cauchy não representa, para o caso acima citado, uma conveniente medida de tensão no estabelecimento da equação de equilíbrio.

Uma apropriada medida de tensão para formulações incrementais destinadas à descrição do comportamento geometricamente não linear de estruturas consiste no Segundo Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff (MALVERN, 1969 e BATHE, 1982). Tal tensor tem como principais características a simetria e a invariância em relação à rotação de corpo rígido. Matematicamente, o Segundo Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff, na configuração C_k e referido à configuração inicial C_0 (Figura 4.1), é dado por (BATHE, 1982)

$${}^k S_{ij} = \frac{{}^0 \rho}{{}^k \rho} {}^0 x_{i,m} {}^k \tau_{mn} {}^0 x_{j,n} \quad (4.1)$$

onde ${}^0 \rho$ e ${}^k \rho$ indicam, respectivamente, as densidades do corpo nas configurações C_0 e C_k , ${}^k \tau_{mn}$ são as componentes do tensor tensão de Cauchy e

$${}^0 x_{p,s} = \frac{\partial {}^0 x_p}{\partial {}^k x_s} \quad (4.2)$$

sendo ${}^0 x_p$ e ${}^k x_s$ ($p, s=1,2,3$) as respectivas coordenadas cartesianas dos pontos do corpo nas configurações C_0 e C_k . Em (4.1) a notação indicial de somatória é utilizada.

Pode ser demonstrado que o Segundo Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff é energeticamente conjugado ao

Tensor Deformação de Green-Lagrange (BATHE, 1982), o qual em notação indicial de somatória se expressa por

$${}^k_{\circ} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^k_{\circ} u_{i,j} + {}^k_{\circ} u_{j,i} + {}^k_{\circ} u_{m,i} {}^k_{\circ} u_{m,j}) \quad (4.3)$$

onde ${}^k u_i$ ($i=1,2,3$) são as componentes dos deslocamentos dos pontos do corpo na configuração C_k e as derivadas ${}^k_{\circ} u_{i,j}$ têm uma definição análoga a (4.2). Considerando-se que o Tensor Deformação de Green-Lagrange e o Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff são energeticamente conjugados, tem-se que

$${}^k_{\circ} S_{ij} \delta {}^k_{\circ} \varepsilon_{ij} = {}^k_{\circ} \tau_{ij} \delta e_{ij} \quad (4.4)$$

onde δ indica variação e ${}^k e_{ij}$ são as componentes do tensor deformação infinitesimal na configuração C_k .

4.2.3 - Equação Incremental de Equilíbrio Linearizada

Com base na equação (4.4), chega-se à conclusão que, considerando-se a configuração C_{k+1} , o Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser expresso na forma

$$\int_{{}^{\circ}V} {}^{k+1}_{\circ} S_{ij} \delta {}^{k+1}_{\circ} \varepsilon_{ij} d{}^{\circ}V = {}^{k+1}R \quad (4.5)$$

sendo ${}^{\circ}V$ o volume do corpo na configuração C_0 e ${}^{k+1}R$ o trabalho virtual das forças externas, o qual pode ser calculado por

$${}^{k+1}R = \int_{{}_0V} {}^{k+1}q_i^B \delta u_i d^0V + \int_{{}_0S} {}^{k+1}q_i^S \delta u_i d^0S \quad (4.6)$$

onde ${}^{k+1}q_i^B$ e ${}^{k+1}q_i^S$ representam as cargas de volume e de superfície, respectivamente, atuantes sobre o corpo na configuração C_{k+1} e medidas em relação C_0 . 0S indica a área do corpo em C_0 sobre a qual atuam as cargas de superfície.

Denotando-se por ${}_0S_{ij}$ e ${}_0\varepsilon_{ij}$ os incrementos nas componentes de tensões e de deformações, respectivamente, que ocorrem quando o corpo passa de C_k para C_{k+1} , pode-se escrever as seguintes decomposições:

$${}^{k+1}{}_0S_{ij} = {}^k{}_0S_{ij} + {}^i{}_0S_{ij} \quad (4.7)$$

$${}^{k+1}{}_0\varepsilon_{ij} = {}^k{}_0\varepsilon_{ij} + {}^i{}_0\varepsilon_{ij}$$

Os incrementos nas componentes de deformação podem também ser decompostos em uma parte linear ${}_0e_{ij}$ e outra não linear ${}_0\eta_{ij}$, na forma

$${}_0\varepsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij} \quad (4.8)$$

sendo

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}^k u_{r,i} {}_0u_{r,j} + {}_0u_{r,i} {}^k u_{r,j}) \quad (4.9)$$

$${}_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j} \quad (4.10)$$

$$u_i = {}^{k+1}u_i - {}^k u_i \quad (4.11)$$

Como pode-se observar, a linearidade inerente à expressão (4.9), assim como a não linearidade em (4.10), é relativa às derivadas de incrementos de deslocamentos.

Admitindo-se um corpo viscoelástico submetido a ações de cargas convencionais e a variações de temperatura e de umidade, os incrementos das componentes da deformação total podem ser escritas como

$${}_0 \varepsilon_{ij} = {}_0 \varepsilon_{ij}^e + {}_0 \varepsilon_{ij}^v + {}_0 \varepsilon_{ij}^T + {}_0 \varepsilon_{ij}^H \quad (4.12)$$

onde os índices superiores e, v, T e H servem para indentificar os incrementos de deformações elástica, viscoelástica, térmica e higroscópica.

Como aproximação pode-se considerar $\delta {}_0 \varepsilon_{ij} \cong \delta {}_0 e_{ij}$ e adotar uma relação constitutiva incremental linearizada na forma

$${}_0 S_{ij} = {}_0 C_{ijrs} ({}_0 e_{rs} - {}_0 e_{rs}^v - {}_0 e_{rs}^T - {}_0 e_{rs}^H) \quad (4.13)$$

sendo ${}_0 C_{ijrs}$ o tensor constitutivo incremental de quarta ordem do material.

Substituindo-se as equações (4.7), (4.8) e (4.13) em (4.5), obtém-se

$$\int_{0V} {}_0 C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta {}_0 e_{ij} d^0V + \int_{0V} {}^k S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij} d^0V = {}^{k+1}R$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{o_V} k_{S_{ij}} \delta e_{ij} d^oV + \int_{o_V} {}^oC_{ijrs} e_{rs}^V \delta e_{ij} d^oV \\
& + \int_{o_V} {}^oC_{ijrs} e_{rs}^T \delta e_{ij} d^oV + \int_{o_V} {}^oC_{ijrs} e_{rs}^H \delta e_{ij} d^oV
\end{aligned}
\tag{4.14}$$

a qual, no âmbito da Mecânica do Contínuo, representa a equação incremental de equilíbrio do corpo tendo por base uma descrição cinemática Lagrangeana Total.

4.3 - Equação Incremental de Equilíbrio de um Elemento Finito

Em uma análise incremental não linear geométrica os deslocamentos totais são obtidos através da soma dos incrementos de deslocamentos obtidos no corrente passo com as correspondentes coordenadas dos pontos no passo anterior. Desta forma, quando se utiliza o método dos elementos finitos, é interessante que as funções de interpolação de deslocamentos sejam as mesmas usadas para interpolar as coordenadas dos elementos. Este fato justifica a conveniência de se usar, para aquele tipo de análise, uma formulação de elementos finitos isoparamétricos. No modelo computacional aqui apresentado são utilizados elementos finitos tridimensionais degenerados, do tipo isoparamétrico, deduzidos para a análise de estruturas em casca.

Para a dedução das relações correspondentes a tais elementos são adotadas duas hipóteses básicas: 1) as linhas retas normais à superfície média da casca permanecem retas após a deformação, mas não necessariamente normais à aquela superfície; 2) as tensões normais transversais à superfície média da casca são desprezadas. Tais hipóteses são as mesmas utilizadas na análise linear (AHMAD et al., 1970).

A Figura 4.2 mostra um típico elemento de casca em uma configuração genérica C_k . Para descrição cinemática do elemento toma-se em cada nó j do mesmo três vetores unitários $k\vec{v}_n^j$, $k\vec{v}_1^j$ e $k\vec{v}_2^j$, perpendiculares entre si e assim definidos:

$k\vec{v}_n^j$ - vetor unitário normal à superfície média do elemento de casca no nó j e na configuração C_k .

$$k\vec{v}_1^j = \frac{\vec{e}_2 \times k\vec{v}_n^j}{|\vec{e}_2 \times k\vec{v}_n^j|} \quad k\vec{v}_2^j = k\vec{v}_n^j \times k\vec{v}_1^j \quad (4.15)$$

sendo \vec{e}_2 o vetor unitário segundo o eixo global 0x_2 , como mostrado na Figura 4.2. O símbolo \times que aparece na equação (4.15) representa produto vetorial.

O elemento apresenta cinco graus de liberdade por nó: três translações, segundo os eixos globais 0x_1 , 0x_2 e 0x_3 , e duas rotações do vetor normal $k\vec{v}_n^j$, em torno dos vetores $k\vec{v}_1^j$ e $k\vec{v}_2^j$. As coordenadas de um ponto genérico do elemento na configuração C_k são dadas por

$${}^k x_i = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\xi, \eta) {}^k x_i^j + \frac{\zeta}{2} \sum_{j=1}^n h_j \varphi_j(\xi, \eta) {}^k v_{ni}^j \quad (4.16)$$

onde n é o número de nós do elemento, φ_j indica a função de interpolação correspondente ao nó j , ξ e η são as coordenadas curvilíneas do ponto, tomadas sobre a superfície média do elemento (Figura 4.2), ζ é a coordenada do ponto na direção da espessura do elemento, ${}^k v_{ni}^j$ é a componente do vetor ${}^k \vec{v}_n^j$ na direção i e h_j representa a espessura da casca no nó j do elemento. ξ , η e ζ são coordenadas normalizadas que variam entre -1 e $+1$.

Os deslocamentos e os incrementos de deslocamentos em um ponto qualquer do elemento, naquela mesma configuração, podem ser obtidos, respectivamente, pelas expressões

$${}^k u_i = {}^k x_i - {}^o x_i = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\xi, \eta) \left[{}^k u_i^j + \frac{\zeta}{2} h_j ({}^k v_{ni}^j - {}^o v_{ni}^j) \right] \quad (4.17)$$

$$u_i = {}^{k+1} u_i - {}^k u_i = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\xi, \eta) \left[u_i^j + \frac{\zeta}{2} h_j ({}^{k+1} v_{ni}^j - {}^k v_{ni}^j) \right] \quad (4.18)$$

Denotando-se por θ_1^j e θ_2^j os incrementos de rotação do vetor normal à superfície média do elemento no nó j , em torno dos vetores ${}^k \vec{v}_2^j$ e ${}^k \vec{v}_1^j$, respectivamente, entre as configurações C_k e C_{k+1} , e admitindo-se que os mesmos incrementos sejam pequenos, pode-se escrever aproximadamente

$${}^{k+1} \vec{v}_n^j - {}^k \vec{v}_n^j = -{}^k \vec{v}_2^j \theta_2^j + {}^k \vec{v}_1^j \theta_1^j \quad (4.19)$$

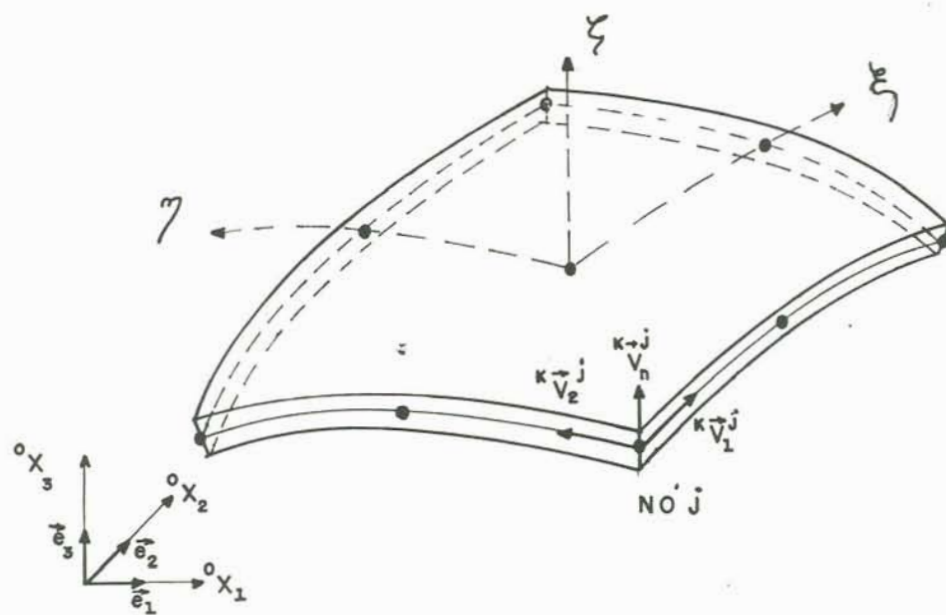


Figura 4.2 - Elemento de casca em uma configuração C_k

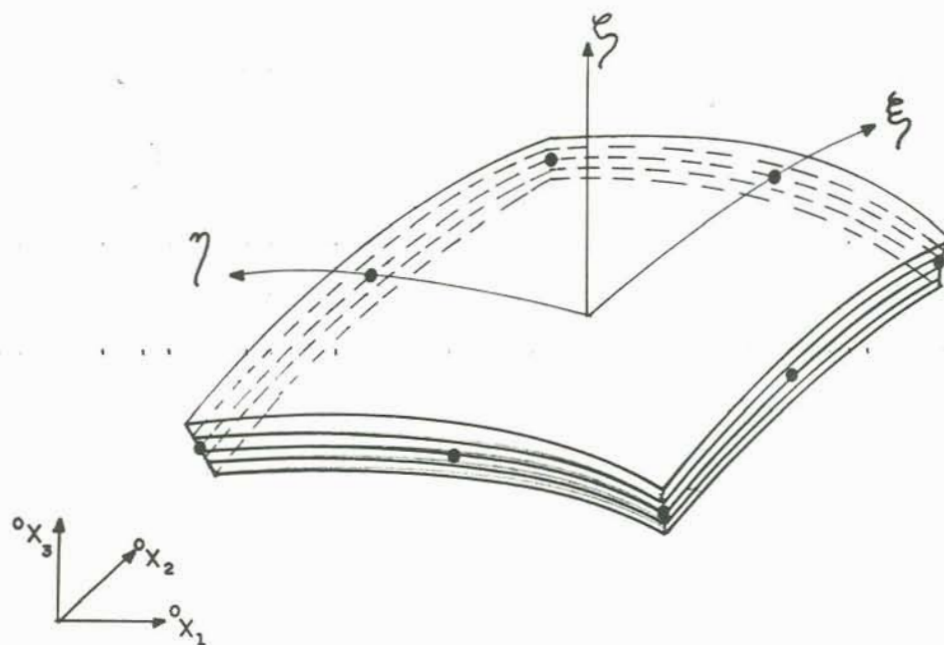


Figura 4.3 - Elemento finito típico de casca laminada

e, assim, a equação (4.18) pode ser reescrita na forma

$$u_i^{k+1} - u_i^k = \sum_{j=1}^n \phi_j(\xi, \eta) \left[u_i^j + \frac{\zeta}{2} h_j (\theta_1^j k_{V_{1i}}^j - \theta_2^j k_{V_{2i}}^j) \right] \quad (4.20)$$

Através de procedimentos análogos a aqueles utilizados na formulação do mesmo elemento para a análise linear de cascas (AHMAD et al., 1970), pode-se estabelecer, para o caso da análise não linear, relações entre as deformações e os deslocamentos nodais. Assim, podem ser deduzidas, para qualquer configuração C_k , as matrizes ${}^k_0[B_L]$ e ${}^k_0[B_{NL}]$ que relacionam, respectivamente, as partes linear e não linear das deformações (equação 4.8) com os deslocamentos nodais do elemento. Detalhes sobre a obtenção destas matrizes podem ser encontrados em (BATHE, 1982).

Em notação matricial, a equação incremental de equilíbrio escrita para um elemento, após a introdução das matrizes que relacionam as deformações com os deslocamentos nodais, assume a forma

$$\left\{ \int_{\circ_V} [{}^k_0B_L]^T [{}^k_0C] [{}^k_0B_L] d^{\circ}V + \int_{\circ_V} [{}^k_0B_{NL}]^T [{}^k_0S] [{}^k_0B_{NL}] d^{\circ}V \right\} \{U\} =$$

$$\{{}^{k+1}P\} - \int_{\circ_V} [{}^k_0B_L]^T [{}^k_0S] d^{\circ}V + \int_{\circ_V} [{}^k_0B_L]^T [{}^k_0C] \{e^V\} d^{\circ}V +$$

$$\int_{\circ_V} [{}^k_0B_L]^T [{}^k_0C] \{e^T\} d^{\circ}V + \int_{\circ_V} [{}^k_0B_L]^T [{}^k_0C] \{e^H\} d^{\circ}V \quad (4.21)$$

ou ainda,

$$\left[\begin{matrix} {}^k K_L \\ {}^k K_{NL} \end{matrix} \right] \{U\} = \{ {}^{k+1} P \} - \{ {}^k F \} + \{ {}_0 F^V \} + \{ {}_0 F^T \} + \{ {}_0 F^H \} \quad (4.22)$$

onde

$\{U\}$ - vetor dos incrementos de deslocamentos nodais do elemento

$\{ {}^{k+1} P \}$ - vetor das cargas nodais externas na configuração

C_{k+1}

${}^k K_L, {}^k K_{NL}$ - matrizes de rigidez tangentes linear e não linear do elemento na configuração C_k , dadas por

$${}^k K_L = \int_{{}_0 V} [{}^k B_L]^T [{}^k C] [{}^k B_L] d^0 V \quad (4.23)$$

$${}^k K_{NL} = \int_{{}_0 V} [{}^k B_{NL}]^T [{}^k S] [{}^k B_{NL}] d^0 V \quad (4.24)$$

$\{ {}^k F \}$ - vetor das forças nodais equivalentes às tensões no elemento na configuração C_k , dado por

$$\{ {}^k F \} = \int_{{}_0 V} [{}^k B_L]^T \{ {}^k S \} d^0 V \quad (4.25)$$

$\{ {}_0 F^V \}, \{ {}_0 F^T \}, \{ {}_0 F^H \}$ - vetores de incrementos das cargas viscoelásticas, térmicas e higroscópicas, respectivamente, obtidos pelas relações

$$\{ {}_o F^V \} = \int_{oV} [{}_o^k B_L]^T [{}_o C] \{ {}_o e^V \} d^oV \quad (4.26)$$

$$\{ {}_o F^T \} = \int_{oV} [{}_o^k B_L]^T [{}_o C] \{ {}_o e^T \} d^oV \quad (4.27)$$

$$\{ {}_o F^H \} = \int_{oV} [{}_o^k B_L]^T [{}_o C] \{ {}_o e^H \} d^oV \quad (4.28)$$

Considerando-se o caso de um elemento finito formado por diversas lâminas, como mostrado na Figura 4.3, as integrais sobre o volume do elemento podem ser obtidas fazendo-se a soma das integrais realizadas sobre os volumes das lâminas individuais e, assim, as equações (4.23) - (4.28) podem ser escritas na forma

$$[{}_o^k K_L] = \sum_{q=1}^n \int_{oV_q} [{}_o^k B_L]^T [{}_o C] [{}_o^k B_L] d^oV_q \quad (4.29)$$

$$[{}_o^k K_{NL}] = \sum_{q=1}^n \int_{oV_q} [{}_o^k B_{NL}]^T [{}_o^k S] [{}_o^k B_{NL}] d^oV_q \quad (4.30)$$

$$\{ {}_o^k F \} = \sum_{q=1}^n \int_{oV_q} [{}_o^k B_L]^T \{ {}_o^k S \} d^oV_q \quad (4.31)$$

$$\{ {}_o F^V \} = \sum_{q=1}^n \int_{oV_q} [{}_o^k B_L]^T [{}_o C] \{ {}_o e^V \} d^oV_q \quad (4.32)$$

$$\{ {}_o F^T \} = \sum_{q=1}^n \int_{oV_q} [{}_o^k B_L]^T [{}_o C] \{ {}_o e^T \} d^oV_q \quad (4.33)$$

$$\{ {}_0^H F \} = \sum_{q=1}^n \int_{{}_0^V_q} [{}_0^k B_L]^T [{}_0^C] \{ {}_0^H e \} d {}_0^V_q \quad (4.34)$$

onde nestas expressões n representa o número de lâminas do elemento e ${}_0^V_q$ indica o volume da lâmina genérica q na configuração inicial ${}_0^C$.

Uma importante observação pode ser feita sobre o tensor constitutivo que relaciona os incrementos de tensão ${}_0^S_{ij}$ com os incrementos de deformação ${}_0^e_{ij}$. Como o Segundo Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff e o Tensor Deformação de Green-Lagrange não variam sob rotação de corpo rígido, o mesmo tensor constitutivo utilizado em uma tradicional análise linear para relacionar tensões e deformações de "engenharia" pode ser empregado em uma análise não linear como o tensor constitutivo incremental que associa os incrementos do Segundo Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff com aqueles do Tensor Deformação de Green-Lagrange, desde que as deformações sejam pequenas (BATHE, 1982).

4.4 - Forma Incremental/Iterativa da Equação de Equilíbrio

A solução numérica do problema acima formulado e correspondente à análise geometricamente não linear de uma estrutura pode ser obtida através de um procedimento iterativo, para o qual a equação incremental de equilíbrio, em um passo incremental $k+1$, é escrita na forma:

$$\left[[{}^{k+1}_0K_L]^{i-1} + [{}^{k+1}_0K_{NL}]^{i-1} \right] \{U\}^i = \{{}^{k+1}P\}^i - \{{}^{k+1}F\}^{i-1} \\ + \{F^V\}^i + \{F^T\}^i + \{F^H\}^i \quad (4.35)$$

onde os índices superiores $i-1$ e i ($i=1,2,3,\dots$) indicam passos iterativos. Na equação (4.35) os vetores de cargas viscoelásticas, térmicas e higroscópicas são tomados nulos para $i \geq 2$. Para a primeira iteração ($i=1$) de cada passo incremental, estes últimos vetores são determinados através das equações (4.32), (4.33) e (4.34).

Uma forma alternativa de escrever a equação (4.35) é a seguinte:

$$\left[[{}^{k+1}_0K_L]^{i-1} + [{}^{k+1}_0K_{NL}]^{i-1} \right] \{U\}^i = \Delta\lambda^i \{\bar{P}\} + \{{}^{k+1}_0\psi\}^{i-1} \\ + \{F^V\}^i + \{F^T\}^i + \{F^H\}^i \quad (4.36)$$

onde $\Delta\lambda^i$ é o fator de carga correspondente à iteração i do passo incremental $k+1$, $\{{}^{k+1}_0\psi\}^{i-1}$ indica o vetor de forças desequilibradas no final da iteração $i-1$ e $\{\bar{P}\}$ representa um vetor de cargas externas de referência.

Na equação (4.36) os vetores de incrementos de cargas térmicas e higroscópicas são obtidos, na primeira iteração ($i=1$), através das equações (4.33) e (4.34), usando-se como incrementos de deformações térmicas e higroscópicas os valores correspondentes aos incrementos de temperatura $\Delta\lambda^1 \bar{T}$ e de concentração de umidade $\Delta\lambda^1 \bar{H}$, respectivamente, sendo \bar{T} e \bar{H} valores tomados como

referência.

O vetor de incrementos de cargas viscoelásticas que figura na equação (4.36) é determinado na iteração $i=1$ para o intervalo de tempo Δt correspondente ao passo incremental $k+1$ e obtido conforme o estabelecido posteriormente no item 4.6.

4.5 - Métodos de Solução das Equações de Equilíbrio

No programa computacional do presente trabalho foram implementados dois procedimentos para a solução numérica do problema expresso em (4.36): o método de Newton-Raphson e o método de controle por deslocamentos generalizados proposto por YANG; SHIEH (1990). Este último é particularmente apropriado para análise de estruturas em estágio pós-crítico e, no referido programa, é empregado somente para análise elástica que não envolva cargas térmicas ou higroscópicas.

Quando se emprega como procedimento iterativo o método de Newton-Raphson, o valor do fator de carga $\Delta \lambda^i$ é previamente fixado para $i=1$ e nulo para $i \geq 2$. Um inconveniente apresentado pelo método de Newton-Raphson é a impossibilidade que o mesmo apresenta de conduzir a análise em situações em que a matriz de rigidez tangente da estrutura deixa de ser definida positiva. Nestas situações o processo numérico, em geral, torna-se divergente.

Pelo método de controle por deslocamentos generalizados o vetor de incrementos de deslocamentos deve

ser decomposto na forma

$$\{U\}^i = \Delta\lambda^i \{U_1\}^i + \{U_2\}^i \quad (4.37)$$

onde os vetores $\{U_1\}^i$ e $\{U_2\}^i$ são dados pelas expressões

$$\left[\begin{matrix} [{}^{k+1}K_L]^{i-1} + [{}^{k+1}K_{NL}]^{i-1} \end{matrix} \right] \{U_1\}^i = \{\bar{P}\} \quad (4.38)$$

$$\left[\begin{matrix} [{}^{k+1}K_L]^{i-1} + [{}^{k+1}K_{NL}]^{i-1} \end{matrix} \right] \{U_2\}^i = \{{}^{k+1}\psi\}^{i-1} \quad (4.39)$$

Usando-se a notação $\langle \rangle$ para vetor linha, as expressões propostas pelo método de controle por deslocamentos generalizados para determinação dos fatores de cargas nas iterações correspondentes ao passo genérico k são as seguintes:

(Para $i=1$)

$$\Delta\lambda_k^1 = \pm \Delta\lambda_1^1 \frac{\langle U_1 \rangle_1^1 \{U_1\}_1^1}{\langle U_1 \rangle_{k-1}^1 \{U_1\}_k^1} \quad (4.40)$$

(Para $i \geq 2$)

$$\Delta\lambda_k^i = - \frac{\langle U_1 \rangle_{k-1}^i \{U_2\}_k^i}{\langle U_1 \rangle_{k-1}^i \{U_1\}_k^i} \quad (4.41)$$

onde em (4.40) $\Delta\lambda_1^1$ indica o fator de carga inicial previamente adotado. Maiores detalhes são encontrados em (YANG; SHIEH, 1990).

