



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

**Análise fenomenológica dos espalhamentos elásticos  
próton-próton e antipróton-próton em altas energias  
na representação eiconal.**

**Carlos André da Silva Bahia**

Tese realizada sob orientação do Prof. Dr.  
Emerson Gustavo de Souza Luna e apre-  
sentada ao Instituto de Física da UFRGS  
como parte dos requisitos para a obtenção  
do título de Doutor em Física.

**Porto Alegre  
2016**

*“Onde está o caminho em que se separa a luz... .?”*

- Jó 38:24.

# Dedico

À minha esposa Charlene, meus filhos Samuel, Rafael e Felipe, minha mãe Maria, e à memória da querida irmã Nair.

# Agradecimentos

Entre muitos amigos e familiares, alguns foram de grande importância para que eu tivesse as condições adequadas à escrita dessa tese, alguns de maneira direta, outros nem tanto, mas todos aqui citados tiveram sua colaboração. Sendo assim, só me resta agradecer: À Deus, pelo fôlego e manutenção da vida.

À minha mãe Maria, pelo amor, dedicação e sacrifício.

À minha esposa Charlene, pela companhia, amor e apoio, desde bem antes da graduação.

Aos meus filhos Samuel, Rafael e Felipe, minhas fontes de alegria.

À minha cunhada Shirley, pela ajuda em muitos momentos de dificuldade.

Ao professor Dr. Emerson Luna, por ter me aceito como aluno de doutorado, pelos ensinamentos fundamentais em Física de partículas e programação, pela hospitalidade, paciência e motivação.

Ao professor Dr. Van Sérgio, à quem sou sempre agradecer.

Ao amigo Carlos Pedro.

Ao amigo Leonardo Nascimento, pela disposição e ajuda em momentos fundamentais.

Ao meu amigo Charles, pelas longas conversas e momentos de descontração.

Aos amigos professores Renato e Adma, pessoas da minha mais alta estima.

Aos meus primeiros amigos gaúchos, Fábio, Rodrigo, Canova, Gabi, Everton, Fernanda, Mirian e Glauber.

Ao amigo Eduardo Basso, pela ajuda fundamental à minha adaptação ao instituto de Física.

Ao amigo Daniel, pelo apoio.

Ao amigo e colega de grupo Mateus Broilo, por toda a ajuda referente à programação; fundamentais para o desenvolvimento da tese.

Ao amigo e colega de sala Adriano, pela ajuda em diversas situações de dificuldade, e também pelos grandes momentos de descontração.

Aos meus colegas de sala, Marcos, Milena, Amanda, Eduardo, Alessandra e Vinícios.

Ao professor Dr. Dimiter Hadjimichief, pelo excelente curso de mecânica quântica na pós-graduação e pela dedicação de apoio aos alunos do instituto de Física da UFRGS.

Ao professor Dr. Felipe Rizzato, pelos ensinamentos no curso de mecânica clássica.

Aos professores Dr. Paulo Beggio (UENF/RJ), Dr. Márcio Menon (UNICAMP/SP), Dr. Roberto da Silva (UFRGS/RS) e Dr. Leonardo Gregory (UFRGS/RS), por terem participado da banca, e pelas valiosas correções e orientações.

Ao povo gaúcho, pela excelente hospitalidade.

Ao povo paraense, pelo custeio do meu salário durante minha licença.

À Secretaria de Educação do Estado do Pará, por ter me concedido a licença aprimoramento, mantendo meu salário em dia.

Ao CNPQ pelo suporte financeiro.

# Glossário

**CM** *Centro de Massa*

**QCD** *Quantum Chromodynamics – Cromodinâmica Quântica*

**QED** *Quantum Electrodynamics – Eletrodinâmica Quântica*

**LO** *Leading Order – Ordem Dominante*

**NLO** *Next to Leading Order – Ordem Seguinte à Dominante*

**DIS** *Deep Inelastic scattering – Espalhamento Inelástico Profundo*

**SLAC** *Stanford Linear Accelerator*

**DGLAP** *Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi*

**HERA** *Hadron Electron Ring Accelerator*

**DPT** *Dynamical Perturbation Theory – Teoria Dinâmica de Perturbação*

**PDF** *Parton Distribution Function – Função de Distribuição Partônica*

# Resumo

Estudamos os espalhamentos elásticos próton-próton ( $pp$ ) e antipróton-próton ( $\bar{p}p$ ) na representação eiconal por meio das duas principais formulações compatíveis com vínculos de analiticidade e unitariedade: a inspirada na Cromodinâmica Quântica (*Quantum Chromodynamics*, QCD) e a baseada na teoria de Regge. Em modelos inspirados em QCD o aumento das seções de choque hadrônicas está relacionado a espalhamentos semiduros (*semihard*) entre os pártons no interior dos hádrons. A dependência com energia das seções de choque é devida principalmente a processos de espalhamento elementares envolvendo glúons. Nesta tese apresentamos um modelo eiconal no qual as divergências presentes em processos partônicos, no limite de pequeno momentum transferido, são regularizadas com a introdução de uma massa dinâmica para o glúon. O modelo utiliza seções de choque elementares oriundas do modelo a pártons da QCD, funções de distribuição de quarks e glúons atuais (CTEQ6L,CTEQ6L1 e MSTW) e cortes cinemáticos que restringem os processos elementares ao regime semiduro. Em modelos de polos de Regge o aumento das seções de choque hadrônicas é atribuído à troca de um estado sem cor possuindo os números quânticos do vácuo: o Pomeron. Na perspectiva da QCD o Pomeron pode ser entendido como a troca de pelo menos dois glúons em um estado singleto de cor, tornando a teoria de Regge um importante guia na busca de uma teoria fundamental para a descrição de processos suaves baseada na QCD. Nesta tese determinamos todos os parâmetros do Pomeron suave usando duas variantes de um modelo de Regge. Na primeira delas a trajetória do Pomeron é linear, enquanto na segunda há a inserção na trajetória da singularidade do canal  $t$  mais próxima, o laço (*loop*) de píons. Em ambas formulações, inspirada em QCD e de Regge, fazemos uma análise detalhada dos dados de seção de choque total e parâmetro  $\rho$  nos canais  $pp$  e  $\bar{p}p$  e fornecemos previsões para estes observáveis nas energias do Tevatron, LHC e raios cósmicos.

# Abstract

We study the proton-proton ( $pp$ ) and antiproton-proton ( $\bar{p}p$ ) elastic scattering in the eikonal representation by means of two formulations compatible with analyticity and unitarity constraints: a formulation inspired by Quantum Chromodynamics (QCD) and a formulation based upon Regge theory. In QCD-inspired models the increase of the total cross sections is associated with semihard scatterings of partons in the hadrons. The energy dependence of the cross sections is driven especially by gluon-gluon scattering processes which are potentially divergent at small transferred momenta. In this thesis we present an eikonal model in which these divergences are regulated by the introduction of a dynamical gluon mass. The model is built from the parton model using standard QCD cross sections for elementary parton-level processes, updated sets of quark and gluon distribution functions (CTEQ6L,CTEQ6L1 and MSTW), and physically-motivated cutoffs which restrict the elementary processes to semihard ones. In Regge pole models the increase of the hadronic total cross sections is attributed to the exchange of a colorless state having the quantum numbers of the vacuum: the Pomeron. In the QCD framework the Pomeron can be understood as the exchange of at least two gluons in a color singlet state. Hence the Regge theory is an important guide in the search of a fundamental theory for soft processes based upon QCD. In this thesis we determine all the parameters of the soft Pomeron by means of two Regge models. In the first model the Pomeron trajectory is linear whereas the second have the nearest  $t$ -channel singularity of the trajectory, namely the two-pion loop. We perform a detailed analysis of proton-proton and antiproton-proton forward scattering data in both QCD-based and Regge approaches, and give predictions for the total cross section and  $\rho$  parameter at Tevatron, LHC, and cosmic-ray energies.

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	1
<b>1. Formalismo Geral</b> . . . . .	5
1.1 Cinemática e grandezas físicas importantes para processos de espalhamento . . . . .	5
1.1.1 Teoria de Kirchhoff e o Espalhamento Quântico . . . . .	12
1.1.2 A expansão em ondas parciais . . . . .	21
1.1.3 O formalismo da Matriz-S . . . . .	22
1.1.4 Representações de Parâmetro de Impacto e Eiconal . . . . .	27
1.1.5 Limite de Froissart-Martin e Teorema de Pomeranchuk . . . . .	29
1.1.6 Dados Experimentais . . . . .	30
<b>2. O modelo a pártons da QCD</b> . . . . .	35
2.1 Ideias Gerais . . . . .	35
2.1.1 Aspectos históricos . . . . .	36
2.1.2 As fases da QCD . . . . .	37
2.2 O Modelo a Pártons da QCD e as Funções de Distribuição Partônicas . . . . .	46
2.2.1 Espalhamento Inelástico Profundo . . . . .	46
2.3 Interpretação Física e cálculo das funções de estrutura . . . . .	52
2.4 Scalling de Bjorken . . . . .	55
2.5 O Modelo a pártons . . . . .	57
2.6 Quebra de Scaling . . . . .	60
2.7 Modelos eiconais inspirados em QCD . . . . .	62
<b>3. Um modelo inspirado em QCD com glúons massivos</b> . . . . .	65
3.1 Introdução . . . . .	65

3.2	O modelo de massa dinâmica do glúon . . . . .	67
3.2.1	Fatores de forma dependentes da energia . . . . .	69
3.2.2	Relações de dispersão integrais e a eiconal a altas energias . . . . .	72
3.3	Escala de massa infravermelha e o papel dos glúons . . . . .	75
3.4	Resultados . . . . .	79
<b>4.</b>	<b>Teoria de Regge . . . . .</b>	<b>91</b>
4.1	Os polos de Regge . . . . .	91
4.2	Os mésons de Yukawa e os polos de Regge. . . . .	92
4.3	Regiões de convergência da expansão em ondas parciais e introdução dos momenta angulares complexos. . . . .	94
4.4	Representação de Froissart-Gribov para a amplitude de onda parcial. . . . .	103
4.4.1	Estruturas de singularidades. . . . .	103
4.4.2	Relações de dispersão integrais. . . . .	105
4.4.3	Representação de Froissart-Gribov . . . . .	111
4.5	Trajetórias de Regge no espalhamento relativístico. . . . .	113
4.6	Limite de altas energias. . . . .	117
<b>5.</b>	<b>Modelo baseado em polos de Regge . . . . .</b>	<b>122</b>
5.1	Fenomenologia de Regge. . . . .	122
5.1.1	Seções de choque total e parâmetro $\rho$ . . . . .	125
5.1.2	O Pomeron. . . . .	126
5.1.3	Trajetórias de Regge e a interação de hádróns . . . . .	127
5.2	Ajustes para o coeficiente linear do Pomeron . . . . .	128
5.2.1	O modelo CMG original . . . . .	130
5.3	Extensões do modelo CMG original . . . . .	132
5.3.1	Modelo CMG reanalisado . . . . .	132
5.4	Modelo CMG estendido . . . . .	134
<b>6.</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>147</b>
<b>A.</b>	<b>Relações de dispersão integrais . . . . .</b>	<b>151</b>
A.1	Transformadas de Hilbert . . . . .	151
A.2	Relações de dispersão com uma singularidade tipo pólo no eixo real . . . . .	156

---

A.3 Relações de dispersão com uma subtração . . . . .	157
<b>Bibliografia . . . . .</b>	<b>161</b>

# Lista de Figuras

1.1	Referencial do laboratório. . . . .	7
1.2	Referencial do centro de massa. . . . .	8
1.3	Diagramas simbólicos para a reação $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ no canal- $s$ (a), canal- $t$ (b) e canal- $u$ (c). . . . .	10
1.4	Plano de Mandelstam para as regiões físicas dos canais $s, t$ e $u$ . . . . .	11
1.5	Planos de incidência e detecção separados por uma distância $D$ . . . . .	13
1.6	Dados experimentais de seções de choque total para os espalhamentos $pp$ (preto) e $\bar{p}p$ (branco) a partir de $\sqrt{s} = 10$ GeV. Dados de Tevatron e LHC . . . . .	32
1.7	Dados experimentais de parâmetro $\rho$ para os espalhamentos $pp$ (preto) e $\bar{p}p$ (branco) a partir de $\sqrt{s} = 10$ GeV. Dados de Tevatron e LHC. . . . .	33
1.8	Dados experimentais de seções de choque total para os espalhamentos $pp$ (preto) e $\bar{p}p$ (branco) a partir de $\sqrt{s} = 10$ GeV. Dados de LHC, AUGER e TA. . . . .	34
2.1	Espalhamento inelástico profundo. . . . .	38
2.2	Espalhamento Drell Yan. . . . .	38
2.3	Diagrama de Feynman para o espalhamento $lh \rightarrow lX$ . . . . .	47
2.4	Diagrama da reação $e\mu \rightarrow e\mu$ . . . . .	53
2.5	Diagrama da reação $ep \rightarrow ep$ . . . . .	54
2.6	Representação esquemática do modelo a pártons. . . . .	58
2.7	Dados experimentais da função de estrutura do próton obtidos pela colaboração H1 indicando a quebra de scaling. . . . .	64
3.1	O $\chi^2/gl$ em função do corte $Q_{\min}$ para o monopolo ( $\circ$ ) e dipolo ( $\bullet$ ). . . . .	85
3.2	Seção de choque total $pp$ ( $\bullet$ ) e $\bar{p}p$ ( $\circ$ ). . . . .	86
3.3	Seção de choque total $pp$ ( $\bullet$ ) e $\bar{p}p$ ( $\circ$ ) para o fator de forma tipo monopolo. . . . .	87
3.4	Razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal para $pp$ ( $\bullet$ ) e $\bar{p}p$ ( $\circ$ ) com fator de forma tipo mopolo. . . . .	88

3.5	Razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal para $pp$ ( $\bullet$ ) e $\bar{p}p$ ( $\circ$ ) com fator de forma tipo dipolo. . . . .	89
3.6	Resultados de TOTEM, AUGER e TA comparados com as previsões teóricas obtidas usando as funções de distribuição partônicas CTEQ6L (linha sólida), CTEQ6L1 (linha pontilhada) e MSTW (linha pontuada) com fatores de forma tipo monopolo e dipolo. . . . .	90
4.1	Domínio de convergência para $ \text{Im } \vartheta  \leq \eta(s)$ . . . . .	97
4.2	Domínio de convergência para $ \text{Re } \vartheta  \leq \delta(s)$ . . . . .	99
4.3	Contorno das singularidades no eixo real. . . . .	100
4.4	Estrutura completa de singularidades no plano- $s$ . . . . .	104
4.5	Contorno de Cauchy. . . . .	105
4.6	Contorno do ponto ramificado direito. . . . .	107
4.7	Contorno do ponto ramificado esquerdo. . . . .	107
5.1	Contribuições das trajetórias de Regge para a seção de choque total $\bar{p}p$ ( $\circ$ ) a nível de Born e eiconalizado no modelo CMG original. . . . .	137
5.2	Seções de choque total $pp$ ( $\bullet$ ) e $\bar{p}p$ ( $\circ$ ), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG original. . . . .	138
5.3	Razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal $pp$ ( $\bullet$ ) e $\bar{p}p$ ( $\circ$ ), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG original. . . . .	139
5.4	Comparação entre as seções de choque total a nível de Born e Eiconal do modelo CMG, e os dados atuais de TOTEM, AUGER e TA. . . . .	140
5.5	Seções de choque total $pp$ ( $\bullet$ ) e $\bar{p}p$ ( $\circ$ ), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG reanalisado. . . . .	141
5.6	Razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal $pp$ ( $\bullet$ ) e $\bar{p}p$ ( $\circ$ ), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG reanalisado. . . . .	142
5.7	Comparação entre as seções de choque total a nível de Born e Eiconal do modelo CMG reanalisado, e os dados atuais de TOTEM, AUGER e TA. . . . .	143
5.8	Seções de choque total $pp$ ( $\bullet$ ) e $\bar{p}p$ ( $\circ$ ), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG estendido. . . . .	144
5.9	Razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal $pp$ ( $\bullet$ ) e $\bar{p}p$ ( $\circ$ ), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG estendido. . . . .	145

---

5.10	Comparação dos dados atuais de TOTEM, AUGER e TA com os modelos CMG original ( $CMG_o$ ), CMG reanalisado ( $CMG_r$ ) e CMG estendido ( $CMG_e$ ) para as seções de choque total a nível de Born e Eiconal. . . . .	146
A.1	Semi-plano complexo superior . . . . .	152
A.2	Contorno de Cauchy . . . . .	152

# Lista de Tabelas

3.1	Valores dos parâmetros de ajuste global do modelo para os dados de espalhamento $pp$ e $\bar{p}p$ , para o caso do fator de forma de monopolo. . . . .	82
3.2	Valores dos parâmetros de ajuste global do modelo para os dados de espalhamento $pp$ e $\bar{p}p$ , para o caso do fator de forma de dipolo. . . . .	83
3.3	Previsões para as quantidades de espalhamento frontal $\sigma_{tot}^{pp,\bar{p}p}$ e $\rho^{pp,\bar{p}p}$ usando diferentes conjuntos de distribuições partônicas. . . . .	84
4.1	Números quânticos dos mésons dominantes . . . . .	121
5.1	Valores dos parâmetros do Pomeron e dos Reggeons secundários obtidos a partir do ajuste global aos dados de $\sigma_{tot}^{pp,\bar{p}p}$ e $\rho^{pp,\bar{p}p}$ . . . . .	135
5.2	Previsões para as quantidades de espalhamento frontal $\sigma_{tot}^{pp,\bar{p}p}$ e $\rho^{pp,\bar{p}p}$ usando diferentes variantes do modelo CMG. Todos os resultados são obtidos a partir de amplitudes eiconalizadas. . . . .	136

# Introdução

O avanço teórico proporcionado pelo chamado “Modelo Padrão” das partículas elementares, formado pelas teorias de calibre que descrevem as interações fundamentais eletromagnética, fraca e forte, alcançou o seu apogeu com a recente observação do bóson de Higgs no *Large Hadron Collider* (LHC) [1], indicando o mecanismo de quebra espontânea de simetria como o mais provável mecanismo de geração de massa para as partículas elementares na escala de energia até então observada.

Apesar deste último grande avanço, tanto dos pontos de vista teórico e experimental envolvidos na busca do bóson, o Modelo Padrão ainda apresenta grandes desafios à comunidade científica, principalmente no setor nuclear forte, descrito pela teoria de calibre denominada Cromodinâmica Quântica (*Quantum Chromodynamics*, QCD)<sup>1</sup>. Tais desafios estão ligados às características não-perturbativas das interações nucleares, manifestadas em processos que envolvem pequenos momenta transferidos (processos suaves). Nestes processos o fenômeno de confinamento, que ocorre exclusivamente nas interações fortes, se manifesta de forma plena, impondo o desenvolvimento de esquemas de cálculo não-perturbativos. Por outro lado, os processos duros, que envolvem grandes momenta transferidos, apresentam a propriedade de liberdade assintótica da QCD [2], tornando possível a aplicação de métodos perturbativos na análise de propriedades hadrônicas.

Podemos destacar como exemplos de processos suaves o espalhamento elástico de hádrons e as dissociações simples e duplas, nas quais uma das partículas colidentes (ou ambas, no caso da dissociação dupla) dá origem a um feixe de partículas ou a uma ressonância. Nestes processos, chamados coletivamente de “processos difrativos”, não há troca de números quânticos entre as partículas colidentes, além de serem os processos dominantes em espalhamentos a altas energias [3]. Os processos difrativos possuem como principal assinatura

---

<sup>1</sup> Teoria do grupo de calibre SU(3) que descreve a dinâmica nuclear forte por meio das interações entre os quarks (campos de matéria) e os glúons (campos de calibre) chamados coletivamente de partons.

experimental a presença de grandes lacunas de rapidez, que são definidas como regiões do espaço de fase desprovidas de partículas oriundas do processo hadrônico [4, 5, 6, 7, 8].

Nesta tese nos dedicamos ao estudo do espalhamento elástico próton-próton ( $pp$ ) e antipróton-próton ( $\bar{p}p$ ), pois são atualmente as reações medidas nas mais altas energias de centro de massa, com dados experimentais disponíveis até  $\sqrt{s} = 8$  TeV no LHC. Nosso estudo destes processos baseia-se em formulações e métodos teóricos fundamentados em princípios gerais associados à teoria axiomática de campos, tais como analiticidade, unitariedade e simetria de cruzamento. Por meio de modelos fenomenológicos, buscamos conexões entre estes princípios gerais, a QCD e os dados experimentais. Estudamos os espalhamentos elásticos  $pp \rightarrow pp$  e  $\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p$  na representação eiconal por meio das duas principais formulações compatíveis com os princípios de analiticidade, unitariedade e cruzamento: a inspirada na QCD e a baseada na teoria de Regge.

