Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

O Semigrupo Inverso das Extensões Abelianas Parciais

Tese de Doutorado

Víctor Eduardo Marín Colorado

Porto Alegre, 14 de Novembro de 2016

Tese submetida por Víctor Eduardo Marín Colorado*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Antonio Paques

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques (UFRGS - Orientador)
Prof. Dr. Dirceu Bagio (UFSM)
Prof. Dra. Daiana Aparecida da Silva Flôres (UFSM)
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (UFRGS)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

A minha mãe Elvia, ao meu pai Rodrigo, aos meus irmãos Jaime e Juan, em especial a meu irmão gêmeo por seu apoio, a minha sobrinha Alejandra e a minha amiga Maricel. Ao professor Antonio Paques por seu conhecimento, apoio e paciência. Aos meus colegas do Programa de Pós-Gradução em Matemática da UFRGS pelo carinho com que me receberam e pelo apoio, em especial para Danielle e Grasiela por sua ajuda e amizade durante estes anos. Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS pela acolhida e aos professores que contribuiram na minha formação. À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo incentivo financeiro.

Resumo

O objetivo principal desta tese é a construção do semigrupo inverso das classes de isomorfismo das extensões abelianas parciais de um anel comutativo.

Abstract

The main purpose of this thesis is the construction of the inverse semigroup of the isomorphism classes of the partial abelian extensions of a commutative ring.

índice

Introdução

Em [3] M. Dokuchaev, M. Ferrero e A. Paques introduzem uma extensão da teoria de Galois clássica para anéis comutativos, devida a S. U. Chase, D. K. Harrison e A. Rosenberg [4], ao contexto de ações parciais de grupos sobre álgebras.

Dados uma ação parcial (veja [3])

$$\alpha = \{\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g \mid g \in G\}$$

de um grupo finito G sobre uma k- álgebra S (k sendo um anel comutativo com unidade) e um subgrupo H de G tem-se, por restrição a H, uma ação parcial α_H de H sobre S. Além disso, se S é uma extensão α-Galois parcial da subálgebra

$$S^{\alpha} = \{s \in S \mid \alpha_g(sx) = s\alpha_g(x), \text{ para todo } g \in G \text{ e } x \in S_{g^{-1}}\},$$

de todos os elementos α-invariantes de S, então S é uma extensão α_H-Galois parcial de S^{α_H} [3].

Como um adendo a este resultado D. Bagio e A. Paques mostram em [1] que se o subgrupo H é normal em G, então é possível obter uma ação parcial α' de G/H sobre S^{α_H} e neste caso S^{α_H} é uma extensão Galois $\alpha'_{G/H}$-parcial de S^{α}.

Por outro lado, Harrison apresenta em [5], no contexto de anéis comutativos, uma teoria para extensões abelianas (ou teoria de Kummer) e, em particular, mostra que o conjunto das classes de G-isomorfismo de extensões (globais) abelianas de um mesmo anel R com mesmo grupo (finito) de Galois G formam um grupo, denotado aqui por $T_{gl}(G, A)$.

Dokuchaev e Exel em [2] mostram que uma ação parcial α de um grupo finito G sobre uma álgebra S admite uma envolvente (B, G) se e somente se cada ideal $S_g (g \in G)$ é uma álgebra com elemento identidade. Assumindo esta condição, uma construção do análogo parcial do conjunto $T_{gl}(G, A)$ dado em [5] pode ser obtida.

O propósito principal deste trabalho é a contrução do semigrupo inverso abeliano $T_{par}(G, R)$, no contexto de anéis comutativos, das classes de isomorfismo das extensões abelianas parciais de R. Muitos dos resultados são demonstrados usando a estratégia de passagem do local para o global e reciprocamente. É importante dizer que para garantir que a operação em $T_{par}(G, R)$ esteja bem definida os resultados obtidos por Bagio e Paques em [1] são absolutamente necessários.

No capítulo 1 recordamos em detalhes a teoria de Galois devida a Chase, Harrison e Rosenberg e a construção do grupo de Harrison $T_{gl}(G, A)$.

O capítulo 2 é composto de 5 seções. Na seção 2.1 introduzimos a noção de ação parcial unitária, a qual assegura a existência de envolvente. Também construimos a ferramenta necessária para estabelecer a conexão parcial-global-parcial. Essa ferramenta, conforme apresentada, é uma generalização daquela introduzida em [3].

Na seção 2.2 introduzimos a noção de extensão galoisiana parcial através de um teorema-definição apresentado em uma forma mais completa do que aquela apresentada por Dokuchaev, Ferrero e Paques em [3].

Na seção 2.3 apresentamos vários resultados relacionando uma extensão galoisiana parcial e sua envolvente.

Na seção 2.4 tratamos do teorema fundamental da teoria de Galois para ações parciais sobre anéis comutativos, o qual é composto de duas partes. A primeira delas, devida a Dokuchaev, Ferrero e Paques, diz respeito à correspondência de Galois. Dada uma extensão galosiana parcial S de um anel R, relativa a uma ação parcial α de um grupo finito G sobre S, tal correspondência de Galois relaciona, de forma bijetiva, os subgrupos de G e determinadas R-subálgebras separáveis e α-fortes de S (veja [3]). Na segunda parte complementamos o teorema fundamental com um adendo, devido a Bagio e Paques, o qual diz que se H é um subgrupo normal de G, então é possível obter uma ação parcial de G/H sobre S^{α_H} e neste caso S^{α_H} é uma extensão $\alpha'_{G/H}$-parcial de $S^{\alpha} = R$ (veja [1]).

E, finalmente, na seção 2.5 apresentamos vários resultados que, juntamente com os resultados da seção 2.3, vão constituir o arcabouço necessário para os propósitos do capítulo 3.

O capítulo 3 é composto de 3 seções. Na seção 3.1 apresentamos a construção do semigrupo inverso abeliano $T_{par}(G, R)$. Se $[(S, \alpha)], [(S', \alpha')] \in T_{par}(G, R)$ então $S \otimes S'$ é uma extensão $\alpha \otimes \alpha'$- parcial abeliana de $R \simeq R \otimes R$ com grupo de Galois $G \times G$. Denotamos por δG o subgrupo de $G \times G$ consistindo dos elementos da forma $(g^{-1}, g), g \in G$. O grupo quociente $(G \times G)/\delta G$ é obviamente isomorfo a G via o isomorfismo natural $g \mapsto (g, 1_G) = (1_G, g) \pmod{\delta G}$. Pelos resultados em [1], $(S \otimes S')^{(\alpha \otimes \alpha')_{\delta G}}$ é uma extensão abeliana de R com grupo de Galois $G \simeq (G \times G)/\delta G$. Com isto, podemos definir sobre $T_{par}(G, R)$ uma operação da seguinte maneira:

$$[(S, \alpha)] * [(S', \alpha')] := [((S \otimes S')^{\alpha \otimes \alpha'_{\delta G}}, \alpha \otimes 1_G = 1_G \otimes \alpha')],$$

a qual torna $T_{par}(G, R)$ um semigrupo inverso abeliano.

Em 3.2 introduzimos a noção de extensão estritamente parcial, provamos que o conjunto $T_{epar}(G, R)$ das classes de isomorfismo das extensões abelianas estritamente parciais de R é de fato um subsemigrupo inverso de $T_{par}(G, R)$ e estudamos a relação existente entre este e o grupo $T_{gl}(G, A)$.

Em 3.3 provamos que $T_{par}(\_, R)$ é um funtor aditivo da categoria dos grupos abelianos finitos para a categoria dos semigrupos abelianos. Em particular este resultado, juntamente com o teorema fundamental para grupos abelianos finitos, remete o estudo de $T_{par}(G, R)$ ao contexto dos grupos cíclicos finitos.

Neste texto todo anel é comutativo e unitário, todo homomorfismo de anéis é unitário, isto é, leva elemento identidade em elemento identidade e extensões de anéis compartilham o mesmo elemento identidade. Se A e B são extensões de um mesmo anel C pela expressão $A \otimes B$ entende-se o produto tensorial de A por B sobre C. Mais geralmente, se M e N são C-módulos também denotamos por $M \otimes N$ o produto tensorial de M por N sobre C.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo consiste de duas seções. Na primeira recordamos a teoria de Galois devida a Chase, Harrison e Rosenberg [4] para ações globais de grupos sobre anéis. Na segunda apresentamos a construção do grupo das extensões abelianas devido a Harrison [5], o qual foi a principal motivação para a investigação que originou esta tese.

1.1 A teoria de Galois CHR

Em 1965 S. U. **C**hase, D. K. **H**arrison e A. **R**osenberg publicaram no Memoir 52 da American Mathematical Society uma teoria de Galois para anéis, na qual apresentaram, dentre vários outros resultados, uma lista de definições equivalentes de extensão de Galois e um teorema fundamental.

Para uma melhor compreensão desses resultados, e maior conforto do leitor durante a leitura, recordamos algumas definições essenciais.

Dados A um anel e B uma A-álgebra dizemos que B é separável sobre A (ou é uma A-álgebra separável), se a aplicação $\mu : B \otimes B \to B$, induzida pela multiplicação de B, é um homomorfismo de $B \otimes B$-módulos que cinde.

Dois homomorfismos de anéis $f, g : B \to B'$ são ditos fortemente distintos se para todo idempotente não nulo $e \in B'$, existe $b \in B$ tal que $f(b)e \neq g(b)e$.

Dados um anel B e um grupo finito G de automorfismos de B, denotamos por $B \star G$ o skew anel do grupo G sobre B, isto é, o B-módulo livre com base $\{u_g \mid g \in G\}$ que tem uma estrutura de anel com a multiplicação induzida por

$$(bu_g)(b'u_h) = bg(b')u_{gh}$$

para todo $b, b' \in B$ e $g, h \in G$. Este anel é particularmente não comutativo e tem $1_B u_{1_G}$ como elemento identidade. Em particular, B pode ser visto como um subanel de $B \star G$ via a imersão $b \mapsto bu_{1_G}$.

Todo $B \star G$-módulo à esquerda M é, em particular, um B-módulo sobre o qual o grupo G age. Denotamos por M^G o conjunto dos elementos de M invariantes pela ação de G, isto é,

$$M^G = \{x \in M \mid u_g \cdot x = x, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Em particular, B é um $B \star G$-módulo à esquerda via a ação canônica dada por $bu_g \cdot b' := bg(b')$, para todo $b \in B$ e $g \in G$, e neste caso

$$B^G = \{b \in B \mid g(b) = b, \text{ para todo } g \in G\}$$

é um subanel de B e M^G é um B^G-submódulo de M.

Teorema 1.1.1. [4, Theorem 1.3] *Sejam B um anel e G um subgrupo finito de automorfismos de B. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) B é uma B^G-álgebra separável e os elementos de G são dois a dois fortemente distintos.

(ii) *Existem elementos* $b_i, b'_i \in A$, $1 \leq i \leq m$, *tais que* $\sum_i b_i g(b'_i) = \delta_{1,g} 1_B$ *para todo* $g \in G$.

(iii) B *é um* B^G*-módulo projetivo finitamente gerado e a aplicação* $\varphi : B \star G \to End_{B^G}(B)$, *dada por* $\varphi(bu_g)(b') = bg(b')$, *é um isomorfismo de* B*-módulos e de* B^G*-álgebras.*

(iv) *Para todo* $B \star G$*-módulo à esquerda* M, *a aplicação* $\mu : B \otimes M^G \to M$, *dada por* $\mu(b \otimes x) = bx$, *é um isomorfismo de* B*-módulos.*

(v) *A aplicação* $\psi : B \otimes B \to \prod_{g \in G} B$, *dada por* $\psi(b \otimes b') = (bg(b'))_{g \in G}$, *é um isomorfismo de* B*-álgebras.*

(vi) *Para cada ideal maximal* $\mathcal{M}$ *de* B *e cada* $1_G \neq g \in G$ *existe* $b \in B$ *tal que* $g(b) - b \notin \mathcal{M}$.

Dados um anel B e um grupo finito G de automorfismos de B dizemos que B é uma *extensão de Galois (ou galoisiana) de* B^G *com grupo de Galois* G se uma das afirmações equivalentes do Teorema 1.1.1 é satisfeita. Neste contexto, um subanel V de B é dito *G-forte* se as restrições a V de quaisquer dois elementos de G são iguais ou fortemente distintas. Para cada subanel V de B e cada subgrupo H de G denotamos

$$H_V = \{h \in G \mid h|_V = id_V\} \quad \text{e} \quad B^H = \{b \in B \mid h(b) = b, \text{ para todo } h \in H\}.$$

Claramente H_V é um subgrupo de G e B^H é um subanel de B que contém B^G. Além disso, B^H é G-forte e separável sobre B^G.

Teorema 1.1.2. [4, Theorem 2.3] *Seja* B *uma extensão galoisiana de* B^G *com grupo de Galois* G.

(i) A aplicação $H \longmapsto B^H$ é uma correspondência bijetora entre os subgrupos de G e as subálgebras de B contendo B^G que são G-fortes e separáveis sobre B^G, cuja inversa é dada pela aplicação $V \longmapsto H_V$.

(ii) Para todo subgrupo H de G, B é uma extensão galoisiana de B^H com grupo de Galois H. Além disso, B^H é uma extensão galoisiana de B^G com grupo G/H se e somente se H é um subgrupo normal de G.

1.2 Extensões abelianas: o grupo de Harrison $T_{gl}(G, A)$

Uma extensão galoisiana B de um anel A com grupo de Galois G é dita *abeliana* se G é abeliano. O nosso propósito nesta seção é apresentar em detalhes a construção do grupo das extensões abelianas, o qual, como conjunto, consiste das classes de isomorfismo $[B]$ das extensões abelianas de um mesmo anel A com mesmo grupo de Galois G. Denotaremos esse conjunto por $T_{gl}(G, A)$.

Sejam $[B], [B'] \in T_{gl}(G, A)$. É bem conhecido que o produto tensorial $B \otimes B'$ (sobre A) é uma extensão abeliana de A com grupo de Galois $G \times G$. Denotemos por δG o subgrupo de $G \times G$ cujos elementos são da forma (g^{-1}, g), $g \in G$.

É imediato ver que G e $(G \times G)/\delta G$ são grupos isomorfos via a aplicação $g \mapsto (g, 1) = (1, g) \pmod{\delta G}$ (por simplicidade, denotamos por 1 o elemento neutro de G). O grupo G age sobre $(B \otimes B')^{\delta G}$ da seguinte forma

$$g : \sum_i b_i \otimes b'_i \mapsto \sum_i g(b_i) \otimes b'_i = \sum_i b_i \otimes g(b'_i),$$

para todo $b_i \in B$, $b'_i \in B'$ e $g \in G$.

Decorre do item (ii) do Teorema 1.1.2 que $(B \otimes B')^{\delta G}$ é uma extensão galoisiana de A com o mesmo grupo de Galois G.