Para o estabelecimento do término de um passo incremental genérico k , por ser admitido como

atingido o equilíbrio da estrutura no final da iteração i , utiliza-se o seguinte critério de convergência:

$$\frac{\| \{U\}^i \|}{\| \{U_a\} \|} \leq \rho \quad (4.42)$$

onde $\| \quad \|$ denota norma euclidiana de um vetor, $\{U\}^i$ e $\{U_a\}$ são, respectivamente, os vetores de incrementos de deslocamentos na iteração i e de deslocamentos totais acumulados e ρ representa uma tolerância. Normalmente adota-se $10^{-6} \leq \rho \leq 10^{-9}$.

4.6 - Determinação dos Intervalos de Tempo na Análise Viscoelástica

Em uma análise viscoelástica, a forma de definição dos intervalos de tempo correspondentes aos passos incrementais pode ser um importante fator na avaliação do desempenho global da formulação empregada. Considerando-se a natureza numérica dos procedimentos utilizados na determinação das deformações dependentes do tempo, pode-se concluir que a precisão dos resultados, assim como a estabilidade do processo numérico, depende da grandeza dos intervalos de tempo adotados na análise.

Adotar um pequeno e constante intervalo de tempo para todos os passos, em geral, é um procedimento que pode tornar desnecessariamente longa a análise. Tendo em vista que as funções de fluência dos sólidos usuais

apresentam como característica uma contínua redução de inclinação ao longo do tempo, conclui-se que durante o processo de fluência um mesmo incremento de deformação viscoelástica deve ocorrer para intervalos de tempo cada vez maiores. Com base nesta conclusão, desperta-se como um procedimento lógico, aquele que consiste em se adotar intervalos de tempo crescentes ao longo da análise.

Do ponto de vista prático, é interessante a implementação de um processo que, partindo de um pequeno intervalo de tempo inicial, previamente escolhido, permita a obtenção automática dos demais intervalos de tempo, com valores progressivamente crescentes e sendo garantida a estabilização do processo numérico de avaliação das deformações viscoelásticas. No presente trabalho é adotado um processo auto-adaptável para definição dos intervalos de tempo na análise viscoelástica (MASUERO, 1992), o qual encontra-se abaixo descrito.

Para descrever o processo acima mencionado, considere-se um sólido cujo comportamento viscoelástico seja modelado por um simples elemento Kelvin, com uma mola de constante E e um tempo de retardação θ (Figura 4.4). Admitindo-se uma tensão axial σ atuando sobre este modelo, tem-se que a deformação viscoelástica no tempo t é dada por (CREUS, 1986):

$$\epsilon^v(t) = \frac{\sigma}{E} (1 - e^{-t/\theta}) \quad (4.43)$$

e, para o tempo $t+\Delta t$,

$$\epsilon^V(t+\Delta t) = \frac{\sigma}{E} (1 - e^{-(t+\Delta t)/\theta}) \quad (4.44)$$

Subtraindo-se (4.43) de (4.44), chega-se a ao incremento de deformação

$$\Delta \epsilon^V(t+\Delta t) = \frac{\sigma}{E} e^{-t/\theta} [1 - e^{-\Delta t/\theta}] \quad (4.45)$$

Adotando-se o tempo inicial como uma fração do tempo de retardação ($\Delta t_0 = \frac{\theta}{f}$) e tomando-se $\Delta \epsilon^V$ constante e igual ao valor correspondente a $t=0$, obtém-se a seguinte expressão para cálculo do intervalo de tempo

$$\Delta t = -\theta \ln [1 - \exp(t/\theta) + \exp(t/\theta - 1/f)] \quad (4.46)$$

O valor de f deve ser convenientemente escolhido. O uso da equação (4.46) proporciona, em geral, valores crescentes de Δt . Observa-se também que em alguns casos a expressão entre colchetes que aparece em (4.46) pode resultar negativa a partir de um certo passo incremental. Quando isto acontecer, sugere-se que o mesmo intervalo de tempo do passo anterior seja adotado.

Quando o comportamento do material é modelado por uma ou mais cadeias de elementos Kelvin, ou equivalentemente por séries como aquelas dadas em (2.29), com diferentes tempos de retardação, pode-se adotar como o valor de θ , na expressão (4.46), o menor tempo de retardação das cadeias, ou das séries.

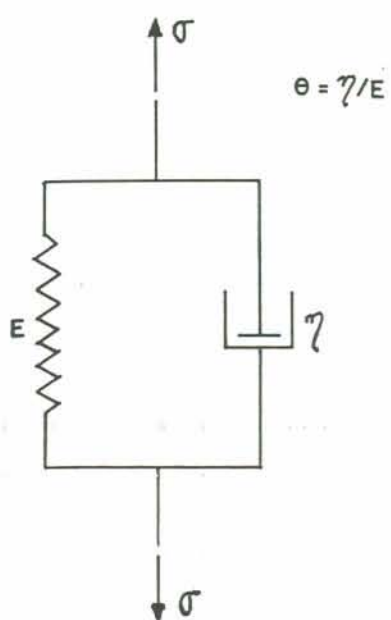


Figura 4.4 - Elemento Kelvin submetido a uma tensão axial

4.7 - Avaliação das Variáveis de Estado

A determinação das deformações dependentes do tempo é feita através das variáveis de estado ϕ_{ij}^P , as quais são obtidas resolvendo-se o sistema de equações diferenciais dado em (3.9). Para este fim, é utilizado o procedimento numérico descrito a seguir.

Considerando-se as equações (2.31) e (2.34), pode-se escrever

$$\phi_{ij}^P(t+\Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} \frac{1}{\chi_{ij}} \frac{D_{ij}^P}{\theta_{ij}^P} \exp\left(-\frac{\xi_{ij} + \Delta\xi_{ij} - \xi_{ij}}{\theta_{ij}^P}\right) \sigma_j(\tau) d\tau \quad (4.47)$$

Decompondo-se a integral que aparece na equação (4.47) em duas partes, correspondentes aos intervalos $[0,t]$ e $[t,t+\Delta t]$, e admitindo-se $\sigma_j(\tau)$ constante neste último intervalo e igual a $\sigma_j(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^P(t+\Delta t) &= \int_0^t \frac{1}{\chi_{ij}} \frac{D_{ij}^P}{\theta_{ij}^P} \exp\left(-\frac{\xi_{ij} + \Delta\xi_{ij} - \xi_{ij}}{\theta_{ij}^P}\right) \sigma_j(\tau) d\tau \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\chi_{ij}} \frac{D_{ij}^P}{\theta_{ij}^P} \exp\left(-\frac{\xi_{ij} + \Delta\xi_{ij} - \xi_{ij}}{\theta_{ij}^P}\right) d\tau \sigma_j(t) \quad (4.48) \end{aligned}$$

Considerando-se (2.34) e observando-se que

$$\frac{d\xi_{ij}}{d\tau} = \frac{1}{\chi_{ij}}, \text{ deduz-se através de (4.48) a seguinte}$$

expressão:

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^P(t+\Delta t) = & \phi_{ij}^P(t) \exp\left(-\frac{\Delta \xi_{ij}}{\theta_{ij}^P}\right) \\ & + D_{ij}^P \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta \xi_{ij}}{\theta_{ij}^P}\right)\right] \sigma_j(t) \end{aligned} \quad (4.49)$$

A equação (4.49) fornece o valor das variáveis de estado ϕ_{ij}^P correspondentes ao tempo $t+\Delta t$ em função dos valores das mesmas no tempo t . Vale observar que $\phi_{ij}^P(0) = 0$. É importante também salientar que o procedimento exposto acima, para cálculo das variáveis de estado, é somente válido quando são adotados intervalos de tempo para os quais os valores das componentes de tensão podem ser considerados praticamente constantes. Assim, quanto menores forem tais intervalos de tempo, mais precisos são os resultados obtidos com o uso de (4.49). Outros procedimentos alternativos para a solução numérica aproximada de (4.47) podem ser encontrados em (CREUS, 1984) e (MASUERO, 1992).

5. HIPÓTESES E PROCEDIMENTOS DO MODELO COMPUTACIONAL

5.1 - Introdução

Este capítulo apresenta uma descrição das principais características do modelo numérico proposto. As hipóteses e os procedimentos numéricos utilizados na elaboração do modelo são relacionados e as principais etapas de análise do programa computacional são apresentadas.

5.2 - Hipóteses do Modelo Computacional

Na elaboração do modelo computacional foram consideradas as seguintes hipóteses:

- a) Os materiais que constituem as estruturas apresentam comportamento elástico linear ou viscoelástico linear do tipo higrotermo-reologicamente simples. As propriedades elásticas dos materiais podem ser dependentes ou não da temperatura e da concentração de umidade.
- b) As estruturas são delgadas ou moderadamente espessas e as lâminas que as constituem devem ser ortótropas. Para a análise de falhas as lâminas são supostas de material transversalmente isótropo.

- c) As lâminas estão sujeitas à quebra ou flambagem de fibras e à fissuração da matriz. Não se considera falha por delaminação.
- d) As estruturas podem ser submetidas a cargas mecânicas e higrotérmicas, aplicadas em um ou mais estágios. Em cada elemento finito, a temperatura e a concentração de umidade podem variar ao longo da espessura, sendo considerados, para efeito de análise, os valores correspondentes às superfícies médias das lâminas.
- e) Os deslocamentos sofridos pela estrutura podem ser arbitrariamente grandes, mas as deformações são supostas pequenas.

5.3 - Aspectos da Formulação Numérica

Os principais aspectos e procedimentos numéricos do modelo computacional são os seguintes:

- a) A formulação é do tipo incremental/iterativo e se baseia em uma descrição cinemática Lagrangeana Total e utiliza como medidas de tensão e deformação o Segundo Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff e o Tensor Deformação de Green-Lagrange, respectivamente.
- b) Para modelagem da estrutura são utilizados elementos finitos tridimensionais degenerados de quatro, oito ou

nove nós, deduzidos para a análise de cascas.

- c) As equações não lineares de equilíbrio da estrutura são resolvidas através do método de Newton-Raphson, em sua versão convencional ou modificada. Para análise elástica que não envolva cargas de temperatura ou de umidade, pode também ser utilizado para aquele fim o método de controle por deslocamentos generalizados (Seção 4.5).
- d) Na análise viscoelástica, as deformações dependentes do tempo são obtidas através do método das variáveis de estado (Seção 2.6) e os intervalos de tempo são estabelecidos automaticamente tendo por base a condição de constância dos incrementos das deformações dependentes do tempo em todos os passos incrementais (Seção 4.6).
- e) O modelo computacional pode fornecer informações sobre o comportamento da estrutura até o surgimento da primeira falha, como também em estágios posteriores, nos quais a estrutura apresenta configurações de falhas mais avançadas.
- f) Na análise de falhas podem ser utilizados os critérios polinomiais de Tsai-Wu e de Hashin e também o critério da Máxima Deformação (Seção 3.4.1), assim como um modelo simplificado de degradação de rigidez das lâminas (Seção 3.4.2).

- g) As integrações numéricas inerentes ao método dos elementos finitos podem ser de três tipos: completa, reduzida uniforme e reduzida seletiva.
- h) Para o estabelecimento do término de cada passo incremental é utilizado um critério de convergência baseado em incrementos de deslocamentos (Eq. 4.42).

5.4 - Principais Etapas do Programa Computacional

- 1^a Leitura dos dados que identificam o tipo de análise, os parâmetros de controle, a malha de elementos finitos, o esquema de laminação e as condições de contorno da estrutura.
- 2^a Montagem da matrizes deformações x deslocamentos nos pontos de integração dos elementos.
- 3^a Leitura dos valores de referência das cargas externas e das variações de temperatura e de umidade nas diversas lâminas dos elementos da estrutura, no j-ésimo estágio de cargas.
- 4^a Leitura das propriedades dos materiais, correspondentes aos valores da temperatura e da umidade no j-ésimo estágio de cargas.
- 5^a Montagem do vetor das cargas nodais equivalentes às

cargas externas de referência.

- 6^a Determinação das matrizes constitutivas dos materiais referidas às direções principais das lâminas.
- 7^a Montagem das matrizes de rigidez dos elementos, se necessária.
- 8^a Se existem no atual estágio de cargas variações de temperatura e de umidade e se está sendo realizado o primeiro passo iterativo ($i=1$), do presente passo incremental, monta-se o vetor dos incrementos de cargas higrotérmicas.
- 9^a Se a análise for viscoelástica, $i = 1$ e se as cargas externas do atual estágio já foram aplicadas, monta-se o vetor dos incrementos de cargas viscoelásticas correspondentes ao intervalo de tempo do presente passo incremental.
- 10^a Determinação dos incrementos de deslocamentos nos pontos nodais dos elementos.
- 11^a Em caso de análise de falhas progressivas e se $i=1$, obtém-se para as tensões atualizadas o menor fator de carga necessário para provocar uma nova falha na estrutura $\Delta\lambda_{\min}$. Se este valor for menor que o fator de carga $\Delta\lambda^i$ da presente iteração, os incrementos de

deslocamentos devem ser reduzidos proporcionalmente pelo fator $\Delta\lambda_{\min} / \Delta\lambda^1$.

- 12^a Montagem das matrizes deformações x deslocamentos dos elementos para a configuração atualizada.
- 13^a Determinação das tensões atualizadas e dos vetores das forças equivalentes a estas tensões nos elementos (Eq. 4.25).
- 14^a Obtenção dos vetores das forças desequilibradas dos elementos.
- 15^a Verificação se o critério de convergência (Eq. 4.42) é satisfeito. Se isto não ocorrer, volta-se à 7^a etapa acima.
- 16^a Caso o critério de convergência tenha sido atendido e a análise considere falhas, verifica-se a ocorrência das mesmas nos pontos de integração dos elementos. Se o critério de falha for satisfeito em um ou mais pontos de integração da estrutura, publica-se o relatório de falhas, e se a análise for de falhas progressivas, recalculam-se as forças desequilibradas depois de se alterar as tensões totais nos pontos de integração em que tais falhas foram detectadas e, em seguida, retorna-se à 7^a etapa. A alteração das tensões é efetuada usando-se o critério de degradação

de rigidez (Eq. 3.54 ou Eq. 3.55) e as deformações totais nos mencionados pontos de integração.

- 17^a Após a convergência verifica-se se o número de passos incrementais especificado na análise foi atingido ou se as cargas do atual estágio já foram aplicadas. No caso da análise viscoelástica verifica-se se o tempo final correspondente a aquele estágio foi atingido.
- 18^a Terminado o atual estágio de carga retorna-se à 3^a etapa acima para iniciar um novo estágio, se houver.

6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO - PARTE I: ANÁLISE ELÁSTICA

6.1 - Introdução

Apresentam-se neste capítulo exemplos numéricos de placas, chapas e cascas de material composto laminado submetidas às ações de cargas térmicas e higroscópicas. Admite-se que o material exibe comportamento elástico linear.

Analisa-se o comportamento de estruturas sob cargas higrotérmicas, considerando-se as hipóteses de propriedades dependentes ou não da temperatura e da concentração de umidade. Exemplos de flambagem térmica de chapas, placas e cascas são apresentados. As influências do esquema de laminação, das condições de apoio e do grau de anisotropia do material sobre as temperaturas críticas de placas laminadas são analisadas.

6.2 - Exemplos Numéricos de Análise Elástica

6.2.1 - Flambagem Térmica de uma Placa de Material Isótropo

Com o objetivo de testar a eficiência da presente formulação na avaliação da temperatura crítica de placas sob ação de carga térmica, comparando resultados com outros obtidos por solução analítica disponível na

literatura, a placa de material isótopo mostrada na Figura 6.1, submetida a uma variação uniforme de temperatura, foi analisada. A placa apresenta as seguintes condições de contorno:

$$x = 0 \text{ e } x = a \Rightarrow u = 0, v = 0, w = 0, \theta_x \neq 0, \theta_y = 0$$

$$y = 0 \text{ e } y = b \Rightarrow u = 0, v = 0, w = 0, \theta_x = 0, \theta_y \neq 0$$

A relação entre o lado a e a espessura h da placa foi tomada como sendo igual 100 ($a/h = 100$).

A análise foi realizada considerando-se somente um quarto da placa, discretizado por uma malha de 2×2 elementos de nove nós (Figura 6.1). A hipótese de grandes deslocamentos foi adotada. Uma regra de integração numérica reduzida com 2×2 pontos de Gauss e o método de Newton-Raphson foram empregados. Uma carga concentrada transversal muito pequena, da ordem de 10^{-8} foi introduzida no centro da placa com o objetivo de provocar deslocamentos transversais.

Na Figura 6.2 estão apresentados os valores da variação de temperatura crítica da placa em função da relação a/b , juntamente com resultados analíticos obtidos em (BOLEY; WEINER, 1960). O parâmetro α que aparece multiplicando o valor da variação de temperatura crítica ΔT_{cr} indica o coeficiente de dilatação térmica do material.

Os valores de ΔT_{cr} obtidos na análise são aqueles para os quais o programa de computador acusou, na

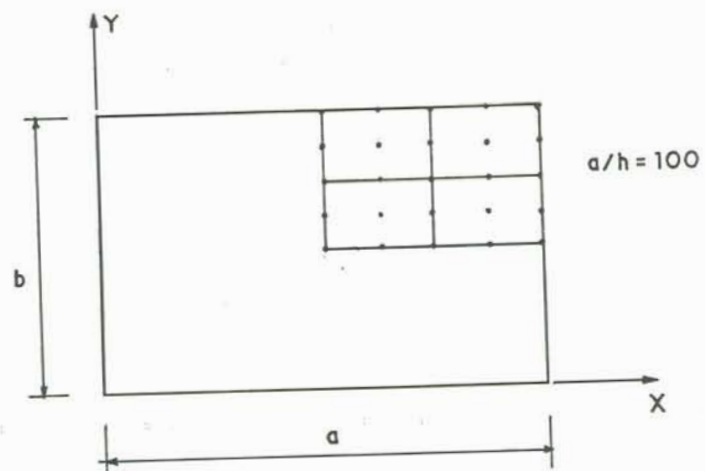


Figura 6.1 - Placa de material isótopo sob carga térmica

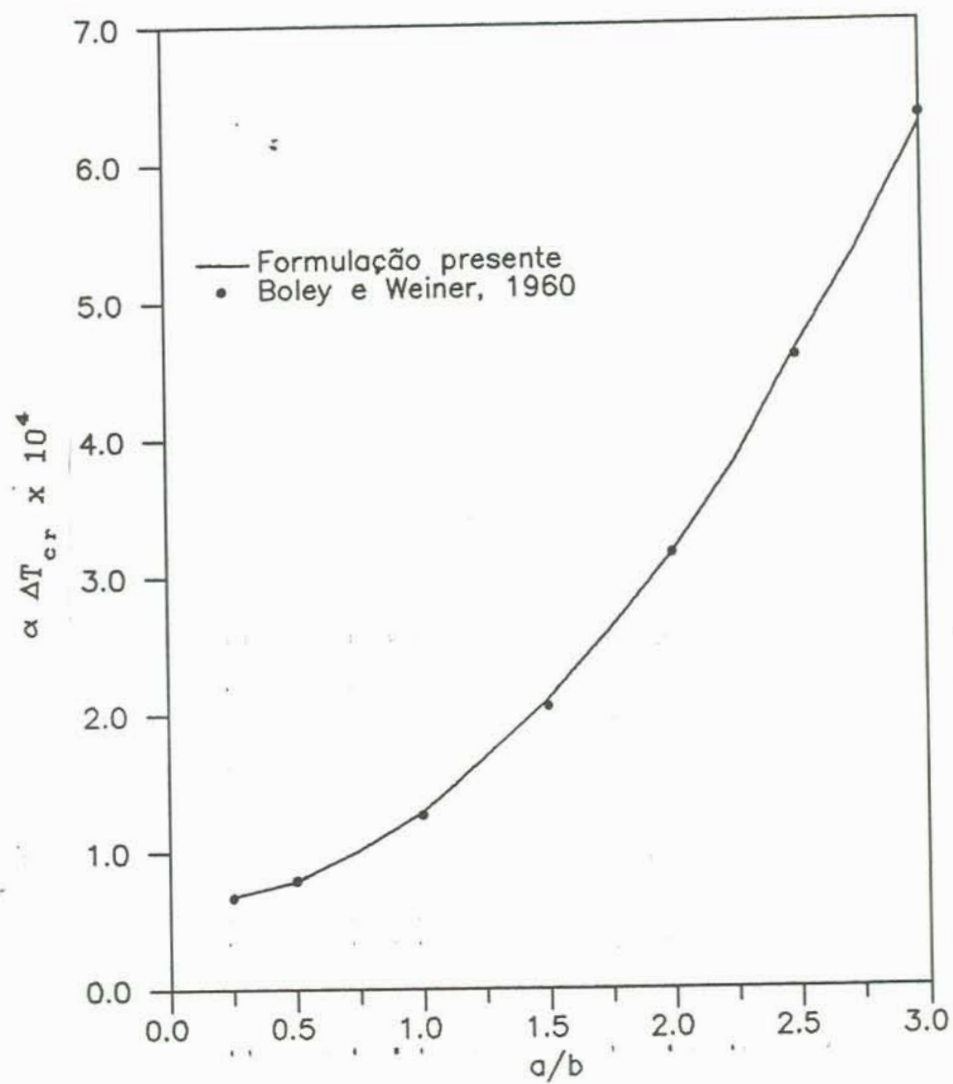


Figura 6.2 - Variação de temperatura crítica em função de a/b para a placa de material isotrópico

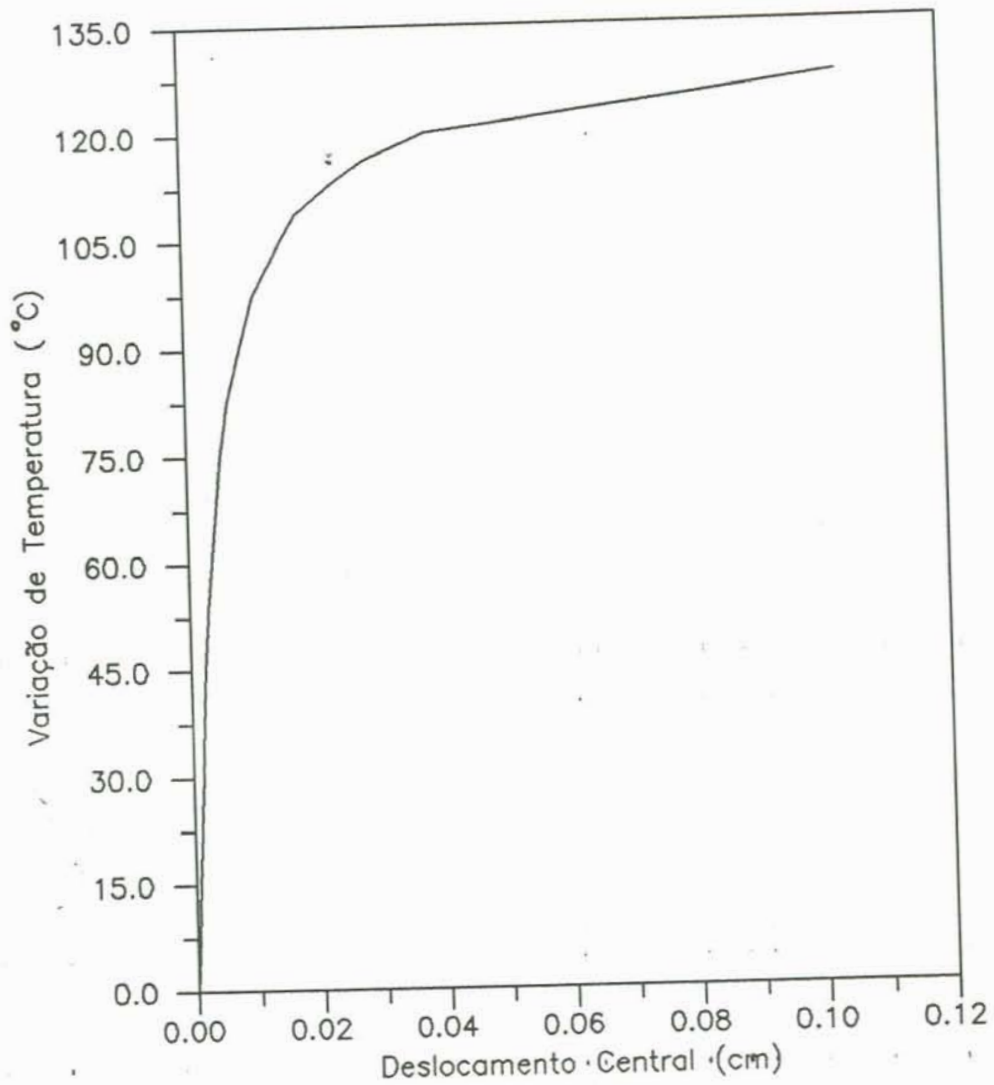


Figura 6.3 - Curva variação de temperatura crítica x deslocamento central da placa isotrópica.

diagonal da matriz do sistema de equações de equilíbrio triangularizada, algum elemento menor ou igual que zero ou ocorreu divergência no processo iterativo conduzido pelo método de Newton-Raphson. Para reduzir o erro entre os valores assim obtidos e aqueles correspondentes aos pontos reais de singularidade da matriz de rigidez da placa, os incrementos de cargas nas vizinhanças dos referidos pontos foram tomados muito pequenos.