A formulação eiconal inspirada na QCD permite estabelecermos uma relação direta entre a dinâmica dos processos hadrônicos e a dinâmica elementar de quarks e glúons, descrita pela QCD. Esta ligação é feita através do modelo a pártons da QCD [9], que descreve as interações hadrônicas em termos das interações entre quarks e glúons. No modelo a pártons o espalhamento hadrônico é obtido pela soma de todos os espalhamentos possíveis entre os pártons dos hádrons envolvidos na colisão, com cada seção de choque partônica  $\hat{\sigma}_{ab}$  ( $a, b = q, \bar{q}, g$ ) sendo convoluída com uma função de distribuição  $f_a(x, Q^2)$  apropriada. O modelo emprega largamente cálculos perturbativos ao nível partônico, e sua relevância na descrição de processos duros está relacionado à propriedade de liberdade assintótica da QCD, que prevê um valor pequeno para o acoplamento de quarks e glúons a curtas distâncias, de forma que os quarks se comportam como partículas livres no regime assintótico. Nos modelos inspirados em QCD o aumento das seções de choque total próton-próton,  $\sigma_{\text{tot}}^{pp}(s)$ , e antipróton-próton,  $\sigma_{\text{tot}}^{\bar{p}p}(s)$ , está relacionado a espalhamentos semiduros<sup>2</sup> entre os pártons no interior dos hádrons. A dependência com a energia  $s$  das seções de choque total é controlada principalmente por processos de espalhamento elementares envolvendo glúons, cuja contribuição em pequeno  $x$  é a dominante. Porém, apesar deste cenário ser entendido de forma razoável na perspectiva da QCD perturbativa, o caráter não-perturbativo da teoria é também manifestado, uma vez que em altas energias as componentes suaves e semiduras da amplitude de espalhamento são fortemente relacionadas [10]. Portanto devemos lidar com

---

<sup>2</sup> Processos semiduros resultam de espalhamentos duros entre pártons que carregam frações muito pequenas do momentum total de seus hádrons, levando ao surgimento de jatos com energia transversal  $E_T$  muito menor que a energia total  $\sqrt{s}$  disponível na colisão hadrônica.

processos elementares que são potencialmente divergentes no limite de pequenos momenta transferidos. Nesta tese apresentamos um modelo eiconal no qual estas divergências são regularizadas de forma natural através da introdução de uma massa dinâmica para o glúon.

A formulação relacionada à teoria de Regge é baseada na ideia, devida originalmente a Tullio Regge [11], de considerarmos o momentum angular  $l$  como sendo uma variável complexa, de tal forma que a amplitude de onda parcial  $a_l(k)$  possa ser continuada analiticamente e as singularidades da nova função  $a(l, k)$ , que recai em  $a_l(k)$  para  $l = 0, 1, 2, \dots$ , surjam (no caso de potenciais bem comportados) como polos simples removíveis, denominados “polos de Regge”. Estes polos são localizados em valores determinados pela relação  $l = \alpha(k)$ , onde  $\alpha(k)$  é uma função da energia denominada “trajetória de Regge”. Cada família de estados ligados ou ressonâncias corresponde a uma determinada trajetória. A trajetória dominante em processos difrativos é denominada Pomeron, que representa um estado sem cor possuindo os números quânticos do vácuo. O aumento das seções de choque total hadrônicas é atribuído à troca de um Pomeron supercrítico, ou seja, que possui um coeficiente linear maior que 1. Na perspectiva da QCD o Pomeron pode ser entendido como a troca de pelo menos dois glúons em um estado singleto de cor, tornando a teoria de Regge um importante guia na busca de uma teoria fundamental para a descrição de processos suaves baseada exclusivamente na QCD. Nesta tese determinamos todos os parâmetros do Pomeron suave usando duas variações de um modelo de Regge, investigando amplitudes tanto ao nível de Born quanto eiconalizadas.

Portanto, nosso objetivo é estudar os observáveis frontais<sup>3</sup>  $\sigma_{\text{tot}}(s)$  (seção de choque total) e  $\rho(s)$  (razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento), em função da energia  $s$ , por meio dos dois formalismos que até o momento obtiveram mais sucesso na descrição dos processos difrativos. Com esta finalidade, a tese é organizada da seguinte forma: no primeiro capítulo apresentamos a cinemática e as grandezas físicas importantes para o estudo dos processos de espalhamento e obtemos o teorema óptico, tanto por meio da teoria de difração de Kirchoff quanto pelo formalismo da matriz- $S$ , nos permitindo fazer uma estreita analogia entre o princípio de conservação de energia no estudo do fenômeno óptico de difração com a conservação de probabilidades no contexto do espalhamento quântico de partículas. Em seguida estudamos a representação eiconal, obtendo as expressões para as seções de choque total elástica e inelástica, a seção de choque diferencial elástica e o parâmetro  $\rho$ . Finalizamos o capítulo apresentando os dados experimentais para

---

<sup>3</sup> Observáveis definidos em  $t = 0$ .

as grandezas frontais  $\sigma_{\text{tot}}(s)$  e  $\rho(s)$  referentes aos espalhamentos elásticos próton-próton e antipróton-próton através dos dados recentes do LHC, e algumas estimativas para  $\sigma_{\text{tot}}^{pp}(s)$  de experimentos de raios cósmicos.

No capítulo 2 apresentamos algumas propriedades fundamentais da QCD, onde deduzimos as expressões em ordem dominante (*leading order*, LO) e em ordem seguinte à dominante (*next to leading order*, NLO) para a constante de acoplamento da QCD, um dos parâmetros fundamentais do Modelo Padrão, e estudamos o modelo a pártons original e o modelo a pártons modificado, no qual a invariância de escala de Bjorken verificada no modelo simples é quebrada por logaritmos de  $Q^2$  como consequência da atividade gluônica inicialmente ignorada no modelo a pártons original.

O terceiro capítulo corresponde à primeira parte original da tese. Nele estudamos as contribuições infravermelhas às interações partônicas semiduras, levando em consideração uma carga efetiva cujo comportamento infravermelho é controlado por uma escala de massa dinâmica. Usando um modelo eiconal inspirado em QCD afim de conectarmos a dinâmica partônica ao espalhamento hádron-hádron, obtemos descrições para as seções de choque total próton-próton e antipróton-próton,  $\sigma_{\text{tot}}^{pp,\bar{p}p}(s)$ , e para as razões entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento na direção frontal,  $\rho^{pp,\bar{p}p}(s)$ .

No capítulo 4 abordamos a teoria dos pólos de Regge, ou simplesmente teoria de Regge. Descrevemos sua construção matemática, que começa com a extensão analítica da amplitude de onda parcial à valores complexos do momentum angular e vai até a imposição de um novo número quântico, a assinatura. Ainda nesse capítulo, abordamos a estrutura fenomenológica da teoria e sua aplicação ao espalhamento hadrônico.

O quinto capítulo corresponde à segunda parte original da tese. Baseados na fenomenologia de Regge, estudamos duas variantes de um modelo de Regge na descrição dos observáveis frontais  $\sigma_{\text{tot}}^{pp,\bar{p}p}(s)$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}(s)$ . De forma mais específica, descrevemos os observáveis frontais  $\sigma_{\text{tot}}^{pp,\bar{p}p}$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}$  por meio das amplitudes de espalhamento a nível de Born, que apresenta resultados satisfatórios, porém violam a unitariedade para  $\sqrt{s} > 10^{27}$  GeV, e a amplitude de Regge eiconalizada, que preserva a unitariedade, e portanto satisfaz uma das propriedades fundamentais da teoria de partículas a altas energias. Ainda usando a amplitude eiconalizada, estudamos os efeitos da introdução de uma trajetória não-linear gerada pela presença de um loop de píons na trajetória principal de Regge, afim de estudarmos as influências de uma possível correção no Pomeron trocado.

## Capítulo 1

# Formalismo Geral

Neste capítulo, baseado nas referências [3] e [12], apresentamos a cinemática e as grandezas físicas importantes para o estudo dos processos de espalhamento. Obtemos o teorema óptico, tanto por meio da teoria de difração de Kirchoff, quanto pelo formalismo da matriz-S, nos permitindo fazer uma estreita analogia entre o princípio de conservação de energia no estudo do fenômeno óptico de difração e a conservação de probabilidades no contexto do espalhamento quântico de partículas. Em seguida estudamos a representação eiconal obtendo nessa formulação as expressões para as seções de choque total elástica e inelástica, a seção de choque diferencial elástica e o parâmetro  $\rho$ . Finalizamos o capítulo apresentando os dados experimentais para as grandezas frontais  $\sigma_{\text{tot}}$  e  $\rho$  referentes aos espalhamentos elásticos próton-próton e antipróton-próton, incluindo os dados recentes do LHC, e algumas estimativas de  $\sigma_{\text{tot}}$  na região de raios cósmicos.

### 1.1 Cinemática e grandezas físicas importantes para processos de espalhamento

Tanto no plano teórico quanto experimental, nos processos em altas energias é conveniente separarmos a parte cinemática, que advém dos princípios fundamentais de conservação de energia e momentum, da parte dinâmica, resultante das interações entre as partículas. Do ponto de vista teórico, os princípios de conservação de energia e momentum refletem fisicamente o conjunto de operações de simetria associadas às transformações do espaço-tempo que mantém invariante a teoria física em questão. Em outras palavras, as operações de simetria podem ser definidas de maneira simplificada como operações que levam um certo

sistema físico à um outro sistema físico preservando as mesmas propriedades e satisfazendo as mesmas equações.

Para um espalhamento entre dois corpos sem troca de números quânticos

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + 4, \quad (1.1)$$

podemos usar os invariantes de Lorentz

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad (1.2)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \quad (1.3)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2, \quad (1.4)$$

definidos por Stanley Mandelstam para descrever as amplitudes de espalhamento de processos que envolvem interações fortes entre mésons e bárions [17]. Nas expressões acima,  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  são os quadrimomenta das partículas 1, ..., 4 respectivamente. Fisicamente, no canal- $s$ , a variável  $s$  representa o quadrado da energia total das partículas no referencial do centro de massa (CM), e a variável  $t$  representa o quadrado do quadrimomentum transferido.

Usando a condição de conservação da energia e considerando que as partículas encontram-se na camada de massa

$$E_i^2 = |\vec{p}_i|^2 + m_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1.5)$$

obtemos a importante identidade

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2. \quad (1.6)$$

Um tipo importante de espalhamento de dois corpos é o espalhamento elástico  $1 + 2 \longrightarrow 1' + 2'$ , neste tipo de reação as duas partículas permanecem inalteradas após a colisão, ou seja, suas massas e números quânticos iniciais não se modificam. O mesmo não se pode dizer da configuração cinemática após o processo.

Entre os possíveis referenciais adotados, os mais utilizados são, o referencial do laboratório (onde uma das partículas colidentes é considerada como alvo fixo antes do espalhamento) e o sistema de referência no centro de massa. Veremos a seguir uma possível descrição das variáveis cinemáticas em cada um desses sistemas, considerando um espalhamento do tipo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ .

### Sistema de Referência do Laboratório

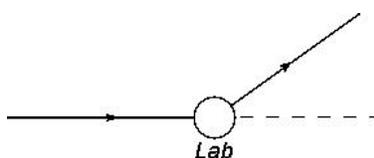


Fig. 1.1: Referencial do laboratório.

Na adoção do sistema de referência do laboratório, define-se que uma das partículas do estado inicial do espalhamento representa um alvo fixo no laboratório. considerando a partícula 2 com alvo fixo, teremos

$$\vec{p}_2 = 0.$$

Considerando a partícula 1 movendo-se ao longo da direção  $z$ , poderemos escrever os quadrimomenta das partículas colidentes

$$p_1 = (E_L, 0, 0, \vec{p}_L),$$

$$p_2 = (m_2, 0, 0, 0),$$

sendo  $E_L$  e  $p_L$ , respectivamente, a energia total e o momentum total do sistema no referencial do laboratório, relacionados através da relação de conservação de energia

$$E_L = \sqrt{|\vec{p}_L|^2 + m_1^2}.$$

Os quadrimomenta referentes às partículas espalhadas 3 e 4 são dados respectivamente por

$$p_3 = (E_3, 0, 0, \vec{p}_3),$$

$$p_4 = (E_4, 0, 0, \vec{p}_4),$$

Usando as eqs.(1.2) e (1.3), obtém-se as variáveis de Mandelstam  $s$  e  $t$  em termos das variáveis do laboratório

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_L, \quad (1.7)$$

e

$$t = m_2^2 + m_4^2 - 2m_2E_4. \quad (1.8)$$

### Sistema de Referência do Centro de Massa (CM)

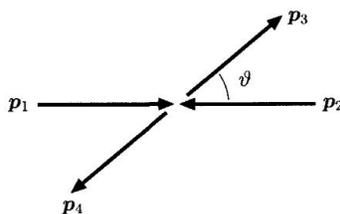


Fig. 1.2: Referencial do centro de massa.

O referencial do centro de massa CM constitui um dos sistemas mais importantes no estudo de espalhamentos. Para este sistema, temos

$$\vec{p}_{1\text{CM}} = -\vec{p}_{2\text{CM}} = \vec{k},$$

$$\vec{p}_{3\text{CM}} = -\vec{p}_{4\text{CM}} = \vec{k}'.$$

Os quadrimomenta ficam:

$$p_1 = (E_{1\text{CM}}, \vec{k}), \quad p_2 = (E_{2\text{CM}}, -\vec{k}).$$

$$p_3 = (E_{3\text{CM}}, \vec{k}'), \quad p_4 = (E_{4\text{CM}}, -\vec{k}').$$

As medidas de energia:

$$E_{i_{\text{CM}}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m_i^2}, \quad i = 1, 2,$$

$$E_{i_{\text{CM}}} = \sqrt{|\vec{k}'|^2 + m_i^2}, \quad i = 3, 4.$$

Usando as variáveis de Mandelstam  $s$  e  $t$ , juntamente com a condição de camada de massa, obtemos:

$$|\vec{k}| = \frac{\sqrt{[s - (m_1 + m_2)]^2 [s - (m_1 - m_2)]^2}}{2\sqrt{s}}, \quad (1.9)$$

$$|\vec{k}'| = \frac{\sqrt{[s - (m_3 + m_4)]^2 [s - (m_3 - m_4)]^2}}{2\sqrt{s}} \quad (1.10)$$

e

$$t = m_1^2 + m_2^2 - 2E_1 E_2 + 2\vec{k} \cdot \vec{k}'. \quad (1.11)$$

Para o espalhamento elástico  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ , de duas partículas de massas iguais  $m$ , definido como aquele no qual os objetos colidentes permanecem inalterados após a colisão, as equações (1.9), (1.10) e (1.11) resumem-se em

$$s = 4(k^2 + m^2) \quad (1.12)$$

e

$$t = -4k^2 \sin^2(\theta/2), \quad (1.13)$$

onde  $k \equiv |\vec{k}| = |\vec{k}'|$  é o módulo do momentum linear no CM e  $\theta$  o ângulo de espalhamento neste referencial. Observando (1.12) e (1.13), nota-se que os limites fisicamente relevantes para  $s$  e  $t$  são determinados pelos intervalos cinemáticos de  $k$  e  $\theta$  iguais a  $k \geq 0$  e  $0 \leq \sin^2(\theta/2) \leq 1$ . Sendo assim,

$$s \geq 4m^2 \quad \text{e} \quad t \leq 0. \quad (1.14)$$

Pode-se mostrar que em uma reação do tipo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + N$ , o número de

variáveis independentes invariantes por Lorentz é  $3N - 10$ . Em geral,  $s$  e  $t$  são as variáveis independentes adotadas, representando para a reação  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  o quadrado da energia total no referencial do centro de massa e o quadrado do momentum linear transferido, respectivamente.

Como caso particular de espalhamento, consideremos uma reação de dois corpos contendo uma partícula mediadora: se o espalhamento for do tipo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , dizemos que a partícula virtual encontra-se no canal- $s$ , pois  $s = (p_1 + p_2)^2$  fornece o quadrado da energia no (CM). Para uma colisão do tipo

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4, \quad (1.15)$$

a partícula virtual estará no canal- $t$ , com o quadrado da energia total no CM dado agora por  $t = (p_1 + p_{\bar{3}})^2 = (p_1 - p_3)^2$  e o quadrado do momento transferido dado por  $s = (p_1 - p_2)^2 = (p_1 + p_2)^2$ , onde  $\bar{2}$  e  $\bar{3}$  são definidas como as antipartículas de 2 e 3 respectivamente. A equivalência entre os processos (1.1) e (1.15) é uma consequência direta da propriedade de simetria de cruzamento da matriz de espalhamento; esta propriedade diz que a função que descreve um canal físico (no nosso caso essa função é a amplitude de espalhamento  $F$ ) é a mesma para todos os outros, e estes canais são ligados entre si por uma extensão analítica (troca  $s \longleftrightarrow t$  ou  $s \longleftrightarrow u$ ) no espaço dos quadrimomenta. Assim, podemos considerar

$$F_{1+2 \rightarrow 3+4}(s, t) = F_{1+\bar{3} \rightarrow \bar{2}+4}(t, s), \quad (1.16)$$

bem como

$$F_{1+2 \rightarrow 3+4}(s, u) = F_{1+\bar{4} \rightarrow 3+\bar{2}}(u, s). \quad (1.17)$$

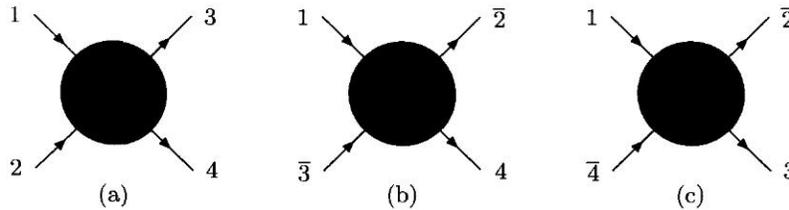


Fig. 1.3: Diagramas simbólicos para a reação  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  no canal- $s$  (a), canal- $t$  (b) e canal- $u$  (c).

Dessa forma, podemos dizer que a partícula mediadora se encontra no canal identificado pela variável de Mandelstan que fornece a energia do centro de massa. Para o espalhamento elástico do tipo (1.15) de duas partículas de massa  $m$ , temos

$$t = (p_1 + p_3)^2 = 4(k_t^2 + m^2), \quad (1.18)$$

$$s = (p_1 - p_2)^2 = -4k_t^2 \sin^2\left(\frac{\theta_t}{2}\right), \quad (1.19)$$

onde  $k_t$  e  $\theta_t$  são o módulo do do momento transferido e o ângulo de espalhamento no CM do canal- $t$ , respectivamente. Os limites físicos de  $t$  e  $s$  são definidos pelos intervalos cinemáticos de  $k_t$  e  $\theta_t$  semelhantemente ao canal- $s$ ,

$$t \geq 4m^2 \quad \text{e} \quad s \leq 0 \quad (1.20)$$

Vale observar que por uma simetria de cruzamento (extensão analítica), as reações (1.1) e (1.15) podem converter-se uma na outra. Além disso, apesar de os processos nos canais  $s$  e  $t$  representarem regiões físicas diferentes e desconectadas, a simetria de cruzamento da matriz  $S$  torna possível a descrição dos processos pela mesma amplitude de espalhamento.

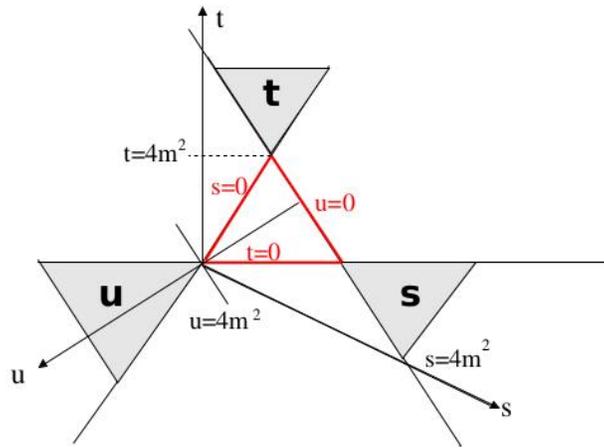


Fig. 1.4: Plano de Mandelstam para as regiões físicas dos canais  $s, t$  e  $u$ .

Em relação às amplitudes de espalhamento, estas deverão ser funções analíticas dos quadrimomenta das partículas da reação. Para um espalhamento elástico de dois corpos sem spin e de mesma massa  $m$ , a amplitude  $f(s, t)$  só depende de duas variáveis e quando

fixamos uma delas (t por exemplo) a função  $f(s, t)$  torna-se uma função analítica no plano complexo da outra variável (s no caso). A amplitude de espalhamento é um dos objetos mais importantes no estudo das colisões em geral, antes de lançarmos mão dessa função, vamos tentar traçar um caminho natural a fim de obtermos a sua relação com outros objetos importantes no estudo do espalhamento hadrônico, como por exemplo as seções de choque, as funções de perfil, funções de recobrimento, entre outras.

