

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE FÍSICA**

**SOBRE O ENSINO DO CONCEITO DE ESTADO EM CURSOS
INTRODUTÓRIOS DE MECÂNICA QUÂNTICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CARLOS RAPHAEL ROCHA

**PORTO ALEGRE
2008**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE FÍSICA**

**SOBRE O ENSINO DO CONCEITO DE ESTADO EM CURSOS
INTRODUTÓRIOS DE MECÂNICA QUÂNTICA***

CARLOS RAPHAEL ROCHA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, sob orientação do prof. Marco Antonio Moreira e co-orientação da profa. Victoria Elnecave Herscovitz, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

**PORTO ALEGRE
2008**

* Trabalho parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

CARLOS RAPHAEL ROCHA

**SOBRE O ENSINO DO CONCEITO DE ESTADO EM CURSOS
INTRODUTÓRIOS DE MECÂNICA QUÂNTICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, sob orientação do prof. Marco Antonio Moreira e co-orientação da profa. Victoria Elnecave Herscovitz, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada em:

Prof. Marco Antonio Moreira
Doutor em Ensino de Ciências, IF-UFRGS

Prof. Joecir Palandi
Doutor em Física, CCNE-UFSM

Profa. Naira Maria Balzaretto,
Doutora em Física, IF-UFRGS

Prof. Ives Solano Araújo
Doutor em Física, IF-UFRGS

À Elza, que deu apoio e suportou todas as dificuldades para que este projeto pudesse ser concretizado.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Marco Antonio Moreira, meu orientador, que me ajudou a trilhar os devidos caminhos em todas as etapas da pesquisa.

À professora Victoria Elnecave Herscovitz, minha co-orientadora, por todos os ensinamentos e por sua imensa paciência no meu aprendizado.

Aos professores Carmo Heinemann e Naira Balzaretti, por suas grandiosas colaborações a este projeto.

A todos os meus amigos da pós-graduação, pelas saudáveis discussões e por todos os momentos de descontração.

Aos meus pais e irmão, que me apoiaram em todos os momentos, apesar da distância.

A todas as pessoas que me apoiaram direta e indiretamente na execução deste trabalho e que ajudaram na realização de mais um passo em minha formação acadêmica.

RESUMO

Apresenta-se um estudo desenvolvido em três etapas com o intuito de analisar as principais dificuldades de compreensão pelos alunos de dois importantes conceitos da Mecânica Quântica (MQ): estado quântico e superposição linear. As três etapas da pesquisa consistiram em: elaboração, implementação e avaliação de uma proposta em três minicursos em congressos de ensino de Física nos estados do Rio Grande do Sul e de Santa Catarina; elaboração, apresentação e avaliação de um curso de 18 horas ministrado na Universidade do Vale do Rio dos Sinos, RS; revisão do material apresentado no curso anteriormente mencionado e apresentação, implementação e avaliação de curso de 20 horas na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS. Sob a luz dos referenciais teóricos da aprendizagem significativa de Ausubel e dos campos conceituais de Vergnaud, criaram-se situações-problema que pudessem promover a aprendizagem significativa dos tópicos apresentados em cada etapa da pesquisa. Constatou-se que as formulações do experimento de dupla fenda e do experimento de Stern-Gerlach chamaram a atenção dos alunos e se constituíram em bons exemplos de aplicação dos conceitos de estado de um sistema quântico, de superposição linear de estados, de colapso do vetor de estado, de possíveis valores de medida e de probabilidades de obtenção dos valores de medida e efetivamente facilitaram a compreensão de muitos destes conceitos. A inclusão de tópicos contemporâneos (Emaranhamento Quântico e Criptografia Quântica) motivou os alunos para o aprendizado dos primeiríssimos princípios da MQ. Nos minicursos foi muito grande o interesse despertado pela proposta nos minicursos, um ponto a favor de sua aplicação, ainda que o curto período de contato com os tópicos apresentados não permitisse a verificação da ocorrência de aprendizagem significativa. Pode-se dizer, contudo, que a abordagem utilizada propiciou um bom início de aprendizado da MQ por parte dos alunos e que outros conceitos essenciais, tais como o de operador linear e de evolução temporal de sistemas quânticos, precisam ser mais trabalhados em atividades futuras.

Palavras-chave: mecânica quântica, aprendizagem significativa, campos conceituais.

ABSTRACT

A study, developed in three stages, designed to analyze the main difficulties in understanding two important concepts of Quantum Mechanics (QM) is presented. The main concepts of this study are: quantum state and linear superposition. The three stages of this research are: elaboration, implementation and evaluation of a pedagogical proposal in three short-term courses in educational meetings in the states of Rio Grande do Sul and Santa Catarina; elaboration and presentation of a 18 hours course at the University of Vale do Rio dos Sinos, in São Leopoldo, RS; revision of the material presented in the before mentioned course and presentation of a 20 hours course at the Federal University of Rio Grande do Sul, in Porto Alegre, RS. In the light of Ausubel's meaningful learning and Vergnaud's conceptual fields theories, problem-situations were designed seeking the promotion of meaningful learning of the contents presented in the different stages of the research. The formulations of the Stern-Gerlach experiment and the double-slit experiment seemed to motivate the students to learn and were good examples of application of the quantum concepts of the state of the quantum system, linear superposition of states, the collapse of the state vector, the possible values of measurement results and the probability of obtaining the measurement results. Research findings suggest that these experiments facilitated the comprehension of much of these concepts. The inclusion of contemporary topics (Quantum Entanglement and Quantum Cryptography) motivated the students for the learning of the very first principles of QM. The interest on the proposal showed during the short-term courses was very high, a point in favor of this activity, although the short period of contact with the contents presented did not allow the verification of meaningful learning. Although the used approach seemed to be a good way to introduce QM to the students, some other essential concepts need more studies, such as the linear operator and the time evolution of quantum systems.

Keywords: quantum mechanics, meaningful learning, conceptual fields.

RELAÇÃO DE TABELAS

UNISINOS

Tabela 1. Respostas dos alunos à primeira questão do primeiro questionário.....	60
Tabela 2. Respostas dos alunos à segunda questão do primeiro questionário.....	61
Tabela 3. Resposta do Aluno 1 à terceira questão do primeiro questionário..	61
Tabela 4. Respostas dos alunos à quarta questão do primeiro questionário..	62
Tabela 5. Respostas dos alunos à primeira questão do segundo questionário.....	62
Tabela 6: Respostas dos alunos à segunda questão do segundo questionário.....	63
Tabela 7. Respostas dos alunos à terceira questão do segundo questionário.....	64
Tabela 8. Respostas dos alunos à primeira questão do terceiro questionário	65
Tabela 9. Respostas dos alunos à segunda questão do terceiro questionário.....	66
Tabela 10: Questões da avaliação realizada na UNISINOS e seus objetivos	76

UFRGS

Tabela 11. Respostas dos alunos à primeira questão do questionário.....	83
Tabela 12. Enunciado e objetivos da primeira questão da avaliação.....	94
Tabela 13. Respostas dos alunos à primeira questão da avaliação.....	94
Tabela 14. Enunciado e objetivos da segunda questão da avaliação.....	95
Tabela 15. Respostas dos alunos à segunda questão da avaliação.....	95
Tabela 16. Enunciado e objetivos da terceira questão da avaliação.....	96
Tabela 17. Respostas dos alunos à terceira questão da avaliação.....	96
Tabela 18. Enunciado e objetivos da quarta questão da avaliação.....	97
Tabela 19. Respostas dos alunos à quarta questão da avaliação.....	97
Tabela 20. Enunciado e objetivos da quinta questão da avaliação.....	98
Tabela 21. Respostas dos alunos à quinta questão da avaliação.....	99
Tabela 22. Enunciado e objetivos da sexta questão da avaliação.....	99
Tabela 23. Respostas dos alunos à sexta questão da avaliação.....	100
Tabela 24. Enunciado e objetivos da sétima questão da avaliação.....	100
Tabela 25. Respostas dos alunos à sétima questão da avaliação.....	101
Tabela 26. Enunciado e objetivos da oitava questão da avaliação.....	101
Tabela 27. Respostas dos alunos à oitava questão da avaliação.....	102
Tabela 28. Enunciado e objetivos da nona questão da avaliação.....	102
Tabela 29. Respostas dos alunos à nona questão da avaliação.....	103
Tabela 30. Enunciado e objetivos da décima questão da avaliação.....	104
Tabela 31. Respostas dos alunos à décima questão da avaliação.....	104

ÍNDICE

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO	1
1. Objetivos da Pesquisa	6
2. Postulados da Mecânica Quântica	7
CAPÍTULO II – REVISÃO DA LITERATURA	16
1. Introdução	16
2. Metodologia	17
2.1. <u>Propostas Pedagógicas Inovadoras</u>	18
2.1.1. <u>Propostas em Estudo ou Sugeridas</u>	18
2.1.2. <u>Propostas Efetivamente Implementadas em Sala de Aula</u>	19
2.2. <u>Levantamento de Concepções acerca de Tópicos Fundamentais de MQ</u>	23
2.3. <u>Materiais de Consulta para Professores</u>	24
2.4. <u>Utilização de Simulações em Computadores</u>	26
3. Considerações Acerca da Revisão	28
CAPÍTULO III – MARCO TEÓRICO	30
1. Introdução	30
2. A Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel	30
2.1. <u>Aprendizagem Significativa</u>	30
2.2. <u>Aprendizagem Mecânica</u>	31
2.3. <u>Subsunçores</u>	32
2.4. <u>Assimilação</u>	32
2.5. <u>Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora</u>	34
2.6. <u>Organizadores Prévios</u>	34
3. A Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud	36
3.1. <u>Esquema</u>	36
3.2. <u>Conceitos</u>	37
3.3. <u>Campos Conceituais</u>	39
3.4. <u>O Papel do Professor</u>	40
4. Considerações Acerca do Marco Teórico	40
CAPÍTULO IV – METODOLOGIA	43
1. Introdução	43
2. Metodologia de Pesquisa	43
2.1. <u>A Pesquisa Qualitativa</u>	43
2.2. <u>Estudo de Caso</u>	45
2.3. <u>O Caso Estudado e as Etapas da Pesquisa</u>	46
3. Metodologia de Ensino	48
3.1. <u>Metodologia das Aulas</u>	49
4. Coleta de Dados	50
CAPÍTULO V – APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	53
1. Introdução	53
2. Análise das Etapas da Pesquisa	53
2.1. <u>Os Minicursos</u>	53

<u>2.2. O Curso de Extensão na UNISINOS.....</u>	58
2.2.1. Análise de Conhecimentos Prévios.....	58
2.2.2. Relato das Aulas.....	66
2.2.3. Respostas à Terceira Lista de Exercícios.....	72
2.2.4. Avaliação do Aprendizado dos Alunos do Curso.....	75
2.2.5. As Entrevistas com os Alunos.....	79
<u>2.3. Atuação em Disciplina na UFRGS.....</u>	81
2.3.1. Avaliação de Conhecimentos Prévios.....	82
2.3.2. Relato das Aulas.....	84
2.3.3. Avaliação.....	94
2.3.4. Opiniões dos Alunos Acerca do Curso.....	105
<u>2.4. Síntese dos Resultados.....</u>	108
CAPÍTULO VI – CONCLUSÃO.....	112
REFERÊNCIAS.....	115
APÊNDICES.....	122
I – MATERIAL DE APOIO.....	123
II – QUESTIONÁRIOS DO CURSO DA UNISINOS.....	154
III – EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CURSO DA UNISINOS.....	155
IV – AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM NO CURSO DA UNISINOS..	158
V – QUESTIONÁRIO INICIAL DO CURSO DA UFRGS.....	159
VI – EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CURSO DA UFRGS.....	160
VII – AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM NO CURSO DA UFRGS.....	166
VIII – QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DO CURSO DA UFRGS...	168

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Analisando os currículos das disciplinas de Física do Ensino Médio no Brasil, pode-se perceber que, embora em algumas escolas esteja ocorrendo uma revitalização no ensino desta ciência, grande parte deles se encontra defasada de mais de um século, o que já vem sendo mencionado na literatura (vide, por exemplo, MOREIRA, 2004, p. 14). Essa desatualização favorece o ensino de uma Física em grande parte desenvolvida no século XVII e que, em geral, não consegue estimular os alunos. Além disso, a carga horária das disciplinas de Física no Ensino Médio diminuiu bastante ao longo dos anos (em muitas escolas são lecionadas atualmente apenas 2 horas-aula de Física por semana), o que amplia a relação entre assuntos menos interessantes e mais interessantes. O resultado é que o desenvolvimento científico de quase todo o século XX está sendo negligenciado frente a tópicos que não conseguem interessar a maioria dos alunos. Adicionalmente, devido à omissão de tópicos de Física Moderna, muitos dos estudantes são levados a crer que a Física parou após o desenvolvimento ocorrido até o século XIX. A inserção de tópicos de Física Moderna nesse nível de ensino tem o mérito de promover a necessária atualização curricular, além de poder acarretar um efeito motivacional nos estudantes.

A importância e a necessidade de incluir tais tópicos no Ensino Médio ficam claras ao lembrar que ela está por trás de quase todo o desenvolvimento tecnológico correntemente utilizado em nosso meio. Computadores, aparelhos opto-eletrônicos, fibras óticas, lasers, entre outros, são usados em equipamentos industriais, veículos automotores, sistemas de segurança, celulares e outros aparelhos portáteis e, é claro, na medicina, tanto no diagnóstico como no tratamento de enfermidades. Valadares e Moreira (1998, p. 121) observam que é imprescindível que estudantes de Ensino Médio conheçam os fundamentos da tecnologia atual, já que ela atua diretamente em suas vidas. Para a compreensão dos princípios físicos utilizados e associados a tais aparelhos, faz-se necessário conhecer conceitos estabelecidos desde a virada do século passado até os dias atuais (TERRAZAN, 1992, p. 210) e,

conseqüentemente, estes equipamentos podem fornecer a motivação necessária aos estudantes para a compreensão de determinados conceitos de Física Moderna. Considerando tais motivos, a participação dos professores se torna indispensável para a atualização, revisão ou reformulação curricular (PENA, 2006, p. 1).

A Mecânica Quântica (MQ), em particular, apesar de fundamental para o desenvolvimento da maioria das diversas áreas da Física Moderna, tem sido pouco explorada por professores em suas aulas. Fanaro et al. (2007, p. 235-236) listam algumas das principais dificuldades enfrentadas pelos professores de Ensino Médio para o ensino de MQ: o desconhecimento de conceitos quânticos, a complexidade matemática natural da teoria, a pequena importância dada a tais tópicos na formação do professor e as propostas dos livros-texto. Segundo os autores, estas razões levam os professores de Física a ignorar a necessidade de promover a atualização curricular e a resistir ao ensino de MQ nas escolas de Ensino Médio.

O currículo dos cursos de Física do Ensino Médio no Brasil, é bem verdade, passa por uma reformulação desde a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) no ano 2000. Neles, prevê-se uma série de competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos nas disciplinas integrantes do Ensino Médio, incluindo a Física. Para esta disciplina, os PCNEM sugerem seis temas estruturadores como forma de organização das atividades escolares: (a) Movimentos: Variações e Conservações; (b) Calor, Ambiente, Fontes e Usos de Energia; (c) Equipamentos Eletromagnéticos e Telecomunicações; (d) Som, Imagem e Informação; (e) Matéria e Radiação; e (f) Universo, Terra e Vida. No tema sobre Matéria e Radiação, propõe-se a abordagem de alguns tópicos com o intuito de propiciar ao aluno a aquisição de conhecimentos referentes a alguns conceitos fundamentais de Física Moderna, tais como átomo, radiações eletromagnéticas e reações nucleares. Analisando estes exemplos, pode-se perceber a importância da MQ para o ensino de Física. A MQ é, de fato, a base para o desenvolvimento destes (e de vários dos outros) temas, embora talvez eles sejam pensados, nos PCNEM, como um conjunto de informações fenomenológicas explicáveis por modelos incipientes e limitados. Mesmo, porém, em outros dos temas mencionados, como fontes energéticas,

telecomunicações e informação, pode-se apresentar aos alunos exemplos dos últimos desenvolvimentos propiciados pela MQ. Além disto, a MQ também é um veículo para promoção da atualização curricular do ensino de Física, por ser, de fato, a responsável pelo nascimento de uma nova Física, levando a Ciência a um novo patamar, antes não suspeitado.

Efetivamente, a MQ introduz uma nova visão de mundo, que se constitui nos alicerces da Física Moderna. Por serem novos, esses alicerces não são intuitivos (GRECA e HERSCOVITZ, 1998, p. 30), sendo muito importante analisar detalhadamente os conceitos-chave desta teoria. A intuição, construída no cotidiano e acostumada aos conceitos da Física Clássica, não dá conta dos problemas lançados pela MQ.

A preocupação com a necessidade de inclusão de tópicos de Física Moderna nos currículos dos cursos de Física de Ensino Médio no Brasil não é recente. Trabalhos de revisão da literatura como os de Ostermann e Moreira (2000) e de Greca e Moreira (2001) mostram que houve um grande aumento na pesquisa relativa à inclusão de tópicos de Física Moderna no Ensino Médio. Contudo, no que tange ao ensino de MQ, a maioria destes artigos não trata do ensino de conceitos fundamentais, atendo-se diretamente a algumas conseqüências destes conceitos, apresentadas como princípios específicos (princípio de incerteza, dualidade onda-partícula, etc.).

É importante, neste contexto, elucidar algumas questões. Será que os professores de Ensino Médio em exercício atualmente e os que estão sendo formados estão preparados para ensinar MQ de forma adequada aos estudantes? Estarão eles seguros o suficiente para ensinar MQ ou suas aplicações? Ao analisar programas de disciplinas relacionadas com MQ de cursos de Licenciatura em Física, pode-se perceber que, em grande parte deles, há uma acentuada ênfase na fenomenologia que originou o afastamento da Física Clássica e nos aspectos matemáticos da teoria. Em geral, a parte conceitual destes cursos atém-se à “Velha Teoria Quântica” (Radiação de Corpo Negro, Modelos Atômicos) e a considerações sobre Princípio da Incerteza e Dualidade Onda-Partícula. Grande parte da carga horária destas disciplinas é destinada a resolver problemas de autovalores de energia para a equação de Schrödinger independente do tempo e, em geral, não oferece muitas ligações com suas aplicações práticas ou com a pesquisa na área.

Apesar de serem importantes, tais tópicos derivam dos princípios fundamentais (primeiros postulados) da MQ, fazendo-se assim necessário que os próprios professores e os estudantes de graduação ou de Ensino Médio analisem tais postulados para melhor compreender o novo modo de descrição do mundo microscópico. Os aspectos conceituais fundamentais da Teoria Quântica são, então, bastante negligenciados em tais cursos, enfatizando-se o ensino de uma MQ em boa parte ultrapassada e com um foco em desenvolvimentos matemáticos. O ensino de MQ, realizado desta forma, é considerado árduo pelos alunos de cursos de Licenciatura em Física e não consegue estimulá-los a lecionar tópicos desta teoria no Ensino Médio. Afinal, consegue um professor trabalhar com equações diferenciais (tal qual vê em sua graduação) junto a seus alunos de Ensino Médio?

Além deste eventual despreparo (e desestímulo) dos futuros professores nos cursos de graduação, a ausência de conteúdos de MQ em livros didáticos de Física dirigidos a este público também constitui notável empecilho. Considerando o caso mais freqüente, um professor de Ensino Médio dedica grande parte de sua carga horária com a apresentação de aulas para muitas turmas, disponibilizando pouco tempo para a preparação das mesmas. A reduzida carga horária semanal de Física no Ensino Médio também faz com que os professores tenham necessidade de compactar conteúdos, excluindo temas em que tenham pouco domínio como, por exemplo, a Física Moderna. Assim, analisar a literatura, estudar e testar metodologias de ensino e promover a atualização curricular se torna quase inviável para um professor tão sobrecarregado. Apesar de muitas pesquisas produzirem materiais didáticos para utilização em aulas de Física Moderna, poucos professores têm contato com este tipo de material e, em geral, a divulgação do mesmo se restringe a uma minoria que estava inserida na pesquisa que o criou ou próxima dela. Assim, promover o contato dos alunos de cursos de graduação (licenciatura) com tais materiais em suas disciplinas normais ou em cursos de extensão torna-se uma via complementar para a atualização curricular e de estímulo para que esses futuros professores ensinem MQ no Ensino Médio.

Além disto, a MQ, principalmente hoje em dia, não interessa somente a físicos. Seu conteúdo fundamental deve estar presente em cursos tanto para físicos como para não-físicos e deve ser efetivamente compreendido pelos

estudantes, tanto em nível conceitual como em suas aplicações. Profissionais de diversas áreas (engenharia, informática, medicina, etc.) utilizam equipamentos e propriedades decorrentes dos processos quânticos e é necessário que compreendam os conceitos e princípios fundamentais para corretamente recorrer a eles em seus campos de trabalho. Cursos tradicionais de MQ salientam aspectos importantes não-clássicos como o da quantização da energia, mas este não é o único ou o mais importante aspecto quântico para algumas áreas profissionais e, em geral, também não é o mais acessível a eles em seus cursos de formação. É bem possível que, para profissionais de algumas dessas carreiras, um caminho potencialmente adequado e viável seja o contato com os conceitos fundamentais da MQ em cursos de curta duração que priorizem o nível de compreensão em relação ao nível de detalhamento de informação.

Os cursos de curta duração também podem beneficiar professores. Seja durante a graduação ou em cursos de extensão, pode-se lançar mão desta modalidade de ensino para focar aspectos que não costumam ser abordados em cursos tradicionais e, assim, preencher uma lacuna importante na formação destes profissionais.

Ao tratar de uma teoria que descreve o comportamento de sistemas físicos não-clássicos, o ensino de MQ possui outro grande obstáculo, qual seja a proliferação de palestras, artigos de divulgação e mesmo filmes e livros que livremente se apóiam em conceitos da MQ (muitas vezes de forma totalmente equivocada) com a intenção de interpretá-la à moda clássica ou de torná-la “acessível” ao grande público. Materiais de divulgação com temas supostamente relacionados à MQ (e.g., Física Quântica no Cotidiano, Física Quântica e Religião, Física Quântica e Espiritualidade) surgem e bombardeiam a mente dos alunos com informações que, por serem extremamente simples, são tomadas como verdade, quando, muitas vezes, nem os autores destes produtos sabem realmente algo da teoria. Como é da natureza do ser humano considerar como certo aquilo que lhe parece mais simples (BACHELARD, 1996), o aluno pode vir a acreditar na informação simplista, truncada ou errônea que lhe está sendo transmitida. Isto acaba por criar um grande obstáculo pedagógico para um aprendizado com rigor científico em cursos introdutórios de MQ.

Qual é, então, a alternativa para evitar todos estes e outros problemas que o ensino de MQ enfrenta? Certamente não há um caminho único para tal, até porque se deve atingir um universo muito diversificado de pessoas. Literatura elaborada por não diletantes certamente é uma das maneiras de difundir os princípios e conteúdos de MQ de forma adequada e isto tem felizmente ocorrido com maior destaque nos últimos anos em nosso país. Além disto, a opção mais dinâmica de cursos de curta duração parece ser também adequada e é apresentada, a seguir, nesta dissertação.

1. Objetivos da Pesquisa

Constatando a necessidade da inserção de tópicos de MQ no Ensino Médio e a de se complementar o preparo fornecido por muitos cursos de Licenciatura, esta dissertação se propõe a analisar três questões norteadoras para averiguar as dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão dos conceitos fundamentais da MQ e também a respondê-las. São as seguintes, as questões que se pretende abordar neste trabalho:

- *Quais as principais dificuldades encontradas por professores e licenciandos no aprendizado dos conceitos de **estado** e de **superposição linear de estados** em MQ?*

- *Como (e quais) situações-problema podem ajudar no aprendizado significativo dos conceitos de **estado** e de **superposição linear de estados**?*

- *A utilização de temas atuais de grande repercussão (no trabalho presente, o Emaranhamento Quântico e a Criptografia Quântica) pode ajudar no aprendizado da MQ?*

A primeira pergunta trata da importância que deve ser dada aos conceitos de *estado* e de *superposição linear de estados* dentro da MQ. Tais conceitos estão estreitamente correlacionados e são fundamentais para todo o desenvolvimento da MQ. Estes princípios podem parecer de compreensão fácil e até imediata, mas, de fato, surpreendentemente são de difícil assimilação pelos estudantes. Greca et al. (2001) e Greca e Herscovitz (2005) salientam que o conceito de superposição linear de estados é um dos conceitos da MQ em relação ao qual os alunos apresentam maior dificuldade.

Com o apoio dos referenciais teóricos da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, que diz que o fator mais importante a contribuir para o aprendizado é aquilo que o aluno já sabe, e da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, que afirma que são as *situações* que dão sentido aos conceitos, estudar-se-ão situações que venham a propiciar uma melhor compreensão de conceitos inerentes à MQ.

Em relação à segunda pergunta, serão apresentadas diversas situações de aplicações de conceitos da MQ, pretendendo-se verificar como estas situações influenciam no aprendizado do tema.

Quanto à terceira pergunta da pesquisa, antecipam-se duas situações de aplicabilidade da MQ (Emaranhamento Quântico e Criptografia Quântica) que interessam, inclusive, a áreas “não-duras” do conhecimento humano. Estas aplicações da MQ são recentes e, apesar de intrigantes, decorrem dos primeiros postulados da teoria.

2. Postulados da Mecânica Quântica

Para que se possa propiciar aos alunos uma melhor compreensão da MQ e de suas aplicações, é de grande importância a apresentação dos postulados fundamentais desta teoria, que são considerados o ponto-chave desta dissertação. A justificativa para selecionar, especificamente para cursos de curta duração, os primeiríssimos princípios da MQ reside, de fato, em um tripé de considerações.

A primeira, já mencionada, é a baixa oferta destes tópicos em cursos de introdutórios, que privilegiam em geral aspectos filosóficos e interpretação dos resultados da MQ.

A segunda razão tem a ver com o fato de, nas últimas décadas, a tecnologia e a criatividade de vários pesquisadores terem propiciado experimentos com poucas partículas quânticas, cujos resultados cada vez mais corroboram o que se afirmam nestes princípios.

Finalmente, vinculado à consideração anterior, áreas de conhecimento dantes não interessadas na MQ passam a se utilizar dela justamente em situações de aplicação mais direta destes postulados fundamentais.

Aos estudantes e profissionais destes campos do conhecimento interessam, então, mais estes aspectos e menos os elaborados problemas de resolução de equações de autovalores de energia de sistemas mais complexos, tão investigados pela Física Nuclear, pela Física Atômica e pela Física Molecular.

Assim, apresentam-se, a seguir, os primeiros princípios da MQ.

Optou-se, para tanto, pela apresentação mais tradicional destes postulados, recorrendo-se à descrição temporal de Schrödinger, que atribui aos estados dos sistemas quânticos a propriedade de evoluir no tempo, em contraposição à descrição de Heisenberg, que atribui aos operadores tal função.

Sendo assim, os postulados aqui apresentados podem ser encontrados, por exemplo, em Dirac (1966), assim como em diversos outros compêndios da literatura tradicional de MQ. Neste trabalho, segue-se de muito perto a apresentação dos postulados como redigidos em Cohen-Tannoudji et al. (1977).

Na origem dos postulados da MQ, encontra-se a premissa que pode ser enunciada como “o postulado zero” da MQ: “*Em MQ, vale o princípio da superposição linear*”. Como se poderá argumentar, este princípio vale para vetores geométricos em um espaço linear, bem como para ondas em Física Clássica. Então, não sendo novidade, o que há de especial neste postulado? De fato, trata-se aqui de um postulado de correspondência que estabelece que “*a todo sistema quântico corresponde um espaço vetorial*”. É na Álgebra Linear que a fenomenologia da MQ encontra guarida e, conseqüentemente, também nas propriedades associadas às operações com vetores e operadores. Os estados de sistemas quânticos podem ser descritos como vetores pertencentes a espaços lineares e sobre tais vetores são executadas operações que, em geral, os modificam. O princípio da superposição linear, nesta teoria, estabelece então que, se existem dois (ou mais) estados distintos possíveis para determinado sistema ou objeto quântico, qualquer combinação linear destes dois (ou mais) estados também é um estado possível para o sistema.

Perguntar-se-á por que o princípio da superposição linear é apresentado antes de outros postulados. Porque é neste princípio que está a raiz da diferença de comportamento entre os sistemas massivos clássicos e os

correspondentes quânticos, caracterizando assim uma distinção básica entre a teoria clássica e a teoria quântica. É importante salientar que este postulado não impõe a superposição linear aos objetos quânticos, mas sim aos estados dos objetos quânticos.

Para compreender a que se refere de fato esta afirmação é preciso antes caracterizar o estado de um objeto quântico. Como exemplo, pode-se analisar a situação de um elétron submetido ao experimento de dupla fenda. Para este elétron, tem-se duas possibilidades (fendas) de passagem, ou seja, dois estados caracterizados classicamente por “estado de passagem pela fenda 1 ($|1\rangle$)” e “estado de passagem pela fenda 2 ($|2\rangle$)”. Logo, um estado possível para este elétron, pelo princípio em questão, pode ser a superposição linear¹ $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$, que seria lida como “estado de passagem pelas fendas 1 e 2”. Nada trivial!

Apresentam-se, a seguir, os primeiros postulados da MQ.

Primeiro Postulado: Estado de um Sistema Quântico

O primeiro postulado trata da entidade fundamental da MQ: o estado quântico. A definição de estado quântico é, conceitualmente, a mesma que de estado clássico, porém esta última é menos citada em Física Clássica. O estado de um sistema físico é caracterizado pelo conjunto de informações sobre valores das grandezas físicas (observáveis) que podem ser medidas sobre o sistema em um determinado instante de tempo, ou seja, de tudo a respeito de que se pode ter conhecimento relativo a um dado sistema físico em determinado instante de tempo. Por exemplo, quando se extravia algum objeto e pede-se ajuda de outras pessoas para encontrá-lo, é necessário informar sobre as características do objeto para que se consiga sucesso na busca do objeto. Não basta caracterizar o objeto tal qual um fabricante detalha as informações técnicas de seu produto; é importante descrever características que tornem este objeto singular e pertencente a quem o procura. Muitas destas características não variam com o tempo, enquanto outras, sim. Por exemplo, é

¹ Nesta dissertação, utiliza-se a notação de Dirac, em que o estado quântico é simbolizado por $|\ \rangle$ (ket), acrescido de uma característica interna (por exemplo, $|\Psi\rangle$).

sempre muito útil declarar a posição do objeto no momento em que foi perdido. Pois, em geral, o objeto, se reencontrado, estará em outro local. A relação das informações acerca do objeto caracteriza o estado do mesmo naquele instante de tempo.

Assim, pode-se enunciar o primeiro postulado da MQ: “*Tudo o que se pode saber sobre o sistema físico em um dado instante de tempo t está expresso no seu estado, caracterizado pelo vetor $|\Psi(t)\rangle$ de um espaço linear \mathcal{E}* ”. A correspondência entre estado e vetor está implícita neste enunciado, pois atribui ao estado do sistema quântico o papel de conceito fundamental da MQ, papel este que recai sobre o vetor em espaços lineares. A diferença entre as definições de estado para um sistema clássico e para um sistema quântico é que, em Física Clássica, em princípio, definir o estado significa conhecer os valores de *todas* as grandezas físicas associadas ao sistema, enquanto que em Física Quântica, isto ocorre apenas para observáveis compatíveis². Logo, o vetor $|\Psi(t)\rangle$ contém informações sobre os valores de todos os observáveis compatíveis do sistema quântico, em dado instante de tempo. É por isso que o estado quântico é considerado como o conceito fundamental da MQ.

Se $|\Psi(t)\rangle$ contém todas as informações possíveis relativas aos valores das grandezas físicas compatíveis em um dado instante de tempo, deve haver alguma forma de se ter acesso a estas informações. É exatamente sobre isso que tratam os quatro postulados seguintes, todos eles relacionados à noção de medida em MQ.

Segundo Postulado: Grandeza Física e Operador

Para conhecer completamente o estado de um sistema, em MQ, é necessário medir todas as grandezas físicas compatíveis deste sistema. Para se medir uma dada grandeza física, realiza-se uma operação de medida sobre o sistema, modificando o seu estado em geral. Tal operação é simbolizada no

² Dois observáveis são compatíveis quando, ao ser medido o valor de um deles, é possível não alterar o valor da medida do outro. Em MQ, a incompatibilidade de observáveis ocorre, por exemplo, entre os observáveis posição e momento linear (numa dada direção). Esta incompatibilidade entre posição e momento é comumente apresentada como o Princípio de Incerteza de Heisenberg.

formalismo por um *operador*. Diferentemente da Física Clássica, a maioria das operações de medida em MQ modifica o estado do sistema, tornando-se impossível conhecer valores de todas as grandezas físicas possíveis para o mesmo estado ao mesmo tempo. Somente valores de observáveis compatíveis podem caracterizar o mesmo estado do objeto quântico no mesmo instante de tempo.

Como toda grandeza física é passível de ser medida, a cada grandeza física deverá corresponder uma operação de medida adequada e, portanto, um operador adequado. Isto conduz ao segundo postulado da teoria que pode ser enunciado da seguinte maneira: “*A cada grandeza física em Mecânica Quântica corresponde um operador hermitiano³ que atua no espaço \mathcal{E}* ”.

Como exemplos, tem-se que ao observável físico posição corresponde um operador posição, ao observável energia corresponde o operador hamiltoniano em determinadas condições, ao observável componente de spin em uma dada direção corresponde o operador de componente de spin naquela direção, etc.

De acordo com o segundo postulado, então, toda medida em MQ é representada pela ação de um operador sobre o vetor $|\Psi(t)\rangle$. Com isto, pode-se afirmar que toda medida em MQ é uma operação, fazendo-se necessária a utilização de operadores no formalismo correspondente.

Terceiro Postulado: Valores de Medidas

Apesar de relacionar grandezas físicas com operadores, o segundo postulado nada afirma sobre quais são os possíveis valores de medidas. Em Física Clássica, o espectro de valores possíveis para os resultados das medidas é freqüentemente contínuo, mas, em MQ, dependendo do observável em análise, nem todos os valores clássicos correspondentes são obtidos nas medidas. Pode-se citar, como exemplo, os níveis de energia de um elétron do átomo de hidrogênio. Segundo o modelo atômico de Bohr, os valores das

³ Operador linear hermitiano (\hat{A}) é aquele que satisfaz, no produto escalar em que se encontra intercalado entre vetores $|\Phi_1\rangle$ e $|\Phi_2\rangle$, a relação $\langle \Phi_1 | \hat{A} | \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_2 | \hat{A} | \Phi_1 \rangle^*$. Tal operador possui somente autovalores reais e autovetores ortogonais para autovalores distintos.

energias deste elétron podem ser obtidos a partir da relação: $E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{eV}$, sendo $n = 1, 2, 3, \dots$, o que concorda razoavelmente bem com os resultados experimentais. Assim, somente são possíveis os autovalores $E_1 = -13,6 \text{eV}$, $E_2 = -3,4 \text{eV}$, etc.

O que se observa em geral em MQ é que os resultados experimentais concordam com os autovalores dos operadores associados aos observáveis físicos analisados. O terceiro postulado está, então, estritamente relacionado aos possíveis valores dos resultados de medidas e pode ser enunciado da seguinte forma: *“Os únicos resultados possíveis de medida de uma grandeza física são os autovalores do operador associado ao observável em estudo”*.

Alguns observáveis, no entanto, possuem autovalores contínuos como, por exemplo, momento linear e posição, embora vários outros possuam somente autovalores discretos em número infinito ou até mesmo em número limitado como, por exemplo, neste último caso, componente de spin em uma dada direção.

Quarto Postulado: Probabilidade de Ocorrência dos Valores de Medida

Apesar de o terceiro postulado discorrer sobre os possíveis valores de medida de uma grandeza física, ele não garante a obtenção de algum deles em particular em uma medida. O vetor associado ao estado pode ser decomposto em auto-vetores⁴ de certo operador que corresponde a um observável físico. O aparecimento dos autovalores como resultados de medidas se dá com diferentes probabilidades.

O quarto postulado trata exatamente destas probabilidades e pode ser enunciado como segue na situação simples de um observável que possui um espectro discreto e não degenerado de autovalores. *“Na medida da grandeza física A sobre um sistema quântico que se encontra no estado descrito pelo*

⁴ Pelo princípio de superposição linear, estados de sistemas quânticos podem ser expressos como (decompostos em) combinações de estados de uma base, em particular composta de auto-estados de um operador que corresponde a um observável físico.

vetor $|\Psi(t)\rangle$, de norma 1, com decomposição espectral⁵ $|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|a_n\rangle$, em que $|a_n\rangle$ é o n -ésimo auto-estado do operador \hat{A} associado à grandeza física A , a probabilidade de se obter o autovalor a_n é $|c_n|^2$.

Por exemplo, o vetor associado ao estado de spin de um elétron, com decomposição espectral nos vetores que representam os auto-estados de componente de spin na direção \hat{z} , pode ser escrito como $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\eta/2\rangle_z - i\sqrt{\frac{2}{3}}|-\eta/2\rangle_z$. Neste caso, há uma probabilidade de $1/3$ de se obter o autovalor $+\eta/2$ na referida direção e uma probabilidade de $2/3$ de se obter o autovalor $-\eta/2$ na mesma direção, para a componente de spin.

Este postulado assegura também que, quando o objeto físico se encontra em um auto-estado do operador que corresponde à grandeza física medida, a probabilidade de obter o autovalor correspondente é 1 e a de obter qualquer outro autovalor é 0.

Quinto Postulado: Colapso do Estado

Em que estado o sistema quântico estará após o processo de medida? Em geral, o sistema não mais se encontra no estado original anterior à medida, representado por uma superposição de auto-estados do observável em análise. Por efeito da medida, o estado “colapsa” para o auto-estado referente ao autovalor obtido e, imediatamente⁶ após, uma segunda medida comprovará o valor da primeira.

A redução do estado, ao se realizar uma medida de uma grandeza física, está presente no quinto postulado, que pode ser enunciado da forma seguinte. “Se a medida de um observável A sobre o sistema físico que se encontra no estado descrito pelo vetor $|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|a_n\rangle$ resulta no autovalor a_n

⁵ Nesta dissertação não se trabalhará com o caso discreto degenerado nem com o caso contínuo, por questão de simplicidade.

⁶ Imediatamente, aqui, significa que o intervalo de tempo transcorrido entre o instante da primeira medida e o instante de uma nova observação é suficientemente pequeno para que o estado não venha a se modificar pela variação no tempo, ou seja, a única modificação significativa seja a provocada pelo ato de medida.

do operador \hat{A} correspondente, imediatamente após a medida o estado do sistema é o auto-estado representado pelo vetor $|a_n\rangle$ ".

Tomando como exemplo o estado $|\Phi\rangle$ supracitado, tem-se que, ao obter o autovalor $+\eta/2$ em uma medida da componente do spin na direção \hat{z} , o sistema deixa de estar no estado $|\Phi\rangle$ e passa a se encontrar no estado representado por $|+\eta/2\rangle_z$. Uma segunda medida em um instante posterior imediato fornecerá, com probabilidade igual a 1, o valor $+\eta/2$.

Sexto Postulado: Evolução Temporal dos Estados Quânticos

Para se repetir, com certeza, o mesmo resultado de uma certa medida, em MQ, deve-se efetuar a segunda medida imediatamente após a realização da primeira. Isto porque o sistema quântico pode evoluir e se modificar com o transcorrer do tempo. Na MQ, apesar de não haver um determinismo como o da Física Clássica, devido à obtenção estatística de resultados nas medidas de valores de observáveis físicos, existe uma lei que rege a evolução temporal dos estados de sistemas quânticos.

O sexto postulado apresenta a equação de Schrödinger como lei causal para os estados de sistemas quânticos. "A evolução temporal do vetor $|\Psi(t)\rangle$, que representa o estado de um sistema quântico, é governada pela equação de Schrödinger $i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle$, em que $\hat{H}(t)$ é o operador hamiltoniano associado à energia total do sistema⁷".

A superposição linear de estados também provoca interessantes efeitos na evolução temporal dos sistemas quânticos. No caso de uma partícula confinada a uma região de potencial oscilador harmônico duplo (caso unidimensional, por exemplo), pode-se notar que, em uma superposição dos dois mais baixos auto-estados de energia, a partícula oscila, com o passar do tempo, entre as duas regiões do potencial, tendo, em alguns momentos, maior

⁷ Na verdade, para que o operador hamiltoniano represente a energia total do sistema, é necessário que seja independente do tempo.

probabilidade de ser encontrada numa das regiões, em outros momentos, na outra.

Considerando apenas estes postulados, pretende-se analisar as dificuldades enfrentadas na compreensão dos conceitos de *estado* e de *superposição linear de estados* por estudantes de cursos introdutórios de MQ e, assim, responder as perguntas propostas na dissertação.

No próximo capítulo, apresenta-se uma revisão da literatura em artigos recentes relativos ao ensino de MQ, tanto em nível universitário como médio. Os artigos foram selecionados dentro de um conjunto definido de periódicos.

O terceiro capítulo apresenta o marco teórico norteador da metodologia e da análise dos dados nas distintas etapas da pesquisa. Aspectos das teorias de aprendizagem de D. Ausubel e G. Vergnaud vinculados à proposta em desenvolvimento são então apresentados nesta instância.

As etapas da investigação estão descritas na metodologia de pesquisa apresentada no quarto capítulo e referem-se ao desenvolvimento, à coleta e à análise dos dados da pesquisa. Como descrito neste capítulo, três versões de cursos de curta duração foram oferecidas, uma incluindo três minicursos e as outras duas com duração de aproximadamente 20 horas cada uma.

O quinto capítulo apresenta os dados recolhidos, os resultados obtidos e as respostas a questões propostas. Foram armazenadas como dados, manifestações escritas por solicitação apresentada aos participantes em questionários específicos, respostas a questões propostas em provas finais, respostas a listas de exercícios apresentadas, e manifestações orais espontâneas ou induzidas.

Finalmente, o último capítulo apresenta as conclusões e implicações obtidas a partir dos resultados da análise da pesquisa promovida com o oferecimento dos cursos de curta duração.

CAPÍTULO II

REVISÃO DA LITERATURA

1. Introdução

Considerando o tema a ser pesquisado, cabe aqui se fazer uma revisão sobre artigos relativos ao ensino de MQ publicados em periódicos mais importantes da área de Ensino de Ciências. Para tal, optou-se por levar em conta, os três trabalhos de revisão da literatura abaixo, oriundos de programa de pós-graduação do Instituto de Física da UFRGS sobre o ensino de Física Moderna e Contemporânea (FMC) e de MQ, tanto no Ensino Médio como no Superior.

Ostermann e Moreira (2000) analisaram mais de cinqüenta artigos sobre a pesquisa de FMC no Ensino Médio desde o início da década de 70 até o final do século passado. Após o levantamento de tais artigos, os trabalhos foram classificados em seis grandes grupos. Os autores constataram uma grande concentração de publicações em forma de divulgação e de bibliografia de consulta para professores. Além disto, verificaram que poucos trabalhos se referiam a pesquisas sobre concepções alternativas dos estudantes acerca de tópicos de FMC e a resultados de propostas analisadas em sala de aula.

Greca e Moreira (2001) analisaram mais de quarenta trabalhos sobre o ensino de MQ em cursos introdutórios (em nível médio e superior) publicados a partir de 1970 e até o ano 2000. Os artigos foram classificados em três grandes grupos: artigos sobre concepções dos estudantes a respeito de conteúdos de MQ; trabalhos com críticas aos cursos introdutórios de MQ; estudos contendo propostas de novas estratégias didáticas. Poucos são os artigos do primeiro grupo e poucas propostas do terceiro grupo foram efetivamente implementadas. Os autores constataram, também, um aumento no interesse por este tipo de pesquisa nos últimos anos do período analisado.

Recentemente, Pereira (2008) complementou os trabalhos anteriores com uma revisão de mais de cem artigos sobre o ensino de FMC e de MQ publicados nas mais importantes revistas de ensino de ciências do país e do exterior, segundo o Qualis da CAPES, no período de 2001 a 2006. Em sua

pesquisa, classificou os artigos em quatro grandes grupos: propostas testadas em sala de aula que apresentam resultados de aprendizagem; levantamento de concepções acerca de tópicos de FMC; bibliografia de consulta para professores; análises de publicações relacionadas ao ensino de FMC. Mais da metade dos artigos analisados pelo referido autor está inserida no último grupo. O autor salienta a escassez de estudos sobre formação inicial e continuada de professores dado que, de todos os trabalhos analisados, somente quatro eram concernentes a este tema. Também se constata nesta revisão que, além do aumento do número de publicações nas áreas de FMC e MQ, muitas delas são de divulgação científica, textos e recursos didáticos e propostas de inovação pedagógica, o que pode indicar um campo de pesquisa proeminente.

2. Metodologia

A presente revisão leva em conta e busca complementar os três trabalhos supracitados, analisando artigos relacionados com o ensino de MQ publicados entre 2007 e julho de 2008 nas revistas contempladas pela revisão de Pereira⁸ (ibid.) e publicados entre 2000 e julho de 2008 nas revistas não contempladas por este autor. Assim, ao todo foram analisadas seis revistas nacionais (*Caderno Brasileiro de Ensino de Física, Ciência & Educação, Ensaio – Pesquisa em Educação em Ciências, Investigações em Ensino de Ciências, Revista Brasileira de Ensino de Física, Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*) e dez internacionais (*American Journal of Physics, International Journal of Science Education, Journal of Research on Science Teaching, Physical Review Special Topics – Physics Education Research, Physics Education, Science Education, Science & Education, The Physics Teacher, Enseñanza de las Ciencias e Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*). Também foram analisadas algumas teses de doutorado e dissertações de mestrado disponíveis para consulta, trabalhos estes defendidos entre 2006 e julho de 2008.

⁸ Algumas revistas não foram contempladas pela revisão de Pereira (2008) por não possuírem qualificação máxima fornecida pelo Qualis da Capes. Neste trabalho foram ademais consideradas algumas outras revistas que incluem interessantes contribuições para o ensino de MQ.

Foram localizados 22 trabalhos, assim classificados: (a) propostas pedagógicas inovadoras; (b) levantamento de concepções acerca de tópicos fundamentais de MQ; (c) materiais de consulta para professores; e (d) utilização de simulações e similares em computadores.

A primeira categoria trata de propostas pedagógicas testadas em sala de aula ou em fase de implementação. O segundo grupo se refere a trabalhos que averiguaram concepções, atitudes e idéias prévias de alunos e professores, sobre tópicos de MQ e complementa artigos da primeira categoria. O terceiro conjunto trata de referências bibliográficas apresentadas como material de consulta direcionado a professores de Física, em nível médio ou universitário. A última categoria se refere à utilização de simulações em computador para representar situações em MQ que normalmente são de demorada obtenção matemática ou difícil compreensão pelos alunos (problemas de poços de potencial, modelos atômicos, etc.). Pode-se perceber uma grande preocupação com a construção de tais simulações e análise da funcionalidade das mesmas em sala de aula.

A classificação aqui utilizada é apenas uma de muitas possíveis e vários dos artigos analisados podem se encaixar em mais de uma categoria. Não se pretende limitar ou julgar os trabalhos classificados por estas categorias e sim, levantar os temas de estudo e resultados neles presentes.