Definimos sobre $T_{gl}(G,A)$ a operação $*$ dada por

$$[B]*[B'] := [(B\otimes B')^{\delta G}], \text{ para todo } [B],[B']\in T_{gl}(G,A).$$

Pode-se ver facilmente que a operação $*$ está bem definida, é associativa e também comutativa. O elemento neutro para a operação $*$ é representada pela extensão trivial $E=\sum_{g\in G}Ae_g$, onde os elementos e_g são idempotentes dois a dois ortogonais e de soma 1. A ação de G sobre E é dada por $g(e_h)=e_{gh}$, para todo $g,h\in G$. Para todo $[B]\in T_{gl}(G,A)$ é facil ver que

$$(B\otimes E)^{\delta G}=\{\sum_{g\in G}g^{-1}(b)\otimes e_g \mid b\in B\}$$

e que a aplicação

$$\begin{aligned} f:(B\otimes E)^{\delta G} &\to B\\ \sum_{g\in G}g^{-1}(b)\otimes e_g &\mapsto b \end{aligned}$$

é um isomorfismo de A-álgebras tal que $f\circ g=g\circ f$, para todo $g\in G$, donde segue que $[B]*[E]=[B]$.

Dado $[B]\in T_{gl}(G,A)$, o elemento inverso $[B]^{-1}$ é representado pela própria extensão B com a ação de G dada por $g: b\mapsto g^{-1}(b)$, para todo $g\in G$ e $b\in B$.

De fato, a aplicação

$$\begin{aligned} \theta: B\otimes B &\to \sum_{l\in G}Be_l\\ b\otimes b' &\mapsto \sum_{l\in G}bl(b')e_l, \end{aligned}$$

é um isomorfismo de B-álgebras [4, Theorem 1.3(e)]. Além disso, $B\otimes B$ e $\sum_{l\in G}Be_l$ são extensões abelianas de A com grupo de Galois $G\times G$ agindo respectivamente sobre essas A-álgebras da seguinte forma:

$$(g,h)(b\otimes b') = g(b)\otimes h^{-1}(b'),$$
$$(g,h)(\sum_{l\in G} b_l e_l) = \sum_{l\in G} g(b_l)e_{ghl},$$

para todo $g,h\in G$. Então, $\theta\circ(g,h) = (g,h)\circ\theta$ para todo $g,h\in G$ e disto segue que θ induz por restrição um isomorfismo de A-álgebras entre $(B\otimes B')^{\delta G}$ e $E = \sum_{g\in G} Ae_g = (\sum_{g\in G} Be_g)^{\delta G}$. Portanto $[B]*[B]^{-1} = [E]$, conforme esperado.

Capítulo 2

A teoria de Galois parcial

2.1 Ação parcial unitária

Conforme [2], uma ação parcial de um grupo G sobre um anel S é uma coleção α de ideais S_g de S e isomorfismos de ideais $\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g$, $g \in G$, satisfazendo as seguintes condições:

(i) $S_{1_G} = S$, $\alpha_{1_G} = id_S$,

(ii) $\alpha_g(S_{g^{-1}} \cap S_h) = S_g \cap S_{gh}$,

(iii) $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$ em $S_{h^{-1}} \cap S_{(gh)^{-1}}$,

para todo $g, h \in G$.

Se $S_g = S$ para todo $g \in G$ dizemos que α é uma ação global de G em S.

A ação parcial α será chamada *unitária* se cada ideal S_g possui um elemento identidade $1_g \neq 0$, para todo $g \in G$. É imediato ver que cada 1_g é um idempotente central de S e que $S_g = S1_g$.

Enfatizamos que em todo este texto iremos considerar somente ações parciais unitárias de grupos finitos.

Decorre de [2, Theorem 4.5] que se α é uma ação parcial unitária de G sobre S então α possui uma envolvente, isto é, existe um anel B contendo S como um ideal (a menos de isomorfismo) e uma ação global β de G sobre B, por automorfismos de B, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $S_g = S \cap \beta_g(S)$, para todo $g \in G$,

(ii) $\beta_g|_{S_g^{-1}} = \alpha_g$, para todo $g \in G$,

(iii) $B = \sum_{g\in G} \beta_g(S)$.

A noção de envolvente, conforme introduzida em [2], é um pouco mais geral e exige que existam um ideal I de B e um isomorfismo de anéis $\varphi : S \to I$ tal que

(i) $\varphi(S_g) = \varphi(S) \cap \beta_g(\varphi(S))$, para todo $g \in G$,

(ii) $\beta_g \circ \varphi|_{S_{g^{-1}}} = \varphi \circ \alpha_g|_{S_{g^{-1}}}$, para todo $g \in G$,

(iii) $B = \sum_{g\in G} \beta_g(\varphi(S))$.

Note que $B = S$ se e somente se α é global

Na maioria dos casos que trataremos neste texto iremos, por simplicidade, identificar S com sua imagem $\varphi(S)$ em B e assumir a primeira definição de envolvente. Contudo, usaremos também a segunda definição de envolvente sempre que for imprescindível.
A seguinte obsevação pode ser vista de manera ampla em [3].

Observação 2.1.1. *Decorre das propriedades da envolvente que:*

– 1_S *é um idempotente central de* B*,*

– $S = B1_S$ *e* $S_g = S1_g = B1_g$,

– $1_g = 1_S\beta_g(1_S)$,

– $\alpha_g(s1_{g^{-1}}) = \beta_g(s)1_S$, *para todo* $s \in S$,

– $\alpha_g(1_h1_{g^{-1}}) = 1_g1_{gh}$

para todo $g, h \in G$. $\square$

A função definida a continuação foi definida pela primera vez em [3, page 79], para um grupo em geral G.
Todo subgrupo $H = \{h_1 = 1, h_2, \ldots, h_n\}$ de G determina uma aplicação $\psi_H : B \to B$ dada pela fórmula

$$\psi_H(b) = \sum_{1\le l\le n}\sum_{i_1<\cdots<i_l}(-1)^{l+1}\beta_{h_{i_1}}(1_S)\beta_{h_{i_2}}(1_S)\cdots\beta_{h_{i_l}}(1_S)\beta_{h_{i_l}}(b),$$

para todo $b \in B$. Esta aplicação também pode ser escrita na forma

$$\psi_H(b) = \sum_{1\le i\le n}\beta_{h_i}(b)e_i, \text{ para todo } b \in B,$$

onde

$$e_1 = 1_S \quad \text{e} \quad e_i = (1_B - 1_S)(1_B - \beta_{h_2}(1_S))\ldots(1_B - \beta_{h_{i-1}}(1_S))\beta_{h_i}(1_S),$$

para todo $2 \le i \le n$. Os e_i são obviamente idempotentes de B, dois a dois ortogonais.

Conforme introduzido em [3], a subálgebra de S dos elementos invariantes por α é dada por

$$S^\alpha = \{s \in S \mid \alpha_g(s1_{g^{-1}}) = s1_g, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Agora, todo subgrupo H de G determina, por restrição, uma ação parcial $\alpha_H = \{\alpha_h : S_{h^{-1}} \to S_h \mid h \in H\}$ de H em S. Denotamos por S^{α_H} a subálgebra de S dos elementos de S invariantes pela ação de α_H, isto é,

$$S^{\alpha_H} = \{s \in S \mid \alpha_h(s1_{h^{-1}}) = 1_h s, \text{ para todo } \ h \in H\}.$$

É imediato que $S^{\alpha} \subseteq S^{\alpha_H}$.

Proposição 2.1.2. [1, Lemma 1] *Seja $\psi_H : B \to B$ a aplicação descrita acima. Então,*

(i) ψ_H *é um homomorfismo de anéis,*

(ii) ψ_H *é unitário se e somente se $H = G$ e, neste caso, $B = \sum_{1\leq i\leq m} \beta_{g_i}(S)e_i$*

(iii) ψ_H *é B^H-linear,*

(iv) $(\psi_H)|_S$ *é injetora,*

(v) $e_H = \psi_H(1_S)$ *é um idempotente de B.*

(vi) $\psi_H(s) \in B^H$*, para todo $s \in S^{\alpha_H}$,*

(vii) a restrição de ψ_H a S^{α_H} é um isomorfismo de anéis de S^{α_H} sobre $B^H e_H$, cujo inverso é dado pela multiplicação por 1_S. Em particular, $B^H 1_S = S^{\alpha_H}$.

Demonstração. (i) Segue imediatamente do fato que cada β_g, $g \in G$, é um homomorfismo de anéis e os idempotentes e_i, $1 \leq i \leq n$, são ortogonais.

(ii) Decorre do Lema 4.4 de [2] que $1_B = \psi_G(1_S) \in \sum_{1\leq i\leq m} \beta_{g_i}(S)e_i$ que é um ideal de B, o que acarreta a igualdade desejada.

(iii) ψ_H é B^H-linear pois, para todo $x \in B^H$ e $b \in B$, temos:

$$\psi_H(xb) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{h_i}(xb)e_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_{h_i}(x)\beta_{h_i}(b)e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x\beta_{h_i}(b)e_i = x\sum_{i=1}^{n} \beta_{h_i}(b)e_i = x\psi_H(b).$$

(iv) ψ_H restrita a S é injetora porque

$$\psi_H(s)1_S = \sum_{i=1}^{n} \beta_{h_i}(s)e_i \underbrace{1_S}_{=e_1} \overbrace{=}^{e_ie_j=0; i\neq j} \beta_1(s)e_1 1_S = s1_S = s,$$

para todo $s \in S$.

(v) Segue do fato que os elementos $\beta_{h_i}(1_S)$ e os elementos e_i são idempotentes de B e $e_ie_j = 0$, para todo $i \neq j$.

(vi) Devemos provar que se $s \in S^{\alpha_H}$, então $\beta_h(\psi_H(s)) = \psi_H(s)$, para todo $h \in H$. E para isto é suficiente mostrar que para todo $r \in S^{\alpha_H}$ e $h \in H$, o elemento $\beta_h(\beta_{h_{i_1}}(1_S)\cdots\beta_{h_{i_{l-1}}}(1_S)\beta_{h_{i_l}}(s))$, com $i_1 < \ldots < i_l$, é uma parcela de $\psi_H(s)$, para todo $1 \leq l \leq n$.

Começamos provando que

$$\beta_{h_i}(1_S)\beta_{h_j}(r) = \beta_{h_j}(1_S)\beta_{h_i}(r)$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$ e $r \in S^{\alpha_H}$.

Note que pela Observação 2.1.1 $\alpha_h(s1_{h^{-1}}) = \beta_h(s)1_S$, para todo $s \in S$ e $h \in H$. Em particular, se $s \in S^{\alpha_H}$ temos $\beta_h(s)1_S = s1_h$, para todo $h \in H$, e então

$$\begin{aligned}
\beta_{h_i}(1_S)\beta_{h_j}(s) &= \beta_{h_j}(\beta_{h_j^{-1}h_i}(1_S)s) = \beta_{h_j}(\beta_{h_j^{-1}h_i}(1_S)1_S s) \\
&= \beta_{h_j}(\alpha_{h_j^{-1}h_i}(1_S 1_{h_i^{-1}h_j})s) = \beta_{h_j}(1_{h_j^{-1}h_i}s) \\
&= \beta_{h_j}(1_S\beta_{h_j^{-1}h_i}(s)) = \beta_{h_j}(1_S)\beta_{h_i}(s).
\end{aligned}$$

Agora,

$$\beta_h(\beta_{h_{i_1}}(1_S)\cdots\beta_{h_{i_{l-1}}}(1_S)\beta_{h_{i_l}}(s)) = \beta_{hh_{i_1}}(1_S)\cdots\beta_{hh_{i_{l-1}}}(1_S)\beta_{hh_{i_l}}(s).$$

Seja $h_{j_k} = hh_{i_k}$ para todo $1 \leq k \leq l$. Como B é comutativo, podemos reordenar $\beta_{h_{j_1}}(1_S), \ldots, \beta_{h_{j_{l-1}}}(1_S)$ de forma que os $h_{j_1}, \ldots, h_{j_{l-1}}$ apareçam na listagem de forma crescente.

Se $h_{j_{l-1}}$ aparecer na listagem antes que h_{j_l}, nada há a acrescentar. Caso contrário, pelo que mostramos acima, $\beta_{h_{l-1}}(1_S)\beta_{h_l}(s) = \beta_{h_l}(1_S)\beta_{h_{l-1}}(s)$ e assim todos os h_{j_k} ficam na forma crescente. Portanto, em qualquer dos dois casos

$$\beta_h(\beta_{h_{i_1}}(1_S) \cdots \beta_{h_{i_{l-1}}}(1_S)\beta_{h_{i_l}}(s))$$

é uma parcela de $\psi_H(s)$.

(vii) Vejamos inicialmente que a aplicação

$$\psi_H : S^{\alpha_H} \to B^H e_H$$

está bem definida. Para $s \in S^{\alpha_H}$, tem-se

$$\psi_H(s) = \psi_H(s1_S) = \psi_H(s)\psi_H(1_S) = \psi_H(s)e_H$$

e por (vi) temos $\psi_H(s) \in B^H e_H$.

Por outro lado, se $x \in B^H$ então

$$\begin{aligned}
\alpha_h((xe_H 1_S)1_{h^{-1}}) &= \alpha_h((x1_S)1_{h^{-1}}) = \beta_h((x1_S)1_{h^{-1}}) \\
&= \beta_h((x1_S)1_S\beta_{h^{-1}}(1_S)) = \beta_h(x1_S)1_S \\
&= \beta_h(x)\beta_h(1_S)1_S = x1_h = (x1_S)1_h \\
&= (xe_H 1_S)1_h,
\end{aligned}$$

para todo $h \in H$, ou seja, $xe_H 1_S \in S^{\alpha_H}$.

Finalmente, temos

$$(1_S \circ \psi_H)(s) = 1_S(\psi_H(s)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{h_i}(s)e_i 1_S = \beta_{h_1}(s)e_1 = s1_S = s$$

e

$$(\psi_H \circ 1_S)(xe_H) = \psi_H((xe_H)1_S) = \psi_H(x1_S) = x\psi_H(1_S) = xe_H,$$

para todo $s \in S^{\alpha_H}$ e todo $x \in B^H$. A afirmação final é óbvia. $\square$

Observação 2.1.3. É importante acrescentar que no caso em que α é global, temos $B = S$ e $\psi_H = id_S$, para todo subgrupo H de G, e a Proposição 2.1.2 torna-se uma obviedade.

2.2 Extensões galoisianas parciais

Em [3] M. Dokuchaev, M. Ferrero e A. Paques introduziram a noção de extensão de Galois parcial e desenvolveram uma teoria de Galois parcial, a qual basicamente consiste, assim como no caso global, de dois teoremas principais: um teorema definição e um teorema referente à correspondência de Galois. Na realidade esses dois teoremas são uma extensão ao contexto parcial dos teoremas correspondentes da teoria global CHR, devida a S. U. Chase, D. K. Harrison e A. Rosenberg.

Nesta seção apresentaremos uma versão ampliada do teorema definição, isto é, adicionamos mais um item que não foi considerado em [3]. Assim como no caso global, aqui também necessitamos alguma preparação, isto é, introduzir os conceitos necessários na versão parcial para uma melhor e mais completa compreensão do texto.