Para o caso particular em que se tomou $a = b = 24$ cm, $a/h = 100$, $E = 1$, $\nu = 0.30$ e $\alpha = 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$, foi obtida a curva temperatura x deslocamento no centro da placa mostrada na Figura 6.3. Neste caso, para uma variação de temperatura de 127.5°C ocorreu divergência no processo iterativo. Utilizando-se a expressão para cálculo da temperatura crítica apresentada em (BOLEY; WEINER, 1960), chega-se ao valor $\Delta T_{cr} = 126.54^{\circ}\text{C}$.

6.2.2 - Flambagem Térmica de uma Placa Laminada

Este exemplo consiste da análise de uma placa laminada quadrada submetida a uma variação uniforme de temperatura. A placa apresenta quatro camadas dispostas nos diferentes esquemas de laminação:

$$[\theta/-\theta/\theta/-\theta] \quad (A)$$

$$[\theta/\theta/-\theta/-\theta] \quad (B)$$

$$[\theta/-\theta/-\theta/\theta] \quad (C)$$

As seguintes características foram adotadas: $a/h = 20$, $E_{11}/E_{22} = 40$, $G_{12}/E_{22} = 0.6$, $G_{13} = G_{12}$, $G_{23}/E_{22} = 0.5$, $\alpha_1 = 1.0 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ e $\alpha_2 = 2\alpha_1$, onde a e h representam, respectivamente, o lado e a espessura total da placa. As bordas da placa foram admitidas com dois tipos de vinculação:

a) Simplesmente Apoiada (CC1):

$$x = -a/2 \text{ e } x = a/2 \Rightarrow u = 0, w = 0 \text{ e } \theta_y = 0$$

$$y = -a/2 \text{ e } y = a/2 \Rightarrow v = 0, w = 0 \text{ e } \theta_x = 0$$

b) Engastada (CC2):

$$x = -a/2 \text{ e } x = a/2 \Rightarrow u = 0, v = 0, w = 0 \text{ e } \theta_x = \theta_y = 0$$

$$y = -a/2 \text{ e } y = a/2 \Rightarrow u = 0, v = 0, w = 0 \text{ e } \theta_x = \theta_y = 0$$

onde os eixos x e y são tomados com origem no centro da placa.

A placa foi discretizada em nove elementos de nove nós. A hipótese de grandes deslocamentos e uma regra de integração reduzida $2 \times 2 \times 1$ em cada lâmina foram empregadas. Utilizou-se o método de Newton-Raphson.

As Figuras 6.4 e 6.5 mostram como varia o valor da temperatura crítica em função do ângulo θ para a placa simplesmente apoiada e engastada, respectivamente.

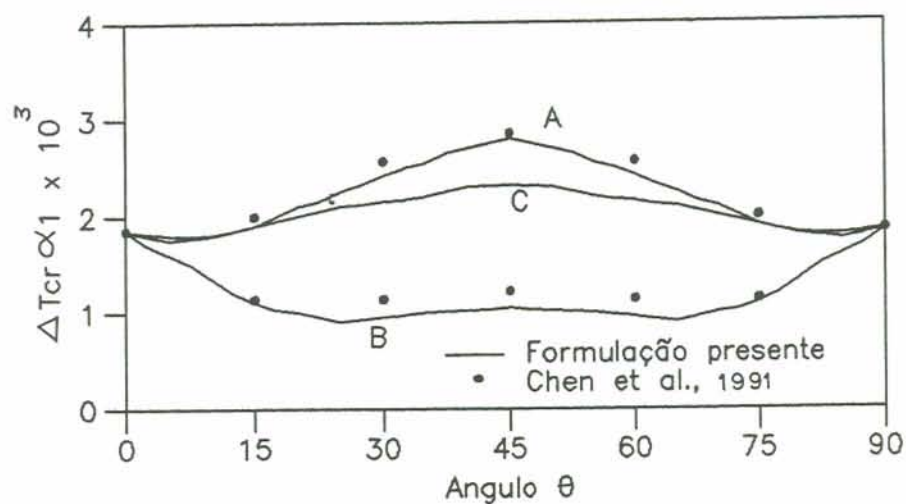


Figura 6.4 - Variação de temperatura crítica da placa laminada com bordas simplesmente apoiadas

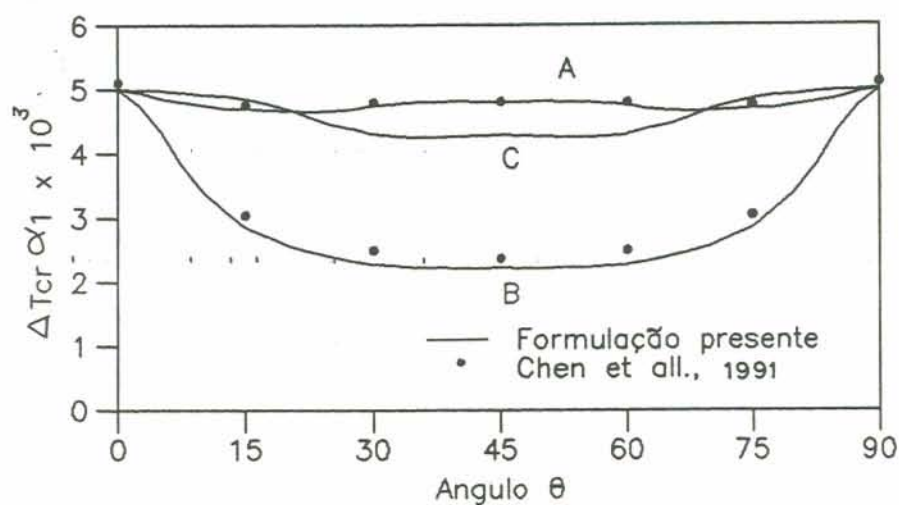


Figura 6.5 - Variação de temperatura crítica da placa laminada com bordas engastadas

observa-se que para as duas condições de apoio as menores temperaturas críticas correspondem ao esquema de laminação (B). Além disto, verifica-se que para a placa com bordas engastadas e o esquema de laminação (A), a temperatura crítica não varia muito com o ângulo θ , enquanto que para o esquema de laminação (B), e aquela mesma condição de apoio, a variação é bastante acentuada, principalmente para θ entre 0° e 30° ou entre 60° e 90° . Na placa simplesmente apoiada e com esquema de laminação (A) ou (C), a maior resistência à flambagem térmica se verifica para $\theta = 45^\circ$.

Nas Figuras 6.4 e 6.5 estão apresentados também resultados obtidos em (CHEN et al., 1991) através de uma formulação em elementos finitos para análise de instabilidade linear de placas laminadas sob carga térmica. Como pode ser observado pelas figuras acima citadas, os resultados encontrados por (CHEN et al., 1991) são ligeiramente superiores a aqueles obtidos pela presente formulação.

6.2.3 - Placa de Grafite/Epóxi sob Cargas Higroscópica e Térmica

A placa de grafite/epóxi com um esquema de laminação antissimétrico [0/90/0/90], mostrada na Figura 6.6, foi inicialmente analisada sob a ação de diferentes níveis de concentração de umidade. As bordas da placa foram admitidas simplesmente apoiadas e engastadas, com as mesmas restrições do Exemplo 6.2.2. O comprimento do lado e a

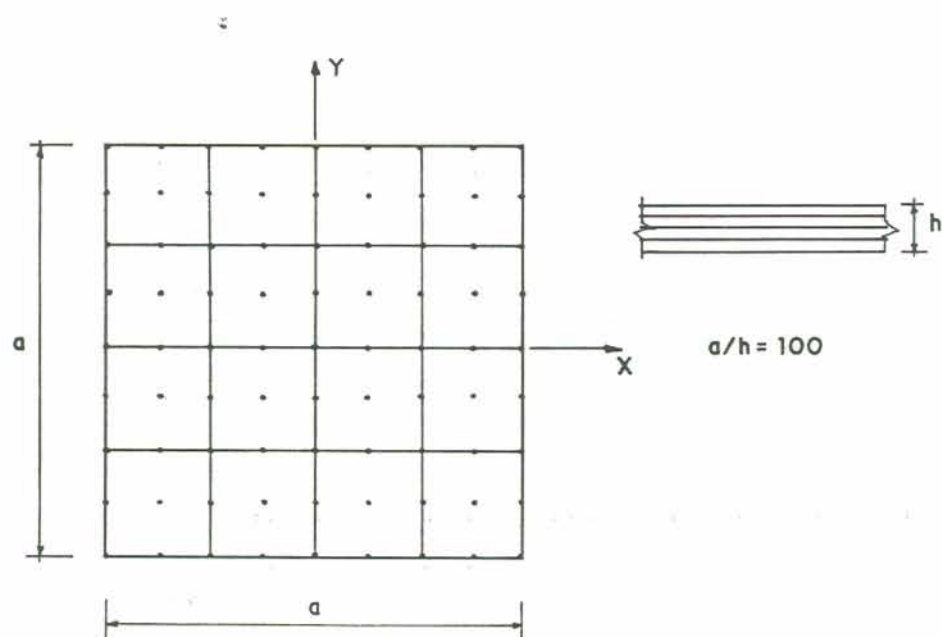


Figura 6.6 - Placa de grafite/epóxi sob carga higrotérmica

espessura da placa foram tomados com $a = 100$ cm e $h = 1$ cm, respectivamente.

A placa inteira foi modelada por uma malha de 4×4 elementos de 9 nós e a hipótese de pequenos deslocamentos foi adotada. As propriedades do material foram consideradas dependentes do nível de umidade contida na placa, de acordo com a Tabela 6.1 (TSAI; HAHN, 1980).

Tabela 6.1 - Propriedades do Grafite/Epóxi para Diferentes Níveis de Concentração de Umidade

H(%)	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
E_1	130.00	130.00	130.00	130.00	130.00	130.00	130.00
E_2	9.50	9.25	9.00	8.75	8.50	8.50	8.50
G_{12}	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00	6.00
β_1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
β_2	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44

Obs.: $G_{13} = G_{12}$ e $G_{23} = 0.5G_{12}$ (Unidades: E e G em GPa e

β_1 e β_2 em $^{\circ}\text{C}$)

As Figuras 6.7 e 6.8 apresentam, respectivamente, os deslocamentos verticais encontrados ao longo do eixo x, no intervalo $x \geq 0$, e os valores do momento fletor $M_y = -M_x$ no centro da placa, para vários valores da concentração de umidade H e para o caso de bordas simplesmente apoiadas. Devido a anti-simetria da estrutura, verifica-se que os deslocamentos verticais ao

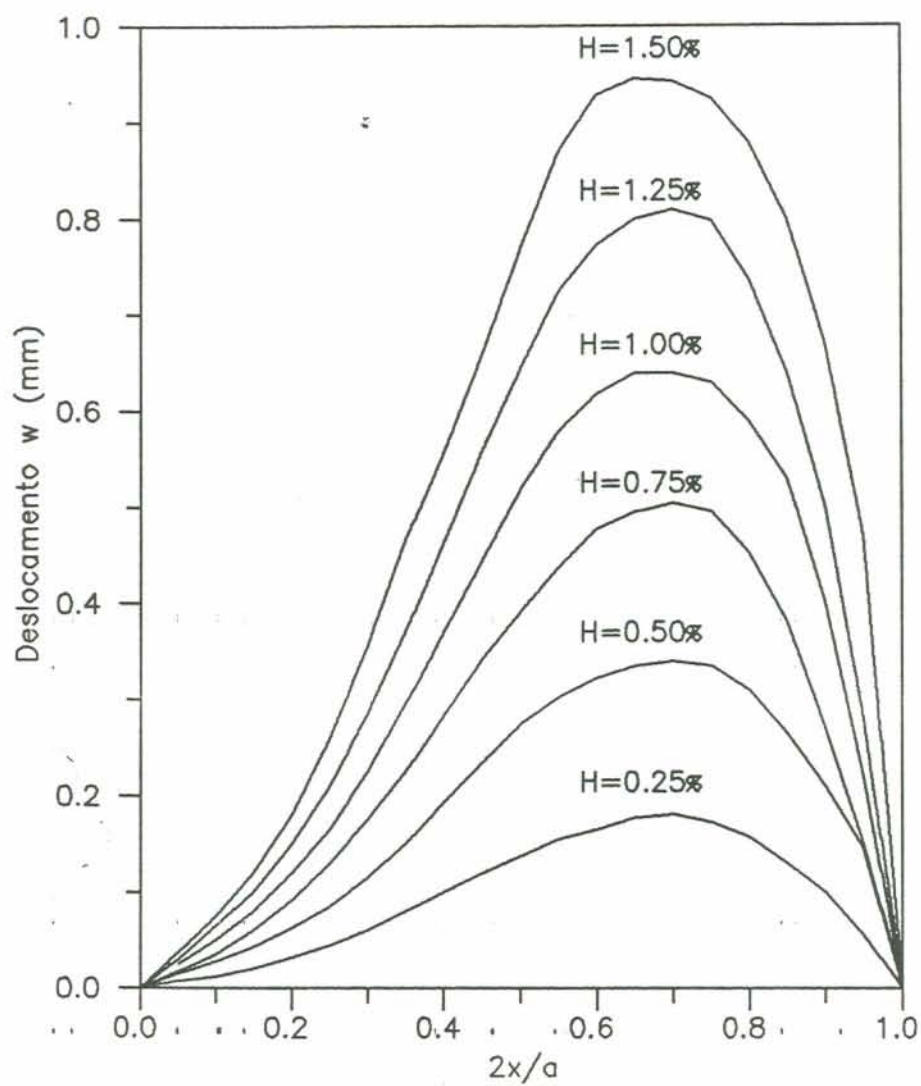


Figura 6.7 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x para diversos valores da concentração de umidade da placa

longo das diagonais da placa são nulos e que, além disto, as seguintes relações são observadas:

$$w(x,y,0) = w(x,-y,0) = w(-x,y,0)$$

$$w(x,y,0) = w(-x,-y,0) = -w(y,x,0)$$

No caso da placa com bordas engastadas, não ocorrem deslocamentos verticais e os valores do momento $M_y = -M_x$ em $x = 0$, para diversas concentrações de umidade, estão representados na Figura 6.9.

Posteriormente, a placa foi analisada sob a ação de cargas térmicas. As propriedades do material foram supostas dependentes da temperatura, como mostrado na Tabela 6.2 (TSAI; HAHN, 1980).

Tabela 6.2 - Propriedades do Grafite/Epóxi para Diferentes Níveis de Temperatura

T(K)	300	325	350	375	400	425
E_1	130.00	130.00	130.00	130.00	130.00	130.00
E_2	9.50	8.50	8.00	7.50	7.00	6.75
G_{12}	6.00	6.00	5.50	5.00	4.75	4.50

obs.: $G_{13} = G_{12}$ e $G_{23} = 0.5G_{12}$ (Unidades: E e G em GPa)

$$\alpha_1 = -0.30 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 28.1 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$$

As Figuras 6.10, 6.11 e 6.12 mostram os valores dos deslocamentos verticais e dos momentos fletores

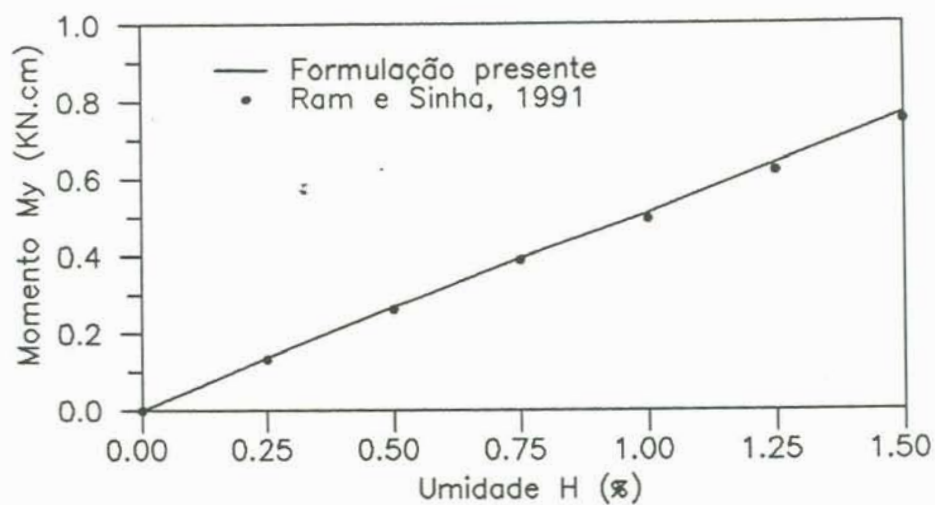


Figura 6.8 - Momentos fletores M_y no centro da placa simplesmente apoiada em função de H (%)

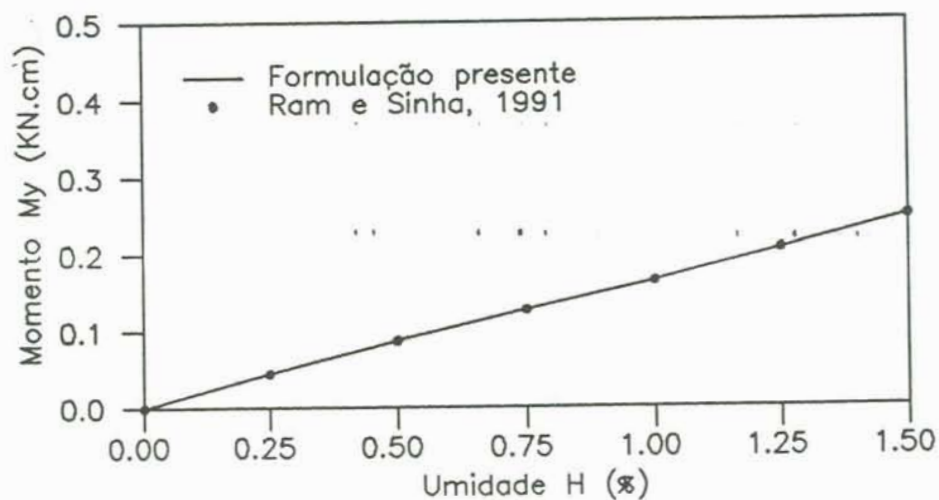


Figura 6.9 - Momentos fletores M_y no centro da placa engastada em função de H (%)

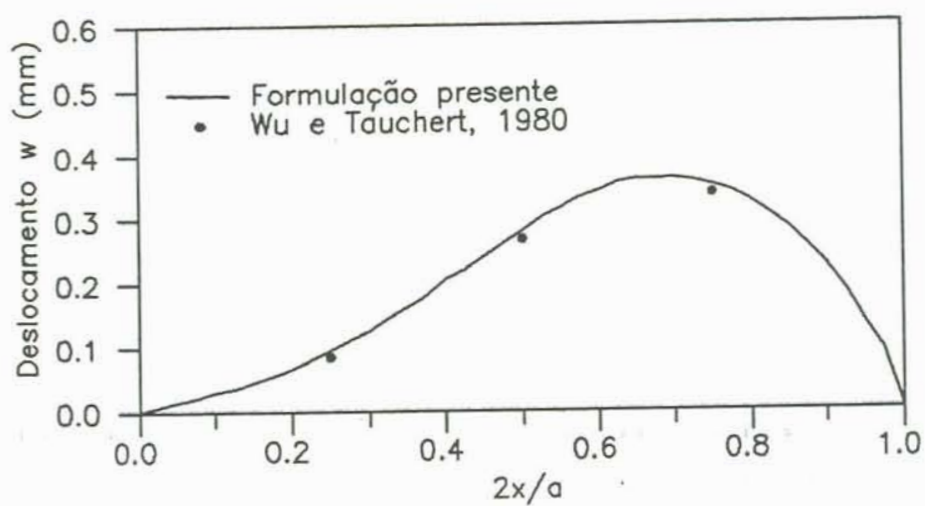


Figura 6.10 - Deslocamentos verticais da placa simplesmente apoiada e submetida a carga térmica ($T=400^{\circ}\text{K}$)

ao longo do eixo x , no intervalo $x \geq 0$, encontrados para a placa simplesmente apoiada e sob uma temperatura $T = 400^\circ\text{K}$. Nestas últimas figuras encontram-se representados alguns pontos correspondentes à solução analítica de WU; TAUCHER (1980), também apresentados em RAM; SINHA (1991).

Para o caso da placa com bordas engastadas e submetida a diferentes valores de temperatura, foram obtidos em $x = 0$ os momentos fletores apresentados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 - Momentos Fletores no Centro da Placa Engastada para diversos valores da Temperatura

T($^\circ\text{K}$)	300	325	350	375	400	425
M_x	-0.00	-0.032	-0.061	-0.088	-0.134	-0.110
M_y	0.00	0.032	0.061	0.088	0.134	0.110

obs.: M_x e M_y em KN.cm/cm

Os valores de M_x e M_y apresentados na Tabela 6.3 praticamente coincidem com aqueles obtidos e publicados em RAM; SINHA (1991). Vale observar que para a análise da placa sob cargas de temperatura foi utilizada uma malha de 5×5 elementos de nove nós. Para a realização da análise do presente exemplo, RAM; SINHA (1991) adotou uma malha de 64 elementos finitos isoparamétricos de placa.

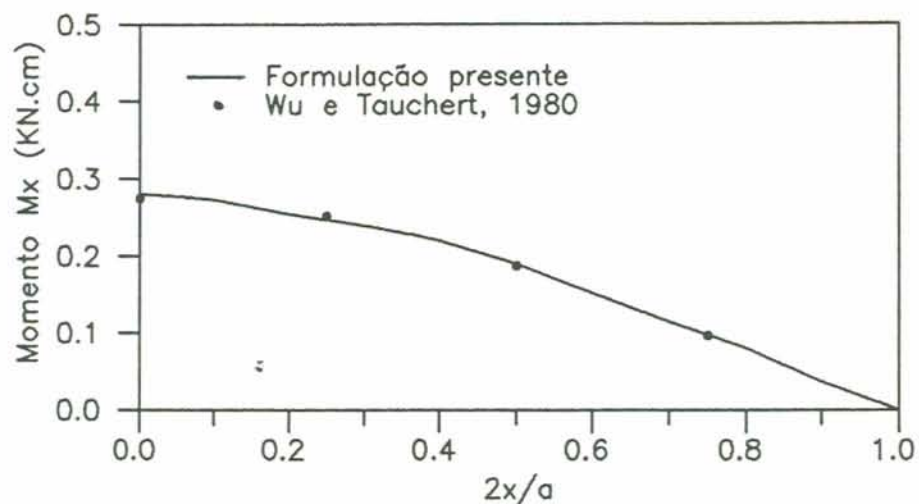


Figura 6.11 - Momentos fletores M_x ao longo do eixo x da placa simplesmente apoiada ($T = 400^\circ\text{K}$)

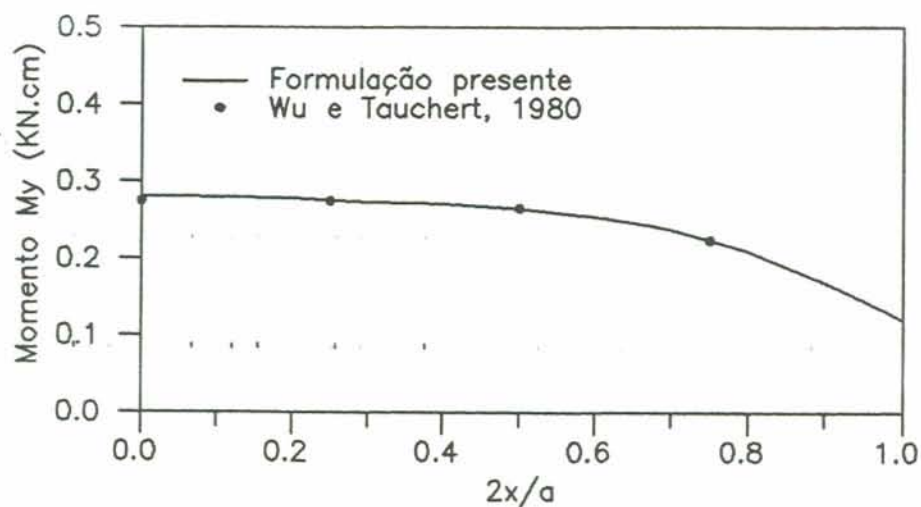


Figura 6.12 - Momentos fletores M_y ao longo do eixo x da placa simplesmente apoiada ($T = 400^\circ\text{K}$)

6.2.4 - Placa de Boro/Epóxi sob Gradiente Térmico

Este exemplo consiste de uma placa laminada quadrada de boro/epóxi, com um esquema de laminação simétrico $[0/90]_s$, submetida a um incremento de temperatura que varia linearmente ao longo da espessura (Figura 6.13). As bordas da placa apresentam as mesmas restrições especificadas no Exemplo 6.2.1. A relação entre o comprimento do lado e a espessura da placa é $a/h=100$.

As propriedades do boro/epóxi, para vários valores da temperatura, foram obtidas através de gráficos publicados em (HANH; PAGANO, 1974) e estão apresentadas na Tabela 6.4. Como se observa, as rigidezes do material na direção transversal às fibras e ao cisalhamento no plano médio da lâmina são consideravelmente sensíveis à variação de temperatura. O mesmo pode ser afirmado para o coeficiente de dilatação α_2 .

Para análise da estrutura, um quarto da placa foi discretizado em uma malha de 4×4 elementos de nove nós. Visando-se obter uma melhor aproximação da distribuição da temperatura ao longo da espessura da placa, assim como uma mais precisa integração numérica, cada lâmina foi dividida em duas lâminas idênticas. Em cada uma destas lâminas, foi considerada uma temperatura constante e igual a aquela atuante no plano médio da mesma, obtida através do diagrama linear de variação da temperatura.