### 1.1.1 Teoria de Kirchhoff e o Espalhamento Quântico

A óptica física desempenha um papel importante no estudo da difração de partículas a altas energias. A teoria de difração de Kirchhoff e a teoria quântica de espalhamento à altas energias (aproximação eiconal), cuja formulação é a base das aproximações da difração hadrônica, são duas teorias completamente análogas em se tratando do espalhamento elástico, onde não se leva em consideração a estrutura interna das partículas colidentes [3]. Por outro lado, na composição das partículas e de particulares flutuações quânticas devemos levar em consideração as contribuições das excitações inelásticas difrativas. Assim, podemos considerar que o estudo dos fenômenos difrativos são indispensáveis para a compreensão da estrutura hadrônica. Isso nos motiva a começar verificando a relação entre a óptica e a teoria de espalhamento.

Os principais regimes difrativos foram estabelecidos através dos trabalhos de Joseph Fraunhofer (1787-1826) e Augustin Fresnel (1788-1827), em seguida, Gustav Kirchhoff (1824-1887) resolveu o problema de reconstruir a figura de difração baseado na teoria eletromagnética de Maxwell.

Seja uma onda plana incidindo perpendicularmente sobre um anteparo  $\Sigma$  com um furo  $\Sigma_o$  de raio  $R$  [3]. Em regiões pequenas o suficiente, podemos considerar que qualquer onda é plana desde que o comprimento de onda  $\lambda$  seja muito menor do que o raio de curvatura da frente de onda, sendo assim, vamos supor que o número de onda  $k = 2\pi/\lambda$  grande o suficiente a fim de garantir a condição de pequeno comprimento de onda

$$kR \gg 1. \quad (1.21)$$

A onda pode ser representada pela função [3, 12]

$$\varphi(x, y, z, t) = U(x, y, z)e^{-i\omega t}, \quad (1.22)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular, e a parte espacial  $U(x, y, z)$  satisfaz a equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)U(x, y, z) = 0, \quad (1.23)$$

com  $U$  sendo dado antes do anteparo por

$$U(x, y, z) = U_0 e^{-ikz}, \quad (1.24)$$

e  $U_0$  é a amplitude da onda (constante) imediatamente antes do anteparo  $\Sigma$ . Quando a onda plana atinge o anteparo ocorre o fenômeno previsto pelo princípio de Huyngens-Fresnel, onde cada ponto do furo torna-se uma fonte de ondas esféricas. O pacote dessas ondas resulta na onda defletida. Colocando um plano detector a uma distância  $D$  de  $\Sigma$ , podemos observar a formação da imagem de difração, essa imagem é o resultado de cancelamentos e reforços que ocorrem devido as amplitudes e fases das ondas coletadas no detector.

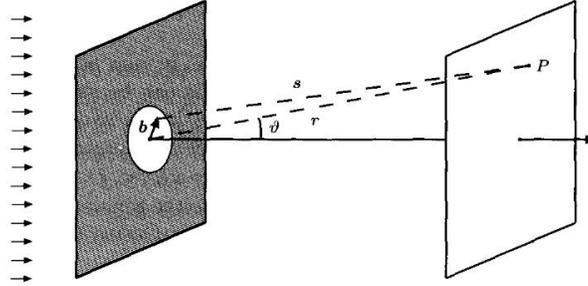


Fig. 1.5: Planos de incidência e detecção separados por uma distância  $D$ .

A amplitude de onda é mapeada por um valor de  $U(x, y, z)$  no ponto  $P(x, y, z)$  do plano detector (ver figura acima). A amplitude  $U(x, y, z)$  é dada pela fórmula de Fresnel-Kirchhoff

$$U(x, y, z) = -\frac{ik}{4\pi} U_0 \int_{\Sigma_0} (1 + \cos \theta) \frac{e^{iks}}{s} d^2 \vec{b}, \quad (1.25)$$

sendo  $\vec{b} = (b_1, b_2, 0)$  um vetor contido no plano  $\Sigma$ ,  $\vec{s}$  um vetor que conecta o ponto  $P$  de  $\Sigma_0$  individualmente por  $\vec{b}$ , e  $\cos \theta$  a inclinação de  $\vec{s}$  em relação à normal de  $\Sigma$ .

A condição de pequenos comprimentos de onda dada por (1.21) implica que a onda é

difratada a pequenos ângulos, ou seja,  $\cos \theta \approx 1$  simplificando a fórmula (1.25) por

$$U(x, y, z) \approx -\frac{ik}{2\pi} U_o \int_{\Sigma_o} \frac{e^{iks}}{s} d^2\vec{b}, \quad (1.26)$$

o cálculo dessa integral pode simplificado pela condição para grandes distâncias

$$R/D \ll 1. \quad (1.27)$$

o limite geométrico é dado quando

$$kR^2/D \gg 1, \quad (1.28)$$

e os dois regimes difrativos, de Fresnel e de Fraunhofer são dados respectivamente por

$$kR^2/D \approx 1, \quad (1.29)$$

e

$$kR^2/D \ll 1, \quad (1.30)$$

Para ilustrar as consequências das relações (1.28, 1.29 e 1.30) consideremos três posições sucessivas do plano detetor em relação ao plano  $\Sigma$ : Uma bem próxima  $D_1$ , outra mais afastada  $D_2$  e por último a mais distante  $D_3$ , de forma que  $D_1 < D_2 < D_3$ . Mantendo o comprimento de onda  $\lambda$  e o raio do disco  $R$  fixos de forma que (1.21) se mantenha, o plano detector apresentará diferentes configurações de acordo com as distâncias  $D_i$  destacadas. Na posição  $D_1$  forma-se a sombra geométrica, na posição  $D_2$  uma figura de difração de Fresnel e em  $D_3$  forma-se o padrão de difração de Fraunhofer. O regime difrativo de Fraunhofer é o mais importante para a analogia entre a óptica e os fenômenos hadrônicos. Considerando um hádron como alvo ( $R \approx 1fm$ ),  $D \geq 1cm$  e  $k \approx \sqrt{s} \approx 200GeV$  (Energia típica de aceleradores), teremos  $kR \approx 10^3$  e  $D/R \geq 10^{13}$ , logo  $kR^2 \ll D$ .

Definindo o vetor

$$\vec{r} = \vec{b} + \vec{s}, \quad (1.31)$$

podemos desenvolver a distância  $s$  de (1.26) em uma série de potências de  $b/r$ , assim, no

regime de Fraunhofer ( $D \rightarrow \infty$ ), podemos expressar a expansão de  $e^{iks}$  em (1.26) como

$$ks = k|\vec{r} - \vec{b}| = kr \left( 1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} \right)^{1/2} \cong kr - k\frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{r}. \quad (1.32)$$

Como na (1.32) o vetor  $\vec{b}$  seleciona a parte transversa de  $k\vec{r}/r$ , podemos definir um vetor  $\vec{q}$  por

$$\vec{q} \equiv \frac{k}{r} r\vec{T} = \left( \frac{kx}{r}, \frac{ky}{r}, 0 \right), \quad (1.33)$$

de maneira que a eq. (1.32) possa ser reescrita como

$$ks \cong kr - \vec{q} \cdot \vec{b}, \quad (1.34)$$

com o módulo de  $\vec{q}$  dado por

$$|\vec{q}| = k \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{r} = k \sin \vartheta \cong k \sin \vartheta. \quad (1.35)$$

No limite de  $\vartheta$  pequeno,  $\vec{q}$  é o momentum transferido

$$\vec{q} \cong \vec{k}' - \vec{k}, \quad (1.36)$$

sendo  $\vec{k}'$  o vetor de onda de saída e  $|\vec{k}| = |\vec{k}'| = k$ . Finalmente podemos escrever a função de onda do ponto  $P(x, y, z)$  no regime difrativo de Fraunhofer

$$U(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi} U_o \frac{e^{ikr}}{r} \int_{\Sigma_o} \frac{e^{-i\vec{q} \cdot \vec{b}}}{r} d^2\vec{b}, \quad (1.37)$$

onde aproximamos  $s \cong r$  no denominador de (1.26). Como a região de integração de nosso interesse é apenas aquela contida nos limites de  $\Sigma_o$ , podemos introduzir a função  $\Gamma(\vec{b})$ , chamada de função de perfil, tal que

$$\Gamma(\vec{b}) = \begin{cases} 1, & \text{sobre } \Sigma_o \\ 0, & \text{fora de } \Sigma_o \end{cases} \quad (1.38)$$

Assim, podemos reescrever a integral (1.37) como

$$U(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi} U_o \frac{e^{ikr}}{r} \int \Gamma(\vec{b}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} d^2\vec{b}, \quad (1.39)$$

estendendo a integração sobre todo o plano que contém a abertura.

O princípio de Babinet afirma que tanto um buraco quanto um obstáculo de mesma forma e dimensão produzem a mesma figura de difração, isso nos permite substituir o buraco do anteparo por um disco opaco de mesma dimensão, A questão fundamental nessa troca é que o análogo óptico do espalhamento de partículas à altas energias é a difração por um obstáculo opaco. Da mesma maneira como no caso do furo no anteparo, as ondas difratadas pelo obstáculo opaco combinam-se e reconstroem a frente de onda incidente. A amplitude de onda difratada pelo disco opaco  $\sum_o$ , é obtida subtraindo a onda plana (1.39) de (1.24). Podemos fazer essa operação definindo uma função  $S(\vec{b})$  por

$$S(\vec{b}) \equiv 1 - \Gamma(\vec{b}), \quad (1.40)$$

que descreve na óptica a modificação da onda pela difração do obstáculo de maneira semelhante ao papel dinâmico que a matriz-S desempenha na física de partículas. Com isso, a amplitude de onda além do obstáculo será

$$U(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi} U_o \frac{e^{ikr}}{r} \int S(\vec{b}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} d^2\vec{b}. \quad (1.41)$$

Na equação (1.40) a unidade representa a onda não perturbada e  $\Gamma(\vec{b})$ , o termo que produz a difração da onda, ou seja, a presença do obstáculo é caracterizada pela função de perfil. Essa função pode assumir um valor intermediário entre os extremos 0 e 1, caracterizando por exemplo fenômenos de transmissão parcial de ondas. Fisicamente, os extremos  $\Gamma(\vec{b}) = 1$  ( $S(\vec{b}) = 0$ ) e  $\Gamma(\vec{b}) = 0$  ( $S(\vec{b}) = 1$ ) representam respectivamente um anteparo completamente opaco e um completamente transparente (sem difração).

Voltando à função  $U(x, y, z) = U_o e^{ikz}$ , e impondo que a matriz-S satisfaz a condição de normalização graças a conservação da energia, podemos escrever  $|U(x, y, z)|^2 = |U_o|^2$ . Integrando em  $x$  e  $y$ ,

$$\int |U(x, y, z)|^2 dx dy = |U_o|^2 \int dx dy,$$

e considerando  $A = \int dx dy$  a área da abertura e a integral sendo tomada sobre todo o plano

detetor, teremos

$$A|U_o|^2 = \int |U(x, y, z)|^2 dx dy. \quad (1.42)$$

Usando a equação (1.41), determinamos uma expressão para a quantidade  $|U(x, y, z)|^2$

$$|U(x, y, z)|^2 = \frac{k^2|U_o|^2}{(2\pi)^2 r^2} S^*(\vec{q})S(\vec{q}) = \frac{k^2|U_o|^2}{(2\pi)^2 r^2} |S(\vec{q})|^2,$$

onde  $S^*(\vec{q})$  e  $S(\vec{q})$  são as transformadas de Fourier de  $S^*(\vec{b}')$  e  $S(\vec{b})$  dadas respectivamente por

$$S^*(\vec{q}) = \int S^*(\vec{b}') e^{i\vec{q}\cdot\vec{b}'} d^2\vec{b}'$$

e

$$S(\vec{q}) = \int S(\vec{b}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{b}} d^2\vec{b},$$

integrando em  $x$  e  $y$

$$\int |U(x, y, z)|^2 dx dy = \frac{|U_o|^2}{(2\pi)^2} \int \frac{k^2}{r^2} |S(\vec{q})|^2 dx dy,$$

considerando  $\vec{q} = \frac{kx}{r}\hat{x} + \frac{ky}{r}\hat{y} = q_x\hat{x} + q_y\hat{y}$ , com  $dx dy = \frac{r^2}{k^2} dq_x dq_y$  e usando o teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \frac{1}{a\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y,$$

obtemos

$$\int |U(x, y, z)|^2 dx dy = |U_o|^2 \int |S(\vec{q})|^2 d^2\vec{b}, \quad (1.43)$$

logo, devemos ter

$$\int |S(\vec{q})|^2 d^2\vec{b} = A, \quad (1.44)$$

impondo uma restrição sobre  $S(\vec{b})$  devido o princípio de conservação da energia.

Desprezando a mudança na constante de fase da onda plana  $U_o$ , podemos separar

$U(x, y, z)$  em duas contribuições

$$U(x, y, z) = U_{\text{inc}} + U_{\text{esp}} = U_o \left( e^{ikz} + f(\vec{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \right), \quad (1.45)$$

onde  $U_{\text{inc}}$  é a onda plana incidente, e  $U_{\text{esp}}$  a onda espalhada (esférica), ou seja, o anteparo age como um potencial espalhador que recebe uma onda plana e dá uma onda esférica. A função  $f(\vec{q})$  é denominada amplitude de espalhamento, e é dada pela transformada de Fourier da função de perfil

$$f(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int \Gamma(\vec{b}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{b}} d^2\vec{b}, \quad (1.46)$$

invertendo a integral de Fourier obtemos

$$\Gamma(\vec{b}) = \frac{1}{2\pi ik} \int f(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{b}} d^2\vec{q}. \quad (1.47)$$

Assumindo a simetria azimutal da função de perfil, poderemos integrar sobre o ângulo  $\phi$  em (1.46) escrevendo em coordenadas cilíndricas os termos

$$\vec{q} \cdot \vec{b} = qb \cos \phi, \quad d^2\vec{b} = b db d\phi$$

teremos

$$f(q) = ik \int_0^\infty \Gamma(b) \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iqb \cos \phi} d\phi \right) b db,$$

com o auxílio da função de Bessel

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi} d\phi = J_0(x), \quad (1.48)$$

obtemos

$$f(q) = ik \int_0^\infty \Gamma(b) J_0(qb) b db.$$

## Seções de choque

Em se tratando do espalhamento de partículas, os objetos mais importantes para os físicos experimentais são as seções de choque. Definimos seção de choque diferencial  $d\sigma$

como a razão entre a intensidade da luz espalhada  $I_{\text{esp}}$  sob um certo ângulo sólido pelo fluxo incidente  $I_{\text{inc}}$  dados respectivamente por

$$I_{\text{inc}} = |U_{\text{inc}}|^2 = |U_o|^2 \quad (1.49)$$

e

$$I_{\text{esp}} = |U_{\text{esp}}|^2 = |U_o|^2 \frac{|f(\vec{q})|^2}{r^2}. \quad (1.50)$$

Assim, a seção de choque diferencial fica

$$d\sigma = \frac{I_{\text{esp}} r^2 d\Omega}{I_{\text{inc}}}. \quad (1.51)$$

Dessa forma, a seção de choque diferencial pelo elemento de ângulo sólido é dada pelo módulo quadrado da amplitude de espalhamento

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q})|^2. \quad (1.52)$$

Da equação (1.52), juntamente com a aproximação  $d^2\vec{q} = \pi dq^2 \cong \pi(2k^2 \vartheta d\vartheta) \cong k^2 d\Omega$  pode-se definir a seção de choque de espalhamento por

$$\sigma_{\text{esp}} \equiv \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{k^2} \int |f(\vec{q})|^2 d^2\vec{q}. \quad (1.53)$$

Usando a eq.(1.46) juntamente com o teorema de Parseval, obtemos

$$\sigma_{\text{esp}} = \frac{1}{4\pi^2} \int \Gamma^*(\vec{b}) d^2\vec{b} \int \Gamma(\vec{b}') (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{b}' - \vec{b}) d^2\vec{b}',$$

dessa forma, a seção de choque de espalhamento é dada por

$$\sigma_{\text{esp}} = \int |f(\vec{b})|^2 d^2\vec{b} = \int |1 - S(\vec{b})|^2 d^2\vec{b}. \quad (1.54)$$

Podemos definir ainda a seção de choque de absorção  $\sigma_{\text{abs}}$ , dada pela razão da energia absorvida pela energia do fluxo incidente

$$\sigma_{\text{abs}} = \int (1 - |S(\vec{b})|^2) d^2\vec{b} = \int [2\text{Re}\Gamma(\vec{b}) - |\Gamma(\vec{b})|^2] d^2\vec{b}. \quad (1.55)$$

Somando as seções de choque de espalhamento e absorção, obtemos a seção de choque total

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{esp}} + \sigma_{\text{abs}}. \quad (1.56)$$

Decompondo função de perfil na forma  $\Gamma(\vec{b}) = \text{Re}\Gamma(\vec{b}) + i\text{Im}\Gamma(\vec{b})$  e combinando as equações (1.46) e (1.49), obtemos a importante expressão denominada Teorema Óptico [3, 12]

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}\{f(\vec{q} = 0)\}. \quad (1.57)$$

A equação (1.57) (com  $f$  no CM) nos diz que a seção de choque total é proporcional a amplitude de espalhamento na direção da frente de onda. O teorema óptico é uma consequência da conservação da energia, o seu análogo em física de partículas ocorre como uma consequência da conservação de probabilidade na formulação da Matriz-S.

Em termos das variáveis de Mandelstan, as seções de choque diferencial elástica e total são dadas por

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt}(s, t) = \pi |F(s, t)|^2, \quad (1.58)$$

$$\sigma_{\text{tot}}(s) = 4\pi \text{Im}\{F(s, t = 0)\}. \quad (1.59)$$

Onde usamos a normalização  $f/k = F$  para assegurar a invariância de Lorentz da amplitude  $F = F(s, t)$ .

