# Tópicos de Probabilidade e Álgebra Linear

**Marcus Vinícius da Silva**
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Orientador: Jairo Krás Mengue
marcus423@gmail.com

XXVIII Salão de Iniciação Científica - SIC UFRGS 2016

## Introdução

Este trabalho consiste do estudo de alguns tópicos de Probabilidade e Álgebra Linear. A seguir estão alguns resultados importantes com exemplos de aplicações.

## Matriz estocástica e vetor de probabilidade

**Definição 1** Um vetor $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ é dito de probabilidade se $p_1 + ... + p_n = 1$ e $p_i \geq 0$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

**Definição 2** Uma matriz $A_{n\times n} = (a_{ij})$ é dita coluna estocástica se todas suas colunas são vetores de probabilidade. $A$ é dita positiva se $a_{ij} > 0$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$.

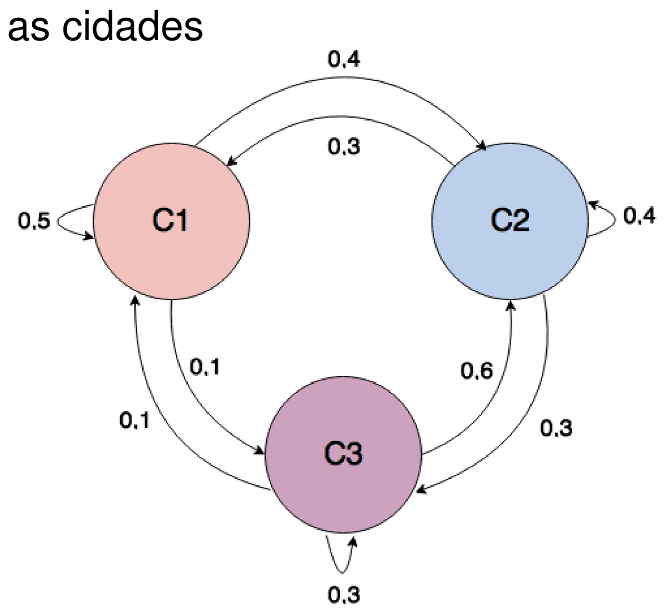
**Teorema 1** Se $A_{n\times n}$ é coluna estocástica e $p \in \mathbb{R}^n$ é de probabilidade então $Ap$ é de probabilidade.

**Teorema 2** Se $A_{n\times n}$ é coluna estocástica positiva então existe exatamente um $\bar{p}$ vetor de probabilidade tal que $A\bar{p} = \bar{p}$. Além disso, para qualquer $p$ de probabilidade $A^n p$ converge para $\bar{p}$.

### Exemplo

Considere três cidades $c_1, c_2, c_3$ e suponha que exista um intenso movimento migratório entre estas três cidades, conforme Figura 1.

Figura 1: Representação da movimentação de habitantes entre as cidades




A movimentação entre duas observações pode ser representada por uma matriz $A_{3\times 3} = (a_{ij})$ em que $a_{ij}$ é a proporção de habitantes de $c_j$ que foi para $c_i$. Pela figura, segue que

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Note que $A$ é coluna estocástica positiva.

Representando a população da observação inicial por $p = (p_1, p_2, p_3)$ em que $p_i$ é a proporção de habitantes que está em $c_i$, $Ap$ será a população observada após a movimentação. Pelo Teorema 1, sabemos que $Ap$ é também um vetor de probabilidade. Iterando o processo, a distribuição se estabiliza? Se sim, qual será a proporção de habitantes em cada cidade quando os valores se estabilizarem?

Pelo Teorema 2 sabemos que a resposta à primeira pergunta é positiva e que para responder à segunda pergunta basta resolver o sistema $A\bar{p} = \bar{p}$ e multiplicar a solução encontrada por um escalar adequado para obter um $\bar{p}$ de probabilidade. Para a matriz $A$ dada acima, $\bar{p} = \begin{pmatrix} 0,3158 & 0,4474 & 0,2368 \end{pmatrix}$, isto é, supondo que as movimentações migratórias continuem seguindo o mesmo padrão, em um tempo suficientemente longo observaremos a população dividida entre as três cidades conforme $\bar{p}$.

## Probabilidade Invariante e Jacobiano

**Definição 3** Uma matriz $\pi_{n\times n}$ é uma probabilidade se $\sum_{i=1,j=1}^{n} \pi_{i,j} = 1$ e $\pi_{i,j} \geq 0$.

**Definição 4** Uma probabilidade $\pi$ é invariante se $\sum_{i=1}^{n} \pi_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} \pi_{k,j}$ $\forall k \in \{1, ..., n\}$.