A análise foi realizada considerando-se três casos:

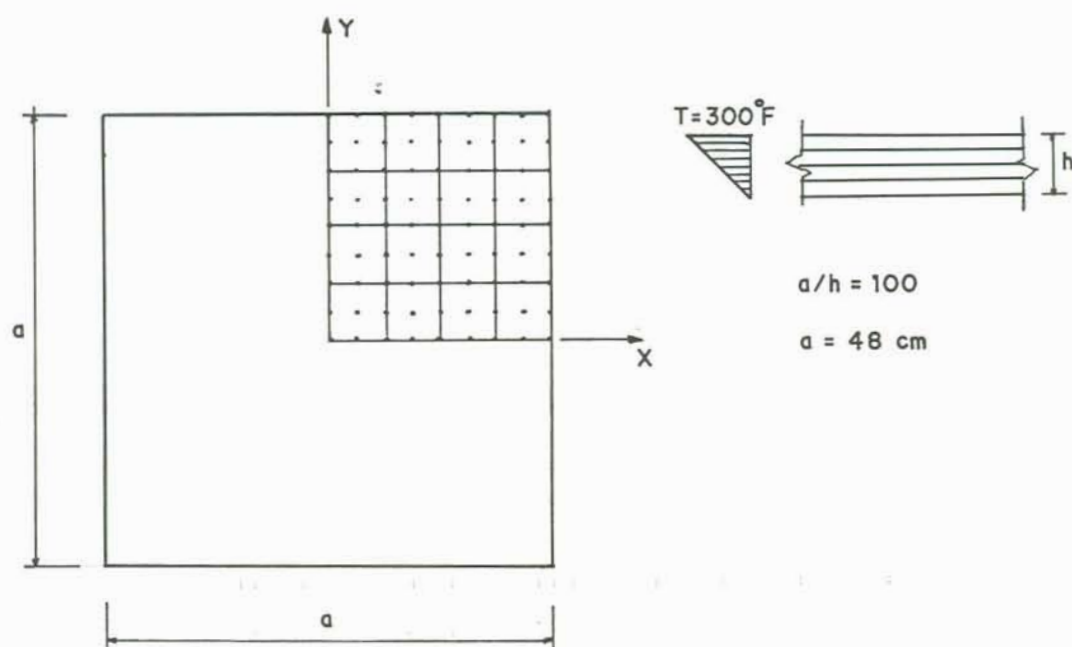


Figura 6.13 - Placa de boro/epóxi sob gradiente térmico

Caso I - Propriedades do material dependentes da temperatura. Valores das propriedades de cada lâmina obtidos através da Tabela 6.4, usando-se interpolação linear.

Caso II - Propriedades das lâminas correspondentes à temperatura $T = 75^{\circ}\text{F}$.

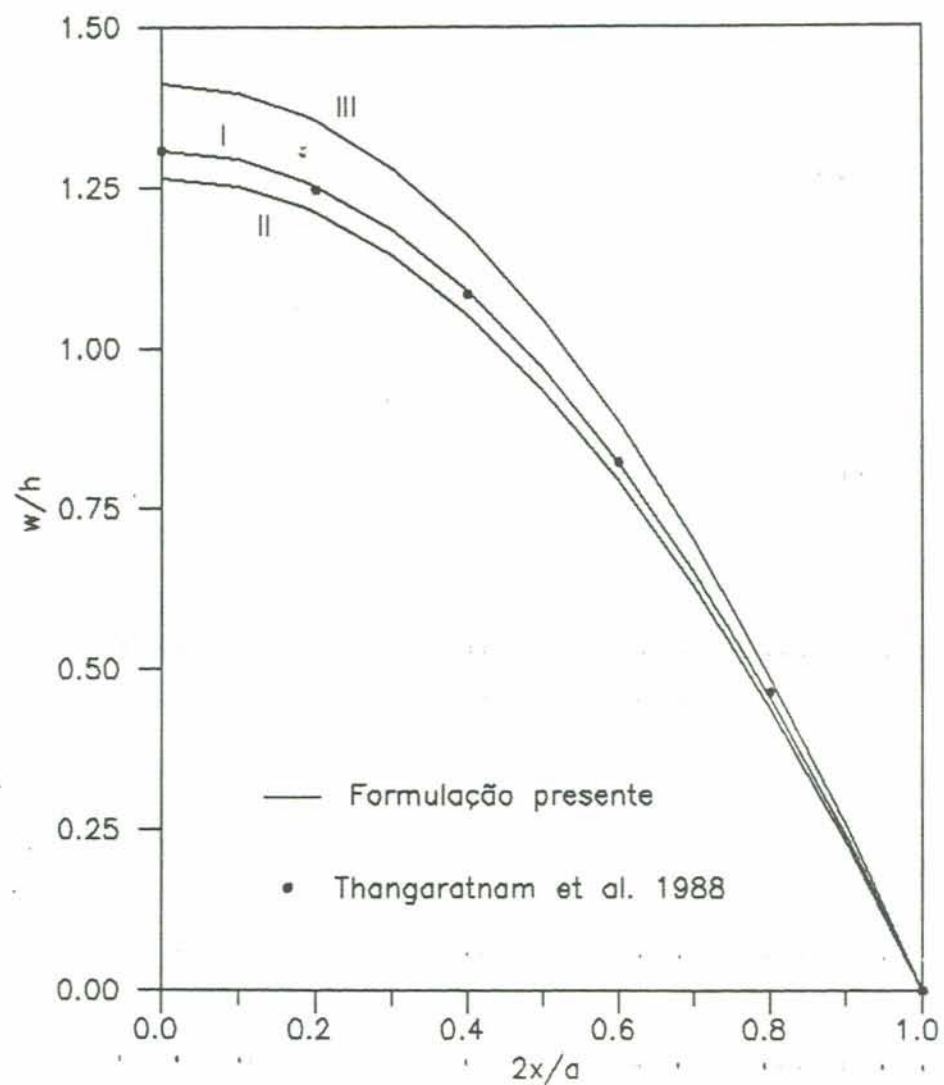
Caso III - Propriedades das lâminas correspondentes à temperatura $T = 300^{\circ}\text{F}$.

Tabela 6.4 - Propriedades do Boro/Epóxi

T	0°F	75°F	150°F	225°F	300°F
E_{11}	30.30×10^6	30.25×10^6	30.20×10^6	30.10×10^6	30.00×10^6
E_{22}	2.95×10^6	2.70×10^6	2.25×10^6	1.70×10^6	1.30×10^6
G_{12}	0.78×10^6	0.75×10^6	0.70×10^6	0.57×10^6	0.39×10^6
α_1	2.15×10^{-6}	2.28×10^{-6}	2.32×10^{-6}	2.40×10^{-6}	2.63×10^{-6}
α_2	9.50×10^{-6}	10.50×10^{-6}	12.25×10^{-6}	14.00×10^{-6}	16.40×10^{-6}

Obs.: E_{ij} e G_{ij} em psi, α_i em $1/^{\circ}\text{F}$

A hipótese de pequenos deslocamentos e uma regra de integração completa com $3 \times 3 \times 1$ pontos de Gauss foram empregadas. A Figura 6.14 mostra como variam os deslocamentos verticais ao longo do eixo x para os três casos considerados. Resultados obtidos por (THANGARATNAM et. al, 1988), através de uma formulação em elementos



6.14 - Deslocamentos verticais ao longo do eixo x da placa de boro/epóxi sob gradiente térmico

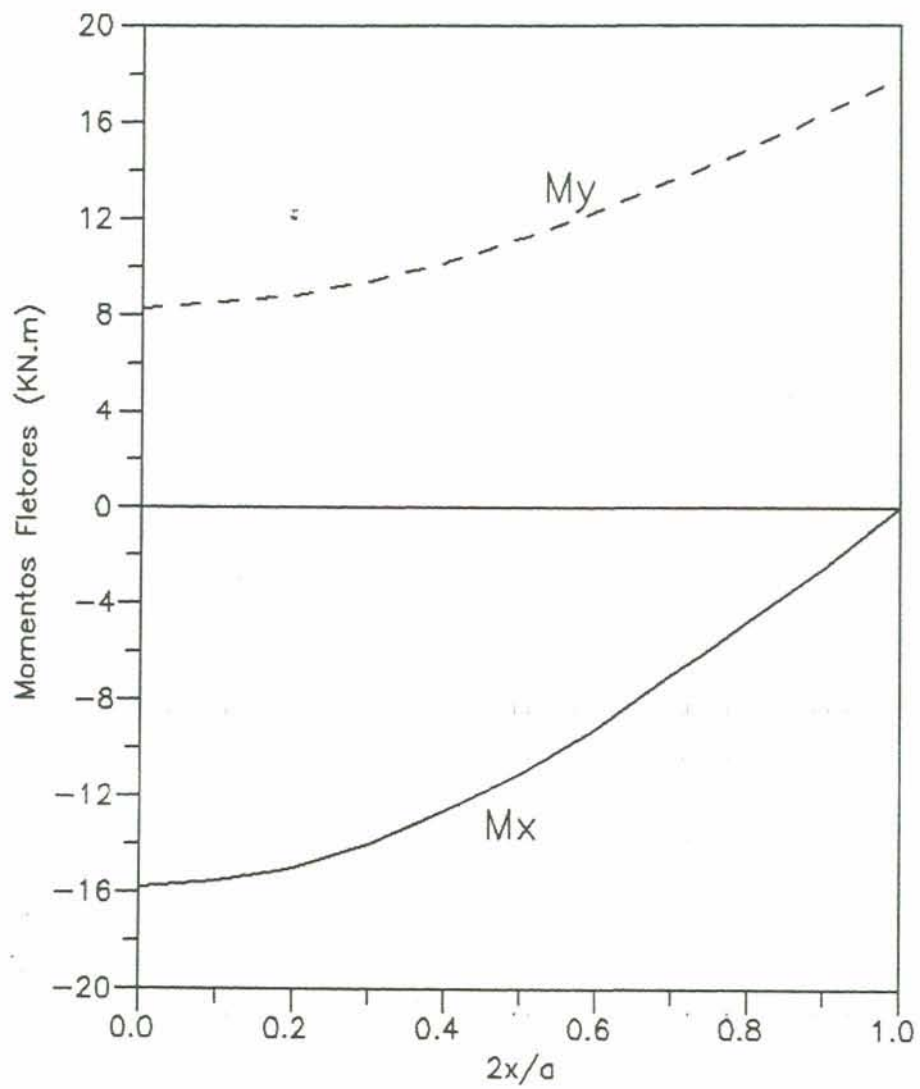


Figura 6.15 - Momentos fletores ao longo do eixo x da placa de boro/epóxi sob gradiente térmico

finitos do tipo "semiloof" são também apresentados para o Caso I. Como pode-se observar, pelas diferenças das curvas mostradas na Figura 6.14, a dependência das propriedades do material com respeito à temperatura pode ser um fator importante na avaliação da resposta de uma estrutura.

A Figura 6.15 apresenta como variam os momentos fletores M_x e M_y ao longo do eixo x, obtidos para o Caso I. Verifica-se que, ao contrário do que aconteceria se a placa fosse de material isótropo, os momentos M_x e M_y no centro da placa apresentam valores diferentes, inclusive em sinais.

6.2.5 - Flambagem Térmica de um Painel de Grafite/Epóxi

Este exemplo ilustra um fato interessante de flambagem térmica que pode ser verificado em painéis de grafite/epóxi, quando as lâminas deste material apresentam um coeficiente de dilatação térmica negativo na direção das fibras. Nesta situação, pode-se demonstrar que, teoricamente, é possível se construir um painel de grafite/epóxi que em uma determinada direção não apresenta deformação térmica quando o mesmo é submetido à uma variação de temperatura.

Para ilustrar, considera-se um painel plano de grafite/epóxi com um esquema de laminação simétrico do tipo $[\theta/-\theta/-\theta/\theta]$, engastado em duas extremidades, conforme mostra a Figura 6.16. Cada lâmina tem um espessura de 0.028 cm e apresenta as seguintes propriedades:

$$E_{11} = 146.75 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 11.37 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 61.80 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 61.80 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 61.80 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.30$$

$$\alpha_1 = -0.30 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

$$\alpha_2 = 28.1 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$$

O painel inteiro foi discretizado em seis elementos de nove nós. Admitindo-se uma variação uniforme de temperatura sobre o painel, foram realizadas análises para vários valores de θ entre 0° a 90° . A hipótese de grandes deslocamentos e uma regra de integração do tipo $3 \times 3 \times 1$ foram empregadas. Cada análise terminava quando a matriz de rigidez deixava de ser definida positiva.

A Figura 6.17 mostra as variações críticas da temperatura do painel em função de θ . Observa-se que para θ entre 0° e 40° , a flambagem térmica se dá por redução de temperatura, enquanto que para θ no intervalo que se estende desde um ângulo ligeiramente superior a 40° até 90° , ela se verifica por acréscimo de temperatura. Assim, existe um ângulo θ próximo de 40° para o qual o laminado não sofre flambagem térmica, por maior ou menor que seja a variação de temperatura aplicada. Com isto, pode-se concluir que para este último ângulo o coeficiente de dilatação térmica do painel na direção x deve ser nulo. Na realidade este resultado é apenas teoricamente possível, pois, as inevitáveis imperfeições intrínsecas ao processo de confecção do painel, e não consideradas na modelagem do mesmo, tornam tal condição praticamente inatingível.

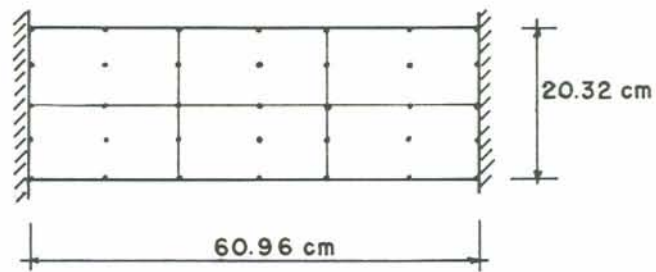


Figura 6.16 - Painel de grafite/epóxi sob variação térmica

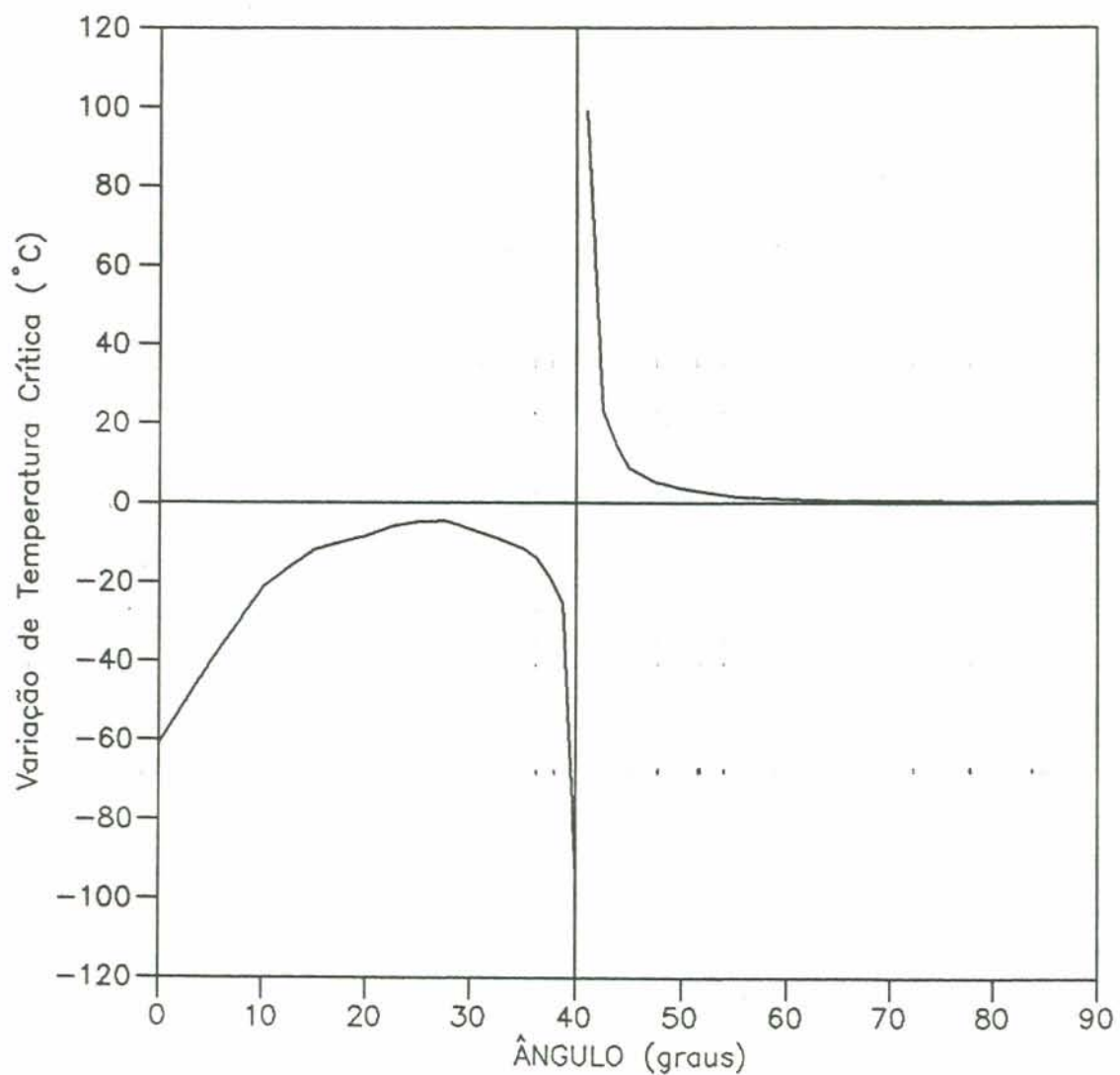


Figura 6.17 - Curvas variação de temperatura crítica x ângulo θ do painel de grafite/epóxi

7. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO - PARTE II: ANÁLISE VISCOELÁSTICA

7.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados vários exemplos numéricos de painéis planos e curvos de material composto laminado, admitindo-se que o material apresenta comportamento viscoelástico linear. Analisam-se as influências do esquema de laminação, de cargas mecânicas e da temperatura e umidade sobre as respostas dependentes do tempo exibidas por painéis laminados de grafite epóxi. Exemplos de flambagem viscoelástica de cascas são também apresentados.

7.2 - Exemplos Numéricos de Análise Viscoelástica

7.2.1 - Painel Plano de Grafite/Epóxi Submetido a Variação de Temperatura

Este exemplo consiste em um painel plano de grafite/epóxi constituído por oito lâminas dispostas em um esquema de laminação simétrico do tipo $[0/45/90/-45]_s$ (Figura 7.1). Cada lâmina tem uma espessura de 0.014 cm.

A temperatura do painel é admitida variar instantaneamente de 177°C para 24°C . O material apresenta as seguintes constantes elásticas e os coeficientes de

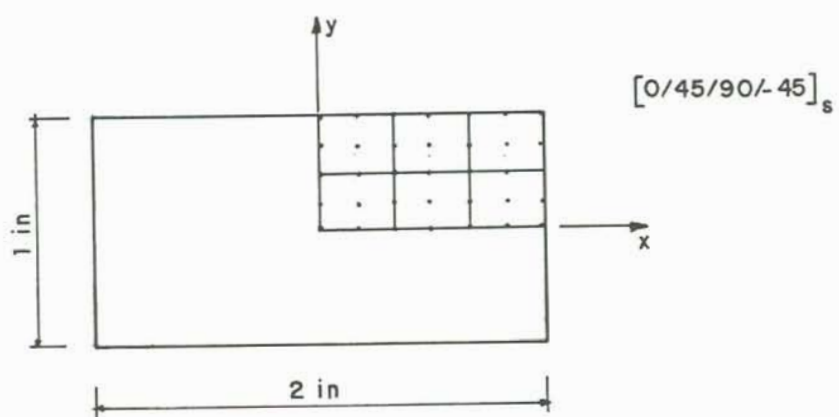


Figura 7.1 - Painel viscoelástico de grafite/épóxi sob redução de temperatura

dilatação térmica:

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= 18.00 \times 10^6 \text{ psi} & E_{22} &= 1.40 \times 10^6 \text{ psi} \\
 G_{12} &= 0.90 \times 10^6 \text{ psi} & \nu_{12} &= 0.34 \\
 \alpha_1 &= 0.20 \times 10^{-6} / ^\circ\text{F} & \alpha_2 &= 16.00 \times 10^{-6} / ^\circ\text{F}
 \end{aligned}$$

Supõe-se que o material apresenta comportamento elástico linear nas direções das fibras e viscoelástico linear na direção transversal às fibras e em cisalhamento, com as seguintes funções de fluência, em uma temperatura de 24°C:

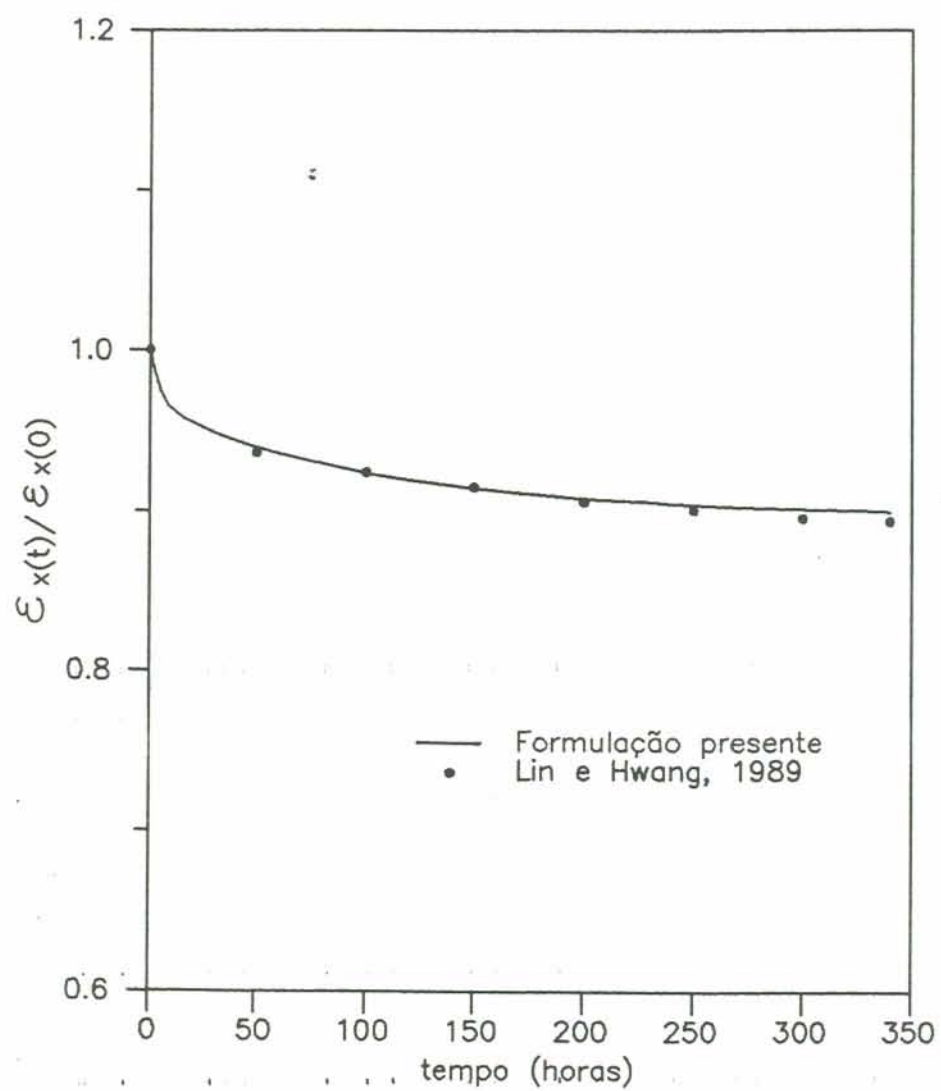
$$\begin{aligned}
 D_{22}(t) &= [0.8596 - 0.0318\exp(-t/300) - 0.0659\exp(-t/6000) \\
 &\quad - 0.0476\exp(-t/120000)] \times 10^{-6} \text{ (psi)}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{33}(t) &= [1.3170 - 0.0494\exp(-t/300) - 0.0924\exp(-t/6000) \\
 &\quad - 0.0641\exp(-t/120000)] \times 10^{-6} \text{ (psi)}^{-1}
 \end{aligned}$$

(t em minutos)

Estas propriedades do material foram retiradas do trabalho (LIN; HWANG, 1989), no qual o presente exemplo encontra-se analisado através de um modelo viscoelástico linear bidimensional. Em (LIN; HWANG, 1989) as funções de fluência do material são apresentadas por expressões em potência do tempo, as quais foram aproximadas pelas expressões exponenciais no tempo, dadas acima, através de um procedimento iterativo para ajuste de curvas.