2.1. Propostas Pedagógicas Inovadoras

Várias foram as propostas apresentadas para o ensino de MQ, porém somente algumas foram efetivamente implementadas em sala de aula, enquanto outras se apresentam como um prenúncio de utilização. Assim, fez-se uma subdivisão desta categoria: propostas em estudo ou sugeridas; e propostas efetivamente implementadas em sala de aula.

2.1.1. Propostas em Estudo ou Sugeridas

Após levantar alguns problemas para a implementação da MQ nos currículos de Física, Fanaro et al. (2007) propõem trabalhar o ensino de MQ junto a alunos no final do ensino secundário (16-17 anos), com auxílio do

método de múltiplos caminhos apresentado por Richard Feynman. Tal método é utilizado para promover a transição do comportamento clássico para o quântico e é uma alternativa para a apresentação dos princípios fundamentais da MQ, analisando os aspectos ondulatórios da matéria à medida que se reduz o tamanho dos objetos à escala atômica. Para tal, os autores sugerem a utilização de simulações de experimentos de interferência com partículas macroscópicas e elétrons.

Hadzidaki (2008a) formulou um curso que visa melhorar a compreensão dos estudantes acerca de vários dos tópicos de MQ. O curso foi elaborado com base em um levantamento de um problema instrucional concreto – as dificuldades de aprendizado de conceitos de MQ –, em uma análise epistemológica deste problema e na exploração dos caminhos de raciocínio e pensamento que deram origem à MQ (aspectos da história da ciência). A autora considera que somente uma intervenção instrucional que esteja devidamente embasada, epistemológica e educacionalmente, pode promover o aprendizado da MQ e, conseqüentemente, uma mudança conceitual real.

Seguindo a mesma linha de outro estudo, Hadzidaki (2008b) apresenta um módulo instrucional que se utiliza de experimentos mentais (*gedanken-experiments*). Após investigar como filósofos da ciência vêem e explicam o experimento do microscópio de Heisenberg, tal experimento é tomado como ponto central, sob a interpretação de Bohr da MQ. Neste módulo, os alunos são levados a fazer um estudo comparativo entre Física Clássica e MQ para verificar a incompatibilidade fundamental lógica, conceitual e ontológica destas teorias. Também aqui, a autora defende que o ensino de MQ deve estar muito bem embasado conceitual, filosófica, educacional e ontologicamente.

2.1.2. Propostas Efetivamente Implementadas em Sala de Aula

Crendo que o ensino de MQ possa ser iniciado para alunos de ensino secundário sem a necessidade de conhecimentos matemáticos avançados, Micheline et al. (2000) trabalham o ensino de MQ com o auxílio de uma representação iconográfica das propriedades (de polarização) de fótons que passam por polarizadores em uma direção específica. Recorrendo a esta representação, os autores acreditam que podem trabalhar os conceitos de

superposição de estados em nível secundário. Uma proposta foi aplicada durante dois meses com alunos do último ano do ensino secundário em um módulo de 8 horas. Assim, os autores verificaram que a representação proposta ajudou na compreensão dos conceitos e das idéias exploradas. Segundo seus resultados, mais de 60% dos alunos compreenderam os conceitos de estado quântico, incompatibilidade de propriedades conjugadas (observáveis), não-localidade e indeterminismo. Ao final de seu trabalho, os autores propõem que a comparação entre a Física Clássica e a MQ deve servir de base para pesquisas envolvendo uma análise crítica dos conceitos quânticos.

Hadzidaki et al. (2000) apresentam os resultados de uma proposta pedagógica baseada em uma análise qualitativa da MQ. Segundo eles, para trabalhar com estes aspectos é necessário se apoiar firmemente em fundamentos educacionais e epistemológicos. Utilizando tais fundamentos, os autores elaboraram um modelo instrucional para promover uma reconstrução radical no conhecimento inicial de alunos que costumam mesclar aspectos da Mecânica Clássica e da MQ. Para tal, usaram simulações do modelo atômico de Bohr para o átomo de hidrogênio e buscaram salientar os pontos em que a Mecânica Clássica não consegue responder às perguntas lançadas. Dependendo das concepções apresentadas pelos estudantes, os autores procuraram promover reconstruções fracas ou radicais em tais concepções, através do modelo criado, utilizando a compreensão da natureza da ciência e da investigação científica como parte integrante da ciência.

Carvalho Neto (2006) desenvolveu uma pesquisa-ação que avalia os resultados de aprendizagem significativa acerca do aspecto preditivo da Mecânica Clássica e da MQ obtidos com alunos do terceiro ano de um colégio na Bahia, em 2004 e 2005. Uma análise prévia mostrou que havia a necessidade de uma nova abordagem tanto da MQ como da Mecânica Clássica. Assim, o autor formulou esta nova abordagem que enfatizou o aspecto fundamentalmente probabilístico da Mecânica Quântica implícito no Princípio da Incerteza, contrastando com o determinismo clássico implícito na Segunda Lei de Newton. O conceito de estado quântico foi introduzido de maneira qualitativa, acentuando-se a diferença, ao invés de analogias com o estado clássico, na tentativa de aproximar os alunos de uma fenomenologia

propriamente quântica. Nessa perspectiva, foi discutido o padrão de interferência, observado com elétrons, mesmo para eventos individuais, tomando como base a interpretação da complementaridade de Niels Bohr. Os resultados apontam que esta abordagem favorece a ancoragem do aspecto preditivo das teorias físicas no subsunçor previsão, já existente na estrutura cognitiva dos alunos pesquisados.

Chiarelli (2006) realizou um trabalho com o objetivo de mostrar a possibilidade de inserir temas de Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio, especificamente algumas noções de Mecânica Quântica. Promoveu um estudo com alunos de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de Porto Alegre, RS, no qual foram abordados somente conceitos de Mecânica Quântica, usando poucas expressões matemáticas de fácil assimilação. Foi feita uma análise quantitativa e qualitativa das respostas desses alunos através de testes e mapas conceituais. Os resultados da análise sugerem que é, de fato, adequado abordar tópicos de Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio.

Paulo (2006) investigou a viabilidade do ensino de MQ no Ensino Médio sob a perspectiva da interpretação de Copenhague/Bohr. Após uma revisão que apontou diferenças entre propostas e iniciativas para o ensino de MQ, principalmente sobre o papel da Física Clássica no ensino de FMC, foi desenvolvida uma pesquisa com aproximadamente 100 alunos de duas escolas de Cuiabá, MT. Foram abordados alguns conceitos fundamentais da MQ, tais como não-determinismo, causalidade, incerteza, complementaridade, dualidade, entre outros. Em uma das escolas, os tópicos foram abordados após serem ensinados aos alunos tópicos de física ondulatória segundo a visão clássica. Os resultados apontam que as dificuldades em aprender tópicos de MQ não são maiores do que as de compreender tópicos de Física Clássica. Constatou-se também que ensinar física ondulatória antes dos tópicos de MQ não interfere no aprendizado dos dois conteúdos. Percebeu-se, no entanto, que os significados dos conceitos quânticos são captados de forma diversificada pelos alunos.

Para poder enfatizar a parte conceitual da MQ, Hoekzema et al. (2007) utilizaram o exemplo de uma partícula quântica confinada em uma caixa de paredes infinitas (caso unidimensional). Com esta situação, conseguiram

trabalhar diversos exemplos de Física Moderna: espectros e níveis de energia de átomos excitados, formação de moléculas, partículas elementares, ligações metálicas, pontos quânticos (nanociência), etc. Após uma experiência em quarenta escolas holandesas de ensino secundário, verificaram que os estudantes eram capazes de utilizar adequadamente tal modelo, sem necessidade de um conhecimento matemático profundo.

Utilizando o Ciclo da Experiência Kellyana (antecipação – investimento – encontro com o evento – confirmação ou refutação – revisão construtiva), Barros et al. (2007) investigaram a compreensão do conceito de difração de elétrons em alunos de cursos de Licenciatura em Física de uma universidade estadual em Campina Grande, PB (especificamente aqueles que cursavam disciplinas de Física Moderna e de Mecânica Quântica). Na fase de antecipação, utilizando pré-testes para averiguar as concepções, constataram que os alunos possuíam as mesmas dificuldades de compreensão dos conceitos e mesmas concepções para a difração de elétrons. Na fase de investimento, através da leitura de textos, não foi constatada mudança nas concepções. Somente na terceira fase do Ciclo, com a utilização de experimentos concretos e virtuais ativamente trabalhados pelos alunos, foi possível perceber que este procedimento mostrou ser relevante para o processo de mudança de concepção dos alunos.

Pereira (2008) apresentou uma investigação sobre o ensino de Física Quântica na formação inicial de futuros professores desenvolvida junto a uma disciplina da sétima etapa do curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Através de uma atividade de ensino centrada na exploração de um *software* que simula o interferômetro de Mach-Zehnder, utilizou o conceito de dualidade onda-partícula como eixo central das discussões em sala de aula. O foco da análise foi as tensões nos enunciados de estudantes, à luz do referencial sociocultural, procurando avaliar em que medida os enunciados dos estudantes se articulam à internalização de conceitos de Física Quântica com uso de instrumentos semióticos. Os resultados mostraram que as ações mediadas pelo uso do interferômetro virtual de Mach-Zehnder, como ferramenta cultural, auxiliaram os processos de compreensão por parte dos alunos, viabilizando a negociação, em sala de aula, de significados aceitos e compartilhados pela comunidade científica.

Nashon et al. (2008) consideram extremamente importante trabalhar o ensino de Física com aspectos de Ciência-Tecnologia-Sociedade (CTS) e acreditam que isto esteja sendo negligenciado nos currículos atuais dos cursos de formação de professores. Assim, através de aplicação de questionários, os autores constataram que a grande maioria dos professores em formação de uma província do Canadá tem dificuldade para trabalhar com tópicos relacionados à MQ, devido à falta de interesse dos estudantes e porque o tema é considerado fastidioso e de conteúdo abstrato. Assim, trabalharam com estes professores para a inserção de tópicos de CTS no ensino de MQ e, após análise dos dados coletados, os autores concluíram que tais professores consideram importante a utilização de CTS para desmitificar a Ciência e mostrar seu lado humano. Na opinião dos professores que participaram do estudo, com um ensino baseado em CTS o aluno pode ter uma verdadeira compreensão de como o conhecimento se desenvolve, como ele é estruturado e como pode ser aplicado.

Continuando um trabalho anterior, Fanaro e Otero (2008) propuseram, analisaram e implementaram uma Estrutura Conceitual de Referência para ensinar MQ a alunos do último ano do ensino secundário de uma escola argentina através do método de integrais de caminho de Feynman. Tal estrutura não trabalha com a seqüência histórica da MQ e é complementar ao formalismo canônico. Evitando a utilização do formalismo matemático da MQ, trabalharam os seguintes conceitos com auxílio de simulações em computador: distribuição de probabilidade, sistema quântico, caminhos alternativos, amplitude de probabilidade, soma de amplitudes de probabilidade, ação, constante de Planck e transição quântico-clássico. Analisando os resultados, as autoras concluíram que esta metodologia para o ensino de MQ é viável na instituição e perguntando-se se não seria aplicável a outros grupos e instituições.

2.2. Levantamento de Concepções acerca de Tópicos Fundamentais de MQ

Apesar de muitos trabalhos terem sido encontrados nesta categoria nas revisões anteriores citadas, somente um artigo específico sobre este tema foi localizado na presente revisão. Levantamentos parciais foram feitos também

em alguns dos artigos citados na primeira categoria (seções 2.1.1 e 2.1.2). Singh (2008a) fez um levantamento sobre a compreensão de conceitos e princípios de MQ por estudantes do início do curso de graduação em Física de sete diferentes universidades dos EUA e que ainda não tinham tido contato, no curso, com MQ. Para tal, o autor analisou e classificou as respostas de 202 questionários e entrevistou cinquenta dos estudantes que responderam aos mesmos. Tanto o questionário como as entrevistas abrangiam uma análise qualitativa dos seguintes temas: equação de Schrödinger dependente do tempo e independente do tempo, dependência temporal da função de onda, probabilidade de medida de energia e posição, identificação das autofunções para o poço quadrado infinito, representações gráficas dos estados possíveis para o poço quadrado finito e o formalismo associado ao experimento de Stern-Gerlach. A análise dos dados mostrou que as dificuldades apresentadas na compreensão desses temas são as mesmas para quase todos os estudantes. Dentre as dificuldades encontradas, destacam-se a consideração de que a equação de Schrödinger independente do tempo é a mais importante da MQ, o que implica em problemas na compreensão da evolução temporal dos estados quânticos, dificuldades relacionadas com o conceito de medida e de valores médios, dificuldades em determinar possíveis funções de onda (e sua forma) para um sistema quântico e problemas na distinção entre o espaço tridimensional e o espaço de Hilbert, entre outros.

2.3. Materiais de Consulta para Professores

Freire Jr. (2006) apresenta uma revisão de conceitos e princípios da MQ, baseando-se principalmente no emaranhamento quântico, começando com a publicação do Teorema de Bell (1965), tratando de suas motivações e do contexto em que estava inserido, e indo até os resultados experimentais obtidos por A. Aspect (1982). Para tal, o autor faz um histórico visando mostrar desde quando a filosofia definitivamente começa a fazer parte dos laboratórios de pesquisa e também apresenta alguns novos desafios que a MQ pretende resolver.

Analisando artigos, livros, manuais e publicações em geral no decorrer do século passado, Tampakis e Skordoulis (2007) apresentam um histórico

sobre o ensino de MQ na Grécia em nível superior. Segundo este estudo, o ensino de MQ na Grécia pode ser dividido em três períodos: até 1932, em que a MQ era esporadicamente mencionada e de forma distorcida; de 1933 até 1962, com a publicação de três livros de autores gregos⁹; e após 1962, com o surgimento de um curso autônomo enfocando diretamente a MQ. Os autores creditam este atraso na criação de uma disciplina específica de MQ a fatores científicos, sociais e ideológicos, estes dois últimos considerados de maior importância.

Velentzas et al. (2007) investigaram a utilização de experimentos mentais em livros-texto de Física e em livros de divulgação científica. Segundo os autores, a pesquisa em educação em ciências nesta área revelou que a utilização desses experimentos é muito poderosa e positiva para o aprendizado dos alunos, quando bem conduzida, estruturada e conflitante com as concepções prévias dos mesmos. Além disto, os estudantes consideram que as técnicas narrativas de apresentação dos experimentos são muito mais estimulantes para o aprendizado de MQ. Outrossim, este tipo de experimentação mostra ser uma ferramenta não só de pensamento (e construção) científico, mas também de comunicação e educação científica, com a finalidade de transformar o conhecimento científico em conhecimento público e escolar.

Organista et al. (2007) apresentam um conjunto de exemplos para a superposição de estados a serem utilizados para o ensino de MQ, tanto em nível médio como universitário. Tais autores crêem que a utilização de superposições clássicas (luz, vetores, etc.) pode servir de apoio para a compreensão do aspecto quântico. Como exemplos de superposição linear de estados quânticos, eles apresentam a discussão do gato de Schrödinger, a polarização de fótons e o spin, entre outros. Além dos exemplos, os autores também afirmam que é muito importante mudar o caráter da “intuição” para que se possa melhor compreender os conceitos quânticos.

Johansson e Milstead (2008) defendem que o primeiro contato com a MQ deve ser com o debate acerca do Princípio de Incerteza de Heisenberg.

⁹ Os livros de K. Papaiologos, A. Papatropeu e Th. G. Kouyioumtzeli são considerados como referência para o estudo de MQ na Grécia até hoje – no entanto, no início tais materiais eram camuflados com o rótulo de “Física Nuclear”.

Para tal, utilizam uma série de situações em que tal princípio é aplicado: difração de fenda única, energia de ponto zero, partículas mediadoras e decaimento alfa. Tomar o Princípio de Incerteza como ponto de partida para o ensino de MQ segundo eles, é melhor por não ser necessário introduzir os conceitos de função de onda e de superposição de estados. Por adotar tal simplificação, os autores reconhecem que podem existir algumas inconsistências com a teoria geral.

Após estudar interações discursivas em um ambiente virtual em uma disciplina de um curso de pós-graduação que enfatizava a epistemologia de Larry Laudan, Ostermann et al. (2008) perceberam que os alunos não conseguiam trazer exemplos da Física para esta epistemologia. Assim, os autores elaboraram um material de consulta visando melhorar a compreensão desta epistemologia, considerando a Física Quântica como uma tradição de pesquisa, segundo a própria definição de Laudan. Desta forma, contextualizando conceitos desta epistemologia com a Física Quântica, o processo do desenvolvimento científico pode ser melhor compreendido.

2.4. Utilização de Simulações em Computadores

Dada a falta de domínio das ferramentas matemáticas adequadas por parte dos alunos, Huggins (2007) apresenta uma proposta para o ensino de MQ em nível superior utilizando a análise de Fourier para introduzir o Princípio de Incerteza. A análise de Fourier é feita com auxílio de um programa de computador para simular um osciloscópio. O programa simula as distribuições de probabilidade para que seja possível a compreensão dos conceitos de MQ.

Após trabalhar por vários anos em cursos introdutórios de MQ, Belloni et al. (2007) elaboraram tutoriais que utilizam simulações em computadores para auxiliar a compreensão conceitual da forma das autofunções de energia e sua relação com a função energia potencial. Inicialmente, os autores propuseram a utilização do poço quadrado finito por ser um modelo para a descrição de semicondutores, conduzindo assim a aplicações da MQ. Após esta introdução, solicitaram aos alunos a criação de outros poços de potenciais para analisar a forma das autofunções de energia. Tal estratégia foi desenvolvida para que os alunos pudessem ter uma melhor compreensão da MQ, visto que a impressão

que geralmente fica nos estudantes é a de que a MQ é tão abstrata quanto a Matemática.

Utilizando simulações interativas em computadores, McKagan et al. (2008a) propõem que o ensino do modelo atômico de Bohr não é um obstáculo para o aprendizado do modelo atômico derivado da equação de Schrödinger. Segundo os autores, deve-se enfatizar a comparação dos modelos, apontando as principais diferenças e porque o segundo modelo supera o primeiro. Após desenvolver a pesquisa em quatro turmas distintas de engenharia da Universidade de Colorado, nos EUA, seus resultados mostram que a maior parte dos alunos utilizou o modelo de Schrödinger para descrever o átomo. Menos de 25% dos alunos utilizou somente o modelo de Bohr para esta descrição.

Singh (2008b) apresenta um estudo de caso baseado no desenvolvimento e avaliação de tutoriais interativos para o aprendizado de MQ. Tais tutoriais utilizam simulações em computador para que o estudante tenha um contato mais direto com o fenômeno quântico. As simulações dizem respeito à evolução temporal da função de onda, ao Princípio de Incerteza e ao interferômetro de Mach-Zehnder e foram avaliadas com auxílio de pré-testes e pós-testes. O autor conclui que tais tutoriais estimularam os alunos a buscar mais simulações, para melhor conhecer o assunto e que estes tutoriais podem ser usados como suplementos em cursos de MQ (de graduação ou não).

McKagan et al. (2008b) fazem uma revisão das 18 simulações desenvolvidas pelo Physics Education Technology (PhET) sobre MQ. Procuram mostrar a efetividade das simulações e apresentam algumas discussões sobre a forma de pensar dos estudantes. Também apresentam resultados do uso das simulações em sala de aula com considerações acerca do benefício proporcionado. Os autores acreditam que as simulações acarretam a transformação das concepções prévias em concepções cientificamente aceitas e que a visualização dos fenômenos e interação com os mesmos proporcionam verdadeiros *insights* na forma de pensar dos alunos.

3. Considerações Acerca da Revisão

Para complementar revisões anteriores (e.g. OSTERMANN e MOREIRA, 2000; GRECA e MOREIRA, 2001; PEREIRA, 2008), apresentou-se nesta dissertação uma revisão da literatura levando em conta artigos publicados em 2007 e parte de 2008, bem como alguns artigos não considerados por tais autores relativos ao período de 2000 até meados de 2008, sobre o ensino de MQ, tanto em nível médio como universitário. Diferentemente da revisão de Pereira (2008), boa parte dos projetos encontrados (47%) diz respeito à proposta de unidades didáticas para o ensino de MQ, sendo que dois terços destes tratam de trabalhos efetivamente implementados em sala de aula.

Sob a ótica da classificação de Pereira (ibid.), também se constatou uma grande quantidade de material de consulta para professores e um alto número de pesquisas em sala de aula, o que pode indicar que as propostas estão sendo implementadas e testadas, com vistas à atualização curricular.

Apesar de alguns dos trabalhos analisados estarem relacionados com a formação de professores, nenhum foi encontrado com estudos sobre o conceito de *estado* na MQ e somente um deles trata do conceito de *superposição linear*, porém não necessariamente em cursos de formação de professores. Embora estes sejam conceitos fundamentais, eles são, em geral, negligenciados pelos trabalhos que se preocupam com a formação de conceitos fundamentais pelos estudantes de nível superior de cursos introdutórios de MQ.

É importantíssimo salientar que, nos últimos anos, alguns livros foram publicados no país sobre a MQ. Como exemplos, têm-se os livros de Toledo Piza (2003), uma obra de fôlego sobre o assunto, e de Caruso e Oguri (2006), sobre FMC e MQ, com exaustivo apanhado histórico. Estes dois livros são considerados como referências para o estudo de MQ no país, sendo utilizados em cursos de graduação e pós-graduação. Há também livros que enfatizam as questões filosóficas e as interpretações da MQ, como os de Pessoa Jr. (2005) e obras que se propõem a complementar a teoria com fascinantes exemplos de conteúdos atuais decorrentes da MQ, como os de Oliveira (2005). Além disto, material visual, como simulações em computador, tem sido publicado sobretudo em centros universitários podendo, por exemplo, mencionar-se o

desenvolvido por Betz^{*}, relativo ao experimento de Stern-Gerlach e que compreende também um texto de apoio.

Os aspectos levantados por esta revisão da literatura e pelos trabalhos aqui analisados corroboram a pertinência dos objetivos desta pesquisa: averiguar as principais dificuldades encontradas pelos estudantes na compreensão dos conceitos de estado e superposição linear e propor situações que podem propiciar um melhor aprendizado destes conceitos.

^{*} Stern-Gerlach Applet. Disponível em <<http://www.if.ufrgs.br/~betz/quantum/SGPpor.htm>>. Acesso em: 18. nov. 2008.

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

1. Introdução

Neste capítulo são apresentados os aspectos mais importantes das teorias de dois autores que servem de marco teórico em ensino e aprendizagem para a pesquisa desenvolvida. Primeiramente, apresenta-se a teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e, em seguida, a teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. No final do capítulo, faz-se uma síntese da importância das duas teorias para a presente dissertação.

2. A Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel

A Teoria da Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel (1968, 2000) é uma das primeiras teorias diretamente preocupadas com a aprendizagem tal como ela ocorre na sala de aula, isto é, envolvida com o cotidiano da maioria das escolas. Resumidamente, esta teoria se ocupa do processo de apropriação de um corpo organizado de conhecimentos pelo aluno em situação formal de ensino.

2.1. Aprendizagem Significativa

A aprendizagem significativa é um processo no qual uma nova informação se relaciona de forma não-arbitrária e substantiva com algum aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, há uma interação do novo conhecimento com o já existente (MOREIRA, 1999a, p. 153).

Todo processo de aprendizagem é uma aquisição (e negociação) de significados e a *aprendizagem significativa* não é diferente. Para que ocorra esta aquisição/negociação de significados, duas importantes condições iniciais são consideradas essenciais (AUSUBEL, 2000, p. 1):

- 1) o material apresentado ao aprendiz deve poder se relacionar com uma parte adequada de sua estrutura cognitiva de forma não-arbitrária e não-literal;
- 2) a estrutura cognitiva do aprendiz deve conter idéias relevantes (chamadas subsunçores) com as quais o novo material pode se relacionar.

Um material que apresente as condições descritas na primeira condição é dito *potencialmente significativo*. Tal material, contudo, não pode garantir sozinho que ocorra a aprendizagem significativa. Para tanto, há necessidade de a segunda condição ser satisfeita.

Existe ainda outra condição para a ocorrência da aprendizagem significativa: o aprendiz deve apresentar uma pré-disposição para aprender. Porém, não se deve confundir pré-disposição com motivação. Podem existir situações em que o aprendiz não esteja motivado para aprender, mas predisposto. Isto acontece, por exemplo, quando o aluno necessita aprender determinado conteúdo para conseguir aprovação em algum exame ou quando não tem apreço pela disciplina. Nestes casos, o aluno pode aprender significativamente o novo conhecimento ou decorá-lo. De nada adianta o material ser potencialmente significativo se não existem aspectos relevantes na estrutura cognitiva do aprendiz com os quais a nova informação possa se relacionar ou, se existem tais aspectos, eles não são suficientes sem a pré-disposição de aprender significativamente.

2.2. Aprendizagem Mecânica

Em contraponto à aprendizagem significativa, Ausubel propõe a *aprendizagem mecânica* (ou automática). Neste tipo de aprendizagem as novas informações são apreendidas praticamente sem interagir com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva. A nova informação é armazenada de maneira literal e arbitrária e o aprendiz não atribui significados ao que aprende.

A memorização de expressões matemáticas, leis e conceitos é um exemplo típico de aprendizagem mecânica (MOREIRA, 1999b, p. 14). O estudo em vésperas de prova e que serve somente para a prova também se

caracteriza como aprendizagem mecânica. O esquecimento de tais tópicos ocorre rapidamente após sua “utilização” (ibid.).

Apesar de existir uma distinção entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica, a relação entre elas não é dicotômica. Podem, inclusive, existir casos em que a aprendizagem mecânica é necessária para a formação inicial de “conhecimentos-âncora” que podem conduzir, posteriormente, à aprendizagem significativa.

2.3. Subsunçores

Segundo Ausubel (1968, p. VI), se fosse possível isolar uma única variável no processo de aprendizagem, esta seria o conhecimento prévio, sem dúvida o mais importante para a ocorrência da aprendizagem significativa. A partir desta idéia, pode-se avaliar que o aprendizado do aluno é determinado por aquilo que ele já sabe, ou seja, pela sua estrutura cognitiva.

A um conhecimento já existente na estrutura cognitiva do aprendiz, em condições de ser usado para atribuir significados a novos conhecimentos, em um processo interativo, Ausubel denomina *conceito subsunçor*, ou simplesmente *subsunçor*. Sem a existência de subsunçores adequados, não há condições para a ocorrência de aprendizagem significativa.

Um subsunçor, portanto, é um conceito, uma idéia, ou uma proposição já existente na estrutura cognitiva, capaz de servir de “ancoradouro” a uma nova informação (MOREIRA, 1999b, p. 11). Desta forma, a nova informação passa a ter significado para o sujeito.

Considera-se, então, que os novos conceitos, idéias e proposições podem ser aprendidos significativamente (e retidos) na medida em que outros conceitos, idéias e proposições relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do aprendiz e funcionem como ponto de ancoragem para as novas informações (ibid.).

2.4. Assimilação

Aprender significativamente não implica uma ligação duradoura entre o novo conhecimento e a estrutura cognitiva do aprendiz. Na aprendizagem

significativa, o processo de aquisição de conhecimento pelo aprendiz resulta em modificação tanto do conhecimento apresentado como dos aspectos relevantes existentes em sua estrutura cognitiva. Este processo é o que a *teoria da assimilação* proposta por Ausubel descreve. O termo *ancoragem* é uma metáfora utilizada para designar a interação seletiva entre o novo material e as idéias existentes na estrutura cognitiva.

Não é apenas o novo conhecimento que sofre modificações ao ser incorporado à estrutura cognitiva, mas também os aspectos relevantes da estrutura cognitiva do aprendiz. A seguir, apresenta-se um esquema que representa de modo simples o processo de assimilação de conhecimento.

$$\boxed{a + A \rightarrow a'A' \rightarrow a' + A' \rightarrow A'}$$

No processo de assimilação, um novo conhecimento **a** interage com o subsunçor adequado **A** e resulta num conhecimento formado pela aglutinação das duas informações, denotado por **a'A'**. Note-se que, na interação, os dois conhecimentos sofrem alteração, passando **a** e **A** para **a'** e **A'**, respectivamente. Esta é a fase de assimilação do novo conhecimento. A fase seguinte é denominada *fase de retenção* do conhecimento, que acontece quando os dois conhecimentos se dissociam e resultam em **a' + A'**. Por fim, sobrar  somente um *resíduo* **A'** que   o subsunçor **A** com as altera es sofridas por ter sido “exposto”   nova informação. A fase de reten o e a de forma o do resíduo   conhecida como *assimila o obliteradora*. Esta assimila o salienta que   natural ocorrer um esquecimento do que se aprende, pois freqüentemente não aparece, explicitamente, no final do processo de assimila o alguma informa o sobre o recente corpo de conhecimentos no qual o aprendiz foi instr ido. Isto não significa que o aluno esqueça totalmente o que aprendeu, que   o que fica denotado no resíduo **A'**. Apesar de tal esquecimento, o resíduo indica que se pode aprender novamente o conteúdo de forma mais fácil, dinâmica e sistemática do que em compara o a como foi aprendido inicialmente. Facilitar o re-acesso   informa o   o papel do resíduo **A'**, que nada mais   do que o subsunçor **A** modificado ao longo do processo de aprendizagem.

2.5. Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora

Após ser determinado o tema a ser trabalhado, o processo de aprendizagem significativa pode lançar mão de dois processos programáticos para facilitar a aprendizagem: diferenciação progressiva e reconciliação integradora.

A *diferenciação progressiva* pressupõe que o conhecimento seja organizado em uma estrutura de tópicos, sendo possível partir de idéias gerais e chegar a aspectos mais específicos. Neste processo, primeiramente as idéias mais gerais e inclusivas são apresentadas e, então, diferenciadas progressivamente em termos de detalhe e especificidade (AUSUBEL, 1968, p. 152). Assim, pretende-se que os alunos consigam compreender os pormenores de determinado conteúdo partindo de um todo mais inclusivo.

Em alguns casos, o tema precisa partir de pontos específicos de determinado campo de conhecimento para somente depois chegar a um todo mais inclusivo; necessita-se, então, utilizar a *reconciliação integradora*. Esta estratégia propõe que a instrução explore relações entre idéias, aponte similaridades e diferenças importantes e reconcilie discrepâncias reais ou aparentes (Moreira, 1999a, p. 161). Dificilmente se encontra esta estratégia em livros-texto. Tais livros, em sua maioria, costumam partir de um todo mais geral para um conhecimento mais particular seguindo uma estrutura de tópicos, sem remeter a uma conexão entre os aspectos gerais e os pormenores. Ausubel reconhece que utilizar a reconciliação integradora não é tarefa fácil e sugere organizar o ensino “descendo e subindo” nas estruturas conceituais hierárquicas à medida que a nova informação vai sendo apresentada ao aluno (MOREIRA, 1999b, p. 51-52).

2.6. Organizadores Prévios

Se a aprendizagem significativa trabalha essencialmente com o modo pelo qual a nova informação se relaciona com os subsunçores, cabe aqui a questão: de onde vêm os subsunçores? Segundo Moreira (1999, p. 154-155), são várias as respostas para esta pergunta, porém nenhuma definitiva.

Nas situações em que não existem subsunçores adequados para a compreensão da nova informação, Ausubel sugere a utilização de *organizadores prévios* em substituição a tais subsunçores, para somente depois se apresentar a nova informação ao aluno. Um organizador prévio é um recurso pedagógico que ajuda a suprir a deficiência de subsunçores necessários para que ocorra aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2000, p. 11), isto é, o organizador deve servir de ponte entre aquilo que o aluno já sabe e aquilo que deveria saber para que pudesse aprender de forma significativa. No caso da MQ, é interessante que os alunos tenham conhecimentos de vetores, ondas e superposição de onda, que podem ser facilmente conduzidos à generalização dos espaços vetoriais.

Os organizadores prévios devem ser apresentados em um nível de abstração, generalidade e inclusividade mais alto que o novo material a ser aprendido (ibid.). Resumos costumam apresentar o mesmo nível de abstração, generalidade e inclusividade que o próprio material, salientando alguns pontos em troca da omissão de informações menos importantes. Logo, apesar de ser um material introdutório, o organizador prévio não deve ser visto como um resumo.

A utilização dos organizadores prévios é baseada principalmente em três pontos (op. cit., p. 11-12):

- 1) a importância de ter idéias relevantes e apropriadamente estabelecidas na estrutura cognitiva para tornar as novas idéias potencialmente e logicamente significativas, de fato, em novas idéias significativas;
- 2) as vantagens em utilizar idéias mais gerais e inclusivas, convenientemente modificadas para proporcionar maior relevância ao novo material;
- 3) os organizadores prévios buscam tanto identificar idéias já existentes e relevantes da estrutura cognitiva, como indicar explicitamente a relevância destas idéias para si e para o entendimento do novo material.

Os organizadores prévios também são recursos pedagógicos capazes de ajudar a implementar a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora (op. cit., p. 148).

3. A Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud

A Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud não é voltada diretamente para a sala de aula como a de Ausubel, porém apresenta implicações imediatas a ela. Por ter sido aluno de Piaget, Vergnaud descreve, em sua teoria, como ocorre o processo de desenvolvimento cognitivo, porque, segundo ele, para se entender o conhecimento, é útil e necessário estudar seu desenvolvimento no sujeito (VERGNAUD, 1996, p. 112).

A teoria de Vergnaud é uma teoria psicológica de conceitos, ou, ainda, uma teoria cognitivista do processo de conceitualização do real. Assim, ela é uma teoria que supõe a *conceitualização* como o núcleo do desenvolvimento cognitivo (op. cit., p. 118). Os principais conceitos desta teoria são os de *esquema*, de *conceito*, de *situação* e de *campo conceitual*.

3.1. Esquema

Enquanto Piaget propõe que é a partir da interação sujeito-objeto que ocorre o desenvolvimento cognitivo, Vergnaud afirma que o mais importante é a interação esquema-situação e, assim, analisa o processo de desenvolvimento cognitivo a partir do “*sujeito-em-situação*”. Vergnaud ainda afirma que se deve considerar a situação-problema ao trabalhar com os esquemas porque é com ela que estes lidam, não somente com objetos (op. cit., p. 113).

Vergnaud considera que, para analisar a cognição, é fundamental trabalhar com o conceito de *esquema* (ibid.). Vergnaud herdou de Piaget este conceito e adaptou-o em sua teoria. Também Vygotsky exerceu grande influência sobre Vergnaud, pois considera que pontos cruciais, como a linguagem e os símbolos, foram praticamente negligenciados por Piaget (op. cit., p. 118).

Esquema é a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações (VERGNAUD, 1993, p. 2). É bom enfatizar que não é o comportamento que é invariante, mas sua organização (GRECA e MOREIRA, 2002, p. 37). É nos esquemas que se deve buscar os conhecimentos-em-ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que

fazem com que a ação do sujeito seja operatória (VERGNAUD, 1993, p. 2). Esquemas são formados pelos seguintes componentes (VERGNAUD, 1996, p. 114):

- 1) metas e antecipações; que são os objetivos do esquema;
- 2) regras de ação e controle; regras do tipo “se...então”, que servem para generalizar e regular comportamentos;
- 3) invariantes operatórios; que são conhecimentos contidos nos esquemas e que servem para categorizar informação e inferir, a partir desta, metas e comportamentos relevantes;
- 4) possibilidades de inferência; que auxiliam na construção de antecipações e regras para situações.

A importância dos esquemas fica mais evidente ao lembrar que os alunos constantemente estão sendo expostos a novas situações e que eles devem conseguir lidar com elas. Para isso, os estudantes recorrem aos esquemas que já construíram, combinando-os de forma que consigam lidar com as situações e, conseqüentemente, conduzir à adaptação. Este processo pode não ser realizado em uma primeira tentativa e, portanto, os alunos devem continuar buscando a construção de novos esquemas, com ou sem o auxílio do professor ou de outros estudantes (VERGNAUD, 1998, p. 173).

3.2. Conceitos

Conforme já mencionado, Vergnaud coloca a conceitualização no centro do processo de desenvolvimento cognitivo. Assim, afirma que um indivíduo se desenvolve cognitivamente na medida em que atribui significado aos conceitos.

Um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se o interesse é no seu ensino e na sua aprendizagem (VERGNAUD, 1993, p. 1). No caso do ensino de MQ, deve-se utilizar um grande número de situações nas quais os principais conceitos são aplicados para que os alunos possam compreendê-los. Os experimentos de dupla fenda e de Stern-Gerlach são situações a serem utilizadas para auxiliar o aluno a compreender conceitos inerentes a estados de objetos quânticos, como o de incompatibilidade de alguns observáveis.

Um conceito deve ser analisado levando-se em conta sua constituição (VERGNAUD, 1998, p. 177). Segundo Vergnaud (1990, p. 145), um *conceito* pode ser definido como um tripé de conjuntos, $C = (S, I, R)$, em que:

- S representa o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (o *referente*);
- I representa o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito (o *significado*);
- R representa o conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para indicar e representar estes invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas (o *significante*).

O primeiro conjunto representa a realidade e os outros dois estão relacionados com a representação de tal realidade (MOREIRA, 2002, p. 18).

É através de situações e de problemas a resolver que um conceito adquire significado (VERGNAUD, 1990, p. 135). *Situação* é entendida como uma tarefa ou uma combinação delas. Ao tratar o processo de conceitualização como a pedra angular da cognição, Vergnaud considera que a análise de tal processo passa pelo par esquema-situação. Além disto, este par possui uma relação dialética. Um conceito se torna significativo através de uma variedade de situações, mas o sentido não está na situação em si (VERGNAUD, 1993, p. 18). O sentido é uma relação entre a situação e os esquemas.

Situações didáticas são consideradas ocorrências interessantes e ricas (op. cit., p. 17). A organização de uma situação didática supõe a análise simultânea das funções epistemológicas de um conceito, da significação social das áreas de experiência a que ele se refere, do desempenho dos atores da situação didática, dos resultados desse desempenho, do contrato e da transposição (ibid.).

Invariantes operatórios são conhecimentos contidos nos esquemas, também chamados *conhecimentos-em-ação*. Os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação são invariantes operatórios e, por isso, são componentes essenciais dos esquemas (VERGNAUD, 1998, p. 167). Um *teorema-em-ação* é uma proposição tida como verdadeira sobre o real e um *conceito-em-ação* é uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante (op. cit., p. 168). Entre os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação há uma relação dialética,

pois os conceitos são ingredientes dos teoremas e os teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos (VERGNAUD, 2007, p. 294).

Não é preciso enfatizar que a MQ possui conceitos e princípios rigorosamente definidos e que são extremamente importantes. No entanto, alguns conceitos clássicos podem ser perigosos se aparecerem no decorrer do ensino de MQ. O conceito de orbital, por exemplo, pode ser materializado pelos alunos para o conceito de órbita de modo a simplificar o conteúdo, apesar de tais conceitos não serem análogos. Assim, conceitos quânticos precisam ser devidamente trabalhados de forma a não propiciar o aparecimento de tais aproximações simplistas.

3.3. Campos Conceituais

Um *campo conceitual* pode ser definido como um grande conjunto, informal e heterogêneo, de situações e problemas cuja análise e tratamento requerem diversas classes de conceitos, procedimentos e representações simbólicas que se conectam umas com outras (GRECA e MOREIRA, 2002, p. 35).

Segundo Vergnaud (ibid.), o conhecimento está organizado em campos conceituais que o aprendiz domina ao longo de um expressivo período de tempo, através da maturidade, experiência e aprendizagem. Não será em apenas algumas aulas que um aluno conseguirá captar o conhecimento presente em determinado conteúdo. Dependendo do tema, o aluno pode levar anos para dominar um campo conceitual.

Considerar a MQ não relativística como um campo conceitual é dar a ela sua devida importância. Na estruturação deste campo conceitual aparecem ramificações que podem, de fato, transcender a teoria-base. É o caso, por exemplo, da chamada segunda quantização, em que é abandonada a restrição não relativística e a conseqüente imposição da conservação do número de partículas envolvidas nos processos. Por exemplo, a Eletrodinâmica Quântica, que descreve interações entre partículas carregadas, com a mediação de fótons e a Cromodinâmica Quântica, em que são estudadas as interações fortes, são teorias desenvolvidas após a compreensão da estrutura da MQ.

Simplificadamente, o campo conceitual é visto como um conjunto de muitas situações que requerem, por sua vez, o domínio de vários conceitos, procedimentos e representações de naturezas distintas (MOREIRA, 2002, p. 15). Desta forma, a Física se constitui em um imenso campo conceitual que pode ser fragmentado em inúmeros outros campos conceituais, como, por exemplo, a Mecânica Clássica, a Termodinâmica, o Eletromagnetismo, a MQ, etc. O ensino dos campos conceituais não pode ser visto como o ensino de um sistema de conceitos nem como conceitos isolados.

3.4. O Papel do Professor

Segundo a teoria de Vergnaud, o principal papel do professor é selecionar as situações-problema (em quantidade e nível de dificuldade) que dêem sentido aos conceitos em uma relação dialética.

O professor é, também, um importante mediador no longo processo de domínio de um campo conceitual pelo aluno (MOREIRA, 2002, p. 17). As concepções prévias dos alunos contêm teoremas e conceitos-em-ação que podem não ser teoremas e conceitos científicos, mas que podem evoluir para eles. É papel do professor tornar explícito o conhecimento implícito do aluno para que este possa ser modificado para o conhecimento compartilhado pela comunidade científica. Essa transformação do conhecimento implícito em explícito deve ser feita sem nunca subestimar ou desvalorizar aquilo que o aluno já sabe (op. cit., p. 21). Nota-se que, segundo a teoria de Vergnaud, para que se possa aprender é necessário que haja mediação, quer com o professor quer com os outros alunos (VERGNAUD, 1996, p. 118).

4. Considerações Acerca do Marco Teórico

Analisando as implicações educacionais da teoria de Ausubel relacionadas ao ensino de MQ, observa-se que a maioria dos estudantes está acostumada a pensar segundo a vivência cotidiana e a Mecânica Clássica, mas os subsunçores da Mecânica Clássica não são adequados para utilização no aprendizado da MQ, principalmente porque as duas teorias são incomensuráveis, no sentido kuhniano do termo. Logo, nesta pesquisa se evita

a utilização de conceitos relacionados à Física Clássica, crendo-se que tal utilização pode, na verdade, levar a obstáculos representacionais pelos estudantes (MOREIRA e GRECA, 2004, p. 27).

A idéia, então, é evitar o uso de conceitos da Mecânica Clássica, para que os conceitos da MQ possam ser interpretados com um “pensamento quântico”. Desta forma, o ideal é que, inicialmente, os estudantes construam, por um processo de formação de conceitos, alguns subsunçores adequados para o prosseguimento no estudo em MQ.

Em particular, para evitar os obstáculos epistemológicos, deve-se buscar situações para as quais os alunos não tenham conceitos clássicos nos quais se apoiar, ou seja, situações em que eles não possam usar conhecimentos prévios inadequados que possam dificultar a aprendizagem significativa (MOREIRA, 2002, p. 19). A MQ e a Mecânica Clássica apresentam continuidades, mas para entender uma é preciso estabelecer determinadas rupturas com a outra. Greca e Herscovitz (2005) também recomendam que a abordagem quântica aos princípios quânticos fundamentais seja feita desde o primeiro contato com a MQ, buscando assim um desprendimento da Mecânica Clássica.

Quando se segue Vergnaud, que afirma que o desenvolvimento cognitivo ocorre a partir do momento em que o sujeito trabalha com a *conceitualização* do mundo em que vive, tem-se que se deve propor o máximo de situações em que o aluno consiga construir os conceitos.

Outro grande desafio ligado à idéia de campos conceituais da Ciência, em particular na Física, diz respeito à atribuição dos mesmos significados para determinados conceitos em contextos diferentes. Conceitos como o de calor e o de força são comuns no cotidiano, mas possuem, neste contexto, significados diferentes dos significados científicos e são utilizados pelos alunos nas salas de aula sem nenhuma transformação ou adaptação. Devido à veiculação de tópicos de MQ por não especialistas em filmes, livros e palestras, existe o risco de acontecer algo semelhante com tal teoria. Conceitos de MQ, que exigem rigor em suas definições, podem ser “transformados” em algo mais simples no cotidiano, podendo tornar-se obstáculos pedagógicos para o ensino de MQ. Assim, quanto antes os estudantes de ensino médio ou superior tiverem

contato com a MQ na sua formação, melhor será para o ensino de Física como um todo.

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA

1. Introdução

Neste capítulo, são apresentadas as metodologias de pesquisa e de ensino utilizadas no presente estudo. Tais abordagens compreendem a forma com que a pesquisa foi realizada e o modo como os dados foram analisados.

2. Metodologia de Pesquisa

Na apresentação da metodologia de pesquisa, mostra-se o delineamento adotado na realização da pesquisa. Pode-se adiantar que se trata de uma pesquisa qualitativa do tipo *estudo de caso*.

2.1. A Pesquisa Qualitativa

Segundo André (1998, p. 17), a *pesquisa qualitativa* nasce da oposição à visão empiricista da ciência, buscando a interpretação em lugar da mensuração, a descoberta em lugar da constatação, valorizando a indução e admitindo que fatos e valores estão intimamente relacionados, tornando inaceitável uma posição neutra do pesquisador.

Conforme Moreira (2003, p. 118), embora o uso de técnicas qualitativas de pesquisa possa ser encontrado em métodos antropológicos no início do século passado, sua utilização no ensino passou a ser mais acentuada nas últimas três décadas.

A pesquisa qualitativa sofre influência de várias correntes sociológicas, algumas delas citadas abaixo.

- *Fenomenologia*: enfatiza os aspectos subjetivos do comportamento humano e afirma que é preciso entrar no mundo que se deseja entender.
- *Etnometodologia*: estuda como os indivíduos compreendem e estruturam o seu dia-a-dia.

- *Etnografia*: tentativa de descrição de uma cultura.

Especificamente, a pesquisa qualitativa que se preocupa com o ensino em sala de aula é um fenômeno recente na pesquisa educacional (ERICKSON, 1986, p. 124).

Características da Pesquisa Qualitativa

Atualmente, os pesquisadores concordam a respeito de algumas características comuns a todo tipo de investigação que pode ser classificada como qualitativa. A principal destas características é a de que o pesquisador deve estar imerso no fenômeno de interesse, isto é, deve estudar a realidade em seu contexto original, do modo como ocorre, tentando interpretar os fenômenos de acordo com os significados que têm para as pessoas envolvidas. Isso implica a utilização de uma grande quantidade de material que descreve a rotina e as situações problemáticas e seus significados na vida das pessoas.

A pesquisa qualitativa, segundo Erickson (op. cit., p. 121), envolve: (a) participação ativa, e por um grande período de tempo, no campo de estudo; (b) anotações cuidadosas do que acontece no campo de estudo juntamente com outras fontes de evidência; (c) análise reflexiva de todos os registros obtidos.

A pesquisa qualitativa supõe que os seres humanos criam interpretações do ambiente físico e, também, interpretações comportamentais do ambiente que os rodeia (op. cit., p. 126). Através da cultura, eles acabam compartilhando *significados*, que podem ser *denotativos* (compartilhados por toda a comunidade) ou *conotativos* (idiossincráticos). Isto implica que cada objeto ou evento dentro de uma cultura pode ter significados diferentes para cada indivíduo e para a sociedade.

O pesquisador qualitativo utiliza a retórica persuasiva, descritiva e detalhada para dar credibilidade ao seu trabalho. Não há grande preocupação com estatísticas, mas sim com transcrições, documentos, exemplos e comentários interpretativos. A utilização de Estatística é dispensável na pesquisa qualitativa, porém sua utilização como forma de validação e confirmação dos resultados não é vedada.