Outras grandezas físicas importantes no estudo do espalhamento elástico de hádrons são: a razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal ( $t = 0$ ) e a inclinação(slope) da seção de choque diferencial em ( $t = 0$ ), dadas respectivamente por

$$\rho(s) = \frac{\text{Re}\{F(s, t = 0)\}}{\text{Im}\{F(s, t = 0)\}}, \quad (1.60)$$

e

$$B(s) = \left[ \frac{d}{dt} \ln \frac{d\sigma_{\text{el}}(s, t)}{dt} \right]_{t=0}. \quad (1.61)$$

### 1.1.2 A expansão em ondas parciais

Consideremos agora um certo potencial esférico desempenhando papel semelhante ao anteparo visto anteriormente. Nesse caso a seção de choque diferencial elástica por elemento de ângulo sólido é dada em função da amplitude de espalhamento de acordo com (1.52) por [3, 12]

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = |f(k, \theta, \phi)|^2. \quad (1.62)$$

Supondo que o potencial seja simetricamente esférico, lembrando que  $d\Omega = d\phi d\cos\theta$  e integrando sobre todo o ângulo azimutal  $\phi$ , obtemos

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\cos\theta} = 2\pi |f(k, \theta)|^2, \quad (1.63)$$

com a amplitude de espalhamento admitindo a expansão em série de ondas parciais

$$f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) P_l(\cos\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - e^{2i\delta_l(k)}] P_l(\cos\theta), \quad (1.64)$$

onde  $a_l(k)$  são as amplitudes das ondas parciais,  $\delta_l(k)$  é uma fase associada a onda parcial com momento  $l$  e  $P_l$  é o polinômio de Legendre de ordem  $l$  e  $\theta(k)$  o ângulo de espalhamento no referencial do centro de massa. Usando a propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Legendre

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\cos\theta) P_l^*(\cos\theta) d\cos\theta = \frac{2\delta_{ll}}{2l+1}, \quad (1.65)$$

obtemos a seção de choque integral elástica por

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{el}} &= 2\pi \int |f(k, \theta)|^2 d\cos\theta \\ &= 2\pi \int \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) P_l(\cos\theta) \right|^2 d\cos\theta \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l(k)|^2. \end{aligned} \quad (1.66)$$

A seção de choque total é obtida usando o teorema óptico (1.57)

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{tot}} &= \frac{4\pi}{k} \text{Im} \{f(k, \theta = 0)\} \\ &= \frac{4\pi}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \text{Im}\{a_l(k)\}.\end{aligned}\tag{1.67}$$

### 1.1.3 O formalismo da Matriz-S

A abordagem mais geral do espalhamento quântico é feita na formulação da Matriz-S [3, 12]. Essa teoria pode ser usada para descrever vários processos elásticos, além de interações mais complicadas como por exemplo no tratamento de partículas spinoriais, campos não-centrais, processos dependentes do tempo, reações de multi-canais, colisões relativísticas, etc. A Matriz-S é o objeto responsável por descrever toda a dinâmica dos processos de espalhamento, basicamente ela é um operador unitário ( $S^\dagger S = I$ ) que transforma um estado inicial  $|\alpha\rangle$  de um processo de espalhamento, no estado final  $|\beta\rangle$

$$|\beta\rangle = S|\alpha\rangle.\tag{1.68}$$

A matriz-S pode ser relacionada ao operador unitário evolução temporal  $U(t_1, t_2)$ , conectando um estado de tempo  $t_1$  a um estado de tempo  $t_2$ , através de

$$S = U(-\infty, +\infty).\tag{1.69}$$

Na interpretação da matriz-S, em um processo de espalhamento, parte-se de um estado inicial ( $t_1 \rightarrow -\infty$ ) onde as partículas são consideradas livres e após a colisão ( $t_2 \rightarrow +\infty$ ) o sistema volta a ser composto por um estado de partículas livres. Usando a fórmula de Dyson [18], podemos escrever  $S$  na representação de interação

$$S = \tau \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} H'_{\text{int}}(t) dt \right],\tag{1.70}$$

onde  $\tau$  representa a ordenação temporal e  $H'_{\text{int}}$  a hamiltoniana de interação. A unitariedade de  $S$  expressa por

$$SS^\dagger = S^\dagger S = I,\tag{1.71}$$

garante a inversão de (1.68), dando

$$|\alpha\rangle = S^\dagger|\beta\rangle. \quad (1.72)$$

Para a evolução  $|\vec{k}\lambda\rangle \longrightarrow |\vec{k}'\lambda'\rangle$ , com  $\vec{k}$  ( $\vec{k}'$ ) representando o momentum de entrada (saída) e  $\lambda$  ( $\lambda'$ ) representando todos os números quânticos do estado inicial (final), a seção de choque diferencial pode ser escrita em termos dos elementos da matriz-S por

$$d\sigma = \frac{4\pi^2}{k^2} |\langle \hat{k}'\lambda' | S - I | \hat{k}\lambda \rangle|^2 d\Omega. \quad (1.73)$$

onde os versores  $\hat{k}$  e  $\hat{k}'$  indicam as direções dos momenta de entrada e saída, respectivamente, e  $\lambda$ ,  $\lambda'$  representam todos os números quânticos. A conservação da energia do sistema é imposta por  $k = k'$ , e a condição de normalização dos estados é dada por

$$\langle \hat{k}'\lambda' | \hat{k}\lambda \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\hat{k} - \hat{k}'). \quad (1.74)$$

A equação (1.73) serve para qualquer amplitude de espalhamento por ser absolutamente geral, assim, considerando a amplitude  $f(k, \theta, \phi; \lambda, \lambda')$ , satisfazendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k, \theta, \phi; \lambda, \lambda')|^2, \quad (1.75)$$

poderemos escrevê-la em função dos elementos da matriz-S por

$$f(k, \theta, \phi; \lambda, \lambda') = -\frac{2\pi i}{k} \langle \hat{k}'\lambda' | S - I | \hat{k}\lambda \rangle. \quad (1.76)$$

Como nas colisões elásticas não há troca de números quânticos, ou seja, o processo de espalhamento não altera os números quânticos do sistema na transição do estado inicial para o estado final, podemos fazer  $\lambda = \lambda'$  e reescrever a equação (1.76) omitindo-os

$$f(k, \theta, \phi) = -\frac{2\pi i}{k} \langle \hat{k}' | S - I | \hat{k} \rangle. \quad (1.77)$$

### Campos centrais

Consideremos agora o caso dos campos centrais, onde a projeção dos estados final e inicial na direção dos autovetores de momento angular  $|lm\rangle$  é dada por

$$\langle \hat{k}\lambda | lm\lambda \rangle = Y_l^m(\Omega), \quad (1.78)$$

sendo  $Y_l^m$  os harmônicos esféricos, satisfazendo a regra de adição

$$\sum_{m=-l}^l Y_l^m(\Omega_k) Y_l^{m*}(\Omega_{k'}) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\theta), \quad (1.79)$$

sendo  $P_l$  os polinômios de Legendre já definidos anteriormente, e  $\theta$  o ângulo de espalhamento que mede a deflexão entre  $\vec{k}$  e  $\vec{k}'$ . Introduzindo os elementos de matriz-S nos estados  $|lm\lambda\rangle$

$$\langle l'm'\lambda' | S | lm\lambda \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm} S_l^{\lambda\lambda'}, \quad (1.80)$$

e combinando as expressões (1.78) e (1.79), teremos

$$\langle \hat{k}'\lambda' | S - I | \hat{k}\lambda \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (S_l^{\lambda\lambda'} - \delta_{\lambda\lambda'}) P_l(\cos\theta). \quad (1.81)$$

Substituindo esse resultado na equação (1.73), teremos a seção de choque diferencial para o espalhamento do campo central

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (S_l^{\lambda\lambda'} - \delta_{\lambda\lambda'}) P_l(\cos\theta) \right|^2. \quad (1.82)$$

Usando a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre (1.65), obtemos a seção de choque integral

$$\sigma(k) = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |(S_l^{\lambda\lambda'} - \delta_{\lambda\lambda'})|^2. \quad (1.83)$$

A seção de choque elástica é obtida de (1.83) fazendo  $\lambda = \lambda'$

$$\sigma_{\text{el}}(k) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |(S_l - I)|^2, \quad (1.84)$$

onde definimos  $S_l^{\lambda\lambda'} \equiv S_l$ . A seção de choque integral inelástica é obtida considerando a

soma sobre todos os possíveis estados finais caracterizados pelos números quânticos  $\lambda'$ , com  $\lambda' \neq \lambda$

$$\sigma_{\text{in}}(k) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{\lambda' \neq \lambda} |S_l^{\lambda\lambda'}|^2. \quad (1.85)$$

Desde que os estados  $|\lambda l m\rangle$  formem uma base ortonormal, a condição de unitariedade da matriz-S (1.71) implicará

$$\sum_{\lambda'} |S_l^{\lambda\lambda'}|^2 = |S_l|^2 + \sum_{\lambda' \neq \lambda} |S_l^{\lambda\lambda'}|^2 = 1, \quad (1.86)$$

isso ajuda a simplificar a expressão (1.85)

$$\sigma_{\text{in}}(k) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - |S_l|^2), \quad (1.87)$$

evitando assim o problema da enorme quantidade de elementos de matriz exigido explicitamente na expressão (1.85).

Definindo a seção de choque total como a soma das seções de choque elástica e inelástica

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{in}}, \quad (1.88)$$

e usando as expressões (1.84) e (1.87), obtemos

$$\sigma_{\text{tot}}(k) = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - \text{Re } S_l). \quad (1.89)$$

Tomando a equação (1.64) para  $\theta = 0$ , e usando a seguinte definição para a amplitude de ondas parciais  $a_l(k)$

$$a_l(k) = \frac{e^{2i\delta_l(k)} - 1}{2ik} \equiv \frac{S_l(k) - 1}{2ik}, \quad (1.90)$$

e comparando com (1.89), concluímos que a seção de choque total é proporcional a amplitude elástica na direção da frente de onda ( $\theta = 0$ ), resultando no teorema óptico

$$\text{Im } f(0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{\text{tot}},$$

obtido agora como uma consequência direta da conservação de probabilidade no processo de

espalhamento, em outras palavras, expresso como uma consequência direta da unitariedade da matriz-S. Vale a pena lembrar que este teorema foi obtido na óptica pela imposição da conservação de energia reforçando a afirmação de que o papel que a conservação de energia desempenha no fenômeno óptico de difração é análogo ao que a conservação de probabilidades desempenha no espalhamento de partículas [3, 12].

Para estudarmos os efeitos da unitariedade da matriz-S sobre as amplitudes de ondas parciais  $a_l$ , podemos considerar a expressão (1.86) para o caso de um espalhamento elástico

$$|S_l| = 1, \quad (1.91)$$

isso nos permite escrever  $S$  como  $S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)}$ , onde o fator 2 na frente da mudança de fase  $\delta$  é convencional para indicar que a onda tenha mudado de fase ao incidir sobre o potencial e novamente ao ser espalhado por ele, resultando em  $2\delta$ . Para que o espalhamento seja elástico,  $\delta_l(k)$  devem ser quantidades reais. Usando a condição (1.91) juntamente com a definição (1.90), chegamos a condição de unitariedade elástica:

$$\text{Im } a_l(k) = k|a_l(k)|^2. \quad (1.92)$$

No caso em que os canais inelásticos estejam abertos, a única afirmação que podemos fazer em relação à condição de unitariedade é que:

$$|S_l| \leq 1. \quad (1.93)$$

Com os canais inelásticos abertos, as mudanças de fase passam agora a carregar uma parte imaginária, resultando em

$$S_l(k) = \eta_l(k)e^{2i\zeta_l(k)}, \quad (1.94)$$

onde definimos  $\eta_l \equiv e^{-2\text{Im } \delta_l}$  e  $\zeta_l \equiv \text{Re } \delta_l$  como quantidades reais. Assim, as contribuições inelásticas modificam a expressão (1.92) para

$$\text{Im } a_l(k) \geq k|a_l(k)|^2. \quad (1.95)$$

Usando  $a_l(k) = \frac{i}{2k}[1 - \eta_l(k)e^{2i\zeta_l(k)}]$ , chegamos a condição de unitariedade geral

$$\text{Im}\{a_l(k)\} - k|a_l(k)|^2 = \frac{1 - \eta_l^2(k)}{4k}, \quad (1.96)$$

sendo  $0 \leq \eta_l(k) \leq 1$ . A função  $\eta_l(k)$  é denominada coeficiente de absorção, sendo  $\eta_l(k) = 1$  o chamado limite elástico.

As seções de choque definidas anteriormente podem ser escritas em termos de  $\eta_l(k)$  e  $\zeta_l(k)$ , como

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - \eta_l \cos(2\zeta_l)], \quad (1.97)$$

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - \eta_l \cos(2\zeta_l) + \eta_l^2], \quad (1.98)$$

e

$$\sigma_{\text{in}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - \eta_l^2]. \quad (1.99)$$

### 1.1.4 Representações de Parâmetro de Impacto e Eiconal

Uma vez definidos alguns dos objetos mais importantes ao estudo do espalhamento a altas energias, definiremos uma representação muito útil no tratamento de casos em que as contribuições do número de ondas parciais é muito grande, essa técnica é denominada de Representação de parâmetro de impacto e é válida quando a energia das partículas em espalhamento é muito maior do que o potencial de interação, e o comprimento de onda das partículas é muito menor que o alcance do potencial  $r_o$ , de modo que em altas energias  $kr_0 \gg 1$  implique na condição  $l_M \gg 1$  sendo  $l_M$  o valor máximo da energia, satisfazendo  $\sqrt{l_M(l_M+1)} \cong kr_0$  [3, 12].

Definindo uma função  $\chi(k, l)$ , denominada função eiconal, como uma versão contínua da mudança de fase  $2\delta_l(k)$ , poderemos estender a expressão (1.64) à forma integral

$$f(k, \theta) = \frac{i}{2k} \int_0^{\infty} (2l+1) [1 - e^{i\chi(k,l)}] P_l(\cos \theta) dl, \quad (1.100)$$

onde consideramos que no regime de  $l \gg 1$ , os polinômios de Legendre são dados aproximadamente pela função de Bessel  $J_0$

$$P_l(\cos \theta) \approx J_0((2l+1) \sin(\theta/2)).$$

Definido classicamente por parâmetro de impacto  $b$  como a menor distância entre duas

partículas na colisão, na aproximação semiclássica esse objeto é dado por  $b = \frac{1}{k}(l + \frac{1}{2})$  permitindo a substituição do elemento de integração  $dl$  em (1.100) por  $kdb$ . Usando as expressões (1.12) e (1.13), podemos escrever a amplitude elástica em função do momentum transferido  $q \equiv \sqrt{-t}$  e da energia

$$f(q, s) = ik \int_0^\infty J_0(qb)[1 - e^{i\chi(b,s)}] b db. \quad (1.101)$$

sendo válida a igualdade  $f(k, \theta) = f(q, s)$ . Na representação eiconal, o termo  $1 - e^{i\chi(b,s)}$  é a função de perfil  $\Gamma$  definida na teoria óptica

$$1 - e^{i\chi(b,s)} = \Gamma(b, s). \quad (1.102)$$

Assim, a amplitude (1.101) pode ser reescrita como

$$F(s, t) = i \int_0^\infty J_0(b\sqrt{-t})\Gamma(b, s) b db, \quad (1.103)$$

onde usamos a normalização  $F = f/k$  e a relação  $q = \sqrt{-t}$  denominada virtualidade.

Semelhantemente ao que já observamos na teoria óptica, a função de perfil  $\Gamma(b, s)$  é a transformada de Fourier-Bessel da amplitude  $F(s, t)$  no espaço do parâmetro de impacto

$$\Gamma(b, s) = -i \int_0^\infty F(s, t) J_0(bq) q dq. \quad (1.104)$$

Separando a eiconal em suas partes real e imaginária, poderemos escrever a função de perfil como

$$\Gamma(b, s) = 1 - e^{i\text{Re}\chi(b,s) - \text{Im}\chi(b,s)},$$

onde definimos  $\text{Re}\chi(b, s) \equiv \chi_R(b, s)$ , e  $\text{Im}\chi(b, s) \equiv \chi_I(b, s)$ , para reescrever  $\Gamma(b, s)$  como

$$\Gamma(b, s) = [1 - e^{i\chi_R(b,s)}] - i[e^{i\chi_I(b,s)} \sin(\chi_R)] \equiv \text{Re}\{\Gamma(b, s)\} + i \text{Im}\{\Gamma(b, s)\}.$$

Com auxílio dessa expressão, podemos calcular  $|\Gamma(b, s)|^2$  como

$$|\Gamma(b, s)|^2 = 2 \text{Re}\{\Gamma(b, s)\} - [1 - e^{-2\chi_I(b,s)}].$$

Definindo  $1 - e^{-2\chi_I(b,s)} \equiv G_{in}(b,s)$  como a função de recobrimento inelástica, obtemos

$$2 \operatorname{Re}\{\Gamma(b,s)\} = |\Gamma(b,s)|^2 + G_{in}(b,s), \quad (1.105)$$

onde observamos que as contribuições dos canais inelástico e elástico são relacionados via condição de unitariedade através da associação entre as partes real e imaginária da amplitude  $F(s,t)$ . A interpretação física mais importante da expressão (1.105) é que nenhum processo de espalhamento pode ser unicamente inelástico, analogamente ao que ocorre na óptica clássica, onde a incidência de ondas planas em um disco absorvedor equivale à difração de ondas planas por uma abertura circular [3].

Partindo do teorema óptico (1.59), da representação eiconal (1.102) e da condição de unitariedade (1.105), escrevemos as seções de choque total, elástica e inelástica

$$\sigma_{\text{tot}}(s) = 4\pi \int_0^\infty \operatorname{Re}\{\Gamma(b,s)\} b db = 4\pi \int_0^\infty [1 - e^{-\chi_I(b,s)} \cos \chi_R(b,s)] b db, \quad (1.106)$$

$$\sigma_{\text{el}}(s) = 2\pi \int_0^\infty |\Gamma(b,s)|^2 b db = 2\pi \int_0^\infty |1 - e^{-\chi_I(b,s) + i\chi_R(b,s)}|^2 b db, \quad (1.107)$$

$$\sigma_{\text{in}}(s) = 2\pi \int_0^\infty G_{in}(b,s) b db = 2\pi \int_0^\infty [1 - e^{-2\chi_I(b,s)}] b db, \quad (1.108)$$

a seção de choque diferencial elástica

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt}(s,t) = \pi \left| \int \Gamma(b,s) J_0(qb) b db \right|^2 = \pi \left| \int [1 - e^{i\chi(b,s)}] J_0(qb) b db \right|^2, \quad (1.109)$$

e o parâmetro  $\rho$

$$\rho(s) = \frac{\operatorname{Re}\{i \int \Gamma(b,s) b db\}}{\operatorname{Im}\{i \int \Gamma(b,s) b db\}} = \frac{\operatorname{Re}\{i \int [1 - e^{i\chi(b,s)}] b db\}}{\operatorname{Im}\{i \int [1 - e^{i\chi(b,s)}] b db\}}, \quad (1.110)$$

### 1.1.5 Limite de Froissart-Martin e Teorema de Pomeranchuk

O limite de Froissart-Martin assim como o teorema de Pomeranchuk, corresponde à duas regras de fundamental importância para o estudo de processos de espalhamento a altas energias.

Considerando a propriedade de analiticidade e unitariedade da matriz de espalhamento,

o limite de Froissart-Martin impõem um limite superior de crescimento com a energia para as seções de choque total. Considerando a representação assintótica das ondas parciais no canal  $s$  [3]

$$\lim_{l,s \rightarrow \infty} A_l(s) \sim f(s) \exp[-l\zeta(z_0)], \quad (1.111)$$

sendo  $\zeta(z_0) = \log[z + (z^2 - 1)^{1/2}]$ ,  $z_0 = 1 + 2t/s$  e  $f(s)$  é uma função de comportamento tipo lei de potência de  $s$ . Escrevendo (1.111) na forma

$$A_l(s) \sim \exp \left[ - \left( \frac{2t}{\sqrt{s}} \right) l + \delta \log s \right]. \quad (1.112)$$

Considerando o comportamento de (1.112) para  $s$  grande, e a expressão

$$l \geq c\sqrt{s} \log s, \quad (1.113)$$

sendo  $c$  uma constante, as ondas parciais tendem à zero nos permitindo truncar a expansão em série como

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(s, t) \simeq \sum_{l=0}^{c\sqrt{s} \log s} (2l+1) A_l(s) P_l(z) \leq 16i\pi \sum_{l=0}^{c\sqrt{s} \log s} (2l+1) \sim iCs \log^2 s. \quad (1.114)$$

Usando o teorema óptico podemos mostrar que a seção de choque total cresce como

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma_{\text{tot}}(s) \leq \frac{\pi}{m_\pi^2} \log^2 s. \quad (1.115)$$

Continuando a análise assintótica das seções de choque total, o teorema de Pomeranchuk sugere que no limite de altas energias, a razão entre as seções de choque total dos processos partícula-partícula e antipartícula-partícula tende a um

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\text{tot}}^{ab}(s)}{\sigma_{\text{tot}}^{\bar{a}b}(s)} \longrightarrow 1. \quad (1.116)$$

### 1.1.6 Dados Experimentais

Nesta seção apresentamos graficamente os dados experimentais das grandezas frontais  $\sigma$  e  $\rho$  referentes aos espalhamentos elásticos próton-próton e antipróton-próton. Estes dados

serão interpretados nesta tese através da nossa formulação inspirada em QCD e também da teoria fenomenológica de Regge. As medidas de  $\sigma_{pp,\bar{p}p}^{\text{tot}}$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}$  utilizadas neste trabalho foram compiladas e analisadas pelo *Particle Data Group* (PDG) [19]. Em nossas análises incluímos dados recentes do LHC através da colaboração TOTEM [20, 21, 22, 23]. Estes dados são apresentados em Fig. 1.6 ( $\sigma_{\text{tot}}$ ), Fig. 1.7 ( $\rho$ ) e Fig. 1.8 ( $\sigma_{\text{tot}}$ ).

O que vimos até agora já é suficiente para destacarmos o papel fundamental da função eiconal, uma vez que obtido esse objeto, pode-se calcular os observáveis físicos necessários para a descrição de processos a altas energias. Dessa forma, nosso desafio será construir uma eiconal à partir de um modelo inspirado em QCD, e uma eiconal à partir da teoria fenomenológica de Regge.