Considerando a simetria do painel, somente



7.2 - Variação da deformação axial ϵ_x do painel laminado de grafite/epóxi ao longo do tempo

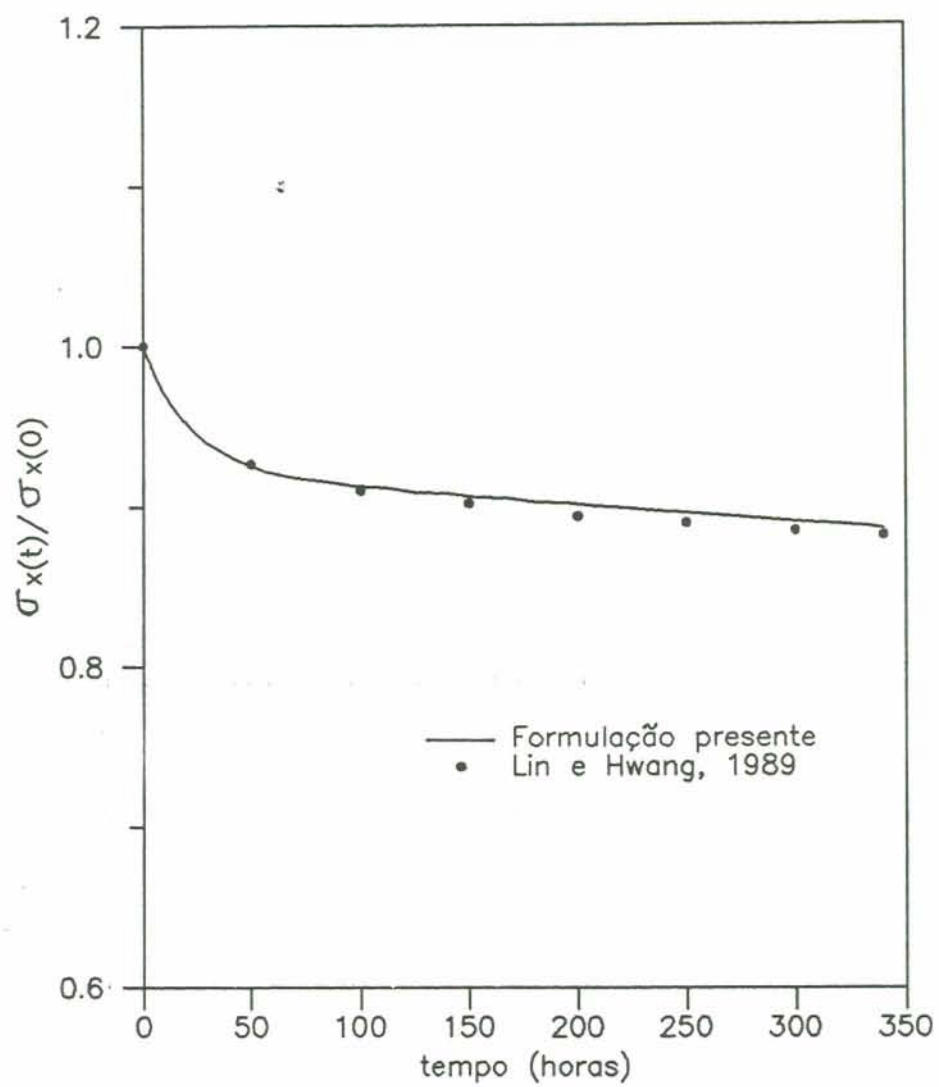


Figura 7.3 - Variação da tensão σ_x nas camadas com $\theta=0^\circ$ do painel de grafite/epóxi ao longo do tempo

um quarto do mesmo foi utilizado na análise. Malhas de 2 x 3 elementos de quatro e de nove nós foram adotadas. As soluções encontradas com o uso destes diferentes elementos foram praticamente idênticas. Também os resultados obtidos com as hipóteses de pequenos e de grandes deslocamentos foram praticamente iguais.

As Figuras 7.2 e 7.3 mostram as curvas que representam as variações das deformações e das tensões ao longo do tempo, encontradas na análise, juntamente com vários pontos da solução obtida por (LIN; HWANG, 1989). Observa-se que tanto as deformações como as tensões diminuem ao longo do tempo. As componentes de deformação e de tensão segundo à direção x, para as lâminas com $\theta = 0^\circ$, no tempo $t = 0$, valem $\epsilon_x(0) = -4.5551 \times 10^{-4}$ and $\sigma_x(0) = 5380$ psi, respectivamente. Adotou-se um intervalo de tempo inicial $\Delta t_0 = 200$ min e considerou-se um fator de translação do tempo igual a 1.

7.2.2 - Painel de Grafite/Epóxi Submetido a Tração Axial

A Figura 7.4 mostra um painel laminado de grafite/epóxi sujeito a uma carga de tração de 175.20 N/cm, atuante segundo a direção x. O painel é submetido a esta carga durante $t=200$ horas e, após este tempo, é descarregado instantaneamente, como ilustra a Figura 7.5.

As lâminas do painel têm a espessura e as mesmas propriedades daquelas do Exemplo 7.2.1.

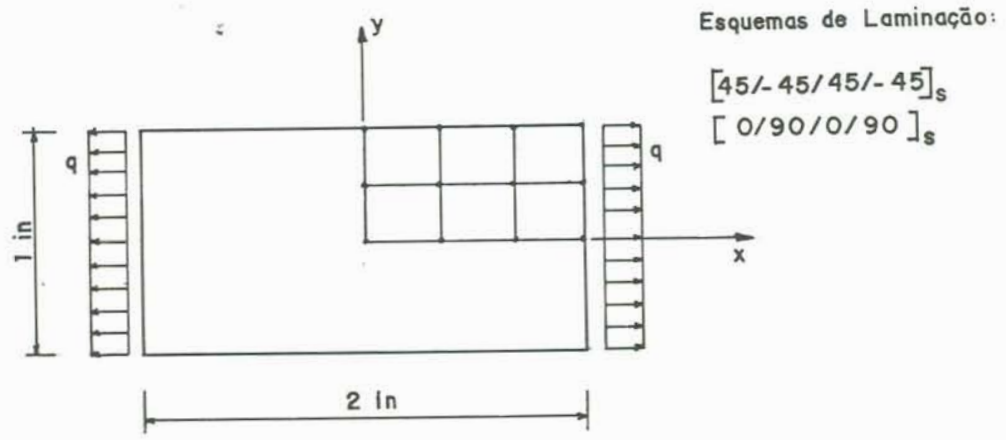


Figura 7.4 - Painel viscoelástico de grafite/epóxi sob carga axial

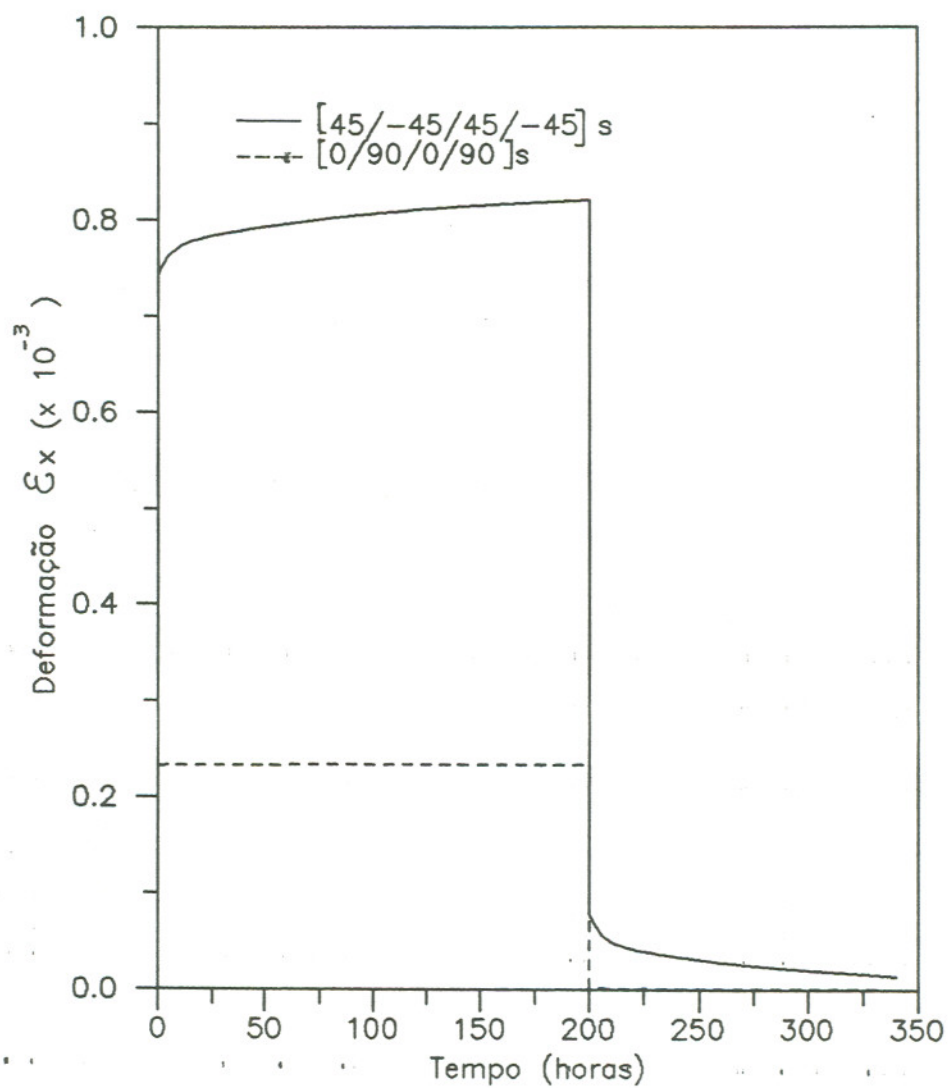


Figura 7.5 - Variação da deformação axial do painel de grafite/epóxi tracionado ao longo do tempo

Consideram-se dois esquemas de laminação simétricos: um "angle-ply" $[45/-45/45/-45]_s$ e outro "cross-ply" $[0/90/0/90]_s$. Para estas configurações foram estudadas as deformações em função do tempo.

A mesma malha de elementos finitos de quatro nós utilizada no Exemplo 7.2.1 foi adotada na análise. Os resultados encontrados estão apresentados na Figura 7.5 e na Tabela 7.1. Como esperado, o laminado do tipo "angle-ply" $[45/-45/45/-45]_s$ apresentou um mais acentuado comportamento dependente do tempo.

Tabela 7.1 - Valores de ϵ_x no Painel do Exemplo 7.2.2

tempo	$[45/-45/45/-45]_s$	$[0/90/0/90]_s$
0	0.7420×10^{-3}	0.2328×10^{-3}
200 ⁻	0.8206×10^{-3}	0.2349×10^{-3}
200 ⁺	0.7867×10^{-4}	0.2112×10^{-5}
400	0.1456×10^{-4}	0.3520×10^{-6}

Obs.: Valores do tempo t em horas

7.2.3 - Casca Esférica de Grafite/Epóxi sob Carga Térmica

A casca esférica mostrada na Figura 7.6 é constituída por oito lâminas de grafite/epóxi dispostas em um esquema de laminação simétrico do tipo "cross-ply" $[0/90/0/90]_s$. A espessura e as propriedades das lâminas são as mesmas do Exemplo 7.2.1. As condições de apoio das bordas da casca são as seguintes:

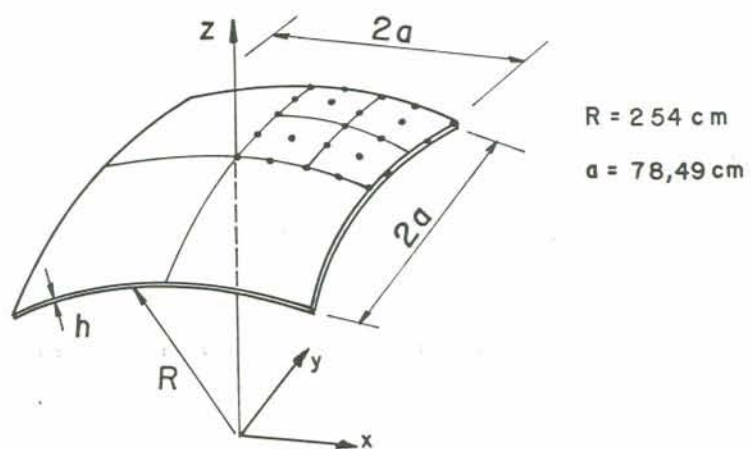


Figura 7.6 - Casca esférica laminada de grafite/epóxi sob variações de temperatura

$$x = \pm a \Rightarrow v = w = \theta_y = 0$$

$$y = \pm a \Rightarrow u = v = \theta_x = 0$$

Admite-se que a casca encontra-se submetida a variações instantâneas de temperatura, nas seguintes condições:

Caso I - $T_i = 350^\circ\text{F}$, $T_f = 75^\circ\text{F}$, $\varphi = 1.0$ ($T=75^\circ\text{F}$, $H=0.00\%$)

Caso II - $T_i = 350^\circ\text{F}$, $T_f = 75^\circ\text{F}$, $\varphi = 2.5$ ($T=75^\circ\text{F}$, $H=1.04\%$)

Caso III - $T_i = 350^\circ\text{F}$, $T_f = 75^\circ\text{F}$, $\varphi = 50.0$ ($T=75^\circ\text{F}$, $H=1.45\%$)

Caso IV - $T_i = 350^\circ\text{F}$, $T_f = 122^\circ\text{F}$, $\varphi = 171.79$ ($T=122^\circ\text{F}$,
 $H=0.14\%$)

onde T_i e T_f indicam os valores inicial e final da temperatura, respectivamente, H representa a concentração de umidade e φ é o fator de translação do tempo, o qual foi obtido de forma aproximada através de gráficos publicados por (CROSSMAN et al., 1977), para diferentes combinações de temperatura e umidade. Na análise foi adotado um único valor de φ para todas as direções.

Para a análise foi utilizado um quadrante da casca, o qual foi discretizado em quatro elementos de nove nós, como mostra a Figura 7.6. A hipótese de grandes

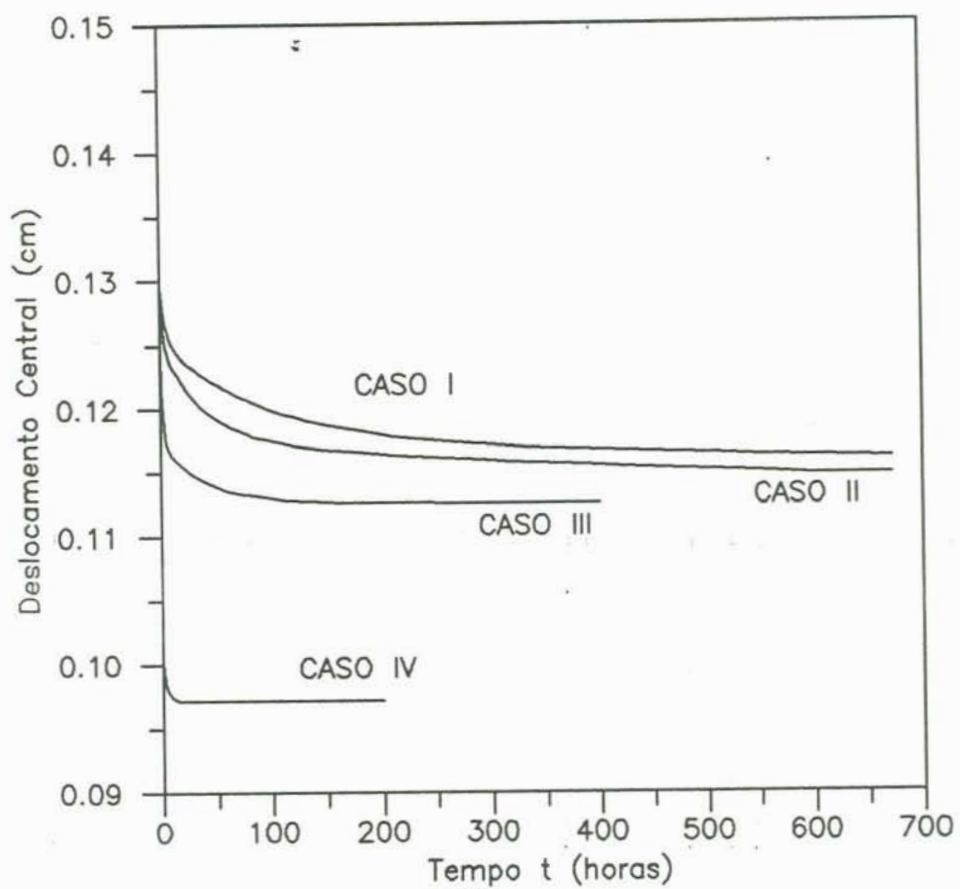


Figura 7.7 - Deslocamentos verticais no topo da casca de grafite/epóxi sob cargas de temperatura

deslocamentos foi adotada.

A Figura 7.7 apresenta os valores dos deslocamentos verticais no topo da casca em função do tempo t . Observa-se por esta última figura que um mais acelerado processo de deformação dependente do tempo é exibido para níveis mais elevados de temperatura e concentração de umidade. Pode-se então concluir que quanto maiores forem os níveis de temperatura e de umidade sobre a casca menores serão os tempos de estabilização das deformações. Este fato está implícito no conceito de fator de translação do tempo. Os valores do deslocamento vertical no topo da casca em $t=0$ valem -0.130 cm para os casos I, II e III e -0.0933 cm para o caso IV.

7.2.4 - Flambagem Viscoelástica de uma Casca de Material Isótropo

Para testar a formulação na descrição de flambagem viscoelástica de cascas, a casca esférica de material isótropo mostrada na Figura 7.8 foi analisada. As bordas da casca foram supostas sob as seguintes restrições:

$$x = \pm a \Rightarrow u = v = w = \theta_y = 0$$

$$y = \pm a \Rightarrow u = v = w = \theta_x = 0$$

As funções de fluência do material para

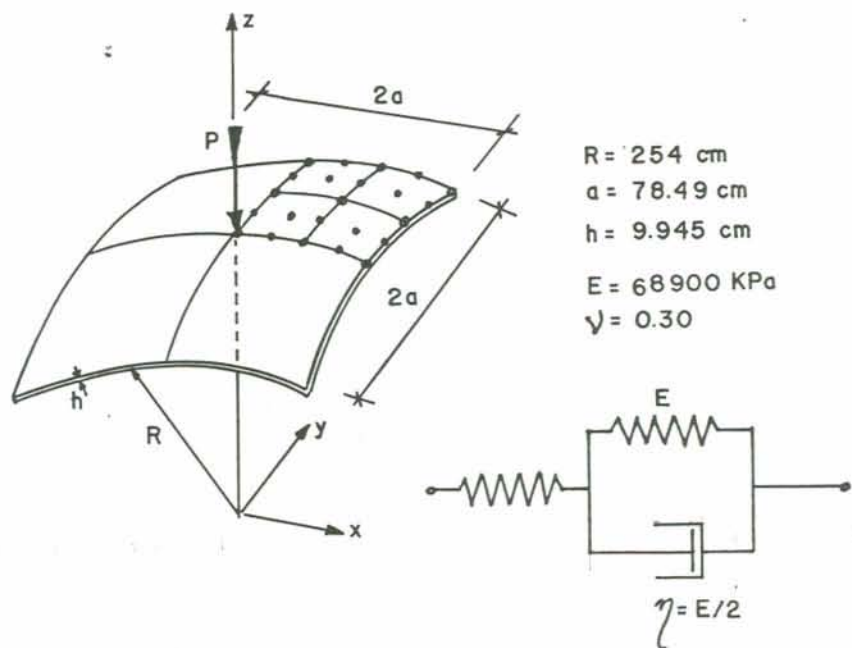


Figura 7.8 - Casca esférica viscoelástica de material isótropo sob carga concentrada

deformações normais e de cisalhamento foram tomadas como sendo, respectivamente,

$$D(t) = [14.51 - 14.51 \exp(-t/5)] (\text{KPa})^{-1}$$

$$S(t) = [37.74 - 37.74 \exp(-t/5)] (\text{KPa})^{-1}$$

onde o tempo t é medido em horas.

Inicialmente, para se ter conhecimento do comportamento elástico pós-crítico da casca, uma análise elástica geometricamente não linear foi realizada. Para isto foi utilizado o método de controle por deslocamentos generalizados. Os resultados desta análise estão mostrados na Figura 7.9. Uma malha com quatro elementos de nove nós foi adotada em um quadrante da casca.

Posteriormente, para diferentes valores da carga P , foram realizadas várias análises viscoelásticas e geometricamente não linear, usando como procedimento iterativo o método de Newton-Raphson. Os resultados obtidos através destas análises estão apresentados na Figura 7.10. Para uma carga $P=42.72$ KN, a matriz de rigidez da estrutura na configuração correspondente a $t \cong 1$ hora deixou de ser definida positiva, o que motivou a interrupção da análise pela impossibilidade de se verificar convergência com o uso do método de Newton-Raphson.

A Figura 7.10 mostra que o tempo crítico da casca, ou seja, o tempo para o qual os deslocamentos

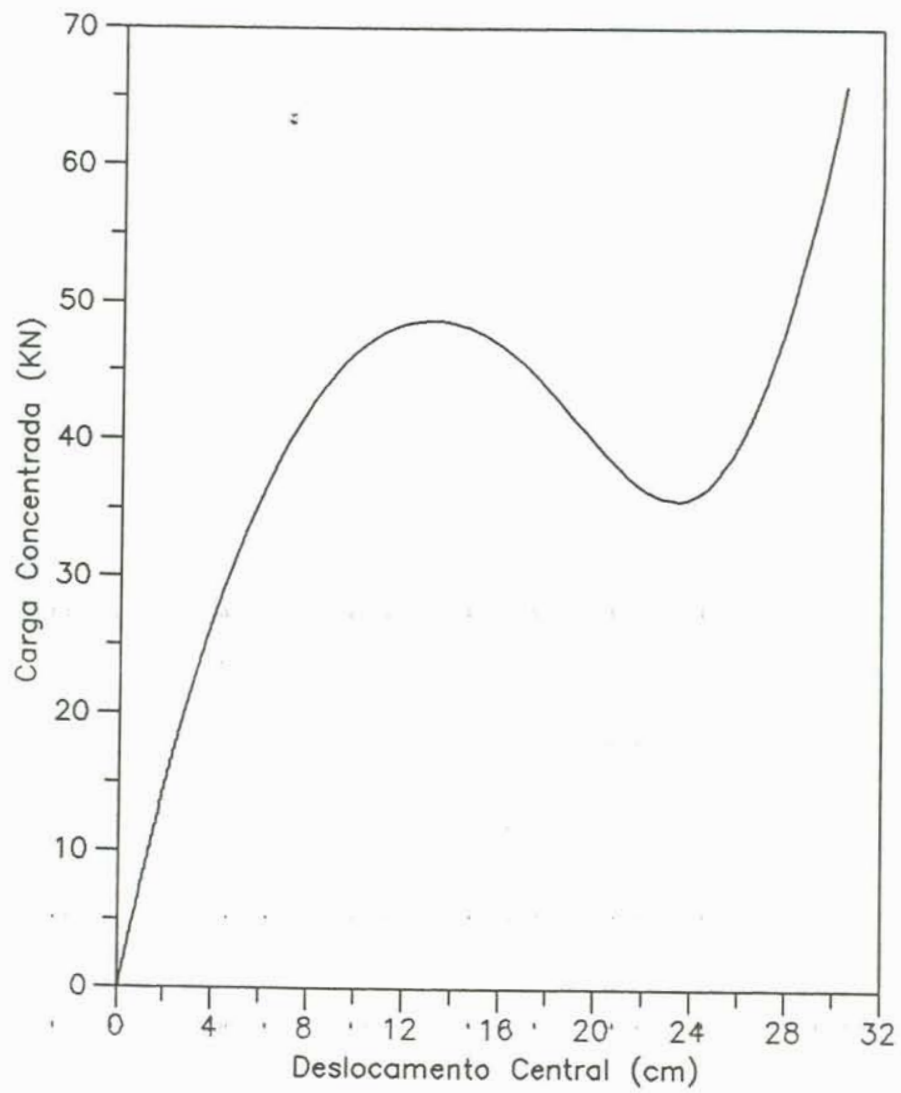


Figura 7.9 - Curva carga x deslocamento vertical central da casca isotrópica considerada elástica

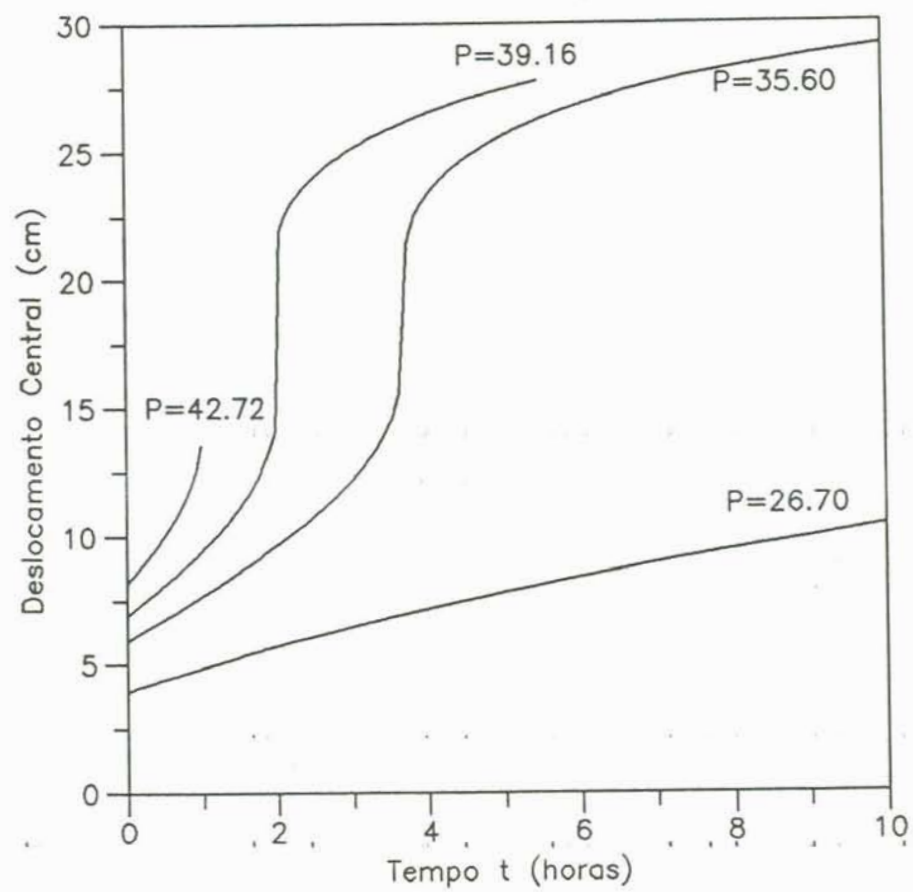


Figura 7.10 - Curvas deslocamento vertical central x tempo da casca isotrópica para diversos valores de P

crescem bruscamente, aumenta quando o valor da carga P é reduzido. Para uma carga de 39.16 KN, por exemplo, os resultados mostram que em $t = 2.0$ horas, os deslocamentos verticais no topo da casca crescem rapidamente até atingir um valor para o qual ocorre uma recuperação da rigidez. Como pode ser observado através da Figura 7.10, o início do crescimento brusco se verifica quando o deslocamento vertical do topo da casca assume um valor próximo daquele correspondente ao primeiro ponto limite (início do fenômeno denominado "snap-through"), mostrado na Figura 7.9. Neste ponto limite, o deslocamento vertical central da casca é aproximadamente igual à flecha da casca indeformada. A recuperação de rigidez, por sua vez, ocorre depois que se verifica o "snap-through", sendo iniciada quando o deslocamento vertical central vale cerca de duas vezes o valor da flecha inicial da casca indeformada. Para uma carga $P=26.70$ KN, o tempo crítico da casca não foi atingido durante a análise.