O resultado final de uma pesquisa qualitativa é a construção de um *universal concreto* através do estudo detalhado de um caso e de sua comparação com outros, estudados com igual detalhe. Não há busca por generalização e, sim, por particularização.

Rodríguez, Gil e García (1996, p. 38) afirmam que, definitivamente, não há “uma” investigação qualitativa, e sim múltiplos enfoques cujas diferenças fundamentais estão marcadas pelas escolhas tomadas em cada um dos níveis ontológico, epistemológico, metodológico e técnico. A adoção de uma ou outra alternativa determinará o tipo de estudo qualitativo que se realizará.

No âmbito da pesquisa qualitativa, podem ser analisadas separadamente inúmeras metodologias importantes. Neste trabalho, utiliza-se o estudo de caso, cujas características são descritas a seguir.

2.2. Estudo de Caso

O chamado *estudo de caso* é o estudo de uma situação específica, isto é, o estudo de uma *instância singular* que merece ser investigada. Tal instância pode referir-se a um fenômeno, uma pessoa ou um grupo.

Este tipo de pesquisa vem sendo utilizado há muito tempo por diferentes profissionais das áreas da saúde, das ciências humanas, administrativas e jurídicas (ANDRÉ, 1998, p. 30). Contudo, a aplicação de estudos de caso na Educação é recente e foca uma escola, uma sala de aula, etc. (ibid.).

Serrano (apud MOREIRA, 2002, p. 34) lista as principais características de um estudo de caso:

- *particularização*: centra-se na situação, evento, programa ou fenômeno particular;
- *descrição*: o produto final é uma descrição rica e densa do objeto de estudo;
- *heurística*: esclarece a compreensão do leitor quanto ao objeto de estudo;
- *indução*: baseia-se no raciocínio indutivo. As teorias, princípios e conceitos surgem do exame dos dados recolhidos no contexto.

Moreira (2002, p. 35) considera o estudo de caso interpretativo como um bom método de chegar a uma teoria a partir de dados descritivos muito ricos.

Stenhouse (apud MOREIRA, 2002, p. 35) propõe que um estudo de caso pode ser classificado como: (a) *etnográfico* (estuda profundamente uma entidade particular); (b) *investigação-ação* (busca uma mudança no caso estudado); (c) *avaliativo* (avalia programas de forma mais rápida que a etnografia); (d) *educativo* (visa melhorar a prática educacional).

Em suma, o estudo de caso busca retratar a realidade de forma profunda e o mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, mas não permite a manipulação de variáveis nem favorece a generalização (FLORENTINI, 2006, p. 110).

2.3. O Caso Estudado e as Etapas da Pesquisa

A presente pesquisa se constitui em um estudo de caso tipo etnográfico, dividido em três etapas de desenvolvimento. Como as etapas foram apresentadas em diferentes contextos, cabe analisá-las separadamente. O fenômeno estudado é o ensino de primeiros princípios da MQ e suas implicações.

As três etapas da pesquisa são: (a) elaboração e apresentação de três minicursos; (b) elaboração e apresentação de curso de 18 horas ministrado na Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), em São Leopoldo, RS; (c) revisão do material apresentado no curso ministrado na UNISINOS e apresentação de curso de 20 horas na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), em Porto Alegre, RS. A população-alvo dos cursos e minicursos compreendeu alunos universitários e professores de Ensino Médio.

A primeira etapa da pesquisa foi desenvolvida através da apresentação de três minicursos, em duas ocasiões distintas, com a finalidade de analisar a viabilidade da proposta e verificar se as sugestões iniciais de situações-problema interessavam e estimulavam os alunos para o aprendizado de MQ. O primeiro minicurso foi apresentado no II Encontro Estadual de Ensino de Física (II EEEFis), realizado de 13 a 15 de setembro de 2007 no Instituto de Física da UFRGS, em Porto Alegre, RS. Este minicurso foi apresentado em três dias com duas horas de duração cada, totalizando seis horas. Ao todo, foram 22 participantes, entre professores de ensino médio em exercício de diversas

idades e alunos em final de curso de Licenciatura em Física, constituíram o público-alvo do presente estudo.

Os outros dois minicursos, de quatro horas cada, foram apresentados na VII Semana da Física, realizada nos dias 19 e 20 de setembro de 2007 no Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), em Joinville, SC. Os participantes, nesse caso, eram alunos do curso de Licenciatura em Física da mencionada Universidade. O número de participantes foi de 23 em cada uma das turmas, sendo os minicursos ministrados nos mesmos dias para os dois grupos.

A segunda etapa da pesquisa ocorreu após uma análise do desenrolar dos minicursos em que foram investigados seus pontos positivos e negativos. Preparou-se, então, um Curso de Extensão com duração de dezoito horas divididas em seis encontros. Tal curso foi ministrado na Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), em São Leopoldo, RS, aos sábados pela manhã durante os meses de outubro e novembro de 2007.

Os dez participantes efetivos deste curso eram todos alunos de Licenciatura em Física da própria Universidade. É bom salientar que o público deste curso era heterogêneo. Como se tratava de uma atividade não-obrigatória, para que se atingisse um número razoável de participantes foi permitida a inscrição de alunos de quaisquer semestres do curso de Licenciatura mencionado, sem a exigência de pré-requisitos. Assim, participaram da atividade tanto alunos do último semestre, quanto do primeiro.

A terceira e última etapa desta pesquisa foi desenvolvida através de atuação em uma disciplina semestral do currículo do curso de Licenciatura em Física-Diurno da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), a saber, "A Física do Século XX-A" (FIS01056), ministrada pela Professora Dra. Naira Maria Balzaretto. Ao todo, ocorreram dez encontros, de duas horas cada, nos meses de abril, maio e junho de 2008, em que foi possível implementar a proposta e averiguar o aprendizado dos tópicos abordados. Pontos positivos detectados no curso realizado na UNISINOS foram salientados e pontos negativos foram alterados ou excluídos.

Apesar de se tratar de uma disciplina obrigatória, o semestre em que era oferecida não era o da seriação aconselhada, havendo apenas quatro alunos matriculados, que se constituíram nas personagens de estudo da pesquisa. O

pequeno número de alunos possibilitou uma análise individual do desenvolvimento dos alunos. Além de pouco numeroso, o público deste curso era bastante homogêneo, situação oposta à encontrada na UNISINOS. De fato, todos os alunos estavam regularmente matriculados no mesmo semestre do curso de Licenciatura em Física da UFRGS.

3. Metodologia de Ensino

Para que os alunos pudessem melhor acompanhar o desenrolar das atividades propostas ao longo do curso, foi desenvolvido material de apoio utilizado nas três etapas da pesquisa. A cada etapa, este material era alterado conforme necessário. Como a duração dos minicursos era menor que a dos cursos, o material de apoio correspondente abrangia um número menor de temas.

O material de apoio foi elaborado pensando-se em alunos universitários sem pré-requisitos de MQ. O material inicia com uma discussão geral de experimentos de dupla fenda para ondas e partículas clássicas e para elétrons (partículas quânticas), a fim de motivar os estudantes para o aprendizado dos conceitos de MQ. Além disto, no início dos cursos são apresentados alguns tópicos preparatórios que servem de “âncoras” para o aprendizado de conceitos relativos a sistemas quânticos, tais como superposição de ondas e superposição de vetores (geométricos), com vistas à generalização para os vetores de espaços lineares. Os espaços lineares podem ser considerados como organizadores prévios para parte do conteúdo a seguir.

O material foi recursivamente elaborado, ou seja, ao longo do desenvolvimento das etapas da pesquisa foi sendo avaliado e reescrito. A última versão, utilizada no curso da UFRGS, pode ser encontrada no Apêndice I. Inicialmente (na instância dos minicursos), o material continha somente alguns tópicos sobre os postulados mais básicos da MQ, sobre estados de sistemas quânticos e superposição linear de estados quânticos. A exigüidade do tempo nos minicursos ditou esta conduta que, ademais, serviu para avaliar se a proposta sugerida para abordar conceitos de MQ era apropriada e ser ampliada para adoção nos cursos.

A seguir, apresenta-se o sumário do material de apoio mais amplo, assinalando-se com asterisco os conteúdos desenvolvidos somente nos cursos.

Fundamentos de Mecânica Quântica	
1. Introdução	
2. Superposição Linear	
	<i>Experimentos de Dupla Fenda</i>
	<i>Superposição de Ondas</i>
	<i>Superposição de Vetores do Plano Real</i>
	<i>Espaços Lineares</i>
	<i>Estados Quânticos e Observáveis</i>
3. Postulados da Mecânica Quântica	
	<i>Superposição Linear de Estados</i>
	<i>Spin e Experimento de Stern-Gerlach</i>
	<i>Medições e Operadores</i>
	<i>Estados de um Sistema Quântico e Observáveis</i>
	<i>Compatibilidade de Observáveis*</i>
	<i>Valores de Medidas*</i>
	<i>Probabilidades de Ocorrência de Valores nas Medidas</i>
	<i>Alteração do Estado do Sistema pela Medida*</i>
	<i>Evolução Temporal dos Estados Quânticos*</i>
	<i>Efeitos da Superposição Linear na Dependência Temporal dos Estados Quânticos*</i>
4. Emaranhamento Quântico	
5. Criptografia Quântica	
	<i>O Protocolo BB84</i>
	<i>Outros Protocolos de Criptografia Quântica</i>
	<i>A Utilização da Criptografia Quântica</i>

3.1. Metodologia das Aulas

Todas as aulas foram ministradas através de metodologia expositiva e dialogada, com auxílio de um projetor multimídia para dinamizar as apresentações. No início de cada curso salientou-se que os alunos teriam total liberdade para apresentar questionamentos e comentários que julgassem pertinentes no decorrer do mesmo. Além disto, no transcorrer das atividades,

provocava-se a participação dos estudantes com intervenções do tipo “pense” e similares.

Lançou-se, também, mão de simulações em computador (*applets*) para motivar os alunos e enriquecer as exposições. Este material estava diretamente relacionado aos conteúdos e inserido em instâncias adequadas, buscando, também, promover certo ritmo de aprendizado. Tais simulações proporcionam, de forma ágil, a “visualização” de alguns fenômenos quânticos (e conseqüentemente a compreensão do assunto). Foram usadas simulações dos experimentos de superposição de ondas, de experimentos de dupla fenda (com muitas ou poucas partículas), do experimento de Stern-Gerlach, da evolução temporal dos sistemas quânticos, entre outros.

Também foi elaborado e apresentado em aula, material computacional que trata da construção de ondas localizadas (tipo função delta) a partir da superposição de ondas não localizadas (tipo função seno). A finalidade deste material era a de promover a “ponte” entre subsunçores e os novos conhecimentos a serem captados.

No decorrer dos cursos, além dos exercícios propostos no material de apoio, foram sugeridos outros, baseados em situações-problema, para que os alunos pudessem efetivamente dar significado aos conceitos discutidos em sala de aula.

4. Coleta de Dados

Em todas as etapas foram coletados dados que, em uma análise posterior, visassem responder às questões da pesquisa.

Na etapa referente aos minicursos, os questionamentos levantados pelos alunos, suas reações e mesmo expressões faciais perante tópicos intrigantes ou difíceis e seus comentários espontâneos a respeito do interesse pelo curso foram registrados em um diário de bordo.

No curso de extensão oferecido na UNISINOS, também foram feitos apontamentos referentes às atitudes dos alunos perante os tópicos apresentados, que foram registrados em um diário de bordo. Em três

oportunidades, foram aplicados questionários⁹ para avaliar conhecimentos prévios sobre os tópicos que viriam a ser apresentados.

Ao final de algumas das aulas deste curso, foram propostas listas de exercícios¹⁰ para que os alunos pudessem aplicar os princípios da MQ em situações-problema. Eventuais dúvidas apresentadas pelos alunos eram discutidas em sala de aula pelo professor e alunos ou então expostas e debatidas via correio eletrônico, para que o contato com o curso não ocorresse somente em aula. Como parte da avaliação do aproveitamento dos alunos no curso, foi solicitada a entrega da última lista de exercícios proposta, a saber, a lista de 27/10/2007.

Como última atividade deste curso, foi feita uma avaliação escrita¹¹ sobre os conteúdos apresentados em seu transcorrer. Neste mesmo dia, após a avaliação, foram realizadas entrevistas individuais com o intuito de colher opiniões sobre o curso e, através de um diálogo aberto, verificar se os alunos conseguiam expor satisfatoriamente seus conhecimentos sobre tópicos de MQ.

Os eventos transcorridos ao longo do curso ministrado na UFRGS também foram registrados em um diário de bordo. Na primeira aula, os alunos responderam a um questionário¹² para verificação de conhecimentos prévios sobre os tópicos que seriam abordados.

Para fixar os conteúdos apresentados, foram propostas seis listas de exercícios¹³, que eram discutidas em sala de aula no início de algumas das aulas pelos alunos e pelo professor. Eventuais dúvidas podiam também ser remetidas e debatidas via correio eletrônico. As dúvidas e questionamentos levantados pelos alunos constam do diário de bordo.

Ao final do curso, foi realizada uma avaliação¹⁴ para fins de análise da aprendizagem dos alunos.

Os dois últimos encontros deste curso foram utilizados para analisar junto aos alunos as respostas às questões da avaliação apresentadas por eles. No último encontro, aplicou-se um questionário¹⁵ para obter a opinião dos

⁹ Ver Apêndice II.

¹⁰ Ver Apêndice III.

¹¹ Ver Apêndice IV.

¹² Ver Apêndice V.

¹³ Ver Apêndice VI.

¹⁴ Ver Apêndice VII.

¹⁵ Ver Apêndice VIII.

alunos sobre diversos pontos. Nesta instância, os resultados da avaliação já haviam sido divulgados, não havendo o perigo de “contaminação” das opiniões pelo temor de sua influência nos valores da avaliação.

CAPÍTULO V

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

1. Introdução

Após a coleta dos dados, procedeu-se uma análise qualitativa interpretativa, visando responder adequadamente as perguntas propostas nesta pesquisa.

A busca pelas respostas foi feita seguindo os referenciais teóricos que norteiam a pesquisa e, com isso, pretende-se corroborar a validade dos resultados apresentados.

Assim, neste capítulo são apresentados os dados coletados nas três etapas da pesquisa e discutidos os pontos positivos e negativos de cada desenvolvimento realizado.

2. Análise das Etapas da Pesquisa

Como a pesquisa possui três etapas distintas, inicialmente serão analisadas tais etapas separadamente e, depois, far-se-á um apanhado que visa responder as questões propostas no primeiro capítulo da dissertação.

2.1. Os Minicursos

Relembrando, os minicursos (três ao todo) foram apresentados, o primeiro, no II EEEFis, na UFRGS, em Porto Alegre, RS, e os outros dois, na VII SEFIS, na UDESC, em Joinville, SC. O intuito destes minicursos foi o de promover uma complementação ao estudo da MQ, sob enfoque pouco explorado em cursos de licenciatura e, ao mesmo tempo, analisar a viabilidade e o interesse de uma proposta pedagógica menos tradicional para o ensino dos princípios básicos da MQ, sem a necessidade de conhecimentos prévios sobre o assunto, e que pudesse ser um veículo para a promoção da atualização curricular.

O relato apresentado sobre as atividades desenvolvidas e os questionamentos levantados no decorrer dos três minicursos será apresentado em conjunto, considerando que a proposta era única e não passível de análise isolada.

Com a intenção de motivar os alunos, as aulas dos minicursos foram iniciadas com a apresentação de um evento de emaranhamento quântico. Contudo, a citação da verificação experimental de estados emaranhados (fortemente correlacionados) separados espacialmente por 144 km (URSIN et al., 2007), apesar de tratar-se de evento recente e extremamente não-intuitivo, não impactou os alunos ou mesmo os motivou a ponto de demonstrarem interesse no tópico. Por acreditar que este tema seja importante para apresentação no início do estudo de conceitos fundamentais de MQ, face a suas surpreendentes e não clássicas conseqüências, e sua imediata relação com um dos princípios quânticos mais fundamentais, buscou-se modificar tal tópico para que sua apresentação em outras etapas da pesquisa conseguisse surtir o efeito esperado.

Percebeu-se que, na discussão sobre os experimentos de dupla fenda com ondas, com partículas clássicas e com partículas quânticas, os participantes do curso não utilizavam os conceitos de *estado* e de *superposição linear* para a explicação dos eventos apresentados, mas sim, em geral, a dualidade onda-partícula (não analisada no minicurso). Foi possível notar que os conceitos quânticos mais básicos não estão bem arraigados nos participantes, embora muitos deles fossem professores ou alunos de final de curso de Licenciatura, pois na discussão dos experimentos, os alunos cometiam vários erros, demonstrando insegurança e falta de conhecimento (e preparo). Isto mostra que os subsunçores presentes na estrutura cognitiva dos alunos não eram adequados para ancorar a explicação dos fenômenos quânticos. Depois de analisar os experimentos em termos de “possibilidades”, foi alentador ver que os alunos conseguiam explicar melhor a existência de um padrão de interferência, mesmo quando o experimento era realizado com um único elétron.

Para a superposição de ondas, verificou-se que os participantes apresentavam dificuldades na construção de gráficos em que era necessário somar duas (ou mais) ondas. Apesar desta dificuldade, os alunos aceitaram

facilmente que a superposição de duas ou mais ondas é também uma onda e que se multiplicarmos a função que representa uma onda por um escalar também se gerará uma onda, o que é útil para se fazer a devida transposição para a superposição linear de estados quânticos.

Possivelmente devido à familiaridade com a aplicação de vetores em Mecânica Clássica, os alunos já aceitavam prontamente a idéia de que a soma de dois vetores e a multiplicação de vetor por escalar resultam em outro vetor do mesmo espaço.

Após utilizar superposições de ondas e de vetores geométricos como organizador prévio do conhecimento sobre espaços lineares e de proceder-se a análise daquelas superposições sob enfoque mais amplo de vetores de um espaço linear, foram introduzidos os conceitos de estado quântico e de superposição de estados quânticos mostrando que, tal como ondas e vetores geométricos, os estados quânticos também podem ser superpostos gerando *outros* estados quânticos. Aqui, buscou-se salientar que a caracterização do estado de sistemas quânticos conduz a conseqüências não explicáveis pela Mecânica Newtoniana. Observe-se que a propriedade de superposição dá conotação não clássica ao estado de um sistema quântico.

Foi ponto comum em todos os minicursos o grande impacto da notação de Dirac, introduzida para representar os estados de sistemas quânticos. Como muitos alunos nunca haviam tido contato com tal notação, inicialmente reclamavam que era difícil utilizar a simbologia e que não conseguiam compreender o seu significado. Porém, no transcorrer do curso, com a definição dos conceitos de *estado* e de *observável*, os alunos foram se acostumando com a notação e, ao final, até já a utilizavam em suas perguntas. Considerou-se que tal notação auxiliou na generalização das idéias que envolvem vetores de espaços lineares.

Utilizando uma simulação em computador do experimento de dupla fenda para elétrons, os alunos conseguiram se convencer que a medida é uma operação que modifica o padrão de interferência e, assim sendo, modifica o estado do objeto quântico em análise. Ficou perceptível, aqui, que a utilização das simulações em computador facilita a compreensão dos conceitos quânticos trabalhados.

Ponto importante do desenrolar da análise dos primeiros postulados da MQ foi a discussão do chamado colapso no ato da medida. Dados os questionamentos efetuados, foi percebido que os alunos compreenderam que este postulado é necessário para explicar as conseqüências da medição, o que era o esperado. Este foi um dos tópicos em que os participantes mais demonstraram interesse, possivelmente por estar constantemente presente em artigos, livros e filmes de “divulgação científica” recentemente produzidos.

Com o tempo de aula praticamente esgotado foi possível apresentar apenas uma rápida explanação sobre o postulado da evolução temporal (Equação de Schrödinger), que não parece ter sido bem compreendido. Muitos alunos, mesmo considerando a existência de uma “lei” para a evolução temporal, afirmavam que não é possível determinar o estado de um sistema quântico em um instante posterior face ao Princípio de Incerteza. Pode-se considerar que este princípio, possivelmente devido a freqüentes citações por leigos, acaba se tornando em certos casos um obstáculo pedagógico para o aprendizado dos primeiros princípios da MQ.

No decorrer da segunda aula do minicurso do II EEEFis, um aluno comentou que estava achando muito interessante a abordagem utilizada. Segundo ele, praticamente todos os cursos de Mecânica Quântica que ele havia feito se caracterizam por excessiva ênfase na resolução de problemas de autovalores para a equação de Schrödinger independente do tempo. Vale lembrar que este é um dos grandes problemas das disciplinas de MQ de cursos de graduação, conforme afirmado anteriormente nesta dissertação¹⁵.

Quanto ao fenômeno do emaranhamento quântico, o maior interesse demonstrado pelos alunos foi o de saber como eram produzidos os pares emaranhados. Aparentemente, os alunos consideravam que as críticas ao emaranhamento quântico feitas por Albert Einstein ainda não tinham sido totalmente solucionadas, ou seja, os alunos não “aceitaram” as soluções apresentadas ao paradoxo EPR. Contudo, como regra geral, manifestaram ser extremamente interessante estudar algo que não consta dos livros com os quais estão acostumados a trabalhar.

¹⁵ Diversos comentários elogiosos sobre a proposta do curso foram apresentados à professora Victoria E. Herscovitz nos dois primeiros encontros do minicurso oferecido na UFRGS.

O tema relativo a relógios atômicos, em que se utilizava o emaranhamento quântico para melhorar a precisão do relógio, não instigou os alunos para a compreensão do fenômeno, de modo que tal tópico não foi mantido no conteúdo dos cursos da UNISINOS e da UFRGS. Aliás, como não surtiu o efeito desejado na motivação dos alunos, mais atrapalhou a explicação sobre emaranhamento quântico do que auxiliou. Como é necessário apresentar situações para promover a conceitualização, outros exemplos foram inseridos no material de apoio dos cursos e os que ali já constavam foram mais salientados.

Quanto à criptografia quântica, a opção adotada de detalhar seus procedimentos conduziu a algumas dificuldades. O primeiro problema apresentado pelos alunos na compreensão do tópico foi a dificuldade de entender o conceito de monitoramento passivo. Apesar de ser um conceito simples e tido como intuitivo, sempre que o conceito vinha à tona, era necessária uma nova, embora breve, explicação.

Os alunos aparentavam estar assustados com os passos utilizados no decorrer do processo de transmissão da chave criptográfica. O maior espanto era com a quantidade de informações que eram tornadas públicas e o fato de isso não afetar a segurança do processo. No minicurso oferecido durante o II EEEFis, a última aula ocorreu em um sábado, quando, muitas vezes, os inscritos faltam, inclusive para retornar às cidades em que residem. Contudo, o interesse pelas atividades do minicurso foi tão grande que apenas um dos inscritos, que desde o início informou ter um compromisso inadiável neste dia, não compareceu. Também ao final das aulas do curso do II EEEFis, muitos alunos continuaram na sala de aula fazendo perguntas a respeito dos diversos tópicos apresentados. Além disto, no final das aulas dos minicursos da VII SEFIS, alguns alunos estavam repetindo o processo de criptografia no quadro, enquanto outros discutiam sobre o paradoxo EPR. Isto mostra que tais tópicos efetivamente motivam o aluno para o aprendizado de MQ. Recomenda-se que tais exemplos, constituindo-se em situações-problema, sejam utilizados para que se consiga uma aprendizagem significativa dos conceitos neles presentes.

Ao final dos minicursos, muitos alunos se mostraram agradecidos pela nova abordagem e comentaram que era possível começar a trabalhar a MQ em nível médio desta forma.

2.2. O Curso de Extensão na UNISINOS

A análise a seguir foi realizada com os dados coletados no Curso de Extensão apresentado na UNISINOS, em São Leopoldo, RS. Saliente-se que este curso foi ministrado nas manhãs de sábado nos meses de outubro e novembro de 2007, perfazendo um total de dezoito horas. Embora estivessem matriculados 22 alunos, somente quinze compareceram à primeira aula e, devido a desistências por compromissos com outras disciplinas, apenas onze realizaram a última avaliação ao final do curso. Destes, dez alunos tiveram seus dados analisados no presente estudo porque participaram de boa parte das etapas de coleta de dados.

A apresentação relativa a este curso está desdobrada em cinco seções. Na primeira, são analisados os questionários aplicados para verificação dos conhecimentos prévios dos alunos, importante para configurar adequadamente o curso a ser oferecido, alterando alguns aspectos do projeto original. Na segunda, os apontamentos contidos no diário de bordo das aulas são objeto de análise e, na seguinte, a terceira lista de exercícios e o desempenho dos alunos na mesma são examinados. Os últimos dados expostos dizem respeito à avaliação realizada pelos alunos e são matéria da quarta seção. Ao final, na quinta seção, as entrevistas feitas com os alunos são analisadas, destacando-se a opinião deles em relação ao curso e o aprendizado dos princípios fundamentais da MQ.

2.2.1. Análise de Conhecimentos Prévios

Foram aplicados no curso três questionários sobre conhecimentos prévios aos alunos. Optou-se por parcelar em três instâncias as perguntas propostas para não tornar o questionário longo e cansativo. Teve-se o cuidado de introduzir as questões no início das aulas sobre os assuntos correspondentes, o que poderia significar um reforço na atenção para um novo aprendizado. A análise dos questionários respondidos pelos alunos ratifica a informação anterior de que o público do curso era bastante heterogêneo. Por questões metodológicas, apresentam-se somente os questionários dos alunos

que realizaram a avaliação final do curso e que estão sendo caracterizados por um número (Aluno 1, Aluno 2, etc.). Em princípio, dez questionários de cada tipo seriam analisados, mas o número de questionários de alguns dias foi menor, devido ao número menor de alunos (dos dez finalistas) presentes nas aulas respectivas. Algumas das respostas dos alunos serão transcritas no decorrer da análise e, em certas ocasiões, com a inclusão de correções ortográficas. Respostas não apresentadas indicam que o aluno não respondeu à questão ou que a resposta foi considerada sem ligação com os objetivos da mesma.

O primeiro questionário continha quatro perguntas a serem respondidas de forma descritiva e foi respondido pelos dez alunos no início da primeira aula. A primeira pergunta deste questionário visava verificar se os alunos do curso possuíam algum conhecimento prévio acerca de alguns dos principais conceitos da MQ. As respostas sugerem que os alunos selecionados não possuíam, à época, conhecimentos adequados de tais conceitos, apesar de alguns terem cursado disciplinas de MQ anteriormente. Muitas das respostas incluem termos de Física Clássica e vários alunos deixaram alguns dos itens sem resposta, o que sugere desconhecimento do assunto. A seguir, apresenta-se a primeira questão do questionário; as respostas dos alunos constam da Tabela 1.

O que você entende por:

- a) objeto quântico*
- b) estado de um sistema quântico*
- c) observável físico*
- d) compatibilidade de observáveis*

Pelas respostas, depreende-se que o conceito de estado não é familiar aos alunos do curso e que, embora alguns tentem usar a noção de observáveis físicos, nada sabem relatar sobre a compatibilidade de observáveis (embora provavelmente vários respondessem a uma questão sobre o “Princípio de Incerteza”).

Com a segunda questão, visava-se verificar o conhecimento dos alunos acerca da comprovação do caráter ondulatório da luz pelo experimento de dupla fenda. Tal questão é apresentada a seguir e as respostas dos alunos constam da Tabela 2.

O que vem a ser e o que revela o experimento de Young de dupla fenda com ondas eletromagnéticas?

Com base nas respostas fornecidas, pode-se notar que existem fortes indícios de que todos os alunos que responderam esta questão já tinham tomado conhecimento do experimento (provavelmente como alunos universitários), mas alguns não souberam separar o evento “com ondas eletromagnéticas” dos eventos “com corpúsculos”, bastante mencionado em MQ. Isto pode indicar que mesmo os conceitos clássicos não estão devidamente estáveis e diferenciados na estrutura cognitiva de alguns alunos.

Tabela 1. Respostas dos alunos à primeira questão do primeiro questionário

Aluno	Resposta
Aluno 1	a) É o objeto que não pode ser mensurado pela Física Clássica. b) É a simultaneidade de eventos. c) A Física Clássica consegue medir.
Aluno 2	a) Entendo que é algo formado por um sistema complexo. b) É como ele se apresenta. c) Fenômeno físico que pode ser verificado. d) Quando há semelhança.
Aluno 3	a) Entendo que seja um objeto muito pequeno, tal como as partículas subatômicas. b) Entendo que seja uma probabilidade.
Aluno 4	a) Algo muito pequeno, que não se pode determinar visualmente. b) Como os objetos quânticos estão agrupados. c) Que sempre estão relacionando os acontecimentos atuais com a Física.
Aluno 5	a) Objeto de dimensões mínimas, quase invisível e imperceptível a “olho nu”. Sem recursos, como instrumentos físicos, é impossível visualizá-los. b) Estado em que partículas, moléculas e átomos se encontram. c) Instrumentos utilizados para enxergar objetos quânticos. d) Quando encontro resultados semelhantes através de análises em laboratório.
Aluno 6	a) Algo que pode quantizar energia.
Aluno 7	a) Como não cursei as disciplinas de Quântica, acho que é a capacidade de medir as ondas de um corpo. b) São os experimentos através dos feixes de luz, por dupla fenda. d) Quase nada, ou seja, pouca coisa.
Aluno 9	a) Objetos observados no mundo quântico, como fótons, elétrons, átomos, ... c) Objetos macroscópicos, estudados pela Física Clássica. d) Aplicação de fundamentos quânticos para objetos quânticos e fundamentos de objetos macroscópicos para objetos macroscópicos.
Aluno 10	a) Estudo dos fótons e de partículas, da Mecânica das partículas. b) Estudo do estado de Schrödinger, probabilidade de encontrar as partículas, bem como os níveis de energia. c) Efeito fotoelétrico é um exemplo. Os raios espectrais.

Tabela 2. Respostas dos alunos à segunda questão do primeiro questionário

Aluno	Resposta
Aluno 1	Que pela fenda dupla o padrão de onda muda completamente da onda que a produziu.
Aluno 3	É um experimento que visa determinar a natureza da luz. Ele revela que a luz se propaga como onda.
Aluno 5	São instrumentos que funcionariam como “paredes”, que se fecham aos poucos, as ondas eletromagnéticas vão passando pela “abertura” que as duas paredes formam.
Aluno 6	O experimento de Young apresenta a separação entre linhas claras e escuras de uma onda eletromagnética.
Aluno 7	É um experimento em que podemos visualizar uma ponte dos fenômenos quânticos.
Aluno 9	Luz é apontada a um anteparo e antes do anteparo a luz atravessa duas fendas de largura da ordem do comprimento de luz. Revela padrões de interferência e a dualidade onda-partícula.
Aluno 10	Verifica-se a característica corpuscular da luz. A possibilidade de ultrapassar um obstáculo que a ondulatória impõe.

Nenhum dos alunos soube responder a terceira questão proposta. A grande maioria disse desconhecer a expressão “colapso da função de onda”. Somente o Aluno 1 respondeu a questão, embora equivocadamente, conforme apresentado na Tabela 3. A terceira questão do primeiro questionário estava enunciada como segue.

*Você já ouviu falar em colapso da função de onda (também conhecido como filtragem do pacote de ondas)?
Você pode explicar o significado desta expressão?*

Tabela 3. Resposta do Aluno 1 à terceira questão do primeiro questionário

Aluno	Resposta
Aluno 1	Sim, quando se quer medir uma partícula, ela se comporta como onda e quando se quer medir uma onda, a onda se comporta como partícula. (Quando medimos interferimos no sistema.)

De modo geral, as respostas dos alunos à última questão do primeiro questionário sugerem que estes não conhecem os resultados do experimento de dupla fenda com elétrons. De fato, a maioria dos alunos afirmou desconhecer tal experimento e seus resultados e alguns outros forneceram respostas vagas e pouco conclusivas. As respostas de alguns dos alunos, que provavelmente já ouviram falar do experimento e que associam os resultados deste experimento aos obtidos para ondas, constam da Tabela 4. Ao que parece, tais alunos não separam resultados clássicos ondulatórios (muitos

fótons) de resultados quânticos (elétrons, poucos fótons, etc.). A quarta questão do primeiro questionário estava enunciada do seguinte modo.

Você conhece o experimento de dupla fenda com elétrons? Pode comentar seus resultados?

Tabela 4. Respostas dos alunos à quarta questão do primeiro questionário

Aluno	Resposta
Aluno 3	Sim. O resultado é comparável ao que acontece com a luz.
Aluno 5	São utilizadas duas “lâminas” que funcionam como “paredes”, estas vão se fechando e os elétrons passando pela fenda das paredes. Obs.: vi este processo em um simulador (programa encontrado na internet).
Aluno 6	Lembro apenas da configuração do experimento, mas não me recordo dos objetivos ou resultados do mesmo. Observação do comportamento da luz.

O segundo questionário, com três perguntas, foi aplicado no início da segunda aula e respondido pelos dez alunos. A primeira pergunta deste conjunto busca inferir o conhecimento dos alunos acerca do conceito de probabilidade e da noção de spin. A primeira questão deste questionário é apresentada a seguir.

Explique com suas palavras o que vem a ser:

- a) probabilidade*
- b) spin*

Tabela 5. Respostas dos alunos à primeira questão do segundo questionário

Aluno	Resposta
Aluno 1	b) São as flechinhas que o professor mostrou em Química (mas eu acho que é rotação ou translação dos elétrons).
Aluno 2	a) É a possibilidade de um evento ocorrer. b) Relaciona-se à rotação do elétron.
Aluno 3	a) São as chances que temos de prever corretamente algo que ainda está para acontecer. b) É o momento angular do elétron em torno do núcleo atômico.
Aluno 4	a) É a quantidade de algo que pode acontecer. b) É a rotação do elétron.
Aluno 6	a) Possibilidade de ocorrer determinado evento em um tempo e/ou local. b) Momento angular – sentido que o elétron pode ter.
Aluno 7	a) Probabilidade de um modo geral é a quantidade de certeza em relação a uma certa pesquisa, por exemplo, a probabilidade é de 1 para 5. b) Refere-se às camadas eletrônicas de um átomo.
Aluno 9	a) A chance percentual de algo ser ou não ser, de estar ou não estar. b) Órbita onde se encontra o elétron.
Aluno 10	b) É o momento angular associado a uma partícula quântica.

A análise das respostas sugere que os alunos possuem alguma noção intuitiva do conceito de probabilidade. Quanto ao conceito de spin, este aparenta ser de algum conhecimento entre os alunos; alguns relacionam este conceito mais com a Química do que com a Física. Algumas das respostas que conduzem às afirmações acima são encontradas na Tabela 5. Dentre os respondentes ainda na questão sobre o spin, pode-se destacar o Aluno 10, que respondeu razoavelmente esta questão; contudo, não deixa claro se entendeu que tal momento angular era intrínseco.

A segunda questão do segundo questionário pretendia verificar conhecimentos prévios acerca da superposição de estados e dos valores de medidas e foi respondida de forma bastante sucinta pelos alunos. A seguir, é apresentada a mencionada segunda questão.

Para um sistema quântico com dois estados distintos possíveis de energia E_1 e E_2 :

a) é possível encontrar o sistema em um estado que é uma soma dos referidos estados de energia?

b) é possível obter-se em uma medida de energia o valor $(E_1+E_2)/2$?

Tabela 6. Respostas dos alunos à segunda questão do segundo questionário

Aluno	Resposta
Aluno 1	a) Sim. b) Sim.
Aluno 2	a) Acho que não b) Acho que sim.
Aluno 3	a) Sim. b) Sim.
Aluno 4	a) Sim. b) Não.
Aluno 6	a) Possivelmente.
Aluno 7	a) Acredito que sim, pois os dois podem estar relacionados entre si. b) Podemos obter.
Aluno 8	a) Não. b) Sim, quando E_1 e E_2 têm cargas iguais. Porém, nesse exemplo, E_1 e E_2 são dois estados distintos, não podendo gerar o valor $(E_1+E_2)/2$.
Aluno 9	a) Sim. b) Não.
Aluno 10	a) Sim. $ \Psi\rangle = \Psi_1\rangle + \Psi_2\rangle$. b) Não é possível fazer a média aritmética das energias.

A ausência de justificativas à segunda questão pode indicar falta de segurança dos alunos em suas respostas ou que as perguntas foram respondidas de forma “burocrática”. As respostas do Aluno 7 e do Aluno 10 são as mais adequadas. Quanto aos demais, apesar da concisão, há uma predominância de acerto no primeiro item e de erros no segundo item. As respostas de alguns dos alunos para a segunda questão constam da Tabela 6.

A terceira pergunta do segundo questionário visa verificar conhecimentos dos alunos sobre a evolução temporal dos estados de sistemas quânticos. Esta questão é apresentada a seguir.

Você diria que os estados dos objetos quânticos podem variar com o tempo?

Tabela 7. Respostas dos alunos à terceira questão do segundo questionário

Aluno	Resposta
Aluno 1	É relativo, mas vendo do meu mundo sim.
Aluno 2	Sim.
Aluno 3	Com certeza.
Aluno 4	Sim.
Aluno 5	Acredito que sim, havendo uma mudança de estados, ou melhor, por exemplo, a superposição de estados, que resulta uma mudança de estado
Aluno 6	Acredito que sim.
Aluno 7	Acho que seria quase impossível.
Aluno 8	Sim, pois ocorrem mudanças devido a intensa vibração.
Aluno 9	Sim.
Aluno 10	Sim, se forem dependentes do tempo.

Pode-se dizer que, devido à falta de justificativas, as respostas dos alunos indicam que eles não possuem segurança ao tratar da evolução temporal dos estados quânticos, mas que, talvez devido a uma herança da Física Clássica, em sua maioria admitem que ela ocorre. O Aluno 5 e o Aluno 6 manifestam não possuir certeza sobre o tema em questão, enquanto o Aluno 3 declara estar seguro, mesmo sem justificar sua opção. Analisando a resposta do Aluno 7, vê-se que o mesmo demonstra não possuir conhecimentos sobre a evolução temporal dos estados quânticos. As respostas dos alunos a esta questão constam da Tabela 7.

O terceiro questionário foi respondido pelos alunos no início da quinta aula e continha apenas duas questões. Somente o Aluno 10 não respondeu a

este questionário. A primeira questão buscava averiguar conhecimentos prévios sobre a equação de Schrödinger (dependente e independente do tempo). Viu-se que os alunos não demonstram conhecimento sobre o papel da equação de Schrödinger dependente do tempo na evolução temporal dos estados quânticos. O Aluno 7 foi o que chegou mais próximo de uma resposta razoável a esta questão. As respostas dos alunos se encontram na Tabela 8. A seguir, é enunciada a primeira questão deste questionário, tal como apresentada aos alunos.

Para que serve a equação de Schrödinger dependente do tempo? Para que serve a equação de Schrödinger independente do tempo? Qual a relação entre elas?

Tabela 8. Respostas dos alunos à primeira questão do terceiro questionário

Aluno	Resposta
Aluno 1	Ela determina a probabilidade de acontecer um dado evento com base na função de onda.
Aluno 3	A primeira trata da parte espacial e a segunda da parte temporal de uma partícula em movimento. Unindo essas duas equações conseguimos determinar o estado de uma partícula. Portanto, elas são complementares.
Aluno 4	Calcular a ddp de um sistema, em um determinado intervalo de tempo. Calcular a energia de um sistema, sem a variável tempo.
Aluno 5	A equação dependente do tempo serve para detectarmos o estado em que um "corpo" se encontra, em determinado período, o que acontece com esse "corpo", se muda de estado ou não. A equação independente do tempo, do mesmo modo que a equação dependente, pretende determinar o estado de um "corpo", mas o estado permanente desse "corpo".
Aluno 7	Para calcular a energia e conhecer o estado de um sistema quântico.
Aluno 9	Fornecer informações sobre o objeto quântico em três dimensões. Fornece informações sobre o objeto quântico que se move linearmente ao longo de um eixo. Uma é para duas dimensões e a outra é para três ou mais.

A segunda questão do terceiro questionário tinha o intuito de verificar se os alunos mesclariam o postulado da evolução temporal com o do colapso do vetor de estado. Reforçou-se, nesta questão, a afirmação anterior de que a maioria dos alunos não conhece o papel da equação de Schrödinger dependente do tempo na evolução temporal dos estados quânticos, mesclando tal variação temporal a resultados de medidas. O Aluno 7 apresentou uma resposta satisfatória, mas a resposta à terceira questão do segundo questionário mostra-se conflitante com esta. A Tabela 9 mostra as respostas dos alunos a esta questão, que é apresentada a seguir.

Conhecendo o estado de um sistema quântico em um determinado instante, é possível conhecer seu estado em um instante posterior?

Tabela 9. Respostas dos alunos à segunda questão do terceiro questionário

Aluno	Resposta
Aluno 1	Sim, apenas se for medido novamente.
Aluno 2	Sim.
Aluno 4	Sim, se este instante for próximo.
Aluno 5	Provavelmente teremos mais de uma alternativa para caracterizarmos o estado desse corpo, mas só teremos certeza quando visualizarmos a “situação final” do corpo ou em qual estado ele se encontra em determinado instante.
Aluno 6	Acredito que não.
Aluno 7	Sim, através da equação de Schrödinger.
Aluno 8	Não é possível conhecer o estado de um sistema quântico posterior à medida, pois ele volta a ter as mesmas probabilidades em relação aos anteriores da medida.
Aluno 9	Sim, mas para isso é preciso fazer uma nova medição. Sem fazer uma nova medição, não.

Embora alguns dos alunos tivessem cursado disciplinas de MQ, vê-se que, de um modo geral, os alunos não se mostravam seguros (ou não possuíam conhecimentos adequados) a respeito dos tópicos de MQ que seriam desenvolvidos no curso. Considerando que conceitos de Física Clássica não são adequados para o aprendizado no decorrer do curso, a ausência de subsunçores se transforma em algo desejável. Crê-se que os subsunçores adequados para o aprendizado dos primeiros princípios da MQ podem ser construídos em um processo de formação de conceitos através da utilização de organizadores prévios. Este é um dos objetivos do texto de apoio utilizado nas aulas deste e dos demais cursos.

2.2.2. Relato das Aulas

Faz-se, nesta seção, um relato das aulas apresentadas no curso oferecido na UNISINOS e que foram registradas em um diário de bordo. Como os principais pontos referentes à análise do conteúdo foram apresentados no relato das aulas dos minicursos, cabe aqui salientar as manifestações dos

alunos perante o conteúdo ministrado neste curso, que foi mais abrangente que os minicursos e com maior tempo de contato com os alunos.

A primeira aula começou com um leve atraso (aproximadamente quinze minutos) devido ao baixo número de alunos presentes no horário marcado para seu início. No total, esta aula teve dezoito participantes.

Na introdução, ao se abordar de outra forma os estados emaranhados separados espacialmente por 144 km, pareceu que alunos realmente se motivaram para o aprendizado do assunto. Desta vez, foi feita uma breve discussão sobre a intuição desenvolvida com a vivência no mundo clássico e que, por isso, não está preparada para acolher os fenômenos quânticos. Adicionalmente, não apenas a descrição dos fenômenos, mas também os princípios envolvidos foram abordados de forma rápida, além de levantar-se a polêmica do paradoxo EPR.

Em seguida, constatou-se que os alunos ainda não tinham visto o experimento de dupla fenda, seja com ondas, seja com partículas quânticas. Os alunos foram conduzidos, então, ao laboratório da UNISINOS onde puderam observar o fenômeno de interferência de ondas em uma cuba com água. Feita a análise qualitativa do experimento, o grupo voltou à sala de aula, onde foi explicado que o mesmo efeito ocorre com ondas eletromagnéticas (muitos fótons).

Durante a discussão do experimento de dupla fenda com partículas quânticas (elétrons, neste caso), constatou-se que os alunos responderam corretamente sobre o que deveria ser visualizado no segundo anteparo do experimento, mas não sabiam explicar adequadamente o ocorrido. Alguns se detinham a comentar que havia uma onda associada ao movimento do elétron. Utilizando-se de sofismas, podia-se fazer com que alguns alunos mudassem rapidamente de opinião e passassem a achar que o padrão deveria ser o mesmo observado para partículas clássicas. Isso revela que os alunos não tinham confiança em suas respostas e nem conhecimentos quânticos devidamente diferenciados e estáveis em sua estrutura cognitiva.

Para o caso deste mesmo experimento com *um* elétron sendo emitido por vez, facilmente conduziu-se os alunos a perceber que o padrão seria o mesmo das partículas clássicas. Muitos ficaram espantados com a ocorrência,

nesse caso, do padrão de interferência, demonstrando desconhecimento de vários fenômenos quânticos e de conceitos basilares da Mecânica Quântica.

Com relação à ligação entre a superposição de ondas e o experimento de dupla fenda, os alunos conseguiram fazer uma conexão aceitável propondo a simples idéia de que em ambos há superposição. Quanto aos vetores do plano e às ondas, eles mostraram fazer facilmente a ligação entre a superposição de uns e de outras.

Ao se solicitar que descrevessem o estado de um objeto clássico, muitos alunos começaram respondendo com termos comuns ao conceito de estado físico (sólido, líquido e gasoso). Percebeu-se que este é um dos problemas ao iniciar o estudo do conceito de estado de um sistema quântico: conceitos clássicos estão muito enraizados na estrutura cognitiva e não propiciam outros enfoques no trato dos conceitos quânticos, podendo funcionar como obstáculos epistemológicos à aprendizagem significativa.

Na segunda aula, com um total de quinze participantes, os alunos levantaram uma série de dúvidas sobre os assuntos apresentados. Aliás, é bom lembrar que os alunos eram permanentemente estimulados a apresentar questionamentos no transcorrer das atividades.

Ao tratar da notação de Dirac para um estado quântico, surgiu a pergunta se se poderia escrever um estado tal que $(a_1 + a_2)|v\rangle = |a_1v\rangle + |a_2v\rangle$. Esta pergunta, apesar de simples, demonstra insegurança no significado e na utilização da notação de Dirac para um estado quântico, o que propiciou novo debate a respeito.

Também um aluno perguntou se um vetor de estado possui módulo, direção e sentido, tal qual um vetor geométrico. Lembrou-se aos alunos que entre vetores de estado e vetores geométricos há uma analogia estrutural, canalizada nas propriedades de vetores de um espaço vetorial. Estas propriedades haviam sido enumeradas em aula e foram recordadas.

Os alunos também desejavam saber como se faz para determinar quais são as informações contidas em um estado quântico. Após lembrar a definição de estado de um sistema, os alunos perceberam que todas as informações possíveis a respeito do sistema, em princípio, estão contidas no estado e que este pode ser caracterizado, alternativamente, por conjuntos diversos de

grandezas físicas. Vale lembrar que se pode representar o estado físico por um vetor de estado. Assim, neste trabalho, um vetor de estado $|\Psi\rangle$ representa o estado, conforme a notação de Dirac permite.

Quanto ao experimento de Stern-Gerlach, as perguntas diziam respeito à escolha da prata como material a ser estudado. Depois de analisar a estrutura eletrônica do elemento prata, os alunos ainda questionaram o porquê de não ser escolhido outro elemento químico de 48 elétrons ou com um elétron no subnível p. Dadas as devidas explicações, os alunos pareceram compreender o motivo da escolha da prata no experimento em questão.

Ainda sobre a superposição de estados quânticos, os alunos desejavam saber como se faz para saber como relacionar o estado de um objeto quântico com uma superposição de auto-estados de algum particular observável. Para tal, antecipou-se brevemente o quarto postulado da MQ com o objetivo de responder esta questão.