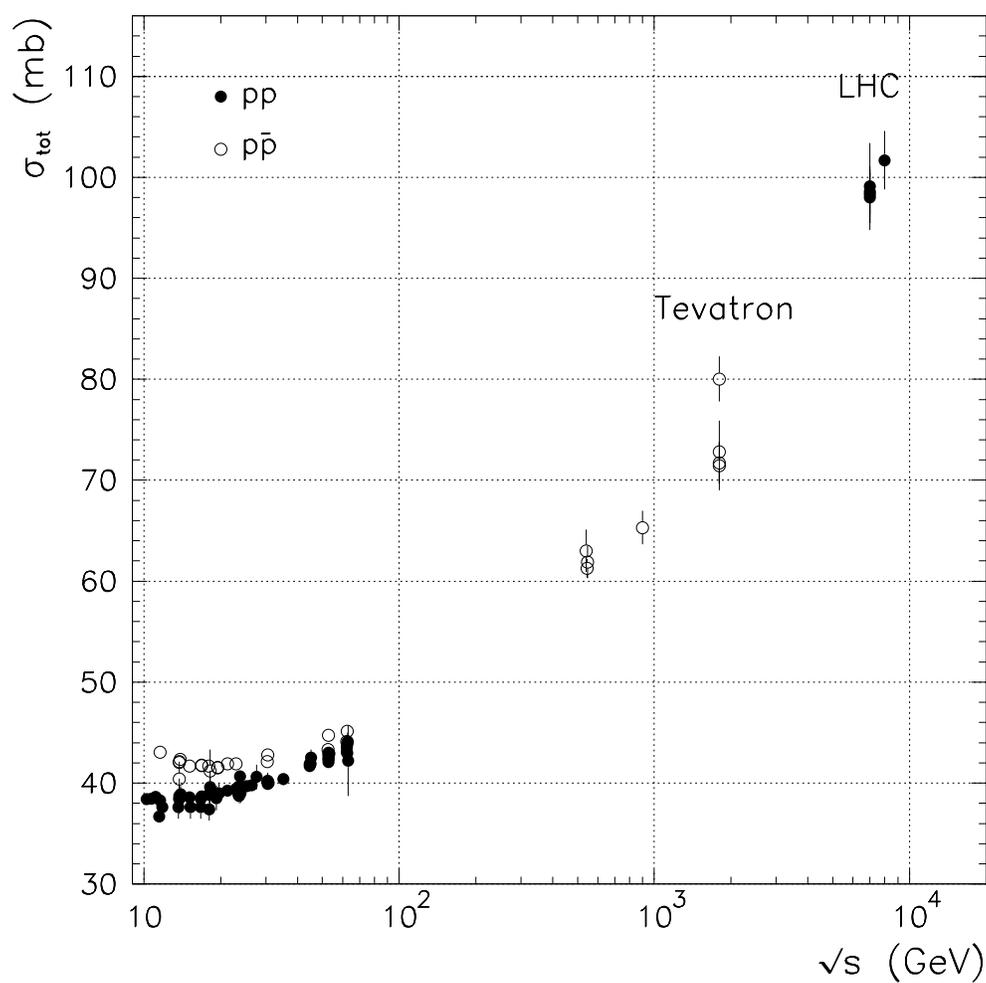


Fig. 1.6: Dados experimentais de seções de choque total para os espalhamentos  $pp$  (preto) e  $p\bar{p}$  (branco) a partir de  $\sqrt{s} = 10$  GeV. Dados de Tevatron e LHC

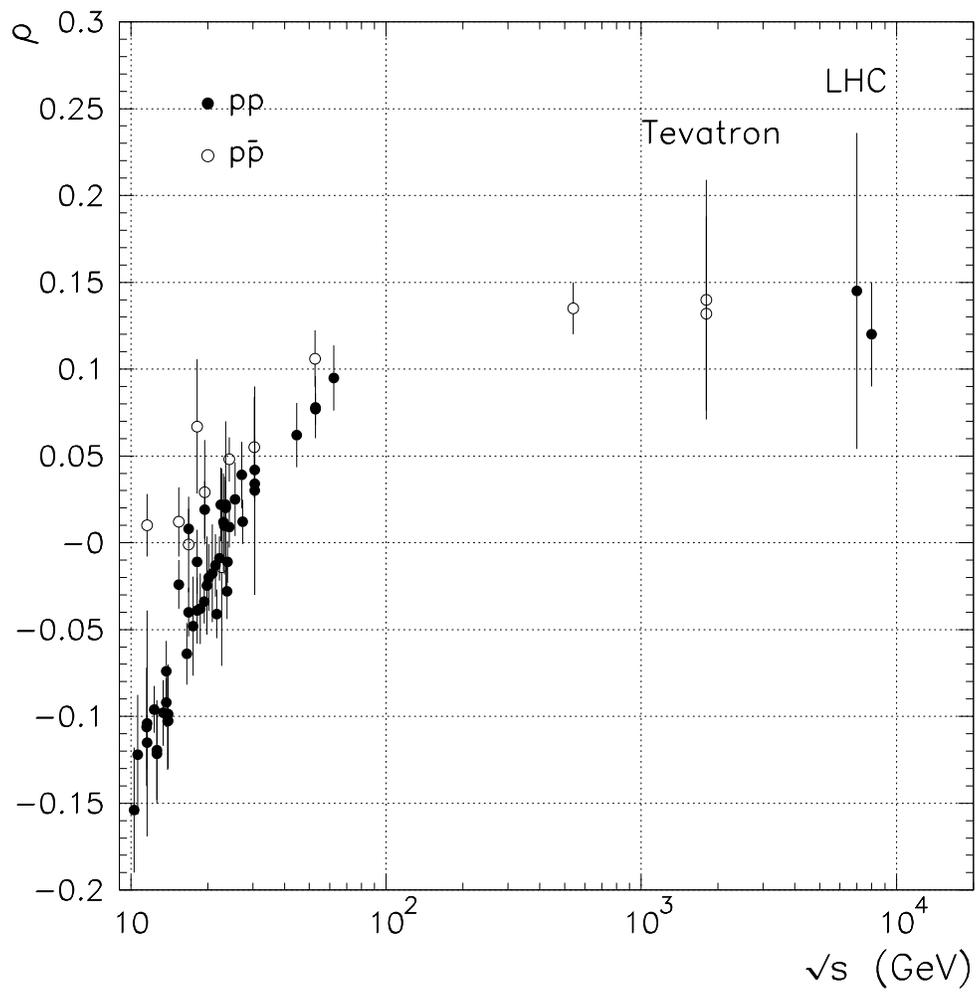


Fig. 1.7: Dados experimentais de parâmetro  $\rho$  para os espalhamentos  $pp$  (preto) e  $p\bar{p}$  (branco) a partir de  $\sqrt{s} = 10$  GeV. Dados de Tevatron e LHC.

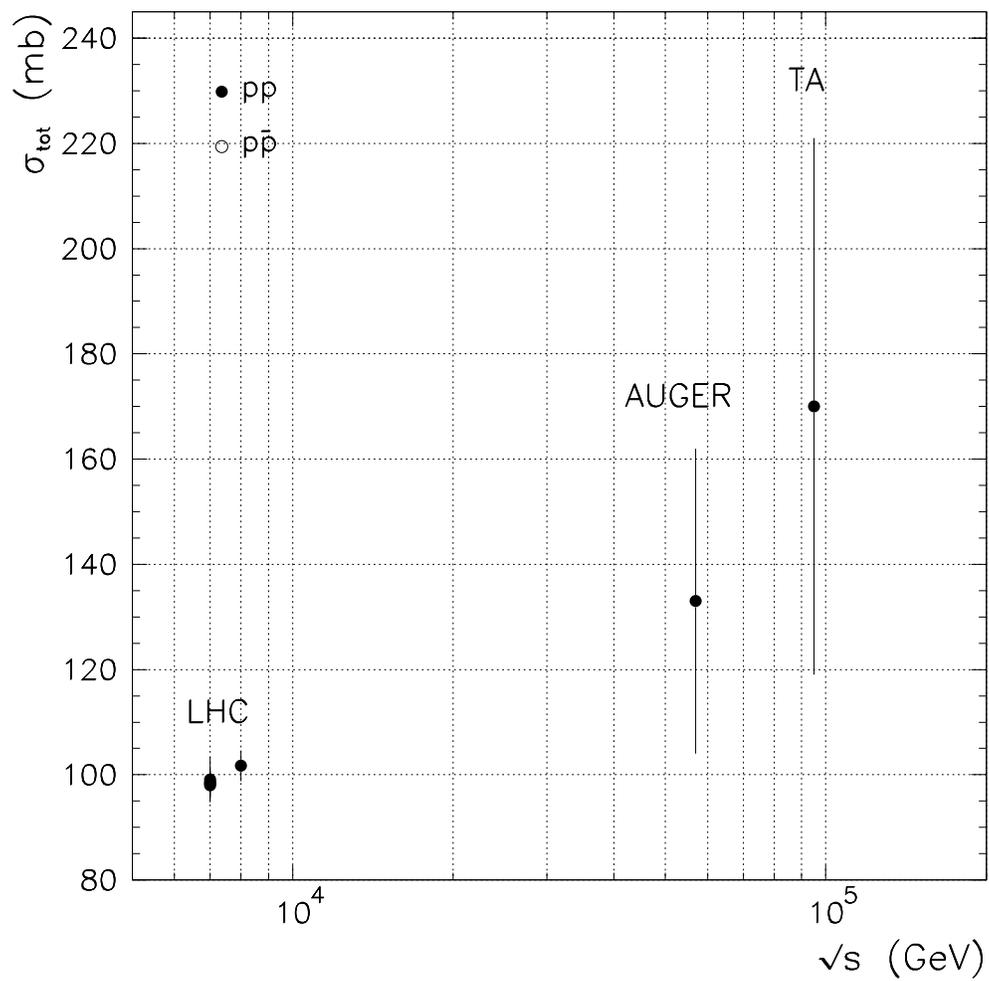


Fig. 1.8: Dados experimentais de seções de choque total para os espalhamentos  $pp$  (preto) e  $p\bar{p}$  (branco) a partir de  $\sqrt{s} = 10$  GeV. Dados de LHC, AUGER e TA.

## Capítulo 2

# O modelo a pártons da QCD

Neste capítulo abordaremos algumas propriedades fundamentais da Cromodinâmica Quântica (QCD), onde deduzimos as expressões em ordem dominante (*leading order*, LO) e em ordem seguinte à dominante (*next to leading order*, NLO) para a constante de acoplamento da QCD, que corresponde à um dos parâmetros fundamentais do Modelo Padrão, e estudamos o modelo a pártons original e o modelo a pártons modificado (também chamado *modelo a pártons da QCD*), no qual a invariância de escala de Bjorken verificada no modelo simples é quebrada por logaritmos de  $Q^2$  devido à atividade gluônica ignorada no modelo a pártons original. O modelo a pártons modificado é um dos pilares do modelo eiconal inspirado em QCD a ser desenvolvido no capítulo 3.

### 2.1 Ideias Gerais

A Cromodinâmica Quântica é uma teoria de calibre não-abeliana do grupo de simetria  $SU(3)_c$ , onde  $c$  representa o número quântico de cor, que é a carga de acoplamento responsável pela existência da interação nuclear forte. Manifestando-se numa escala de aproximadamente  $10^{-15}$  m, essa interação é fundamental para a manutenção da estabilidade nuclear. Semelhantemente ao que ocorre na Eletrodinâmica Quântica (QED), a QCD é estabelecida através das interações entre campos de matéria (quarks e antiquarks) e campos de calibre, os glúons. Cada tipo (sabor) de quark (antiquark) carrega uma das três possíveis cargas de cor (red, green, ou blue) e encaixa-se no modelo padrão das partículas elementares em uma das três gerações atuais (1<sup>a</sup> geração: up ( $u$ ) e down ( $d$ )), 2<sup>a</sup> geração: strange ( $s$ ) e charm ( $c$ ), 3<sup>a</sup> geração: top ( $t$ ) e botom ( $b$ )). os glúons são os campos vetoriais mediadores da QCD, ocorrendo em 8 tipos e podendo interagir entre si devido a natureza não-abeliana

da teoria [24, 25, 26].

Devido às propriedades de liberdade assintótica e confinamento, as técnicas de perturbação só podem ser aplicadas à QCD em processos que envolvem pequenas distâncias, pois nesse regime a constante de acoplamento forte é pequena, e portanto, as técnicas perturbativas podem ser aplicadas. De maneira contrária, para longas distâncias a constante de acoplamento é alta impossibilitando o tratamento perturbativo.

A dificuldade em termos uma descrição analítica completa para o modelo de quarks se deve ao fato de não conhecermos o mecanismo de confinamento que produz os estados hadrônicos, e apenas as interações entre quarks assintoticamente livres não são suficientes para descrever a dinâmica de um processo nuclear forte. Devemos então encontrar uma maneira de incluir o setor não-perturbativo na descrição da QCD. Uma possibilidade vem através de teoremas de fatorização, a ideia básica desses teoremas é que para certos processos em QCD os termos perturbativos e não-perturbativos podem ser separados em diferentes contribuições, a parte perturbativa é calculada analiticamente e a não-perturbativa é mapeada fenomenologicamente por meio de funções que parametrizam a estrutura do hádron, como fatores de forma e amplitudes de distribuição, ao final as amplitudes são calculadas em termos de uma convolução entre as diferentes contribuições.

### 2.1.1 Aspectos históricos

A maneira natural de se tratar um problema quântico relativístico é a Teoria Quântica de Campos. No entanto, o comportamento das constantes de acoplamento típicas das interações fortes impossibilita o tratamento perturbativo da QCD de maneira completa. Durante os anos 60, só se sabia calcular quantidades físicas via teoria de perturbação, esta é uma das razões para que a compreensão da natureza das interações hadrônicas tivesse um progresso muito lento durante essa década. A partir daí surgiram várias abordagens para se tentar entender a estrutura das interações nucleares, como por exemplo o estudo analítico da matriz-S (que carrega toda a dinâmica das interações), polos de Regge e diversos outros modelos fenomenológicos. Ao final da década de 60, alguns resultados experimentais apontaram para um possível caminho que levasse à uma linguagem unificadora. Uma das tentativas é a proposta do modelo a quarks como osciladores harmônicos, gerando um espectro para os hádrons, que apesar de insuficiente é ao menos uma aproximação razoável, mas o modelo apresenta inconsistências do ponto de vista da estatística de Fermi-Dirac. Um exemplo é a função de onda da ressonância  $\Delta^{++}$ , que na sua composição carrega os sabores

$(uuu)$ ,  $\psi(\uparrow\uparrow\uparrow)$ , e é simétrica. Teoricamente esta função deveria ser antissimétrica, pois é formada por três férmions. A solução desse paradoxo foi dada por Gell-Mann ao introduzir a número quântico de cor dos quarks; propondo então uma função de onda antissimétrica em cor para a ressonância  $\Delta^{++}$ , por exemplo, uma possibilidade seria a função  $\psi(u_r, u_g, u_b)$ . Um outro momento em que houve a necessidade da existência do número de cor para que as previsões teóricas concordassem com os resultados experimentais foi no início da década de 70 com a medida da razão  $R$  entre a seção de choque para a aniquilação  $e^+e^-$  em hádrons e a seção de choque da aniquilação  $e^+e^-$  em um par  $\mu^+\mu^-$  [27].

No ano de 1968 a colaboração SLAC-MIT obteve resultados experimentais que indicavam a propriedade de invariância de escala em processos de espalhamento inelástico profundo elétron-próton e elétron-nêutron. Foi observado que a amplitude de espalhamento do processo depende apenas da razão entre o quadrado do momentum do fóton virtual emitido pelo elétron e a energia transferida pelo fóton ao hádron. Estes resultados levaram Feynman e Bjorken a propor o modelo a pártons [28]. Neste modelo, considera-se que o hádron é formado por constituintes pontuais (os pártons) que são considerados assintoticamente livres ao serem sondados pelo fóton virtual, devido a energia do fóton ser muito maior que a energia de interação entre os pártons. Esta liberdade assintótica dos pártons foi fundamental para o desenvolvimento da QCD como a teoria que descreve as interações entre os quarks.

### 2.1.2 As fases da QCD

As características peculiares da QCD conduzem naturalmente à uma separação conveniente da teoria de acordo com duas categorias distintas: o regime perturbativo ou ultravioleta e a fase não-perturbativa ou infravermelha. A fase perturbativa é caracterizada pelo comportamento assintótico livre da teoria no ultravioleta, ou seja, este regime é identificado por processos cuja escala de massa seja muito maior que a escala intrínseca da QCD ( $\Lambda \approx 100$  MeV).

#### Regime perturbativo

O caráter perturbativo é uma consequência da liberdade assintótica das teorias de calibre não-abelianas. Podemos destacar dois problemas típicos dessa fase, o processo Drell Yan e o espalhamento inelástico profundo de lépton-hádron, onde o momentum do fóton virtual é

$q^2$ , e a energia transferida ao hádron é dada por

$$\nu = E' - E \equiv \frac{P \cdot q}{m_H}, \quad (2.1)$$

onde  $E$  ( $E'$ ) é a energia do lépton antes (depois) da emissão do fóton,  $q$  é a virtualidade do fóton (fora da camada de massa),  $P$  o momento do hádron antes do espalhamento e  $m_H$  a massa hadrônica.

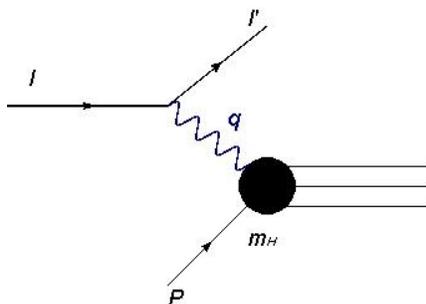


Fig. 2.1: Espalhamento inelástico profundo.

No espalhamento tipo Drell Yan, a colisão entre dois hádrons produz um fóton virtual que decai em um par  $\mu^+\mu^-$  com massa efetiva muito grande ( $M_{\mu\mu}^2 \gg M_H^2$ ).

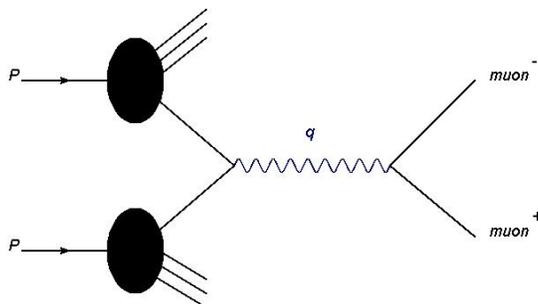


Fig. 2.2: Espalhamento Drell Yan.

### Regime não-perturbativo

Entre alguns dos problemas de natureza não-perturbativa podemos citar o espectro dos hádrons e mésons, a análise das funções de distribuição (funções de estrutura) dos hádrons, o

confinamento e a geração dinâmica de massa para os glúons. Entre esses fenômenos citados o confinamento é certamente o que mais tem motivado os físicos a buscarem modelos e estruturas fenomenológicas para uma compreensão mais completa da QCD. De maneira contrária ao que ocorre no regime a curtas distâncias, na região não-perturbativa os quarks e glúons não são observados como estados livres na natureza, como consequência os hádrons não são encontrados como estados coloridos. Um aspecto importante a ser observado é que a simetria de calibre da QCD implica em massa nula para os glúons, no entanto, estudos recentes indicam fortemente o fenômeno de geração de massa dinâmica para os glúons no setor infravermelho via Equações de Schwinger-Dyson[29, 30].

### Cromodinâmica Quântica

A cromodinâmica quântica corresponde ao setor forte do modelo padrão. Ela é uma teoria de calibre não-abeliana representada pelo grupo de simetria SU(3), descrevendo os quarks como campos de matéria e glúons como os campos de calibre, definida pela lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}_q^i (i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\psi_q^j. \quad (2.2)$$

A soma sobre os sabores  $q$  (ao qual os glúons são cegos) representam os diferentes tipos de quarks:  $u, d, s, c, b$  e  $t$ . Os índices  $i$  e  $j = 1, 2, 3$  representam as cargas de cor. Na equação (2.2) temos o tensor  $F_{\mu\nu}^a$  dado em termos dos campos de calibre (glúons)

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.3)$$

onde  $f^{abc}$  ( $a, b, c=1, \dots, 8$ ) são as constantes de estrutura do grupo SU(3)<sub>c</sub> e  $g$  a constante de acoplamento que controla a intensidade da interação entre os campos coloridos. Os campos de matéria (quarks)  $\psi^i(x)$ , com  $i = 1, 2, 3$  são tripletos de campos de Dirac (três estados de cores de um campo de quark)

$$\psi^i(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi^3(x) \end{pmatrix},$$

e a derivada covariante que atua nos campos de quarks é dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a, \quad (2.4)$$

sendo  $\lambda^a$  as matrizes de Gell-Mann, obedecendo, entre outras, a propriedade

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}. \quad (2.5)$$

Podemos escrever uma teoria de calibre de forma simplificada definindo um campo vetor matricial

$$A_\mu \equiv \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a \quad (2.6)$$

e

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\lambda^a}{2} F_{\mu\nu}^a. \quad (2.7)$$

Multiplicando a eq. (2.3) por  $\lambda^a/2$ , usando as definições (2.6) e (2.7) juntamente com a propriedade  $[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c$ , obtemos a forma simplificada

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (2.8)$$

Combinando as expressões (2.5) e (2.6), obtemos

$$2 \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu},$$

permitindo reescrever a lagrangeana (2.2) como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}_q^i (i\gamma^\mu D_\mu - m_q) \psi_q^j. \quad (2.9)$$

É importante observarmos que a QCD é invariante por transformações de calibre definidas por

$$\psi \rightarrow U\psi$$

e

$$A_\mu \rightarrow UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}, \quad (2.10)$$

onde a matriz de transformação  $U$  é dada por

$$U(\omega) = e^{i\omega(x)}, \quad (2.11)$$

com

$$\omega(x) = \frac{\lambda^a}{2}\omega^a(x), \quad (2.12)$$

sendo  $\omega^a(x)$  funções arbitrárias do espaço-tempo.