Sejam S um anel, G um grupo finito e $\alpha = \{\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g \mid g \in G\}$ uma ação parcial unitária de G sobre S. Recordemos de [3] que dois elementos quaisquer $g, h \in G$ são ditos *α-fortemente distintos*, se para todo idempotente não nulo $e \in S_g \cup S_h$ existe $x \in S$ tal que $\alpha_g(x1_{g^{-1}})e \neq \alpha_h(x1_{h^{-1}})e$.

O skew anel de grupo parcial, conforme introduzido em [2] por Dokuchaev e Exel, é o S-módulo projetivo e finitamente gerado dado pela soma direta dos ideais S_g e denotado por

$$S \star_\alpha G = \bigoplus_{g \in G} S_g \delta_g,$$

onde os símbolos δ_g são apenas indicadores de posição, munido de uma multiplicação induzida pela seguinte regra

$$(x_g \delta_g)(y_h \delta_h) = x_g \alpha_g(y_h 1_{g^{-1}}) \delta_{gh},$$

para todos $g, h \in G$, $x_g \in S_g$ e $y_h \in S_h$. A multiplicação assim definida é associativa e não comutativa, com elemento identidade dado por $1_S \delta_1$. Em particular, S pode ser visto como um subanel de $S \star_\alpha G$ via a imersão $s \mapsto s\delta_1$.

Todo $S \star_\alpha G$-módulo à esquerda M é também um S-módulo. O conjunto, conforme introduzido em [3],

$$M^G = \{m \in M : 1_g u_g \cdot m = 1_g \cdot m, \text{ para todo } g \in G\}$$

é um S^α-submódulo de M, chamado dos elementos de M que são G-invariantes. Em particular, S é um $S \star_\alpha G$-módulo à esquerda via a ação $s_g \delta_g \cdot s = s_g \alpha_g(s 1_{g^{-1}})$ e, como tal, $S^G = S^\alpha$.

Teorema 2.2.1. [[3], Theorem 4.1 and Theorem 4.2] *Sob as considerações acima listadas, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) S é separável sobre S^α e os elementos de G são α-fortemente distintos.

(ii) Existem elementos $x_i, y_i \in S$, $1 \leq i \leq m$, tais que

$$\sum_{1 \leq i \leq m} x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \delta_{1,g} 1_S$$

para todo $g \in G$.

(iii) *S é um S^{α}-módulo projetivo finitamente gerado e a aplicação*

$$j : S \star_{\alpha} G \to End_{S^{\alpha}}(S), \text{ dada por } j(\sum_{g\in G} x_g u_g)(z) = \sum_{g\in G} x_g \alpha_g(z1_{g^{-1}}),$$

é um isomorfismo de S-módulos e S^{α}-álgebras.

(iv) *Para cada $S \star_{\alpha} G$-módulo à esquerda M a aplicação*

$$\mu : S \otimes M^G \to M, \text{ dada por } \mu(x \otimes m) = xm,$$

é um isomorfismo de S-módulos.

(v) *A aplicação*

$$\pi : S \otimes S \to \prod_{g\in G} S_g, \text{ dada por } \pi(x \otimes y) = (x\alpha_g(y1_{g^{-1}}))_{g\in G}$$

é um isomorfismo de S-módulos.

Todo anel S satisfazendo qualquer uma das afirmações equivalentes do Teorema 2.2.1 é chamado uma *extensão de Galois (ou galoisiana) α-parcial de S^{α}.* Os elementos x_i, y_i referidos na afirmação (ii) do Teorema 2.2.1 são chamados *de coordenadas galoisianas de S relativas à ação parcial α.*

A seguir acrescentaremos uma proposição correspondente à versão parcial da afirmação (vi) do Teorema 1.1.1 para ações globais.

Proposição 2.2.2. *Sejam S, G e α como no Teorema 2.2.1. Então, S é uma extensão galoisiana α-parcial de S^{α} se e somente se para cada $1 \neq g \in G$ e para cada ideal maximal $\mathcal{M}$ de S, existe $x \in S$ tal que $x - \alpha_g(x1_{g^{-1}}) \notin \mathcal{M}$.*

Demonstração. Praticamente esta demonstração segue os mesmos argumentos usados no caso global.

Suponhamos que existam $1 \neq g \in G$ e um ideal maximal $\mathcal{M}$ de S tais que $x - \alpha_g(x1_{g^{-1}}) \in \mathcal{M}$, para todo $x \in S$. Então, temos que $y_j - \alpha_g(y_j1_{g^{-1}}) \in \mathcal{M}$, onde os $x_j, y_j \in S$ são as coordenadas galoisianas de S. Consequentemente, $1_S = \sum_{j=1}^{n} x_j(y_j - \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}})) \in \mathcal{M}$, o que é um absurdo.

Reciprocamente, seja $g \neq 1$ em G e consideremos $I \subseteq S$ o ideal gerado por $\{x - \alpha_g(x1_{g^{-1}}) : x \in S\}$. Pela hipótese $I = S$ pois, caso contrário, I estaria contido em algum ideal maximal de S o que é um absurdo. Assim, existem elementos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in S$ tais que $\sum_{j=1}^{n} x_j(y_j - \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) = 1_S$.

Disto temos que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = 1_S + \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}).$$

Sejam

$$x_{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) \quad \text{e} \quad y_{n+1} = 1_S.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} x_j y_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + x_{n+1} y_{n+1} \\
&= 1_S + \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) - \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) \\
&= 1_S.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) + x_{n+1} \alpha_g(y_{n+1} 1_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) - (\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}})) \alpha_g(y_{n+1} 1_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) - \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) \alpha_g(1_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) - \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) = 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) = \delta_{1,g},$$

Suponhamos agora que H e H' sejam subconjuntos de G que contém o elemento identidade 1 de G, para os quais existem elementos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, x'_1, \ldots, x'_m$, $y'_1, \ldots, y'_m \in S$ tais que para todo $1 \neq g \in H$ e $1 \neq g' \in H'$,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) = \delta_{1,g} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{m} x'_k \alpha_{g'}(y'_k 1_{g^{-1}}) = \delta_{1,g'}.$$

Então, para todo $l \in H \cup H'$ temos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_j x'_k \alpha_l(y_j y'_k 1_{l^{-1}}) &= (\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_l(y_j 1_{l^{-1}}))(\sum_{k=1}^{m} x'_k \alpha_l(y'_k 1_{l^{-1}})) \\ &= \delta_{1,l}\delta_{1,l} = \delta_{1,l}.\end{aligned}$$

Como $G = \cup_{g \neq 1}\{1, g\}$ o resultado segue. □

2.3 Envolvente de uma extensão galoisiana parcial

Nesta seção apresentaremos vários resultados relacionados à envolvente de uma extensão galoisiana parcial.

O teorema seguinte estabelece uma correlação entre uma extensão galoisiana α-parcial e sua envolvente.

Teorema 2.3.1. [[3], Theorem 3.3] *Sejam S (resp., B) um anel, G um grupo finito e α (resp., β) uma ação parcial unitária (resp., global) de G sobre S (resp., B) tais que (B, β) é uma envolvente de (S, α). Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) B é uma extensão galoisiana (global) de B^G, com grupo de Galois G.

(ii) S é uma extensão galoisiana α-parcial de S^α.

Os resultados a seguir serão utilizados no capítulo 3.

Proposição 2.3.2. *Sejam S e S' anéis, G um grupo finito e $\alpha = \{\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g \mid g \in G\}$ e $\alpha' = \{\alpha'_g : S'_{g^{-1}} \to S'_g \mid g \in G\}$ ações parciais unitárias de G sobre S e S' respectivamente. Sejam (B, β) e (B', β') envolventes de (S, α) e (S', α') respectivamente.*

(i) Se $S^{\alpha} = R = S'^{\alpha'}$ então

$$\alpha \otimes \alpha' = \{\alpha_g \otimes \alpha'_{g'} : S_{g^{-1}} \otimes S'_{g'^{-1}} \to S_g \otimes S'_{g'} \mid (g, g') \in G \times G\}$$

é uma ação parcial unitária de G sobre $S \otimes S'$ ($\otimes = \otimes_R$).

(ii) Se $B^G = A = B'^G$ então $(B \otimes_A B', \beta \otimes \beta')$ é uma envolvente de $(S \otimes S', \alpha \otimes \alpha')$.

Demonstração. (i) É de verificação direta e os argumentos são os usuais.

(ii) Por hipótese existem monomorfismos de anéis $\varphi : S \to \varphi(S) \subseteq B$ e $\varphi' : S' \to \varphi'(S') \subseteq B'$ tais que $\varphi(S)$ e $\varphi'(S')$ são ideais de B e B', respectivamente, que satisfazem, para cada $g, g' \in G$

(i)

$$\varphi(S_g) = \varphi(S) \cap \beta_g(\varphi(S)) \quad \text{e} \quad \varphi'(S'_{g'}) = \varphi'(S') \cap \beta'_{g'}(\varphi'(S')),$$

(ii)

$$(\varphi \circ \alpha_g)|_{S_{g^{-1}}} = (\beta_g \circ \varphi)|_{S_{g^{-1}}} \quad \text{e} \quad (\varphi' \circ \alpha'_{g'})|_{S'_{g'^{-1}}} = (\beta'_{g'} \circ \varphi')|_{S'_{g'^{-1}}}$$

(iii)

$$B = \sum_{g \in G} \beta_g(\varphi(S)), \quad B' = \sum_{g' \in G} \beta'_{g'}(\varphi'(S')).$$

Então

$$\varphi \otimes \varphi' : S \otimes S' \to B \otimes_A B'$$

é um monomorfismo de anéis tal que $\varphi \otimes \varphi'(S \otimes S')$ é um ideal de $B \otimes_A B'$ e para cada $(g, g') \in G \times G$

(i)

$$\begin{aligned}
\varphi \otimes \varphi'(S_g \otimes S'_{g'}) &= \varphi(S_g) \otimes \varphi'(S'_{g'})\\
&= (\varphi(S) \cap \beta_g(\varphi(S))) \otimes (\varphi'(S') \cap \beta'_{g'}(\varphi'(S')))\\
&= (\varphi(S)\beta_g(\varphi(S))) \otimes (\varphi'(S')\beta'_{g'}(\varphi'(S')))\\
&= [\varphi(S) \otimes \varphi'(S')] \cap [\beta_g(\varphi(S)) \otimes \beta'_{g'}(\varphi'(S'))]\\
&= [\varphi \otimes \varphi'(S \otimes S')] \cap [\beta_g \otimes \beta'_{g'}(\varphi \otimes \varphi'(S \otimes S'))],
\end{aligned}$$

(ii) para todo $x \otimes y \in S_{g^{-1}} \otimes S'_{g'^{-1}}$,

$$\begin{aligned}
[(\varphi \otimes \varphi') \circ (\alpha_g \otimes \alpha'_{g'})](x \otimes y) &= [(\varphi \circ \alpha_g) \otimes (\varphi' \circ \alpha'_{g'})](x \otimes y)\\
&= [(\beta_g \circ \varphi) \otimes (\beta'_{g'} \circ \varphi')](x \otimes y)\\
&= [(\beta_g \otimes \beta'_{g'}) \circ (\varphi \otimes \varphi')](x \otimes y).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
B \otimes_A B' &= (\sum_{g \in G} \beta_g(\varphi(S))) \otimes (\sum_{g \in G} \beta'_{g'}(\varphi'(S')))\\
&= \sum_{(g,g') \in G \times G} \beta_g(\varphi(S)) \otimes \beta'_{g'}(\varphi'(S'))\\
&= \sum_{(g,g') \in G \times G} \beta_g \otimes \beta'_{g'}(\varphi \otimes \varphi'(S \otimes S')).
\end{aligned}$$

Portanto, $(B \otimes_A B', \beta \otimes \beta')$ é uma envolvente de $(S \otimes S', \alpha \otimes \alpha')$. $\square$

Observação 2.3.3. A Proposição 2.3.2 continua válida no caso mais geral em que α e α' são ações parciais de grupos finitos G e G', não necessariamente iguais, sobre os anéis S e S' respectivamente. A demonstração sob esta hipótese mais geral segue uma argumentação absolutamente análoga àquela da Proposição 2.3.2.

Para o lema seguinte necessitamos da noção de traço parcial, o qual foi introduzido em [3]. Dados S um anel, G um grupo finito e $\alpha = \{\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g \mid g \in G\}$ uma ação parcial unitária de G sobre S, o traço parcial é definido como sendo a aplicação $tr_\alpha : S \to S$ dada por

$$tr_\alpha(s) = \sum_{g \in G} \alpha_g(s1_{g^{-1}})$$

para todo $s \in S$. Segue de [3, Lemma 2.1] que tr_α é uma aplicação S^α-linear e $tr_\alpha(S) \subseteq S^\alpha$.

Lema 2.3.4. *Se S é uma extensão galoisiana α-parcial de S^α, então $tr_\alpha(S) = S^\alpha$. Em particular, existe $c \in S$ tal que $tr_\alpha(c) = 1_S$.*

Demonstração. Seja (B, β) uma envolvente para (S, α). Então, pelo Teorema 2.3.1 B é uma extensão galoisiana de B^G e, conforme [4, Lemma 1.6], o traço global $tr_\beta : B \to B^G$ é sobrejetor. Consequentemente, por [3, Corollary 2.2] $tr_\alpha : S \to S^\alpha$ também é sobrejetor. A afirmação final é óbvia. $\square$

Proposição 2.3.5. *Sejam S, S', G, α e α' como na Proposição 2.3.2. Se S (resp., S') é uma extensão galoisiana α-parcial (resp., α'-parcial) de S^α (resp., $S'^{\alpha'}$) e $S^\alpha = R = S'^{\alpha'}$ então $S \otimes S'$ ($\otimes = \otimes_R$) é uma extensão galoisiana $\alpha \otimes \alpha'$-parcial de R.*

Demonstração. É imediato verificar que se $\{x_i, y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ (resp., $\{x'_j, y'_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ são as coordenadas galoisianas de S (resp., S') relativas à α (resp., α') então $\{x_i \otimes x'_j, y_i \otimes y'_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ são as coordenadas galoisianas de $S \otimes S'$ relativas à $\alpha \otimes \alpha'$. Portanto $S \otimes S'$ é uma extensão galoisiana $\alpha \otimes \alpha'$-parcial de $(S \otimes S')^{\alpha \otimes \alpha'}$.

Para concluir resta apenas mostrar que $(S \otimes S')^{\alpha \otimes \alpha'} = R$.

De fato, é imediato que $R = R \otimes R = S^\alpha \otimes S'^{\alpha'} \subseteq (S \otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'}$. Para a inclusão recíproca observemos primeiro que cada ideal S'_g é unitário com elemento identidade denotado por $1'_g$ e que $tr_{\alpha'} : S' \to S'^{\alpha'}$ é dado por $tr_{\alpha'}(s') = \sum_{g\in G} \alpha'_g(s'1'_{g^{-1}})$ para todo $s' \in S'$. Do Lema 2.3.4 segue que existem elementos $c \in S$ e $c' \in S'$ tais que $tr_\alpha(c) = 1_S$ e $tr_{\alpha'}(c') = 1'_{S'}$.