Somente nove alunos compareceram à terceira aula. Um fato curioso desta aula foi que, ao tratar da luz polarizada, alguns deles apresentaram dois polarizadores que tinham. Tais polarizadores faziam parte de um trabalho de uma disciplina de graduação que cursavam. Assim, ficou mais prática e simples a demonstração do funcionamento dos polarizadores, dada a possibilidade de manuseio dos mesmos por parte dos alunos.

Percebeu-se que os mesmos não compreenderam o que se pedia em uma das perguntas presentes no material de apoio sobre o experimento de Stern-Gerlach. Ao perguntar o que ocorria com os elétrons ao passar por um segundo campo magnético inhomogêneo após terem passado por um primeiro, os alunos responderam que haveria uma separação maior entre as franjas observadas, quando deveriam salientar aspectos das medidas envolvidas neste experimento.

Ao se fazer, ainda nesta aula, uma recapitulação dos três primeiros postulados, notou-se que os alunos não conseguiam ver a ligação entre eles. Igualmente, houve também queixas sobre uma “grande” quantidade de postulados que lhes estava sendo apresentada.

Outro problema que apareceu nesta aula foi a dificuldade dos alunos em escrever estados normalizados (a unidade). Quando se solicitou que

construíssem representações matemáticas dos estados de um elétron com componentes não nulas de projeção de spin em uma dada direção, $|+\eta/2\rangle$ e $|-\eta/2\rangle$, apareceram muitos estados criados sem preocupação com a condição de normalização. Assim, foi comentado que esta condição é importante para que o vetor de estado contenha informações sobre a probabilidade de obtenção de cada valor de medida.

Dez alunos estiveram presentes à quarta aula, que também foi acompanhada pelo professor Marco Antonio Moreira. Iniciou-se esta aula com a resolução da lista de exercícios e foi solicitado que os alunos a entregassem. Na segunda questão¹⁶, percebeu-se que os alunos acreditavam que o valor da medida se modificava com o transcorrer do tempo, sem vincular esta modificação à alteração do estado. Como o postulado da evolução temporal dos estados quânticos ainda não havia sido discutido, é aceitável que isto ocorresse. No terceiro exercício, os alunos apresentaram dificuldades em escrever o estado característico de cada fóton e também não conseguiram visualizar, através dos dados fornecidos, a direção de propagação do feixe. Os dois últimos itens deste exercício deixaram perceptível que os alunos ainda não possuíam confiança em suas respostas quanto ao colapso do vetor de estado.

No decorrer desta aula, foram ainda apresentados os fenômenos do emaranhamento quântico e a criptografia quântica. Sobre o emaranhamento, a grande dúvida dos alunos era como saber que um sistema quântico (composto) está em um estado de emaranhamento quântico. Após a explicação, pareceram compreender a idéia de que os estados só são definidos (experimentalmente) após serem realizadas inúmeras medidas em diversos sistemas igualmente preparados no mesmo estado.

No caso da criptografia quântica, viu-se que os alunos dificilmente relacionam o computador quântico com o desvendamento de chaves criptográficas. Assim, pensa-se que a computação quântica, se apresentada junto à criptografia quântica, pode se constituir em uma abordagem com maior potencial de significatividade para o aprendizado dos conceitos fundamentais da MQ.

¹⁶ Ver exercícios da aula de 27 de outubro de 2007 no Apêndice III.

Por ter sido um dos entraves nos minicursos, o conceito de monitoramento passivo foi explicado paulatinamente e, desta forma, aparentemente este tópico produziu a resposta desejada. Os alunos responderam de forma satisfatória as perguntas que envolviam esse conceito.

Assim como nos minicursos, os alunos deste curso acharam complicadas as escolhas das bases e bits no processo de transmissão dos fótons constituintes das chaves criptográficas, combinadas previamente entre Alice (emissora dos fótons) e Bob (receptor dos fótons). Também estranharam a quantidade de informação tornada pública, sem que isso afetasse a segurança do processo. No entanto, os alunos compreenderam bem a expressão $|0\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + |1\rangle_A)$ e seu papel no colapso de medidas feitas com base diferente da de envio. Como foi boa a compreensão deste tópico, os alunos também entenderam o papel do espião (Eva) no processo e como este interfere nos resultados medidos por Bob. Isto significa uma boa compreensão do processo de superposição linear de estados e do postulado do colapso do vetor de estado, em decorrência do processo de medida.

Quanto às aplicações da criptografia quântica, os alunos acharam improvável a transmissão de chaves criptográficas devido ao excesso de interação neste meio. Isto demonstra que eles possuem, mesmo que intuitivamente, o conceito de *descoerência*.

Os alunos não souberam responder qual seria o papel de átomos no lugar de fótons no processo de transmissão de chaves criptográficas. Tal tópico pode ser mais demoradamente estudado no futuro.

Na quinta aula, nove alunos estiveram presentes para assistir a apresentação da evolução temporal dos estados quânticos. Um fato frustrante ocorrido nesta aula, embora compreensível, foi o de que um aluno que cursava o primeiro semestre do curso de Física relatou, ao final da aula, que não entendeu absolutamente nada do assunto. Por ser um aluno do primeiro semestre e não possuir conhecimentos matemáticos adequados para a compreensão deste assunto, entende-se a aflição do mesmo. Apesar de o curso não exigir pré-requisitos, um mínimo de conhecimentos sobre regras de derivação parece necessário para o estudo da equação de Schrödinger apresentado. (Em geral, alunos de graduação e professores de Ensino Médio

possuem tais conhecimentos.) Cabe aqui lembrar que, segundo Ausubel, o conhecimento prévio é a variável isolada mais importante para a aprendizagem significativa e se o aprendiz não dispuser de subsunçores adequados o material de ensino não será potencialmente significativo.

Durante a última aula, foram realizadas a avaliação dos alunos e a entrevista para levantar a opinião dos mesmos sobre o curso. Ao todo, onze alunos realizaram as atividades deste dia.

2.2.3. Respostas à Terceira Lista de Exercícios

Esta lista compreende três exercícios que tratam dos tópicos apresentados nas três primeiras aulas, ou seja, dos cinco primeiros postulados da MQ. Assim, a intenção destes exercícios é a de verificar o aprendizado de tais tópicos pelos alunos, utilizando algumas situações-problema, tais como o experimento de Stern-Gerlach relativo ao spin do elétron, superposição de estados de energia e estados de polarização da luz.

Somente sete dos alunos participantes do curso entregaram a lista com suas respostas. Apesar disto, os outros três alunos do grupo, cujo desempenho é parte da análise do curso, não foram desconsiderados porque a omissão desta atividade não causa perdas na análise final do curso.

O primeiro exercício se refere a uma situação-problema relacionada ao experimento de Stern-Gerlach, com três superposições de auto-estados de componente de spin de um elétron, apresentada a seguir.

Considere os três estados de spin de um elétron, abaixo:

$$\text{i) } |\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle + \sqrt{2}|- \rangle); \quad \text{ii) } |\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{5}|+\rangle + |- \rangle); \quad \text{iii) } |\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(\sqrt{8}|+\rangle + 2|- \rangle),$$

em que $|+\rangle$ ($|- \rangle$), representa o auto-estado de projeção $+\hbar/2$ ($-\hbar/2$) do spin, na direção de um campo magnético inhomogêneo.

a. Na medida das projeções do spin na direção indicada, qual a probabilidade de encontrar o elétron no estado de “spin-para-cima”, em cada caso?

b. Considere o caso iii). Após a primeira medida, suponha que encontremos o elétron no estado de “spin-para-cima”. Se efetuarmos uma segunda medida da projeção do spin, imediatamente após a primeira, sobre este elétron, o que obteremos?

c. Após a primeira medida citada no item b) acima, em que estado de spin se encontrará o elétron?

d. Qual a probabilidade de obter-se o valor $-\hbar/2$, na segunda medida?

Com exceção do Aluno 6, que cometeu um erro no último item desta questão devido à falta de atenção ao que se pedia, todos os demais responderam corretamente aos itens da mesma. Isto sugere que o spin do elétron e o experimento de Stern-Gerlach se constituem em uma simples, mas frutífera situação-problema em que vários princípios da MQ podem ser discutidos.

O segundo exercício utiliza um estado escrito como uma superposição de auto-estados de energia de um elétron no átomo de hidrogênio. O enunciado desta questão é apresentado a seguir.

Um átomo se encontra inicialmente no estado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle + |E_3\rangle), \text{ sendo todos os valores } E_i, \text{ distintos.}$$

- Podemos dizer que o átomo possui energia definida? Em caso afirmativo, qual o valor da energia? Em caso negativo, qual a probabilidade de obter-se, em uma medida de energia, o autovalor E_2 ?
- Tendo-se medido o autovalor E_2 , qual a probabilidade de, em uma segunda medida de energia realizada logo após a primeira, obter-se o valor E_3 ?
- Qual a probabilidade de, após a primeira medida, encontrar-se o átomo no estado $|E_1\rangle$?
- Qual a probabilidade de obter-se em uma medida de energia o valor $\frac{(E_1 + E_2 + E_3)}{3}$?

O primeiro item desta questão foi respondido corretamente por todos os alunos, o que indica que os alunos parecem ter compreendido bem o papel das amplitudes de probabilidade na descrição do estado de um sistema quântico. O segundo item foi respondido de forma correta somente por três alunos (Alunos 3, 8 e 9). Todos os demais responderam que a probabilidade de se obter o autovalor E_3 era de 33,3%. Isto parece indicar que os alunos não compreenderam o significado do colapso do vetor de estado na situação em estudo. Não se exclui, contudo, a possibilidade de terem considerado toda a amostra inicial como constituindo o universo de sistemas para a segunda medida. O terceiro item sofreu críticas a posteriori (no ato da correção oral) por parte dos alunos que consideraram mal redigido e dando margem à dupla interpretação. Por esta razão, a análise deste item foi descartada. O último item obteve respostas bastante variadas dos alunos do curso. Quatro responderam

corretamente a esta pergunta enquanto os demais afirmavam que a probabilidade de obter o valor $\frac{E_1 + E_2 + E_3}{3}$ era de 100% (Alunos 6 e 9) e de 33,3% (Aluno 7). Isto indica a necessidade de revisão do postulado nº 3, referente aos autovalores como únicos resultados possíveis de medida, assim como o postulado nº 5, referente ao colapso do vetor de estado.

A terceira questão consta de quatro itens, utiliza a polarização de um feixe de luz como situação-problema e tem por objetivo verificar os conhecimentos dos alunos acerca do primeiro e terceiro postulados. A seguir, apresenta-se o enunciado desta questão.

Consideremos um feixe de luz polarizada compreendendo 5000 fótons todos no mesmo estado e caracterizado pelo campo $\vec{E} = E_0 \hat{p} e^{i(kz - \omega t)}$, sendo \hat{p} o vetor de polarização, no plano xy , orientado a 30° do eixo \hat{x} .

- Qual a direção de propagação do feixe?
- Qual o vetor de estado de polarização característico de cada fóton?
- Introduzindo um polarizador que permite apenas a passagem de luz na direção \hat{y} , qual a probabilidade de um fóton passar pelo polarizador?
- Introduzindo um segundo polarizador em sucessão ao primeiro que permite apenas a passagem de luz na direção \hat{y} , qual a probabilidade de um fóton, que passou pelo primeiro polarizador, passar pelo segundo?

No primeiro item foi possível notar que os alunos não conseguem extrair a informação da direção do feixe de luz através do campo elétrico. Somente três alunos responderam este item de forma correta. Um ponto preocupante foi que este item fez com que nenhum dos alunos respondesse corretamente ao segundo item. Entende-se, então, que os alunos ainda possuem grande dificuldade em descrever o estado de um sistema quântico ou, mais especificamente, o estado de um fóton de um feixe de luz polarizada. Por não terem descrito o estado de forma correta, os alunos também não responderam corretamente ao terceiro item da questão, mas, apesar disto, todos eles souberam responder ao quarto item de forma correta, sugerindo que esta situação-problema é adequada ao estudo do colapso do vetor de estado.

Desta análise, pode-se supor que as situações-problema utilizadas nesta lista de exercícios são bons exemplos de aplicações dos primeiros princípios da MQ. Boa parte dos alunos sabe utilizar satisfatoriamente alguns dos

postulados em determinadas situações e os erros por eles cometidos podem ser considerados como acontecimentos naturais do processo de aprendizagem, pois, segundo Vergnaud (GRECA e MOREIRA, 2002, p. 35), o domínio de um campo conceitual pelo aluno leva tempo e ocorre através de maturidade, experiência e aprendizagem.

2.2.4. Avaliação do Aprendizado dos Alunos do Curso

A avaliação realizada no último dia do curso de extensão foi um dos meios utilizados para a análise da compreensão que os alunos obtiveram acerca dos tópicos apresentados e para verificar se as situações-problema utilizadas são eficazes na aprendizagem dos princípios da MQ trabalhados.

A avaliação consistiu de seis questões envolvendo todos os princípios trabalhados no decorrer do curso, aplicados nas situações-problema apresentadas. Onze alunos participaram da avaliação, mas, para fins do projeto, o desempenho de um deles não foi considerado por não ter participado de todas as atividades do curso.

A Tabela 10 apresenta as questões da avaliação com seus respectivos objetivos.

Dois alunos não responderam a primeira questão (Alunos 2 e 10). Dentre os demais, apenas três a responderam de um modo considerado satisfatório. O Aluno 3 respondeu: *“A superposição linear de estados é uma característica dos sistemas quânticos. Significa dizer que, antes de efetuarmos a medida, o objeto quântico pode assumir qualquer um dos estados possíveis. Exemplo disso é o experimento de dupla fenda, pois antes de efetuarmos a medida não sabemos por qual das fendas o elétron passou. Dizemos então que este elétron está em uma superposição linear de estados, ou seja, há a probabilidade tanto de passar por uma fenda quanto pela outra”*. Alguns dos alunos responderam esta questão de forma vaga, sem explicitar o que queriam dizer, sendo difícil a análise do aprendizado dos tópicos constantes do objetivo desta questão. Muitos atribuíram à superposição de estados a probabilidade de obtenção de um resultado de medida e o relacionaram ao instante de medida. Vê-se, então, que o novo conhecimento apresentado aos alunos não foi bem compreendido em uma primeira apresentação, pelo menos não a ponto de

permitir expressarem alguma conceitualização a respeito. A idéia de medida em um instante de tempo, da posição de um elétron (nas fendas em um experimento de dupla fenda ou no átomo de hidrogênio), entre outros

Tabela 10. Questões da avaliação realizada na UNISINOS e seus objetivos

	Questão	Objetivo
1)	O que significa, no seu entender, a superposição linear de estados de sistemas quânticos? Use suas próprias palavras. Dê exemplos.	Avaliar a compreensão e aplicação pelos alunos do conceito de superposição linear de estados de sistemas quânticos.
2)	O estado do elétron de um átomo de hidrogênio é $ \Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2} E_1\rangle + \sqrt{3} E_2\rangle)$, com $E_1 \neq E_2$, onde E_1 e E_2 são valores de energia tais que $H E_1\rangle = E_1 E_1\rangle$ e $H E_2\rangle = E_2 E_2\rangle$. a) Qual a probabilidade de, em uma medida de energia, se encontrar o valor $\frac{2E_1 + 3E_2}{5}$? b) Qual a probabilidade de, em uma medida de energia, se encontrar o elétron no estado $ E_1\rangle$? c) Imediatamente após uma medida com resultado E_1 para a energia, qual a probabilidade de se encontrar o elétron, em uma segunda medida então, no estado $ E_2\rangle$? d) Que valores podem ser obtidos para a energia do elétron deste átomo?	Avaliar o aprendizado dos postulados que tratam dos resultados possíveis de medidas, das probabilidades de obtenção destes valores e do colapso do vetor de estado.
3)	Um objeto quântico está em um estado $ \Phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} c_\alpha x_\alpha\rangle dx$, em que $ x_\alpha\rangle$ são os auto-estados do operador de posição (caso unidimensional). a) Quais os possíveis valores para a medida da posição deste objeto? b) Se os coeficientes c_α forem todos iguais, qual a probabilidade de se obter um valor negativo para x_α na medida da posição deste objeto quântico?	Mesmo objetivo da segunda questão, porém se mudou a situação-problema para analisar em qual delas os alunos parecem melhor compreender a aplicação destes princípios.
4)	Considere dois elétrons que foram igualmente preparados para a realização do experimento de Stern-Gerlach. Na primeira medida, foi obtido o valor $+\frac{\hbar}{2}$ tanto para a projeção do spin na direção do campo magnético do primeiro elétron como para a do segundo elétron. Podemos concluir que estes elétrons estavam, cada um, no estado $ \varphi\rangle = \left +\frac{\hbar}{2}\right\rangle$? Justifique.	Avaliar o papel do número de medidas realizadas para obter informação sobre o estado de um sistema quântico.
5)	Um elétron livre encontra-se no estado descrito espacialmente pela função $\varphi(x,t) = A \exp[i(kx - \omega t)]$. Determine a razão entre $ \varphi(x,t) ^2$ e $ \varphi(x,0) ^2$. O que significa este resultado, face à equação de Schrödinger dependente do tempo?	Analisar se os alunos conseguem entender as informações sobre a evolução temporal de um estado quântico, dado um determinado estado.
6)	Quais dos estados abaixo você diria que são estados emaranhados? Por quê? (Esperamos que a notação seja evidente. Se não estiver, pergunte.) a) $ \chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0\rangle_1 1\rangle_2 + \sqrt{2} 1\rangle_1 0\rangle_2)$; b) $ \chi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0\rangle_1 0\rangle_2 + \sqrt{2} 0\rangle_1 1\rangle_2)$; c) $ \chi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0\rangle_1 + \sqrt{2} 1\rangle_1)$; d) $ \chi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\rangle_1 1\rangle_2 + \sqrt{2} 0\rangle_1 0\rangle_2)$.	Analisar o conhecimento dos alunos acerca da aplicação do princípio de superposição de estados quânticos nos estados emaranhados.

pensamentos nitidamente clássicos ainda suplanta os conceitos da MQ. Já se pode afirmar, ao analisar somente esta questão, que os alunos necessitam de um tempo maior de exposição aos conceitos de MQ para que haja um aprendizado efetivo dos mesmos.

Quatro alunos (Alunos 3, 4, 8 e 9) acertaram os quatro itens da segunda questão da avaliação. Nota-se que o papel dos coeficientes (amplitudes na superposição de estados) na determinação das probabilidades de obtenção de valores de medida foi devidamente incorporado à estrutura cognitiva destes alunos. Quanto aos outros, o Aluno 1 não respondeu a questão e os demais apresentaram grande dificuldade em reconhecer os valores possíveis de medida de uma grandeza física em um estado do sistema quântico, bem como que ignoraram o que é afirmado no enunciado sobre o colapso do vetor de estado.

Somente o Aluno 9 respondeu corretamente todos os itens da terceira questão da avaliação, enquanto quatro (Alunos 1, 2, 6 e 10) não a responderam. Dos demais, dois (Alunos 5 e 7) não acertaram qualquer dos itens, outros dois (Alunos 3 e 4) acertaram somente o primeiro e o Aluno 8 acertou somente o segundo. Esta questão parece indicar que a representação de um estado como combinação de auto-estados do operador posição não constitui uma situação suficientemente simples (clara) para a aplicação dos primeiros princípios da MQ. A ausência freqüente de justificativas nas respostas pode indicar que os alunos responderam as questões sem pensar nos conceitos que abordavam ou, eventualmente, um vício de atitude frente a questões que lhes são apresentadas.

Cinco alunos (Alunos 3, 4, 6, 7 e 8) responderam corretamente a quarta questão da avaliação. Dois alunos não responderam (Alunos 1 e 10) e os demais não responderam de forma correta. As justificativas apresentadas pelos alunos em suas respostas indicam que o experimento de Stern-Gerlach, além de simples, é uma ótima situação-problema para verificar o papel do número de medidas realizadas na obtenção de informação sobre o estado de um sistema quântico. Se em um curso de dezoito horas metade dos alunos mostrou compreender bem este princípio, provavelmente a utilização do experimento de Stern-Gerlach como situação-problema em cursos de maior duração surta efeitos ainda melhores.

Os alunos 9 e 10 apresentaram corretamente a razão entre $|\varphi(x,t)|^2$ e $|\varphi(x,0)|^2$ na quinta questão da avaliação, mas não souberam explicar o que isto significava. Os demais alunos não acertaram a questão ou a deixaram em branco. Mesmo a equação de Schrödinger independente do tempo sendo bastante utilizada em cursos de graduação, vê-se que inclusive alunos dos últimos semestres têm dificuldade para interpretá-la, pois o que esta questão trouxe como resultado foi somente um exercício matemático, sem que os alunos tirassem conclusões. A evolução temporal dos estados quânticos é um assunto que merece um cuidado maior em próximas etapas da pesquisa, principalmente por este ser um tópico abordado em cursos de graduação.

A última questão da avaliação foi respondida de forma correta, para os quatro estados apresentados, pelos alunos 2, 4 e 5. Outros três alunos responderam alguns dos itens de modo correto. Dos demais, dois não haviam participado da aula sobre emaranhamento quântico e não responderam esta questão e os outros dois não souberam responder satisfatoriamente. As justificativas dos alunos conduzem à conclusão que o emaranhamento de estados quânticos é um modo eficaz de trabalhar o princípio de superposição linear, mesmo que os alunos não o percebam. A resposta do Aluno 5 mostra bem isto: *“As letras a e d estão certas, [...] pois quando o objeto quântico 1 se encontra em um determinado estado, o objeto quântico 2 se encontra no mesmo estado (item d) [...]. Os estados emaranhados se caracterizam por apresentarem dois objetos quânticos, por exemplo, separados por uma determinada distância, mas que ainda compõem o mesmo sistema”*.

Fazendo uma análise do desempenho dos alunos na avaliação final e considerando a duração do curso, conclui-se que o resultado é satisfatório. Alguns dos pontos mencionados merecem ser revisados para melhor utilização em outros cursos e novas situações-problema devem ser sugeridas para que alguns dos princípios da MQ, tais como a superposição linear de estados e o colapso do vetor de estado, sejam mais bem compreendidos pelos alunos, ainda que inicialmente de modo superficial.

2.2.5. As Entrevistas com os Alunos

Os dados das entrevistas realizadas no último dia do curso foram obtidos de uma maneira informal em que os conceitos da MQ surgiram naturalmente de conversa com os alunos. Em nenhum momento se propôs realizar esta entrevista como uma forma de avaliação oral.

Ao perguntar aos alunos sua opinião geral acerca dos tópicos apresentados, foi unânime a opinião favorável ao curso. Os alunos julgaram o conteúdo bastante interessante, apesar de muitos considerarem alguns tópicos difíceis, não propriamente pela MQ em si, mas sim pelo acúmulo de disciplinas da graduação com estudos simultâneos aos do curso. Convém lembrar que este curso preencheria horas de atividades extracurriculares e não se tratava de uma disciplina obrigatória do currículo destes alunos.

O Aluno 2 afirmou achar o curso interessante por apresentar uma abordagem diferente (simples e fácil de compreender) quando comparado a disciplinas de MQ dos cursos de graduação e que, por isso, ele se sentira estimulado para aprender.

O Aluno 10, que lecionava em uma escola de Ensino Médio, também afirmou ter gostado do curso, principalmente pelas implicações dos primeiros princípios, tais como a Criptografia Quântica e o Emaranhamento Quântico. Disse que isto possibilitava exemplificar a seus alunos as situações em que estão sendo aplicados, na atualidade, os conceitos da MQ.

Foi possível ver, também, que inclusive alguns alunos que não responderam corretamente os questionários conseguiram expressar suas idéias melhor em um diálogo do que na avaliação formal. O Aluno 1, por exemplo, não respondeu quatro das seis questões da avaliação final, mas demonstrou bons conhecimentos do conteúdo durante a entrevista, conforme se pode observar nos seguintes trechos:

(sobre superposição de estados) “Demorei até pra entender, durante o curso, a superposição de estados. Achei muito interessante quando você pediu pra eu fazer uma analogia com a luz. Isso me ajudou bastante. Então, agora ficou uma coisa mais palpável mesmo, uma coisa mais real, embora ainda por definição ela seja probabilidade. Mas ela ficou mais real pra mim.”

(sobre emaranhamento quântico) “Eu até já tinha ouvido falar antes, agora entender essa ligação entre duas partículas... eu fiquei muito tempo pensando nisso: ‘Como essa ligação é feita?’. Porque ela não depende da distância, pode estar em outra galáxia que estarão emaranhadas e há uma simultaneidade...”

(sobre o papel da medida) “Quando a gente observa, vai interferir na medida. Quando se observa, quebra-se a função de onda. Isso também, pra mim, já ficou claro”.

(sobre operadores) “O operador é a medida”.

Mesmo que as definições apresentadas por este aluno não sejam as cientificamente aceitas, pode-se afirmar que um passo importante foi dado em direção a elas, iniciando o processo de transformação dos conceitos e teoremas-em-ação em conceitos e teoremas científicos.

A seguir, alguns trechos das entrevistas com os demais alunos que contêm algumas respostas espontâneas acerca dos primeiros princípios da MQ. Mesmo não estando totalmente corretas, estas afirmações indicam que a maioria dos alunos conseguiu compreender boa parte dos tópicos apresentados no decorrer do curso.

(sobre superposição linear de estados) “A gente tem duas opções possíveis para um mesmo estado.” (Aluno 5)

*(sobre estado de um sistema quântico) “Todas as informações físicas do sistema estão no estado.” (Aluno 3)
“É o conjunto de grandezas físicas que podem ser determinadas em um elemento quântico.” (Aluno 6)*

*(sobre operadores) “São os operadores que dão os autovalores.” (Aluno 5)
“Os operadores servem pra fazer as medições, pra retirar as informações dos estados quânticos. [...] O operador é própria medição. Uma medição é uma operação.” (Aluno 9)*

(sobre autovalores) “São os únicos valores para a medida.” (Aluno 5)

*(sobre colapso do vetor de estado) “Faz-se uma medida e altera o padrão original do sistema.” (Aluno 6)
“Como objetos quânticos são microscópicos, não se consegue fazer medições sem interagir.” (Aluno 9)*

(sobre compatibilidade de observáveis) “Deve-se realizar uma medida de cada vez, não podendo ser realizadas duas medidas ao mesmo tempo.” (Aluno 6)

(Sobre a não formação da figura de interferência ao se verificar por qual fenda o elétron passa) “Porque a medida causa um colapso. Vai alterar o estado.” (Aluno 2)

(Sobre emaranhamento quântico) “É uma condição, uma situação, uma relação que existe entre dois objetos quânticos e que tem uma dependência entre eles. Sabendo o estado de uma, imediatamente se consegue saber o estado da outra. Uma coisa importante também é que isso independe da distância entre as duas partículas.” (Aluno 3)

(sobre um fóton passando por dois polarizadores iguais em seqüência) “Se não passar por um, então com certeza não vai passar por outro e se passar por um, vai passar pelo outro.” (Aluno 7)

(sobre autovalor de um elétron em superposição de auto-estados de spin) “A média é zero, mas só se obtém $+\frac{\hbar}{2}$ ou $-\frac{\hbar}{2}$.” (Aluno 9)

(sobre a equação de Schrödinger independente do tempo) “Não é pra determinar os valores de energia?” (Aluno 9)

2.3. Atuação em Disciplina na UFRGS

Nesta seção, analisam-se os dados obtidos em uma atuação junto a disciplina “A Física do Século XX-A” do curso de Licenciatura em Física da UFRGS. Esta disciplina foi ministrada pela Professora Dra. Naira Maria Balzaretto, que concordou com a atividade e acompanhou todas as aulas.

O programa a desenvolver no curso abrangia, em princípio, os mesmos tópicos apresentados na UNISINOS e foram utilizados nesta fase instrumentos de análise e avaliação semelhantes.

A análise dos dados desta etapa foi desdobrada em quatro seções. Na primeira, analisa-se o questionário aplicado para verificação de conhecimentos prévios dos alunos, averiguação importante para configurar adequadamente o curso a ser oferecido, alterando alguns aspectos do projeto. Na segunda etapa, são analisados os apontamentos registrados no diário de bordo das aulas e, no

etapa seguinte, é analisada a avaliação dos alunos. Na quarta parte, são analisados os questionários para levantamento de opinião dos alunos são analisados, destacando-se a opinião deles sobre o curso e o aprendizado dos princípios da MQ trabalhados.

Todas as aulas da disciplina foram ministradas na sala 206 do prédio 43.135 do Instituto de Física da UFRGS, em períodos de duas horas-aula às terças e quintas-feiras de 22 de abril a 05 de junho de 2008. A sala em questão foi escolhida porque dispunha de computadores que podiam ser utilizados individualmente pelos alunos. Foram ministradas oito aulas e outras duas para entrevistas com os alunos. A avaliação final ocorreu em 15 de maio e, nos dias 03 e 05 de junho de 2008, o desempenho dos alunos na avaliação foi comentado e reavaliados os conteúdos que não haviam sido devidamente compreendidos.

Estavam matriculados na disciplina apenas quatro alunos, que constituíram o público desta etapa da pesquisa. Para diferenciar e preservar os participantes da atividade, eles serão caracterizados como: Aluno A, Aluno B, Aluno C e Aluno D.

2.3.1. Avaliação de Conhecimentos Prévios

O questionário para avaliação de conhecimentos prévios dos alunos deste curso foi aplicado no primeiro dia de aula e consistiu de duas questões, tendo a primeira, seis itens. A primeira pergunta visava averiguar conhecimentos prévios acerca de alguns importantes conceitos da MQ. Os quatro alunos responderam este questionário, mas algumas respostas não constam a seguir ou por não terem sido apresentadas ou por não serem condizentes com o objetivo da questão. A primeira pergunta é enunciada a seguir e as respostas dos alunos constam da Tabela 11.

O que você entende por:

- a) função de onda, em Mecânica Quântica*
- b) estado de um objeto quântico*
- c) superposição linear de estados*
- d) compatibilidade de observáveis*
- e) evolução temporal de estado (função de onda)*
- f) emaranhamento de sistemas quânticos*

A análise de cada conjunto de respostas sugere que o aluno C aparenta não possuir conhecimentos prévios sobre os tópicos considerados e que os alunos A e D têm uma noção nebulosa a respeito deles. Já o aluno B aparenta possuir bons conhecimentos prévios acerca de vários dos conceitos envolvidos (estado, superposição de estados e observável). Isto indica que, no decorrer do curso, tais conceitos devem ser minuciosamente trabalhados e com um nível maior de aprofundamento, para não desestimular o aluno B.

Tabela 11. Respostas dos alunos à primeira questão do questionário

Aluno	Resposta
Aluno A	a) Uma função matemática que descreve um comportamento ondulatório (posição, velocidade...) b) A posição ou a velocidade do objeto em um determinado instante. c) Soma de estados.
Aluno B	b) Conjunto de informações sobre um sistema quântico. c) Dois ou mais estados podem ser considerados juntos como um estado. d) Um observável é uma medida possível de ser feita. No mundo quântico, algumas medidas impedem a obtenção de outras. e) Mudanças das características (dados, medidas, etc.) de um estado. f) Combinação de sistemas.
Aluno C	a) Tenta prever a posição de uma determinada partícula em um determinado tempo.
Aluno D	a) Movimento de partícula com energia quantizada. b) Características mensuráveis de um objeto que não alteram o objeto ao serem medidas. c) Soma de estados que ocorrem ao mesmo tempo. Por exemplo, soma de ondas. e) Alteração da função ao longo do tempo. Por exemplo, $\sum_{t=0}^{\infty}$.

Quanto à segunda pergunta, apresentada a seguir, todos os alunos parecem desconhecer o que vem a ser colapso da função de onda. De fato, os alunos A e C não responderam esta pergunta, enquanto os alunos B e D afirmaram que não conhecem tal conceito. A segunda pergunta estava enunciada da seguinte forma:

Você já ouviu falar em colapso da função de onda (também conhecido como filtragem do pacote de ondas)? Você pode explicar o significado desta expressão?

O conceito de colapso da função de onda deve ser trabalhado com várias situações-problema para que sua conceitualização possa ocorrer.

2.3.2. Relato das Aulas

Nesta seção, apresentam-se algumas manifestações ocorridas no curso ministrado na UFRGS. Além disto, alguns pontos destacados nos minicursos e no curso de extensão da UNISINOS também são salientados.

Na primeira aula da disciplina da UFRGS, os quatro alunos matriculados estavam presentes. A exemplificação do emaranhamento quântico como fenômeno não trivial não surtiu o efeito esperado de surpresa nos alunos, tal como ocorreu no curso da UNISINOS. Percebeu-se, porém, que se enfatizada a distância a que os fótons foram separados no experimento mais recente, os alunos passariam a se interessar pelo fenômeno. Também parece haver significativo interesse quando se afirma que tal efeito é uma previsão teórica dos primeiríssimos princípios da MQ.

Bastante participativo, o aluno B respondeu a maioria das perguntas propostas, chegando inclusive a ir ao quadro para resolver alguns dos exercícios desta aula.

Face às respostas rápidas dos alunos, aparentemente sem pensar, pode-se supor que o aprendizado dos conceitos e princípios relacionados aos experimentos de dupla fenda com ondas e com elétrons foram incorporados à estrutura cognitiva dos alunos de forma mecânica e não significativa. Isto pôde ser observado mais claramente quando se solicitou que fosse apresentada a explicação do padrão de contagens de (vários) elétrons, semelhante ao padrão de interferência das ondas. A explicação que mais apareceu foi a de que os elétrons possuem ondas associadas a seu movimento e que tais ondas sofrem difração em cada uma das fendas e se superpõem, causando o efeito de interferência observado no segundo anteparo.

Quando foi apresentado o experimento de dupla fenda com um único elétron sendo emitido de cada vez pela fonte, surgiu outro fato que corrobora a idéia de que a MQ ainda não estava estabelecida de forma significativa na estrutura cognitiva dos alunos. Ao propor aos alunos que discutissem o assunto e chegassem a um consenso sobre qual padrão de contagens apareceria no segundo anteparo, notou-se que não havia noção alguma, por parte dos alunos, sobre o conceito de superposição linear de estados para explicar o efeito com um elétron de cada vez. Fato interessante foi ter o aluno B

comentado que, intuitivamente, se veria um padrão de contagens como o das partículas clássicas, mas que, como a MQ não é intuitiva, se veria o outro padrão.

Quanto aos conteúdos sobre espaços lineares, os alunos afirmaram que já haviam estudado muitos dos conceitos apresentados nas disciplinas de Álgebra Linear do curso de graduação, mas que, devido ao longo tempo sem contato com tais tópicos, esqueceram as definições de interesse. Isto não representa um grande problema para o ensino de MQ porque a introdução dos postulados faz com que tais conceitos acabem por ser utilizados em situações-problema, sendo mais facilmente adaptados à estrutura cognitiva.

A compreensão do conceito de estado foi percebida ao se pedir ao aluno B que descrevesse o estado de sua lapiseira. Enquanto descrevia o estado do objeto, o aluno incluía informações referentes à posição da lapiseira, quantidade de grafite dentro da mesma e outros detalhes. Porém, ao listar as informações, ele se corrigiu, pois acreditou estar caracterizando uma lapiseira qualquer e não a sua própria. No entanto, esqueceu-se, naquele momento, de descrever o estado do objeto em um determinado instante de tempo, o que foi lembrado pelo professor na aula seguinte.

Acredita-se que, apesar de certa apatia, conseguiu-se despertar nos alunos um bom interesse para o prosseguimento do aprendizado. Ao término desta aula, foi entregue a primeira lista de exercícios aos alunos.

Na segunda aula, novamente os quatro alunos matriculados estavam presentes. Iniciou-se a aula com uma breve revisão dos tópicos da aula anterior, lembrando que o aluno B descrevera muito bem o estado de sua lapiseira, mas que esquecera de mencionar o instante de tempo. Logo após esta observação, o referido aluno teceu um comentário muito interessante que sugere compreensão do conceito de dependência temporal do estado: *“Hoje, por exemplo, minha lapiseira está com menos grafite do que na última aula”*.

Assim como nos minicursos e no curso da UNISINOS, os alunos estranharam inicialmente a notação de Dirac. O “susto” foi menor, porém, ao salientar-se que o “ket” é uma representação de um estado por um vetor, pois assim como os vetores se somam gerando outros vetores, o mesmo acontece com os estados quânticos, como se observa na experiência de dupla fenda.

Tornou-se, então, mais claro para os alunos o porquê de utilizar vetores para representar estados quânticos.

Muitas situações-problema com superposições de estados foram propostas aos alunos. Quando apresentado o vetor de estado normalizado $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ ($|+\rangle$ e $|-\rangle$ relativos às posições das fendas acima e abaixo do ponto central do primeiro anteparo e normalizados a um) para o experimento de dupla fenda com elétrons, os alunos foram questionados sobre o papel do coeficiente que multiplica os auto-vetores de posição. Dado o valor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ destes coeficientes, o aluno C perguntou se teria alguma relação com o seno (ou cosseno) do ângulo de 45° . Após se explicar que os valores dos coeficientes estão intimamente relacionados com a probabilidade da obtenção dos resultados da medida, ainda surgiram dúvidas sobre como ocorre esta relação, dúvidas estas que seriam sanadas em momento posterior, conforme a cronologia do curso.

O exemplo do computador quântico não acarretou grandes dificuldades ao serem trabalhados os estados relacionados com cada “bit clássico”. Percebeu-se uma relativa compreensão dos alunos com relação aos coeficientes (amplitudes de probabilidade) no exercício proposto (ver Apêndice I, p. 130). Eles responderam corretamente que quando os dois coeficientes são iguais, a probabilidade de se obter os resultados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ é igual. Porém, quando se tratou dos estados de projeção de spin de um elétron, observou-se certo receio na resposta. Ao se apresentar um vetor de estado de projeção de spin de um elétron como uma superposição de dois outros, com um dos coeficientes sendo um número complexo, os alunos pareceram inseguros em suas respostas. Verificou-se, então, que os alunos não lembravam (ou não sabiam) como calcular o quadrado do módulo de um número complexo. Após uma breve explicação, o receio pareceu dar lugar à compreensão.

Aqui, o experimento de Stern-Gerlach, assim como no curso da UNISINOS, surtiu bom efeito para a compreensão das probabilidades de medida em um sistema binário. Novamente aqui, o que intrigou os alunos foi a escolha da prata, de número atômico 47, para a realização do experimento. Mais especificamente, ficaram intrigados com o que poderia haver de

importante no fato de a prata ter um único elétron em um dos orbitais s (o mais “externo”). Em complementação, a Professora Naira Balzaretto solicitou aos alunos que pensassem no que aconteceria com o experimento de Stern-Gerlach se fosse utilizado o mercúrio, de número atômico 48. Como o mercúrio possui os dois últimos elétrons no orbital s , os momentos magnéticos intrínsecos (e os spins) se cancelariam e não apareceria, no anteparo, a mesma figura associada à prata.

Utilizando *applets* do experimento de Stern-Gerlach, os alunos conseguiram reforçar o entendimento de que, ao medir determinado valor para a projeção do spin do elétron, repetir-se-á o valor da medida, se uma segunda medida for efetuada imediatamente em seguida. Este experimento foi importante também para se compreender como se estabeleceram o valor do spin do elétron e a quantização do observável momento angular.

A análise dos aspectos das medidas em estados quânticos foi inicialmente proposta com um exemplo clássico. De fato, em um primeiro momento, os alunos não sabiam como são obtidas informações sobre o estado de um sistema quântico. Porém, ao se perguntar “como você faz para saber sua altura?”, ou seja, induzindo os alunos a pensar classicamente, conseguiu-se que eles compreendessem como obter informações do estado quântico. Apesar de a teoria de Vergnaud propor uma ruptura entre a Mecânica Clássica e a MQ, a utilização de analogias clássicas é útil para detalhar a estrutura dos elementos utilizados em MQ. Porém, as analogias não devem ser usadas para explicar os fenômenos da MQ, somente sua estrutura. Por exemplo, a analogia entre vetores geométricos e vetores de estado de sistemas quânticos se refere a uma mesma estrutura matemática.

Reportando-se novamente ao experimento de Stern-Gerlach, foi mostrado aos alunos que, em algumas situações, a medida não provoca a mudança do estado e que tais situações são de particular interesse para a MQ.

Fazendo uma analogia clássica com os operadores em espaços lineares, os alunos, nesta fase, mostraram compreender que os operadores, em MQ, atuam em “algo”. Com isto, ficou salientada a importância da utilização de tais artifícios para o trato da MQ.

A terceira aula, em que estavam presentes novamente os quatro alunos matriculados, iniciou com uma breve revisão dos conceitos de estado, de

observáveis e de operadores, dada a sua importância para a compreensão dos postulados básicos da MQ.

Nesta aula, observou-se que os alunos já não temiam tanto a notação de Dirac, mas ainda revelavam receio em lidar com os conceitos recém apresentados. Durante a apresentação dos dois primeiros postulados, os alunos aparentavam estar assustados, embora tais conceitos tivessem sido exaustivamente trabalhados com eles nas aulas anteriores. Face a isto, procurou-se somente ratificar as últimas exposições para que realmente parecessem aceitáveis as afirmações presentes em cada um dos postulados.

A aflição demonstrada pelos alunos ficou mais evidente ante a pergunta: “Considerando o que foi exposto sobre a caracterização do estado quântico parece-lhe, agora, aceitável salientar que o estado é o depositário dos valores das grandezas físicas afetas ao sistema?”. De início, os alunos não consideraram natural a afirmação e somente após lembrar o conceito de estado é que conseguiram uma relativa compreensão do primeiro postulado.

Após a apresentação do segundo postulado, o aluno B questionou sobre como seria a “cara” de um operador. Foi-lhe respondido que o operador pode ser representado por uma matriz atuando sobre outra e a Professora Naira também lembrou que os operadores podem ser representados por funções ou operações sobre funções, citando como exemplo o operador momento linear no espaço de funções do caso unidimensional ($\hat{p}_x \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx}$). Exemplos neste sentido já haviam sido propostos na primeira lista de exercícios, mas aparentemente, naquele momento, os alunos não fizeram a conexão necessária. Isto, em parte, motivou a inclusão de uma situação-problema semelhante na quarta lista de exercícios.

Os alunos não tiveram dificuldade em trabalhar com a análise quântica do experimento com a polarização da luz. Grandes dificuldades realmente apareceram ao considerar os resultados de medidas (autovalores) e o colapso do estado na medida.

Perguntou-se diretamente ao aluno D qual seria o resultado de uma medida para a projeção do spin em uma dada direção de um elétron preparado

no estado $|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{spin-para-cima}\rangle + |\text{spin-para-baixo}\rangle)$, mas o aluno não respondeu.

Uma avaliação da participação dos alunos nas aulas até aquele momento conduz ao panorama que se segue.

- Aluno A: *Pouco fala, mas parece interessado, apesar da postura de indiferença em determinados momentos.*
- Aluno B: *Fala bastante e se interessa pela aula. Apesar de sempre chegar atrasado, parece compreender bem o assunto e consegue até “brincar” com alguns tópicos da MQ.*
- Aluno C: *Fala pouco, mas é esforçado. Parece precisar ser conduzido para acompanhar os tópicos apresentados.*
- Aluno D: *O mais quieto de todos. Seu silêncio e seus atrasos preocupam, mas, segundo a professora, resolve os exercícios e obtém boas notas nas avaliações.*

Todos os alunos estiveram presentes na quarta aula. A aula foi iniciada perguntando-se sobre as eventuais dúvidas na resolução dos exercícios das duas primeiras listas. Os alunos A e C afirmaram não conseguir resolver dois exercícios, enquanto o aluno B ainda não havia tentado resolvê-los. Já o aluno D afirmou não ter qualquer dúvida a respeito.

Após trabalhar os exercícios, foram apresentados alguns exemplos de uso de operadores, incluindo comutadores. O objetivo maior destes exemplos foi discutir a relação com observáveis compatíveis e não-compatíveis. Percebeu-se um grande interesse dos alunos neste assunto, sendo possível verificar isto através de sua atenção na explicação e na avidez com que copiavam os exemplos apresentados no quadro.

A seguir, fez-se uma rápida revisão da terceira aula e do terceiro postulado. Basicamente, foi retomado o exemplo da polarização da luz e o do experimento de Stern-Gerlach. Porém, ao se indagar sobre como os dois primeiros postulados se relacionavam com o terceiro, os alunos ficaram em silêncio, indicando a pouca convicção da ligação existente entre tais postulados.

Ainda nesta aula, iniciou-se a discussão sobre o quarto postulado solicitando-se aos alunos que construíssem dois estados de projeção de spin

com componentes não-nulas de “spin-para-cima” e “spin-para-baixo”. Dois alunos escreveram no quadro, a pedido, os estados que construíram. O aluno A apresentou um vetor de estado normalizado: $|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}|+\rangle + \sqrt{3}|-\rangle)$, enquanto

o aluno C escreveu um vetor de estado não-normalizado: $|\Psi_2\rangle = \frac{3}{7}|+\rangle + \frac{4}{7}|-\rangle$.

Assim, tratou-se de normalizar este vetor de estado explicando que vetores de estados não-normalizados não fornecem de imediato as informações sobre probabilidades de obtenção de resultados de medida. Também foi lembrado que os autovetores superpostos podem apresentar coeficientes reais negativos ou complexos, além de coeficientes reais positivos.

Perguntados sobre a analogia existente entre os auto-vetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$ e os vetores \hat{i} e \hat{j} do plano, os alunos pensaram por um certo tempo antes de responder. O aluno B foi o primeiro a se manifestar respondendo corretamente à pergunta.

Despertou grande interesse nos alunos saber que um mesmo vetor de estado pode ser expandido em termos de auto-vetores de diversos operadores (decomposição espectral). Inicialmente pensavam que um vetor de estado que descrevesse as possibilidades de medida de spin não poderia ter informação sobre outras grandezas físicas. Apresentou-se, então, aos alunos um exemplo de um vetor de estado que foi expandido ora em termos de auto-estados de operadores de energia, ora de spin e ora de posição.

Como o colapso do vetor de estado já fora discutido antecipadamente, os alunos não tiveram problemas para compreender o quinto postulado, bem como porque é conhecido como “Postulado da Projeção”.

A aula foi encerrada com a rerepresentação dos cinco postulados discutidos até aquele momento.

Com todos os alunos presentes novamente, a quinta aula foi dedicada ao postulado da evolução temporal dos estados quânticos.

Não houve grandes sinais de dificuldades e nem perguntas até ser enunciado o sexto postulado. Os alunos pareceram compreender o porquê de se utilizar o vetor de estado quântico como objeto de estudo na evolução temporal, face à equação de Schrödinger e a incompatibilidade de alguns observáveis.

Contudo, eles tiveram dificuldade em aceitar que a parte temporal de uma autofunção pode ser colocada à mão na equação de Schrödinger ($\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$), dada uma solução de energia definida $\Psi(x,0)$. Somente após muitos exemplos é que perceberam que a situação em que é possível propor soluções separáveis.

Para problemas em que o hamiltoniano é independente do tempo e se estabelecem soluções separáveis, foi necessário repetir estas considerações várias vezes até que, finalmente os alunos apresentaram respostas com segurança. Ainda assim, o aluno C perguntou se o autovalor de energia obtido pela equação de Schrödinger independente do tempo é, de fato, a energia total do sistema.

Foi discutida exaustivamente a importância do termo de interferência presente em $|\varphi(x,t)|^2$ quando a função é uma superposição de autofunções de energia $\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x,t) + \phi_2(x,t))$, resultando disto a deformação.