**Definição 5** O Jacobiano $J^\pi = (J^\pi_{ij})$ de uma probabilidade invariante $\pi$ é definido por

$$J^\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{\pi_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} \pi_{kj}} & \text{se } \sum_{k=1}^{n} \pi_{kj} > 0 \\ 1/n & \text{se } \sum_{k=1}^{n} \pi_{kj} = 0 \end{cases}$$

**Definição 6** Dados uma matriz $A_{n\times n} = (a_{ij})$ coluna estocástica positiva e seu vetor estacionário $\bar{p} = (p_i)$, $\pi_{n\times n}$ com $\pi_{ij} = a_{ij}p_j$ é a autoprobabilidade de $A$.

**Teorema 3** Se $\pi$ é a autoprobabilidade de $A$ coluna estocástica positiva, então $J^\pi = A$.

**Teorema 4** Se $\pi$ é uma probabilidade invariante e $\pi_{ij} > 0$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, então $\pi$ é a autoprobabilidade de $J^\pi$.

### Exemplo

Considere a matriz coluna estocástica positiva $A$ dada no exemplo anterior e o seu vetor estacionário $\bar{p}$. A autoprobabilidade $\pi$ de $A$ será

$$\pi = \begin{pmatrix} a_{11}p_1 & a_{12}p_2 & a_{13}p_3 \\ a_{21}p_1 & a_{22}p_2 & a_{23}p_3 \\ a_{31}p_1 & a_{32}p_2 & a_{33}p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5\cdot 0,3158 & 0,3\cdot 0,4474 & 0,1\cdot 0,2368 \\ 0,4\cdot 0,3158 & 0,4\cdot 0,4474 & 0,6\cdot 0,2368 \\ 0,1\cdot 0,3158 & 0,3\cdot 0,4474 & 0,3\cdot 0,2368 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1579 & 0,13422 & 0,02368 \\ 0,12632 & 0,17896 & 0,14208 \\ 0,03158 & 0,13422 & 0,07104 \end{pmatrix}$$

Note que $\pi$ é invariante. O jacobiano de $\pi$ por sua vez será

$$J^\pi = \begin{pmatrix} \frac{0,1579}{0,1579+0,12632+0,03158} & \frac{0,13422}{0,13422+0,17896+0,13422} & \frac{0,02368}{0,02368+0,14208+0,07104} \\ \frac{0,12632}{0,1579+0,12632+0,03158} & \frac{0,17896}{0,13422+0,17896+0,13422} & \frac{0,14208}{0,02368+0,14208+0,07104} \\ \frac{0,03158}{0,1579+0,12632+0,03158} & \frac{0,13422}{0,13422+0,17896+0,13422} & \frac{0,07104}{0,02368+0,14208+0,07104} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Como esperado pelo Teorema 3, $J^\pi = A$.

## Entropia

**Definição 7** Dados uma matriz $A$ e uma probabilidade $\pi$, $\langle A, \pi \rangle = \sum_{i,j} a_{ij}\pi_{ij}$ é a média de $A$ em relação a $\pi$.

**Definição 8** Se $\pi$ é uma probabilidade invariante, sua entropia é definida por

$$H(\pi) = -\sum_{i,j} \log J^\pi_{ij} \pi_{ij}$$

onde assume-se que $\log(J^\pi_{ij})\pi_{ij} = 0$ se $J^\pi_{ij} = \pi_{ij} = 0$.

**Teorema 5** Se $\pi$ é uma probabilidade invariante então

$$H(\pi) = \inf\{-\sum_{i,j} \log(b_{ij})\pi_{ij} \mid B = (b_{ij}) \text{ é coluna-estocástica e positiva}\}$$

**Teorema 6** Para qualquer probabilidade invariante $\pi_{n\times n}$ tem-se que:

$$0 \leq H(\pi) \leq \log(n).$$

**Teorema 7** A entropia é uma função côncava sobre o conjunto das probabilidades invariantes.

### Exemplo

Considere as probabilidades definidas por

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Segue que

$$J^\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } J^\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto $H(\pi) = 0$ e $H(\eta) = 0$. No entanto, se $\lambda = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\eta$ então

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ e } J^\lambda = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Logo

$$H(\lambda) = -\sum \log(J^\lambda_{ij})\lambda_{ij} = -\sum \log\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} = -4\log\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} = -\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log 2$$

Isto é, $H(\lambda) = H\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\eta\right) > \frac{1}{2}H(\pi) + \frac{1}{2}H(\eta)$, o que está de acordo com o Teorema 4 e mostra que não vale a igualdade.

## Referência

MENGUE, Jairo K. *Tópicos de Álgebra Linear e Probabilidade*. 4º Colóquio de Matematica da Regiao Sul, SBM, 2016.