Seja $\sum_{i=1}^k s_i \otimes s'_i \in (S \otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'}$. Então

$$\sum_{i=1}^k \alpha_g \otimes \alpha'_h((s_i \otimes s'_i)1_{g^{-1}} \otimes 1'_{h^{-1}}) = \sum_{i=1}^k (s_i \otimes s'_i)1_g \otimes 1'_h, \quad \text{para todo} \quad (g,h) \in G \times G,$$

e consequentemente temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k s_i \otimes s'_i &= (\sum_{i=1}^k s_i \otimes s'_i)(1_S \otimes 1'_S) \\
&= (\sum_{i=1}^k s_i \otimes s'_i)(tr_\alpha(c) \otimes tr_{\alpha'}(c')) \\
&= (\sum_{i=1}^k s_i \otimes s'_i)(\sum_{g\in G} \alpha_g(c1_{g^{-1}}) \otimes \sum_{h\in G} \alpha'_h(c'1'_{h^{-1}})) \\
&= \sum_{g,h\in G} \left(\sum_{i=1}^k s_i \otimes s'_i 1_g \otimes 1'_h \right) \alpha_g(c1_{g^{-1}}) \otimes \alpha'_h(c'1'_{h^{-1}}) \\
&= \sum_{g,h\in G} (\sum_{i=1}^k \alpha_g \otimes \alpha'_h(s_i \otimes s'_i 1_{g^{-1}} \otimes 1'_{h^{-1}}))\alpha_g(c1_{g^{-1}}) \otimes \alpha'_h(c'1'_{h^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{g,h\in G} \alpha_g(s_i c1_{g^{-1}}) \otimes \alpha'_h(s'_i c'1'_{h^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^k (\sum_{g\in G} \alpha_g(s_i c1_{g^{-1}})) \otimes (\sum_{h\in G} \alpha'_h(s'_i c'1'_{h^{-1}})) \\
&= \sum_{i=1}^k tr_\alpha(s_i c) \otimes tr_{\alpha'}(s'_i c') \in S^\alpha \otimes S'^{\alpha'} (= R).
\end{aligned}$$

A demonstração está completa. □

2.4 O teorema fundamental

Para qualquer subálgebra T de S que contém S^α denotamos por H_T o subconjunto de G formado pelos elementos α-invariante de T, isto é,

$$H_T = \{g \in G \mid \alpha_g(t1_{g^{-1}}) = 1_g t, \text{ para todo } t \in T\}.$$

Em geral H_T não é um subgrupo de G. Em [3] o exemplo 6.3 ilustra este fato.

Uma subálgebra T de S é chamada *α-forte* se, para cada par de elementos $g, h \in G$, com $g^{-1}h \notin H_T$, e para qualquer idempotente $e \in S_g \cup S_h$, existe um elemento $t \in T$ tal que $\alpha_g(1_{g^{-1}})e \neq \alpha_h(1_{h^{-1}})e$.

Nesta seção mostramos o Teorema Fundamental da Teoria de Galois para ações parciais de anéis comutativos [3]. Para isto precisamos de dois teoremas que estabelecem o Teorema Fundamental. No que segue (S, α) é uma ação parcial de G sobre R com ação envolvente (B, G), com $A = B^G$ e $R = S^\alpha$.

O Teorema Fundamental para a teoria de Galois parcial é composto de dois teoremas. O primeiro deles é devido a Dokuchaev, Ferrero e Paques, cujo enunciado transcrevemos abaixo.

Teorema 2.4.1. [3, Theorem 5.1] *Sejam S um anel, G um grupo finito e α uma ação parcial de G sobre S tais que S é uma extensão galoisiana α-parcial de S^α. Então a aplicação $H \longmapsto S^{\alpha_H}$ é uma correspondência bijetora entre os subgrupos de G e as subálgebras T de S contendo S^α que são α-fortes, S^α-separáveis e tais que H_T é subgrupo de G, cuja inversa é dada pela aplicação $T \longmapsto H_T$.*

O segundo, que enunciamos a seguir, será tratado na sequência.

Teorema 2.4.2. *Sejam S, G e α como no Teorema 2.4.1. Então,* *(i) Todo subgrupo H de G induz uma ação parcial α_H sobre S e S é uma extensão galoisiana α_H-parcial de S^{α_H}.*

(ii) Todo subgrupo normal H de G induz uma ação parcial $\alpha'_{G/H}$ sobre S^{α_H} e S^{α_H} é uma extensão galoisiana $\alpha'_{G/H}$-parcial de S^{α}.

O item (i) do Teorema 2.4.2 também foi demonstrado em [3, Theorem 5.2]. A demonstração do item (ii) será obtida como consequência dos vários resultados que passaremos a expor. Esses resultados foram apresentados pela primeira vez e de forma suscinta por D. Bagio e A. Paques em [1]. No que se segue os apresentaremos com todos os detalhes.

Conforme vimos na seção 1 deste capítulo, de forma bastante detalhada, todo subgrupo H de G determina um endomorfismo $\psi_H : B \to B$ cuja restrição a S é um monomorfismo. A Proposição 2.1.2 descreve as características de ψ_H.

No que segue assumiremos que H é um subgrupo normal de G. Conforme Teorema 1.1.2(ii), a ação global β de G sobre B induz uma ação global $\beta_{G/H}$ de G/H sobre B^H da seguinte forma:

$$\beta_{G/H} : G/H \to \mathrm{Aut}(B^H), \quad gH \mapsto \beta_g|_{B^H}.$$

Além disso, se B é uma extensão galoisiana de B^G com grupo G, então B^H é uma extensão galoisiana de $B^G = (B^H)^{G/H}$, com grupo de Galois G/H.

A ação $\beta_{G/H}$ de G/H sobre B^H induz uma ação parcial $\alpha_{G/H}$ de G/H sobre $B^H e_H$ da seguinte forma:

$$\alpha_{G/H} = \{\alpha_{gH} : D_{g^{-1}H} \to D_{gH} \mid D_{gH} \in G/H\},$$

onde

$$D_{gH} = (B^H e_H) \cap \beta_g(B^H e_H) = B^H e_{gH}, \text{ com } e_{gH} = e_H \beta_g(e_H)$$

e

$$\alpha_{gH} = \beta_g|_{D_{g^{-1}H}}.$$

Proposição 2.4.3. *Sejam H um subgrupo normal de G e $\alpha_{G/H}$ conforme definida acima. Então,*

(i) $\alpha_{G/H}$ é uma ação parcial de G/H sobre B^He_H,

(ii) $(B^H, \beta_{G/H})$ é uma envolvente de $(B^He_H, \alpha_{G/H})$.

Demonstração. (i) Claramente cada D_{gH} é um ideal de B^He_H e cada $\alpha_{gH} = \beta_g|_{D_{g^{-1}H}}$ é um isomorfismo de anéis, por construção.

Além disso,

(1) $D_H = B^He_H\beta_1(e_H) = B^He_H$ e $\alpha_H = \beta_1|_{D_H} = id_{B^He_H}$

(2)

$$\begin{aligned}
\alpha_{gH}(D_{g^{-1}H} \cap D_{g'H}) &= \beta_g(D_{g^{-1}H} \cap D_{g'H}) \\
&= \beta_g(B^He_H\beta_{g^{-1}}(e_H) \cap B^He_H\beta_{g'}(e_H)) \\
&= \beta_g(B^He_H\beta_{g^{-1}}(e_H)B^He_H\beta_{g'}(e_H)) \\
&= \beta_g(B^He_H\beta_{g^{-1}}(e_H))\beta_g(B^He_H\beta_{g'}(e_H)) \\
&= B^H\beta_g(e_H)e_HB^H\beta_{gg'}(e_H) \\
&= B^He_H\beta_g(e_H) \cap B^He_H\beta_{gg'}(e_H) \\
&= D_{gH} \cap D_{gg'H}.
\end{aligned}$$

(3) De (2) segue que se $x \in D_{g'^{-1}H} \cap D_{(gg')^{-1}H}$, então $\beta_{g'}(x) = \alpha_{g'H}(x) \in D_{g^{-1}H}$ e portanto temos $\alpha_{gH} \circ \alpha_{g'H}(x) = \alpha_{gH}(\beta_{g'}(x)) = \beta_g(\beta_{g'}(x)) = \beta_{gg'}(x) = \alpha_{gg'H}(x)$.

(ii) Finalmente verifiquemos que de fato $(B^H, \beta_{G/H})$ é uma envolvente para

$(B^H e_H, \alpha_{G/H})$. Por construção resta apenas verificar que

$$B^H = \sum_{1 \leq i \leq m} \beta_{g_i}(B^H e_H),$$

onde $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_m$ denotam uma transversal de H em G. Como esta soma é um ideal de B^H é suficiente mostrar que ela contém 1_{B^H}. Desde que a ação parcial de G/H em B^H é descrita via os β_{g_i}, $1 \leq i \leq m$, estes determinam a aplicação $\psi_{G/H} : B^H \to B^H$ dada por

$$\psi_{G/H}(x) = \sum_{1 \leq l \leq m} \sum_{i_1 < \cdots < i_l} (-1)^{l+1} \beta_{g_{i_1}}(e_H)\beta_{g_{i_2}}(e_H) \cdots \beta_{g_{i_l}}(e_H)\beta_{g_{i_l}}(x).$$

É imediato ver que $\psi_{G/H}(B^H) \subseteq \sum_{1 \leq i \leq m} \beta_{g_i}(B^H e_H)$ e, como pelo Lemma 4.4 de [2] $\psi_{G/H}(e_H) = 1_{B^H}$, a demonstração está completa. $\square$

Observação 2.4.4. (1) De maneira análoga ao que foi visto na demonstração da Proposição 2.1.2 verifica-se também que a aplicação $\psi_{G/H} : B^H \to B^H$ é um homomorfismo de anéis, B^G-linear, cuja restrição a $B^H e_H$ é injetora e tal que $\psi_{G/H}(e_H) = 1_B = \psi_G(1_S)$.

(2) Igualmente, usando argumentos similares aos usados na demonstração da Proposição 2.1.2, verifica-se que:

(i) $\psi_{G/H}(x) \in (B^H)^{G/H} = B^G$, para todo $x \in L^{\alpha_{G/H}}$, onde $L = B^H e_H$.

(ii) A restrição de $\psi_{G/H}$ a $L^{\alpha_{G/H}}$ é um isomorfismo de álgebras de $L^{\alpha_{G/H}}$ sobre $B^G = (B^H)^{G/H}$ cuja inversa é dada pela multiplicacão por e_H. Em particular, $B^G e_H = L^{\alpha_{G/H}}$.

(3) É uma consequência imediata da Proposição 2.4.3 e do Teorema 2.3.1 que L é uma extensão de Galois $\alpha_{G/H}$-parcial de $L^{\alpha_{G/H}}$ se e somente se B^H é uma extensão de Galois de $(B^H)^{G/H} = B^G$ com grupo de Galois G/H.

Veremos a seguir que a ação parcial $\alpha_{G/H}$ sobre $L = B^H e_H$ induz uma ação parcial $\alpha'_{G/H}$ de G/H sobre S^{α_H} via multiplicacão por 1_S.

Fixada uma transversal $\{g_1 = 1, \ldots, g_n\}$ de H em G, sejam:

$$\begin{aligned}
1'_{g_i} &= e_{g_iH}1_S = e_H\beta_{g_i}(e_H)1_S = \beta_{g_i}(e_H)1_S,\\
D'_{g_i} &= D_{g_iH}1_S = B^H e_{g_iH}1_S = S^{\alpha_H}1'_{g_i},\\
\alpha'_{g_i} &= (1_S \circ \alpha_{g_iH} \circ \psi_H)|_{D'_{g_i^{-1}}}.
\end{aligned}$$

Proposição 2.4.5. *Sejam H um subgrupo normal de G e $\{g_1 = 1, \ldots, g_n\}$ uma transversal de H em G. Então,*

(i) $\alpha'_{G/H} = \{\alpha'_{g_i} : D'_{g_i^{-1}} \to D'_{g_i} \mid 1 \leq i \leq n)\}$ *é uma ação parcial de G/H sobre S^{α_H},*

(ii) $(S^{\alpha_H})^{\alpha'_{G/H}} = S^{\alpha_G}$,

(iii) $(B^H, \beta_{G/H})$ *é uma envolvente de* $(S^{\alpha_H}, \alpha'_{G/H})$,

(iv) S^{α_H} *é uma extensão galoisiana $\alpha'_{G/H}$-parcial de S^α se e somente se B^H é uma extensão galoisiana de B^G com grupo G/H.*

Demonstração. (i) Desde que cada $1'_{g_i}$ é, por definição, um idempotente central de S e $1'_{g_i} = \beta_{g_i}(e_H)1_S \in \beta_{g_i}(B^H)1_S = B^H 1_S = S^{\alpha_H}$, segue imediatamente que $D'_{g_i} = S^{\alpha_H}1'_{g_i}$ é um ideal de S. Além disso, cada $\alpha'_{g_i} : D'_{g_i^{-1}} \to D'_{g_i}$ está bem definido e é um isomorfismo de anéis como composta de isomorfismos.

$\alpha'_{G/H}$ é de fato uma ação parcial de G/H sobre S^{α_H} pois,

1. $D'_1 = D_H 1_S = S^{\alpha_H} e_H 1_S = S^{\alpha_H} 1_S = S^{\alpha_H}$ e
   $\alpha'_1 = (1_S \circ \alpha_H \circ \psi_H)|_{D'_1} = id_{S^{\alpha_H}}$.