Vendo o *applet* que apresenta a deformação do estado com o passar do tempo, a primeira reação de alguns alunos foi de espanto. Depois, aceitaram que aquilo por conduzir à modificação das probabilidades de encontrar a partícula confinada em uma região de um poço duplo, com o passar do tempo. O aluno B perguntou se havia alguma aplicação prática do que foi apresentado no *applet*, sendo, então, analisado o exemplo da molécula de amônia, em que a simulação de vai-e-vem do átomo de nitrogênio, de um lado a outro do plano dos átomos de hidrogênio, com o desenrolar do tempo, conduz a uma situação de "relógio atômico", pela regularidade com que ocorre (LYONS, 1950).

Ao final da aula, o aluno B fez ainda mais duas perguntas. Primeiro ele quis saber o que acontece se o hamiltoniano for dependente do tempo e depois perguntou o que os pacotes de ondas representavam. A Professora Naira respondeu a primeira pergunta enquanto a segunda foi respondida de forma sucinta e complementada na aula seguinte. Após isto, o aluno ainda teceu um comentário sobre a evolução temporal dos estados quânticos: *"Ah! Então há um 'determinismo' na Quântica"*.

A sexta aula não contou com a presença do aluno D. O principal tema da aula foi a apresentação de uma das principais implicações dos primeiros

princípios da MQ – o emaranhamento quântico. Porém, antes de focar o emaranhamento quântico, foram novamente discutidos os principais aspectos da evolução temporal e a importância do termo de interferência na deformação dos pacotes de ondas. Esta retomada do assunto mostrou-se fastidiosa para os alunos, visível em seus semblantes. O aluno C abaixou a cabeça em determinados momentos, como se a cochilar durante a explicação.

Quanto ao emaranhamento quântico, os alunos afirmaram nunca terem visto nada a respeito. Enfatizou-se desde o início que este fenômeno decorre do princípio de superposição linear de estados, quando se trabalha com dois ou mais sistemas quânticos.

Em um primeiro momento, os alunos não compreenderam o emaranhamento quântico. Somente após a apresentação de muitas situações é que captaram a correlação e a idéia da inseparabilidade de estados envolvidos no emaranhamento, mesmo que a grandes distâncias.

Antes mesmo de questionar por que o emaranhamento quântico não viola a teoria da relatividade, o aluno B perguntou se cada uma das partículas constituintes dos sistemas quânticos não saía da “fonte” com seu “subestado” “pré-definido”, o que antecipou a explicação de não violação da teoria da relatividade pelo emaranhamento quântico.

Em relação à pergunta sobre quais postulados estavam relacionados ao emaranhamento quântico, o aluno B respondeu prontamente que o princípio da superposição linear era muito importante para este fenômeno. Crê-se que esta resposta decorreu da ênfase dada à superposição linear durante toda a aula. Somente após serem novamente repassados os postulados, os alunos apontaram outros postulados que consideraram associados ao emaranhamento quântico.

Outros exemplos foram apresentados para o emaranhamento quântico, inclusive um com emaranhamento de três partículas em um estado conhecido como estado GHZ (BOUWMEESTER et al., 1999). Tais exemplos constituem-se em mais situações para o emaranhamento quântico, tornando possível aplicar-se o que foi exposto em aula.

Novamente o aluno D não estava presente na sétima aula. Inicialmente, foi discutida a lista 6, que apresentava a deformação de um pacote de ondas dente-de-serra.

A seguir, apresentou-se outra aplicação da MQ: a criptografia quântica, mais especificamente, o protocolo BB84. Como uma espécie de organizador prévio, buscou-se primeiro apresentar o conceito de criptografia e alguns métodos de criptografia clássica – cifra de César, codificação de mensagens, etc. Também foi argumentado sobre a necessidade da criação da criptografia quântica com o advento do computador quântico.

Apesar do susto com o processo de construção da chave criptográfica segundo o protocolo BB84, os alunos pareceram compreender tal processo, inclusive questionando aspectos relacionados à aplicação prática deste protocolo.

A avaliação realizada na oitava aula teve a presença dos quatro alunos. A avaliação continha dez questões e foi utilizada para verificar o aprendizado dos alunos sobre os conceitos apresentados no curso e sobre se as situações-problema utilizadas foram eficientes para o ensino de MQ.

Ao final da avaliação, o aluno B apresentou algumas dúvidas sobre a resolução da prova e teceu alguns comentários sobre o curso, considerando que a prova estava condizente com o que foi exposto em aula e que esperava ter se saído bem na avaliação. Argumentou ainda que o material entregue era muito bom, bem explicado e de fácil consulta, mas considerou as listas de exercícios de difícil compreensão, no tocante ao que se solicitava em cada questão.

Os alunos A e C utilizaram aproximadamente uma hora para terminar a avaliação e o aluno D precisou de pouco mais de meia hora. Este aluno chegou atrasado, iniciou a avaliação aproximadamente uma hora após os demais e chegou a considerar a hipótese de não a realizar. O aluno B usou aproximadamente 80 minutos para resolver a avaliação. A análise das respostas dos alunos às questões da avaliação consta da próxima seção.

As duas últimas aulas foram utilizadas para rever os principais tópicos não devidamente compreendidos, segundo as respostas da avaliação. Além disto, no último encontro foi aplicado um questionário para avaliar a opinião dos alunos acerca do curso, do material didático e dos demais recursos utilizados.

2.3.3. Avaliação

Após sete aulas, os alunos foram submetidos a uma avaliação, com dez questões, para verificação do aprendizado dos conceitos e princípios até então apresentados. A seguir, cada questão é enunciada juntamente com seus objetivos e com a análise das respostas de cada aluno.

A primeira questão da avaliação consta da Tabela 12.

Tabela 12. Enunciado e objetivos da primeira questão da avaliação

	Questão	Objetivo
1)	Os experimentos de dupla fenda podem revelar propriedades fundamentais dos sistemas regidos pela Mecânica Quântica. a) Como você caracterizaria o estado de um elétron que chega ao segundo anteparo, sem ter sofrido qualquer observação antes? b) Em relação ao item acima, imediatamente após a detecção do elétron no segundo anteparo, o que você diria sobre o estado deste elétron?	Averiguar se os alunos conseguem descrever o estado de um sistema quântico e se compreenderam o postulado do colapso do estado em uma situação-problema.

As respostas dos alunos à primeira questão constam da Tabela 13.

Tabela 13. Respostas dos alunos à primeira questão da avaliação

Aluno	Resposta
Aluno A	a) A posição do elétron vai ser uma posição aleatória; com muitos elétrons, visualizaremos a figura de interferência. b) Imediatamente após a detecção, o elétron vai estar no estado que foi medido primeiro.
Aluno B	a) No experimento de dupla fenda, o elétron tem somente duas opções: ou passa pela fenda da esquerda (1) ou passa pelo da direita (2). Ou seja, quando o elétron chega ao segundo anteparo, ele passou ou pela fenda (1) ou pela (2). Este estado é a superposição do caso (1) com o (2). b) Imediatamente após a detecção, temos algum dos dois citados acima. Por exemplo, temos caso (1). Agora o estado do elétron não é mais a superposição do (1) com o (2) e sim somente o (1).
Aluno C	a) O estado do elétron que chega ao segundo anteparo sem ter sofrido qualquer observação antes é um estado de superposição linear. b) Que ele tem uma probabilidade maior de ficar na linha central da figura de interferência.
Aluno D	a) Como um ponto na figura de interferência de um sistema ondulatório. Onde a posição deste "ponto" pode ser aproximada em função das probabilidades do spin do elétron. Ou seja, uma superposição vetorial do tipo: $ \varphi\rangle = c_1\rangle + c_2\rangle$. b) É a sobreposição linear dos possíveis vetores de deslocamento do elétron.

Pelas respostas, considera-se que o aluno A não compreendeu que se solicitava descrição do estado do elétron. Suas respostas dizem respeito à posição do elétron no segundo anteparo. Apesar de considerar as duas fendas para os possíveis estados do elétron, o aluno B revela não ter compreendido o

aspecto quântico essencial do fenômeno, mantendo a concepção clássica. As respostas do aluno C indicam uma boa compreensão do conceito de superposição linear, mesmo sem ter expressado a superposição em termos de estado de posição. Mostra, também, uma ligação com os conceitos advindos da Física Ondulatória (probabilidade maior nas franjas centrais). As respostas do aluno D podem ser consideradas desconexas, usando simbologia e nomenclatura de modo totalmente errado. Considera-se que este aluno respondeu a pergunta sem se preocupar com o que estava sendo solicitado.

Em uma análise geral desta questão, pode-se concluir que a maioria dos alunos pouco compreendeu o conceito de superposição linear de estados e o colapso da função de onda quando aplicados aos experimentos de dupla fenda. Isto leva a crer que outras situações sejam necessárias para o aprendizado de tais conceitos, conforme será visto posteriormente.

O enunciado e os objetivos da segunda questão da avaliação constam da Tabela 14.

Tabela 14. Enunciado e objetivos da segunda questão da avaliação

	Questão	Objetivo
2)	Por que o estado de um sistema quântico é também denominado “vetor de estado”?	Analisar se os alunos compreenderam a relação entre a representação do estado (o arcabouço da teoria) e a superposição linear de estados quânticos.

As respostas dos alunos a esta questão constam da Tabela 15 a seguir.

Tabela 15. Respostas dos alunos à segunda questão da avaliação

Aluno	Resposta
Aluno A	Pois as propriedades dos vetores também são aplicáveis aos estados dos sistemas quânticos (ex.: superposição linear)
Aluno B	Porque, assim como os vetores, os estados podem ser descritos (ou decompostos) como a soma (ou superposição) de outros estados linearmente independentes e, também, aplicar operações de projeção, multiplicação por escalar, etc.
Aluno C	Porque os estados dos sistemas quânticos possuem as mesmas propriedades dos vetores, tal como a superposição linear. Assim, podemos representar o estado do sistema quântico por um vetor o qual chamamos vetor de estado.
Aluno D	Pois é representado por soma vetorial, tendo como resultado um vetor unitário.

Considerando as respostas e o material trabalhado no curso, parece que a representação de um estado quântico por um vetor de estado foi devidamente conceitualizada pelos alunos, embora o aluno D tenha misturado alguns conceitos e utilizado a noção de vetor unitário em sua resposta. A

utilização no curso de um tópico específico sobre espaços lineares parece ter sido o catalisador desta compreensão.

A seguir, na Tabela 16, apresentam-se o enunciado e os objetivos da terceira questão da avaliação.

Tabela 16. Enunciado e objetivos da terceira questão da avaliação

	Questão	Objetivo
3)	O que significa, no seu entender, a superposição linear de estados de sistemas quânticos? Dê algum exemplo.	Avaliar a compreensão e aplicação pelos alunos do conceito de superposição linear de estados de sistemas quânticos.

As respostas dos alunos a esta questão são apresentadas na Tabela 17.

Tabela 17. Respostas dos alunos à terceira questão da avaliação

Aluno	Resposta
Aluno A	Se existe a probabilidade da ocorrência de mais de um estado, então a soma destes estados também é um estado possível. Ex.: spin $ \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(+\rangle + -\rangle)$
Aluno B	A superposição linear de sistemas quânticos quer dizer que um estado pode ser igual à soma de outros estados independentes. Da mesma forma, muitos estados podem ser entendidos como um estado “resultante” que os engloba. Ou seja, no experimento de dupla fenda (como questão 1), por exemplo, o caso (1) e o caso (2) ($ 1\rangle$ e $ 2\rangle$), antes da detecção do elétron no anteparo, são estados independentes e possíveis para o elétron. Então, a superposição linear destes pode ser considerada um único estado: $ \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\rangle + 2\rangle)$.
Aluno C	A superposição linear de estados significa que se temos dois estados possíveis para um sistema quântico uma combinação linear desses dois estados gera outro estado que também é possível para este sistema quântico. Como exemplo, temos o experimento de dupla fenda com partículas quânticas, no qual vimos que, mesmo jogando uma partícula quântica de cada vez, depois de muitos eventos obtemos o mesmo padrão de interferência das ondas, para os quais o princípio de superposição linear é válido.
Aluno D	É o resultado que se tem da soma vetorial de possíveis estados de um sistema, onde cada estado é representado com a sua probabilidade de ser o resultado. Ex: $ A\rangle = \frac{ +\rangle}{\sqrt{5}} + \frac{2 -\rangle}{\sqrt{5}}$ No caso o estado “A” possui 20% de probabilidade de ter como resultado o estado $ +\rangle$ e 80% de probabilidade de ser o estado $ -\rangle$.

Com base nas respostas dos alunos, pode-se concluir que o conceito de superposição linear de estados foi compreendido, contrariando aparentemente a conclusão da primeira questão. Contudo, a primeira questão aponta para a dificuldade dos alunos em abandonar uma visão clássica sobre o fenômeno ali analisado.

A seguir, enuncia-se a quarta questão da avaliação e apresentam-se seus objetivos na Tabela 18.

Tabela 18. Enunciado e objetivos da quarta questão da avaliação

	Questão	Objetivo
4)	<p>Um feixe de 20.000 elétrons, todos no estado $\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} +\rangle + \frac{3}{\sqrt{10}} -\rangle$ de projeções de spin em uma dada direção, é submetido a uma experiência do tipo “Stern-Gerlach”, com campo magnético inhomogêneo na referida direção.</p> <p>a) Após a passagem de 4 elétrons pelo campo magnético, quantos elétrons você espera encontrar no estado $+\rangle$?</p> <p>b) Após a passagem dos 20.000 elétrons pelo campo magnético, quantos elétrons você espera encontrar no estado $-\rangle$?</p> <p>c) Os feixes resultantes no item b) acima são submetidos, imediatamente após, a novos experimentos com campo magnético apontando na mesma direção que o anterior. O que se espera como resultado?</p>	<p>Analisar a compreensão pelos alunos do papel dos coeficientes da superposição linear de estados de um sistema quântico na probabilidade de resultados de medida em alta e em baixa estatísticas e o papel do colapso do vetor de estado no experimento de Stern-Gerlach.</p>

As respostas dos alunos a esta questão constam da Tabela 19.

Tabela 19. Respostas dos alunos à quarta questão da avaliação

Aluno	Resposta
Aluno A	<p>a) 0, 1, 2, 3 ou 4.</p> <p>b) $20.000 \cdot \frac{9}{10} = 18.000$ elétrons</p> <p>c) O mesmo resultado.</p>
Aluno B	<p>a) Pela probabilidade de $\frac{1}{10}$ para $+\rangle$ e $\frac{9}{10}$ para $-\rangle$, é esperado, após 4 lançamentos, apenas 1 para $+\rangle$.</p> <p>b) Após 20.000, é esperado 18.000 para $-\rangle$.</p> <p>c) Teremos somente detecções para $-\rangle$, ou seja, teremos 18.000 marcações para $-\rangle$ e 0 (zero) para $+\rangle$.</p>
Aluno C	<p>a) Possibilidade do estado $+\rangle$ é: $P_{ +\rangle} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{10} = 10\%$.</p> <p>$n = 4$ elétrons $4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = 4$ elétrons estarão no estado $+\rangle$.</p> <p>b) $n = 20.000$ elétrons $P_{ -\rangle} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10} = 90\%$</p> <p>$20.000 \cdot \frac{9}{10} = 18.000$ elétrons estarão no estado $-\rangle$</p> <p>c) Que todos os elétrons (18.000) que passaram pelo campo magnético anterior apresentarão o mesmo estado ($-\rangle$) novamente.</p>
Aluno D	<p>a) $\left. \begin{matrix} 4 - 100\% \\ x - 10 \end{matrix} \right\} x = 0,4$ elétrons</p> <p>Se espera que não haja nenhum elétron no estado $+\rangle$.</p> <p>b) $\left. \begin{matrix} 20 - 100\% \\ x - 90 \end{matrix} \right\} x = 18.000$ elétrons</p> <p>c) Que se encontra apenas elétrons no estado $-\rangle$.</p>

O aluno A revela haver compreendido que poucas medidas são pouco conclusivas acerca do estado do objeto quântico, algo que os demais não compreenderam. O aluno D “fracionou” o elétron, algo não admitido nem mesmo pelo Eletromagnetismo Clássico. No entanto, nota-se que todos os alunos tiveram boa compreensão do papel dos coeficientes da superposição no vetor de estado de um sistema quântico, pois todos responderam corretamente o segundo item desta questão. Também parece que o experimento de Stern-Gerlach constitui uma boa situação para discussão do conceito de colapso do vetor de estado, pois todos os alunos responderam corretamente este item. De um modo geral, o experimento de Stern-Gerlach mostra-se como um bom exemplo para a aplicação dos conceitos fundamentais da MQ.

O enunciado e os objetivos da quinta questão da avaliação constam da Tabela 20 e as respostas dos alunos a esta questão são apresentadas na Tabela 21.

Tabela 20. Enunciado e objetivos da quinta questão da avaliação

	Questão	Objetivo
5)	<p>Um feixe de 50.000 fótons, todos preparados da mesma maneira, apresentou, na determinação de polarização linear, 30.000 fótons com polarização horizontal $H\rangle$ e 20.000 com polarização vertical $V\rangle$. Isto significa que:</p> <p>a) 30.000 fótons do feixe inicial se encontravam no estado $H\rangle$ e 20.000 no estado $V\rangle$?</p> <p>b) os 50.000 fótons se encontravam em um estado que é uma superposição linear dos estados $H\rangle$ e $V\rangle$?</p> <p>c) não se pode concluir entre as alternativas a) e b), para caracterizar os estados dos fótons do feixe?</p>	<p>Verificar a compreensão a respeito de estados quânticos, da superposição linear dos estados quânticos, colapso do vetor de estado e das probabilidades de obtenção dos valores de medida aplicados à polarização de fótons.</p>

Assim como o experimento de Stern-Gerlach, a polarização de fótons também mostra ser um excelente exemplo de aplicação dos primeiros princípios da MQ. As respostas fornecidas pelos alunos A e C indicam uma boa compreensão dos conceitos de estado quântico, superposição linear de estados quânticos, colapso do vetor de estado e probabilidades de obtenção dos valores de medida. Apesar da resposta sucinta dos alunos B e D, parece também que a aprendizagem destes conceitos foi significativa, embora a resposta ao terceiro item seja motivo de dúvidas.

Tabela 21. Respostas dos alunos à quinta questão da avaliação

Aluno	Resposta
Aluno A	a) Após a medida, eles se encontram nos estados descritos, e não antes (todos preparados da mesma maneira). b) Sim. c) Temos uma superposição de estados que pode ser expressa, por exemplo, como: $ \Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3} H\rangle + \sqrt{2} V\rangle)$.
Aluno B	a) Não. b) Sim. c) Não.
Aluno C	a) Isso significa que a medida colapsou 30.000 fótons para a polarização horizontal e 20.000 fótons para a polarização vertical. b) Sim. c) O que se pode dizer sobre o estado dos fótons no feixe é que ele tinha probabilidade maior para a polarização horizontal do que para a vertical. $ \Psi\rangle = \sqrt{\frac{30.000}{50.000}} H\rangle + \sqrt{\frac{20.000}{50.000}} V\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} H\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} V\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3} H\rangle + \sqrt{2} V\rangle)$
Aluno D	a) Não. b) Sim. c) Não.

Na Tabela 22, é enunciada a sexta questão da avaliação e apresentados seus objetivos.

Tabela 22. Enunciado e objetivos da sexta questão da avaliação

	Questão	Objetivo
6)	a) Por que associamos operadores às grandezas físicas, em Mecânica Quântica? b) O estado de um elétron pode conter informações concomitantes sobre os observáveis posição e energia cinética? Justifique sua resposta.	Analisar se os alunos fazem a correspondência entre operadores e grandezas físicas. Também se pretende verificar sobre a compreensão da compatibilidade de observáveis de um sistema quântico.

Na Tabela 23, apresentam-se as respostas dos alunos a esta questão. Analisando tais respostas, nota-se que houve uma boa compreensão da (in)compatibilidade de observáveis, contrapondo-se a isso uma não-conceitualização do papel dos operadores na MQ. Nenhum dos alunos mencionou que toda medida, não só em MQ, é uma operação e que isso justifica a associação de operadores às grandezas físicas. Parece que as situações utilizadas no decorrer do curso não levaram à conceitualização do segundo postulado da MQ, apesar do interesse dos alunos. A incompatibilidade entre os observáveis posição e energia cinética, contudo, foi bem compreendida. Isto, aliás, já era conhecido por alguns dos alunos como o Princípio de Incerteza de Heisenberg. Percebeu-se, porém, que os alunos

faziam a ligação entre esse princípio e a incompatibilidade de observáveis, sem remeter um ao outro. Parece, também, que os alunos passavam a considerar o conceito de incompatibilidade de observáveis como mais amplo que o Princípio de Incerteza.

Tabela 23. Respostas dos alunos à sexta questão da avaliação

Aluno	Resposta
Aluno A	a) Pois a medida, na Mecânica Quântica, é denotada pela ação de um operador sobre um estado. b) Não, pois posição (\hat{x}) e energia cinética ($\frac{\hat{p}^2}{2m}$) não comutam, não se pode ter informações sobre estes dois dados ao mesmo tempo. $\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} \neq 0$
Aluno B	a) Porque são eles que nos retornam o valor das medidas, ou seja, se cada medida de uma grandeza física exige uma interação, o operador representa matematicamente esta interação. b) Não, pois ao medir a posição após ter obtido a E_c , a primeira informação não é compatível à outra. Ou seja, a operação de medida altera a medida da E_c e vice-versa.
Aluno C	a) Para que possamos medir o valor das grandezas físicas. b) Não. Pois os observáveis posição e energia cinética são observáveis incompatíveis, ou seja, quando medimos um deles modificamos a informação a respeito do outro, o que inviabiliza a obtenção dos dois valores em um mesmo estado.
Aluno D	a) Pois o operador aplicado ao estado retorna uma grandeza física mensurável. b) Não, pois ambos são observáveis que alteram o estado do elétron, ou seja, uma vez executada a medida o elétron já não tem mais as características iniciais.

O aluno D não respondeu as questões seguintes, por isso seu nome será omitido das tabelas subseqüentes. A sétima questão da avaliação é apresentada na Tabela 24, juntamente com seus objetivos.

Tabela 24. Enunciado e objetivos da sétima questão da avaliação

	Questão	Objetivo
7)	<p>O estado do elétron de um átomo de hidrogênio, em um dado instante de tempo, é $\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2} E_1\rangle + \sqrt{3} E_2\rangle)$, com $E_1 \neq E_2$ sendo E_1 e E_2 os dois primeiros valores de energia do elétron, tais que $\hat{H} E_1\rangle = E_1 E_1\rangle$ e $\hat{H} E_2\rangle = E_2 E_2\rangle$. Lembrete: o valor da energia para o elétron no átomo de hidrogênio pode ser estimado pela relação $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ eV.</p> <p>a) $\Psi\rangle$ é um auto-estado de energia? b) Qual a probabilidade de, em uma medida de energia, se encontrar o valor $\frac{2E_1 + 3E_2}{5}$? c) Imediatamente após uma medida de energia com resultado E_1, qual a probabilidade de se encontrar o elétron, em uma segunda medida, no estado $E_2\rangle$? Por quê? d) Que valores podem ser obtidos para a energia do elétron que se encontra no estado $\Psi\rangle$?</p>	<p>Verificar a compreensão do conceito de auto-estado, dos possíveis valores de medida e do colapso do vetor de estado aplicados ao estado de um elétron de um átomo de hidrogênio.</p>

Na Tabela 25, são apresentadas as respostas dos alunos à sétima questão da avaliação. Percebe-se nesta questão que o conceito de auto-estado não foi bem compreendido pelo aluno C, enquanto a resposta do aluno A é dúbia e o aluno B parece ter compreendido o conceito. As respostas dos alunos ao segundo e ao quarto item da questão sugerem que houve uma boa aceitação do postulado que estabelece que os únicos possíveis valores de medida são os autovalores. Também se pode concluir, face às respostas do terceiro item, que os alunos compreenderam bem o colapso do vetor de estado aplicado a esta situação. Pode-se, então, concluir que o exemplo de um elétron do átomo de hidrogênio é uma boa situação de aplicação dos conceitos de estado de um sistema quântico, do colapso do vetor de estado e dos possíveis valores de medida.

Tabela 25. Respostas dos alunos à sétima questão da avaliação

Aluno	Resposta
Aluno A	a) $ \Psi\rangle$ é a superposição de estados, logo é um estado. b) 0%, ou se encontra E_1 ou E_2 . c) 0%, logo após a 1ª medida o estado é $ E_1\rangle$. d) Ou $-13,6\text{eV}$ (E_1) ou $-13,6/4$ (E_2).
Aluno B	a) Não, $ \Psi\rangle$ é o estado de energia. $ E_1\rangle$ e $ E_2\rangle$ é que são auto-estados. b) Zero. O estado $ \Psi\rangle$ nos dá somente as opções $ E_1\rangle$ ou $ E_2\rangle$ com suas respectivas probabilidades: $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$. c) Zero; pois como a medida “colapsa” o sistema para um dos auto-estados, o estado do elétron após a medida do E_1 é $ E_1\rangle$. d) E_1 ou E_2 .
Aluno C	a) Sim. b) Nula. Pois em uma medida de energia ou encontramos E_1 ou encontramos E_2 . c) Nula. Pois ao medirmos a energia e encontrar o resultado E_1 colapsamos o estado para E_1 e então as próximas medidas darão somente E_1 . d) $E_1 = -\frac{13,6}{1^2}\text{eV} = -13,6\text{eV}$ e $E_2 = -\frac{13,6}{2^2}\text{eV} = -\frac{13,6}{4}\text{eV} = -3,4\text{eV}$

A Tabela 26 apresenta o enunciado e os objetivos da oitava questão da avaliação.

Tabela 26. Enunciado e objetivos da oitava questão da avaliação

	Questão	Objetivo
8)	Estados emaranhados parecem ser simplesmente superposições lineares de outros estados. Em que diferem os estados emaranhados dos não-emaranhados?	Averiguar a compreensão pelos alunos do conceito de estado emaranhado.

As respostas dos alunos à oitava questão constam da Tabela 27. Tais respostas indicam que eles têm uma razoável compreensão da definição de estados emaranhados. Os alunos enunciaram corretamente uma das condições para que o estado esteja emaranhado (conhecimento do estado da outra partícula sem necessidade de medida), porém os alunos A e B nada mencionaram sobre a inseparabilidade dos estados emaranhados. Apesar disto, somente o aluno C lembrou que a ligação de duas partículas em um estado emaranhado pode existir mesmo quando separadas por grandes distâncias. O exemplo apresentado pelo aluno A indica que houve compreensão do papel da superposição linear nos estados emaranhados. Por isso, pode-se concluir que as situações utilizadas foram proveitosas para o aprendizado deste conceito.

A nona questão traz mais informações sobre a compreensão dos estados emaranhados pelos alunos.

Tabela 27. Respostas dos alunos à oitava questão da avaliação

Aluno	Resposta
Aluno A	Ao fazermos a medida de um estado sabemos, sem medir, os estados que os outros se encontram. Ex.: $ \phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(+\rangle_1 -\rangle_2 + -\rangle_1 +\rangle_2)$ \rightarrow spin. Se medirmos, por exemplo, $ +\rangle_1$, sabemos que $ -\rangle_2$.
Aluno B	Um estado emaranhado nos dá automaticamente o valor de um auto-estado ao se medir outro. Esta é a diferença entre os não-emaranhados, que, após uma medida, nos dá ou um ou outro e, se medirmos um, nada podemos dizer do outro.
Aluno C	Nos estados emaranhados quando obtemos a medida de um dos valores o outro também é conhecido, pois nos estados emaranhados há uma ligação entre as duas medidas mesmo que elas estejam separadas por grandes distâncias. Enquanto que nos estados não emaranhados isso não ocorre.

O enunciado e os objetivos da nona questão são apresentados na Tabela 28.

Tabela 28. Enunciado e objetivos da nona questão da avaliação

	Questão	Objetivo
9)	Quais dos estados abaixo você diria que são estados emaranhados? Por quê? a) $ \chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(H\rangle_1 V\rangle_2 + i\sqrt{2} V\rangle_1 H\rangle_2)$; b) $ \chi_2\rangle = \frac{1}{2}(H\rangle_1 H\rangle_2 + \sqrt{3} V\rangle_1 H\rangle_2)$; c) $ \chi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(H\rangle_1 - \sqrt{2} V\rangle_1)$; d) $ \chi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(H\rangle_1 H\rangle_2 - \sqrt{2} V\rangle_1 V\rangle_2)$.	Analisar o conhecimento dos alunos acerca da aplicação do princípio de superposição de estados quânticos nos estados emaranhados.

As respostas dos alunos a esta questão constam da Tabela 29.

Tabela 29. Respostas dos alunos à nona questão da avaliação

Aluno	Resposta
Aluno A	Apenas $ \chi_1\rangle$ e $ \chi_4\rangle$, pois com a medida de 1, sabemos, sem medir, o estado de outro.
Aluno B	<p>a) Sim, pois ao obter $H\rangle_1$ já podemos afirmar que temos $V\rangle_2$ e, ao se obter $V\rangle_1$, já sabemos que a única opção é $H\rangle_2$.</p> <p>b) Não, pois ao obter $H\rangle_2$, não sabemos se temos $H\rangle_1$ ou $V\rangle_1$.</p> <p>c) Não, pois ao medir $H\rangle_1$ teremos somente $H\rangle_1$ e o mesmo para $V\rangle_1$. Não há relação entre os auto-estados.</p> <p>d) Sim, pois ao obter $H\rangle_1$, teremos automaticamente a informação de que temos $H\rangle_2$ e vice-versa. O mesmo para $V\rangle_1$ ou $V\rangle_2$.</p>
Aluno C	Os estados $ \chi_1\rangle$, $ \chi_3\rangle$ e $ \chi_4\rangle$, pois são estados em que a medida da polarização de um implica diretamente em determinada polarização para outro. No estado $ \chi_2\rangle$ temos que se medirmos a polarização horizontal para o primeiro obteremos a posição horizontal para o segundo e se medirmos a polarização vertical para o primeiro obteremos a mesma polarização vertical para o segundo. Ou seja, se o segundo for horizontal o primeiro pode ser horizontal ou vertical e esta é uma característica dos estados não-emaranhados.

Como visto na discussão da questão anterior, os alunos não explicitaram sua compreensão do conceito de estados emaranhados e esperava-se que talvez ocorressem erros nas respostas à questão atual. No entanto, os alunos A e B responderam corretamente a esta questão enquanto o aluno C marcou erradamente um dos estados apresentados como estado emaranhado ($|\chi_3\rangle$). Tal estado é um estado de um único fóton expresso como a superposição de auto-estados de polarização. Portanto, como há somente uma partícula neste estado, não há emaranhamento. Nota-se, então, que, apesar de não definirem o estado emaranhado, os alunos conseguem reconhecê-lo quando utilizado em situações-problema. As justificativas apresentadas na identificação dos estados emaranhados utilizam as mesmas afirmações propostas pelos alunos na oitava questão.

A Tabela 30 apresenta o enunciado e os objetivos da última questão da avaliação e as respostas dos alunos constam da Tabela 31.

Tabela 30. Enunciado e objetivos da décima questão da avaliação

	Questão	Objetivo
10)	<p>a) Qual o significado da equação de Schrödinger dependente do tempo $i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(t)\rangle = \hat{H} \Psi(t)\rangle$?</p> <p>b) Um elétron livre de momento linear $p = \hbar k$ (caso unidimensional) encontra-se, no instante $t=0$, no estado descrito pela função espacial $\varphi(x,0) = C \exp(ikx)$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Determine $\varphi(x,t)$ e a razão entre $\varphi(x,t) ^2$ e $\varphi(x,0) ^2$. O que significa este resultado? • Se o elétron livre for preparado no instante $t=0$ em um estado $\Phi(x,0) = A \exp(ikx) + B \exp(2ikx)$, qual será seu estado no instante $t=T$? Isto afeta a relação entre $\Phi(x,0) ^2$ e $\Phi(x,T) ^2$? 	Verificar a compreensão sobre a evolução temporal de estados quânticos e sobre o efeito da dependência temporal na superposição de estados de sistemas quânticos.

Tabela 31. Respostas dos alunos à décima questão da avaliação

Aluno	Resposta
Aluno A	<p>a) O sistema evolui rapidamente com o passar do tempo.</p> $\varphi(x,t) = C e^{ikx} A e^{-\frac{iEt}{\hbar}} = B e^{ikx} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ <p>b) 1ª parte: $\left. \begin{aligned} \varphi(x,t) ^2 &= C^2 e^{2ikx} A^2 e^{-\frac{2iEt}{\hbar}} \\ \varphi(x,0) ^2 &= C^2 e^{2ikx} \end{aligned} \right\} \frac{ \varphi(x,t) ^2}{ \varphi(x,0) ^2} = A^2 e^{-\frac{2iEt}{\hbar}} \Rightarrow \text{termo de interferência}$</p> <p>2ª parte: $\varphi(x,t=T) = (A e^{ikx} + B e^{2ikx}) C e^{-\frac{2iEt}{\hbar}}$, o resultado de $\frac{ \varphi(x,t) ^2}{ \varphi(x,0) ^2}$ será o mesmo, com a diferença de $t = T$ neste caso.</p>
Aluno B	a) A equação de Schrödinger mostra como se dá a evolução temporal de um certo estado quântico sem se fazer nenhuma medida. Ela descreve a evolução "natural" do sistema se ele não for "colapsado" por nenhuma medida.
Aluno C	a) Que o estado só evoluirá durante o tempo se houver mudanças na energia.

Analisando as respostas dos alunos ao primeiro item desta questão e as omissões ao segundo item, conclui-se que não foi atingida a compreensão da evolução temporal dos estados quânticos de parte dos alunos, mesmo com a ênfase dada neste tópico em diversos momentos do curso. No entanto, a resposta do aluno B ao primeiro item mostra que, para ele, as situações-problema utilizadas foram proveitosas, mas que devem ser revistas e ampliadas de modo que contemplem o aprendizado de mais alunos. Em especial, nota-se que o efeito da superposição linear na dependência temporal dos estados não foi compreendido pelos alunos, embora o aluno A tenha apresentado um termo de interferência em sua resposta ao segundo item, sentindo que há necessidade de tal termo, mas sem saber como obtê-lo. Como o presente curso era de curta duração, julgava-se de antemão que alguns

tópicos talvez não fossem bem compreendidos pelos alunos. Afinal, o domínio do campo conceitual da MQ, como outros, necessita de um razoável tempo de estudo por parte do aprendiz. Neste caso, a compreensão da evolução temporal dos estados quânticos foi ponto negativo, devendo ser melhorada em cursos futuros. Além disto, o conceito de operador merece mais atenção. Considerando esta análise, pode-se dizer que o curso foi proveitoso para que os alunos pudessem avançar na compreensão de conceitos e princípios da MQ, expressos nos cinco primeiros postulados, através das situações-problemas apresentadas. Observou-se que os alunos tiveram maior familiaridade e facilidade com certas situações do que com outras, o que indica a conveniência de utilizar mais situações em que os conceitos da MQ sejam aplicados, conforme recomendado por Vergnaud, para poder promover a internalização e a conceitualização de tais conceitos de forma significativa.

2.3.4. Opiniões dos Alunos Acerca do Curso

Apresentam-se, nesta seção, as opiniões dos alunos sobre o curso ministrado, sua metodologia e os recursos utilizados.

Os quatro alunos expuseram suas opiniões em um questionário apresentado no último encontro, após ter sido realizada a avaliação final e ter sido divulgado o resultado. Oito questões foram propostas e são apresentadas a seguir.

Em sua opinião quais, dentre os tópicos abordados, são os mais relevantes? Por quê?

Em sua opinião, qual o ponto, tópico ou aspecto mais interessante do curso? Por quê?

Que tópicos você considerou como os mais fáceis?

Que tópicos você considerou como os mais difíceis?

Em sua opinião, a introdução de applets fez com que o curso se tornasse mais interessante?

Em sua opinião, a introdução de applets auxiliou na compreensão dos tópicos apresentados no curso?

Em sua opinião, as listas de exercícios auxiliaram na compreensão dos tópicos abordados no curso?

Qual a sua opinião sobre o material didático distribuído nas aulas?

Os questionários serão analisados individualmente, procurando mostrar a impressão final de cada aluno sobre o curso.

O aluno A afirmou considerar a equação de Schrödinger como o tópico mais relevante dentre os abordados devido a suas aplicações e, por isso, também considerou este o ponto mais interessante do curso, por causa dos gráficos apresentados. O apreço do aluno por este tópico fica evidente ao lembrar que ele foi o único a tentar resolver a última questão da avaliação.

Um dos focos deste estudo, a superposição linear de estados foi considerado como o tópico mais fácil do curso pelo aluno A. Efetivamente, as respostas fornecidas por ele sugerem que houve uma boa compreensão de tal conceito pelo mesmo.

O aluno A foi sucinto ao afirmar que o trabalho com *applets* tornou o curso mais interessante e facilitou a compreensão dos tópicos apresentados. Apontou, no entanto, a falta de questões teóricas nas listas de exercícios e considerou que o material de apoio estava um pouco carregado, sugerindo que poderia ser mais direto (resumido). Em conformidade com o marco teórico utilizado, o intuito deste trabalho era analisar o aprendizado de conceitos em determinadas situações-problema. Isto levou à utilização de muitas aplicações de tais conceitos tanto nas listas de exercícios como no material de apoio, supondo-se que a conceitualização poderia ser promovida sem a necessidade de utilização de questões puramente teóricas ou muito matemáticas. A quantidade de aplicações apresentadas fez com o que o material não ficasse “sucinto”, como preferiria o aluno. O material de apoio, contudo, promove uma introdução gradual de cada conceito em cada uma de suas seções.

Os postulados e suas aplicações, juntamente com a equação de Schrödinger, foram apontados como os pontos mais relevantes pelo aluno B dentre os tópicos abordados. Conseqüentemente, considerou as aplicações dos postulados como a parte mais interessante do curso, principalmente por apresentar inúmeras situações contra-intuitivas.

Nenhum dos tópicos abordados foi considerado fácil pelo aluno B e a correspondente parte conceitual foi tida como difícil.

Para este aluno, a introdução de *applets* tornou o curso mais interessante e auxiliou na compreensão dos tópicos apresentados porque facilitava a visualização dos fenômenos e de suas diferentes soluções.

As listas de exercícios foram igualmente consideradas por ele como essenciais para a compreensão dos tópicos abordados. No entanto, citou

dificuldades em interpretar os enunciados dos exercícios e sugeriu reformular os enunciados. O aluno B considerou o material didático bom e de fácil entendimento.

O aluno C apontou a superposição linear e os estados emaranhados como os tópicos mais relevantes dentre os apresentados, por representarem as principais diferenças entre a MQ e a Mecânica Clássica. A superposição linear foi apontada como o tópico mais interessante do curso pelo seu caráter contra-intuitivo e por ser, para ele, a base dos postulados.

Em conseqüência, a superposição linear foi considerada como o tópico mais fácil e em que atingiu melhor compreensão. As respostas do aluno C às questões da avaliação cujo objetivo foi o de verificar a compreensão do conceito de superposição linear de estados indicam que efetivamente ele apresentou uma boa compreensão deste conceito. Para ele, os operadores foram o tópico mais difícil do curso. Conforme constatado na avaliação, a compreensão do conceito de operador pelos alunos foi parcial e deve receber mais atenção em futuras atividades.

O aluno C considera, ainda, que a introdução de *applets* facilita a visualização dos fenômenos estudados, mas que poderiam ter sido explorados com mais tranqüilidade. Portanto, o ritmo acelerado do curso pode ter prejudicado o aprendizado de alguns tópicos.

O material didático foi considerado bom por este aluno, principalmente devido à quantidade de exemplos e referências nele incluídos.

O aluno D julga que os postulados da MQ se constituem nos tópicos mais importantes dentre os abordados no curso, por ser a disciplina uma introdução à MQ. O resultado dos experimentos de dupla fenda é considerado o ponto mais interessante do curso, por ser totalmente inesperado sob uma perspectiva clássica.

A superposição linear foi apontada por ele como o tópico mais fácil e os cálculos com operadores foram tidos como difíceis, mas considera que isto pode ser devido à falta de alguns conceitos prévios. O aluno D respondeu satisfatoriamente as questões que visavam verificar a compreensão do conceito de superposição linear de estados de sistemas quânticos, mas apresentou dificuldades na compreensão do conceito de operador.

Para este aluno, a introdução de *applets* faz com que se tenha uma noção dos novos conceitos. Considera, no entanto, que, apesar de a maioria dos *applets* ser bastante elucidativa, os que envolviam gráficos e tratavam da evolução temporal dos estados quânticos foram “indigestos”.

O aluno D considerou boas as listas de exercícios e o material de apoio, porém afirmou sentir necessidade de mais exemplos. Considerando a quantidade de situações-problema utilizada no material de apoio e que se constituem em exemplos de aplicações dos conceitos trabalhados, presume-se que este aluno esteja sentindo falta de situações que envolvem resolução de problemas matemáticos, tais como aparecem nos livros-texto utilizados na maioria das disciplinas introdutórias de MQ em cursos de graduação.

Observe-se, contudo, que este aluno faltou a várias aulas, o que deve ser levado em conta na análise de suas manifestações.

2.4. Síntese dos Resultados

Feita a análise dos resultados coletados nas distintas etapas da pesquisa, passa-se a responder tentativamente as perguntas fundamentais norteadoras da pesquisa, enunciadas no início deste trabalho, bem com a tecer algumas considerações a respeito.

A primeira pergunta é enunciada novamente a seguir:

- *Quais as principais dificuldades encontradas por professores e licenciandos no aprendizado dos conceitos de **estado** e de **superposição linear de estados** em MQ?*

As abordagens mais tradicionais das disciplinas de MQ em cursos de graduação trabalhavam predominantemente com os conceitos de dualidade onda-partícula e do Princípio de Incerteza. Tais conceitos, quando tratados de modo simplificado, acabam muitas vezes se tornando entraves para a assimilação de outros conceitos e leis da MQ. Nas três distintas etapas da pesquisa, foi possível averiguar que a abordagem e os exemplos utilizados minimizaram certas dificuldades no aprendizado destes outros conceitos. A noção de estado de agregação da matéria, conhecida pelos alunos como "estado físico", causou confusão inicial, mas foi superada e, além disto, não se constituiu em obstáculo para o aprendizado inicial dos demais conceitos

quânticos. Em geral, a estratégia de evitar interpretar os fenômenos apresentados com conceitos clássicos ocasionou um bom aprendizado dos conceitos quânticos em todos os cursos apresentados.

Uma dificuldade apresentada na compreensão do conceito de estado de um sistema quântico foi a dependência no fator tempo. Nas diversas ocasiões em que se solicitou um exemplo de estado de sistema quântico, praticamente nenhum aluno lembrou de referir a que instante de tempo estava associado o estado descrito. Conseqüentemente, isto também dificultou a compreensão da evolução temporal do estado. A relação entre vetores de estado e vetores geométricos deve receber a devida importância, pois muitos alunos desejavam saber como obter o módulo, a direção e o sentido de um vetor de estado. É muito importante salientar, desde o início, que há uma analogia entre as estruturas matemáticas e não um paralelo entre os sistemas. O trabalho de Greca e Herscovitz (2001) aponta que, no conceito de superposição linear de estados, os alunos apresentam dificuldade de aprendizagem significativa, o que ocasiona também dificuldades no aprendizado de vários dos aspectos do problema da medida. Aqui, a abordagem utilizada enfatiza a importância do conceito de superposição linear de estados desde o início, em todas as etapas da pesquisa e em todas as instâncias dos cursos. Ao considerar a superposição linear como o postulado zero da MQ, busca-se colocar este conceito na raiz dos postulados, dando-lhe a devida ênfase, tanto em sua própria definição como na dos demais conceitos. Um único revés ocorreu, contudo, no curso da UNISINOS, em que o conceito de superposição linear de estados foi confundido com o de colapso do vetor de estado e com o de probabilidade de obtenção dos valores de medida.

Pelos resultados obtidos, crê-se que o aprendizado inicial dos conceitos de superposição linear de estados e de estado de um sistema quântico pode servir adequadamente ou como subsunçor ou como organizador prévio para uma aprendizagem significativa em cursos com maior nível de aprofundamento. Dada a curta duração dos cursos analisados não é adequado, contudo, considerar que tenha ocorrido domínio do campo conceitual da MQ.

A segunda pergunta é enunciada a seguir.

- *Como (e quais) situações-problema podem ajudar no aprendizado significativo dos conceitos de **estado** e de **superposição linear de estados**?*

Praticamente todas as situações-problema utilizadas nas três etapas da pesquisa contribuíram positivamente para a compreensão de tais conceitos. Dentre as situações-problema utilizadas, as formulações do experimento de dupla fenda e do experimento de Stern-Gerlach foram as que mais chamaram a atenção dos alunos. Por isto, estes experimentos foram utilizados por eles em diversos momentos ao longo dos cursos. Tais experimentos se constituem, também, em bons exemplos de aplicação dos conceitos de superposição linear de estados, de estado de um sistema quântico, de colapso do vetor de estado, de possíveis valores de medida e de probabilidades de obtenção dos valores de medida e efetivamente facilitaram a compreensão de muitos destes conceitos. Foi surpresa verificar que, apesar de sua importância para a constatação do comportamento não clássico da matéria microscópica, a abordagem do experimento de dupla fenda, tão comum em cursos introdutórios de MQ, não foi muito efetiva para ancorar o conceito de superposição linear de estados, talvez por seu "apelo clássico". Isto indica que alguns dos exemplos mais comuns no ensino de MQ também devem ser analisados criticamente para verificar quão realmente são funcionais no aprendizado de determinados conceitos. A decomposição de um estado em superposição de auto-estados do operador posição utilizada na avaliação do curso da UNISINOS também se mostrou menos frutífera para o aprendizado da MQ e deve ser mais trabalhada.

Cada situação-problema utilizada serviu como um meio de promoção da conceitualização dos primeiros princípios da MQ. Entretanto, as situações-problema que tratam dos conceitos de operador e, sobretudo, da evolução temporal dos estados quânticos devem ser ampliadas para que estes conceitos sejam mais bem entendidos.

A terceira questão é novamente enunciada a seguir.

- *A utilização de temas atuais de grande repercussão (no trabalho presente, o Emaranhamento Quântico e a Criptografia Quântica) pode ajudar no aprendizado da MQ?*

Certamente, a utilização de temas atuais influencia positivamente no interesse dos alunos e, em consequência, na compreensão de conceitos relacionados à MQ. Devido à ampla divulgação pelos diversos meios de comunicação, os intrigantes resultados de tais temas catalisam o interesse dos alunos e criam uma situação de pré-disposição para a aprendizagem, essencial para a ocorrência da aprendizagem significativa. Adicionalmente, a simplicidade do conceito de emaranhamento quântico, em contraposição a suas consequências, facilita o aprendizado do conceito de superposição linear de estados quânticos, do qual decorre. Acredita-se, ainda, que a Criptografia Quântica influencie positivamente o aprendizado do conceito de superposição linear de estados devido à grande quantidade de aplicações no cotidiano e em aspectos da tecnologia que atingem intensamente os jovens. O protocolo de criptografia quântica utilizado nos cursos (BB84) utiliza fótons polarizados como meio de transmissão das chaves criptográficas. Sugere-se que novas pesquisas com este tema utilizem, além deste protocolo, o E91 (EKERT, 1991), que utiliza pares emaranhados de fótons para que seja melhorada a compreensão do conceito de emaranhamento quântico e, por fim, dos primeiros princípios da MQ. Sugere-se, ademais, que a Criptografia Quântica seja tratada concomitantemente à Computação Quântica, pela sua íntima relação.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram analisadas as principais dificuldades na compreensão dos conceitos de estado quântico e de superposição linear de estados apresentadas pelos participantes de três minicursos e dois cursos de curta duração elaborados e ministrados a professores de Ensino Médio e alunos de Licenciatura em Física. Foram, também, examinados como (e quais) situações-problema podem influenciar no aprendizado de tais conceitos. Para isto, a pesquisa foi realizada em três etapas com objetivos escalonados. Avaliando o desenvolvimento do projeto, os objetivos traçados e os resultados alcançados, podem ser apontados diversos aspectos positivos e alguns negativos a serem melhorados em aplicações futuras da atividade.

