Salão UFRGS 2016 — CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO
paz no plural
SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
XXVIII SIC
UFRGS PROPESQ
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS

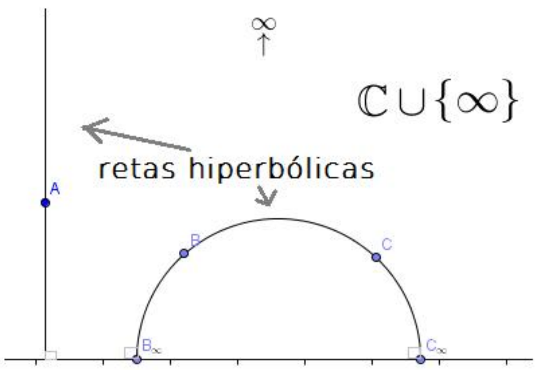
Transformações de Lobachevski: As Isometrias do Plano Hiperbólico

Autor: Iuri Mielniczuk Cavallet
Orientador: Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Neste trabalho estudaremos a geometria hiperbólica sob o modelo do semiplano de Poincaré.

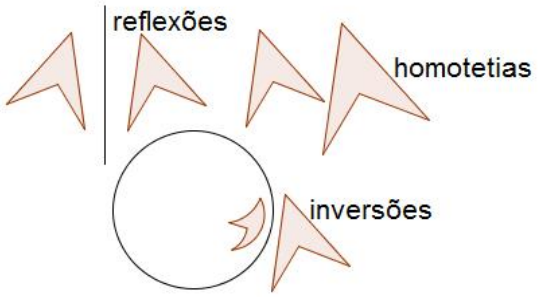
Algumas vantagens de uma abordagem por meio deste modelo são, devido à construção dele, podermos usar resultados de geometria euclidiana e análise matemática, bem como podermos provar que a geometria hiperbólica é tão consistente quanto a geometria euclidiana.

Nesse modelo definimos como pontos hiperbólicos o conjunto de pontos no interior da esfera de Riemann, que será representado como o conjunto de pontos no semiplano superior da reta real no plano complexo. À união da reta real com o ponto no infinito da esfera de Riemann chamaremos de reta no infinito, cujos pontos serão chamados de pontos impróprios.



Chamaremos de retas hiperbólicas os semicírculos e semirretas euclidianas que formem ângulos retos com a reta no infinito. A noção de estar entre é a usual para arcos e retas euclidianas. Verificam-se então todos os axiomas da geometria hiperbólica, de modo que temos de fato um modelo válido.

Definiremos transformação de Möbius as composições finitas de inversões, homotetias e reflexões euclidianas na esfera de Riemann. Definiremos transformações de Lobachevski as transformações de Möbius que levem o plano hiperbólico em si mesmo e a reta no infinito nela mesma.



Sob a axiomática de Hilbert, devemos definir o termo congruência de segmentos, que será feito da seguinte forma:

$$AB \equiv CD \Leftrightarrow \exists \phi \in \mathbb{L} \text{ tq. } \phi(AB) = CD$$

Onde $\mathbb{L}$ é o conjunto de transformações de Lobachevski.

Uma isometria é uma aplicação que preserva as distâncias entre espaços métricos. Neste caso, o espaço métrico a ser considerado é $(\mathbb{H}^2, d)$, onde d é a métrica:

$$d(A,B) = \left| \log \frac{AB_\infty . BA_\infty}{AA_\infty . BB_\infty} \right|$$

O objetivo deste trabalho é provar o seguinte resultado: O grupo de isometrias do plano hiperbólico no modelo do semiplano de Poincaré é o grupo das transformações de Lobachevski.