2.

$$
\begin{aligned}
\alpha'_g(D'_{g^{-1}} \cap D'_h) &= (1_S \circ \alpha_{gH} \circ \psi_H)(S^{\alpha_H}\beta_{g^{-1}}(e_H)1_S S^{\alpha_H}\beta_h(e_H)1_S) \\
&= (1_S \circ \alpha_{gH})(\psi_H(S^{\alpha_H}\beta_{g^{-1}}(e_H)1_S)\psi_H(S^{\alpha_H}\beta_h(e_H)1_S)) \\
&= (1_S \circ \alpha_{gH})(B^H e_H \beta_{g^{-1}}(e_H) B^H e_H \beta_g(e_H)) \\
&= 1_S(\beta_g(B^H e_H) e_H \beta_g(e_H) \beta_g(B^H e_H) \beta_{gh}(e_H) \beta_g(e_H)) \\
&= 1_S(B^H \beta_g(e_H) e_H B^H \beta_g(e_H) \beta_{gh}(e_H)) \\
&= B^H \beta_g(e_H) e_H 1_S B^H \beta_g(e_H) \beta_{gh}(e_H) 1_S \\
&= B^H 1_S \beta_g(e_H) 1_S B^H 1_S \beta_{gh}(e_H) 1_S \\
&= S^{\alpha_H}\beta_g(e_H)1_S \cap S^{\alpha_H}\beta_{gh}(e_H)1_S \\
&= D'_g \cap D'_{gh}.
\end{aligned}
$$

3. Seja $x \in D'_{h^{-1}} \cap D'_{(gh)^{-1}}$. Então,

$$
\begin{aligned}
\alpha'_g \circ \alpha'_h(x) &= (1_S \circ \alpha_{gH} \circ \psi_H) \circ (1_S \circ \alpha_{hH} \circ \psi_H)(x) \\
&= (1_S \circ \alpha_{gH}) \circ (\psi_H \circ 1_S) \circ (\alpha_{hH} \circ \psi_H)(x) \\
&= (1_S \circ \alpha_{gH}) \circ id_S \circ (\alpha_{hH} \circ \psi_H)(x) \\
&= (1_S \circ (\alpha_{gH} \circ \alpha_{hH}) \circ \psi_H)(x) \\
&= (1_S \circ \beta_{gh} \circ \psi_H)(x) \\
&= (1_S \circ \alpha_{gh} \circ \psi_H)(x) \\
&= \alpha'_{gh}(x).
\end{aligned}
$$

(ii) Como $\psi_H \circ \alpha'_{g_i} = \alpha_{g_i H} \circ \psi_H$ sobre $D'_{g_i^{-1}}$, para cada $1 \leq i \leq m$, segue que $\psi_H((S^{\alpha_H})^{\alpha'_{G/H}}) = (\psi_H(S^{\alpha_H}))^{\alpha_{G/H}}$ e assim

$$
\begin{aligned}
(S^{\alpha_H})^{\alpha'_{G/H}} = \psi_H((S^{\alpha_H})^{\alpha'_{G/H}})1_S &= (\psi_H(S^{\alpha_H}))^{\alpha_{G/H}}1_S \\
&= (B^H e_H)^{\alpha_{G/H}}1_S = B^G 1_S = S^{\alpha_G},
\end{aligned}
$$

pelas Proposição 2.1.2 e Observação 2.4.4(2).

(iii) Pela Proposição 2.1.2, existe o isomorfismo ψ_H de S^{α_H} sobre $B^H e_H \subseteq B^H$ tal que

1. $\psi_H(D'_{g_i}) = \psi_H(S^{\alpha_H}) \cap \beta_{g_i}(\psi_H(S^{\alpha_H}))$.

2. Por (i), $\psi_H \circ \alpha'_{g_i} = \alpha_{g_i H} \circ \psi_H$ sobre $D'_{g_i^{-1}}$.

3. Pela Proposição 2.4.3, $B^H = \sum_{g_i} \beta_{g_i}(B^H e_H) = \sum_{g_i} \beta_{g_i}(\psi_H(S^{\alpha_H}))$.

(iv) Segue do Teorema 2.3.1. □

Exemplo 2.4.6. Neste exemplo encontramos a ação parcial $\alpha'_{G/H}$ de G/H sobre S^{α_H} de [3, Example 6.1.], onde H o subgrupo cíclico (com gerador σ^2) de G (com gerador σ). Lembrando, R um anel comutativo e $S = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3$, onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais não zero cuja suma é um. Além disso, $S^\alpha = R$. Note que $\alpha_{\sigma^2}(e_1 + e_3) = e_1 + e_3$, de onde segue que $S^{\alpha_H} = R(e_1 + e_3) \oplus Re_2$. Assim, $Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3$ é uma extensão galoisiana α_H-parcial de $R(e_1 + e_3) \oplus Re_2$.

Agora, note que $\overline{\sigma}$ é gerador do grupo G/H. Vejamos quem é $\alpha'_{G/H}$. De fato, seja $\{\overline{1}, \overline{\sigma}\}$ uma transversal de H em G. Logo,

$$e_H = \psi_H(1_R) = 1_R + \beta_{\sigma^2}(1_R) - 1_R\beta_{\sigma^2}(1_R).$$

De onde,

$$\begin{aligned} 1'_\sigma &= \beta_\sigma(1_R) + \beta_{\sigma^3}(1_R) - \beta_\sigma(1_R)\beta_{\sigma^3}(1_R), \\ D'_\sigma &= (R(e_1 + e_3) \oplus Re_2)1'_\sigma, \\ \alpha'_\sigma &= (1_R \circ \alpha_{\overline{\sigma}} \circ \psi_H)|_{D'_{\sigma^{-1}}}. \end{aligned}$$

Portanto, $S^{\alpha_H} = R(e_1+e_3)\oplus Re_2$ é uma extensão galoisiana $\alpha'_{G/H}$-parcial de $S^\alpha = R$.

Exemplo 2.4.7. Neste exemplo encontramos a ação parcial $\alpha'_{G/H}$ de G/H sobre S^{α_H} de [3, Example 6.3.], onde H o subgrupo cíclico (com gerador σ^3) de G (com gerador σ). Lembrando, A é uma extensão Galois (global) cíclica dum anel comutativo R e $S = \sum_{1\leq i\leq 5} \oplus Ae_i$, onde $\{e_i | 1 \leq i \leq 5\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais não zero cuja suma é um. Além disso, $S^{\alpha} = \{ae_1 + be_2 + ce_3 + \sigma^2(b)e_4 + \sigma(a)e_5 | a, b \in A, c \in A^{\sigma^3}\}$. É fácil ver que $S^{\alpha_H} = \{ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 + ee_5 | a, b, d, e \in A, c \in A^{\sigma^3}\}$. Assim, $S = \sum_{1\leq i\leq 5} \oplus Ae_i$ é uma extensão galoisiana α_H-parcial de $S^{\alpha_H} = \{ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 + ee_5 | a, b, d, e \in A, c \in A^{\sigma^3}\}$.

Agora, note que $\overline{\sigma}$ é gerador do grupo G/H. Vejamos quem é $\alpha'_{G/H}$. De fato, seja $\{\overline{1}, \overline{\sigma}, \overline{\sigma^2}\}$ uma transversal de H em G. Logo,

$$e_H = \psi_H(1_R) = 1_R + \beta_{\sigma^3}(1_R) - 1_R\beta_{\sigma^3}(1_R).$$

De onde,

$$\begin{aligned}
1'_{\sigma} &= \beta_{\sigma}(1_R) + \beta_{\sigma^4}(1_R) - \beta_{\sigma}(1_R)\beta_{\sigma^4}(1_R),\\
1'_{\sigma^2} &= \beta_{\sigma^2}(1_R) + \beta_{\sigma^5}(1_R) - \beta_{\sigma^2}(1_R)\beta_{\sigma^5}(1_R),\\
D'_{\sigma} &= \{(ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 + ee_5)1'_{\sigma} | a, b, d, e \in A, c \in A^{\sigma^3}\},\\
D'_{\sigma^2} &= \{(ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 + ee_5)1'_{\sigma^2} | a, b, d, e \in A, c \in A^{\sigma^3}\},\\
\alpha'_{\sigma} &= (1_R \circ \alpha_{\overline{\sigma}} \circ \psi_H)|_{D'_{\sigma^{-1}}},\\
\alpha'_{\sigma^2} &= (1_R \circ \alpha_{\overline{\sigma^2}} \circ \psi_H)|_{D'_{\sigma^{-2}}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $S^{\alpha_H} = \{ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 + ee_5 | a, b, d, e \in A, c \in A^{\sigma^3}\}$ é uma extensão galoisiana $\alpha'_{G/H}$-parcial de $S^{\alpha} = \{ae_1 + be_2 + ce_3 + \sigma^2(b)e_4 + \sigma(a)e_5 | a, b \in A, c \in A^{\sigma^3}\}$.

Observação 2.4.8. A demonstração do item (ii) do Teorema 2.4.2 decorre imediatamente da Proposição 2.4.5 e do item (ii) do Teorema 1.1.2.

2.5 Envolventes e G-isomorfismos

Nesta seção e no capítulo seguinte adotaremos a notação (S, α) para indicar uma extensão galoisiana α-parcial unitária (ou simplesmente, uma extensão galoisiana parcial) de um anel fixo R (i.e. $S^\alpha = R$). Da mesma forma adotaremos a notação (B, β) para indicar uma envoltente de (S, α) e fixaremos um anel A como sendo o subanel dos invariantes de B pela ação global β (i.e. $B^G = A$). Dito de outra forma, para quaisquer extensões galoisianas parciais (S, α) e (S', α') de R com respectivas envolventes (B, β) e (B', β') assumiremos sempre que $S^\alpha = R = S'^{\alpha'}$ e que $B^\beta = A = B'^{\beta'}$ ou, equivalentemente, que $\psi_G(1_R) = 1_A = \psi'_G(1_R)$. Recordemos do Teorema 2.3.1 que B é uma extensão galoisiana global de A com grupo de Galois G.

Dizemos que duas extensões galoisianas parciais (S, α) e (S', α') de R são chamadas *G-isomorfas* parcialmente, e denotamos $(S, \alpha) \overset{par}{\sim} (S', \alpha')$, se existe um isomorfismo de R-álgebras $f : S \to S'$ tal que para todo $g \in G$:

(i) $f(S_g) = S'_g$,

(ii) $(f \circ \alpha_g)|_{S_{g^{-1}}} = (\alpha'_g \circ f)|_{S_{g^{-1}}}$

Na realidade, na definição acima, podemos exigir menos do que um isomorfismo de R-álgebras que preserva as respectivas ações parciais. É suficiente a existência de um homomorfismo de R-álgebras que comuta com essas ações parciais, conforme veremos na proposição seguinte.

Proposição 2.5.1. *Sejam (S, α) e (S', α') extensões galoisianas parciais de R e $f : S \to S'$ um homomorfismo de R-álgebras tal que para todo $g \in G$:*

(i) $f(S_g) = S'_g$,

(ii) $(f \circ \alpha_g)|_{S_{g^{-1}}} = (\alpha'_g \circ f)|_{S_{g^{-1}}}$.

Então f é um isomorfismo.

Demonstração. Observemos que $1_S = 1_R = 1_{S'}$. Sejam x_i, y_i, $1 \leq i \leq n$, as coordenadas galoisianas de S relativas a α. Então, dado $s' \in S'$ temos

$$\begin{aligned}
f(\sum_{i=1}^{n} x_i tr_{\alpha'}(f(y_i 1_{g^{-1}})s')) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) tr_{\alpha'}(f(y_i 1_{g^{-1}})s') \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{g \in G} \alpha'_g(f(y_i 1_{g^{-1}})s' 1'_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{g \in G} \alpha'_g(f(y_i 1_{g^{-1}}))\alpha'_g(s' 1'_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{g \in G} (\alpha'_g \circ f)(y_i 1_{g^{-1}})\alpha'_g(s' 1'_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \sum_{g \in G} (f \circ \alpha_g)(y_i 1_{g^{-1}})\alpha'_g(s' 1'_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{g \in G} f(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}))\alpha'_g(s' 1'_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{g \in G} \delta_{1,g} 1_S \alpha'_g(s' 1'_{g^{-1}}) \\
&= s' 1_S = s',
\end{aligned}$$

o que mostra que f é sobrejetora.

Agora, dado $s \in S$ tal que $f(s) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
f(\alpha_g(y_i s 1_{g^{-1}})) = (f \circ \alpha_g)(y_i s 1_{g^{-1}}) &= (\alpha'_g \circ f)(y_i s 1_{g^{-1}}) \\
&= \alpha'_g(f(y_i) f(s) f(1_{g^{-1}})) = 0,
\end{aligned}$$

para todo $g \in G$, e por conseguinte

$$0 = \sum_{g \in G} f(\alpha_g(y_i s 1_{g^{-1}})) = f(tr_\alpha(y_i s)) = tr_\alpha(y_i s) 1_{S'},$$

de onde segue que $tr_\alpha(y_i s) = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i tr_\alpha(y_i s) &= \sum_{g\in G}(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}))\alpha_g(s1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_{g\in G} \delta_{1,g}\alpha_g(s1_{g^{-1}}) = s1_S = s, \end{aligned}$$

o que mostra que f é injetora. $\square$

A relacão $\overset{par}{\sim}$ acima definida é claramente uma relação de equivalência e a verificação deste fato é canônica. Denotaremos por $[S, \alpha]$ a classe de equivalência relativa a $\overset{par}{\sim}$ representada por (S, α).

A noção de G-isomorfismo (global) para envolventes de ações parciais exige uma condição a mais do que a exigida para G-isomorfismo no caso global em geral.

Sejam (B, β) e (B', β') envolventes de (S, α) e (S', α') respectivamente. Note que, conforme assumido no início da seção, $B^G = A = B'^G$. Dizemos que (B, β) e (B', β') são *G-isomorfas globalmente*, e denotamos $(B, \beta) \overset{gl}{\sim} (B', \beta')$, se existe um homomorfismo de A-álgebras $f : B \to B'$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $f(1_S) = 1_{S'}$,

(ii) $f \circ \beta = \beta' \circ f$.

Proposição 2.5.2. *Sejam $(S, \alpha), (S', \alpha')$ extensões galoisianas parciais de R com envolventes (B, β) e (B', β'), respectivamente. Se $(B, \beta) \overset{gl}{\sim} (B', \beta')$ então (B', β') (resp., (B, β)) é uma envolvente para (S, α) (resp., (S', α')).*

Demonstração. Sejam $f : B \to B'$ o G-isomorfismo e $\varphi : S \to B$ o monomorfismo de anéis que satisfaz as condições (i)-(iv) da definição de envolvente (conforme [2]). É suficiente mostrar que $f \circ \varphi$ satisfaz também essas mesmas condições. De fato, é imediato que $f \circ \varphi : S \to B'$ é um monomorfismo de anéis pois ambos f e φ o são.

(i) $f(\varphi(S)) \subseteq B'$ é um ideal de B' pois f é sobrejetor e $\varphi(S)$ é um ideal de B.