7.2.5 - Flambagem Viscoelástica de uma Casca Esférica de Grafite/Epóxi

Este exemplo consiste em uma casca esférica laminada, de grafite/epóxi, com um esquema de laminação do tipo "cross-ply" $[0/90]_s$ e submetida a uma carga vertical concentrada no topo, como aquela do Exemplo 7.2.4. A espessura de cada lâmina é de 0.028 cm, enquanto que as

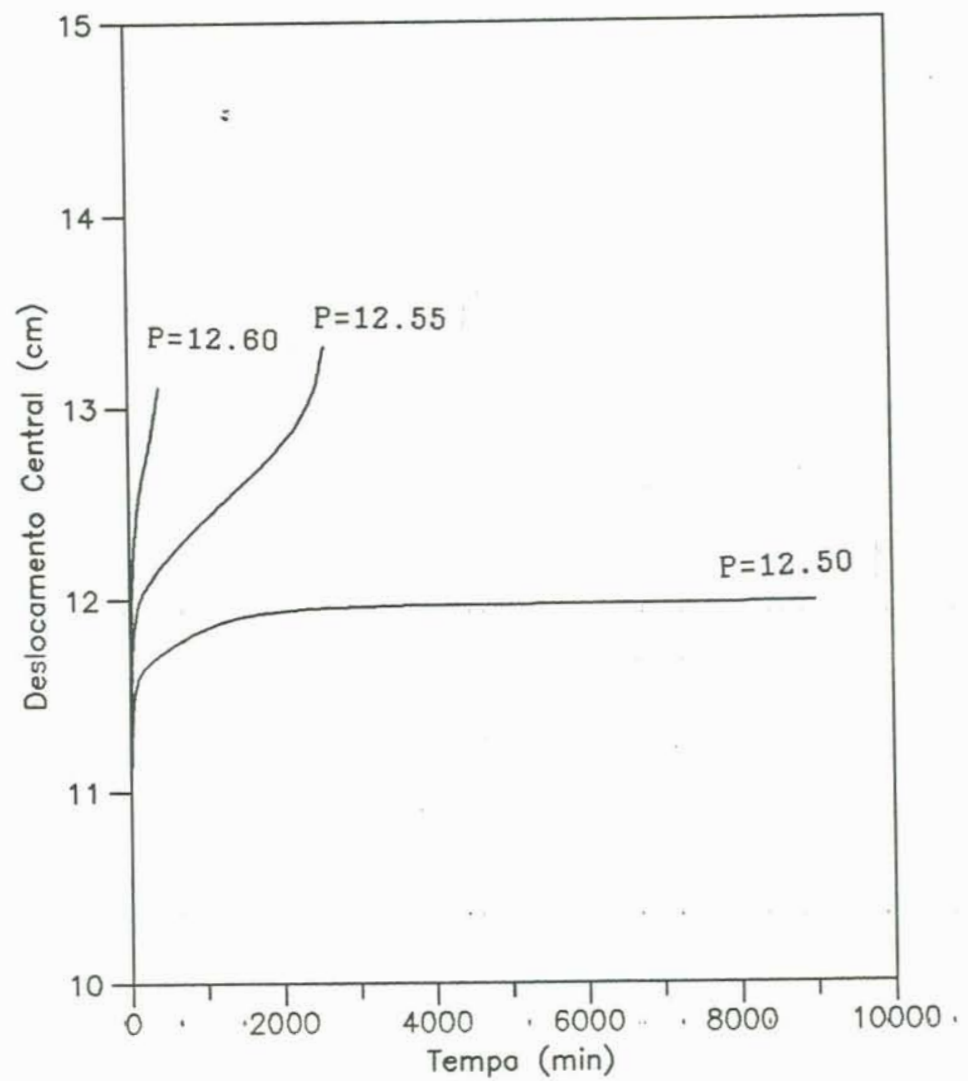


Figura 7.11 - Curva deslocamento vertical central x tempo da casca laminada para diversos valores de P

outras dimensões e a forma geométrica, assim como as condições de apoio, são idênticas a aquelas da casca do Exemplo 7.2.4.

O material é suposto viscoelástico linear com as mesmas propriedades do material do Exemplo 7.2.1. Um fator de translação do tempo igual a 50 foi adotado. Este valor foi retirado de (CROSSMAN et al., 1977) e corresponde ao material grafite/epóxi T300/936 com $T=24^{\circ}\text{C}$ e $H=1.45\%$. Devido à simetria da casca, somente um quarto da mesma foi analisado, usando-se para isto uma malha de quatro elementos de nove nós. Admitiu-se a ocorrência de grandes deslocamentos e utilizou-se o método de Newton-Raphson. Uma regra de integração numérica do tipo $2 \times 2 \times 1$ foi empregada.

Os resultados de análises viscoelásticas para diferentes valores da carga P estão apresentados na Figura 7.11. O valor da carga crítica elástica é de 12.727 KN. Para uma carga P igual ou menor do que 12.500 KN o tempo crítico da casca é muito grande devido ao não muito elevado comportamento dependente do tempo apresentado pelo material. As análises realizadas com as cargas de 12.60 KN e 12.55 KN foram interrompidas durante a ocorrência de crescimento brusco de deslocamentos, em configurações para as quais a matriz de rigidez da casca, em pontos próximos de singularidade, deixou de ser definida positiva.

8. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO - PARTE III: ANÁLISE DE FALHAS

8.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados exemplos numéricos tratando de falhas em painéis de materiais compostos laminados. São analisados casos que mostram as influências do esquema de laminação, da malha de elementos finitos e as diferenças dos valores das cargas de falha correspondentes aos critérios de Hashin e de Tsai-Wu.

Exemplos de análises que terminam quando é detectada a primeira falha ou que se prolonga após este ponto até se atingir a capacidade de carga última da estrutura são mostrados.

8.2 - Exemplos Numéricos de Análises de Falha

8.2.1 - Painel Plano de Grafite/Epóxi com uma Configuração $[\theta/-\theta]_s$ e Submetido a Carga de Tração

Trata-se este exemplo de um painel laminado de grafite/epóxi com quatro camadas dispostas em um esquema de laminação simétrico do tipo $[\theta/-\theta]_s$ e sujeito a uma carga de tração axial, conforme mostra a Figura 8.1. A espessura de cada lâmina é igual a 0.0127 cm e o material apresenta as seguintes propriedades:

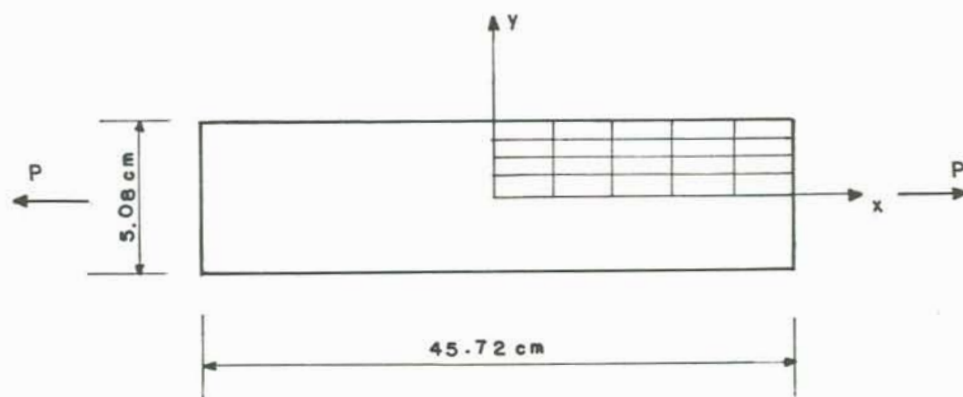


Figura 8.1 - Painel laminado de grafite/epóxi tracionado

$$E_{11} = 138.00 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 10.30 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 6.60 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 6.60 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 2.60 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.21$$

$$X_t = 1393.00 \text{ MPa}$$

$$X_c = 1447.90 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 44.80 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 172.40 \text{ MPa}$$

$$S_A = 62.10 \text{ MPa}$$

$$S_T = 62.10 \text{ MPa}$$

Para determinar os valores das cargas correspondentes à primeira falha, para diferentes ângulos θ , um quarto do painel foi discretizado em uma malha de 4x5 elementos de nove nós, como indicado na Figura 8.1. Os resultados encontrados, utilizando os critérios de Tsai-Wu e de Hashin, estão apresentados na Figura 8.2. Resultados experimentais devidos a (IRVINE; GINTY, 1985) e retirados de (HWANG; SUN, 1989) são também mostrados na Figura 8.2.

Cônforme se observa, no presente caso, os valores das cargas de falha encontradas pelos critérios de Hashin e de Tsai-Wu são próximos. Além disto, para $\theta \geq 45^\circ$ os resultados numéricos apresentam muito boa concordância com os experimentais. Para θ entre 0° e aproximadamente 30° observou-se, como primeira falha, quebra de fibras e, fora deste intervalo, fissuração da matriz. Neste exemplo foi utilizada uma regra de integração total de 3 x 3 x 1 pontos

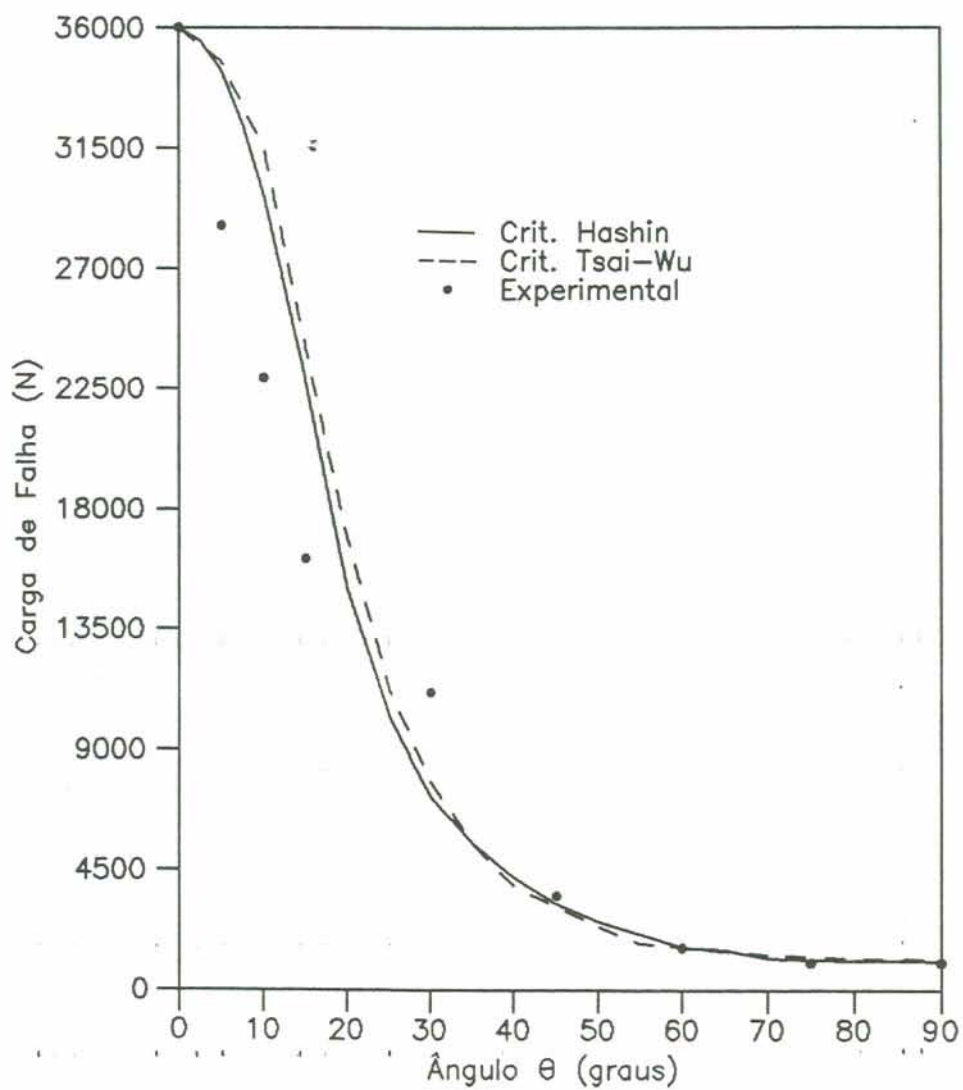


Figura 8.2 - Carga correspondente à primeira falha do painel laminado em função de θ

de Gauss por lâmina.

8.2.2 - Placa Laminada Simplesmente Apoiada Sujeita a Carga Uniformemente Distribuída

Este exemplo consiste de uma placa laminada de grafite/epóxi T300/5208, simplesmente apoiada, com diferentes esquemas de laminação simétricos e antimétricos (Figura 8.3). A placa encontra-se submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída e suas bordas apresentam as seguintes restrições:

a) Placa com Esquema de Laminação Simétrico

$$x = \pm 11.43 \text{ cm} \Rightarrow v = 0, w = 0 \text{ e } \theta_y = 0$$

$$y = \pm 6.35 \text{ cm} \Rightarrow u = 0, w = 0 \text{ e } \theta_x = 0$$

b) Placa com Esquema de Laminação Antimétrico

$$x = \pm 11.43 \text{ cm} \Rightarrow u = 0, w = 0 \text{ e } \theta_y = 0$$

$$y = \pm 6.35 \text{ cm} \Rightarrow v = 0, w = 0 \text{ e } \theta_x = 0$$

A espessura de cada lâmina é de 0.0127 cm e o material apresenta as seguintes propriedades:

$$E_{11} = 132,30 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 10,75 \text{ GPa}$$

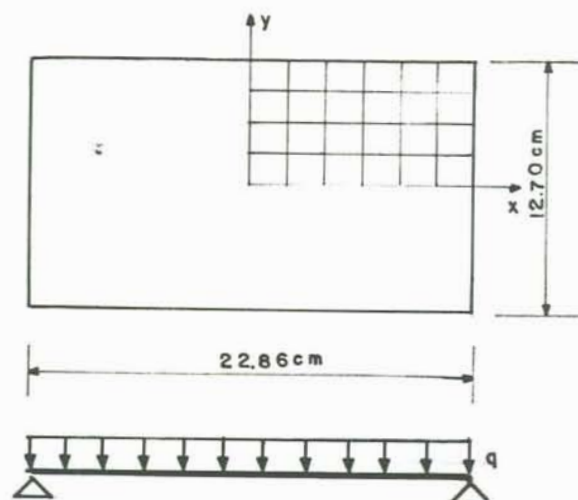


Figura 8.3 - Placa laminada uniformemente carregada

$$G_{12} = 5,65 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 5,65 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 3,40 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,24$$

$$X_t = 1512,35 \text{ MPa}$$

$$X_c = 1694,95 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 43,75 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 43,75 \text{ MPa}$$

$$S_A = 86,80 \text{ MPa}$$

$$S_T = 67,50 \text{ MPa.}$$

Tendo em vista as condições de simetria da placa, garantidas pelos esquemas de laminação considerados, somente um quarto da mesma foi utilizado na análise. As seguintes restrições ao longo dos eixos da placa foram usadas: $x = 0 \Rightarrow u = \theta_x = 0$, $y = 0 \Rightarrow v = \theta_y = 0$ (esquema de laminação simétrico) e $x = 0 \Rightarrow v = \theta_x = 0$, $y = 0 \Rightarrow u = \theta_y = 0$ (esquema de laminação antimétrico). Foram adotadas malhas de 2x2, 3x3, 4x4 e 4x6 elementos de nove nós e os esquemas de laminação:

$$[0/90/90/0] \quad (A1)$$

$$[0/90/0/90] \quad (A2)$$

$$[45/-45/-45/45] \quad (B1)$$

$$[45/-45/45/-45] \quad (B2)$$

$$[15/-15/-15/15] \quad (C1)$$

$$[15/-15/15/-15] \quad (C2)$$

$$[45/-45/90/0/45/90/-45/0]_s \quad (D1)$$

$$[45/-45/0/90/45/0/-45/90]_s \quad (D2)$$

$$[45/0/-45/0/-45/90/0/45]_s \quad (D3)$$

$$[45/0/-45/0/-45/0/45/0]_s \quad (D4)$$

As cargas correspondentes à primeira falha foram determinadas considerando-se os critérios de falha de Tsai-Wu e de Hashin. A hipótese de pequenos deslocamentos foi assumida. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 8.1, na qual pode-se também observar as influências do esquema de laminação e da malha de elementos finitos sobre os valores da carga de falha.

Tabela 8.1 - Valores das Cargas Correspondentes à Primeira Falha de uma Placa Laminada Simplesmente Apoiada Sujeita a Carga Uniforme

	2 x 2	3 x 3	4 x 4	4 x 6
A1	0.543	0.537	0.535	0.534
	0.522 (*)	0.516	0.514	0.513
A2	0.760	0.753	0.750	0.749
	0.745	0.738	0.735	0.734
B1	0.606	0.523	0.463	0.421
	0.636	0.547	0.481	0.427
B2	1.311	1.250	1.206	1.166
	1.228	1.169	1.128	1.090
C1	0.352	0.322	0.300	0.291
	0.339	0.309	0.289	0.280
C2	0.488	0.460	0.442	0.428
	0.467	0.441	0.424	0.410
D1	22.719	21.528	20.850	20.283
	20.589	19.256	19.131	18.726
D2	20.199	19.256	18.681	18.279
	18.099	17.419	16.917	16.569
D3	15.318	14.898	14.652	14.523
	14.727	14.314	14.073	13.938
D4	14.565	14.114	13.845	13.701
	13.999	13.551	13.284	13.140

(*) Valores superiores - Critério de Tsai-Wu

Valores inferiores - Critério de Hashin

Como é observado na Tabela 8.1, as cargas de falha obtidas com o critério de Hashin, em geral, são menores (exceto no caso do esquema de laminação B1) do que aquelas determinadas com o critério de Tsai-Wu. Outro fato que pode ser observado, neste exemplo, é a redução dos valores das cargas de falha com o aumento do número de elementos finitos usados na discretização da placa. Isto configura a sensibilidade dos resultados com relação à malha usada na modelagem da estrutura.

8.2.3 - Painel Plano de Grafite/Epóxi com Configuração $[\theta_4/0_4/-\theta_4]_s$ Submetido à Tração

Este exemplo consiste de um painel plano de grafite/epóxi T300/5208, com uma configuração $[\theta_4/0_4/-\theta_4]_s$, submetido a tração (Figura 8.4). O material das lâminas tem as mesmas propriedades do exemplo anterior.

O painel foi analisado considerando-se vários valores de θ no intervalo $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ e admitindo-se a progressividade das falhas. O critério de Hashin foi adotado juntamente com o critério de degradação dado em (3.49) e (3.50) com $\beta_a = 1$ e admitindo-se que em caso da ocorrência de fissuração da matriz os coeficientes de rigidez afetados por este tipo de falha, e que são tomados como nulos em (3.50), são iguais aos seus valores iniciais multiplicados por um fator β_m , tentando-se considerar uma reserva de rigidez da matriz depois de fissurada. Foram realizadas análises com $\beta_m = 0$ e $\beta_m = 0.30$. Um quarto do

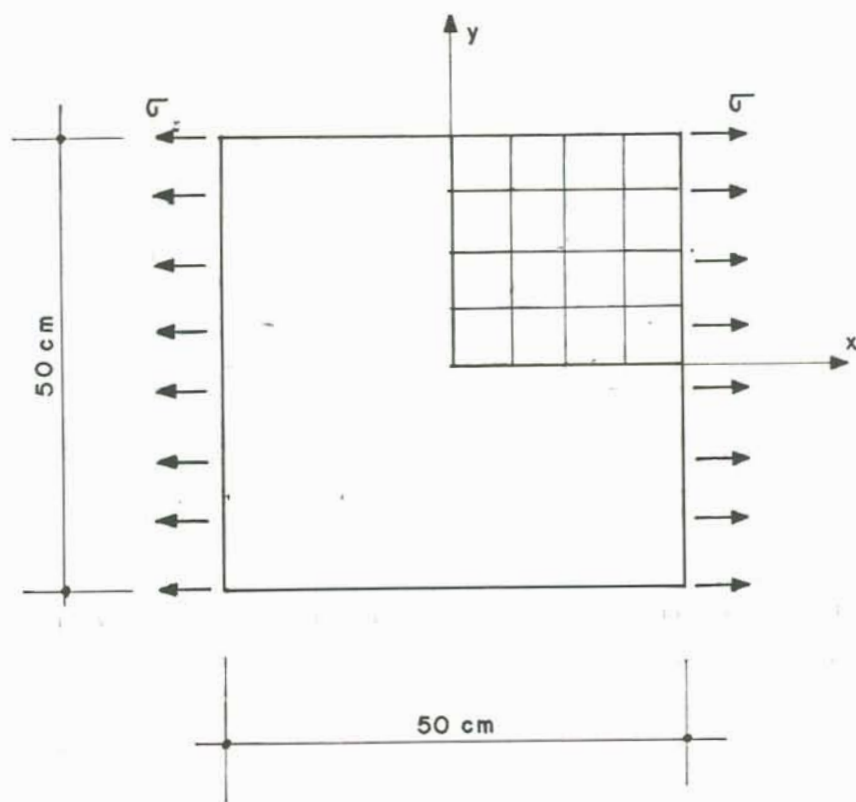


Figura 8.4 - Painel laminado de grafite/epóxi sob tração e sujeito á falhas progressivas

painel foi discretizado em uma malha de 4 x 4 elementos de quatro nós.

A Tabela 8.2 apresenta, para diversos ângulos θ , os valores últimos da tensão externa σ (LPF), correspondentes às duas condições de degradação acima especificadas, assim como aqueles obtidos em uma análise de primeira falha (FPF). A representação gráfica destes valores é mostrada na Figura 8.5 em conjunto com resultados experimentais retirados de (TOLSON; ZABARAS, 1991) e devidos a (SONI, 1983).

Tabela 8.2 - Valores das tensões correspondentes a FPF e LPF para vários ângulos θ .

θ ($^{\circ}$)	FPF	LPF	
		$\beta_m = 0$	$\beta_m = 0.30$
0	1483.80	1483.80	1483.80
15	1113.90	1113.90	1291.10
30	415.05	503.50	737.40
45	483.70	483.70	562.00
60	284.55	505.30	532.71
75	222.95	502.50	527.89
90	209.50	504.10	528.70

Obs.: Valores em MPa

Observa-se pela Figura 8.5 que os resultados numéricos obtidos através da presente formulação apresentam uma boa aproximação em relação aos valores experimentais. Para os ângulos $\theta=15^{\circ}$ e $\theta=30^{\circ}$ verifica-se a

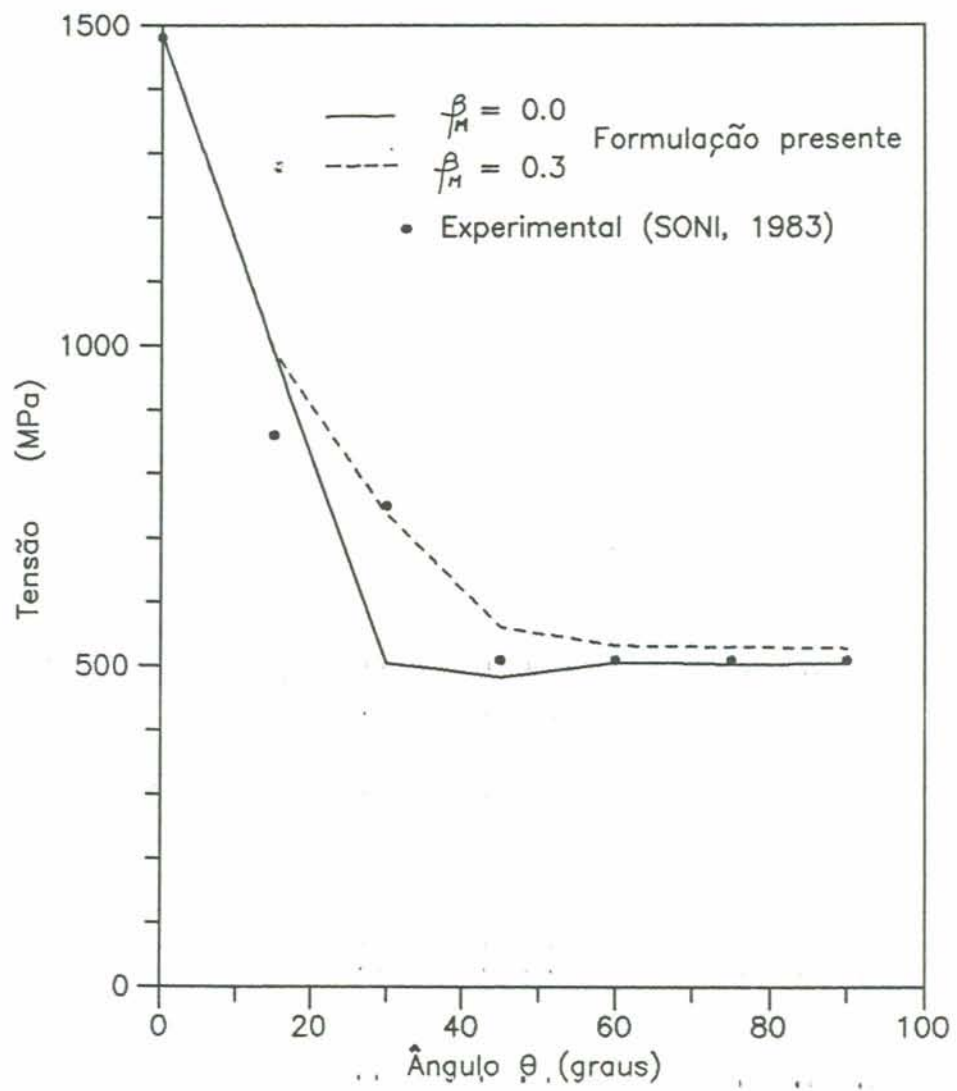


Figura 8.5 - Variação da tensão externa última do painel laminado em função do ângulo θ .