A propriedade de invariância de calibre é fundamental para as teorias de gauge, mas em contrapartida, é a propriedade que torna a determinação das regras de Feynman em teoria de perturbação algo não trivial.

## O Grupo de Renormalização e a Constante de Acoplamento Efetiva

Os problemas de divergências surgiram pela primeira vez na Eletrodinâmica Quântica (QED) e foi também na QED que surgiu a teoria da Renormalização. O primeiro tipo de divergência da teoria relaciona-se à previsão de uma energia infinita para o estado de vácuo. Podemos citar, por exemplo, a catástrofe ultravioleta e a polarização do vácuo, ambos os efeitos detectados por Oppenheimer em 1930 [31]. A solução para remover as divergências veio com o surgimento das técnicas de renormalização. Assim, a renormalização surge na tentativa de remover essas divergências que afetam a teoria de campos desde o seu surgimento. Entre 1947 e 1949 Feynman e Schwinger contribuíram com a QED tornando-a renormalizável e covariante [32].

A técnica da renormalização consiste basicamente na eliminação dos infinitos de uma teoria (divergências) absorvendo-os dentro de uma redefinição dos seus parâmetros físicos, como massa, constante de acoplamento e intensidade do campo [18, 33]. As quantidades físicas são independentes do esquema de renormalização, no entanto, a escolha do parâmetro da expansão perturbativa não é única, ela depende de certos critérios de conveniência ou simplicidade do cálculo. Até mesmo as escalas de renormalização (pontos de subtração) não precisam ser necessariamente iguais quando aplicadas a processos diferentes. Podemos citar,

como exemplo, a utilização da eletrodinâmica quântica a processos ocorrendo a 300 GeV, como a aniquilação  $e^+e^-$ . Para este processo a constante de estrutura fina  $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$  não é um bom parâmetro de expansão perturbativa, pois ela é definida na escala da massa do elétron ( $\sim 0.511$  MeV), assim, é mais conveniente redefinir a constante  $\alpha$  na escala de 300 GeV.

A liberdade de escolha do parâmetro da expansão perturbativa pode ser explorada usando-se o Princípio da Sensitividade Mínima, proposto por Stevenson [34], nesta prescrição o ponto de subtração  $\mu$  é definido para cada processo, de modo que pequenas variações de  $\mu$  induzem uma variação mínima na quantidade calculada. Como já mencionamos, o processo de renormalização introduz um (ou vários) parâmetro de escala, com dimensão de massa, mas as quantidades físicas não podem depender desta escala, esta invariância pode ser estudada através das equações do grupo de renormalização.

Para derivarmos as equações do grupo de renormalização para a QCD, vamos considerar uma função adimensional  $\mathcal{R}$ , dependente apenas do momento  $Q$ . Nesta função, qualquer mudança no parâmetro de escala  $\mu$  deve ser compensada por uma variação na constante de acoplamento efetiva  $\alpha_s$ , definida por

$$\alpha_s \equiv \alpha_s(\mu^2) = \frac{g^2}{4\pi}, \quad (2.13)$$

sendo  $g$  a constante de acoplamento forte. Uma vez que a função  $\mathcal{R}$  é adimensional, podemos escrevê-la na forma

$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{R} \left( \frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2) \right). \quad (2.14)$$

Definindo uma nova variável  $\tau \equiv \ln(Q^2/\mu^2)$  e usando o fato de que a variação total da função adimensional em relação ao parâmetro  $\mu$  é nula, poderemos derivar a equação

$$\frac{d\mathcal{R}(e^\tau, \alpha_s)}{d\mu^2} = \left( \frac{\partial e^\tau}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial \alpha}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \mathcal{R}(e^\tau, \alpha_s) = 0, \quad (2.15)$$

como  $\partial e^\tau / \partial \mu^2 = -Q^2/\mu^2$ , e queremos fazer o corte  $\mu^2 \rightarrow Q^2$ , a equação (2.15) será colocada na forma

$$\left( -\frac{Q^2}{\mu^2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) \mathcal{R}(e^\tau, \alpha_s) = 0. \quad (2.16)$$

Podemos agora definir a função beta do grupo de renormalização  $\beta(\alpha_s)$

$$\beta(\alpha_s) \equiv \mu^2 \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu^2}, \quad (2.17)$$

essa função é fundamental para o estudo perturbativo da teoria, uma vez que ela mostra o comportamento assintótico da teoria de acordo com a escala de momentum transferido  $\mu^2$ . Tomando o limite  $\mu^2 \rightarrow Q^2$  em (2.16), obtemos

$$\left( -\frac{\partial}{\partial \tau} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \right) \mathcal{R}(e^\tau, \alpha_s) = 0, \quad (2.18)$$

que é a equação do grupo de renormalização da QCD. Esta expressão nos indica, através da função beta, como o acoplamento  $\alpha_s(\mu^2)$  se comporta com uma mudança no ponto de subtração  $\mu$ .

É possível mostrar que  $\mathcal{R}(e^\tau, \alpha_s)$  é solução da equação (2.18) com a condição de contorno  $\alpha_s(\tau = 0) = \alpha_s(\mu^2) = \alpha_s$  [34]. Esse procedimento transfere toda a dependência de  $\mathcal{R}$  com a escala  $Q$  para a constante de acoplamento efetiva, isso nos permite tomar a equação (2.18) com  $\mathcal{R} = \alpha_s(\tau)$ , levando à expressão

$$\frac{d\alpha_s(\tau)}{d\tau} = \beta(\alpha_s(\tau)). \quad (2.19)$$

Observando essa expressão, podemos concluir que o cálculo da constante de acoplamento exige o conhecimento prévio da função  $\beta$  do grupo de renormalização. Na QCD podemos expandir a função beta na forma [35, 36, 37]

$$-\beta(\alpha_s(\tau)) = b_0 \alpha^2(\tau) + b_1 \alpha^3(\tau) + b_2 \alpha^4(\tau) + \dots, \quad (2.20)$$

onde

$$b_0 = \frac{\beta_0}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left( 11 - \frac{2}{3} n_s \right), \quad (2.21)$$

$$b_1 = \frac{\beta_1}{16\pi^2} = \frac{1}{16\pi^2} \left( 102 - \frac{38}{3} n_s \right), \quad (2.22)$$

com  $n_s$  representando o número de sabores efetivos, ou seja, apenas o número de sabores de quarks com massa  $m_q < Q$ , concordando com o teorema do desacoplamento da QCD. Vale observar que os termos  $b_{n \geq 2}$  dependem do esquema de renormalização adotado.

Usaremos agora a expansão perturbativa da função beta para reescrever a equação (2.19) para explicitar como se dá a variação da constante de acoplamento  $\alpha_s(\tau)$  em relação à escala de momentum transferida  $Q$ . Tomando a expansão perturbativa da função beta (2.20) e reescrevendo a variação de  $\alpha_s$  como

$$\frac{d\alpha_s(\tau)}{d\tau} \rightarrow \frac{d\alpha_s(Q^2)}{dQ^2/Q^2},$$

chegamos em

$$\frac{d\alpha_s(\tau)}{d\tau} = Q^2 \frac{d\alpha_s(Q^2)}{dQ^2} = -b_0 \alpha_s^2(Q^2) \left[ 1 + \frac{b_1}{b_0} \alpha_s(Q^2) + \frac{b_2}{b_0} \alpha_s^2(Q^2) + \dots \right]. \quad (2.23)$$

Em fenomenologia, usa-se apenas os termos em ordem dominante (leading order, LO) e ordem seguinte à dominante (next to leading order, NLO). Isso justifica o truncamento da série perturbativa (2.23) em NLO, sobrevivendo apenas os termos proporcionais a  $b_0$  e  $b_1$ .

Escrevendo os parâmetros  $b_n$  na forma [34]

$$b_n = b_0 \left( \frac{b_1}{b_0} \right)^n, \quad (2.24)$$

poderemos escrever a equação (2.23) como uma série geométrica

$$\begin{aligned} Q^2 \frac{d\alpha_s(Q^2)}{dQ^2} &= -b_0 \alpha_s^2(Q^2) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{b_n}{b_0} \alpha_s(Q^2) \right)^n \\ &= -\frac{b_0 \alpha_s^2(Q^2)}{\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{b_n}{b_0} \alpha_s(Q^2) \right)^{-n}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Truncando essa série na 1ª ordem de perturbação, obtemos

$$Q^2 \frac{d\alpha_s(Q^2)}{dQ^2} = -\frac{b_0 \alpha_s^2(Q^2)}{1 - \frac{b_1}{b_0} \alpha_s(Q^2)} \quad (2.26)$$

Como a equação (2.26) é equivalente à (2.23) até a ordem  $\alpha_s^3$ , podemos usá-la para o cálculo de  $\alpha_s^{\text{LO}}(Q^2)$  e  $\alpha_s^{\text{NLO}}(Q^2)$ . Assim a partir das equações (2.23) e (2.26) a integral com o corte

$\mu^2$  no limite inferior pode ser tomada por:

$$\int_{\alpha_s(\mu^2)}^{\alpha_s(Q^2)} \frac{d\alpha_s}{\beta(\alpha_s)} = \tau = \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right).$$

Explicitando a função beta em 1<sup>a</sup> ordem e perturbação, teremos

$$\int_{\alpha_s(\mu^2)}^{\alpha_s(Q^2)} \left[ -\frac{1 - \frac{b_1}{b_0}\alpha_s(q^2)}{b_0\alpha_s^2(q^2)} \right] d\alpha_s(q^2) = \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right),$$

nos dando a solução da integral por

$$\frac{1}{b_0\alpha_s(Q^2)} - \frac{1}{b_0\alpha_s(\mu^2)} + \frac{b_1}{b_0^2} \ln\left(\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\mu^2)}\right) = \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right). \quad (2.27)$$

Separando em (2.27) os termos que dependem explicitamente da variável  $Q$  dos termos que dependem do ponto de subtração  $\mu$ , obtemos

$$-\frac{1}{b_0\alpha_s(Q^2)} - \frac{b_1}{b_0^2} \ln(\alpha_s(Q^2)) + \ln(Q^2) = -\frac{1}{b_0\alpha_s(\mu^2)} - \frac{b_1}{b_0^2} \ln(\alpha_s(\mu^2)) + \ln(\mu^2) = C, \quad (2.28)$$

sendo  $C$  uma constante arbitrária.

Da equação (2.28) observamos como se dá a evolução da constante de acoplamento efetiva da QCD em relação à escala adotada, mas nada podemos dizer sobre a escala em si. Um procedimento usual é adotar a massa do bóson vetorial neutro  $\mu = M_Z \simeq 92 \pm 2 \text{ GeV}$ , que é muito acima da escala de QCD, portanto garante o tratamento perturbativo da teoria, assim

$$\alpha_s = \alpha_s(M_Z^2).$$

Para eliminarmos a arbitrariedade da constante  $C$  introduzimos um parâmetro dimensional  $\Lambda$  na definição de  $\alpha_s(Q^2)$ . Esse parâmetro indica a escala na qual  $\alpha \rightarrow \infty$ , de maneira que

$$\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) = \int_{\infty}^{\alpha_s(Q^2)} \frac{d\alpha}{\beta(\alpha)}. \quad (2.29)$$

Tomando a constante  $C$  como

$$C = \ln \Lambda^2 + \frac{b_1}{b_0^2} \ln b_0, \quad (2.30)$$

poderemos escrever a equação (2.28) na forma

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{b_0 \left[ \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{b_1}{b_0^2} \ln (b_0 \alpha_s(Q^2)) \right]}. \quad (2.31)$$

Desenvolvendo a equação (2.31) em potências de  $1/\ln(Q^2/\Lambda^2)$  obtemos as expressões em LO e NLO para a constante de acoplamento efetiva  $\alpha_s(Q^2)$

$$\alpha_s^{\text{LO}}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)}, \quad (2.32)$$

$$\alpha_s^{\text{NLO}}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)} \left[ 1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln \left[ \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right) \right]}{\ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)} \right]. \quad (2.33)$$

## 2.2 O Modelo a Pártons da QCD e as Funções de Distribuição Partônicas

Graças à propriedade de liberdade assintótica e à consistência com a fenomenologia do modelo a pártons, a Cromodinâmica Quântica foi bem aceita pela comunidade dos físicos teóricos. Os experimentos de espalhamento inelástico profundo (Deep Inelastic Scattering, DIS) de elétrons em nucleons, feitos pela colaboração SLAC-MIT no final dos anos 60, deram ideia de que a parte dinâmica da seção de choque não dependia explicitamente de variáveis com dimensão de massa, mas apenas da razão entre a energia do fóton virtual e o momentum transferido ao setor hadrônico. Devido à sua importância ao estudo das interações hadrônicas tentaremos detalhar o estudo do processo de DIS  $eP \rightarrow eX$ .

### 2.2.1 Espalhamento Inelástico Profundo

O Espalhamento Inelástico Profundo lépton-hádrion corresponde à uma técnica experimental usada na investigação da estrutura dos hadrônica. Em Fig. 2.3, as quantidades

$k^\mu$  e  $k'^\mu$  são os quadrimomenta do lépton,  $P^\mu$  é o quadrimomentum do hádron (alvo) e  $q^\mu = k^\mu - k'^\mu$  é o quadrimomentum transferido ( $-q^2 = Q^2$ ).

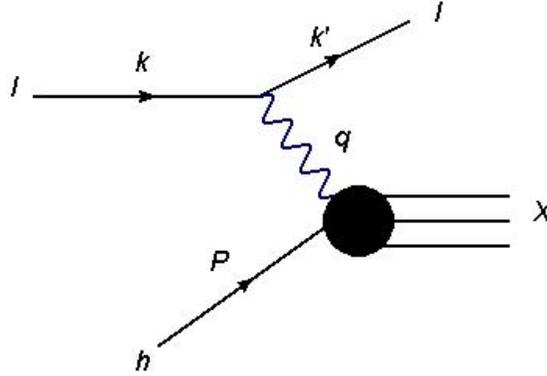


Fig. 2.3: Diagrama de Feynman para o espalhamento  $lh \rightarrow lX$

Basicamente neste experimento o lépton emite um bóson neutro (fóton  $\gamma$  ou um  $Z^0$ ) ou carregado ( $W^\pm$ ) que age como uma sonda no interior do nucleon em uma escala de tempo muito menor do que o tempo de interação entre os constituintes da estrutura hadrônica. Entre os possíveis bósons emitidos, a contribuição mais relevante vem do fóton  $\gamma$ , pois a troca de um  $Z^0$  leva a formação de um neutrino no estado final da reação e neutrinos são partículas difíceis de serem medidas. Em relação aos bósons carregados  $W^\pm$ , o fato de terem grandes massas torna sua contribuição muito pequena para a seção de choque do DIS pois essa massa aparece no polo do propagador ( $1/(Q^2 + M^2)$ ). Sendo assim, justificamos a escolha do elétron e do próton como lépton e hádron respectivamente, e o fóton como bóson mediador.

De acordo com a eletrodinâmica quântica, a amplitude de espalhamento  $T_{fi}$  em primeira ordem associada a reação  $eP \rightarrow eX$  é dada por

$$T_{fi} = -i \int j_\mu D(\gamma) J^\mu d^4x, \quad (2.34)$$

sendo

$$j_\mu = -e \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) e^{-i(k-k')x}, \quad (2.35)$$

e

$$J^\mu = e \bar{u}(k') \Gamma^\mu u(k) e^{-i(p-p')x}, \quad (2.36)$$

as correntes eletromagnéticas de transição do elétron e do próton respectivamente. Temos ainda o propagador do fóton  $D(\gamma) = -\frac{1}{q^2}$ , os espinores  $u$  e  $\bar{u}$ , e as matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$ .

Representamos genericamente o vértice hadrônico através da função desconhecida  $\Gamma^\mu$  por não entendermos o mecanismo de confinamento dos seus estados, sendo assim, aspectos e estruturas fenomenológicas devem ser incorporados na teoria a fim de fornecerem uma descrição mais completa da estrutura hadrônica. Usando a regra de ouro de Fermi, escrevemos a seção de choque diferencial

$$d\sigma = \frac{1}{4[(k \cdot p)^2 - m^2 M^2]} \left\{ 4\pi M \frac{e_e^2 e_p^2}{q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \right\} \frac{d^3 k'}{2E'(2\pi)^3}, \quad (2.37)$$

sendo  $e_e$  e  $m$  a carga e a massa do elétron, e  $e_p$  e  $M$  a carga e a massa do próton. Essa seção de choque é construída quadrando-se a amplitude de espalhamento (2.34) e fazendo a soma sobre os spins iniciais e finais. Para o vértice leptônico (elétron) isso corresponde ao cálculo do tensor

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} j^\mu j^\nu, \quad (2.38)$$

onde  $\lambda, \lambda'$  são os estados de helicidade. Desenvolvendo (2.38) chega-se em

$$L^{\mu\nu} = 2 [k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k' \cdot k - m^2) g^{\mu\nu}]. \quad (2.39)$$

O procedimento para a construção do tensor hadrônico  $W_{\mu\nu}$  é semelhante a de  $L^{\mu\nu}$ , mas devemos levar em consideração as seguintes condições:

1- Existem apenas dois quadrivetores independentes no vértice de interação, convencionamos  $q$  e  $p$ . O tensor hadrônico é formado com todas as combinações possíveis entre  $p$  e  $q$  e mais o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Assim temos

$$W_{\mu\nu} = A g_{\mu\nu} + \frac{B}{M^2} p_\mu p_\nu + \frac{C}{M^2} q_\mu q_\nu + \frac{D}{M^2} (q_\mu p_\nu + q_\nu p_\mu), \quad (2.40)$$

sendo  $A, B, C$  e  $D$  funções escalares (invariantes de Lorentz) de  $q$  e  $p$ .

2- O tensor é simétrico

$$W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu}.$$

3- A corrente eletromagnética é hermitiana:

$$W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}^*.$$

Sendo assim, as funções  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  devem ser reais.

4- A corrente eletromagnética no vértice é conservada, isso leva a

$$q^\mu W_{\mu\nu} = q^\nu W_{\mu\nu} = 0. \quad (2.41)$$

A condição (2.41) gera uma relação de vínculo entre as funções escalares, assim, podemos reescrever (2.40)

$$W_{\mu\nu} = W_1 \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2}{M^2} \left( p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left( p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right). \quad (2.42)$$

As funções  $W_1$  e  $W_2$  são obtidas a partir de medidas experimentais podendo ser escritas por quaisquer duas variáveis independentes associadas ao vértice. As mais usadas são  $Q^2 = -q^2$ , quadrimomentum transferido ou virtualidade, e a variável adimensional  $x$ , conhecida como variável de Bjorken, definida por

$$x \equiv \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2M\nu}, \quad (2.43)$$

cuja importância será explorada mais adiante com mais detalhes. Definimos ainda a diferença  $\nu = E - E'$  como a energia carregada pelo fóton virtual durante o processo de espalhamento. Uma vez obtidos os tensores leptônico e hadrônico chega-se em

$$L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} = 2W_1 k' \cdot k + \frac{2W_2}{M^2} [2(k' \cdot p)(k \cdot p) - M^2 k' \cdot k], \quad (2.44)$$

com  $W_i = W_i(x, Q^2)$ ,  $i=1,2$ . Dessa forma, podemos então reescrever (2.45)

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha^2 E}{q^4 E'} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

sendo  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ .

É comum, por simplicidade, usar o próton como o sistema de referência em repouso, isso nos dá as seguintes variáveis cinemáticas:

$$p = (E, \vec{0}), \quad k = (E, \vec{k}), \quad k' = (E', \vec{k}'), \quad q = k - k'. \quad (2.46)$$

Usando essas variáveis juntamente com as equações (2.44) e (2.45) e desprezando a massa do elétron frente a escala de energia que envolve o processo, obtemos

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} [W_2(x, Q^2) \cos^2(\theta/2) + 2W_1(x, Q^2) \sin^2(\theta/2)]. \quad (2.47)$$

Ainda no sistema de laboratório, podemos escrever

$$q^2 = -4EE' \sin^2(\theta/2), \quad (2.48)$$

e novamente

$$\nu = E - E'. \quad (2.49)$$

Reescrevendo  $dE'd\Omega$  com o uso do jacobiano

$$2\pi dE'd(\cos \theta) = \frac{\pi}{EE'} dq^2 d\nu, \quad (2.50)$$

podemos reescrever a seção de choque diferencial(2.47)

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E^2} [W_2(\nu, q^2) \cos^2(\theta/2) + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2(\theta/2)]. \quad (2.51)$$

É comum encontrarmos a equação (2.51) na aproximação para pequenos ângulos

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d^2\sigma}{dq^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{E'}{E^2} W_2(\nu, q^2).$$

Uma maneira mais usual de escrevermos a seção de choque diferencial do DIS é dada a partir de uma redefinição do tensor hadrônico por

$$W_{\mu\nu} = F_1(x, Q^2) \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + F_2(x, Q^2) \left( p_\mu - \frac{q \cdot p}{q^2} q_\mu \right) \left( p_\nu - \frac{q \cdot p}{q^2} q_\nu \right). \quad (2.52)$$

Sendo as novas funções de estrutura  $F_1(x, Q^2)$  e  $F_2(x, Q^2)$  responsáveis pelas informações experimentais na teoria e definidas por

$$F_1(x, Q^2) = MW_1(x, Q^2), \quad (2.53)$$

$$F_2(x, Q^2) = \nu W_2(x, Q^2). \quad (2.54)$$

É conveniente, além da variável de Bjorken  $x$ , definirmos uma segunda variável adimensional de escalonamento  $y$ , por

$$y \equiv \frac{p \cdot q}{p \cdot k}.$$

Interpretamos essa variável como a fração de energia perdida pelo elétron no sistema de repouso do próton, ficando limitada por

$$0 < y < 1.$$

Fazendo a substituição

$$dQ^2 d\nu = -\frac{1}{x} dQ^2 dx,$$

chega-se em

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4 x} \left[ (1-y) + \frac{y^2}{2(1+R)} \right] F_2(x, Q^2), \quad (2.55)$$

sendo

$$R = \frac{F_2}{2xF_1} - 1.$$

Essa equação é muito utilizada na expressão de dados experimentais de DIS, que entram na teoria através da função de estrutura  $F_2(x, Q^2)$ . Desprezando a massa de repouso do elétron ( $k^2 = p^2$ ), as variáveis de Mandelstam para um processo  $ep \rightarrow eX$  são dadas por

$$s \cong 2k \cdot p = 2ME,$$

$$t \cong -Q^2 = -4EE' \sin^2(\theta/2),$$

e

$$u \cong -2k' \cdot p = -2ME'.$$

O produto tensorial com o auxílio dessas variáveis fica

$$L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = -\frac{2tF_1}{M} - \frac{2tF_2}{M} \frac{su}{s+u}, \quad (2.56)$$

nos permitindo escrever a seção de choque diferencial como

$$\frac{d^2\sigma}{dtdu} = \frac{4\pi\alpha^2}{t^2s^2} \frac{1}{s+u} [(s+u)^2xF_1 - usF_2]. \quad (2.57)$$

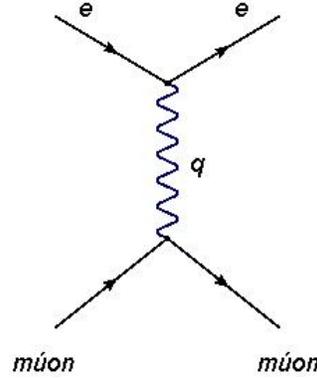
Observamos ainda que nesse contexto há uma relação entre a variável de Bjorken e as variáveis de Mandelstam

$$x = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2k \cdot p - 2k' \cdot p} = \frac{-t}{s+u}. \quad (2.58)$$

Vale a pena mencionar que podemos expressar a reação  $ep \rightarrow eX$  de maneira simplificada em termos da reação  $\gamma p \rightarrow X$ , pois a emissão dos fótons interagentes é a principal contribuição do feixe de elétrons para processos de DIS.

## 2.3 Interpretação Física e cálculo das funções de estrutura

Com o auxílio dos fatores de forma do espalhamento elástico  $ep$ , podemos justificar o motivo que leva as funções  $W_1$  e  $W_2$  ( $F_1$  e  $F_2$ ) serem chamadas “funções de estrutura”. Sendo assim, por simplicidade, partimos do espalhamento elástico elétron-múon dado por Fig. 2.4. Como os dois vértices do diagrama são compostos pela interação entre duas


 Fig. 2.4: Diagrama da reação  $e\mu \rightarrow e\mu$ .

partículas de Dirac (pontual de spin semi-inteiro), o tensor de espalhamento necessário para escrever a seção de choque é dado por

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \left( \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} \right) \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'_0} |\langle p, \lambda | J_\mu | p', \lambda' \rangle|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p'), \quad (2.59)$$

sendo  $p$  e  $\lambda$  representando os estados iniciais de energia e helicidade respectivamente, e  $p'$  e  $\lambda'$  os estados finais, e o valor esperado  $\langle p', \lambda' | J_\nu | p, \lambda \rangle = \bar{u}^{(\lambda')}(p') \lambda_\nu u^{(\lambda)}(p)$ . Quadrandando essa expressão, obtemos a amplitude de transição do estado inicial passar para o estado final, com transferência de momentum  $\vec{q}$ . A seção de choque diferencial para o processo é

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^2} \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta \left( \nu + \frac{q^2}{2M^2} \right), \quad (2.60)$$

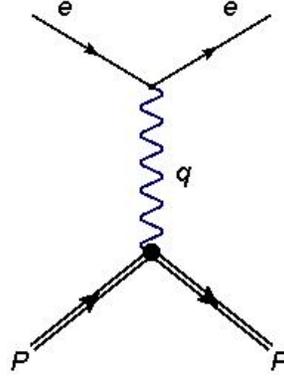
conhecida como fórmula de Mott.

O procedimento adotado no espalhamento  $e\mu \rightarrow e\mu$  pode servir de modelo para o estudo do espalhamento elástico elétron-próton.

Nessa reação o vértice superior (leptônico) permanece o mesmo, porém o inferior, agora hadrônico, deve ser substituído

$$W_{\text{múon}}^{\mu\nu} \rightarrow W_{\text{próton}}^{\mu\nu}.$$

Esse vértice agora carrega toda a complexidade do próton, portanto, as matrizes de Dirac que antes o compunham  $\gamma^\mu$ , devem ser substituídas por funções genéricas que carregam


 Fig. 2.5: Diagrama da reação  $ep \rightarrow ep$ .

informações sobre a estrutura interna do hádron  $\Gamma^\mu$ . Dessa forma, escrevemos

$$\langle p', \lambda' | J_\nu | p, \lambda \rangle = \bar{u}^{(\lambda')}(p') \left[ F_1(q^2) \gamma^\nu + \frac{k}{2M} F_2(q^2) i \sigma_{\mu\nu} q^\mu \right] u^{(\lambda)}(p), \quad (2.61)$$

sendo  $k$  o momento anômalo do hádron.

Na equação (2.61) as funções  $F_1$  e  $F_2$  chamadas fatores de forma, são associadas à estrutura hadrônica. Uma possível interpretação física pode ser dada através das seguintes definições

$$G_E \equiv F_1 + \frac{k q^2}{2M} F_2 \quad (2.62)$$

e

$$G_M \equiv F_1 + k F_2. \quad (2.63)$$

No referencial de Breit ( $\vec{p} = -\vec{p}'$ )  $G_E$  e  $G_M$  são aproximadamente as transformadas de Fourier das distribuições de carga elétrica e de momentum magnético respectivamente. Assim, a seção de choque para esse espalhamento fica

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4} \left( \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta \left( \nu + \frac{q^2}{2M^2} \right), \quad (2.64)$$

sendo  $\tau = -q^2/(4M^2) = Q^2/(4M^2)$ . A equação (2.64) é conhecida por fórmula de Rosen-

bluth.

No processo ilustrado pela figura (fig. 2.5) interpretamos o vértice inferior como uma das N-composições dos estados finais ilustrados na figura (fig. 2.3) Assim, o espalhamento  $eP \rightarrow eX$  pode ser tratado como uma generalização do caso elástico na situação em que N-partículas são produzidas no estado final, ou seja,

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \left( \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} \right) \int \prod_{n=1}^N \frac{d^3 p'_n}{(2\pi)^3 2p'_n} |\langle p, \lambda | J_\mu | p', \lambda' \rangle|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p + q - \sum_n p'_n \right). \quad (2.65)$$

A seção de choque para esse processo fica

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'}{q^4} [W_2(\nu, q^2) \cos^2(\theta/2) + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2(\theta/2)]. \quad (2.66)$$

Semelhante ao caso anterior, as funções  $W_1$  e  $W_2$  estão relacionadas diretamente à probabilidade de ocorrer essa reação, bem como a descrição da estrutura interna do próton.

## 2.4 Scalling de Bjorken

No ano de 1969 Bjorken previu o comportamento assintótico das funções de estrutura [7]. Observando dados experimentais do SLAC, Bjorken constatou que nos limites

$$Q^2 \rightarrow \infty, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad (2.67)$$

observa-se

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} \rightarrow \text{fixo}. \quad (2.68)$$

Isso torna as funções  $\nu W_2(\nu, Q^2)$  e  $MW_1$  dependentes de uma única variável

$$\nu W_2(\nu, Q^2) \rightarrow F_2(x), \quad (2.69)$$

$$MW_1(\nu, Q^2) \rightarrow F_1(x). \quad (2.70)$$

O fundamento teórico desse comportamento, conhecido como comportamento de escala, é que o próton é formado por estruturas elementares, e que no regime de altos momenta transferidos essas estruturas interagem elasticamente com o fóton. Isso pode ser verificado comparando (2.60) com (2.66)

$$2MW_1^{\text{pontual}}(\nu, Q^2) = \frac{Q^2}{2M\nu} \delta \left( 1 - \frac{Q^2}{2M\nu} \right), \quad (2.71)$$

$$\nu W_2^{\text{pontual}}(\nu, Q^2) = \delta \left( 1 - \frac{Q^2}{2M\nu} \right). \quad (2.72)$$

Observa-se então que as funções de estrutura dependem apenas da razão  $Q^2/(2M\nu)$ , e não de  $Q^2$  e  $\nu$  separadamente. Isso não acontece se essa comparação for feita no espalhamento elástico  $eP$ , pois comparando (2.64) com (2.66), obtém-se

$$2MW_1^{\text{elast}}(\nu, Q^2) = \frac{2M\tau}{\nu} G_M^2(Q^2) \delta \left( 1 - \frac{Q^2}{2M\nu} \right) \quad (2.73)$$

e

$$\nu W_2^{\text{elast}}(\nu, Q^2) = \frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} G_M^2(Q^2) \delta \left( 1 - \frac{Q^2}{2M\nu} \right). \quad (2.74)$$

Nos mostrando que não temos como expressar  $2MW_1^{\text{elast}}$  e  $\nu W_2^{\text{elast}}$  em termos de uma única variável de scaling. Como o comportamento assintótico observado em (2.69) e (2.70) pode ser justificado em (2.71) e (2.72), chega-se à conclusão de que em um espalhamento tipo DIS, o fóton virtual “vê” o hádron como sendo formado por partículas de spin 1/2. A variável  $x = Q^2/(2M\nu)$  é referida na literatura como variável de scaling de Bjorken, ou, apenas  $x$  de Bjorken.

No modelo a pártons desenvolvido por Feynman é possível interpretar a invariância de escala e ainda relacionar as funções de estrutura do próton às funções de distribuição partônicas. Na tentativa de explicar o comportamento de escala, Feynman considerou que nos limites assintóticos  $Q^2 \rightarrow \infty$  e  $\nu \rightarrow \infty$  o elétron sofre espalhamento pelos constituintes livres do próton, denominados por Feynman de partons. O fundamento dessa ideia é de que no limite de  $Q^2$  e  $\nu$  altos o fóton virtual emitido pelo elétron age como uma sonda em escalas de distâncias e tempo muito curtas, e na condição de que a densidade de pártons não é muito alta, o fóton deve interagir com apenas um párton. Tomando o próton como referencial, Feynman assumiu que a escala de tempo das interações partônicas é muito

maior do que a escala de tempo da interação fóton-párton, devido a dilatação temporal. Dessa forma podemos considerar que em altas energias as interações partônicas podem ser desconsideradas, e o fóton ao chegar no próton encontra seus constituintes praticamente livres.

Enquanto os pártons forem considerados livres, podemos atribuir ao próton um número definido de constituintes, e como nesse regime as interações entre eles são irrelevantes, é possível atribuir a cada párton uma fração  $\epsilon$  definida do momento total do próton,  $0 < \epsilon < 1$ .

## 2.5 O Modelo a pártons

Tentaremos esclarecer um pouco mais a ideia do modelo a pártons e a sua importância no estudo da estrutura hadrônica. Basicamente o modelo a pártons descreve as interações elásticas do fóton com os constituintes livres dentro do próton em espalhamentos do tipo DIS. Vale ressaltar que esse modelo descreve as interações a nível de árvore, ou seja, sem correções radiativas. Na construção da teoria considera-se que o próton se mova com velocidade azimutal infinita, isso é o mesmo que adotar o referencial de “momentum infinito”. Essa construção segue-se da seguinte maneira:

1- No referencial adotado, o momentum transversal do próton e todas as massas envolvidas são desprezíveis;

2- Com  $v_p$  infinita, a dilatação temporal torna a escala de tempo das interações parton-parton muito maior que a da interação fóton-párton, ou seja, nesse regime os pártons podem ser considerados livres;

3- constrói-se a seção de choque para a interação  $\gamma^*$ -próton somando-se probabilidades de espalhamento e não amplitudes de probabilidades (soma incoerente);

4- Propõe-se que cada párton carregue individualmente uma fração  $\epsilon$  do quadrimomentum do próton, e que a massa dos pártons ( $\epsilon M$ ) não varie.

A seção de choque diferencial para o espalhamento  $eP \rightarrow eX$  fica

$$\left( \frac{d^2\sigma}{dtdu} \right)_{eP \rightarrow eX} = -i \sum_i \int_0^1 \epsilon d\epsilon f_i(\epsilon) \left( \frac{d^2\sigma}{dtdu} \right)_{eq_i \rightarrow eq_i}, \quad (2.75)$$

onde  $q_i$  representa o  $i$ -ésimo párton interagente e  $f_i(\epsilon)$  é uma função de distribuição, representando a probabilidade de  $q_i$  carregar uma fração  $\epsilon$  do momento do próton, cuja normalização

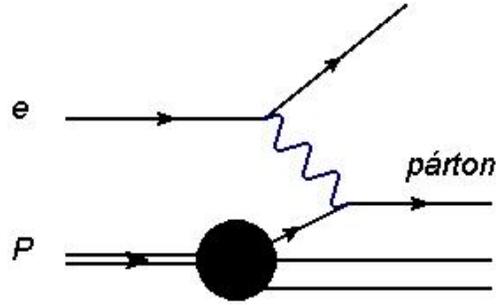


Fig. 2.6: Representação esquemática do modelo a pártons.

é dada por

$$\sum_i \int_0^1 f_i(\epsilon) \epsilon d\epsilon = 1. \quad (2.76)$$

O índice  $i$  pode se referir tanto a um párton carregado quanto a um neutro.

As variáveis de Mandelstam para o subprocesso (Fig. 2.5) são

$$\hat{s} = (k + p_i)^2 \cong 2k \cdot p_i = \epsilon(2k \cdot p) = \epsilon s \quad (2.77)$$

$$\hat{u} = (k' + p_i)^2 \cong -2k' \cdot p_i = \epsilon(2k' \cdot p) = \epsilon u \quad (2.78)$$

$$\hat{t} = -Q^2 = t, \quad (2.79)$$

que para o processo  $AB \rightarrow CD$ , obedecem à relação

$$\hat{s} + \hat{u} + \hat{t} = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2. \quad (2.80)$$

Desprezando as massas, cria-se uma relação de vínculo entre as variáveis

$$\hat{s} + \hat{u} + \hat{t} = 0, \quad (2.81)$$

resultando

$$\epsilon = -\frac{t}{s + u}. \quad (2.82)$$

Comparando esse resultado com (2.58), podemos concluir que dentro do contexto apresentado, a fração de momentum do próton carregada por cada párton, é igual ao  $x$  de Bjorken presente nas funções de estrutura (2.69) e (2.70). Considerando o párton interagente como uma partícula pontual de spin semi-inteiro, podemos escrever a seção de choque diferencial para o subprocesso párton-pártion de acordo com as regras da QED para o espalhamento elástico

$$\left( \frac{d^2\sigma}{dtdu} \right)_{eq_i \rightarrow eq_i} = \frac{x d^2\sigma}{d\hat{t}d\hat{u}} = x \frac{2\pi\alpha^2 e_i^2}{s^2} \left[ \frac{s^2 + u^2}{t^2} \delta(t + x(s + u)) \right]. \quad (2.83)$$

Substituindo (2.83) em (2.75) e usando a equação (2.57) chega-se em

$$\frac{4\pi\alpha^2}{t^2 s^2} \frac{1}{s + u} [(u + s)^2 x F_1(x) - us F_2(x)] = \sum_i \int_0^1 f_i(x) \frac{2\pi\alpha^2 e_i^2}{s^2} \left( \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right) \delta(t + x(s + u)) dx. \quad (2.84)$$

Calculando a integral e comparando os termos proporcionais a  $(u^2 + s^2)$  e  $us$ , obtém-se

$$2(u^2 + s^2)x F_1(x) + 4us(x F_1(x) - F_2(x)) = (u^2 + s^2) \sum_i f_i(x) x e_i^2, \quad (2.85)$$

resultando em

$$2x F_1(x) = \sum_i f_i(x) x e_i^2, \quad (2.86)$$

$$2x F_1(x) = F_2(x). \quad (2.87)$$

A equação (2.87) foi obtida pela primeira vez por Callam e Gross em, e representa uma consequência dos pártons interagentes serem objetos elementares de spin 1/2. Observamos ainda que no regime de altas energias a função de estrutura é dada por

$$F_2(x) = \sum_i x f_i(x) e_i^2. \quad (2.88)$$

Contrariando o esperado, ao somarmos todas as frações de momento dos pártons carregados (quarks) a normalização (2.76) não é obedecida. Podemos dizer que aqui ocorre

um limite da Eletrodinâmica Quântica (QED) no que diz respeito ao estudo de objetos subatômicos. Isso ocorre devido à presença, no interior do próton, de objetos que não podem ser acoplados eletricamente mas que contribuem para o momentum do hádron. Esses objetos são os glúons, os mediadores da interação nuclear forte e que apresentam um acoplamento de outra natureza denominado carga de cor.

## 2.6 Quebra de Scaling

A idealização da estrutura hadrônica através do modelo a pártons encontrou um suporte fundamental na observação experimental da propriedade de escala, mas a medida em que essas observações foram realizadas em regiões cinemáticas mais amplas, observou-se violações desse comportamento de escala. A Fig. 2.7 mostra alguns dados experimentais de como a função de estrutura do próton exibe uma dependência com  $Q^2$ .

Esse efeito de quebra de escala se deve ao fato de que além dos quarks, os glúons também estão presentes na estrutura hadrônica, e a dinâmica das interações no interior dos nucleons é responsável por evoluções tipo cascata observadas em experimentos tipo DIS.

Existe um conjunto de equações matriciais que governam as evoluções em  $Q^2$ , são as chamadas Equações de Altareli-Parisi (DGLAP) [38], dadas por

$$\frac{\partial}{\partial \ln Q^2} \begin{bmatrix} f_q(x, Q^2) \\ f_g(x, Q^2) \end{bmatrix} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \begin{bmatrix} P_{qq}(x/\xi) & P_{qg}(x/\xi) \\ P_{gq}(x/\xi) & P_{gg}(x/\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_q(\xi, Q^2) \\ f_g(\xi, Q^2) \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

sendo  $f_q(x)$  a distribuição em fração de momento dos quarks e  $f_g(x)$  a dos glúons dentro da partícula hadrônica. As funções  $P_{ij}(z \equiv x/\xi)$  são chamadas de funções de splitting (chamaremos a partir de agora de funções de desdobramento) que representam as probabilidades de ocorrência de cada vértice elementar. Temos ainda a constante de acoplamento da QCD  $\alpha$ , em primeira ordem dada por

$$\alpha_{\text{QCD}}(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_s) \ln(Q^2/\Lambda^2)}. \quad (2.90)$$

Com  $n_s$  representando o número de sabor dos quarks e  $\Lambda$  um fator de corte que separa a região perturbativa da não-perturbativa. Dessa forma, conhecendo as distribuições partônicas para um certo  $Q_0^2$  ( $f_q(x)$  e  $f_g(x)$ ), elas estarão determinadas para qualquer

$Q^2 > Q_0^2$ , ou seja, as funções de distribuição não dependem da escala de energia transferida a partir de  $Q_0^2$ .