(ii) Para todo $g \in G$, temos

$$\begin{aligned}
(f \circ \varphi)(S_g) &= f(\varphi(S) \cap \beta_g(\varphi(S))) \\
&= f(\varphi(S)) \cap f(\beta_g(\varphi(S))) \\
&= f(\varphi(S)) \cap (\beta'_g \circ f)(\varphi(S)) \\
&= (f \circ \varphi)(S)) \cap \beta'_g(f \circ \varphi)(S)).
\end{aligned}$$

(iii) Para todo $g \in G$ e $x \in S_{g^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}
[(f \circ \varphi) \circ \alpha_g](x) &= [f \circ (\varphi \circ \alpha_g)](x) \\
&= [f \circ (\beta_g \circ \varphi)](x) \\
&= [(\beta'_g \circ f) \circ \varphi](x) \\
&= [\beta'_g \circ (f \circ \varphi)](x).
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
B' = f(B) &= f(\sum_{g \in G}(\beta_g(\varphi(S)))) \\
&= \sum_{g \in G} f(\beta_g(\varphi(S))) = \sum_{g \in G} \beta'_g((f \circ \varphi)(S)).
\end{aligned}$$

Para a segunda afirmação procede-se de maneira análoga bastando considerar a composta $f^{-1} \circ \varphi'$, onde $\varphi' : S' \to B'$ é o monomorfismo de anéis que satisfaz a definição de envolvente. $\square$

Teorema 2.5.3. *Sejam $(S, \alpha), (S', \alpha')$ extensões galoisianas parciais de R e (B, β) e (B', β') suas respectivas envolventes. Seja H um subgrupo normal de G. Se (B, β) e (B', β') são G-isomorfas globalmente, então $(S^{\alpha_H}, \alpha'_{G/H})$ e $(S'^{\alpha'_H}, \alpha''_{G/H})$ são G/H-isomorfas parcialmente. Em particular, (S, α) e (S', α') são G-isomorfas.*

Demonstração. Sejam $H = \{h_1 = 1, h_2, \ldots, h_n\}$ e $\{g_1 = 1, g_2, \ldots, g_m\}$ uma transversal de H em G. Por hipótese existe um isomorfismo de A-álgebras $f : B \to B'$ tal que

$$\begin{aligned} &f(1_S) = 1_{S'}, \\ &f \circ \beta_g = \beta'_g \circ f, \ \text{ para todo } \ g \in G. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Note que f induz (por restrição a B^H) um isomorfismo entre as A-álgebras B^H e B'^H. Agora, pela Proposição 2.4.3 $(B^H, \beta_{G/H})$ é uma envolvente de $(B^H e_H, \alpha_{G/H})$, onde

$$e_H = \sum_{j=1}^{n} \beta_{h_j}(1_S)e_j,$$

com

$$e_1 = 1_S \ \text{ e } \ e_j = (1_B - 1_S)\cdots(1_B - \beta_{h_{j-1}}(1_S))\beta_{h_j}(1_S), \ 1 \le j \le n.$$

Analogamente temos que $(B'^H, \beta'_{G/H})$ é uma envolvente de $(B'^H e'_H, \alpha'_{G/H})$, onde

$$e'_H = \sum_{j=1}^{n} \beta'_{h_j}(1_{S'})e'_j,$$

com

$$e'_1 = 1_{S'} \ \text{ e } \ e'_j = (1_{B'} - 1_{S'})\cdots(1_{B'} - \beta'_{h_{j-1}}(1_{S'}))\beta'_{h_j}(1_{S'}), \ 1 \le j \le n.$$

De (2.1) segue que

$$\begin{aligned} f(e_j) &= \\ &= f((1_B - 1_S)(1_B - \beta_{h_{j_2}}(1_S))\cdots(1_B - \beta_{h_{j-1}}(1_S))\beta_{h_j}(1_S)) \\ &= (f(1_B) - f(1_S))(f(1_B) - f(\beta_{h_{j_2}}(1_S)))\cdots(f(1_B) - f(\beta_{h_{j-1}}(1_S)))f(\beta_{h_j}(1_S)) \\ &= (1_{B'} - 1_{S'})(1_{B'} - \beta'_{h_{j_2}}(1_{S'}))\cdots(1_{B'} - \beta'_{h_{j-1}}(1_{S'}))\beta'_{h_j}(1_{S'}) \\ &= e'_j. \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned}
f(B^H e_H) &= f(B^H)f(e_H) = f(B^H)f(\sum_{j=1}^{n} \beta_{h_j}(1_S)e_j) \\
&= f(B^H)(\sum_{j=1}^{n} f(\beta_{h_j}(1_S))f(e_j)) \\
&= B'^H(\sum_{j=1}^{n} \beta'_{h_j}(f(1_S))e'_j) \\
&= B'^H(\sum_{j=1}^{n} \beta'_{h_j}(1_{S'})e'_j) \\
&= B'^H e'_H.
\end{aligned}$$

Em particular, $f(e_H) = e'_H$ pois $1_B \in B^H$.

Em conformidade com a Proposição 2.4.5, os ideais de S^{α_H} e $S'^{\alpha'_H}$ são dados por

$$D'_{g_i} = B^H e_H \beta_{g_i}(e_H)1_S \quad \text{e} \quad D''_{g_i} = B'^H e'_H \beta'_{g_i}(e'_H)1_{S'}$$

e os isomorfismos parciais por

$$\alpha'_{g_i} = (1_S \circ \alpha_{g_iH} \circ \psi_H)|_{D'_{g_i^{-1}}} \quad \text{e} \quad \alpha''_{g_i} = (1'_S \circ \alpha'_{g_iH} \circ \psi'_H)|_{D''_{g_i^{-1}}},$$

respectivamente, onde $\psi'_H : B' \to B'$ (construído de modo idêntico à contrução de ψ_H) é o homomorfismo de anéis dado por $\psi'_H(b') = \sum_{1\leq i\leq n} \beta'_{h_i}(b')e'_i$ para todo $b' \in B'$. Agora observe que a aplicação composta

$$\varphi = 1_{S'} \circ f \circ \psi_H : S \xrightarrow{\psi_H} B \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{1_{S'}} S'$$

é um homomorfismo de R-álgebras. De fato, claramente φ é um homomorfismo de anéis. Pelo item (ii) da Proposição 2.1.2 segue que $A1_S = B^G 1_S = S^\alpha = R$, ou seja, para todo $r \in R$ existe $a \in A$ tal que $r = a1_S$. Recordemos que $1_S = 1_R = 1_{S'}$. Consequentemente $1_S e'_H = 1_S$ e então,

$$\varphi(rs) = (1_{S'} \circ f \circ \psi_H)(1_S as) = (1_{S'} \circ f)(a\psi_H(1_S)\psi_H(s))$$

$$
\begin{aligned}
&= (1_{S'} \circ f)(ae_H\psi_H(s)) = 1_S(af(1_B)f(e_H)f(\psi_H(s))) \\
&= 1_{S'}(a1_{B'}e'_H f(\psi_H(s))) = 1_S(ae'_H f(\psi_H(s))) \\
&= (a1_S)(1_S e'_H)f(\psi_H(a)) = r(1_S f(\psi_H(s)) \\
&= r(1_{S'} \circ f \circ \psi_H)(s) \\
&= r\varphi(s).
\end{aligned}
$$

Agora, desde que

$$
\begin{aligned}
\varphi(D'_{g_i}) &= (1_{S'} \circ f \circ \psi_H)(B^H e_H \beta_{g_i}(e_H)1_S) \\
&= (1_{S'} \circ f \circ \psi_H \circ 1_S)(B^H e_H \beta_{g_i}(e_H)) \\
&= (1_{S'} \circ f \circ (\psi_H \circ 1_S))(B^H \beta_{g_i}(e_H)e_H) \\
&= (1_{S'} \circ f \circ id_B)(B^H \beta_{g_i}(e_H)e_H) \\
&= (1_{S'} \circ f)(B^H \beta_{g_i}(e_H)e_H) \\
&= 1_{S'} f(B^H)f(\beta_{g_i}(e_H))f(e_H) \\
&= 1_{S'} B'^H \beta'_{g_i}(f(e_H))e'_H \\
&= 1_{S'} B'^H \beta'_{g'_i}(e'_H)e'_H \\
&= B'^H e'_H \beta'_{g'_i}(e'_H)1_{S'} \\
&= D''_{g_i}
\end{aligned}
$$

temos assegurado a condição (i) de G-isomorfismo parcial.

A condição (ii) decorre de (2.1) pois ela implica imediatamente que

$$f \circ \alpha_{g_iH} = \alpha'_{g_iH} \circ f \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq m$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
(\varphi \circ \alpha'_{g_i})(x) &= [(1_{S'} \circ f \circ \psi_H) \circ (1_S \circ \alpha_{g_iH} \circ \psi_H)](x) \\
&= [(1_{S'} \circ f \circ (\psi_H \circ 1_S) \circ \alpha_{g_iH} \circ \psi_H)](x)
\end{aligned}
$$

$$= [(1_{S'} \circ f \circ id_B \circ \alpha_{g_iH} \circ \psi_H)](x)$$

$$= (1_{S'} \circ (f \circ \alpha_{g_iH}) \circ \psi_H)(x)$$

$$= (1_{S'} \circ (\alpha'_{g_iH} \circ f) \circ \psi_H)(x)$$

$$= [(1_{S'} \circ \alpha'_{g_iH} \circ id_{B'} \circ f \circ \psi_H)](x)$$

$$= [(1_{S'} \circ \alpha'_{g_iH} \circ (\psi'_H \circ 1_{S'}) \circ f \circ \psi_H)](x)$$

$$= [(1_{S'} \circ \alpha'_{g_iH} \circ \psi'_H) \circ (1_{S'} \circ f \circ \psi_H)](x)$$

$$= (\alpha''_{g_i} \circ \varphi)(x).$$

para todo $x \in D'_{g_i^{-1}}$. Pela Proposição 2.5.1 $(S^{\alpha_H}, \alpha'_{G/H})$ e $(S'^{\alpha'_H}, \alpha''_{G/H})$ são G/H-isomorfas parcialmente.

Para a última afirmação basta tomar $H = \{1\}$. □

Proposição 2.5.4. *Sejam* $(S, \alpha), (S', \alpha')$ *extensões galoisianas parciais de* R *e* (B, β) *e* (B', β') *suas respectivas envolventes. Se* $(S, \alpha) \overset{par}{\sim} (S', \alpha')$ *então* $(B, \beta) \overset{gl}{\sim} (B', \beta')$.

Demonstração. Por hipótese existe um isomorfismo de R-álgebras $\theta : S \to S'$ tal que para cada $g \in G$

(i) $\theta(S_g) = S'_g$,

(ii) $(\theta \circ \alpha_g)|_{S_{g^{-1}}} = (\alpha'_g \circ \theta)|_{S_{g^{-1}}}$.

Por outro lado, como (B', β') é envolvente de (S', α') existe monomorfismo de anéis $\varphi' : S' \to B'$ satisfazendo as condições de envolvente. Mostremos que (B', β') é também uma envolvente para (S, α). Para tanto consideremos a aplicação composta

$$\phi = \varphi' \circ \theta : S \xrightarrow{\theta} S' \xrightarrow{\varphi'} B'$$

Claramente ϕ é um monomorfismo de anéis por contrução. Além disso,

(i)

$$\begin{aligned}\phi(S_g) &= \varphi'(\theta(S_g)) = \varphi'(S'_g)\\ &= \varphi'(S') \cap \beta'_g(\varphi'(S'))\\ &= (\varphi' \circ \theta)(S) \cap \beta'_g(\varphi' \circ \theta)(S)\\ &= \phi(S) \cap \beta'_g(\phi(S))\end{aligned}$$

para todo $g \in G$.

(ii)

$$\begin{aligned}(\phi \circ \alpha_g)(x) &= (\varphi' \circ (\theta \circ \alpha_g))(x)\\ &= (\varphi' \circ (\alpha'_g \circ \theta))(x)\\ &= ((\varphi' \circ \alpha'_g) \circ \theta)(x)\\ &= ((\beta'_g \circ \varphi') \circ \theta)(x)\\ &= (\beta'_g \circ (\varphi' \circ \theta))(x)\\ &= (\beta'_g \circ \phi)(x)\end{aligned}$$

para todo $g \in G$ e $x \in S_{g^{-1}}$.

(iii)

$$B' = \sum_{g\in G} \beta'_g(\varphi'(S')) = \sum_{g\in G} \beta'_g((\varphi' \circ \theta)(S)) = \sum_{g\in G} \beta'_g(\phi(S)).$$

Portanto (B', β') é uma envolvente de (S, α).

De acordo com o Teorema 4.5 de [2] toda envolvente é única a menos de isomorfismo, isto é, como no nosso caso (B, β) e (B', β') são envolventes de (S, α), então, conforme o teorema mencionado, a aplicação

$$\Lambda : B \to B'$$
$$\sum_{g_i} \beta_{g_i}(\varphi(s)) \mapsto \sum_{g_i} \beta'_{g_i}(\phi(s))$$

é um isomorfismo de A-álgebras. Finalmente, é imediato ver que

(i) $\Lambda(1_S) = 1_{S'}$,

(ii) $\Lambda \circ \beta_g = \beta'_g \circ \Lambda$, para todo $g \in G$,

ou seja, $(B,\beta) \overset{gl}{\sim} (B',\beta')$. $\square$

Capítulo 3

O Semigrupo inverso $T_{par}(G, R)$

A primeira contrução formal do grupo $T_{gl}(G, A)$ das extensões abelianas globais de um anel A, com mesmo grupo de Galois G, foi feita por Harrison e publicado em [5] em 1965. À diferença deste, que é um grupo, no caso parcial o conjunto $T_{par}(G, R)$ das classes de isomorfismo das extensões abelianas parciais de um anel R é um semigrupo inverso. Neste capítulo apresentaremos em detalhes a sua construção e estudaremos algumas de suas propriedades funtoriais.

Em todo este capítulo G denotará sempre um grupo abeliano finito e R o subanel dos invariantes de qualquer anel sobre o qual G age parcialmente. As ações parciais consideradas serão todas assumidas unitárias e sempre de G sobre algum anel. Toda extensão galoisiana parcial S de R relativa a alguma ação parcial α de G será chamada abeliana e, por brevidade, denotada por (S, α).

3.1 A construção de $T_{par}(G, R)$

Nesta seção contruiremos o semigrupo inverso das classes de isomorfismo das extensões abelianas parciais.

Conforme vimos na seção 2.5, $\overset{par}{\sim}$ é uma relação de equivalência definida sobre o conjunto de todas as extensões galoisianas relativas a ações parciais de um grupo finito G sobre extensões do anel R, e foi denotada por $[S,\alpha]$ a classe de equivalência representada pela extensão galoisiana parcial (S,α), isto é, $[S,\alpha] = \{(S',\alpha') \mid (S',\alpha') \overset{par}{\sim} (S,\alpha)\}$. Neste capítulo nos restrigimos às extensões abelianas parciais e denotaremos por $T_{par}(G,R)$ o conjunto dessas classes de equivalência. Recordemos também que, conforme já convencionado, $\otimes$ sempre significará $\otimes_R$ (resp., $\otimes_A$) se o contexto for parcial (resp., se o o contexto for global).

Dados $[S,\alpha],[S',\alpha'] \in T_{par}(G,R)$ a Proposição 2.3.5 nos assegura que $S\otimes S'$ é uma extensão abeliana $\alpha\otimes\alpha'$- parcial de $R\otimes R = R$.

Denotemos por δG o subgrupo de $G\times G$ consistindo pelos elementos da forma (g^{-1},g), $g\in G$. O grupo quociente $(G\times G)/\delta G$ é obviamente isomorfo a G via a aplicação canônica

$$g\mapsto (g,1) = (1,g) \pmod{\delta G}.$$

Pela Proposição 2.4.5, $(S\otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'{}_{\delta G}}$ é uma extensão abeliana $\lambda'_{(G\times G)/\delta G}$-parcial de R com $\lambda = \alpha\otimes\alpha'$.