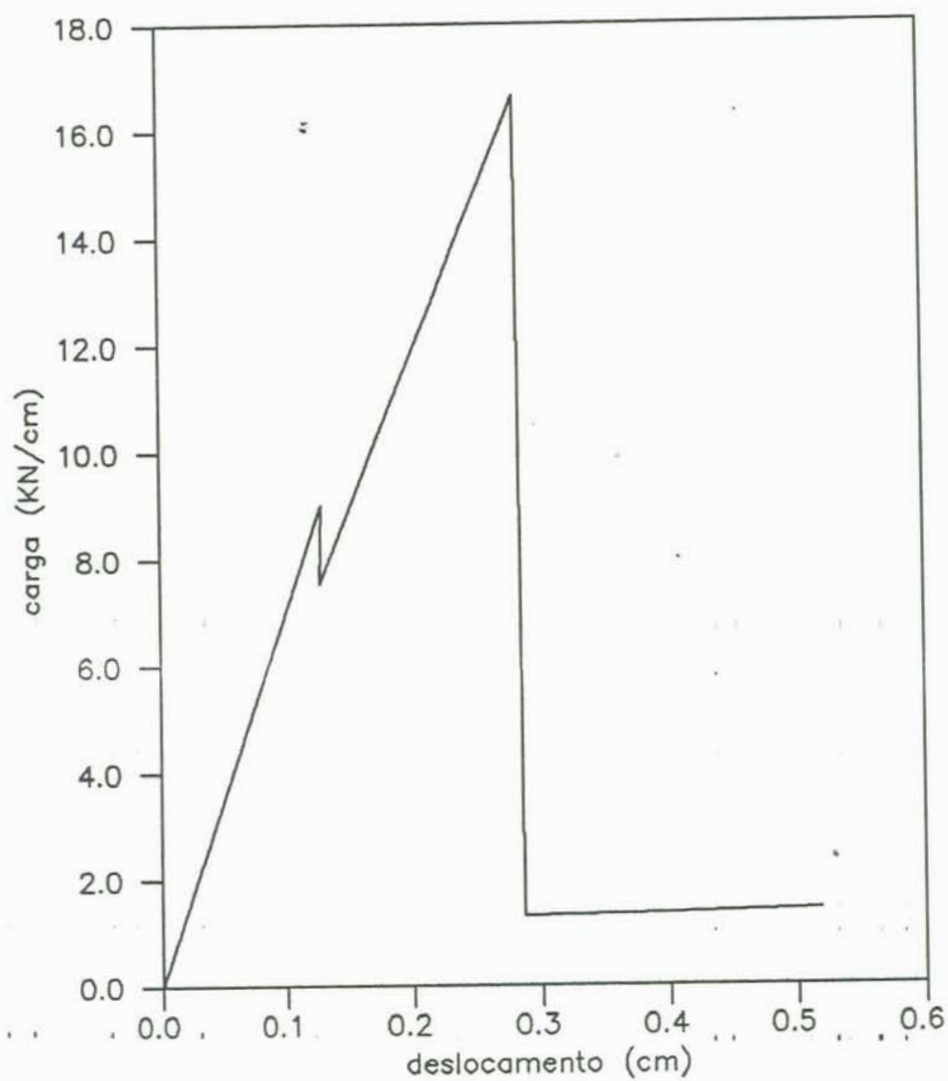


Figura 8.6 - Diagrama carga x deslocamento do painel laminado para $\theta = 60^\circ$

maior diferença entre o valor obtido experimentalmente e aqueles encontrados através dos modelos de degradação acima expostos. Como é de se esperar, os valores das tensões máximas correspondentes à condição de degradação em que $\beta_m = 0.0$ são menores (ou igual para $\theta = 0^\circ$) do que aqueles que resultam da condição de degradação com $\beta_m = 0.30$. Um detalhe que pode ser observado através da Figura 8.5 é que para $\theta \geq 45^\circ$ as tensões máximas que o painel suporta não são muito diferentes. Uma regra de integração total com $2 \times 2 \times 1$ pontos de Gauss por lâmina foi adotada neste exemplo.

A Figura 8.6 mostra a trajetória carga x deslocamento do painel para $\theta = 60^\circ$, obtida através da condição de degradação com $\beta_m = 0.30$. Neste caso, os valores das cargas correspondentes a FPF e LPF são, respectivamente, 8.7 KN/cm e 16.5 KN/cm, os quais podem ser encontrados multiplicando-se as tensões de falha dados nas colunas 2 e 4 da Tabela 8.2 pela espessura do laminado.

Como pode-se observar na Figura 8.6, depois de atingido o valor máximo da carga ocorrem acentuadas redistribuições de tensões que implicam em um quase total decarregamento da estrutura, representado na mencionada trajetória por um ramo quase vertical. Este caso serve para ilustrar a capacidade do modelo proposto em prosseguir com a análise após o atingimento da carga máxima da estrutura.

8.2.4 - Painel Plano de Grafite/Epóxi com Furo Central e com Configuração $[0/+45/90]_s$ Sujeito à Tração

O painel plano de grafite/epóxi T300/1034-C dotado de um furo central, mostrado na Figura 8.7, foi analisado admitindo-se falhas progressivas. O painel apresenta vinte e quatro lâminas dispostas em um esquema de laminação simétrico do tipo $[0/\pm 45/90]_{9s}$ e encontra-se submetido a uma carga de tração. O furo tem um diâmetro de 0.635 cm.

O material das lâminas apresenta as seguintes propriedades:

$$E_{11} = 146,86 \text{ GPa}$$

$$E_{22} = 11,38 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 6,18 \text{ GPa}$$

$$G_{13} = 6,18 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 3,09 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0,30$$

$$X_t = 1730,65 \text{ MPa}$$

$$X_c = 1379,00 \text{ MPa}$$

$$Y_t = 66,54 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 268,21 \text{ MPa}$$

$$S_A = 133,76 \text{ MPa}$$

$$S_T = 133,76 \text{ MPa.}$$

Este exemplo foi analisado por CHANG; CHANG (1987), através de uma modelo em elementos finitos bidimensionais. Pelo fato deste último trabalho não especificar G_{23} e S_T , os valores destas grandezas foram arbitrados na presente análise. Como o painel se comporta praticamente em estado plano de tensão, os valores destas

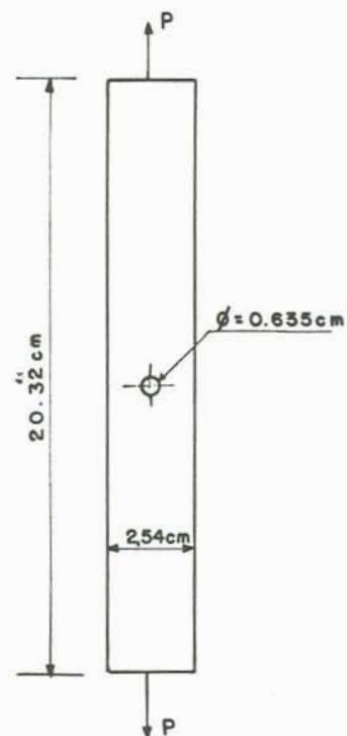


Figura 8.7 - Painel laminado dotado de um furo central



Figura 8.8 - Malha de elementos finitos

últimas grandezas não têm muita importância.

Utilizando-se a condição de simetria da estrutura, somente um quarto do painel foi analisado. Adotou-se uma malha de elementos de quatro nós, como mostrado na Figura 8.8. Foram utilizados o critério de Hashin e o modelo de degradação com $\beta_{\alpha} = 1$. Uma regra de integração numérica do tipo $2 \times 2 \times 1$ em cada lâmina foi adotada.

A primeira falha do painel ocorreu na matriz das lâminas com fibras normais à direção da carga, ou seja, nas lâminas com $\theta = 90^{\circ}$ nos pontos de Gauss situados no canto inferior da malha e vizinhos ao furo (Figura 8.9 a). A carga correspondente a esta falha foi de 11.26 KN.

Continuando com o processo de incrementação da carga, foi observado que as falhas evoluem, a partir da vizinhança do furo, em direção às laterais do painel. O início da quebra das fibras se deu para uma carga de 20.11 KN, em pontos de Gauss situados na mesma posição daqueles sobre os quais se deu a primeira falha na matriz, porém, sobre as lâminas com $\theta = 0^{\circ}$. As Figuras 8.9 e 8.10 mostram as configurações de falhas na matriz e em fibras do painel, respectivamente, para diversos valores da carga e para as camadas com $\theta = 0^{\circ}$ e $\theta = 90^{\circ}$.

A máxima carga encontrada para o painel foi de aproximadamente 22.25 KN. De acordo com CHANG; CHANG (1987) o valor desta carga é de 5100 lbf ($\cong 22.69$ KN). Depois de atingida a máxima capacidade de carga do painel,

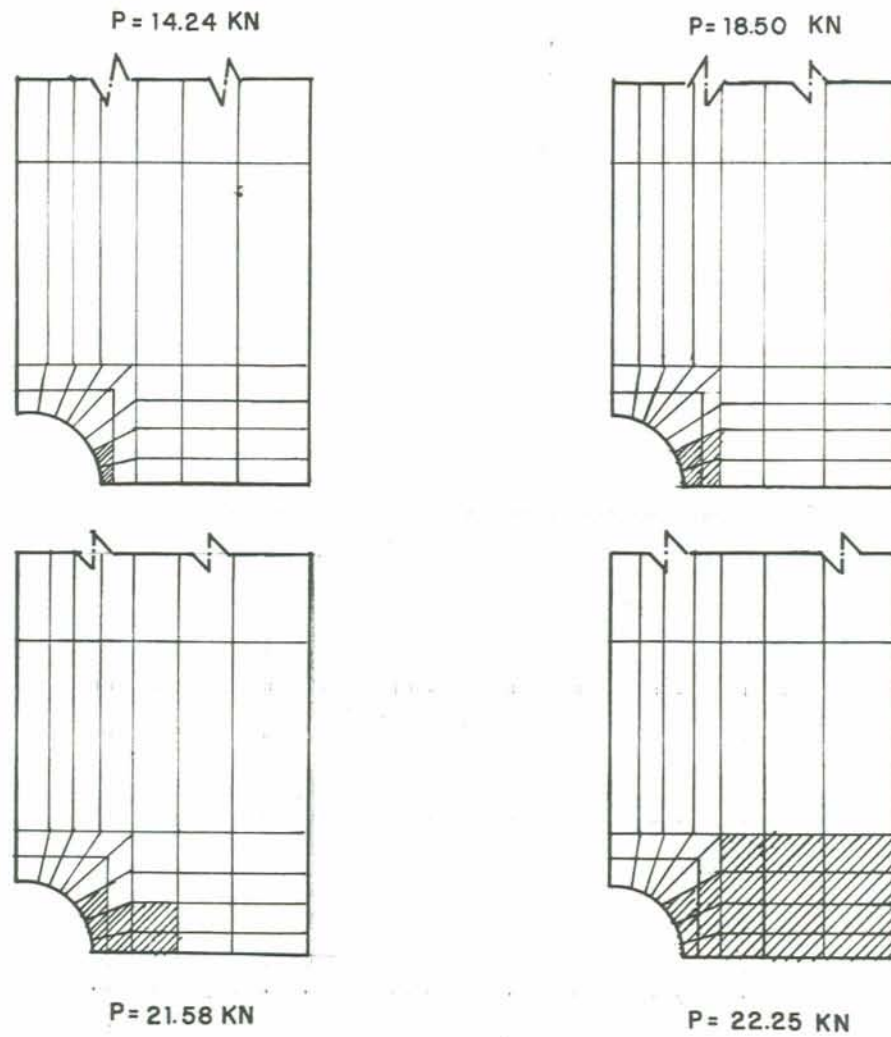


Figura 8.9 - Configurações de falhas na matriz da lâmina com $\theta = 90^\circ$ para vários níveis da carga P

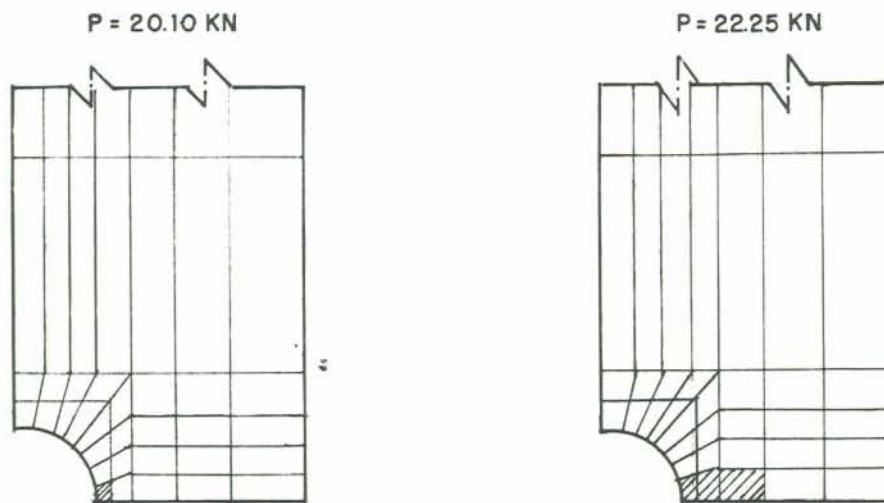


Figura 8.10 - Configurações de falhas em fibras da lâmina com $\theta = 0^\circ$ para vários níveis da carga P

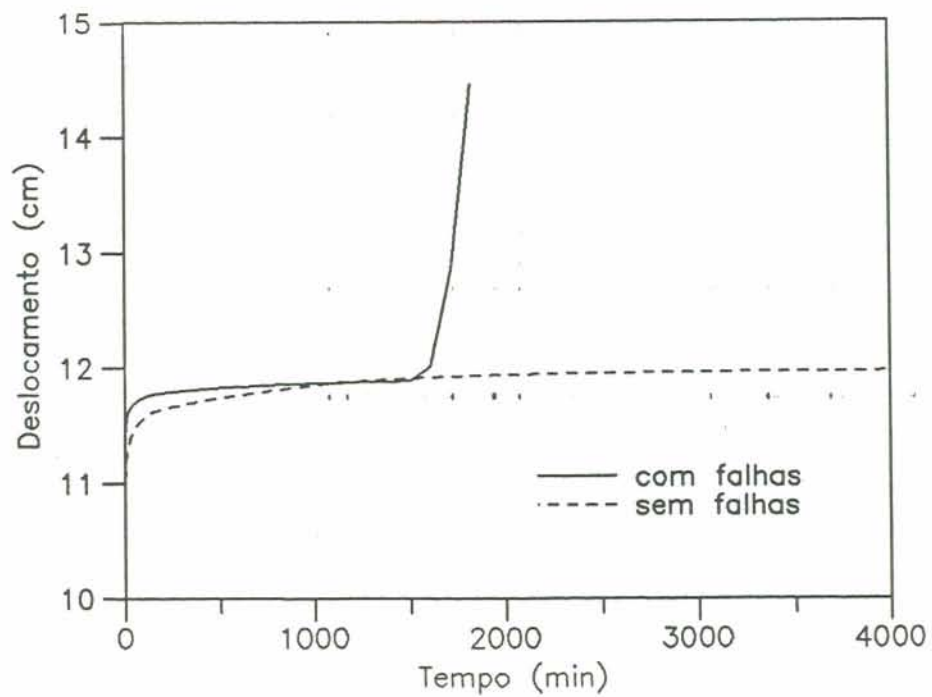


Figura 8.11 - Deslocamentos verticais da casca em função do tempo com e sem consideração de falhas

foi observado um processo de descarregamento do mesmo acompanhado por aumentos de deslocamentos e uma rápida evolução das falhas nas fibras e na matriz em todas as camadas.

Observa-se neste exemplo que a diferença entre os valores da carga correspondente ao início de falha em fibras e da carga última do painel não é grande. Isto pode ser explicado pelo fato de que as falhas nas fibras ocorrem depois que a matriz das lâminas já apresentam um certo grau de degradação, o que implica em uma maior solicitação das fibras que, por sua vez, sendo de grafite, apresentam um comportamento frágil.

8.2.5 - Casca Esférica Viscoelástica Laminada

Considera-se neste exemplo a casca esférica viscoelástica de grafite/epóxi, analisada no Exemplo 7.2.5, como sujeita a falhas progressivas. Para a análise foram adotadas uma carga concentrada $P=12.50$ KN e a mesma discretização usada no exemplo acima citado.

A análise foi realizada empregando-se o critério de falhas da Máxima Deformação e a hipótese de que somente as propriedades elásticas do material se degradam na presença de falhas. Os efeitos de não linearidade geométrica foram considerados e o Método de Newton Raphson foi empregado. Utilizou-se uma regra de integração completa com $3 \times 3 \times 1$ pontos de integração por lâmina de cada elemento. Como deformações totais limites foram adotados os

seguintes valores:

$$X_{\epsilon t} = 0.00925$$

$$Y_{\epsilon t} = 0.00541$$

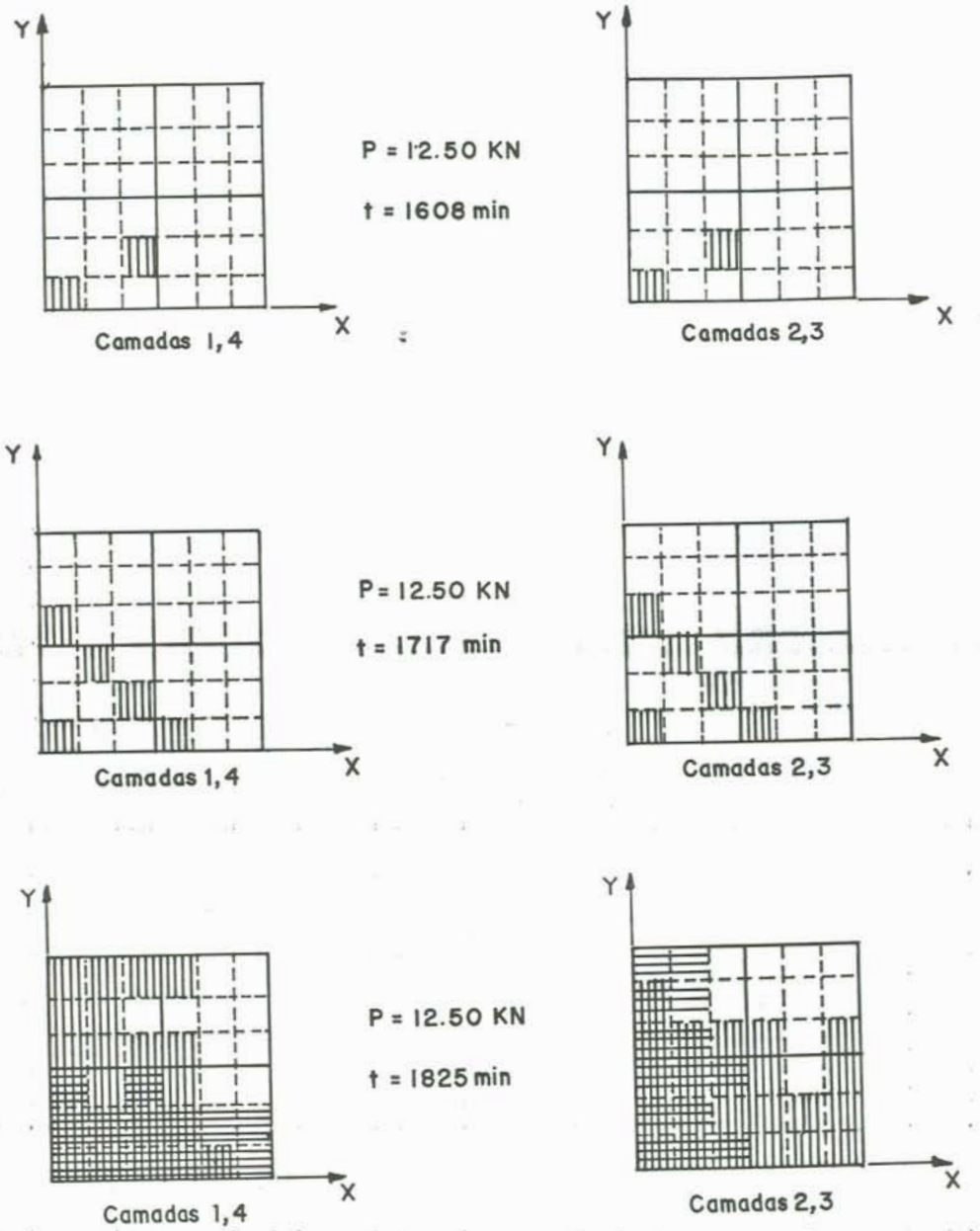
$$S_{\epsilon A} = 0.0230$$

$$X_{\epsilon c} = 0.0104$$

$$Y_{\epsilon c} = 0.02565$$

$$S_{\epsilon T} = 0.0230$$

Os resultados mostraram que para uma carga P aproximadamente igual a 10 KN ocorreram falhas na matriz das quatro camadas, detectadas sobre os pontos de integração localizados próximos ao topo da casca. Depois da aplicação da carga, durante o processo de fluência da casca, foram detectadas novas falhas quando o tempo atingiu os valores de 1608 min (falhas na matriz), 1717 min (falhas na matriz) e 1825 min (falhas em fibras e matriz). Para este último tempo, a matriz de rigidez da casca deixou de ser definida positiva e, então, a análise foi terminada. Configurações de falhas das lâminas, para um quadrante da casca, estão representadas na Figura 8.11. Nesta figura as lâminas de cada elemento foram divididas em nove partes correspondentes aos pontos de integração tomados sobre as mesmas.



Convenção:

 Falha na matriz

 Falha nas fibras

Figura 8.12 - Configurações de falhas das lâminas da casca em diferentes valores do tempo

9. CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um modelo numérico baseado em uma descrição cinemática Lagrangeana Total e em elementos finitos tridimensionais degenerados, deduzidos para análise de cascas, foi apresentado para descrever o comportamento de painéis laminados submetidos a cargas mecânicas convencionais e a ações de temperatura e de umidade.

As lâminas foram consideradas ortótropas e constituídas de material elástico linear, com propriedades dependentes ou não da temperatura e da concentração de umidade absorvida, ou viscoelástico linear do tipo higrotermo-reologicamente simples. Para o caso de materiais compostos laminados reforçados por fibras, o modelo permite a consideração de falhas por quebras ou flambagem de fibras ou por fissuração da matriz, detectadas através dos critérios macroscópicos polinomiais de Hashin e de Tsai-Wu, além do critério da Máxima Deformação.

Basicamente, o modelo pode realizar análise elástica ou viscoelástica, geometricamente linear ou não linear com grandes deslocamentos e pequenas deformações.

Quando se considera as lâminas sujeitas a falhas, a análise pode terminar logo após o aparecimento da primeira falha ou, ao contrário, prosseguir até que a estrutura atinja um estado de degradação tão avançado que

praticamente perca sua capacidade de carga, o que no modelo computacional é acusado por um número exagerado de iterações ou por divergência no processo numérico.

Com relação ao desempenho dos procedimentos numéricos na solução dos diversos casos utilizados como teste da formulação, pode-se afirmar que os mesmos demonstraram estabilidade e eficiência sempre que as condições impostas na análise, tais como as regras de integração numérica e os valores das cargas de referência, foram compatíveis com as características da estrutura a ser analisada. Comparações de resultados, tanto para deslocamentos como para tensões e esforços internos solicitantes, mostraram uma boa concordância em relação a outros encontrados na literatura.

Diversos exemplos analisados demonstraram a capacidade do modelo na descrição do comportamento não linear de placas e cascas elásticas submetidas a ações de temperatura e de umidade, assim como evidenciaram a importância da consideração dos efeitos destes fatores ambientais sobre as propriedades elásticas. As influências de outros fatores, tais como: esquemas de laminação e condições de contorno, sobre os valores críticos da temperatura de placas também foram analisadas.

A utilização do modelo na descrição do comportamento viscoelástico de painéis de grafite/epóxi confirmou que as deformações dependentes do tempo em tais materiais podem ser importantes e que dependem do esquema

de laminação, da temperatura e da concentração de umidade absorvida. O modelo também demonstrou um bom desempenho na descrição de flambagem viscoelástica de cascas.

Em análises de falhas foi observado que os critérios de Hashin e de Tsai-Wu, em geral, proporcionam valores não muito diferentes para as cargas correspondentes à primeira falha na estrutura. Verificou-se também nos casos analisados que o critério de Hashin, na maioria das vezes, fornece cargas de falha ligeiramente menores que aquelas encontradas com o uso do critério de Tsai-Wu.

Devido a ausência de informações a respeito de falhas em materiais compostos submetidos a processos de fluência, não se implementou no presente modelo um critério mais elaborado para detecção de falhas durante a ocorrência de deformações dependentes do tempo. Para o caso de análise viscoelástica considerando falhas, o modelo permite o uso do critério da Máxima Deformação expresso em termos de deformações totais juntamente com a hipótese de degradação apenas das propriedades elásticas do material.