As dificuldades encontradas freqüentemente na compreensão dos conceitos de estado quântico e de superposição linear de estados, aparentemente bastantes diminuídas e em vários aspectos superadas, levam a crer que boa parte das situações-problema utilizadas efetivamente favorece o aprendizado de tais conceitos de uma forma razoavelmente simples, adequado a cursos de natureza introdutória ou de curta duração, bem como a supor que podem conduzir a uma aprendizagem significativa.

Também se pode salientar a importância de utilizar diversas situações-problema para trabalhar com os conceitos da MQ de modo a proporcionar inúmeros meios para que os alunos consigam compreendê-los. Isto se torna evidente ao observar que alguns alunos se interessam, por exemplo, pelo experimento de Stern-Gerlach, enquanto outros pelo experimento de dupla fenda.

Além da contribuição científica da análise das respostas às perguntas da pesquisa, este trabalho propiciou o desenvolvimento de material didático que pode ser útil para professores em exercício e em formação com vistas a fornecer elementos para introduzir parcialmente tais tópicos no Ensino Médio, fazendo as devidas transposições didáticas. Afora isto, as discussões incentivadas pelos professores sobre o assunto podem favorecer o esclarecimento de certos conceitos aos próprios professores que atendem o

Ensino Médio. Materiais que privilegiem o nível de compreensão são, com certeza, mais proveitosos tanto para alunos como para professores. No tocante a este material didático, considera-se que é conveniente ampliar as situações-problema relativas aos conceitos de operador e de evolução temporal de estados quânticos para que sejam suficientemente contemplados, de modo a promover a conceitualização e, conseqüentemente, o desenvolvimento cognitivo correspondente.

Em nenhum momento este trabalho foi proposto como uma panacéia para os problemas enfrentados pelo ensino de Física, principalmente no que concerne à atualização curricular, porém se pode afirmar que se buscou preencher algumas das lacunas que normalmente existem após o primeiro contato do aluno em disciplinas introdutórias de MQ em cursos de graduação. Isto porque, diferentemente de grande parte das disciplinas tradicionais de MQ, os cursos desenvolvidos conseguiram estimular o aluno para o aprendizado *conceitual* de MQ recorrendo a exemplos simples e atuais.

Apesar de se perceber como bons os resultados obtidos, é importante salientar que se almeja melhorar alguns aspectos deste trabalho. Em particular, a aprendizagem do conceito de operador e seu manejo e a do conceito de evolução temporal dos estados quânticos, este último sobretudo com os efeitos da superposição linear, são pontos que merecem mais detalhamento e aplicação de várias situações-problema para que se possa concluir que os alunos estejam atingindo conhecimento significativo dos primeiros princípios da MQ. Relembrando, considera-se que o conhecimento dos primeiros princípios é importante para adentrar o novo mundo que a MQ traz consigo e que, por esta razão, cabe discuti-los mesmo em cursos introdutórios ou de curta duração.

Crê-se, também, que cursos de MQ estão, após esta iniciação nos postulados, mais aptos a contemplar aspectos filosóficos desta teoria e salientar pontos que provoquem debates sobre os temas abordados em palestras e filmes recentemente divulgados. Os domínios de verdade (MATURANA, 2001) podem ser um bom meio para o estudo da MQ, juntamente com estas divulgações, sem tornar-se agressivo e sem impor uma particular visão de MQ ao aluno.

Quanto aos referenciais teóricos, a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel foi usada principalmente na diferenciação progressiva e na

reconciliação integradora feitas a cada aula e na tentativa de levar em conta o conhecimento prévio do aluno. Parece ser um bom referencial para a organização do ensino, mas a aprendizagem significativa é progressiva e o tempo disponível seguramente não foi suficiente para, de fato, promovê-la. Isso ficou mais claro ainda à luz do outro referencial, da teoria dos campos conceituais. Na óptica dessa teoria, o domínio de um campo conceitual, no caso a MQ, é lento, não linear e com rupturas e continuidades. Foi isso o que se percebeu e isto dá ânimo a continuar-se este trabalho. Não é fácil promover a aprendizagem significativa em Física e sobretudo em MQ, que não é intuitiva, mas vale a pena continuar tentando.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da Prática Escolar**. 2. ed. São Paulo: Papirus, 1998. p. 15-64.

AUSUBEL, D. P. **Acquisition and Retention of Knowledge: a Cognitive View**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. 212 p.

AUSUBEL, D. P. **Educational Psychology: a Cognitive View**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968. 685 p.

BACHELARD, G. **A Formação do Espírito Científico: Contribuição para uma Psicanálise do Conhecimento**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. 314 p.

BARROS, M. A.; BASTOS, H. F. B. N. Investigando o Uso do Ciclo da Experiência Kellyana na Compreensão do Conceito de Difração de Elétrons. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 24, n. 1, p. 26-49, abr. 2007.

BELLONI, M.; CHRISTIAN, W.; COX, A. J. Teaching Qualitative Energy-eigenfunction Shape with Physlets. **The Physics Teacher**, College Park, v. 45, n. 8, p. 488-491, Nov. 2007.

BOUWMEESTER, D. et al. Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement. **Physical Review Letters**, Melville, v. 82, n. 7, p. 1345-1349, Feb. 1999.

CARUSO NETO, F.; OGURI, V. **Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006. 605 p.

CARVALHO NETO, R. A. **Aspecto Preditivo da Mecânica Clássica e da Mecânica Quântica: uma Proposta Teórico-metodológica para Alunos do Ensino Médio**. 2006. 137 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia; UEFS, Salvador, 2006.

CHIARELLI, R. A. **Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio: É Possível Abordar Conceitos de Mecânica Quântica?** 2006. 171 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics**. New York: John Wiley, 1977. v. 1.

EKERT, A. K. Quantum Cryptography based on Bell's Theorem. **Physical Review Letters**, Woodbury, v. 67, n. 6, p. 661-663, Aug. 1991.

ERICKSON, F. Qualitative Methods in Research on Teaching. In: WITTRICK, M. C. (Ed.). **Handbook of Research on Teaching**. 3. ed. New York: Macmillan, 1986.

FANARO, M. A.; OTERO, M. R. Basics Quantum Mechanics Teaching in Secondary School: One Conceptual Structure based on Paths Integrals Method. **Latin American Journal of Physics Education**, Mexico, v. 2, n. 2, p. 103-112, mayo 2008.

FANARO, M. A.; ARLEGO, M.; OTERO, M. R. El Método de Caminos Múltiples de Feynman como Referencia para Introducir los Conceptos Fundamentales de la Mecánica Cuántica en la Escuela Secundaria. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 24, n. 2, p. 233-260, ago. 2007.

FLORENTINI, D. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FREIRE JÚNIOR, O. Philosophy enters the Optics Laboratory: Bell's Theorem and Its First Experimental Tests (1965–1982). **Studies in History and Philosophy of Modern Physics**, Oxford, v. 37, n. 4, p. 577-616, June 2006.

GRECA, I. M.; HERSCOVITZ, V. E. Mecânica Quântica e Intuição. In: SÍMPÓSIO DAVID BOHM: fundamentos da física, 1998, São Paulo, SP. **Caderno de Resumos**. São Paulo, Livraria da Física, 1998. p. 30.

GRECA, I. M.; HERSCOVITZ, V. E. Superposição Linear em Ensino de Mecânica Quântica. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, Porto Alegre, v. 5, n. 1, p. 61-77, jan. 2005.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A.; HERSCOVITZ, V. E. Uma Proposta para o Ensino de Mecânica Quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 23, n. 4, p. 444-457, dez. 2001.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. Uma Revisão de Literatura sobre Estudos Relativos ao Ensino da Mecânica Quântica Introdutória. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 6, n. 1, p. 29-56, jan./abr. 2001.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. Além da Detecção de Modelos Mentais dos Estudantes: uma Proposta Representacional Integradora. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 31-53, jan./abr. 2002.

HADZIDAKI, P.; KALKANIS, G.; STAVROU, D. Quantum Mechanics: a Systemic Component of the Modern Physics Paradigm. **Physics Education**, London, v. 35, n. 6, p. 386-392, Nov. 2000.

HADZIDAKI, P. 'Quantum Mechanics' and 'Scientific Explanation': an Explanatory Strategy Aiming at Providing 'Understanding'. **Science & Education**, New York, v. 17, n. 1, p. 49-73, Jan. 2008a.

HADZIDAKI, P. The Heisenberg Microscope: a Powerful Instructional Tool for Promoting Meta-cognitive and Meta-scientific Thinking on Quantum Mechanics and the 'Nature of Science'. **Science & Education**, New York, v. 17, n. 6, p. 613-639, June 2008b.

HOEKZEMA, D. et al. The Particle/wave-in-a-box Model in Dutch Secondary Schools. **Physics Education**, London, v. 42, n. 4, p. 391-398, July 2007.

HUGGINS, E. Fourier Analysis in Introductory Physics. **The Physics Teacher**, College Park, v. 45, n. 1, p. 26-29, Jan. 2007.

JOHANSSON, K. E.; MILSTEAD, D. Uncertainty in the Classroom: Teaching Quantum Mechanics. **Physics Education**, London, v. 43, n. 2, p. 173-179, Mar. 2008.

LYONS, H. The Atomic Clock. **American Scholar**, Washington, v. 19, p. 159-168, 1950.

McKAGAN, S. B.; PERKINS, K. K.; WIEMAN, C. E. Why We Should Teach Bohr Model and How to Teach it Effectively. **Physical Review Special Topics – Physics Education Research**, Melville, v. 4, n. 1, p. 1-10. Jan./June 2008a.

McKAGAN, S. B. et al. Developing and Researching PhET Simulations for Teaching Quantum Mechanics. **American Journal of Physics**, Melville, v. 76, n. 4/5, p. 406-417, Apr./May 2008b.

MICHELINI, M. et al. Proposal for Quantum Physics in Secondary School. **Physics Education**, London, v. 35, n. 6, p. 406-410, Nov. 2000.

MOREIRA, M. A. Partículas e Interações. **Física na Escola**, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 10-14, out. 2004.

MOREIRA, M. A. Pesquisa em Ensino: Aspectos Metodológicos. **Actas del PIDEC**, Porto Alegre, v. 5, p. 101-136, 2003.

MOREIRA, M. A. Investigación en Educación en Ciencias: Métodos Cualitativos. **Actas del PIDEC**, Porto Alegre, v. 4, p. 25-53, 2002.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999a. 195 p.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999b. 130 p.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, jan./abr. 2002.

MOREIRA, M. A.; GRECA, I. M. Obstáculos Representacionales Mentales en el Aprendizaje de Conceptos Cuánticos. In: **Sobre cambio conceptual, obstáculos representacionales, modelos mentales, esquemas de asimilación y campos conceptuales**. Porto Alegre: Instituto de Física - UFRGS, 2004. p. 26-43.

NASHON, S.; NIELSEN, W.; PETRINA, S. Whatever Happened to STS? Pre-service Physics Teachers and the History of Quantum Mechanics. **Science & Education**, New York, v. 17, n. 4, p. 387-401, Apr. 2008.

OLIVEIRA, F. F. de; VIANNA, D. M.; GERBASSI, R. S. Física Moderna do Ensino Médio: o que Dizem os Professores. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 29, n. 3, p. 447-454, set. 2007.

OLIVEIRA, I. S. **Física Moderna para Iniciados, Interessados e Aficionados**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005. 2 v.

ORGANISTA, O. et al. Una Idea Profunda en la Comprensión del Mundo Físico: el Principio de Superposición de Estados. **Latin American Journal of Physics Education**, Mexico, v. 1, n. 1, p. 83-88, Sept. 2007.

OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Uma Revisão Bibliográfica sobre a Área de Pesquisa "Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio". **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 5, n. 1, p. 23-48, jan./abr. 2000.

OSTERMANN, F. et al. Tradição de Pesquisa Quântica: uma Interpretação na Perspectiva da Epistemologia de Larry Laudan. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, v. 7, n. 2, p. 366-386, 2008. Disponível em: <<http://www.saum.uvigo.es/reec>>. Acesso em: 31 ago. 2008.

PAULO, I. J. C. **A Aprendizagem Significativa Crítica de Conceitos da Mecânica Quântica Segundo a Interpretação de Copenhagen e o Problema da Diversidade de Propostas de Inserção da Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio**. 2006. Teste (Doutorado em Ensino de Ciências) – Universidade de Burgos, Burgos. 2006.

PENA, F. L. A. Por que, nós Professores de Física do Ensino Médio, Devemos inserir Tópicos e Idéias de Física Moderna e Contemporânea na Sala de Aula? **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 28, n. 1, p. 1-2, mar. 2006.

PEREIRA, A. P. **Fundamentos de Física Quântica na Formação de Professores**: uma Análise de Interações Discursivas em Atividades Centradas no Uso de um Interferômetro Virtual de Mach-Zehnder. 2008. 139 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física). Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

PESSOA JÚNIOR, O. **Conceitos de Física Quântica**. São Paulo: Livraria da Física, 2005. 2 v.

SINGH, C. Student Understanding of Quantum Mechanics at the Beginning of Graduate Instruction. **American Journal of Physics**, Melville, v. 76, n. 3, p. 277-287, Mar. 2008a.

SINGH, C. Interactive Learning Tutorials on Quantum Mechanics. **American Journal of Physics**, Melville, v. 76, n. 4/5, p. 400-405, Apr./May 2008b.

TAMPAKIS, C.; SKORDOULIS, C. The History of Teaching Quantum Mechanics in Greece. **Science & Education**, New York, v. 16, n. 3/5, p. 371-391, Mar. 2007.

TERRAZAN, E. A. A Inserção da Física Moderna e Contemporânea no Ensino de Física de 2º grau. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 9, n. 3, p. 209-214, dez. 1992.

TOLEDO PIZA, A. F. R. **Mecânica Quântica**. São Paulo: Edusp, 2003. 605 p.

URSIN, R. et al. Entanglement-based Quantum Communication over 144 km. **Nature Physics**, London, v. 3, n. 7, p. 481-486, July 2007.

VALADARES, E. de C.; MOREIRA, A. M. Ensinando Física Moderna no Segundo Grau: Efeito Fotoelétrico, Laser e Emissão de Corpo Negro. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 15, n. 2, p. 121-135, ago. 1998.

VELENTZAS, A.; HALKIA, K.; SKORDOULIS, C. Thought Experiments in the Theory of Relativity and in Quantum Mechanics: their Presence in Textbooks and in popular science books. **Science & Education**, New York, v. 16, n. 3/5, p. 353-370, Mar. 2007.

VERGNAUD, G. La Théorie des Champs Conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Paris, v. 10, n. 2/3, p. 133-170, 1991.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. In: 1º Seminário Internacional de Educação Matemática, Rio de Janeiro. **Anais**. 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. Education: the Best Part of Piaget's Heritage. **Swiss Journal of Psychology**, Berna, v. 55, n. 2/3, p. 112-118, 1996.

VERGNAUD, G. A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. **Journal of Mathematical Behavior**, Dordrecht, v. 17, n. 2, p. 167-181, June 1998.

VERGNAUD, G. ¿En qué Sentido la Teoría de los Campos Conceptuales Puede Ayudarnos para Facilitar Aprendizaje Significativo? **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 12, n. 2, p. 285-302, ago. 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE I – MATERIAL DE APOIO

Fundamentos de Mecânica Quântica

1. Introdução

Ao ver um mágico realizando seus truques e nos espantarmos com eles estamos, de fato, presenciando algo que nos parece incomum, algo que contraria nossa “visão usual de mundo”, algo que não estamos preparados para aceitar. A um reconhecimento habitual do que nos cerca, criado a partir da vivência que temos em nossas situações cotidianas, denominamos muitas vezes de “intuição”.

O espanto que enfrentamos com algum truque incrível realizado pelo mágico atinge-nos também, seguidamente, ao estudar os fenômenos quânticos. Situações em que a natureza quântica dos sistemas físicos foge à intuição são comuns porque praticamente não vivenciamos o mundo microscópico. Contudo, ao estudar a Mecânica Quântica, com seus conceitos e conseqüências, pode-se começar a entender este “universo não clássico” que intrigou os cientistas durante várias décadas e que ainda hoje se antepõe, em vários aspectos e resultados, às nossas expectativas.

Um dos conceitos com que é usual trabalharmos em Física, por exemplo, é o de sistemas isolados, utilizado muitas vezes quando um conjunto de objetos não apresenta, em relação a outros objetos, interação que seja relevante para a análise de algum fenômeno investigado. Frequentemente este conceito envolve uma idéia de localidade, idéia esta que não persiste na observação de certos eventos quânticos. Vejamos um exemplo.

Recentemente¹ - em seqüência a uma variedade de experimentos realizados com uma ou poucas partículas microscópicas, iniciados no último quarto do século XX - um grupo de cientistas na Áustria obteve resultados considerados surpreendentes pela nossa visão clássica de mundo, mas entendidos pela consideração dos primeiros princípios da Mecânica Quântica. Basicamente, pares de fótons idênticos produzidos em laboratório em um estado batizado como *emaranhado*, revelaram uma conexão instantânea de suas polarizações, mesmo separados por uma distância de 144 km. Este experimento, como outros anteriores, evidencia uma propriedade de não-localidade, que foge do nosso “senso comum”, porque não decorre das leis da Física Clássica, leis estas que regem o mundo que observamos habitualmente. Tal efeito, embora determinado experimentalmente apenas nas duas últimas décadas, está implícito nos postulados quânticos e, portanto, está previsto há muito tempo, tendo mesmo causado debates calorosos e conduzido a críticas à Teoria Quântica no âmbito científico, que envolveram grandes personalidades como Albert Einstein e Niels Bohr.

O que é a Mecânica Quântica, então, esta teoria que se desenvolveu no primeiro quarto do século passado, inicialmente para explicar alguns fenômenos observados em objetos macroscópicos, como o corpo negro, e que se revelou como a teoria adequada para descrever os fenômenos microscópicos não relativísticos?

Pela falta de familiaridade com os eventos que ela descreve (e que a Física Clássica não consegue prever ou explicar), torna-se muito importante analisar os seus primeiros princípios e obter uma boa compreensão do significado de seus

¹ URSIN, R. et al. Entanglement-based Quantum Communication over 144 km. **Nature Physics**, v. 3, n. 7, p. 481-486, 2007.

conceitos fundamentais, para que não sejam interpretados e utilizados erroneamente.

Conceitos como o de *sistema quântico*, *estado de um sistema*, *superposição linear de estados*, *observável físico* e *observáveis compatíveis*, serão abordados a seguir.

A dimensão da importância da Mecânica Quântica supera o que via de regra se esperaria de uma Teoria Física, tornando recomendável a tentativa de introdução de seus fundamentos na formação geral de um estudante ou profissional. Para tanto, as abordagens a adotar devem apresentar simplicidade sem, entretanto, perder um relativo rigor, para evitar a disseminação de conceitos errôneos e fantasiosos relativos à Mecânica Quântica, que infelizmente têm sido apresentados com frequência aos leigos no assunto.

2. Superposição Linear

Experimentos de Dupla Fenda

Vamos começar nossa viagem pelo mundo quântico recordando os *experimentos de dupla fenda*.

Estes experimentos estão entre os exemplos mais nítidos e simples de visualização de fenômenos quânticos. Utiliza-se para efetuar-los, em geral, uma fonte, um anteparo com duas fendas e um segundo anteparo para efeitos de registro. Quando o experimento é realizado com uma fonte que emite ondas eletromagnéticas (luz, por exemplo), obtém-se um padrão de interferência típico da Física Ondulatória, com franjas de interferência, como observado na figura 1. As manchas escuras no anteparo se referem às regiões em que ocorre interferência construtiva e as manchas claras às regiões de interferência destrutiva. (Como ilustração vide, por exemplo, applet sobre o experimento de dupla fenda com ondas em “Física 2000”^{*}.)

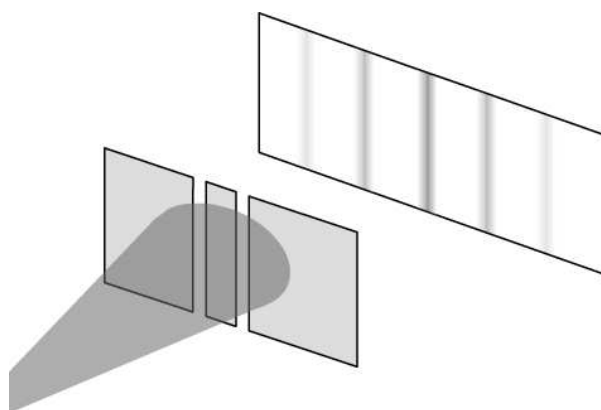


Figura 1. Padrão de interferência obtido no experimento de dupla fenda com ondas.

Pense: Qual a ligação entre a superposição de ondas e o resultado do experimento de dupla fenda com ondas eletromagnéticas?

Se o experimento é realizado com uma fonte que emite partículas macroscópicas (como projéteis atirados por uma metralhadora, por exemplo),

^{*} Física 2000: <http://www.maloka.org/f2000/>

observa-se um padrão que difere do das ondas. Aparecem duas franjas bem destacadas no segundo anteparo, conforme apresentado na figura 2. Os pontos escuros se referem às regiões atingidas pelos projéteis.

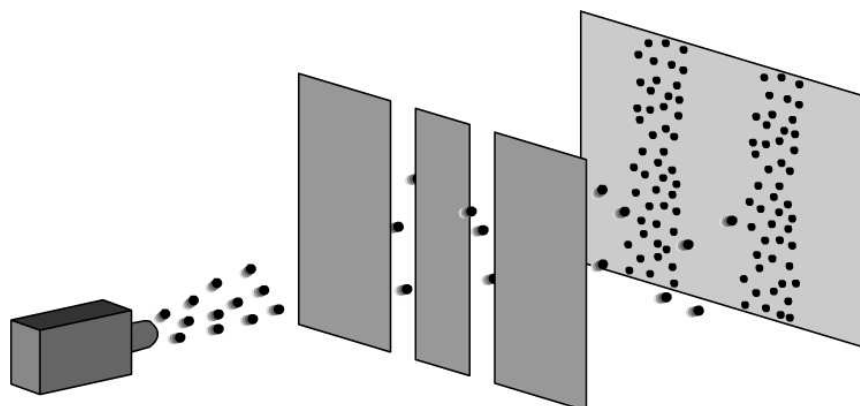


Figura 2. Experimento de dupla fenda com partículas macroscópicas.

Pense: Que lei(s) descreve(m) os resultados apresentados na figura 2?

Os experimentos acima mencionados foram realizados com entidades tipicamente clássicas. Mas o que acontece quando se utiliza uma fonte de partículas microscópicas, como os elétrons, por exemplo, no experimento? Intuitivamente, poder-se-ia crer que se obteria um padrão como o da figura 2 pois, como as balas da metralhadora, os elétrons são porções de matéria. Mas os elétrons são entidades muito peculiares: são objetos quânticos e, assim, não devemos confiar em nossa “intuição”, construída a partir de resultados clássicos, na predição de resultados. A figura 3 mostra o padrão de contagens obtido neste caso. Vê-se que este padrão de contagens é muito parecido com o padrão de interferência das ondas. Mas se os elétrons são partículas, como isso é possível? Estará ocorrendo interferência de uns com outros, a exemplo do que ocorre com ondas?

Para entender este fenômeno, que a Física Clássica não explica, foi necessário lançar mão da Mecânica Quântica. A explicação do experimento nos remete a alguns conceitos (e termos) não usados para partículas clássicas, tais como amplitude de probabilidade e função de onda. O padrão da figura 3 é, em geral, obtido com uma fonte de alta intensidade que emite muitas partículas de uma só vez. (Vide applets sobre o experimento com elétrons em “Física 2000” e em “PhET”^{*}.)

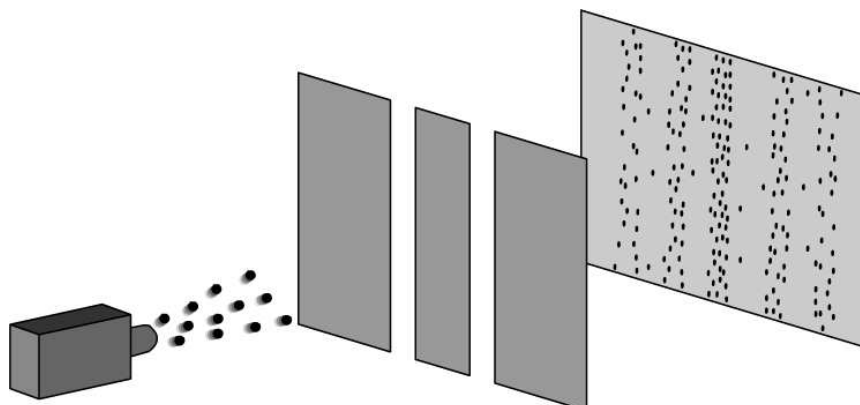


Figura 3. Experimento de dupla fenda com partículas quânticas.

^{*} Physics Education Technology: <http://phet.colorado.edu/new/simulations/>

Contudo, imagine que a fonte está emitindo um único elétron a cada vez, ou seja, cada elétron só é emitido após o registro da contagem do elétron anterior no segundo anteparo. Que padrão de contagens aparece, após um tempo muito longo? O da figura 2 ou o da figura 3? Por estranho que possa parecer, a resposta é: ainda o da figura 3. Vê-se que o fenômeno quântico desafia novamente nossa expectativa levando-nos a perguntar: como é possível gerar padrão de interferência sem ocorrer interação entre os elétrons?

Para responder a estas (e outras) perguntas sobre o comportamento de objetos quânticos, devemos conhecer os princípios fundamentais da Mecânica Quântica.

No que tange à geração experimental deste efeito de interferência com sistemas quânticos, não apenas elétrons e outras partículas elementares, mas também átomos e mesmo moléculas de grande porte² têm sido utilizados com sucesso.

Pense: Como você justificaria a visualização de padrões de interferência no experimento de dupla fenda com objetos microscópicos?

Superposição de Ondas

Relembrando conceitos de Ótica Física, observamos que ondas ao se superpor resultam em fenômenos de interferência, podendo esta ser construtiva ou destrutiva. Quando duas ou mais ondas se somam o resultado é, também, uma onda, que é uma *superposição linear* das ondas iniciais.

Assim, podemos construir determinadas ondas convenientemente, através de combinação linear de outras. Alguns exemplos são ondas triangulares, ondas quadradas e ondas dente-de-serra, muito utilizadas no campo da Eletrônica. Estas ondas são construídas a partir de séries específicas de outras ondas.

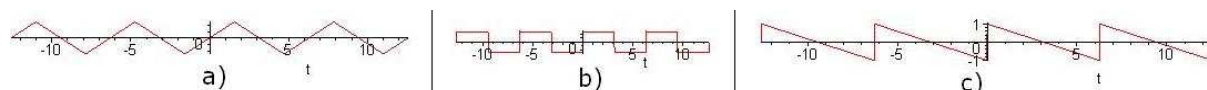


Figura 3: a) onda triangular; b) onda quadrada; c) onda dente-de-serra.

As ondas dente-de-serra, por exemplo, são obtidas de:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(kx)}{k}.$$

Para “manipular” a superposição de ondas podemos, por exemplo, trabalhar com outra simulação do “Física 2000”, denominada “Somando Ondas”.

Exercício: Trace os gráficos das funções ondulatórias

- i) $\text{sen}(x)$, ii) $\text{cos}(x)$, iii) $\text{sen}(x+\pi)$, iv) $\text{cos}(x+\pi)$,
no intervalo $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ e construa as superposições
a) i + ii, b) i + iii, c) i + iv, d) ii + iii, e) iii + iv.

² NAIRZ, O., ARNDT, M., ZEILINGER, A. Quantum Interference Experiments with Large Molecules. *American Journal of Physics*, v. 71, n. 4, p. 319-325, 2003.

Pense: A função $f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-(x^2/4\alpha)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k^2} e^{ikx} dk$ pode ser encarada como uma superposição linear de ondas planas, com coeficientes $e^{-\alpha k^2}$?

Superposição de vetores do plano

Outro exemplo de superposição linear muito encontrado, tanto em matemática, como em física, refere-se a conjuntos de grandezas vectoriais. Assim, em física, podemos citar velocidades, acelerações e forças, entre tantas outras grandezas vectoriais conhecidas.

Para exemplificar algumas propriedades importantes destes conjuntos, podemos recorrer a vetores do plano real (\mathbb{R}^2).

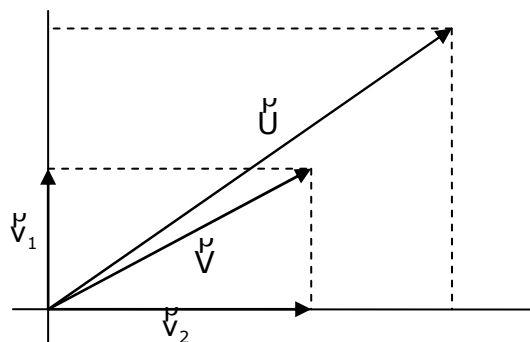


Figura 5: Representação de vetores do plano

Como exposto na figura 5, podemos expressar um vetor \vec{v} como soma de dois outros, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ e também um vetor \vec{u} como combinação linear mais geral dos vetores, $\vec{u} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$, com c_1 e c_2 , números (escalares).

Verificamos, também, que os vetores representados estão dotados de uma operação de soma – tal que a soma de dois vetores do plano é um vetor do plano – e de uma operação de multiplicação de vetor por escalar – tal que a multiplicação de um vetor do plano por um escalar é um vetor do plano.

Além destas propriedades (necessárias), verificamos que os vetores em questão satisfazem as propriedades abaixo.

1. $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$ (comutativa);
2. $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$ (associativa);
3. $c(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = c\vec{v}_1 + c\vec{v}_2$ (distributiva), sendo c um escalar;
4. $(c_1 + c_2)\vec{v} = c_1\vec{v} + c_2\vec{v}$ (distributiva);
5. $(c_1 c_2)\vec{v} = c_1(c_2\vec{v})$ (associativa);
6. Existe e é único o vetor nulo \vec{v}_0 , que satisfaz $\vec{v}_0 + \vec{v} = \vec{v} + \vec{v}_0 = \vec{v}$;
7. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$;
8. $0 \cdot \vec{v} = \vec{v}_0$.

Estas propriedades dos vetores apresentados são também satisfeitas pelas ondas que se superpõem linearmente, embora vetores do plano e ondas sejam entidades muito diferentes.

Pense: O que há de comum entre ondas e vetores do plano?

Exercício: Mostre que, além da superposição linear, as demais propriedades dos vetores do plano são satisfeitas também pelas ondas, se a regra de soma de ondas e a regra de multiplicação de número por onda forem as usuais.

Espaços Lineares

Ondas e vetores do plano, dotados de operações de adição e de multiplicação por escalar, revelam uma mesma estrutura, característica dos chamados *espaços lineares*. Como o experimento de dupla fenda (entre outros) nos mostra, também os estados dos sistemas quânticos, submetidos a regras de adição e de multiplicação por escalar satisfazem propriedades que caracterizam os espaços lineares.

Resulta então que conceitos advindos de espaços lineares, como os de vetores, operadores, autovetores e autovalores estão na base do formalismo da Mecânica Quântica. Tais conceitos serão abordados adiante.

Estados Quânticos e Observáveis

Assim como as ondas clássicas e os vetores de \mathbb{R}^2 , os estados de um sistema quântico também se superpõem linearmente e este é um dos principais fundamentos da Mecânica Quântica.

A Mecânica Quântica afirma que se temos dois estados possíveis para um sistema quântico, uma combinação linear dos dois estados é também um possível estado do sistema. Essa combinação é a chamada *superposição linear de estados*.

Mas o que é um sistema quântico? E o que é o estado de um sistema quântico?

Antes, é bom explicitar o que são partículas e objetos quânticos. Podemos dizer que *partícula quântica* é a entidade física, em geral considerada elementar, que obedece às leis da Mecânica Quântica. Como exemplos, podemos citar o elétron, o fóton e o neutrino. Uma partícula ou um conjunto compactado de partículas recebe, também, muitas vezes a denominação de *objeto quântico*. Um conjunto de tais objetos (e suas interações), geralmente microscópico, constitui um *sistema quântico*. Como exemplos, podemos mencionar o núcleo, o átomo e a molécula.

Já o conceito de *estado quântico*, tido como fundamental na nova Mecânica – e apesar do termo estado possuir diversas concepções idiossincráticas – é, em princípio, basicamente o mesmo que na Física Clássica, embora apresente características peculiares.

Imaginemos, por exemplo, um elétron que pode estar ligado a um átomo ou estar livre. Temos aí dois estados diferentes (não só energeticamente) possíveis para o elétron. Isto implica em que, para conhecer o estado de um sistema quântico, devemos conhecer o valor das grandezas físicas observáveis associadas a ele. É este também o caso na Física Clássica. Contudo, diferentemente da situação clássica existem, em Mecânica Quântica, grandezas físicas ditas compatíveis e não compatíveis.

O *observável* é a grandeza física cujo valor é passível de determinação (energia, posição, momento linear, momento angular etc.). Quando dois observáveis são *compatíveis*, é possível obter informação sobre valores de um deles sem alterar a determinação de valores do outro. O estado de um sistema pode, então, ser caracterizado pelos valores de ambos. Essa *compatibilidade de observáveis* nos leva a dizer que algumas informações relativas ao estado do sistema podem ser

fornecidas “simultaneamente”. Isto não ocorre quando os observáveis são incompatíveis. Quando dois observáveis são *incompatíveis*, a medida dos valores de um deles afeta a determinação dos valores do outro. Assim, pode-se dizer que o *estado de um sistema quântico é o conjunto das informações sobre os valores das grandezas físicas compatíveis, em um determinado instante de tempo*. O estado será *completamente* conhecido em determinado instante de tempo, se *todos* os observáveis compatíveis (independentes) do sistema forem arrolados e seus valores no dado instante de tempo forem determinados.

Como exemplo de observáveis compatíveis tem-se o spin e a posição de uma partícula e como exemplo de observáveis incompatíveis, a posição e o momentum da partícula numa mesma direção.

Pense: Como descrever o estado de um objeto clássico?

Exercício: Escolha um objeto clássico e caracterize um estado possível do mesmo.

Sugestões de Leitura

1. FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics**. Reading: Addison-Wesley, 1965. v. 3, cap. 1-3.
2. NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. São Paulo: Edgar Blücher, 1998. v. 4, cap. 3 e 8.
3. TOLEDO PIZA, A. F. R. Mecânica Quântica: Uma Nova Imagem do Mundo. **Ciência Hoje**, v. 36, n. 213, 2005, p. 40-48.

3. Postulados da Mecânica Quântica

Em toda a teoria física existe um conjunto de postulados, dos quais decorrem conseqüências que devem estar em consonância com fenômenos naturais e resultados experimentais observados. Não é diferente para a Mecânica Quântica não-relativística, podendo-se dizer *no mínimo*, em favor desta teoria, que ela compreende um pequeno número de hipóteses e reproduz ou conduz, com enorme sucesso, a resultados observados – muitos dos quais surpreendentes – para sistemas microscópicos. É, portanto, uma excelente teoria física no seu intervalo de validade.

Superposição Linear de Estados

Chama a atenção o fato de que podemos *verificar* que a superposição de estados quânticos resulta em um novo estado quântico, mas que esta verificação não constitui uma prova de tal propriedade. Por isto, na origem dos postulados da Mecânica Quântica encontra-se (sem demonstração) a afirmação: *os estados de um sistema quântico satisfazem o princípio da superposição linear*. Tais estados são, por isso, também denominados *vetores de estado*. É importante salientar que esta propriedade fornece, a partir da existência de alguns estados para o sistema ou objeto quântico, a possibilidade de construção de inúmeros outros estados para o mesmo sistema ou objeto. Posta em prática, esta propriedade gera várias situações

físicas interessantíssimas como, por exemplo, o efeito não-local mencionado na Introdução.

Em Mecânica Quântica é freqüente, ademais, utilizarmos a *notação de Dirac* para caracterizar os vetores de estado. Nesta notação, o estado é usualmente simbolizado por $|\ \rangle$ (ket)*, acrescido de uma característica interna (por exemplo $|\Psi\rangle$). Assim, as combinações lineares dos vetores do plano apresentadas na figura 5 se expressariam por $|V\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle$ e $|U\rangle = c_1|v_1\rangle + c_2|v_2\rangle$. Analogamente, se estivermos tratando de sistemas quânticos, podemos introduzir as características de cada estado do sistema no vetor de estado (ket) correspondente.

No experimento de dupla fenda, se denotarmos como $|+\rangle$ o estado correspondente à passagem do objeto quântico pela fenda superior e como $|-\rangle$, o estado correspondente à passagem do objeto pela fenda inferior teremos, em analogia à superposição que resultou no vetor $|V\rangle$ do plano, o estado $|\Phi\rangle = |+\rangle + |-\rangle$ como o responsável pelo padrão de interferência no segundo anteparo da figura 3. Observemos que tanto $|+\rangle$ como $2|+\rangle$ ou $c|+\rangle$ (c , um número qualquer real ou complexo), descrevem o *mesmo* estado do sistema, qual seja o da passagem do objeto pela fenda superior. Por isto, em Mecânica Quântica é usual caracterizar os estados por vetores unitários (isto é, vetores de módulo ou comprimento igual a 1 (um)). Neste caso, se $|+\rangle$ e $|-\rangle$ são vetores unitários, $|\Phi\rangle$ não é unitário e por isto costumamos representar a superposição da situação da experiência de dupla fenda para objetos quânticos, quando a fonte está disposta simetricamente em relação às fendas, por $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$. $|\Phi\rangle$ representa, como evidenciado na experiência com

elétrons, uma das situações em que o estado do elétron (ou de outro objeto quântico) abarca a superposição das possibilidades de passagem do elétron pelas fendas superior (+) e inferior (-). Na superposição de estados, os coeficientes da contribuição de cada um à combinação linear não são arbitrários, ou seja, cada conjunto de coeficientes (amplitudes) gera um estado particular.

A dupla fenda do experimento exemplifica, de forma simples, um sistema binário. Sistemas binários podem ser descritos em espaços (complexos) de dimensão dois, em que são necessários dois vetores linearmente independentes para construir qualquer outro.

Outros sistemas de mesma dimensão, freqüentemente considerados em física quântica e em suas aplicações, são encontrados em computação quântica, em processos que envolvem o momentum angular intrínseco (spin) de partículas como o elétron, o próton e o nêutron (férmions), ou ainda, em processos em que se utilizam estados de polarização de fótons.

Consideremos, por exemplo, um computador clássico. Nele, a informação é processada em um sistema binário, representando-se seus elementos por 0 e 1. Em tal computador o bit clássico, que é a menor unidade de informação, se apresenta **OU** no estado $|0\rangle$ **OU** no estado $|1\rangle$. Já um computador quântico utiliza, em princípio, *além* dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ superposições lineares destes abrindo, assim, para uma unidade de informação *simultaneamente* dois canais de processamento, uma vez que o bit quântico (qubit) pode estar em estados $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}}(c_1|0\rangle + c_2|1\rangle)$.

* A denominação “ket” e a notação $|\ \rangle$ decorrem de “partir ao meio” o símbolo de produto escalar entre dois vetores, $\langle\Phi|\Psi\rangle$ (bracket em inglês).

Observe-se que $\frac{c_1}{\sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}}$ e $\frac{c_2}{\sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}}$, em módulo, variam entre 0 e 1.

Assim, se o primeiro coeficiente for nulo, o módulo do segundo será igual a 1, uma das duas situações extremas da combinação linear.

Exercício: O que significa $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}}(c_1|0\rangle + c_2|1\rangle)$, quando os dois coeficientes são iguais?

Spin e Experimento de Stern-Gerlach

O spin do elétron fornece, também, um importante exemplo de utilização de um sistema binário, ou sistema de dois níveis, como revela o experimento realizado em 1921³ por Otto Stern e Walther Gerlach em Frankfurt, na Alemanha.

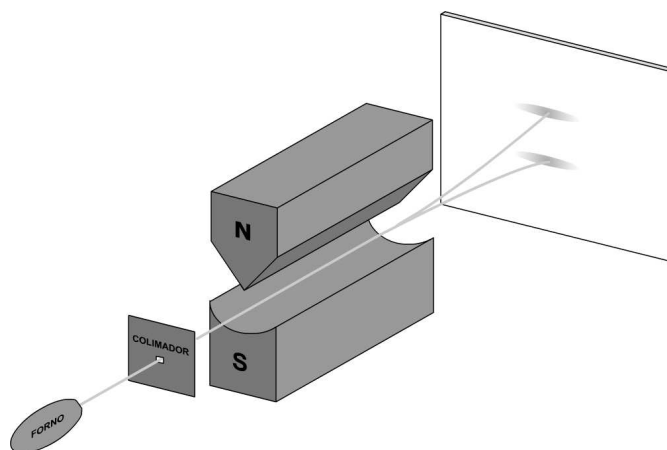


Figura 6. Experimento de Stern-Gerlach*.

O *spin* ou momento angular intrínseco é uma propriedade dos sistemas físicos, cuja existência e importância nos foram reveladas em análises de sistemas quânticos. Seus efeitos, contudo, fazem-se sentir também em sistemas macroscópicos como, por exemplo, no caso dos materiais ferromagnéticos.

O arranjo adotado no experimento de Stern-Gerlach, conforme esquematizado na figura 6, compreende um forno em que se aquece e vaporiza o material a estudar, um colimador por onde passa o material vaporizado e um campo magnético fortemente inhomôneo em uma dada direção, ao qual é submetido o material que é, finalmente, registrado em um anteparo. Se recorrermos ao metal prata, observaremos que os átomos de prata situam-se em dois agrupamentos distintos no anteparo, como mostrado (de forma ampliada) na figura 6.

Este fenômeno levou à consolidação de um conceito novo, capaz de ajustar a teoria (quântica) a tal efeito, qual seja o de *momento angular intrínseco* do elétron ou, simplesmente, *spin* do elétron⁴.

³ GERLACH, W, STERN, W. Der Experimentelle Nachweis des Magnetischen Moments des Silberatoms. *Zeitschrift für Physik A*, v. 8, n. 1, 1922, p. 110-111.

* Veja por exemplo, applets em: http://phet.colorado.edu/simulations/sterngerlach/SG_1.swf e em: <http://www.if.ufrgs.br/~betz/quantum/SGPeng.htm>, para ilustração do experimento.

⁴ UHLENBECK, G. E., GOUDSMIT, S. Spinning Electrons and the Structure of Spectra. *Nature*, v. 117, 1926, p. 264-265.

Para explicar o fenômeno recordemos que cargas em movimento geram campos magnéticos, o que conduz a relações entre momentos angulares de sistemas carregados e momentos magnéticos. Por sua vez, tais momentos magnéticos interagem com campos magnéticos inhomogêneos a que eventualmente sejam submetidas as cargas. Como os átomos são sistemas de partículas carregadas pode-se esperar a observação de efeitos desta interação. Contudo, ao estabelecer condições do experimento em que fundamentalmente apenas um elétron com momento angular orbital zero contribui em cada átomo de prata, o resultado esperado à época seria uma linha única (franja estreita) no anteparo, na região entre as duas faixas indicadas na figura 6. (Vide figura 7a.) Analisando o resultado do experimento observa-se, porém, que os átomos são registrados em duas (e somente duas) regiões do anteparo, indicando a existência de um momento angular de natureza *não orbital e quantizado*, o *spin*. A escolha do elemento químico prata (Ag) não é arbitrária. Observando sua estrutura eletrônica verifica-se que a prata contém 47 elétrons, mas que apenas um elétron (o de menor energia de ligação) sofre influência do campo magnético inhomogêneo, ou seja, o campo magnético inhomogêneo que atua sobre o átomo de prata exerce força magnética praticamente neste único elétron, de momento angular orbital zero, tal que $\vec{F} = -\nabla V = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$, em que V é o potencial escalar, $\vec{\mu}$ é o momento magnético devido ao spin do elétron e \vec{B} é o campo magnético inhomogêneo que atua sobre o elétron.

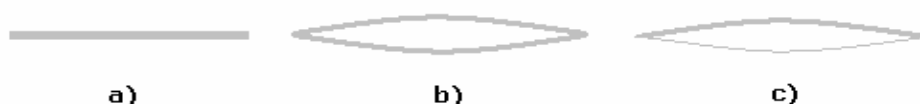


Figura 7. Resultados para o experimento de Stern-Gerlach para momento angular orbital nulo: a) spin nulo; b) e c) spin $\frac{1}{2}$.

Sendo o resultado do experimento uma figura como 7b ou 7c, pode-se concluir que o elétron possui um momento angular intrínseco ξ ($\vec{\mu} \propto \xi$) e que este momento angular só tem duas projeções possíveis (dois autovalores) na direção do campo magnético ($+\eta/2$ e $-\eta/2$) associadas à projeção do spin do elétron nos dois sentidos, ou simplesmente “spin-para-cima” e “spin-para-baixo”. Diz-se, então, que o spin do elétron é $\frac{1}{2}$. Os estados associados às mencionadas projeções do spin na direção do campo magnético inhomogêneo podem ser representados por $|+\rangle$ e $|-\rangle$.

O resultado do experimento indica também que os elétrons contribuintes dos átomos de prata do feixe se encontram, em geral, inicialmente em um estado que é uma superposição dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Se as duas regiões atingidas no anteparo forem aproximadamente iguais (figura 7b) teremos para o estado inicial do elétron $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$; já a situação da figura 7c indica um estado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|c_1|^2 + |c_2|^2}}(c_1|+\rangle + c_2|-\rangle) \text{ com } |c_2| < |c_1|.$$

Exercício: Interprete a informação contida nos estados de spin de um elétron seguintes:

$$\text{a) } |\Phi_1\rangle = \frac{1}{2}(|+\rangle + \sqrt{3}|-\rangle); \quad \text{b) } |\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}|+\rangle - |-\rangle); \quad \text{c) } |\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}|+\rangle + i\sqrt{3}|-\rangle).$$

Medições e Operadores

Como podemos conhecer o estado de um sistema quântico? Tanto para objetos clássicos, como para quânticos, conhecer o estado do objeto implica em medir as grandezas físicas que caracterizam o objeto em uma dada instância. Ocorre, porém, aí, uma grande diferença entre estados de sistemas clássicos e estados de sistemas quânticos. Enquanto para sistemas clássicos, medidas das grandezas físicas realizadas com instrumentos e de modo adequados não mudam o estado do sistema, no caso quântico isto nem sempre ocorre e não por defeitos de projeto ou uso inadequado de medidores.

De fato, as medidas de grandezas físicas que usualmente caracterizam o estado de um objeto clássico, via de regra *modificam* o estado do objeto quântico.

Veja-se, por exemplo, o que ocorre na experiência de dupla fenda para elétrons. Em tal experimento há um padrão de contagens no segundo anteparo que em muito se assemelha ao padrão de interferência obtido no experimento realizado com ondas. O espectro de interferência é obtido mantendo-se as duas fendas do primeiro anteparo abertas. Se fecharmos uma das fendas para verificar o que ocorre quando apenas a outra está disponível aos elétrons, não obtemos um padrão de interferência com menor número de contagens, como talvez alguém poderia esperar. O padrão de interferência, neste caso, *não ocorre*.