Sejam (B,β) e (B',β') as envolventes de (S,α) e (S',α') respectivamente. De acordo com a seção 2.1 a aplicação $\psi_{\delta G} : B\otimes B' \to B\otimes B'$ é dada pela fórmula

$$\begin{aligned}\psi_{\delta G}(x\otimes y) = \sum_{1\le l\le|\delta G|}\sum_{i_1<\cdots<i_l}(-1)^{l+1}\beta_{h_{i_1}^{-1}}\otimes\beta'_{h_{i_1}}(1_R\otimes 1_R)\cdots\\ \cdots\beta_{h_{i_l}^{-1}}\otimes\beta'_{h_{i_l}}(1_R\otimes 1_R)\beta_{h_{i_l}^{-1}}\otimes\beta'_{h_{i_l}}(x\otimes y).\end{aligned}$$

Denotemos $e_{\delta G} := \psi_{\delta G}(1_R\otimes 1_R) = \psi_{\delta G}(1_S\otimes 1_{S'})$. Recordemos que $S^\alpha = R = S'^{\alpha'}$ e portanto $1_S = 1_R = 1_{S'}$.

Observação 3.1.1. Decorre da Proposição 2.4.5 que $((B\otimes B')^{\delta G},(\beta\otimes\beta')_{(G\times G)/\delta G})$

é uma envolvente de $((S \otimes S')^{\alpha \otimes \alpha'_{\delta G}}, \lambda'_{(G \times G)/\delta G})$ onde,

$$\lambda = \alpha \otimes \alpha'$$

$$\lambda'_{G \times G/\delta G} = (\{D'_{[g_i, g_1]}\}, \{\alpha \otimes \alpha'_{[g_i, g_1]}\}),$$

$$D'_{[g_i,1]} = (B \otimes B')^{\delta G}(\beta_{g_i} \otimes \beta'_{g_1})(e_{\delta G}) 1_S \otimes 1_{S'},$$

$$\alpha \otimes \alpha'_{[g_i,1]} = (1_S \otimes 1_{S'} \circ \alpha \otimes \alpha'_{[g_i,1]\delta G} \circ \psi_{\delta G})|_{D'_{[g_i,1]^{-1}}}.$$

Definimos sobre $T_{par}(G, R)$ a operação $*_{par}$ dada por

$$\begin{aligned}
[(S, \alpha)] *_{par} [(S, \alpha')] &= [1_S \otimes 1_{S'}(B \otimes B')^{\delta G}, 1_S \otimes 1_{S'} \circ \Lambda_{(G \times G)/\delta G}] \\
&= [(S \otimes S')^{\alpha \otimes \alpha'_{\delta G}}, \lambda'_{(G \times G)/\delta G}],
\end{aligned}$$

com $\Lambda = \beta \otimes \beta'$ e $\lambda = \alpha \otimes \alpha'$.

Proposição 3.1.2. *A operação $*_{par}$ está bem definida.*

Demonstração. Considere $[S, \alpha]$, $[S', \alpha']$, $[S_1, \alpha_1]$ e $[S'_1, \alpha'_1]$ em $T_{par}(G, R)$ e sejam $[B, \beta]$, $[B', \beta']$, $[B_1, \beta_1]$, $[B'_1, \beta'_1]$ as classes das respectivas envolventes em $T_{gl}(G, A)$. Suponha que $[S, \alpha] = [S_1, \alpha_1]$ e $[S', \alpha'] = [S'_1, \alpha'_1]$. Então, pela Proposição 2.5.4 $[B, \beta] = [B_1, \beta_1]$ e $[B', \beta'] = [B'_1, \beta'_1]$ e consequentemente

$$\begin{aligned}
[(B \otimes B')^{\delta G}, \Lambda_{(G \times G)/\delta G}] &= [B, \beta] *_{gl} [B', \beta'] \\
&= [B_1, \beta_1] *_{gl} [B'_1, \beta'_1] \\
&= [(B_1 \otimes B'_1)^{\delta G}, (\Lambda_1)_{(G \times G)/\delta G}],
\end{aligned}$$

com $\Lambda = \beta \otimes \beta'$ e $\Lambda_1 = \beta_1 \otimes \beta'_1$.

Pela Observação 3.1.1

$$((B \otimes B')^{\delta G}, \Lambda_{(G \times G)/\delta G}) \quad \text{e} \quad ((B_1 \otimes B'_1)^{\delta G}, (\Lambda_1)_{(G \times G)/\delta G})$$

são as envolventes de

$$((S \otimes S')^{\alpha \otimes \alpha'_{\delta G}}, \lambda'_{(G \times G)/\delta G}) \quad \text{e} \quad ((S_1 \otimes S'_1)^{(\alpha_1 \otimes \alpha'_1)_{\delta G}}, (\lambda'_1)_{(G \times G)/\delta G})$$

respectivamente, onde $\lambda = \alpha \otimes \alpha'$ e $\lambda_1 = \alpha_1 \otimes \alpha'_1$.

A boa definição de $*_{par}$ segue então pelo Teorema 2.5.3. $\square$

Proposição 3.1.3. *A operação $*_{par}$ é comutativa e associativa.*

Demonstração. Primeiramente mostremos que $*_{par}$ é comutativa. De fato, sejam $[S, \alpha], [S', \alpha'] \in T_{par}(G, R)$ e $[B, \beta], [B', \beta'] \in T_{gl}(G, A)$ as classes representadas pelas envolventes de (S, α) e (S', α'), respectivamente. É imediato ver que a aplicação $\chi : (B \otimes B')^{\delta G} \to (B' \otimes B)^{\delta G}$, dada por $\chi(b \otimes b') = (b' \otimes b)$, é um isomorfismo de A-álgebras tal que

$$\chi(1_S \otimes 1_{S'}) = 1_{S'} \otimes 1_S,$$
$$\chi \circ \beta_g \otimes \beta'_h = \beta'_h \otimes \beta_g \circ \chi,$$

para todo $(g, h) \in G \times G$, o que assegura que

$$((B \otimes B')^{\delta G}, (\alpha \otimes \alpha')_{(G\times G)/\delta G}) \quad \text{e} \quad ((B' \otimes B)^{\delta G}, (\alpha' \otimes \alpha)_{(G\times G)/\delta G})$$

são $(G \times G)/\delta G$-isomorfas globalmente. Pela Observação 3.1.1 essas extensões de A são as envolventes de

$$((S \otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'_{\delta G}}, (\alpha \otimes \alpha')'_{(G\times G)/\delta G}) \quad \text{e} \quad ((S' \otimes S)^{(\alpha'\otimes\alpha)_{\delta G}}, (\alpha' \otimes \alpha)'_{(G\times G)/\delta G})$$

respectivamente. Logo, pelo Teorema 2.5.3 estas últimas são $(G \times G)/\delta G$-isomorfas parcialmente e a comutatividade de $*_{par}$ está assegurada.

A verificação da associatividade de $*_{par}$ segue argumentos idênticos aos usados para verificar a comutatividade. $\square$

Os dois resultados anteriores permite-nos enunciar o seguinte

Teorema 3.1.4. *Com as notações acima, $T_{par}(G, R)$ é um semigrupo abeliano.*

Observação 3.1.5. $T_{par}(G,R)$ **não é um grupo.** Se o fosse o elemento neutro para operação $*_{par}$ deveria necessariamente ser a classe $[\mathcal{E} = E1_R, 1_R \circ \rho]$, isto é, a classe representada pela extensão abeliana parcial de R cuja envolvente seria o elemento neutro $[E,\rho]$ para a operação $*_{gl}$ em $T_{gl}(G,A)$, onde $E = \sum_{g\in G} Ae_g$, com os e_g idempotentes dois a dois ortogonais e de soma igual a 1_A, e $\rho_g : E \to E$ dado por $\rho_g(e_h) = e_{gh}$, para todo $g,h \in G$. Nesta caso, para toda extensão abeliana parcial (S,α) de R, com envolvente dada pela extensão abeliana global (B,β) de A teríamos

$$[(B\otimes E)^{\delta G}, (\beta\otimes\rho)_{(G\times G)/\delta G}] = [B,\beta] *_{gl} [E,\rho] = [B,\beta]$$

em $T_{gl}(G,A)$, ou seja, as extensões abelianas globais de A $((B\otimes E)^{\delta G}, (\beta\otimes\rho)_{(G\times G)/\delta G})$ e (B,β) seriam $(G\times G)/\delta G$-isomorfas globalmente via o isomorfismo de A-álgebras

$$(B\otimes E)^{\delta G} \xrightarrow{f} B$$
$$\sum_{g\in G} \beta_{g^{-1}}(t)\otimes e_g \mapsto t.$$

o qual deveria satisfazer, em particular, a condição (i) de isomorfismo global, isto é, $f(1_S\otimes 1_{\mathcal{E}}) = 1_S$. Se tal ocorresse teríamos

$$1_S = f(1_S\otimes 1_{\mathcal{E}}) = f(1_S\otimes \sum_{g\in G} e_g) = f(\sum_{g\in G} \beta_{g^{-1}}(\beta_g(1_S))\otimes e_g) = \beta_g(1_S),$$

para todo $g\in G$. Mas esta última igualdade somente ocorre se (S,α) for uma extensão abeliana global de R.

Veremos a seguir que de fato $T_{par}(G,R)$ é um semigrupo inverso.

Por um semigrupo inverso entendemos um semigrupo V com a condição adicional de que para todo $v\in V$ existe um elemento único $v^\star \in V$ satisfazendo

$$vv^\star v = v \quad \text{e} \quad v^\star v v^\star = v^\star.$$

Proposição 3.1.6. $T_{par}(G,R)$ *é um semigrupo inverso abeliano.*

Demonstração. Já vimos que $T_{par}(G,R)$ é um semigrupo abeliano. Resta apenas verificar que $T_{par}(G,R)$ satisfaz a condição adicional mencionada acima.

Seja (S,α) uma extensão abeliana parcial de R com envolvente (B,β). Denotemos por $\alpha^\star$ a ação parcial de G sobre $S^\star = S$, com ideais $S^\star_g = S_{g^{-1}}$ e isomorfismos parciais $\alpha^\star_g : S^\star_{g^{-1}} \to S^\star_g$ são dados por $\alpha^\star_g = \alpha_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$. Denotemos por $\beta^\star$ a ação global de G sobre $B^\star = B$ dada por $\beta^\star_g = \beta_g^{-1}$ para todo $g \in G$. Denotemos também $[S^\star, \alpha^\star]$ por $[S,\alpha]^\star$ em $T_{par}(G,R)$. Note que $[B^\star, \beta^\star] = [B,\beta]^{-1}$ em $T_{gl}(G,A)$. É imediato ver que:

(i) $(S^\star, \alpha^\star)$ é uma extensão abeliana parcial de R,

(ii) $(B^\star, \beta^\star)$ é uma envolvente para $(S^\star, \alpha^\star)$,

(iii) $[B,\beta] * [B^\star, \beta^\star] * [B,\beta] = [B,\beta]$ em $T_{gl}(G,A)$ e

(iv) $[B^\star, \beta^\star] * [B,\beta] * [B^\star, \beta^\star] = [B^\star, \beta^\star]$ em $T_{gl}(G,A)$.

Seja $\Delta G = \{(g^{-1},1)\delta G, g) \mid g \in G\}$. De (iii) decorre que aplicação

$$\theta : (B \otimes B^\star \otimes B)^{\Delta G} \to B$$
$$x \otimes y \otimes z \mapsto xyz,$$

é um isomorfismo de A-álgebras tal que

$$\theta \circ (\beta_g \otimes \beta^\star_{g_1} \otimes \beta_{g_1}) = \beta_g \circ \theta$$

para todo $g \in G$ (recordemos que $g_1 = 1$ em G). Como claramente θ também satisfaz a condição

$$\theta(1_R \otimes 1_R \otimes 1_R) = 1_R,$$

segue que as extensões

$$((B \otimes B' \otimes B)^{\Delta G}, (\beta \otimes \beta' \otimes \beta)_{(G\times G\times G)/\Delta G}) \quad \text{e} \quad (B,\beta),$$

são $(G \times G \times G)/\Delta G$-isomorfas globalmente.

Desde que, pela Observação 3.1.1, estas supra mencionadas extensões são respectivamentes as envolventes de

$$((S \otimes S^\star \otimes S)^{(\alpha \otimes \alpha^\star \otimes \alpha)_{\Delta G}}, (\alpha \otimes \alpha^\star \otimes \alpha)'_{(G \times G \times G)/\Delta G}) \quad \text{e} \quad (S, \alpha)$$

então pelo Teorema 2.5.3 estas últimas são $(G \times G \times G)/\Delta G$-isomorfas parcialmente, ou seja,

$$[S, \alpha] * [S, \alpha]^\star * [S, \alpha] = [S, \alpha] \quad \text{em} \quad T_{par}(G, R).$$

Prova-se também de maneira análoga que

$$[S, \alpha]^\star * [S, \alpha] * [S, \alpha]^\star = [S, \alpha]^\star \quad \text{em} \quad T_{par}(G, R).$$

$\square$

3.2 $T_{epar}(G, R)$ e $T_{gl}(G, A)$

Nesta seção exibiremos a relação existente entre o semigrupo inverso $T_{par}(G, R)$ e o grupo $T_{gl}(G, A)$, a qual diz respeito à noção de envolvente.

Começamos por observar que se (B, β) e (B', β') são duas envolventes quaisquer de uma mesma extensão abeliana parcial (S, α) de R então $[B, \beta] = [B', \beta']$ em $T_{gl}(G, A)$, conforme assegura a Proposição 2.5.4.

Assim, no que se seguirá, para cada extensão abeliana parcial (S, α) de R fixamos uma única envolvente sua e a distinguiremos com a notação $env(S, \alpha)$. Em particular, se α é global então $env(S, \alpha) = (S, \alpha)$. Este fato nos leva a considerar, em particular, dois tipos absolutamente distintos e extremos de extensões abelianas parciais de R, a saber: as extensões (S, α) com α global e no outro extremo as extensões (S, α), com α satisfazendo a condição adicional "$1_g = 1_S (= 1_R)$ se e somente se $g = 1$". Estas últimas serão referidas como as *extensões abelianas estritamente parciais* de R. Denotamos por $T_{gl}(G, R)$ o conjunto das classes de isomorfismo das extensões abelianas globais de R e por $T_{epar}(G, R)$ o conjunto das classes de isomorfismo das extensões abelianas estritamente parciais de R.

Veremos a seguir que ambos esses conjuntos são subsemigrupos inversos de $T_{par}(G, R)$. O conjunto $T_{gl}(G, R)$ tem obviamente uma estrutura de grupo e portanto é trivialmente um subsemigrupo inverso de $T_{par}(G, R)$.