Quando utilizando o método de controle por deslocamentos generalizados, o modelo demonstrou um ótimo desempenho numérico na análise de exemplos envolvendo falhas progressivas, apresentando excelente capacidade de convergência durante as etapas de redistribuição de tensões realizadas imediatamente após a detecção de novas falhas na estrutura. Somente nas situações limites em que a capacidade de carga da estrutura analisada se exauria

verificou-se divergência.

Embora nos exemplos envolvendo falhas progressivas os resultados obtidos através do modelo proposto tenham se comportado numericamente bem e com uma aparente coerência sob o ponto de vista físico, as soluções para aquele tipo de análise devem sempre ser avaliadas tendo-se em consideração a alta complexidade do fenômeno de degradação de rigidez dos materiais compostos e a simplicidade do critério adotado para traduzi-lo no presente trabalho.

Finalmente, vale ressaltar que apesar do grande esforço até agora despendido nas investigações do comportamento dos materiais compostos laminados reforçados por fibras, muitos aspectos do mesmo precisam ainda ser melhor esclarecidos. Podem ser sugeridos, como exemplos de assuntos que constituem temas férteis de pesquisas e que são de grande importância para a modelagem do comportamento de estruturas feitas com aqueles materiais, os seguintes:

- Ocorrência e evolução de falhas durante o processo de fluência;
- Não linearidades inerentes ao comportamento viscoelástico;
- Formulação de modelos de degradação da resistência e da rigidez dos materiais na presença de falhas;
- Modelos micromecânicos para análise de falhas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHMAD, S., IRONS, B. M. and ZIENKIEWICZ, O. C., "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2, pp. 419-451, 1970.

BATHE, K. J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Inc., 1982.

BIOT, M. A., "Linear Thermodynamics and the Mechanics of Solids", Proceedings 3rd U.S. Natl. Congr. Appl. Mech., ASME, pp. 1, 1958.

BOLEY, B. A. and WEINER, J. J., "Theory of Thermal Stress", John Wiley, New York, 1960.

CHANG, F. K. and CHANG, K. Y., "A Progressive Damage Model for Laminated Composites Containing Stress Concentrations", Journal of Composite Materials, Vol. 21 - September, pp. 834, 1987.

CHEN, W. J., LIN, P. D. and CHEN, L. W., "Thermal Buckling Behavior of Thick Composite Laminated Plates under Nonuniform Temperature Distribution", Computers & Structures, Vol. 41, No. 4, pp. 637-645, 1991.

CHRISTENSEN, R. M., "Theory of Viscoelasticity-An Introduction", Academic Press, Inc., 1971.

CHRISTENSEN, R., "Mechanics of Composite Materials", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979.

CREUS, G. J., "Viscoelasticity-Basic Theory and Applications to Concrete Structures", Lecture Notes in

Engineering, Springer-Verlag, 1986.

CROSSMAN, F. W., MAURI, R. E. and WARREN, W. J., "Moisture-Altered Viscoelastic Response of Graphite/Epoxy Composites", Advanced Composite Materials - Environmental Effects, ASTM, STP 658, J. R. Vinson, Ed., pp.205-220, 1978.

DORNINGER, K. and RAMMERSTORFER, F. G., "A Layered Composite Shell Element for Elastic and Thermoelastic Stress and Stability Analysis at Large Deformations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 30, pp. 833-858, 1990.

FINDLEY, W. N., LAI, J. S. and ONARAN, K., "Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials", North-Holland Publishing Company, 1976.

FLAGGS, D. L. and CROSSMAN, F. W., "Analysis of the Viscoelastic Response of Composite Laminates During Hygrothermal Exposure", Journal of Composite Materials, Vol. 15 - January, pp. 21, 1981.

HARPER, B.D. and WEITSMAN, Y., "On the Effects of Environmental Conditioning on Residual Stresses in Composite Laminates", Int. J. Solids Structures, Vol. 21, No. 8, pp. 907-926, 1985.

HAHN, H. T. and PAGANO, N. J., "Curing Stresses in Composite Laminates", Journal of Composite Materials, Vol. 9 - January, pp. 91, 1975.

HALPIN, J. C., "Introduction to Viscoelasticity", Composite Materials Workshop, Technomic Publishing Co., Inc., pp. 87-152, 1968.

HASHIN, Z. and ROSEN, W., "The Elastic Moduli of Fiber

Reinforced Materials", J. Appl. Mech., Vol. 31, pp. 223, 1964.

HASHIN, Z., "Viscoelastic Fiber Reinforced Materials", AIAA Journal, Vol. 4, No. 8, August, pp. 1411-1417, 1966.

HASHIN, Z., "Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites", Journal of Applied Mechanics, Vol. 47, June, pp. 329-334, 1980.

HILL, R., "The Mathematical Theory of Plasticity", Clarendon Press, Oxford, 1950

HILL, R., "Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.11, pp. 357-372, 1963.

HOFFMAN, O., "The Brittle Strength of Orthotropic Materials", J. Comp. Mat., Vol. 1, pp. 200-206, 1967.

HWANG, W. C. and SUN, C. T., "Failure Analysis of Laminated Composites by Using Iterative Three-Dimensional Finite Element Method", Computers & Structures, Vol. 33, No. 1, pp. 41-47, 1989.

IRVINE, T., B. and GINTY, C., A., "Progressive Fracture of Fiber Composites", NASA, TM-83701, 1984.

JONES, R. M., "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill Book Company, 1975.

LABOSSIÈRE, P. and NEALE, K. W., "On the Determination of the Strength Parameters in the Tensor Polynomial Failure Criterion" Journal of Strain Analysis, Vol. 22, No. 3, pp. 155-161, 1987.

LEE, J. D., "Three Dimensional Finite Element Analysis of

Layered Fiber-Reinforced Composite Materials", Computers & Structures, Vol. 12, pp. 319-339, 1980.

LEKHNITSKI, S. G., "Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body", Holden-Day, San Francisco, 1963.

LIAO, C. L. and REDDY, J. N., "An Incremental Total Lagrangian Formulation for General Anisotropic Shell-Type Structures", Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1987.

LIBRESCO, L., "A Refined Geometrically Non-Linear Theories of Anisotropic Laminated Shells", Quarterly of Applied Mathematics, April, pp. 1-27, 1987.

LIN, K. Y. and HWANG, I. H., "Thermo-Viscoelastic Analysis of Composite Materials, Vol. 23 - June, pp. 554-569, 1989.

LIN, K. Y. and YI, S., "Analysis of Interlaminar Stresses in Viscoelastic Composites", Int. J. Solids Structures, Vol. 27, No. 7, pp. 929-945, 1991.

LOU, Y. C. and SCHAPERY, R. A., "Viscoelastic Characterization of a Nonlinear Fiber-Reinforced Plastic", Journal of Composite Materials, Vol. 5, April, pp. 208-234, 1971.

MALVERN, L. E. "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969.

MASUERO, J. R., "Análisis de Fratura Viscoelástica pelo Método dos Elementos Finitos", Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil - UFRGS, 1992.

MORLAND, L. W. and LEE, E. H., "Stress Analysis for Linear

Viscoelastic Materials With Temperature Variation", Trans. Soc. Rheology, Vol. 4, pp. 223, 1960.

MUKI, R. and STERNBERG, E., "On Transient Thermal Stresses in Viscoelastic Materials With Temperature-Dependent Properties", Journal of Applied Mechanics, pp. 193-207, June, 1961.

RAM, S. K. S. and SINHA, P. K., "Hygrothermal Effects on the Bending Characteristics of Laminated Composite Plates", Computers & Structures, Vol. 40, No. 4, pp. 1009-1015, 1991.

REDDY, J. N., "A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation", Int. J. Solids Structures, 23, pp. 319-330, 1984.

REDDY, J. N. and PANDEY A. K., "A First-Ply Failure Analysis of Composite Laminates", Computers & Structures, Vol. 25, No. 3, pp. 371-393, 1987.

SCHAPERLY, R. A., "Stress Analysis of Viscoelastic Composite Materials", Composite Materials Workshop, Technomic Publishing Co., Inc., pp. 87-152, 1968.

SCHAPERLY, R. A., "Viscoelastic Behavior and Analysis of Composite Materials", in Composite Materials, Broutman and Krock eds., Academic Press, pp. 85, 1974.

SCHWARZL, F. and STAVERMAN, A. J., "Time-Temperature Dependence of Linear Viscoelastic Behavior", Journal of Applied Physics, Vol. 23, pp. 838, 1952.

SHEN, C. H. and SPRINGER, G. S., "Environmental Effects on the Elastic Moduli of Composite Materials", Journal of Composite Materials, Vol. 11, July, pp. 250-264, 1977.

SOKOLNIKOFF, I. S., "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1946.

SONI, S. R., "A New Look at Commonly Used Failure Theories in Composite Laminates", 24th, AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Procedures, pp. 171-179, 1983.

SUN, C. T. and LI, S., "Three-Dimensional Effective Elastic Constants for Thick Laminates", Journal of Composite Materials, Vol. 22, July, 1988.

TALREJA, R., "Damage Development in Composites: Mechanisms and Modelling", Journal of Strain Analysis, Vol. 24, No. 4, pp. 215-222, 1989.

THANGARATNAM, R. K., PALANINATHAN and RAMACHANDRAN, J., "Thermal Stress Analysis of Laminated Composite Plates and Shells", Computers & Structures, Vol. 30, No. 6, pp. 1403-1411, 1988.

THANGARATNAM, R. K., PALANINATHAN and RAMACHANDRAN, J., "Thermal Buckling of Composite Laminated Plates", Computers & Structures, Vol. 32, No. 5, pp. 1117-1124, 1989.

TIMOSHENKO, S. P. and GOODIER, J. N., "Theory of Elasticity", 3rd., McGraw-Hill, New York, 1970.

TOLSON, S. and ZABARAS, N., "Finite Element Analysis of Progressive Failure in Laminated Composite Plates", Computers & Structures, Vol. 38, No. 3, pp. 361-376, 1991.

TSAI, S. W., "Strength Characteristics of Composite Materials", NASA, Report CR-224, 1965.

TSAI, S. W. and HAHN, H. T., "Introduction to Composite

Materials", Technomic , Westport, CT, 1980.

TSAI, S. W. and WU, M. W., "A General Theory of Strength for Anisotropic Materials", Journal of Composite Materials, January, pp. 58-80, 1971.

TSAI, S. W. and PARTTERSON, J. M., "Design Rules and Techniques for Composite Materials", Composite Materials in Aircraft Structures, Edited by Donald H. Middleton, Longman Scientific & Technical, England, pp. 118, 1990.

WALRATH, D. E., "Viscoelastic Response of a Unidirectional Composite Containing Two Viscoelastic Constituents", Experimental Mechanics, June, pp. 111-117, 1991.

WEITSMAN, Y., "Residual Thermal Stresses Due to Cool-Down of Epoxy-Resin Composites" Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 563-567, September, 1979.

WHITNEY, J. M. and ASHTON, J. E., "Effect of Environment on the Elastic Response of Layered Composite Plates", AIAA Journal, Vol. 9, No. 9, pp. 1708-1713, September, 1971.

WILLIAMS, M. L., LANDEL, R. F. and FERRY, J. D., "The Temperature Dependence of Relaxation Mechanism in Amorphous Polymers and Other Glass-Liquids", J. of Am. Chem. Soc., Vol. 77, pp. 370, 1955.

WILSON, D. W. and VINSON, J. R., "Viscoelastic Analysis of Laminated Plate Buckling", AIAA Journal, Vol. 22, No. 7, pp. 982-988, July, 1984.

WU, C. H. and TAUCHERT, T. R., "Thermoelastic Analysis of Laminated Plates. 1: Symmetric Specially Orthotropic Laminates", J. Thermal Stresses, 3, 247-259, 1980.

WU, C. H. and TAUCHERT, T. R., "Thermoelastic Analysis of

Laminated Plates. 2: Anti-Symmetric Cross-Ply and Angle-Ply Laminates", J. Thermal Stresses, 3, 365-378,

259, 1980a .

WU, E. M., "Phenomenological Anisotropic Failure Criteria", in Composite Materials, Vol. 2: Mechanics of Composite Materials, Edited by G. P. Sendeckyj, Academic Press, New York, pp. 353-431, 1974.

YANG, Y. B. and SHIEH, M. S., "Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points", AIAA Journal, Vol. 28, No. 12, pp. 2110-2116, 1990.

ZHANG, W. and EVANS, K. E., "A Strain-Based Tensor Polynomial Failure Criterion for Anisotropic Materials", Journal of Strain Analysis, Vol. 23, No. 4, pp. 179-186, 1988.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

ABOUDI, J., "A Continuum Theory for Fiber-Reinforced Elastic-Viscoplastic Composites", Int. J. Engng Sci., Vol. 20, No. 5, pp. 605-621, 1982.

ARENBURG, R. T. and REDDY, J. N., "Analysis of Metal-Matrix Composite Structures - I. Micromechanics Constitutive Theory", Computers & Structures, Vol. 40, No. 6, pp. 1357-1368, 1991.

ARENBURG, R. T. and REDDY, J. N., "Analysis of Metal-Matrix Composite Structures - II. Laminate Analyses", Computers & Structures, Vol. 40, No. 6, pp. 1369-1385, 1991.

BAULD Jr., N. R. and KHOT, N. S., "A Numerical and Experimental Investigation of the Buckling Behavior of Composite Panels", Computers & Structures, Vol. 15, No. 4, pp. 393-403, 1982.

CANTWELL, W. J. and MORTON, J., "The Significance of Damage and Defects and Their Detection in Composite Materials: a Review", Journal of Strain Analysis, Vol. 27, No 1, 1992.

CHANG, J. S., "FEM Analysis of Buckling and Thermal Buckling of Antisymmetric Angle-Ply Laminates According to Transverse Shear and Normal Deformable High Order Displacement Theory", Computers & Structures, Vol. 37, No. 6, pp. 925-946, 1990.

CHANG, J. S. and HUANG, Y. P., "Nonlinear Analysis of Composite Antisymmetric Angle-Ply under Uniform Temperature Field", Computers & Structures, Vol. 40, No. 4, pp. 857-869, 1991.

CHANG, T. Y. and SAWAMIPHAKDI, K., "Large Deformation Analysis of Laminated Shells by Finite Element Method", Computers & Structures, Vol. 13, pp. 331-340, 1981.

CHEN, W. H. and HUANG, T. F., "Three Dimensional Interlaminar Stress Analysis at Free Edges of Composite Laminate", Computers & Structures, Vol. 32, No. 6, pp. 1275-1286, 1989.

CHIA, C. Y. and PRABHAKARA, M. K., "Postbuckling Behavior of Unsymmetrically Layered Anisotropic Rectangular Plates", Journal of Applied Mechanics, March, pp. 155-162, 1974.

CHRISTENSEN, R. M., "Tensor Transformation and Failure Criteria for the Analysis of Fiber Composite Materials", Journal of Composite Materials, VOL. 22 - September, pp. 874, 1988.

CHRISTENSEN, R. M. and ZYWICZ, E., "A Three-Dimensional Constitutive Theory for Fiber Composite Laminated Media", Transactions of the ASME, Vol. 57, December, pp. 948-955, 1990.

CURTIS, P. T., "The Fatigue Behaviour of Fibrous Composite Materials", Journal of Strain Analysis, Vol. 24, No. 4, pp. 235-244, 1989.

DEIASE, R. and WHITESIDE, J. B., "Effect of Moisture on Epoxy Resins and Composites", Advanced Composite Materials - Environmental Effects, ASTM, STP 658, J. R. Vinson, Ed., pp. 2-20, 1978.

DITCHER, A. K., RHODES, F. E. and WEBBER, J. P. H., "Non-Linear Stress-Strain Behaviour of Carbon Fibre Reinforced Plastic Laminates", Journal of Strain Analysis, Vol. 16, No. 1, pp. 43-51, 1981.

DITCHER, A. K. and WEBBER, J. P. H., "Nonlinear Mechanical and Thermal Responses of a Unidirectional Carbon-Fibre-Reinforced Plastic", Journal of Strain Analysis, Vol. 14, No. 4, pp. 149-156, 1979.

DVORAK, G. J., LAWS, N. and HEJAZI, M., "Analysis of Progressive Matrix Cracking in Composite Laminates I. Thermoelastic Properties of a Ply with Cracks", Journal of Composite Materials, Vol. 19 - May, 1985.

DVORAK, G. J. and LAWS, N., "Analysis of Progressive Matrix Cracking in Composite Laminates II. First Ply Failure", Journal of Composite Materials, Vol. 21 - April, 1987.

ENGBLOM, J. J. and OCHOA D. O., "Finite Element Formulation Including Interlaminar Stress Calculations", Computers & Structures, Vol. 23, No. 2, pp. 241-249, 1986.

GRACE, N. F., BAGCHI, D. K. and KENNEDY, J. B., "Nonlinear Deformation of Laminated Composites", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 117, No. 2, February, pp. 276-293, 1991.

HAHN, H. T. and KIM, R. Y., "Swelling of Composite Laminates", Advanced Composite Materials - Environmental Effects, ASTM, STP 658, J. R. Vinson, Ed., pp. 98-120, 1978.

HALPIN, J. C., "Primer on Composite Materials: Analysis", Technomic Publishing Company, Inc., 1984.

HAMAMOTO, A. and HYER, M. W., "Non-Linear Temperature-Curvature Relationships for Unsymmetric Graphite-Epoxy Laminates", Int. J. Solids Structures, Vol. 23, No. 7, pp. 919-935, 1987.

HASHIN, Z., "Analysis of Composite Materials - A Survey",

Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, September, pp. 481-505, 1983.

HERAKOVICH, C. T., "Edge Effects and Delamination Failures", Journal of Strain Analysis, Vol. 24, No. 4, pp.245-252, 1989.

HORN, W. J., SHAIKH, F. M. and SOEGANTO, A., "Degradation of Mechanical Properties of Advanced Composites Exposed to Aircraft Environment", AIAA Journal, Vol. 27, No. 10, October, pp. 1399-1405, 1989.

HUANG, N. N. and TAUCHER, T. R., "Large Deflections of Laminated Cylindrical and Doubly-Curved Panels under Thermal Loading", Computers & Structures, Vol. 41, No. 2, pp. 303-312, 1991.

ISHIKAWA, T., KOYAMA, K. and KOBAYASHI, S., "Elastic Moduli of Carbon-Epoxy Composites and Carbon Fibers", Journal of Composite Materials, Vol. 11, July, pp. 332, 1977.

KIM, J. Y. and HONG, C. S., "Three-Dimensional Finite Element Analysis of Interlaminar Stresses in Thick Composite Laminates" Computers & Structures, Vol. 40, No. 6, pp. 1395-1404, 1991.

LABOSSIERE, R. and NEALE, K. W., "A Parametric Failure Criterion for Paperboard Material", Journal Of Strain Analysis, Vol. 26, No. 4, pp. 209-214, 1991.

LAWS, N. and DVORAK, G. J., "Progressive Transverse Cracking in Composite Laminates", Journal of Composite Materials, Vol. 22 - October, pp. 900-915, 1988.

LEE, J. D., "Three Dimensional Finite Element Analysis of Damage Accumulation in Composite Laminate", Computers & Structures, Vol. 15, No. 3, pp. 335-350, 1982.

LEE, J. W., ALLEN, D. H. and HARRIS, C. E., "Internal State Variable Approach for Predicting Stiffness Reductions in Fibrous Laminated Composites with Matrix Cracks", Journal of Composite Materials, Vol. 23 - December, pp. 1273-1291, 1989.

LEE, S. Y. and WEN, J. Y., "Hygrothermal Effects on the Stability of a Cylindrical Composite Shell Panel", Computers & Structures, Vol. 33, No. 2, pp. 551-559, 1989.

LIM, S. G. and HONG, C. S., "Prediction of Transverse Cracking and Stiffness Reduction in Cross-Ply Laminated Composites", Journal of Composite Materials, Vol. 23 - July, pp. 695-713, 1989.

MAKINS R. K. and ADALI, S., "Bending of Cross-Ply Laminated Plates with Matrix Cracks", Journal of Strain Analysis, Vol. 26, No. 4, pp. 253-257, 1991.

MATHISON, S. R., PINDER, M. J. and HERAKOVICH, "Nonlinear Response of Resin Matrix Laminates Using Endochronic Theory", Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 113, October, pp. 449-455, 1991.

MINNETYAN, L., MURTHY, P. L. N. and CHAMIS, C. C., "Composite Structure Global Fracture Toughness via Computational Simulation", Computers & Structures, Vol. 37, No. 2, pp. 175-180, 1990.

MIKI, M., MUROTSU, Y., TANAKA, T. and SHAO, S., "Reliability of Unidirectional Fibrous Composites", AIAA Journal, Vol. 28, No. 11, pp. 1980-1986, November, 1990.

MILLER, C. J., MILLAVEC, W. A. and KICHER, T. P., "Thermal Stress Analysis of Layered Cylindrical Shells", AIAA Journal, Vol. 19, No. 4, pp. 523-530, April, 1981.

- MOHAN, R. and ADAMS, D. F., "Nonlinear Creep-Recovery Response of a Polymer Matrix and its Composites", *Experimental Mechanics*, pp. 262-271, September, 1985.
- NOOR, A. K. and MATHERS, M. D. and ANDERSON, M. S., "Exploiting Symmetries for Efficient Postbuckling Analysis of Composite Plates"; *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 1, pp. 24-32, January, 1977.
- NOOR, A. K., "Mechanics of Anisotropic Plates and Shells - A New Look at an Old Subject", *Computers & Structures*, Vol. 44, No. 3, pp. 499-514, 1992.
- PALAZOTTO, A. N. and TISLER, T. W., "Considerations of Cutouts in Composite Cylindrical Panels", *Computers & Structures*, Vol. 29, No. 6, pp. 1101-1110, 1988.
- PINDERA, M. J. and HERAKOVICH, C. T., "Shear Characterization of Unidirectional Composites with the Off-Axis Tension Test", *Experimental Mechanics*, March, pp. 103-112, 1986.
- REDDY, J. N., "Finite Element Modeling of Layered, Anisotropic Composite Plates and Shells: A Review of Recent Research", *Shock and Vibration Digest*, Vol. 13, No. 12, pp. 3-12, 1981.
- ROY, A. K. and TSAI, S. W., "Design of Thick Composite Cylinders", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 110, August, pp. 255-262, 1988.
- SCHAFFER, B. G. and ADAMS, D. F., "Nonlinear Viscoelastic Analysis of a Unidirectional Composite Material", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, December, pp. 859-865, 1981.
- SCHWARTZ, M. M., "Composite Materials Handbook",

McGraw-Hill, Inc., USA, 1984.

SHAH, C. G. and MURTY A. V. K., "Analysis of Edge Delaminations in Laminates Through Combined Use of Quasi-Three-Dimensional, Eight-Noded, Two-noded and Transition Elements", Computers & Structures, Vol. 39, No. 3/4, pp. 231-242, 1991.

SHEN, C. H. and SPRINGER, G. S., "Effects of Moisture and Temperature on the Tensile Strength of Composite Materials", Journal of Composite Materials, Vol. 11, January, pp. 2-16, 1977.

SHIRRELL, C. D., "Diffusion of Water Vapor in Graphite/Epoxy Composites", Advanced Composite Materials - Environmental Effects, ASTM, STP 658, J. R. Vinson Ed., pp. 21-42, 1978.

SHUART, M. J. and WILLIAMS, J. G., "Compression Behavior of $\pm 45^\circ$ - Dominated Laminates with a Circular Hole or Impact Damage", AIAA Journal, Vol. 24, No. 1, January, pp. 115-122, 1986.

SHUART, M. J., "Failure of Compression-Loaded Multidirectional Composite Laminates", AIAA Journal, Vol. 27, No. 9, pp. 1274 - 1279, September, 1989.

SNEAD, J. M. and PALAZOTTO, A. N., "Moisture and Temperature Effects on the Instability of Cylindrical Composite Panels", Journal Aircraft, Vol. 20, No. 9, September, pp. 777-783, 1983.

SONG, Y. and SIMITSES, G. J., "Thermo-Elastoviscoplastic Snap-through Behavior of Cylindrical Panels", Computers & Structures, Vol. 44, No. 6, pp. 1255-1261, 1992.

TRIPATHY, B. and RAD, K. P., "Stiffened Composite

Cylindrical Panels - Optimum Lay-Up for Buckling by Ranking", Computers & Structures, Vol. 42, No. 4, pp. 481-488, 1992.

TUTTLE, M. E. and BRINSON, H. F., "Prediction of the Long-Term Creep Compliance of General Composite Laminates", Experimental Mechanics, March, pp. 89-102, 1986.

VAZIRI, R., OLSON, M. D. and ANDERSON, D. L., "Finite Element Analysis of Fibrous Composite Structures: A plasticity Approach", Computers & Structures, Vol. 44, No. 1/2, pp. 103 - 116, 1992.

WEITSMAN, Y., "Coupled Damage and Moisture-Transport in Fiber-Reinforced, Polymeric Composites", Int. J. Solids Structures, Vol. 23, No. 7, pp. 1003-1025, 1987.

VINOGRADOV, A. M. and GLOCKNER, P. G., "Buckling of Spherical Viscoelastic Shells", Journal of the Structural Division, ST1, pp. 59-67, January, 1980.

WISNOM, M. R., "Effect of Shear Stresses in Indirect Compression Tests of Unidirectional Carbon Fiber/Epoxy", AIAA Journal, Vol. 29, No. 10, pp. 1692-1697, October, 1991.

WU, C. M. L., "Nonlinear Thermal and Mechanical Analysis of Edge Effects in Angle-Ply Laminates", Computers & Structures, Vol. 35, No. 6, pp. 705-717, 1990.

ZAGHLOUL, S. A. and KENNEDY, J. B., "Nonlinear Behavior of Symmetrically Laminated Plates", Journal of Applied Mechanics, pp. 234-236, March, 1975.