Não seria, então, possível verificar por qual das duas fendas o elétron passa, observando a região *entre* os dois anteparos (ou seja, a região atrás do primeiro anteparo), recorrendo a uma fonte luminosa de modo que se possa ver um “clarão” que antecede o registro do elétron no anteparo? Essa idéia foi usada, mas novamente a figura de interferência *não se formou*. É como se o elétron soubesse que estava sendo observado e, por isso, resolveu comportar-se de forma diferente.

Na verdade, o fenômeno não tem qualquer relação com alguma capacidade racional do elétron de perceber que o observam. O mais correto é considerar que *a medida é uma operação que, quase sempre, muda o estado do objeto quântico*. No exemplo acima, o clarão indica que o elétron colidiu com um fóton do feixe luminoso, sofrendo espalhamento, ou seja, mudando seu estado.

Algumas medidas, contudo, não mudam o estado do sistema. Retomando o experimento de Stern-Gerlach sabe-se que ao serem registrados no anteparo, os átomos de prata estão ou no estado de “spin-para-cima” ou no estado de “spin-para-baixo”. Contudo, se submetermos o feixe caracterizado pelo estado de “spin-para-cima” a um segundo campo magnético idêntico ao primeiro, verifica-se que todos os átomos do feixe são registrados somente em posições referentes ao estado “spin-para-cima”. *A medida não modificou o estado do sistema*. Isso significa que, após passar pelo primeiro campo magnético inhomogêneo, os átomos estarão em um estado de projeção de spin definida e uma segunda medida (imediatamente após a primeira) simplesmente repete o resultado da primeira.

Como trabalhar todos estes aspectos das operações sobre os objetos quânticos?

Examinemos, inicialmente, uma situação clássica, de operações realizadas sobre vetores do plano. Uma rotação de $\pi/2$, no sentido anti-horário, do vetor $|v_2\rangle$ da figura 5, por exemplo, transforma-o no vetor $|v_1\rangle$. Matematicamente, a *operação* de rotação realizada é simbolizada por um *operador* de rotação. Outro exemplo de operação de interesse refere-se àquela que projeta o vetor $|v\rangle$ sobre o eixo horizontal, transformando-o no vetor $|v_2\rangle$.

Nos dois exemplos acima, as operações realizadas modificam os vetores sobre os quais atuam (transformam um vetor do plano em outro vetor do plano).

Correspondentemente, em um espaço linear de dimensão finita qualquer, os operadores associados a tais operações são definidos como entes que transformam vetores em (outros) vetores. Note-se que a operação (e, portanto, o operador) só adquire significado se agindo sobre o vetor.

Assim, também, para os estados dos sistemas quânticos, operações (de medida e outras) sobre estados dos objetos quânticos transformam estes estados em (outros) estados do sistema.

Algumas operações, contudo, não modificam particulares estados do sistema, como vimos. No caso dos vetores da figura 5, a operação de projeção sobre o eixo horizontal não modifica o vetor $|v_2\rangle$ (já situado sobre o eixo).

Do mesmo modo que alguns operadores de um espaço vetorial podem ou transformar um vetor em outro, ou não modificar o vetor sobre o qual atuam, existem operações sobre o estado de um sistema quântico que, ou transformam o estado em outro estado ou não modificam o estado sobre o qual atuam. Simbolicamente, se representarmos os operadores por \hat{A} , \hat{B} ,... poderemos ter as duas situações seguintes:

$$\hat{A}|\Phi\rangle = |\Psi\rangle \quad \text{e} \quad \hat{B}|\Phi\rangle = b|\Phi\rangle,$$

ou seja, o operador \hat{A} transforma o vetor $|\Phi\rangle$ no vetor $|\Psi\rangle$ (a operação representada por \hat{A} transforma o estado $|\Phi\rangle$ no estado $|\Psi\rangle$), enquanto o operador \hat{B} não modifica o vetor $|\Phi\rangle$ e ao ser aplicado gera o número b (a operação representada por \hat{B} não modifica o estado do sistema quântico e registra o valor b).

Como a operação de medida das grandezas físicas é uma operação simbolizada por operadores, termina-se por estabelecer uma correspondência entre grandezas físicas e operadores. Como exemplos de grandezas físicas de uma partícula quântica freqüentemente determinadas, podemos citar a posição, o momento linear, a energia, o momento angular orbital e o momento angular intrínseco (spin).

Na Mecânica Quântica, *a operação de medição dos valores de uma grandeza física é representada com a atuação de um operador sobre o estado.*

Pense: Como você obtém uma informação de um estado quântico?

Estados de um Sistema Quântico e Observáveis

Estamos agora em condições de enunciar os dois primeiros postulados da Mecânica Quântica. Embora impostos (não demonstrados) espera-se que estes princípios se tornem plausíveis face às evidências experimentais que os cercam e à estrutura matemática que os ampara.

O **postulado nº 1** pode ser enunciado como segue: *Tudo o que se pode saber sobre o sistema em um dado instante de tempo está expresso no estado.*

Pense: Considerando o que foi exposto sobre a caracterização do estado quântico parece-lhe, agora, aceitável salientar que o estado é o depositário dos valores das grandezas físicas afetas ao sistema?

Exercício: Que informações você consegue obter dos estados de spin de um elétron do último exercício proposto (p. 9)?

O **postulado nº 2** pode ser enunciado *parcialmente* como segue: *A cada grandeza física em Mecânica Quântica corresponde um operador.*

O enunciado acima não está completo. O operador que corresponde à grandeza física não é qualquer. Ele deve satisfazer determinadas condições (ser linear, ter apenas autovalores reais – ser hermitiano – e estar definido no espaço, entre outras exigências). Contudo, o que queremos salientar aqui é que o postulado *impõe* que exista, sempre, para toda a grandeza física (logo, passível de ser medida) um operador associado.

Simbolicamente, sendo \hat{B} o operador que corresponde ao observável físico, devem, ademais, existir estados $|\Phi\rangle$ para os quais $\hat{B}|\Phi\rangle = b|\Phi\rangle$. $|\Phi\rangle$, então, não é modificado pela medida da grandeza física correspondente. Além disto, b simboliza o *valor* obtido na medida da grandeza. Temos aí uma *equação de autovalores*, sendo $|\Phi\rangle$ o *auto-estado* ou *autovetor* do operador \hat{B} e b o *autovalor* associado.

Leia-se ainda: a operação representada por \hat{B} (medida do valor da grandeza física em estudo), realizada sobre o sistema quântico quando este se encontra no estado $|\Phi\rangle$, dá como resultado o número b e não altera o estado do sistema, ou seja, reproduz o sistema no mesmo estado anterior à medida. Como uma mesma grandeza física pode ter vários (mesmo infinitos, em número) valores diferentes, podemos indexar os autovalores e autovetores $\hat{B}|\Phi_\beta\rangle = b_\beta|\Phi_\beta\rangle$, com β simbolizando a variedade de autovetores possíveis. Os autovalores podem ser discretos e/ou contínuos.

Passa a ter sentido, então, dizer que b é o valor da grandeza física para aquele estado do sistema.

Por exemplo: -13,6 eV é (aproximadamente) o valor da energia do elétron do átomo de hidrogênio no estado fundamental.

Pense: Em que situações β simboliza um conjunto de números inteiros?

Exercício: Apresente um exemplo de observável físico cujos autovalores são contínuos.

Com o princípio da superposição linear e os dois postulados acima, estamos em condição de “manipular” estados, combinando-os para obter outros estados, ou submetendo-os a ações que darão como resultados novos estados ou, ainda, submetendo-os a ações que não modificam os estados e que gerarão valores de alguma grandeza física associada.

Há, contudo, outros fatos surpreendentes, ainda não mencionados, que os sistemas microscópicos revelam e que são incorporados aos postulados da Mecânica Quântica. Senão, vejamos. Tomemos como exemplo o espectro de energia do átomo de hidrogênio, que em uma primeira aproximação pode ser obtido pelo modelo de Bohr. As linhas espectrais determinadas evidenciam a existência de vários estados de energia possíveis para o elétron do átomo, quando ele está “ligado” ao núcleo.

A descrição quântica dessa diversidade espectroscópica, mesmo em um modelo bastante simples, é surpreendentemente satisfatória e constitui-se em um dos grandes sucessos da Mecânica Quântica, desde seus primórdios. Esta descrição, basicamente, consiste em estabelecer as soluções e os autovalores de uma equação de autovalores de um operador (\hat{H}) associado à energia total do elétron do átomo. \hat{H} , neste modelo simples, nada mais é do que a soma de um operador associado à energia cinética do elétron e de um operador associado à

energia potencial do elétron, supondo o núcleo praticamente inerte, o que é aceitável face à grande razão da ordem de grandeza da massa do núcleo frente à da do elétron ($\sim 10^3$).

Este modelo, embora muito simples, reproduz com concordância mais do que razoável os valores obtidos experimentalmente e que evidenciaram:

- i) a existência de valores *discretos* de energia para o elétron do átomo (e portanto, para alguns sistemas quânticos);
- ii) o fato, surpreendente, de os resultados de medida sempre resultarem em algum dos autovalores do operador correspondente.

Este último aspecto, que conduz ao terceiro postulado como veremos adiante, não encontra paralelo no trato dos sistemas clássicos, até porque se torna trivial para valores contínuos dos observáveis.

Muitos autores apresentam, também, como um dos princípios da Mecânica Quântica o “*Colapso do Vetor de Estado*” que, em essência, estabelece que *o processo de medida transforma (em geral) o estado do sistema quântico em um dos auto-estados do operador que corresponde ao observável físico em estudo, qual seja o autovetor correspondente ao autovalor resultante da medida*. Isto significa atribuir à medida o papel de uma operação de projeção na “direção” de um dos autovetores do operador que corresponde ao observável físico a medir.

Este princípio está vinculado ao terceiro postulado, a ser apresentado a seguir.

Exercício: Aplique o princípio do Colapso do Vetor de Estado aos estados de spin do exercício da página 9. O que se obtém?

Sugestões de Leitura

1. BONAGAMBA, T. J., CAPELLE, K. W., AZEVEDO, E. R. de. A RMN e suas Aplicações Atuais. **Ciência Hoje**, v. 37, n. 221, 2005, p. 40-48.
2. CARUSO, F., OGURI, V. **Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006, seção 16.6.
3. COVOLAN, R., ARAÚJO, D. B. de, SANTOS, A. C. dos, CENDES, F. Ressonância Magnética Funcional: As Funções do Cérebro Reveladas por Spins Nucleares. **Ciência e Cultura**, v. 56, n. 1., 2004, p. 40-42.
4. SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. Reading: Addison-Weasley, 1994, cap. 1.

Compatibilidade de Observáveis

Quando utilizamos a notação de Dirac para caracterizar os estados dos objetos quânticos em um dado instante de tempo indicamos, em geral, no ket, os valores de todas as grandezas físicas compatíveis de um dado conjunto.

Assim, o estado do elétron do átomo de hidrogênio que tem a maior energia de ligação e cuja projeção de spin na direção de um campo magnético inhomogêneo (direção \hat{z}) é máxima é caracterizado por $|E_1 = -13,6 \text{ eV}, s_z = +\frac{1}{2}\rangle$. Contudo, se nos perguntarmos a que distancia do núcleo está o elétron, veremos que o ket em

questão não apresenta esta informação. A razão para isto não é medição incompleta das propriedades físicas do elétron, ou seja, não é que simplesmente tenhamos deixado de medir a posição do elétron. Esta “ausência de informação” deriva do fato de a energia e a posição do elétron do átomo de hidrogênio serem observáveis incompatíveis. Isto implica em que medir primeiro a posição do elétron e depois sua energia de ligação não resulta em geral nos mesmos valores obtidos quando se mede primeiro a energia de ligação e depois a posição do elétron. Na correspondência entre as medidas das grandezas físicas e os operadores isto tem como conseqüência que fazer atuar primeiro o operador posição (\hat{P}) e depois o operador energia (\hat{H}) sobre um ket não produz, em geral, o mesmo resultado que agir primeiro com \hat{H} e depois com \hat{P} . Então $\hat{H}\hat{P}|\Psi\rangle \neq \hat{P}\hat{H}|\Psi\rangle$. Ou ainda: $(\hat{H}\hat{P} - \hat{P}\hat{H})|\Psi\rangle \neq 0$. Sendo $|\Psi\rangle$ um estado qualquer, simbolicamente $(\hat{H}\hat{P} - \hat{P}\hat{H}) \neq 0$, ou seja, o *comutador* $[\hat{H}, \hat{P}] \neq 0$.

Em resumo, quando duas grandezas físicas são compatíveis, os operadores correspondentes comutam e quando não são compatíveis os operadores não comutam.

Outra consideração importante se refere à natureza dos operadores que representam as grandezas físicas. Como mencionamos anteriormente, eles devem possuir autovalores reais, o que implica em duas afirmações, isto é:

- i) eles devem possuir (sempre) autovalores;
- ii) seus autovalores devem ser reais.

Tais operadores são denominados hermitianos e satisfazem a propriedade $\langle \Psi_2 | \hat{A} \Psi_1 \rangle = \langle \Psi_1 | \hat{A} \Psi_2 \rangle^*$.

Como vimos nos exercícios, a função $\exp(ik_x x)$ é autofunção do operador $\frac{d}{dx}$ com autovalor ik_x . Então esta mesma função é autofunção de $-i\hbar \frac{d}{dx}$ com autovalor $\hbar k_x$. Sabemos que $\hbar k = p$, logo parece razoável interpretar $-i\hbar \frac{d}{dx}$ como o operador momento linear (na direção x) no espaço de funções. (De fato, ainda deveríamos verificar as condições para que ele seja hermitiano.) No espaço de funções, o operador posição na direção x se confunde com a função multiplicativa x . Pelo que foi visto sobre o princípio de incerteza, posição e momento linear (em uma mesma direção) não são grandezas físicas compatíveis. Isto é corroborado pela determinação do comutador dos dois operadores, ou seja:

$$[x, -i\hbar \frac{d}{dx}] f(x) = -i\hbar \left\{ x \frac{df(x)}{dx} - \left(\frac{dx}{dx} \right) f(x) - x \frac{df(x)}{dx} \right\} = i\hbar f(x).$$

Como $f(x)$ é uma função derivável qualquer, podemos escrever $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$.

Valores de Medidas

O exemplo do átomo de hidrogênio caracteriza claramente uma das conseqüências mais contundentes do ato de medida em sistemas quânticos. O cenário desenhado – e confirmado por inúmeros outros eventos – é o de que os resultados de medidas são *sempre* autovalores do operador associado à grandeza física que se pretende medir. No caso da energia do elétron do átomo de hidrogênio, o espectro de emissão comprova isto. (Vide applet em “PhET”.) Decorre, daí, o terceiro postulado da teoria, novamente *imposto* por fatos experimentais e mantendo

* $[A, B]$ é notação para $AB - BA$.

estreita correlação com a estrutura matemática dos espaços vetoriais. Pode-se expressar o **postulado nº 3** como: *Os únicos resultados decorrentes de medidas de valores de uma grandeza física são os autovalores do operador associado à grandeza em questão.*

Pense: Como o espectro de emissão do átomo de hidrogênio revela os valores dos níveis de energia?

Podemos verificar tanto nos exemplos já citados como em outros, que somente os autovalores do operador apropriado resultam das medidas, quer para sistemas quânticos diversos, quer para estados distintos dos sistemas.

Consideremos, por exemplo, um experimento com luz polarizada (vide applet em “Amanogawa”^{*}). Seja luz plano-polarizada com direção de polarização arbitrária $\vec{\beta}$ no plano \mathbf{xz} , que se propaga na direção \vec{y} e que incide sobre um polarizador que só permite a passagem de luz polarizada na direção \vec{z} , conforme esquematizado na figura 8.

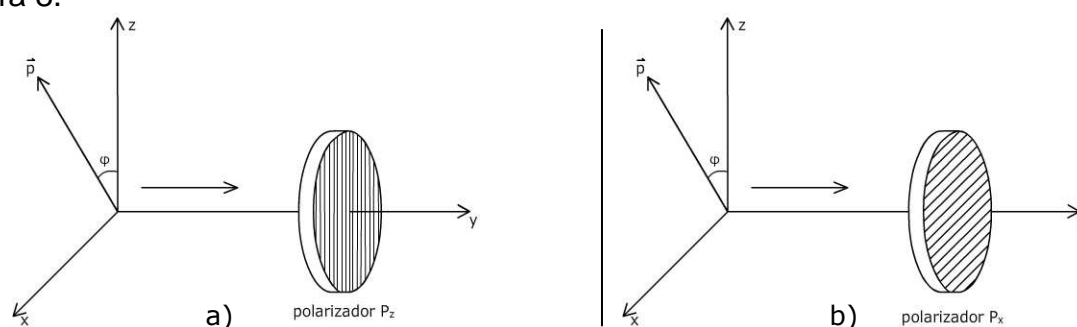


Figura 8. (a) Polarizador na direção \vec{z} ; (b) polarizador na direção \vec{x} .

Em uma descrição clássica, o campo elétrico correspondente, que aponta na direção $\vec{\beta}$, é $\vec{E} = E_0 \vec{\beta} e^{i(ky - \omega t)}$. A intensidade I do campo transforma-se, após a passagem pelo polarizador, em $I_z = I \cos^2 \varphi$, com φ o ângulo entre os eixos \vec{z} e $\vec{\beta}$. (Vale citar que a intensidade do feixe é proporcional ao número N de fótons ali existentes.)

Se, porém, a fonte de luz for de intensidade muito baixa (ou seja, se a estimativa clássica não for mais adequada) de modo que se possa até pensar em um fóton a cada vez sendo registrado em um dispositivo colocado um pouco atrás do polarizador, veremos que *ou um fóton é registrado ou nenhum*, ou seja, não ocorre registro de “fração de fóton”. Contudo, se permitirmos que muitos fótons sejam enviados um a um, durante um intervalo de tempo convenientemente longo, ao final terá sido registrado no dispositivo um número de fótons $N_z = N \cos^2 \varphi$, ou seja, reproduz-se em número de contagens a lei que caracteriza a intensidade obtida classicamente.

Se utilizarmos um segundo grupo de fótons, com a mesma polarização na direção $\vec{\beta}$ e, ao invés de um polarizador que permite apenas a passagem de luz polarizada na direção \vec{z} , colocarmos um polarizador que permite apenas a passagem de luz polarizada na direção \vec{x} , novamente não serão registradas “frações de fótons” atrás do polarizador e obteremos, ao final do processo com N fótons, um número de fótons $N_x = N \sin^2 \varphi$. Observemos que $N_x + N_z = N$, ou seja passa pelos polarizadores a totalidade dos fótons, se somarmos as passagens pelo primeiro e segundo polarizadores. Um feixe que se apresente polarizado na direção

^{*} Amanogawa: <http://www.amanogawa.com/archive/Polarization/Polarization-2.html>

\hat{z} passará todo pelo polarizador P_z e um feixe polarizado na direção \hat{x} , passará todo pelo polarizador P_x (vide applet em “Física 2000”).

Exercício: O que ocorre com o feixe de fótons da figura 8 se colocarmos um polarizador na direção \hat{y} ao invés dos anteriores?

A interpretação destes resultados (e de outros semelhantes obtidos em experimentos distintos) está em consonância com o terceiro postulado.

Assim, no caso do experimento de Stern-Gerlach, relativo ao spin $\frac{1}{2}\hbar$ do elétron, verifica-se, como vimos, a existência de duas franjas distintas que registram as duas únicas projeções de spin (na direção do campo magnético inhomogêneo) possíveis, embora os estados de spin possam ser variados. (Vide, por exemplo, os estados $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ e $|\phi_3\rangle$ da segunda lista de exercícios.)

Pense: No experimento de Stern-Gerlach, se submetermos os elétrons a dois campos magnéticos inhomogêneos em sucessão, na mesma direção, o que ocorre com os feixes resultantes da passagem pelo primeiro campo, após a passagem pelo segundo campo?

Já para o experimento de dupla fenda com elétrons, existem estados associados à possibilidade de o elétron passar por ambas as fendas (por exemplo $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ no caso simétrico) porém, na verificação da passagem do elétron por uma das fendas, nunca é registrada a passagem de “fração de elétron”. Ou é registrada a passagem do elétron pela fenda superior, ou a passagem pela fenda inferior.

Agora consideremos o caso da detecção dos elétrons no segundo anteparo do experimento de dupla fenda. Neste caso, a posição dos mesmos é registrada em um intervalo de valores contínuos se o número de experimentos realizados for muito grande. Logo, seu estado será expresso por $|\psi\rangle = \int_{x_1}^{x_2} c_x |x\rangle dx$ mas, quando medimos a posição do elétron, obtemos *um* dos valores possíveis sobre o anteparo. Como a posição é um observável com autovalores contínuos, podemos encontrar o elétron em diversas regiões do anteparo, sendo em algumas a probabilidade maior do que em outras.

Pense: Como estão inseridos os postulados 1 e 2, na exposição acima?

Probabilidades de Ocorrência de Valores nas Medidas

O terceiro postulado informa sobre os possíveis resultados de medidas de uma grandeza física, mas não assegura a ocorrência dos mesmos em cada medida, ou seja, estados muito diversos de um objeto quântico podem, ao realizarmos uma só medida de um dado observável, resultar no *mesmo autovalor* da grandeza física.

Exercício: Construa duas combinações lineares distintas (portanto, dois estados) de spin do elétron que possuam componentes não nulas de “spin-para-cima” e “spin-para-baixo”.

Ao realizarmos uma só medida da projeção de spin para cada um dos estados do exercício acima, poderemos encontrar em ambos os casos o valor $-\hbar/2$, o que não significa que os estados sejam os mesmos.

Então uma só, ou poucas medidas sobre sistemas quânticos que estão em estados diferentes (desconhecidos), não informam praticamente nada sobre o estado. Se, porém, trabalharmos com uma amostra grande de objetos, todos preparados no *mesmo* estado, os valores resultantes das medidas passarão a ter significado.

Uma de duas coisas pode ocorrer neste último caso:

- i) as medidas gerarem todas, praticamente, o mesmo valor para a grandeza física, em cuja situação diremos que o objeto está em um auto-estado do operador correspondente, com um dado autovalor, ou ainda, que a grandeza física em estudo *está* (bem) definida para tal estado (por exemplo, o estado tem energia definida E_n , ou seja $\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$);
- ii) as medidas gerarem vários valores para a grandeza física, em cujo caso diremos que o objeto está em um estado que é a superposição linear de vários auto-estados do operador, ou ainda, neste caso é usual dizer-se que a grandeza física em estudo *não está* definida (por exemplo, o estado não tem energia definida). Em tal situação não tem significado perguntarmos qual o valor da grandeza física. (Por exemplo, qual o valor da energia deste sistema?) Costumamos, neste caso, informar as probabilidades de ocorrência de cada autovalor nos atos de medida e estabelecer o *valor médio* da grandeza em análise, para o estado do objeto quântico considerado.

Observamos que, em geral, é possível expressar o estado de um objeto quântico como uma superposição linear dos autovetores de qualquer dos observáveis físicos que nos interessam. Isto significa (e pode ser mostrado) que os auto-estados dos operadores associados às grandezas físicas podem ser utilizados em bases dos espaços em que estão definidos os operadores.

Pense: Qual a analogia entre os auto-estados dos operadores constantes da afirmação acima e os vetores \hat{i} e \hat{j} do plano?

Por exemplo, se escolhermos a energia como observável preferencial podemos expressar um estado qualquer como $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle$ no caso de espectro discreto e não degenerado. Assim, no estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle + |E_3\rangle)$ os coeficientes c_i são $c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e os demais são nulos. Esta forma de expressão de

um estado $|\Psi\rangle$ como combinação de auto-estados de um operador é denominada *decomposição espectral* do estado (de norma 1). A interpretação dos coeficientes c_n está relacionada ao número de eventos correspondentes a cada autovalor medido em um grande número de amostras. Daí decorre o **postulado nº 4**: *Na medida da grandeza física A em um sistema quântico que se encontra no estado $|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|a_n\rangle$, de norma 1, com decomposição espectral em auto-estados do operador \hat{A} que corresponde à grandeza física (caso discreto e não degenerado), a probabilidade de se obter o autovalor a_n de \hat{A} é $|c_n|^2$.*

Ou seja, o quarto postulado impõe que todo estado pode ser expandido em auto-estados de operadores que correspondem a grandezas físicas e que o módulo ao quadrado dos coeficientes da expansão denotam as probabilidades de ocorrência dos autovalores nas medidas.

Os experimentos usados na discussão sobre o terceiro postulado podem também trazer informações vinculadas ao quarto postulado.

No caso do experimento com luz polarizada, $\cos^2 \varphi$ e $\sin^2 \varphi$ são, face ao quarto postulado, as probabilidades de encontrar os fótons nos auto-estados do operador de polarização P_z (passar ou não-passar).

Para o estado de spin do elétron $|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle - \sqrt{2}|-\rangle)$, o coeficiente $\frac{1}{\sqrt{3}}$ dá a amplitude de probabilidade de obter-se o valor $+\hbar/2$ na medida da projeção de spin do elétron, ou seja, a probabilidade $\frac{1}{3}$ de se obter tal valor.

Os experimentos revelam também a possibilidade de decomposição espectral, ou seja, é possível expressar o estado do sistema físico como combinação linear dos auto-estados do operador que representa a grandeza física que se busca medir.

A partir da decomposição espectral, relacionamos resultados de medidas com autovalores do operador em foco e probabilidades, com coeficientes da superposição linear.

Alteração do Estado do Sistema pela Medida

Na experiência com luz polarizada, se colocarmos dois polarizadores P_z em seqüência, na direção de propagação dos fótons do feixe de luz, os dois polarizadores permitindo a passagem apenas de luz polarizada na direção \hat{z} , observaremos que após a primeira medida o número de fótons do feixe é N_z e, além disso, que após a passagem pelo segundo polarizador o número de fótons continua sendo N_z .

A experiência de Stern-Gerlach, com dois campos magnéticos inhomogêneos na mesma direção em sucessão, apresenta resultados similares aos do experimento com luz polarizada.

Exercício: Se $|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle - \sqrt{2}|-\rangle)$ representa o estado de spin de elétron que é submetido ao experimento de Stern-Gerlach acima mencionado e se se obtém, após a passagem do elétron pelo primeiro campo magnético, o resultado $+\hbar/2$ para a projeção do spin, qual a probabilidade de se obter o resultado $-\hbar/2$ para este elétron após a passagem pelo segundo campo magnético?

Como uma segunda medida logo após a primeira, nos experimentos citados, conduz ao mesmo resultado da primeira medida, este comportamento sinaliza que, após a primeira medida e antes da segunda, o estado do sistema quântico é um auto-estado do operador que representa a grandeza física objeto da medida.

Isto é o que foi antecipado no princípio do “Colapso do Vetor de Estado” e que pela frequência com que é observado em Mecânica Quântica, é apresentado freqüentemente sem demonstração, como **postulado nº 5**: *Se a medida de um observável A sobre o sistema físico que se encontra no estado $|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|a_n\rangle$ resulta no autovalor a_n do operador \hat{A} correspondente (caso discreto e não degenerado), imediatamente após a medida o estado do sistema é o auto-estado $|a_n\rangle$.*

Observe-se que a medida causa o colapso do estado a um dos auto-estados correspondentes.

Os três últimos postulados apresentados salientam o singular papel do processo de medida em sistemas quânticos. A medida, em geral, modifica o sistema e esta modificação se faz no sentido de projetar o estado primitivo na direção do autovetor do operador que representa a grandeza física em estudo, associado ao autovalor obtido.

O processo de medida pode então ser pensado como representado por um operador de projeção.

Exemplo: Mediu-se a energia de 40 átomos de hidrogênio (todos preparados da mesma forma) que se encontravam no estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle + |E_3\rangle)$, obtendo-se num dado instante de tempo, na primeira medida, para 12 deles o valor de energia E_1 , para 15 deles, E_2 e para os demais 13, E_3 . Logo após tais medidas, os 12 átomos mencionados passaram ao estado $|E_1\rangle$, os 15 outros ao estado $|E_2\rangle$ e os 13 restantes ao estado $|E_3\rangle$.

Sugestões de Leitura

5. COHEN-TANNOUJDI, C., DIU, B., LALOË, F. **Quantum Mechanics**. New York: John Wiley, 1977, v. 1, cap. 3.
6. NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. São Paulo: Edgar Blücher, 1998. v. 4, cap. 5.

Evolução Temporal dos Estados Quânticos

No nosso cotidiano estamos habituados a vivenciar situações que são descritas satisfatoriamente por leis da Física Clássica, poucos sendo os aspectos que nos suscitam dúvidas sobre a validade das mesmas. Um exemplo importante destas características seguidamente observadas é o que se refere aos deslocamentos dos sólidos que nos rodeiam, inclusive dos de pequenas (mas macroscópicas) dimensões, que podem ser associados a pontos materiais.

Faz parte da descrição não-relativística clássica de tais objetos, sujeitos ou não a forças, a determinação de como sua posição se modifica com o correr do tempo. A *evolução temporal* de uma partícula (puntual) clássica se ancora na segunda lei de Newton, que relaciona a força que atua sobre a partícula com a

variação no tempo do momento linear da mesma e o momento linear, com a variação no tempo, da posição do objeto.

Em física clássica, então, a responsabilidade de descrever modificações no tempo, para tais partículas, recai sobre as grandezas físicas fundamentais posição e momento linear (e sobre outros observáveis) que são sempre compatíveis. Está aí embutida a concepção de *trajetória* de uma partícula.

Em Física Quântica, se buscarmos uma analogia com a situação clássica, construiremos equações de movimento para os *operadores* associados às grandezas físicas de interesse mas, além de que tais equações não conduzem a leis de movimento deterministas para os observáveis, muitos destes observáveis não são compatíveis. Este tipo de descrição, que faz recair sobre os operadores a responsabilidade de descrever a evolução temporal dos sistemas foi apresentado por Heisenberg e é muito útil para destacar certos aspectos quânticos e eventuais analogias com sistemas clássicos, mas nem sempre é prático trabalhar com operadores que se modificam ao longo do tempo. Em particular, um dado operador em um certo instante de tempo pode não ser compatível com o dito operador em outro instante de tempo.

Outra descrição, apresentada quase que simultaneamente à de Heisenberg e devida a Schrödinger, impõe ao *estado* o papel de informar sobre as modificações sofridas pelo sistema físico ao longo do tempo. As descrições de Schrödinger e de Heisenberg descrevem a *mesma física* e se reportam às interações que afetam o sistema para estabelecer a variação temporal das propriedades dos objetos quânticos.

Vamos nos ater aqui à descrição de Schrödinger, apresentando como postulado a equação conhecida na literatura como *equação de Schrödinger dependente do tempo*.

É comum dizer-se que a Mecânica Quântica não é determinista e que só trabalha com probabilidades, argumento que muitos utilizam para invalidar a possibilidade de existência de uma lei causal para a evolução temporal dos sistemas. Porém, assim como prevemos a evolução de estados clássicos, podemos fazê-lo para os estados quânticos. O “indeterminismo” não está na caracterização do estado em função do tempo, mas sim ocorre por ocasião da medida (em qualquer instante de tempo).

A equação de Schrödinger dependente do tempo nos informa que, se conhecemos o estado do sistema quântico em um instante inicial, podemos determinar o estado do sistema em outro instante (desde que o sistema não seja submetido a observações no intervalo de evolução). Schrödinger inspirou-se na equação da onda, construindo uma equação diferencial correspondente à equação de conservação de energia clássica não-relativística.

A evolução temporal de um estado quântico é, como mencionado acima, um postulado, ou seja, não demonstrável. O **postulado nº 6** pode ser expresso como: *A evolução temporal de um vetor de estado $|\Psi(t)\rangle$ é regida pela equação*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle, \text{ onde } \hat{H}(t) \text{ é o operador hamiltoniano.}$$

Mas o que é o operador hamiltoniano? Em geral, podemos dizer que o operador hamiltoniano engloba todas as interações que o sistema sofre, além de o operador relacionado à energia cinética, expressas tais interações como os operadores que caracterizam os potenciais atuantes sobre o sistema. Para que o operador hamiltoniano esteja associado à energia total do sistema, é necessário que \hat{H} seja independente do tempo.

Schrödinger analisou inicialmente o caso mais simples não-relativístico de um objeto quântico elementar livre (ou seja, não sujeito a qualquer interação, apenas

dotado de energia cinética), de massa m , em que $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$, sendo $\hat{p}^2 = \hat{p} \cdot \hat{p}$ e \hat{p} o operador momento linear. Para este sistema, obteve a relação entre os observáveis energia cinética e momento linear $E = p^2/2m$, da equação fundamental. De fato, a representação espacial da equação de Schrödinger neste caso simples, $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = [-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2] \Psi(\vec{r}, t)$, tem como solução $\Psi(\vec{r}, t) = A \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$, lembrando que $E = \hbar\omega$ e $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ e que, neste caso, o operador hamiltoniano se confunde com o operador energia cinética $(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2)$.

Exercício: Mostre que a solução da equação de evolução temporal é realmente a apresentada acima, para o caso unidimensional.

Lembrando que em uma situação um pouco mais geral, mas ainda simples, o sistema pode estar sofrendo a ação de um potencial $V(\vec{r})$, teremos $E = p^2/2m + V(\vec{r})$ para a energia de uma partícula clássica de massa m e, portanto, podemos escrever $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + \hat{U}(\vec{r})$ para o hamiltoniano do objeto quântico, em que $\hat{U}(\vec{r})$ é o *operador* que representa o potencial que atua sobre o sistema.

A equação de Schrödinger dependente do tempo, restrita a uma única dimensão espacial e para um potencial do tipo acima, pode ser escrita como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = [-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)] \Psi(x, t) \cdot$$

Podemos observar que, para soluções separáveis da equação fundamental ($\Psi(x, t) = \Phi(x) T(t)$), o *formato* da parte temporal da solução é sempre o mesmo, pois a equação correspondente independe de H , desde que o operador hamiltoniano seja independente do tempo.

Para soluções $\Psi(x, t)$ separáveis, então, teremos

$$\frac{1}{T(t)} i\hbar \frac{d}{dt} T(t) = \frac{1}{\Phi(x)} [-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x)] \Phi(x) = E \quad ,$$

com E independente de x e de t e com dimensão de energia.

A relação acima se desdobra em duas equações ligadas pelo parâmetro E , a saber

$$i\hbar \frac{d}{dt} T(t) = E T(t)$$

e

$$[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x)] \Phi(x) = E \Phi(x) \cdot$$

Esta última equação é conhecida como *equação de Schrödinger independente do tempo* e é, de fato, uma equação de autovalores para o operador hamiltoniano, tendo por autovalores as energias do sistema. Quanto à função $T(t)$, conforme mencionado anteriormente, apresenta-se *formalmente* como $T(t) = A \exp(-iEt/\hbar)$, mas os valores de E são determinados pela equação independente do tempo.

Como a equação de Schrödinger dependente do tempo é uma equação diferencial de primeira ordem em relação ao tempo, se o estado do sistema quântico no instante t_0 , $|\Psi(t_0)\rangle$, for conhecido, então o estado $|\Psi(t_1)\rangle$ em qualquer outro instante de tempo t_1 pode ser determinado.

Exercício: Supondo que a equação de Schrödinger unidimensional em que se tem uma interação $U(x)$, apresente uma autofunção, no instante $t=0$,

$$\Psi(x,0) = A \exp(-\gamma x^2),$$

sendo A e γ constantes reais e positivas, como você expressaria a solução $\Psi(x, t = T)$?

Exercício: Determine $|\Psi(x,0)|^2$ e $|\Psi(x, T)|^2$ para a situação do exercício acima.

A função $\Psi(x, t)$, solução da equação de Schrödinger dependente do tempo, caracteriza a distribuição espacial do estado $|\Psi(t)\rangle$ e $|\Psi(x, t)|^2 dx$ informa sobre a probabilidade de encontrar o objeto quântico no intervalo $(x, x+dx)$ no instante t . Como a função depende do tempo, em geral $|\Psi(x, t_1)|^2$ difere de $|\Psi(x, t_2)|^2$. Em algumas situações, como a do exercício acima, porém, as probabilidades em questão são iguais.

Efeitos da Superposição Linear na Dependência Temporal dos Estados Quânticos

Em grande parte das situações com que nos defrontamos para objetos quânticos, as funções que representam os estados dos sistemas em um instante inicial não são autofunções do hamiltoniano que rege a evolução temporal do sistema e, sim, superposições de tais autofunções. Essas superposições são também conhecidas como *pacotes de ondas*. Os pacotes de onda se modificam com o transcorrer do tempo, indicando que a probabilidade de encontrar o sistema quântico em um dado intervalo $(x, x+dx)$ é diferente em instantes diferentes.

Observemos como se modificam alguns pacotes de ondas com o transcorrer do tempo. Os pacotes representados nas figuras abaixo se referem a uma mesma função $\xi(x, t)$, dependente de dois parâmetros a e b cujos valores foram modificados de um gráfico para outro. Na figura 9(a), $a=b=1$ e na figura 9(b), $a=2$ e $b=1$.

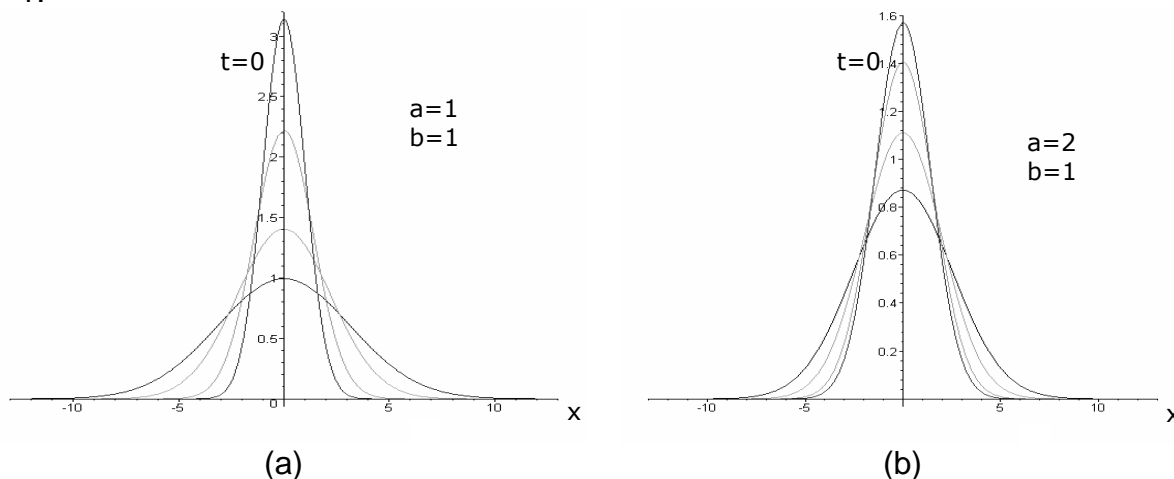


Figura 9. (a) $\xi(x, t)$ para $t=0, t=1, t=2$ e $t=3$; (b) $\xi(x, t)$ para $t=0, t=1, t=2$ e $t=3$.

Os dois pacotes se espalham com o transcorrer do tempo, alargando-se o primeiro mais rapidamente do que o segundo. Outras mudanças no formato de um pacote de ondas com o tempo podem ser observadas, por exemplo, em “NEP”^{**}.

* $\xi(x, t) = \pi \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2 t^2}} \exp\left[-\frac{ax^2}{2(a^2 + b^2 t^2)}\right]$

** NEP: <http://www.nep.chubu.ac.jp/~nepjava/javacode/WaveMap/offscreenWaveMap.html>

Observe que a função $\xi(x,0)$ é, de fato, $|\Psi(x,0)|^2$ em que $\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a}\right)$, função objeto dos dois últimos exercícios e citada também na primeira aula como uma superposição linear de ondas planas.

Para entender a razão destas e de outras alterações das funções $\Psi(x,t)$, analisemos mais de perto a função $\Psi(x,0)$ acima que, para um valor adequado de a , representa espacialmente o auto-estado de menor energia de um objeto quântico de massa m que sofre a ação de um potencial representado pelo operador $U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ (potencial oscilador harmônico linear unidimensional). Se

investigarmos a modificação no tempo de tal sistema quântico quando se propaga *livremente*, ele se deformará porque é um auto-estado de $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

mas se propaga sob o efeito do operador $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, que é um outro hamiltoniano, inclusive representando um observável não compatível com o representado por H . Portanto, $|\Psi(x,0)|^2 \neq |\Psi(x,t)|^2$ neste caso. Para maior clareza

$\Psi(x,0) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k^2} e^{ikx} dk$ como apresentado na primeira aula e

$$\Psi(x,t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k^2} e^{i(kx - \omega t)} dk, \text{ em que } \omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar}.$$

Outro exemplo, de análise mais simples, é o de um estado $|\varphi(t)\rangle$ que no instante $t=0$ é uma superposição linear de *dois* auto-estados (de norma 1) de um hamiltoniano \hat{H} independente do tempo e que evolui sob efeito do próprio \hat{H} , a saber, $|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1(0)\rangle + |\phi_2(0)\rangle)$. Sendo E_1 a energia do estado $|\phi_1\rangle$ e E_2 a energia do estado $|\phi_2\rangle$, teremos na representação espacial do caso unidimensional

$$\varphi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x,0) + \phi_2(x,0)) \text{ e}$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x,0) \exp\left(-\frac{iE_1 t}{\hbar}\right) + \phi_2(x,0) \exp\left(-\frac{iE_2 t}{\hbar}\right)].$$

Se $\phi_1(x,0)$ e $\phi_2(x,0)$ forem funções reais, o que ocorre em muitas aplicações, resulta

$$|\varphi(x,0)|^2 = \frac{1}{2} (|\phi_1(x,0)|^2 + |\phi_2(x,0)|^2) + |\phi_1(x,0)\phi_2(x,0)| \text{ e}$$

$$|\varphi(x,t)|^2 = \frac{1}{2} (|\phi_1(x,0)|^2 + |\phi_2(x,0)|^2) + \left\{ |\phi_1(x,0)\phi_2(x,0)| \cos\left[\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right] \right\}.$$

O termo de *interferência* é, então, o responsável pelas modificações na forma e nos valores da distribuição $|\varphi(x,t)|^2$. Observe-se que a função co-seno varia de -1 a +1.

Pense: Como varia $|\varphi(x,t)|^2$?

Outra situação interessante que resulta da superposição linear, relativa à dependência temporal dos estados quânticos, ocorre com autofunções de energia de um objeto quântico de massa m sob a ação de um potencial duplo (oscilador harmônico duplo ou poço quadrado duplo). Vide applet em "PhET".

Este efeito pode ser apreciado no comportamento da molécula de amônia (NH_3) e em algumas moléculas diatômicas, por exemplo.

Sugestões de Leitura

7. CARUSO, F., OGURI, V. **Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006, seção 15.3.
8. MESSIAH, A. **Mecânica Cuântica**. Madrid: Editorial Tecnos, 1973, cap. 12.
9. MERZBACHER, E. **Quantum Mechanics**. New York: John Wiley & Sons, 1998, cap. 5.

4. Emaranhamento Quântico

O emaranhamento quântico é um fenômeno que não possui análogo na Física Clássica, *que decorre do princípio da superposição linear* e que serve como base para o desenvolvimento de tecnologias emergentes como a computação quântica, a criptografia quântica e a teleportação.

O emaranhamento ocorre para sistemas de dois ou mais objetos quânticos em que o estado global consiste de uma combinação linear de estados individuais (separáveis) dos objetos, que *não pode* ser reescrita como um estado separável. É o caso, por exemplo, do estado $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle_1|E_2\rangle_2 - |E_2\rangle_1|E_1\rangle_2)$, sendo $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$ auto-estados de energia de um par de elétrons de um átomo. A consequência é que esses objetos se encontram fortemente correlacionados e assim permanecem em muitos casos, mesmo se porventura separados por grandes distâncias.

A previsão teórica desta correlação gerou grandes discussões em meados do século passado, por aparentemente permitir que a informação fosse transmitida em velocidade maior do que a da luz violando, assim, a teoria da relatividade. Albert Einstein⁵, inclusive, foi um dos maiores críticos desse princípio que, em sua opinião, evidenciava possíveis falhas da teoria quântica. Einstein chamava o emaranhamento quântico de *ação fantasmagórica à distância*.

Atualmente, porém, com a comprovação experimental da existência de estados emaranhados, mesmo quando os objetos quânticos envolvidos estão muito separados, a presumida violação do limite da velocidade de transmissão da informação foi mais bem analisada e os argumentos pertinentes foram derrubados⁶.

Como exemplo, consideremos um sistema de dois objetos quânticos idênticos cuja característica em análise é o spin (por exemplo, dois elétrons de spin $\frac{1}{2}$). O espaço linear de interesse possui dimensão quatro*, podendo ser escolhidos como vetores de estado da base, os estados separáveis caracterizados pelas projeções de spin, em uma dada direção, $+\eta/2$ ($|+\rangle$) ou $-\eta/2$ ($|-\rangle$):

$$|\Phi_1\rangle = |+\rangle_1|+\rangle_2, |\Phi_2\rangle = |+\rangle_1|-\rangle_2, |\Phi_3\rangle = |-\rangle_1|+\rangle_2 \text{ e } |\Phi_4\rangle = |-\rangle_1|-\rangle_2.$$

⁵ EINSTEIN, A., PODOLSKY, B., ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of reality be considered complete? **Physical Review Letters**, v. 47, n. 10, p. 777-780, 1935.

⁶ Dieks, D. Communication by EPR devices. **Physics Letters A**, v. 92, n. 6, p. 271-272, 1982.

* Em realidade, outras grandezas físicas que comutam com o spin e suas projeções conduzem a um espaço linear mais amplo.

Se o sistema estiver em um destes estados, a medida da projeção de spin de uma das partículas não informa sobre o resultado da medida da propriedade para a segunda partícula.

Contudo, poderíamos também escolher como vetores de estado da base:

$$|\phi_1\rangle = (|+\rangle_1|+\rangle_2), |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2), |\phi_3\rangle = (|-\rangle_1|-\rangle_2) \text{ e } |\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2).$$

Embora o primeiro conjunto seja “visualmente” mais simples e, portanto, pareça ser o melhor e o mais natural, o segundo apresenta propriedades muito interessantes para a discussão em foco. Assim, por exemplo, o estado $|\phi_4\rangle$ é característico de um sistema *emaranhado* de duas partículas de spin $\frac{1}{2}$ cada uma, com spin total igual a zero, ou seja, o spin total do sistema é zero, a projeção do spin total é zero, mas os elétrons 1 e 2 não apresentam valor único de projeção de spin. Portanto, há uma probabilidade finita de se encontrar o elétron 1 tanto no estado de projeção de spin $|+\rangle$ como no de projeção de spin $|-\rangle$, o mesmo valendo em alternância para o elétron 2. Supondo que o elétron 1 esteja “sob os cuidados de” uma pessoa de nome Alice (denominação adotada em publicações a respeito) e o elétron 2 esteja “sob os cuidados de” outra pessoa chamada Bob, pelo postulado (nº 5) do colapso do vetor de estado, se Alice obtiver na medida da projeção de spin do elétron 1 o valor $+\frac{\hbar}{2}$, Bob obterá para a medida da projeção de spin do elétron 2 o valor $-\frac{\hbar}{2}$, mesmo que eles se encontrem bastante separados espacialmente*.