Proposição 3.2.1. *$T_{epar}(G, R)$ é um subsemigrupo inverso de $T_{par}(G, R)$.*

Demonstração. Conforme a Observação 3.1.1,

$$[S, \alpha] * [S', \alpha'] = [(S \otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'_{\delta G}}, \lambda'_{(G\times G)/\delta G}],$$

com

$$\begin{aligned}
\lambda &= \alpha \otimes \alpha' \\
\lambda'_{G\times G/\delta G} &= (\{D'_{[g_i,g_1]}\}, \{\alpha \otimes \alpha'_{[g_i,g_1]}\}), \\
D'_{[g_i,1]} &= (B \otimes B')^{\delta G} 1'_{[g_i,1]} \\
1'_{[g_i,1]} &= (\beta_{g_i} \otimes \beta'_{g_1})(e_{\delta G}) 1_R \otimes 1_R, \\
\alpha \otimes \alpha'_{[g_i,1]} &= (1_S \otimes 1_{S'} \circ \alpha \otimes \alpha'_{(g_i,1)\delta G} \circ \psi_{\delta G})|_{D'_{[g_i,1]^{-1}}}.
\end{aligned}$$

Em particular se α e α' são estritamente parciais, então $1_{g_i} \neq 1_R$ para todo $i \neq 1$ e, consequentemente, pela construção de $e_{\delta G}$ é facil ver que $1'_{[g_i,1]} \neq 1_R \otimes 1_R = 1_R$, ou seja $T_{epar}(G, R)$ é de fato fechado para a operação $*$ de $T_{par}(G, R)$. É imediato que se α é estritamente parcial então $\alpha^\star$ também o é. $\square$

Observamos também que se (S, α) é estritamente parcial e (B, β) é sua envolvente então $B^G = A$. Logo a Proposição 2.5.4 assegura a existência da função

$$Env : T_{epar}(G, R) \to T_{gl}(G, A) \quad \text{dada por} \quad Env([(S, \alpha)]) = [env(S, \alpha)].$$

Proposição 3.2.2. *Env é um monomorfismo de semigrupos inversos.*

Demonstração. A injetividade de Env é assegurada pelo Teorema 2.5.3 e segue da Proposição 2.3.2 que Env é um homomorfismo de semigrupos.

Por fim, é imediato ver que se $[S,\alpha],[S',\alpha'] \in T_{par}(G,R)$ satisfazem a condição de semigrupo inverso então $[env(S',\alpha')] = [env(S,\alpha)]^{-1}$ em $T_{gl}(G,A)$ e portanto $[env(S,\alpha)]$ e $[env(S',\alpha')]$ satisfazem trivialmente a condição de semigrupo inverso em $T_{gl}(G,A)$, ou seja, Env é um homomorfismo de semigrupos inversos. □

Note que $Env(T_{epar}(G,R))$ é um subgrupo de $T_{gl}(G,A)$. A proposição seguinte nos dá uma descrição desse subgrupo em termos de elementos de $T_{gl}(G,A)$.

Proposição 3.2.3. *Seja $[B,\beta] \in T_{gl}(G,A)$. Então, $[B,\beta] \in Env(T_{epar}(G,R))$ se e somente se $\beta_g(1_R)1_R \neq 0$, para todo $g \in G$, e $1_R\beta(1_R) \neq 1_R$, para todo $1 \neq g \in G$.*

Demonstração. Supunhamos que $1_R\beta_g(1_R) \neq 0$, para todo $g \in G$, e $1_R\beta(1_R) \neq 1_R$, para todo $1 \neq g \in G$. Para cada $g \in G$, sejam $1_g = 1_R\beta_g(1_R)$, $S_g = S1_g$ e $\alpha_g = \beta_g|_{S_{g^{-1}}}$.

É imediato ver que $\alpha = \{\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g \mid g \in G\}$ é uma ação estritamente parcial unitária de G sobre S. Seja $\psi_G : B \to B$, conforme definido na Seção 2.1. Decorre da Proposição 2.1.2(ii) que ψ_G é um homomorfismo de anéis e que portanto $\psi_G(1_R) = 1_A$. Também decorre do mesmo item(ii) dessa proposição que (B,β) é uma envolvente de (S,α) e portanto $[B,\beta] = [env(S,\alpha)]$.

A recíproca decorre da Observação 2.1.1. □

Denotemos por π a projeção canônica de $T_{gl}(G,A)$ sobre o conúcleo de Env.

Corolário 3.2.4. *A sequência de semigrupos inversos*

$$T_{epar}(G,R) \hookrightarrow T_{gl}(G,A) \xrightarrow{Env} T_{gl}(G,A) \xrightarrow{\pi} \frac{T_{gl}(G,A)}{Env(T_{epar}(G,R))} \to 1$$

é exata.

Demonstração. Decorre das Proposições 3.2.2 e 3.2.3. □

3.3 O funtor $T_{par}(\_,R)$

Nesta seção mostraremos que $T_{par}(\_,R)$ é um funtor aditivo da categoria dos grupos abelianos finitos na categoria dos semigrupos inversos abelianos. Para tal, começaremos apresentando algumas definições que precissamos.

Definição 3.3.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de uma classe de objetos denotada por $obj\mathcal{C}$, para cada par (X,Y) de objetos $\mathcal{C}$ associamos um conjunto de morfismos de X para Y denotado $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e para cada $X \in obj\mathcal{C}$ existe um morfismo identidade $I_X \in Mor_{\mathcal{C}}(X,X)$. Além disso, para cada tripla de objetos de $\mathcal{C}$ existe uma operação de compisição de morfismos*

$$\begin{aligned} \circ : Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z) &\to Mor_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) &\mapsto g \circ f, \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, *para todo* $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y), g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ *e* $h \in Mor_{\mathcal{C}}(Z,W)$,

(ii) $f \circ I_X = I_Y \circ Y = f$, *para todo* $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$,

(iii) $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y) \cap Mor_{\mathcal{C}}(X',Y') = \emptyset$ *sempre que* $(X,Y) \neq (X',Y')$.

Definição 3.3.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo $f : X \to Y$ é dito um isomorfismo, se existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = I_X$ e $f \circ g = I_Y$.*

Um objeto O da categoria $\mathcal{C}$ é dito *objeto zero*, se para cada objeto X de $\mathcal{C}$ os conjuntos $Mor_{\mathcal{C}}(X, O)$ e $Mor_{\mathcal{C}}(O, X)$ são conjuntos com um só elemento.

Definição 3.3.3. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita preaditiva, se*

(i) $\mathcal{C}$ tem objeto zero,

(ii) para cada par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ o conjunto $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é um grupo abeliano com respeito à adição,

(iii) para todos os objetos X, Y, Z de $\mathcal{C}$, existe uma aplicação bilinear $Mor_{\mathcal{C}}(X, Y) \times Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to Mor_{\mathcal{C}}(X, Z)$, i. é., para $f, g \in Mor_{\mathcal{C}}(Y, Z), h, k \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$,

$$(f + g)h = fh + gh, \quad f(h + k) = fh + fk.$$

Definição 3.3.4. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Dizemos que F é um funtor covariante da categoria $\mathcal{C}$ na categoria $\mathcal{D}$, denotado por $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, se:*

(i) F associa um único objeto $F(X)$ de $\mathcal{D}$ a cada objeto X de $\mathcal{C}$.

(ii) F associa a um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ um único morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ em $\mathcal{D}$, tal que se $f : X \to Y, g : Y \to Z$ são morfismos em $\mathcal{C}$, então $F(gf) = F(g)F(f)$.

(iii) $F(I_X) = I_{F(X)}$, para todo objeto X de $\mathcal{C}$.

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são duas categorias preaditivas, um funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito *aditivo* se $F(f + g) = F(f) + F(g)$, para cada $f, g \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$ em $\mathcal{C}$.

Para não sobrecarregar demasiado a notação, omitiremos a menção à ação parcial (resp., global) em cada elemento de $T_{par}(G, R)$ (resp., $T_{gl}(G, A)$), isto é, $[S] = [S, \alpha]$ em $T_{par}(G, R)$ (resp., $[B] = [B, \beta]$ em $T_{gl}(G, A)$). Além disso adotaremos a notação $e(S)$ para $env(S, \alpha)$.

Recordemos que $e(S)^G 1_R = S^\alpha$ conforme assegurado pelo item (vii) da Proposição 2.1.2. Recordemos também que $e(S) \otimes e(S') = e(S \otimes S')$ pela Proposição 2.3.2 e que, pela teoria global CHR, $e(S)^H \otimes e(S')^H = (e(S) \otimes e(S'))^H$ para qualquer grupo finito H agindo globalmente sobre $e(S)$ e $e(S')$. Estes fatos serão usados livremente na demonstração do próximo teorema.

Teorema 3.3.5. *$T_{par}(\_, R)$ é um funtor aditivo da categoria dos grupos abelianos finitos na categoria dos semigrupos inveros abelianos.*

Demonstração. Sejam G_1 e G_2 grupos abelianos finitos e consideremos os semigrupos inversos $T_{par}(G_i, R)$, $i = 1, 2$, e as aplicações

$$\begin{aligned} \varphi : T_{par}(G_1, R) \times T_{par}(G_2, R) &\to T_{par}(G_1 \times G_2, R) \\ ([S_1], [S_2]) &\mapsto [S_1 \otimes S_2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : T_{par}(G_1 \times G_2, R) &\to T_{par}(G_1, R) \times T_{par}(G_2, R) \\ [S] &\mapsto ([S^{\alpha_{1 \times G_2}}], [S^{\alpha_{G_1 \times 1}}]). \end{aligned}$$

Afirmação 1. *φ está bem definida.*

Sejam $[S_1], [S_1'] \in T_{par}(G_1, R), [S_2], [S_2'] \in T_{par}(G_2, R)$ e suponhamos que

$$([S_1], [S_2]) = ([S_1'], [S_2']),$$

isto é, $[S_1] = [S_1']$ e $[S_2] = [S_2']$. Então, pela Proposição 2.5.4 $[e(S_1)] = [e(S_1')]$ e $[e(S_2)] = [e(S_2')]$. Logo pela Observação 2.3.3 temos

$$[e(S_1 \otimes S_2)] = [e(S_1) \otimes e(S_2)] = [e(S_1') \otimes e(S_2')] = [e(S_1' \otimes S_2')].$$

E pelo Teorema 2.5.3 temos portanto $[S_1 \otimes S_2] = [S'_1 \otimes S'_2]$, i.é.,

$$\varphi([S_1],[S_2]) = \varphi([S'_1],[S'_2]).$$

Afirmação 2. *ψ está bem definida.*

De fato, sejam $[S],[S'] \in T_{par}(G_1 \times G_2, R)$ e suponhamos que $[S] = [S']$. Logo, $[e(S)] = [e(S')]$ pela Proposição 2.5.4, o que acarreta $[e(S)^{1\times G_2}] = [e(S')^{1\times G_2}]$ e $[e(S)^{G_1\times 1}] = [e(S')^{G_1\times 1}]$. Então, pelo Teorema 2.5.3 temos que:

$$[S^{\alpha_{1\times G_2}}] = [e(S)^{1\times G_2}1_R] = [e(S')^{1\times G_2}1_R] = [S'^{\alpha_{1\times G_2}}],$$
$$[S^{\alpha_{G_1\times 1}}] = [e(S)^{G_1\times 1}1_R] = [e(S')^{G_1\times 1}1_R] = [S'^{\alpha_{G_1\times 1}}]$$

e, consequentemente,

$$\psi([S]) = \psi([S']).$$

Tambem é fácil ver que φ é um homomorfismo de semigrupos inversos. Para ilustrar, vejamos que ψ é um homomorfismo de semigrupos inversos (a verificação para φ é similar). É suficiente provarmos que ψ é um homomorfismo de semigrupos.

Sejam $[S],[S'] \in T_{par}(G = G, R)$. Então

$$\begin{aligned}
\psi([S]*[S']) &= \psi([(e(S)\otimes e(S'))^{\delta G}1_R \otimes 1_R]) \\
&= ([\{(e(S)\otimes e(S'))^{\delta G}\}^{1\times G_2}1_R \otimes 1_R],[\{(e(S)\otimes e(S'))^{\delta G}\}^{G_1\times 1}1_R \otimes 1_R]) \\
&= ([(e(S\otimes S')^{\delta G})^{1\times G_2}1_R \otimes 1_R],[(e(S\otimes S')^{\delta G})^{G_1\times 1}1_R \otimes 1_R]).
\end{aligned}$$

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned}
&\psi([S])*\psi([S']) = \\
&= ([e(S)^{1\times G_2}1_R],[e(S)^{G_1\times 1}1_R]) * ([e(S')^{1\times G_2}1_R],[e(S')^{G_1\times 1}1_R]) \\
&= ([(e(S)^{1\times G_2}\otimes e(S')^{1\times G_2})^{\delta(G)}1_R \otimes 1_R],[(e(S)^{G_1\times 1}\otimes e(S')^{G_1\times 1})^{\delta(G)}1_R \otimes 1_R])
\end{aligned}$$

$$= ([(e(S \otimes S')^{1\times G_2})^{\delta(G)} 1_R \otimes 1_R], [(e(S \otimes S')^{G_1\times 1})^{\delta(G)} 1_R \otimes 1_R]).$$

Portanto

$$\psi([S] * [S']) = \psi([S]) * \psi([S']).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\psi\varphi(([S_1],[S_2])) &= \psi([S_1 \otimes S_2]) \\
&= ([(S_1 \otimes S_2)^{\alpha_{1\times G_2}}], [(S_1 \otimes S_2)^{\alpha_{G_1\times 1}}]) \\
&= ([S_1 \otimes (S_2)^{\alpha_{G_2}}], [(S_1)^{\alpha_{G_1}} \otimes S_2]) \\
&= ([S_1 \otimes R], [R \otimes S_2]) = ([S_1],[S_2])
\end{aligned}$$

Reciprocamente, $\varphi\psi([S]) = \varphi([S^{\alpha_{1\times G_2}}], [S^{\alpha_{G_1\times 1}}]) = [S^{\alpha_{1\times G_2}} \otimes S^{\alpha_{G_1\times 1}}]$. Agora considere a aplicação

$$\begin{aligned}
\nu : & e(S)^{1\times G_2} \otimes e(S)^{G_1\times 1} \to e(S) \\
& t \otimes t' \mapsto tt',
\end{aligned}$$

para todo $t \in e(S)^{1\times G_2}$ e $t' \in e(S)^{G_1\times 1}$ Note que ν é um homomorfismo de A-álgebras tal que:

$$\nu(1_S \otimes 1_S) = 1_S \quad \text{e} \quad \nu \circ (g_1, g_2) = (g_1, g_2) \circ \nu,$$

para todo $g_i \in G_i$, $i = 1, 2$. Logo de [4, Theorem 3.4.] ν é um G-isomorfismo global e portanto pelo Teorema 2.5.3 temos

$$[S^{\alpha_{1\times G_2}} \otimes S^{\alpha_{G_1\times 1}}] = [S],$$

ou seja, $\varphi\psi([S]) = [S]$. □

Observação 3.3.6. Este último resultado, juntamente com o Teorema Fundamental para grupos abelianos finitos, reduz o estudo do semigrupo inverso $T_{par}(G, R)$ ao contexto de grupos cíclicos.

Referências Bibliográficas

[1] D. Bagio and A. Paques, *Partial Galois theory: the return*, preprint.

[2] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), 1931-1952.

[3] M. Dokuchaev, M. Ferrero, and A. Paques, *Partial actions and Galois theory*, J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), 77-87.

[4] S. U. Chase, D. K. Harrison, A. Rosenberg, *Galois Theory and Galois Cohomology of Comutative Rings*, Mem. Amer. Math. Soc. 52 (1965), 15-33.

[5] D. K. Harrison, *Abelian extensions of commutative rings*, Mem. Amer. Math. Soc. 52 (1965), 1-14.