O emaranhamento quântico pode também ser realizado com estados de fótons polarizados. Imagine a situação em que um par de fótons possui polarização emaranhada tal que sempre que um deles apresentar polarização vertical, o outro apresentará polarização horizontal. O estado de polarização do sistema quântico pode ser, por exemplo, $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_A|V\rangle_B - |V\rangle_A|H\rangle_B)$, onde H e V denotam,

respectivamente, as polarizações horizontal e vertical dos fótons e A e B denotam cada um dos fótons. Agora imagine que Alice observe um dos fótons e Bob o outro. Há uma probabilidade de 50% de Alice obter uma ou a outra das polarizações, assim como Bob. Porém, quando Alice efetuar a medida da polarização de um dos fótons, qualquer que seja o valor encontrado na medida, o fóton que está aos cuidados de Bob apresentará a polarização contrária. Como o estado do sistema é composto pela superposição linear de estados de dois subsistemas, cada qual com probabilidade finita de “existir”, ou seja, como o estado do sistema abrange as duas possibilidades, a medida da polarização retilínea dos fótons resultará obrigatoriamente em um dos auto-estados de polarização retilínea que compõem o estado do sistema. Isso ajuda a evidenciar que a informação não viajou mais rápido do que a luz, porque os estados já estavam “pré-definidos”.

Pense: Que postulado(s) apóia(m) a argumentação acima?

Na década atual, vários experimentos relacionados a estados emaranhados foram produzidos. Fótons e elétrons foram utilizados em projetos em que o emaranhamento de estados de polarizações ou estados de projeções de spin ou estados de momento linear foi testado a grandes distâncias^{1,7}.

* As posições dos elétrons são grandezas compatíveis com os spins e as projeções de spin em uma dada direção.

⁷ RARITY, J. G., TAPSTER, P. R. Two-color photons and nonlocality in fourth-order interference. *Physical Review A*, v. 41, n. 9, p. 5139-5146, 1990.

Como se observa, assim, uma utilização simples, mas sutil, do princípio de superposição linear de estados gera estados emaranhados, que são de extrema importância nos processos de comunicação atualmente utilizados e em desenvolvimento. Isso faz com que os profissionais de áreas muito mais amplas da ciência necessitem ser informados sobre os primeiros princípios da Mecânica Quântica.

Sugestões de Leitura

1. BARENCO, A. Quantum Physics and Computers. **Contemporary Physics**, v. 37, n. 5, p. 375-389, 1996.
2. BOUWMEESTER, D. et al. Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement. **Physical Review Letters**, v. 82, n. 7, p. 1345-1349, 1999.
3. ZEILINGER, A. Experiment and the Foundations of Quantum Physics. **Reviews of Modern Physics**, v. 71, n. 2, p. 288-296, 1999.

5. Criptografia Quântica

Um exemplo importante de aplicação dos primeiros princípios da Mecânica Quântica, desenvolvido e utilizado a partir da década de 70 última, é o da criptografia quântica. A área da *Criptografia* abrange os processos de proteção da transmissão de informação, buscando restringir o acesso ao conteúdo transmitido apenas para aqueles que de direito. A criptografia consiste, via de regra, na codificação de uma mensagem com o auxílio de uma *chave* (secreta ou pública) e o destinatário somente consegue decodificar a mensagem e lê-la, se possuir a chave. O objetivo do processo é a segurança da informação, de tal modo que, se e quando a mensagem for interceptada, não seja possível identificar seu conteúdo de forma inteligível.

Conforme a figura 10, por exemplo, temos uma mensagem a ser enviada: “Mecânica Quântica”. Após passar por um processo de criptografia, seu conteúdo fica alterado e somente quem possuir a chave de decodificação correta poderá acessar seu real conteúdo.



Figura 10. Apresentação simplificada de um processo criptográfico.

Com o avanço da tecnologia os mecanismos de transmissão de informação progrediram de forma espetacular, sendo a Internet a principal responsável pelo vertiginoso aumento de comunicação escrita entre dois ou mais sistemas ou entes. Aumentando o número de usuários destes meios e melhorando a qualidade e rapidez da transmissão, tornou-se também absolutamente necessário melhorar os sistemas de proteção associados ao processo de transmissão.

Os algoritmos de criptografia usados atualmente para preservação do sigilo na transmissão de mensagens via computadores utilizam seqüências aleatórias dos dígitos 0 e 1, como chaves, cujo conteúdo pretende ser de conhecimento exclusivo do emissor (Alice) e do receptor (Bob). As chaves são veiculadas pelos canais clássicos de comunicação, sendo passíveis de quebra de sigilo.

As chaves usuais dividem-se em chaves *privadas* e chaves *públicas*. Chaves privadas são aquelas partilhadas por Alice e Bob e estabelecidas previamente ao envio de mensagens. Evidentemente este tipo de chave não se adapta a comunicações entre empresas e (individualmente) seus clientes. Além disto, para que a chave seja segura, deve usar um grande conjunto de dígitos, mas em geral o tamanho do conjunto que caracteriza a mensagem é muito maior, o que significa que parte da mensagem é enviada sem criptografia, favorecendo a violação de sigilo, sem que Alice e Bob a percebam de imediato.

Empresas e seus clientes recorrem a algoritmos de chave pública, em que a chave usada para codificar a mensagem é diferente da usada para decifrá-la. O uso de fatoração de números muito grandes, neste caso, é freqüente.

Nos dois casos citados, a segurança do processo está relacionada à complexidade da seqüência de números usada e o conseqüente intervalo de tempo necessário para a descoberta da mesma. Contudo tais códigos podem ser desvendados em intervalos de tempo viáveis, se a velocidade de processamento da informação aumentar. No caso de um computador quântico, por exemplo, que utiliza princípios como a da superposição linear de estados, poder-se-ia reduzir um intervalo de tempo de bilhões de anos para fatorar certo número em um computador comum, a um período de tempo de alguns minutos.

Há, porém, uma nova possibilidade de evitar-se a quebra de sigilo do algoritmo criptográfico, que surge da utilização dos primeiros princípios da Mecânica Quântica. Este novo método de criptografia é denominado de *criptografia quântica*. Os processos de criptografia quântica são incondicionalmente seguros contra ataques de monitoramento passivo, porque sua segurança está baseada nas distribuições probabilísticas de resultados de medidas e no colapso do vetor de estado pelo ato de medida.

Os protocolos de criptografia quântica recorrem, principalmente, a fótons polarizados. Mesmo com computadores poderosíssimos, fica impossível a decodificação total dos dados. As tentativas de interceptação da mensagem são detectadas, não existindo previamente (antes da medida) um dado resultado.

Existem diversas propostas de protocolos de criptografia quântica. É comum adotar-se para a nomenclatura dos protocolos as iniciais do(s) nome(s) do(s) autor(es) e o ano em quem foram propostos. Dentre os protocolos encontrados na literatura se destacam o *BB84*, o *E91*, o *BBM92* e o *B92*.

Pense: Por que a criptografia quântica possui segurança incondicional contra ataques de monitoramento passivo?

O Protocolo BB84

Dos protocolos citados, o mais simples é o protocolo **BB84**, proposto por C.H. Bennett e G. Brassard⁸, o primeiro dos protocolos quânticos a ser implementado.

O protocolo transmite fótons polarizados por um canal quântico e utiliza também um canal clássico de comunicação (Internet ou telefone, p.ex.). O canal clássico não afeta a segurança incondicional do processo porque é usado para conferência de alguns dados a serem descartados posteriormente.

Suponhamos que Alice envie os fótons e Bob os receba. Antes de iniciar a transmissão Alice e Bob escolhem as bases (compostas por dois estados ortogonais

⁸ BENNETT, C. H., BRASSARD, G. Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing. **Proceedings of IEEE International Conference on Computers Systems and Signal Processing**. Bangalore, India, 1984, p. 175-179.

de polarização) que serão usadas na transmissão e recepção dos fótons. Consideremos as bases da figura 11, apresentadas no artigo de Bennet e Brassard.



Figura 11: Representação das bases adotadas por Alice e Bob para a transmissão dos fótons.

A base A (retilínea) mede *com certeza* a polarização dos fótons que apresentam polarização horizontal ou vertical, enquanto a base B mede *com certeza* a polarização dos fótons que apresentam polarizações diagonais. A base B está a 45° em relação à base A.

Alice e Bob combinam previamente, também, qual polarização representará os bits 0 e 1 em cada base, o que pode ser feito através de um canal clássico de comunicação. Neste exemplo, supomos que a polarização horizontal na base A e a polarização diagonal direita na base B representem o bit 0 ($|0\rangle_A$ e $|0\rangle_B$). Assim, a polarização vertical na base A e a polarização diagonal esquerda na base B representarão o bit 1 ($|1\rangle_A$ e $|1\rangle_B$). Observe-se que, pelo princípio da superposição linear, podemos representar um estado de polarização de uma das bases em função dos da outra base, resultando, por exemplo, em $|0\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + |1\rangle_A)$ e

$$|1\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A - |1\rangle_A).$$

Combinadas as bases e a representação dos bits em cada base, Alice pode começar a enviar os fótons para Bob. Vamos supor que Alice decida enviar os bits 011010100111 para Bob. Decididos os bits, Alice escolhe *aleatoriamente* as bases em que vai enviar cada bit para Bob, que escolhe também *aleatoriamente* as bases para a leitura das polarizações dos fótons. Bob só pode executar a medida uma vez para cada fóton, tendo em vista o colapso do estado e a impossibilidade de clonar um fóton isolado.

A tabela 1 exemplifica o processo de transmissão de uma chave criptográfica entre Alice e Bob. Nas quatro primeiras linhas estão registradas as etapas relativas à transmissão dos fótons polarizados, enquanto nas demais ocorre a discussão pública entre eles, finalizando com a seleção (implícita) da chave a ser então compartilhada. Se Bob escolher a base errada para medir a polarização, obterá um resultado aleatório. Em algumas ocasiões Bob utiliza a mesma base que Alice, porém não consegue medir a polarização dos fótons, o que ocorre em situações reais por perda de fótons dentro do canal quântico de comunicação.

Seqüência de bits enviada por Alice.	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
Bases escolhidas por Alice para enviar cada fóton.	A	B	B	B	A	A	B	A	B	A	B	B
Bases escolhidas por Bob para medir a polarização dos fótons.	A	B	A	B	B	A	B	B	A	A	B	A
Medição da polarização por Bob.	0		0	0	0	0	1	1			1	1
FIM DA TRANSMISSÃO PELO CANAL QUÂNTICO												
Bob informa as bases utilizadas	A		A	B	B	A	B	B			B	A

para detectar os fótons.										
Alice informa as bases corretas.	OK		OK		OK	OK			OK	
Relação (secreta) dos bits de bases coincidentes.	0		0		0	1			1	
Bob revela alguns bits da chave.			0						1	
Alice confirma os bits de Bob.			OK						OK	
Bits corretos restantes compõem a chave.	0				0	1				

Tabela 1. Simulação do processo de transmissão de bits de Alice para Bob utilizando fótons polarizados.

Para analisar a segurança deste processo, vejamos agora o que acontece quando outra pessoa (Eva) decide espionar (e conseqüentemente interceptar) os fótons enviados por Alice a Bob.

Eva sabe, inicialmente, que os fótons estão sendo enviados com polarização dada pelas bases A ou B. Assim como Bob, ela também escolhe aleatoriamente seus polarizadores ao interceptar os fótons. Estatisticamente, há uma probabilidade de Eva acertar, no máximo, 75% dos bits enviados. Os fótons interceptados terão de ser reenviados e nesse reenvio há, então, a probabilidade mínima de 25% dos fótons estarem com a polarização errada devido à sua medição. Assim, Bob receberá uma chave em que os dados diferem pelo menos em 25% dos da chave original enviada por Alice, embora ele não saiba isso ainda. Contudo, ao conferir seus dados com os de Alice, ele percebe que, devido a uma alta taxa de erros, alguém está tentando espionar os dados transmitidos. Os erros de transmissão são baixos (inferiores a 3%) e são devidos a ruídos no canal quântico ou a desalinhamento dos polarizadores.

Por que Eva não consegue interceptar o envio de Alice e reenviá-lo corretamente para Bob, sem que percebam sua interferência no processo? Como não é possível clonar um quantum individual, Eva não pode duplicar o estado quântico do fóton recebido, medir sobre um dos fótons e reenviar o outro para Bob.

Pense: Por que tal processo de criptografia só é seguro contra ataques de monitoramento passivo?

Outros Protocolos de Criptografia Quântica

Os demais protocolos antes citados serão agora mencionados de forma muito resumida.

O protocolo **E91**, proposto por Artur K. Ekert em 1991, utiliza Estados de Bell (por exemplo, $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$) para transmitir chaves quânticas, ou seja, trabalha com *estados emaranhados*.

Em 1992, Bennett, Brassard e Mermin simplificaram o protocolo E91 e criaram o protocolo **BBM92**, mostrando de um modo mais simples que não é possível que outra pessoa conheça as chaves sem que Alice e Bob o percebam.

Ainda em 1992, Bennett criou o protocolo **B92**, em que somente dois estados *não-ortogonais* de polarização de fótons são utilizados na transmissão das chaves criptográficas. A importância deste protocolo é mais conceitual do que prática.

Pense: Por que só é possível enviar um bit por fóton?

*A Utilização da Criptografia Quântica*⁹

Embora seja um desenvolvimento científico recente, a criptografia quântica já mostrou sua viabilidade.

Inicialmente, nos laboratórios da IBM, as chaves eram transmitidas apenas a pequenas distâncias (aproximadamente 30 cm), mas atualmente a empresa japonesa NEC realiza a transmissão de chaves criptográficas quânticas a distâncias de 150 km.

Uma equipe da IBM já utiliza a criptografia quântica a distâncias de 60 km utilizando fibra ótica de alta pureza (material de custo elevado, ainda não viável para produção em larga escala), enquanto em distâncias maiores as perdas foram muito grandes, principalmente devido a impurezas da fibra, inviabilizando o sistema.

A empresa norte-americana MagiQ Technologies comercializa sistemas que transferem chaves por até 100 km e que custam cerca de cem mil dólares. A empresa suíça id Quantique também comercializa produtos que transferem chaves quanticamente codificadas.

A empresa inglesa QinetiQ consegue transferir chaves quânticas pelo ar por 23 km em topos de montanhas, regiões onde há baixa turbulência atmosférica. A Agência Espacial Européia está investindo para criar um satélite de baixa órbita que possibilite este tipo de comunicação por 1.000 km.

Estima-se que em breve seja possível utilizar tais protocolos em escala industrial.

Os EUA financiam um projeto de US\$ 4 milhões para interligar as universidades de Harvard e Boston e a BBN Technologies, em Massachusetts.

Pense: Que aplicações (e avanços tecnológicos) você sugere para a utilização de átomos ao invés de fótons nos protocolos de criptografia quântica?

Sugestões de Leitura

1. ASPECT, A. Bell's inequality test: more ideal than ever. **Nature**, v. 398, 189-190, 1999.
2. WOOTERS, W. K., ZUREK, W. H. A single quantum cannot be cloned. **Nature**, v. 299, p. 802-803, 1982.

⁹ Adaptado de STIX, G. Os segredos mais bem guardados. **Scientific American Brasil**, ano 3, n. 33, p. 38-45, 2005

APÊNDICE II – QUESTIONÁRIOS DO CURSO DA UNISINOS

1º Questionário

- 1) O que você entende por:
 - a) *objeto quântico*
 - b) *estado de um sistema quântico*
 - c) *observável físico*
 - d) *compatibilidade de observáveis*
- 2) O que vem a ser e o que revela o experimento de Young de dupla fenda com ondas eletromagnéticas?
- 3) Você já ouviu falar em *colapso* da função de onda (também conhecido como *filtragem* do pacote de ondas)? Você pode explicar o significado desta expressão?
- 4) Você conhece o experimento de dupla fenda com elétrons? Pode comentar seus resultados?

2º Questionário

- 1) Explique com suas palavras o que vem a ser:
 - a) *probabilidade*
 - b) *spin*
- 6) Para um sistema quântico com dois estados distintos possíveis de energia E_1 e E_2 :
 - a) é possível encontrar o sistema em um estado que é uma soma dos referidos estados de energia?
 - b) é possível obter-se em uma medida de energia o valor $(E_1+E_2)/2$?
- 2) Você diria que os estados dos objetos quânticos podem variar com o tempo?

3º Questionário

- 1) Para que serve a *equação de Schrödinger dependente do tempo*? Para que serve a equação de Schrödinger *independente do tempo*? Qual a relação entre elas?
- 2) Conhecendo o estado de um sistema quântico em um determinado instante, é possível conhecer seu estado em um instante posterior?

APÊNDICE III – EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CURSO DA UNISINOS

Exercícios da aula do dia 06 de outubro de 2007

- 1) Dados os vetores do plano $\vec{p}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{p}_2 = -2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{p}_3 = 2\vec{i} - 2\vec{j}$, determine o vetor $\vec{p} = \vec{p}_1 + 2\vec{p}_2 - \frac{1}{2}\vec{p}_3$ e apresente sua representação gráfica.
- 2) Mostre que ondas (funções), sob as leis usuais de adição e de produto por número, formam um espaço linear.
- 3) Escreva todas as propriedades características de um espaço linear, para vetores expressos na notação de Dirac.
- 4) Dada a representação em série das ondas dente-de-serra: $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(kx)}{k}$, expanda-a até o quinto termo e construa o gráfico correspondente.
- 5) Comente o fato de os estados de sistemas quânticos poderem ser representados por vetores de um espaço linear.
- 6) No plano existem dois vetores (linearmente) independentes (por exemplo, \vec{i} e \vec{j} da questão 1). No espaço tridimensional, quantos vetores linearmente independentes teremos? E em um espaço a quatro dimensões? E em um espaço a N dimensões?
- 7) Suponha um conjunto infinito de vetores linearmente independentes. Pode este conjunto formar um espaço vetorial? Se sim, que condições deve preencher?
- 8) Escolha um objeto clássico qualquer e procure descrever seu estado do modo mais completo possível.
- 9) Escolha um objeto quântico qualquer e procure descrever seu estado.
- 10) Procure descrever um estado diferente do anterior, para o objeto escolhido na questão acima.

Exercícios da aula do dia 20 de outubro de 2007

- 1) Considere os estados de spin abaixo preparados para três elétrons distintos:
 - i) $|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle + \sqrt{2}|-\rangle)$; ii) $|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{5}|+\rangle + |-\rangle)$; iii) $|\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(\sqrt{8}|+\rangle + 2|-\rangle)$.
 - a) Em um experimento de Stern-Gerlach, quantos elétrons de um total de 9000 você espera encontrar no estado “spin-para baixo” em cada caso?
 - b) Que informações você pode fornecer sobre o estado $|\Phi_2\rangle$?

- 2) Por que, em Mecânica Quântica, a todo observável físico corresponde um operador?
- 3) É possível verificar, com uma única medida, que um sistema quântico se encontra no estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle + |E_3\rangle)$? Justifique.
- 4) Se representarmos um operador associado ao momento linear na direção x por P_x , como você representaria o operador energia cinética para um elétron de massa m ?
- 5) Verifique se são ou não autovetores de $\frac{d}{dx}$ as funções $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\exp(ix)$.
Mesma questão para $\frac{d^2}{dx^2}$.
- 6) Com base nos resultados da questão acima, você diria que o operador $\frac{d}{dx}$ pode representar algum observável físico?

Exercícios da aula do dia 27 de outubro de 2007

- 1) Considere os três estados de spin de um elétron, abaixo:
- i) $|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle + \sqrt{2}|-\rangle)$; ii) $|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{5}|+\rangle + |-\rangle)$; iii) $|\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(\sqrt{8}|+\rangle + 2|-\rangle)$,
em que $|+\rangle$ ($|-\rangle$), representa o auto-estado de projeção $+\hbar/2$ ($-\hbar/2$) do spin, na direção de um campo magnético inhomogêneo.
- Na medida das projeções do spin na direção indicada, qual a probabilidade de encontrar o elétron no estado de “spin-para-cima”, em cada caso?
 - Considere o caso iii). Após a primeira medida, suponha que encontremos o elétron no estado de “spin-para-cima”. Se efetuarmos uma segunda medida da projeção do spin, imediatamente após a primeira, sobre este elétron, o que obteremos?
 - Após a primeira medida citada no item b) acima, em que estado de spin se encontrará o elétron?
 - Qual a probabilidade de obter-se o valor $-\hbar/2$, na segunda medida?
- 2) Um átomo se encontra inicialmente no estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle + |E_3\rangle)$, sendo todos os valores E_i , distintos.
- Podemos dizer que o átomo possui energia definida? Em caso afirmativo, qual o valor da energia? Em caso negativo, qual a probabilidade de obter-se, em uma medida de energia, o autovalor E_2 ?
 - Tendo-se medido o autovalor E_2 , qual a probabilidade de, em uma segunda medida de energia realizada logo após a primeira, obter-se o valor E_3 ?

- c. Qual a probabilidade de, após a primeira medida, encontrar-se o átomo no estado $|E_1\rangle$?
- d. Qual a probabilidade de obter-se em uma medida de energia o valor $\frac{(E_1 + E_2 + E_3)}{3}$?
- 3) Consideremos um feixe de luz polarizada compreendendo 5000 fótons todos no mesmo estado e caracterizado pelo campo $\vec{E} = E_0 \hat{p} e^{i(kz - \omega t)}$, sendo \hat{p} o vetor de polarização, no plano xy, orientado a 30° do eixo \hat{x} .
- a. Qual a direção de propagação do feixe?
- b. Qual o vetor de estado de polarização característico de cada fóton?
- c. Introduzindo um polarizador que permite apenas a passagem de luz na direção \hat{y} , qual a probabilidade de um fóton passar pelo polarizador?
- d. Introduzindo um segundo polarizador em sucessão ao primeiro que permite apenas a passagem de luz na direção \hat{y} , qual a probabilidade de um fóton, que passou pelo primeiro polarizador, passar pelo segundo?

APÊNDICE IV – AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM NO CURSO DA UNISINOS

- 1) O que significa, no seu entender, a superposição linear de estados de sistemas quânticos? Use suas próprias palavras. Dê exemplos.
- 2) O estado do elétron de um átomo de hidrogênio é $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}|E_1\rangle + \sqrt{3}|E_2\rangle)$, com $E_1 \neq E_2$, onde E_1 e E_2 são valores de energia tais que $H|E_1\rangle = E_1|E_1\rangle$ e $H|E_2\rangle = E_2|E_2\rangle$.
 - a) Qual a probabilidade de, em uma medida de energia, se encontrar o valor $\frac{2E_1 + 3E_2}{5}$?
 - b) Qual a probabilidade de, em uma medida de energia, se encontrar o elétron no estado $|E_1\rangle$?
 - c) Imediatamente após uma medida com resultado E_1 para a energia, qual a probabilidade de se encontrar o elétron, em uma segunda medida então, no estado $|E_2\rangle$?
 - d) Que valores podem ser obtidos para a energia do elétron deste átomo?
- 3) Um objeto quântico está em um estado $|\Phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} c_\alpha |x_\alpha\rangle dx$, em que $|x_\alpha\rangle$ são os auto-estados do operador de posição (caso unidimensional).
 - a) Quais os possíveis valores para a medida da posição deste objeto?
 - b) Se os coeficientes c_α forem todos iguais, qual a probabilidade de se obter um valor negativo para x_α na medida da posição deste objeto quântico?
- 4) Considere dois elétrons que foram igualmente preparados para a realização do experimento de Stern-Gerlach. Na primeira medida, foi obtido o valor $+\eta/2$ tanto para a projeção do spin na direção do campo magnético do primeiro elétron como para a do segundo elétron. Podemos concluir que estes elétrons estavam, cada um, no estado $|\phi\rangle = |+\eta/2\rangle$? Justifique.
- 5) Um elétron livre encontra-se no estado descrito espacialmente pela função $\phi(x,t) = A \exp[i(kx - \omega t)]$. Determine a razão entre $|\phi(x,t)|^2$ e $|\phi(x,0)|^2$. O que significa este resultado, face à equação de Schrödinger dependente do tempo?
- 6) Quais dos estados abaixo você diria que são estados emaranhados? Por quê? (Esperamos que a notação seja evidente. Se não estiver, pergunte.)

a) $ \chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0\rangle_1 1\rangle_2 + \sqrt{2} 1\rangle_1 0\rangle_2)$;	b) $ \chi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0\rangle_1 0\rangle_2 + \sqrt{2} 0\rangle_1 1\rangle_2)$;
c) $ \chi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0\rangle_1 + \sqrt{2} 1\rangle_1)$;	d) $ \chi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\rangle_1 1\rangle_2 + \sqrt{2} 0\rangle_1 0\rangle_2)$.

APÊNDICE V – QUESTIONÁRIO INICIAL DO CURSO DA UFRGS

1) O que você entende por:

- a) *função de onda*, em Mecânica Quântica
- b) *estado de um objeto quântico*
- c) *superposição linear de estados*
- d) *compatibilidade de observáveis*
- e) *evolução temporal de estado (função de onda)*
- f) *emaranhamento de sistemas quânticos*

2) Você já ouviu falar em *colapso* da função de onda (também conhecido como *filtragem* do pacote de ondas)? Você pode explicar o significado desta expressão?

APÊNDICE VI – EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CURSO DA UFRGS

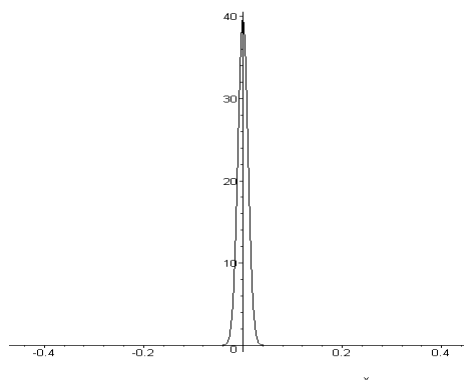
1ª Lista

- 1) Dados os vetores do plano $\vec{r}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{r}_2 = -\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{r}_3 = 2\vec{i} - \vec{j}$ (\vec{i} e \vec{j} ortogonais e unitários), determine graficamente o vetor $\vec{r} = \vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 - \frac{1}{2}\vec{r}_3$.
- 2) No plano, podemos encontrar pares de vetores linearmente independentes (por exemplo, \vec{i} e \vec{j} da questão 1). No espaço tridimensional, quantos vetores linearmente independentes teremos? E em um espaço a quatro dimensões? E em um espaço a N dimensões?
- 3) Dados os vetores $\vec{r}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{m}$ e $\vec{r}_2 = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} - 5\vec{m}$ (\vec{i} , \vec{j} , \vec{k} e \vec{m} mutuamente ortogonais e unitários), determine o vetor $\vec{r} = 2\vec{r}_1 + \vec{r}_2$. (Não representamos estes vetores espacialmente, porém são muito úteis em Física.)
- 4) Vetores ortogonais são necessariamente linearmente independentes? E vetores linearmente independentes são necessariamente ortogonais?
- 5) Mostre que ondas (funções) a uma dimensão, sob as leis usuais de adição e de produto por número, satisfazem as condições dos espaços lineares.
- 6) Expanda a representação em série da onda dente-de-serra $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(kx)}{k}$ até o quinto termo e construa o gráfico correspondente a um trecho da mesma.
- 7) Escolha um objeto clássico qualquer e procure descrever seu estado do modo mais completo possível.
- 8) Escolha um objeto quântico qualquer e procure descrever seu estado.
- 9) Procure descrever um estado diferente do anterior, para o objeto quântico escolhido na questão acima.
- 10) Comente o fato de os estados de sistemas quânticos poderem ser representados por vetores de um espaço linear.
- 11) No experimento de dupla fenda com elétrons, o que acontece se:
 - a. diminuirmos a intensidade do feixe de elétrons?
 - b. aumentarmos a intensidade do feixe de elétrons?
 - c. aumentarmos a largura das fendas?
- 12) O próton e o nêutron são várias vezes citados como partículas elementares e outras vezes como sistemas complexos. Como você justifica esta duplicidade?

2ª Lista

- 1) Sendo \hat{I} o operador de inversão de vetores do plano, determine graficamente o efeito da ação de \hat{I} sobre os vetores $\vec{r}_1 = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ e $\vec{r}_2 = -2\vec{i} + \vec{j}$.
- 2) Considere os estados de spin distintos abaixo preparados para um elétron:
- i) $|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle - \sqrt{2}|-\rangle)$; ii) $|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{5}|+\rangle + |-\rangle)$; iii) $|\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(\sqrt{8}|+\rangle + 2|-\rangle)$.
- Em um experimento de Stern-Gerlach, você espera encontrar mais elétrons no estado de “spin-para-baixo” ou no estado de “spin-para-cima” em cada caso?
 - Que informações você pode fornecer sobre o estado $|\Phi_2\rangle$?
 - Se na medida da projeção de spin você encontrar o autovalor $+\hbar/2$, em qual estado de spin você pensa encontrar logo a seguir o elétron?
- 3) Por que, em Mecânica Quântica, a todo observável físico corresponde um operador?
- 4) O que você espera encontrar no segundo anteparo, na experiência de dupla fenda com elétrons, se a fonte emitir apenas 5 elétrons?
- 5) É possível verificar, com uma única medida, que um sistema quântico se encontra no estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle + |E_3\rangle)$? ($|E_i\rangle$ significa um auto-estado de energia.) Justifique.
- 6) Se um elétron do átomo de hidrogênio se encontrar no estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle + |E_3\rangle)$, o que você espera encontrar para a energia deste elétron ao realizar *uma* medida? E ao realizar *muitas* medidas?
- 7) Se representarmos um operador associado ao momento linear na direção \vec{x} por \hat{p}_x , como você representaria o operador energia cinética correspondente para um elétron de massa m ?
- 8) Verifique se são autovetores do operador $\frac{d}{dx}$ (e quais os autovalores correspondentes) as funções $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\exp(ix)$. Mesma questão para $\frac{d^2}{dx^2}$.

- 9) Se a função da figura ao lado representar (aproximadamente) o estado de um objeto quântico como função de sua posição (caso unidimensional), você diria que:
- você espera encontrar o objeto na posição $x_1 = 0$?
 - você espera encontrar o objeto na posição $x_2 = 0,2$?



- 10) Com base na questão anterior, que funções da variável posição você traçaria (qualitativamente, sem preocupação maior com escalas) para os resultados do experimento de dupla fenda com elétrons?
- 11) Escreva, simbolicamente, o operador \hat{H} (definido no texto) para o elétron do átomo de hidrogênio.
- 12) Com base nos resultados obtidos para os níveis de energia do átomo de hidrogênio no modelo de Bohr, o que está sendo simbolizado na notação de Dirac $|E_i\rangle_{i=1,\dots,n,\dots,\infty}$?

3ª Lista

- 1) Considere os três estados de spin de um elétron, abaixo:
- i) $|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle + \sqrt{2}|-\rangle)$; ii) $|\Phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{5}|+\rangle - |-\rangle)$; iii) $|\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(\sqrt{8}|+\rangle - 2|-\rangle)$,
em que $|+\rangle$ ($|-\rangle$), representa o auto-estado de projeção $+\hbar/2$ ($-\hbar/2$) do spin, na direção de um campo magnético inhomogêneo.
- Na medida das projeções do spin na direção indicada, qual a probabilidade de encontrar o elétron no estado de “spin-para-cima”, em cada caso?
 - Considere o caso iii). Após a primeira medida, suponha que encontremos o elétron no estado de “spin-para-cima”. Se efetuarmos uma segunda medida da projeção do spin, imediatamente após a primeira, sobre este elétron, o que obteremos?
 - Após a primeira medida citada no item b), em que estado de spin se encontrará o elétron?
 - Após a primeira medida citada no item b), qual a probabilidade de obter-se o valor $-\hbar/2$, na segunda medida?
- 2) Um átomo se encontra inicialmente no estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle + |E_3\rangle)$, sendo todos os valores E_i , distintos.
- Podemos dizer que o átomo possui energia definida? Em caso afirmativo, qual o valor da energia? Em caso negativo, qual a probabilidade de obter-se, em uma medida de energia, o autovalor E_2 ?
 - Tendo-se medido o autovalor E_2 , qual a probabilidade de, em uma segunda medida de energia realizada logo após a primeira, obter-se o valor E_3 ?
 - Qual a probabilidade de, após a primeira medida, encontrar-se o átomo no estado $|E_1\rangle$?
 - Tendo-se medido o autovalor E_2 , qual a probabilidade de obter-se em uma medida de energia o valor $\frac{(E_1 + E_2 + E_3)}{3}$, se as energias forem as três menores distintas do átomo de hidrogênio (use os resultados do modelo de Bohr)?
- 3) Consideremos um feixe de luz polarizada compreendendo 5000 fótons todos no mesmo estado e caracterizado pelo campo $\vec{E} = E_0 \vec{p} e^{i(kz - \omega t)}$, sendo \vec{p} o vetor de polarização, no plano xy, orientado a 30° do eixo \vec{x} .

- a. Qual a direção de propagação do feixe?
 - b. Qual o vetor de estado de polarização característico de cada fóton?
 - c. Introduzindo um polarizador que permite apenas a passagem de luz na direção \hat{y} , qual a probabilidade de um fóton passar pelo polarizador?
 - d. Introduzindo um segundo polarizador em sucessão ao primeiro que permite apenas a passagem de luz na direção \hat{y} , qual a probabilidade de um fóton, que passou pelo primeiro polarizador, passar pelo segundo?
- 4) Apresente exemplos relativos aos cinco postulados discutidos até agora.

4ª Lista

1) Considere as funções:

- $f_1(x) = Ae^{-\alpha x^2}$
- $f_2(x) = e^{-\alpha\sqrt{x^2+a^2}}$
- $f_3(x) = \text{sen}(kx)$

Verifique se as funções acima são autofunções dos operadores (caso unidimensional) momento linear $(-\imath\eta \frac{d}{dx})$ e energia cinética $(-\frac{\eta^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2})$.

2) Verifique se $f_1(x)$ é autofunção do hamiltoniano do oscilador harmônico linear

$$\text{unidimensional } H = -\frac{\eta^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 :$$

- nunca;
- somente se α for... ;
- sempre.

3) Que estado quântico você diria que $f_1(x)$ descreve?

4) De qual hamiltoniano você diria que $f_3(x)$ é autofunção? Que estado quântico $f_3(x)$ descreve?

5) Apresente as expressões, na descrição espacial, dos operadores de momentum angular orbital \hat{L}_x , \hat{L}_y e \hat{L}_z , sabendo que a expressão clássica $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dá origem à correspondente expressão quântica.

6) A partir das expressões, na descrição espacial, de \hat{L}_x , \hat{L}_y e \hat{L}_z obtidas na questão anterior, mostre que $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \imath\eta\hat{L}_z$.

7) O que se conclui a respeito das grandezas físicas componentes de l_x e l_y de momentum angular orbital de uma partícula quântica, face ao resultado da questão anterior?

5ª Lista

- 1) Nem só de probabilidades vive a Mecânica Quântica...
 Pelo que se afirma no postulado nº 4, as funções $\exp(ikx)$ e $\exp(-ikx)$ apresentam as mesmas distribuições de probabilidades, a saber, $|f(x)|^2 = 1$. Como distinguir, então, os estados que elas representam?
 a) Aplique o operador momento linear às funções. O que se obtém?
 b) Aplique o operador energia cinética (partícula de massa m) às funções. O que se obtém?
 c) Face a seus resultados, a que conclusões você chega?
- 2) Ainda sob o mesmo enfoque do exercício anterior, considere os estados de projeção de spin do elétron numa dada direção:
 $|\phi_1\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)$; $|\phi_2\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)$; $|\phi_3\rangle = (|+\rangle + i|-\rangle)$ e $|\phi_4\rangle = (|+\rangle - i|-\rangle)$.
 ($|+\rangle$ e $|-\rangle$ são estados de norma 1.) Os três estados em questão apresentam as mesmas distribuições de probabilidade, total e individuais. Contudo se aplicarmos o operador que inverte o valor da projeção de spin, teremos para o primeiro estado $I_z|\phi_1\rangle = (|-\rangle + |+\rangle) = |\phi_1\rangle$ e para o segundo estado $I_z|\phi_2\rangle = -(|+\rangle - |-\rangle) = -|\phi_2\rangle$.
 a) O que resulta de $I_z|\phi_3\rangle$ e de $I_z|\phi_4\rangle$?
 b) Face a seus resultados, a que conclusões você chega?
- 3) Frequentemente nos referimos à realização de uma “primeira medida” de uma grandeza física para um objeto quântico e a uma “segunda medida” imediatamente após a primeira. Por que a segunda medida deve ser feita logo após a primeira para que se repita o resultado desta?
- 4) A superposição linear de estados de sistemas quânticos gera novos estados, não apenas para um único objeto quântico, mas também quando o sistema é composto de vários objetos. Exemplos frequentes destes estados, obtidos por superposição de outros, são encontrados para sistemas de partículas idênticas, que devem apresentar-se em estados simétricos (bósons) ou anti-simétricos (férmions). Se tivermos um sistema composto de duas partículas quânticas, digamos dois elétrons de um átomo, um estado de energia possível para o par de elétrons é $(E_1 \neq E_2) |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle_1|E_2\rangle_2 - |E_2\rangle_1|E_1\rangle_2)$, sendo $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$ estados de norma 1. Para este estado não podemos dizer que a energia do elétron 1 é E_1 e nem que é E_2 . O elétron 1 tem uma probabilidade finita tanto de apresentar energia E_1 quanto de apresentar energia E_2 . Analogamente o elétron 2.
 Construa um estado de energia de um sistema de dois elétrons, em que há uma probabilidade de 60% de o elétron 1 estar no estado de energia E_1 .
 a) Qual a probabilidade de o elétron 2 estar no estado de energia E_2 ?
 b) Qual a probabilidade de o elétron 2 estar no estado de energia E_1 ?
 c) Qual a probabilidade de o elétron 1 estar no estado de energia E_2 ?
- 5) Considere o seguinte estado de projeção de spin na direção de um campo magnético inhomôgeneo, para um sistema de três elétrons:
 $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle_1|+\rangle_2|-\rangle_3 - i|+\rangle_1|-\rangle_2|-\rangle_3 - |-\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3)$. Em uma primeira medida, encontra-se o valor $+\hbar/2$ para a projeção de spin do elétron 1.

- O que se pode concluir sobre a projeção de spin do elétron 2?
- O que se pode concluir sobre a projeção de spin do elétron 3?
- $|\Psi\rangle$ é um estado emaranhado?

6ª Lista

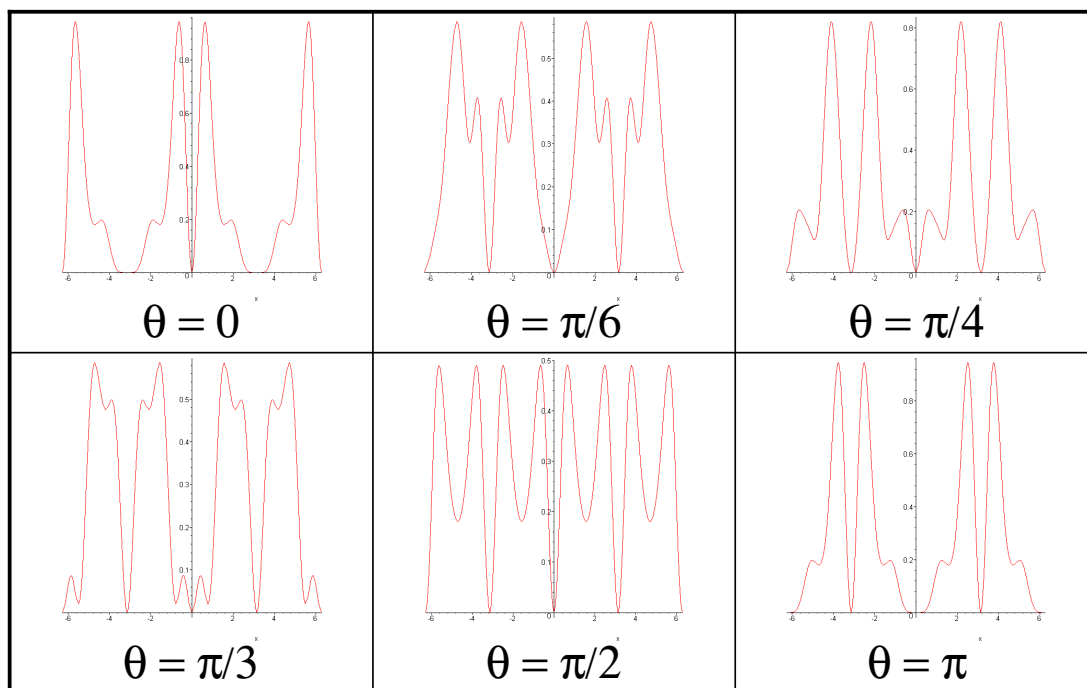
1) Considere o estado de uma partícula quântica de massa m representada pela função $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{\text{sen}(kx)}{k}$, apresentada no exercício 6 da Lista 1 (aproximação à onda dente-de-serra). $f(x)$ se confunde com a função $f(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^4 \frac{\text{sen}(kx)}{k} \exp\left(-\frac{iE(k)t}{\hbar}\right)$ no instante $t = 0$. Se considerarmos que a evolução temporal do estado da partícula, dada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = Hf(x,t)$$

ocorre livremente, teremos $E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Reescrevendo a fase $\frac{E(k)t}{\hbar}$ correspondente a $k=1$ como θ , teremos para os valores de θ iguais a $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi$ os gráficos abaixo, relativos a $|f(x,t)|^2$ no intervalo $-6,28 \leq x \leq 6,28$.

Especificamente

$$f(x,t) = \frac{2}{\pi} \left\{ \text{sen}(x) \exp(-i\theta) + \frac{\text{sen}(2x)}{2} \exp(-4i\theta) + \frac{\text{sen}(3x)}{3} \exp(-9i\theta) + \frac{\text{sen}(4x)}{4} \exp(-16i\theta) \right\}.$$



Por que, no seu entender, as distribuições espaciais acima se modificaram com o transcorrer do tempo?

APÊNDICE VII – AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM NO CURSO DA UFRGS

- 1) Os experimentos de dupla fenda podem revelar propriedades fundamentais dos sistemas regidos pela Mecânica Quântica.
 - a) Como você caracterizaria o estado de um elétron que chega ao segundo anteparo, sem ter sofrido qualquer observação antes?
 - b) Em relação ao item acima, imediatamente após a detecção do elétron no segundo anteparo, o que você diria sobre o estado deste elétron?

- 2) Por que o estado de um sistema quântico é também denominado “vetor de estado”?

- 3) O que significa, no seu entender, a superposição linear de estados de sistemas quânticos? Dê algum exemplo.

- 4) Um feixe de 20.000 elétrons, todos no estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}|+\rangle + \frac{3}{\sqrt{10}}|-\rangle$ de projeções de spin em uma dada direção, é submetido a uma experiência do tipo “Stern-Gerlach”, com campo magnético inhomogêneo na referida direção.
 - a) Após a passagem de 4 elétrons pelo campo magnético, quantos elétrons você espera encontrar no estado $|+\rangle$?
 - b) Após a passagem dos 20.000 elétrons pelo campo magnético, quantos elétrons você espera encontrar no estado $|-\rangle$?
 - c) Os feixes resultantes no item b) acima são submetidos, imediatamente após, a novos experimentos com campo magnético apontando na mesma direção que o anterior. O que se espera como resultado?

- 5) Um feixe de 50.000 fótons, todos preparados da mesma maneira, apresentou, na determinação de polarização linear, 30.000 fótons com polarização horizontal $|H\rangle$ e 20.000 com polarização vertical $|V\rangle$. Isto significa que:
 - a) 30.000 fótons do feixe inicial se encontravam no estado $|H\rangle$ e 20.000 no estado $|V\rangle$?
 - b) os 50.000 fótons se encontravam em um estado que é uma superposição linear dos estados $|H\rangle$ e $|V\rangle$?
 - c) não se pode concluir entre as alternativas a) e b), para caracterizar os estados dos fótons do feixe?

- 6)
 - a) Por que associamos *operadores* às grandezas físicas, em Mecânica Quântica?
 - b) O estado de um elétron pode conter informações concomitantes sobre os observáveis físicos posição e energia cinética? Justifique sua resposta.

- 7) O estado do elétron de um átomo de hidrogênio, em um dado instante de tempo, é $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}|E_1\rangle + \sqrt{3}|E_2\rangle)$, com $E_1 \neq E_2$ sendo E_1 e E_2 os dois primeiros valores de energia do elétron, tais que $\hat{H}|E_1\rangle = E_1|E_1\rangle$ e $\hat{H}|E_2\rangle = E_2|E_2\rangle$. Lembrete: o valor da energia para o elétron no átomo de hidrogênio pode ser estimado pela relação $E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}$.

- a) $|\Psi\rangle$ é um auto-estado de energia?
- b) Qual a probabilidade de, em uma medida de energia, se encontrar o valor $\frac{2E_1 + 3E_2}{5}$?
- c) Imediatamente após uma medida de energia com resultado E_1 , qual a probabilidade de se encontrar o elétron, em uma segunda medida, no estado $|E_2\rangle$? Por quê?
- d) Que valores podem ser obtidos para a energia do elétron que se encontra no estado $|\Psi\rangle$?
- 8) Estados emaranhados parecem ser simplesmente superposições lineares de outros estados. Em que diferem os estados emaranhados dos não emaranhados?
- 9) Quais dos estados abaixo você diria que são estados emaranhados? Por quê?
- a) $|\chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|H\rangle_1|V\rangle_2 + i\sqrt{2}|V\rangle_1|H\rangle_2)$; b) $|\chi_2\rangle = \frac{1}{2}(|H\rangle_1|H\rangle_2 + \sqrt{3}|V\rangle_1|H\rangle_2)$;
- c) $|\chi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|H\rangle_1 - \sqrt{2}|V\rangle_1)$; d) $|\chi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|H\rangle_1|H\rangle_2 - \sqrt{2}|V\rangle_1|V\rangle_2)$.
- 10) a) Qual o significado da equação de Schrödinger dependente do tempo $i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle$?
- b) Um elétron livre de momento linear $p = \hbar k$ (caso unidimensional) encontra-se, no instante $t=0$, no estado descrito pela função espacial $\varphi(x,0) = C \exp(ikx)$.
- Determine $\varphi(x,t)$ e a razão entre $|\varphi(x,t)|^2$ e $|\varphi(x,0)|^2$. O que significa este resultado?
 - Se o elétron livre for preparado no instante $t=0$ em um estado $\Phi(x,0) = A \exp(ikx) + B \exp(2ikx)$, qual será seu estado no instante $t=T$? Isto afeta a relação entre $|\Phi(x,0)|^2$ e $|\Phi(x,T)|^2$?

APÊNDICE VIII – QUESTIONÁRIO PARA AVALIAÇÃO DO CURSO DA UFRGS

- 1) Em sua opinião quais, dentre os tópicos abordados, são os mais relevantes?
Por quê?
- 2) Em sua opinião, qual o ponto, tópico ou aspecto mais interessante do curso?
Por quê?
- 3) Que tópicos você considerou como os mais fáceis?
- 4) Que tópicos você considerou como os mais difíceis?
- 5) Em sua opinião, a introdução de applets fez com que o curso se tornasse mais interessante?
- 6) Em sua opinião, a introdução de applets auxiliou na compreensão dos tópicos apresentados no curso?
- 7) Em sua opinião, as listas de exercícios auxiliaram na compreensão dos tópicos abordados no curso?
- 8) Qual a sua opinião sobre o material didático distribuído nas aulas?