As funções de desdobramento  $P_{ij}(z)$  presentes em (2.89) são dadas por

$$P_{qq}(z) = P_{q \rightarrow qg}(z) = \frac{4}{3} \left( \frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ \quad (2.91)$$

$$P_{qg}(z) = P_{g \rightarrow q\bar{q}}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2] \quad (2.92)$$

$$P_{gg}(z) = P_{g \rightarrow gg}(z) = \frac{4}{3} \left[ \frac{1+(1-z)^2}{z} \right] \quad (2.93)$$

$$P_{gg}(z) = P_{g \rightarrow gg}(z) = 6 \left[ \frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) + \left( \frac{11}{12} - \frac{1}{18} n_s \right) \delta(1-z) \right]. \quad (2.94)$$

Como já mencionamos anteriormente, estas funções descrevem, fisicamente, as probabilidades associadas a cada vértice elementar. Por exemplo,  $P_{qq}(z) = P_{q \rightarrow qg}(z)$  representam a probabilidade de um quark emitir um glúon e ter sua fração de momento reduzida pelo fator  $z$ .

O símbolo  $(...)_+$  deve-se ao tratamento particular dado às funções que apresentam a singularidade para  $z \rightarrow 1$ . Devemos tratar essas singularidades de maneira apropriada, a fim de obtermos a solução para as equações DGLAP. As distribuições que carregam “+” são dadas a fim de que tenhamos para uma função suave  $f(x)$ , a relação

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(1-x)_+} dx = \int_0^1 \frac{f(x) - f(1)}{1-x} dx \quad (2.95)$$

e

$$\frac{1}{(1-x)_+} = \frac{1}{1-x}, \quad 0 \leq x < 1.$$

As funções de distribuição  $f_q$  e  $f_g$  são universais no sentido de descreverem o conteúdo partônico do próton em qualquer tipo de espalhamento duro ou semiduro e são fornecidas por meio de análises de todos os processos inelásticos profundos e de outros processos relacionados envolvendo prótons. O procedimento adotado para determinação das funções

$f_i$  consiste em escrevê-las em termos de  $x$  e de uma escala inicial  $Q_0$ , assim  $f_i \equiv f_i(x, Q_0)$ , onde  $Q_0$  tem um valor grande o suficiente para garantir que estejamos na região perturbativa. Uma escolha usual é tomar a escala inicial  $Q_0 = 1$  GeV e a parametrização [39, 40]

$$xf_i(x, Q_0) = A_i \frac{(1-x)^{\beta_i}}{x^{\alpha_i}} (1 + \gamma_i \sqrt{x} + \delta_i x), \quad (2.96)$$

onde  $i = u, \bar{u}, d, \dots, g$ . Com essa parametrização, as equações DGLAP (2.89) serão usadas para calcular  $f_i(x, Q)$  em todos os valores de  $x$  e  $Q^2$  em que existam dados experimentais, sendo os parâmetros  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  e  $\delta_i$  determinados pelo melhor ajuste aos dados.

## 2.7 Modelos eiconais inspirados em QCD

Os chamados modelos inspirados em QCD [41] tem por finalidade descrever de maneira consistente certos processos hadrônicos ligados à região de transição entre os domínios perturbativo e não-perturbativo, usando o formalismo relacionado ao modelo a pártons da QCD [9]. Nesta formulação, a descrição do espalhamento elástico é realizada considerando-o como uma “sombra” do espalhamento inelástico, dessa forma, a técnica mais adequada para o tratamento das grandezas físicas é baseada na representação eiconal da amplitude de espalhamento. Neste formalismo, as funções eiconais para as amplitudes  $pp$  e  $\bar{p}p$  são escritas como a soma de contribuições de processos suaves e semiduros, levando-se em consideração o domínio da amplitude par em altas energias. Uma característica importante de todos esses modelos é que a parte do crescimento da seção de choque total está associada, em altas energias, ao rápido aumento nas funções de distribuição partônicas (com os glúons dando a maior contribuição) em pequeno  $x$ . No processo da construção da eiconal, em primeiro momento, constrói-se a parte imaginária e posteriormente através de relações de dispersão, gera-se a parte real.

Entre os diversos modelos inspirados em QCD encontrados na literatura, podemos destacar a primeira versão desenvolvida por B. Margolis e colaboradores [13], que descreve bem as grandezas frontais  $\sigma_{tot}^{pp}$  e  $[d\sigma/dt]_{\sqrt{s}=23.5 \text{ GeV}}^{pp}$  até  $-t \simeq 2.5 \text{ GeV}^2$  e apresenta um comportamento assintótico para a seção de choque total dado por  $\sigma_{tot}^{pp} \propto \ln^2 s$ . Mas o comportamento de  $\sigma_{tot}^{pp}$  na região  $Spp\bar{S}$  não apresenta um valor satisfatório.

A versão seguinte ao modelo de Margolis e colaboradores foi o modelo da referência [42], que descreve de forma satisfatória as grandezas  $\sigma_{tot}^{pp, \bar{p}p}$ ,  $d\sigma/dt$  e  $\rho^{pp, \bar{p}p}$  em diversas faixas de energia. Uma das diferenças entre os dois modelos consiste no mecanismo de fusão de glúons

adotado.

Uma terceira versão do modelo inspirado em QCD, pode ser estudada seguindo-se as referências [43, 44, 45, 46, 47, 48]. Nesta versão é possível se obter uma boa descrição dos dados experimentais de  $\sigma_{tot}$  e  $\rho$  para colisões  $pp$  e  $\bar{p}p$  [46, 47].

As aplicações dos modelos mencionados, aos processos hadrônicos são baseadas no uso de funções de distribuição gluônicas parametrizadas na forma  $f_g(x) \propto (1-x)^5/x^J$ , onde o parâmetro  $J$  controla a evolução da distribuição de glúons em pequeno  $x$ . Apesar de esta forma funcional evitar a saturação do limite de Froissart e permitir um resultado analítico no cálculo da função de estrutura  $F_{gg}(\tau) = [f_g \otimes f_g](\tau)$ , sua validade é relevante apenas nos limites  $x \rightarrow 0$  e  $x \rightarrow 1$ , associados ao limite de Regge e às regras de contagem de quarks, respectivamente. Na região  $0 < x < 1$ , a função  $f_g(x) \propto (1-x)^5/x^J$  não permite uma boa reprodução do comportamento de nenhuma outra função de distribuição  $f_g(x, Q^2)$  conhecida.

No próximo capítulo apresentaremos um modelo eiconal baseado no modelo a pártons da QCD, onde usaremos funções de distribuição de pártons que obedecem à equação DGLAP.

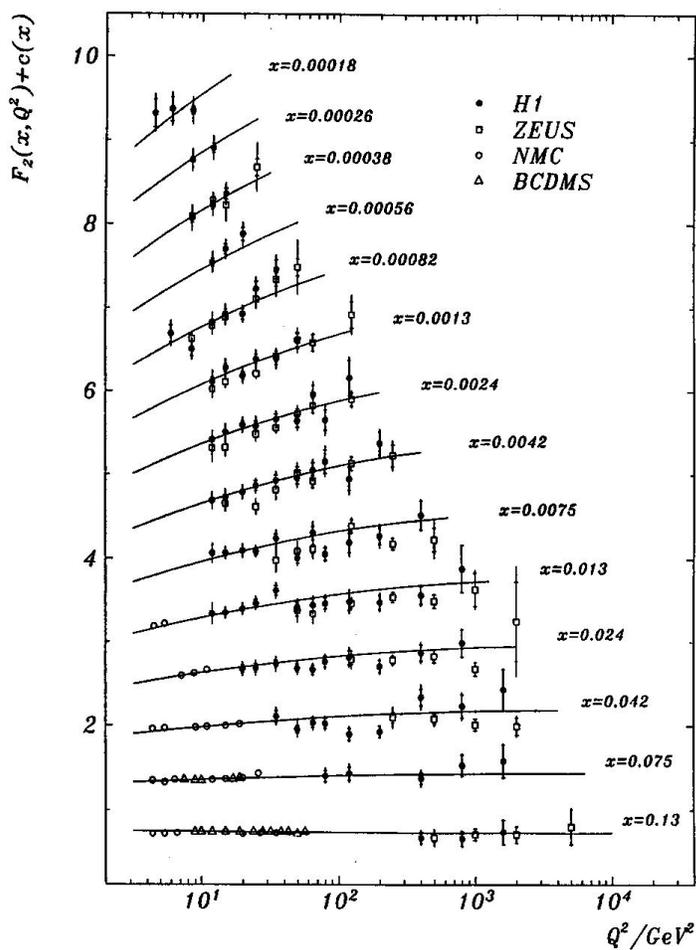


Fig. 2.7: Dados experimentais da função de estrutura do próton obtidos pela colaboração H1 indicando a quebra de scaling.

## Capítulo 3

# Um modelo inspirado em QCD com glúons massivos

Este capítulo corresponde à primeira parte original da tese [49], nele estudamos as contribuições infravermelhas às interações partônicas semiduras, levando em consideração uma carga efetiva do glúon cujo comportamento infravermelho é controlado por uma escala de massa dinâmica. Desenvolvemos um modelo eiconal baseado em QCD a fim de conectarmos a dinâmica partônica, a nível semiduro, ao espalhamento hádron-hádron. Obtemos previsões para as seções de choque total próton-próton e antipróton-próton  $\sigma_{tot}^{pp,\bar{p}p}(s)$  e também para as razões entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento na direção frontal  $\rho^{pp,\bar{p}p}(s)$ .

### 3.1 Introdução

A formulação inspirada em QCD corresponde atualmente à principal abordagem teórica para a descrição dos observáveis frontais seção de choque total e parâmetro  $\rho$  em processos de espalhamento hádron-hádron a altas energias [30, 50, 51, 52]. Nessa abordagem, a dependência com a energia da seção de choque total  $\sigma_{tot}(s)$  é obtida da QCD usando uma formulação eiconal, que por construção, obedece aos critérios de unitariedade. Na formulação eiconal inspirada em QCD os observáveis frontais  $\sigma_{tot}(s)$  e  $\rho(s)$  são obtidos a partir do modelo a pártons usando seções de choque elementares da QCD, conjuntos atualizados de funções de distribuição partônicas (quarks e glúons) e cortes fisicamente motivados, que restringem os processos de nível partônico apenas a nível semiduro. Os processos semiduros são oriundos dos espalhamentos duros de pártons carregando pequenas frações de momenta

dos seus hádrons constituídos, levando ao surgimento de jatos com energia transversa  $E_T$  muito menor que a energia total  $\sqrt{s}$  medida na colisão hadrônica. Nessa abordagem, o espalhamento de hádrons é uma soma incoerente sobre todos os subprocessos partônicos, dessa forma, o crescimento das seções de choque total é diretamente relacionado com os espalhamentos párton-pártion semiduros. Observando os dados experimentais percebemos que a diferença entre as medidas das seções de choque total  $pp$  e  $\bar{p}p$  diminuem com o aumento da energia, isso é um indicativo de que a dependência com alta energia da seção de choque é controlada principalmente por processos envolvendo a contribuição dos glúons, uma vez que estes objetos fornecem a contribuição dominante a nível de pequeno  $x$ .

A estrutura perturbativa da QCD é fundamental para o estudo dos processos hadrônicos, porém é insuficiente para uma descrição completa da teoria, uma vez que o caráter não-perturbativo, também se manifesta no nível elementar, pois a altas energias as componentes suaves e semiduras da amplitude de espalhamento são intimamente relacionadas [10, 53]. Dessa forma, a amplitude de espalhamento frontal é importante para diferenciarmos os glúons semiduros, que participam do espalhamento duro pártion-pártion, dos glúons suaves, emitidos na radiação de qualquer processo pártion-pártion em QCD.

Uma maneira de incluirmos as propriedades infravermelhas da QCD na descrição dos observáveis frontais em processos hádron-hádron, é considerarmos a possibilidade da geração dinâmica de massa para o glúon, ou seja, o glúon passa a ter uma massa efetiva graças às propriedades não-perturbativas da QCD. Essa massa dinâmica está intrinsecamente relacionada à uma constante de acoplamento forte infravermelha, e sua existência é fortemente baseada em resultados recentes de QCD na rede [54], e também por resultados fenomenológicos [29, 51, 55]. De modo mais específico, uma descrição global de  $\sigma_{tot}^{pp, \bar{p}p}(s)$  e  $\rho^{pp, \bar{p}p}(s)$  pode ser realizada de uma maneira consistente através da introdução de uma carga efetiva de QCD não-perturbativa no cálculo dos processos a nível partônico envolvendo glúons, que por sua vez dominam a altas energias e determinam o comportamento assintótico das seções de choque hádron-hádron.

A proposta principal desse capítulo é explorar a dinâmica não-perturbativa da QCD a fim de descrever a seção de choque total  $\sigma_{tot}(s)$  e a razão da parte real pela parte imaginária da amplitude de espalhamento frontal  $\rho(s)$ , em ambos os canais  $pp$  e  $\bar{p}p$  assumindo a representação eiconal e a condição de unitariedade da matriz de espalhamento. Em nossas análises introduzimos uma nova classe de fatores de forma dependentes da energia que representam a densidade de recobrimento para pártions no espaço do parâmetro de im-

pacto  $b$  [49]. Também exploramos os efeitos de alguns conjuntos atualizados de distribuições partônicas, chamadas CTEQ6, CTEQ6L1 e MSTW, sobre as quantidades frontais.

## 3.2 O modelo de massa dinâmica do glúon

Nos modelos baseados em QCD o crescimento das seções de choque é associado à espalhamentos semiduros de partons nos hádrons constituídos. Esses modelos incorporam processos suaves e semiduros no tratamento de interações hádron-hádron a altas energias usando uma formulação compatível com restrições de analiticidade e unitariedade. Na representação eiconal as seções de choque total e inelástica, e o parâmetro  $\rho$  são dados, respectivamente por

$$\sigma_{\text{tot}}(s) = 4\pi \int_0^\infty [1 - e^{-\chi_I(b,s)} \cos \chi_R(b,s)] b db, \quad (3.1)$$

$$\sigma_{\text{in}}(s) = 2\pi \int_0^\infty G_{\text{in}}(b,s) b db = 2\pi \int_0^\infty [1 - e^{-2\chi_I(b,s)}] b db, \quad (3.2)$$

$$\rho(s) = \frac{-\int_0^\infty e^{-\chi_R(b,s)} \sin \chi_I(b,s) b db}{\int_0^\infty [1 - e^{-\chi_R(b,s)} \cos \chi_I(b,s)] b db} \quad (3.3)$$

onde  $s$  é o quadrado da energia total no centro de massa,  $b$  é o parâmetro de impacto,  $G_{\text{in}}(b,s)$  é a função de recobrimento inelástico e  $\chi(s,b) = \text{Re } \chi(b,s) + i \text{Im } \chi(b,s) \equiv \chi_R(b,s) + i\chi_I(b,s)$  é a função eiconal (complexa).

A unitariedade da matriz- $S$  exige que a parte absorptiva da amplitude de espalhamento elástico receba contribuições dos canais elástico e inelástico. No espaço do parâmetro de impacto essa condição pode ser escrita como

$$2 \text{Re } \Gamma(b,s) = |\Gamma(b,s)|^2 + G_{\text{in}}(b,s), \quad (3.4)$$

onde  $\Gamma(s,b)$  é a função de perfil, que descreve a absorção resultante da abertura dos canais inelásticos, podendo ser representada pela transformada de Fourier-Bessel da amplitude de espalhamento elástico  $f(s,t)$ ,

$$\Gamma(b,s) = -i \int_0^\infty J_0(b\sqrt{-t}) f(s,t) \sqrt{-t} d(\sqrt{-t}), \quad (3.5)$$

onde  $t$  é a variável usual de Mandelstam. Vale lembrar que a consequência física da equação (3.4) é que um processo de espalhamento não pode ser unicamente inelástico, e assim afirma-se usualmente que a amplitude elástica resulta da sombra dos canais inelásticos no espalhamento. Nesta formulação a probabilidade de nenhum hádron ser quebrado em uma colisão de parâmetro de impacto  $b$  é portanto dada por  $P(s, b) = e^{-2\chi_I(s, b)}$ .

Construímos as funções eiconais assumindo que elas são aditivas em relação as interações partônicas suaves e semiduras nos espalhamentos  $pp$  e  $\bar{p}p$ :

$$\chi(s, b) = \chi_{\text{suave}}(s, b) + \chi_{\text{sd}}(s, b) \quad (3.6)$$

No limite semiduro de interações fortes as colisões hádron-hádron podem ser tratadas como uma soma incoerente de interações entre quarks e glúons. Mais especificamente, a seção de choque da QCD  $\sigma_{\text{QCD}}$  é obtida pela convolução das seções de choque  $\hat{\sigma}$  para os subprocessos de QCD com as suas distribuições partônicas associadas. Segue-se do modelo a pártons da QCD que o termo eiconal  $\chi_{\text{sd}}(s, b)$  fatorizado é dado por [50]

$$\text{Re } \chi_{\text{sd}}(s, b) = \frac{1}{2} W_{\text{sd}}(b) \text{Re } \sigma_{\text{QCD}}(s), \quad (3.7)$$

onde  $W_{\text{sd}}(b)$  é uma densidade de recobrimento para os pártons no espaço do parâmetro de impacto  $b$ ,

$$W_{\text{sd}}(b) = \int \rho_A(|\vec{b} - \vec{b}'|) \rho_B(b') d^2b' \quad (3.8)$$

e  $\sigma_{\text{QCD}}(s)$  é a seção de choque usual da QCD, dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{QCD}}(s) &= \sum_{ij} \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_{Q_{\text{min}}^2}^{\infty} \frac{d\hat{\sigma}_{ij}(\hat{s}, \hat{t})}{d|\hat{t}|} d|\hat{t}| \\ &\times f_{i/A}(x_1, |\hat{t}|) f_{j/B}(x_2, |\hat{t}|) \Theta\left(\frac{\hat{s}}{2} - |\hat{t}|\right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

com  $|\hat{t}| \equiv Q^2$  e  $i, j = q, \bar{q}, g$ .

Na expressão (3.9) os limites de integração satisfazem  $x_1 x_2 s > 2|\hat{t}| > 2Q_{\text{min}}^2$ , onde  $Q_{\text{min}}^2$  é o momentum mínimo transferido no espalhamento semiduro,  $|\hat{s}|$  e  $|\hat{t}|$  são as variáveis de Mandelstam dos subsistemas párton-pártion,  $x_1$  e  $x_2$  são as frações de momento dos hádrons constituídos  $A$  e  $B$  carregadas pelos pártions  $i$  e  $j$ . O termo  $d\hat{\sigma}_{ij}/d|\hat{t}|$  é a seção de choque

diferencial do espalhamento  $ij$ ,  $f_{i/A}(x_1, |\hat{t}|)$  e  $f_{j/B}(x_2, |\hat{t}|)$  são respectivamente as funções de distribuição partônicas usuais  $i$  e  $j$  nos hádrons  $A$  e  $B$

A função eiconal é escrita em termos das partes eiconais par e ímpar conectadas pela simetria de cruzamento. No caso dos espalhamentos próton-próton ( $pp$ ) e antipróton-próton ( $\bar{p}p$ ), essa combinação é escrita como

$$\chi_{pp}^{\bar{p}p}(s, b) = \chi^+(s, b) \pm \chi^-(s, b) \quad (3.10)$$

com

$$\chi^+(s, b) = \chi_{\text{suave}}^+(s, b) + \chi_{\text{sd}}^+(s, b) \quad (3.11)$$

e

$$\chi^-(s, b) = \chi_{\text{suave}}^-(s, b) + \chi_{\text{sd}}^-(s, b) \quad (3.12)$$

(estas parametrizações serão melhor discutidas na seção 3.2.2 ). No entanto, no modelo a pártons da QCD,  $\chi_{\text{sd}}^-(s, b)$  decresce com o aumento de  $s$ , uma vez que a diferença entre as seções de choque  $pp$  e  $\bar{p}p$  é devido apenas à diferença de pesagem das seções de choque de aniquilação quark-antiquark (valência) nos dois canais. Portanto a eiconal ímpar do cruzamento não recebe contribuições dos processos semiduros a altas energias. Como um resultado, para nossa proposta, é suficiente pegarmos  $\chi_{\text{sd}}(s, b) = \chi_{\text{sd}}^+(s, b)$  e consequentemente  $\chi^-(s, b) = \chi_{\text{suave}}^-(s, b)$ . A parte imaginária de  $\chi_{\text{sd}}(s, b)$  pode ser obtida através de uma relação de dispersão integral, discutida um pouco mais a frente.

### 3.2.1 Fatores de forma dependentes da energia

Para a densidade de recobrimento, a hipótese mais simples que se assume é que  $W_{\text{sd}}(b)$  e  $W_{\text{suave}}(b)$  são iguais. Porém, essa prescrição não é válida no modelo a pártons da QCD, pois as interações suaves são principalmente relacionadas às interações entre quarks de valência, cujas interações semiduras são dominadas principalmente por glúons. Além disso, existem duas razões relevantes para não considerarmos as densidades de recobrimento iguais, a primeira dela é a ideia de que quarks e glúons se organizam espacialmente de maneira distintas, pois se espera que os glúons estejam distribuídos como uma nuvem em torno dos quarks. A segunda razão é que, diferentemente dos glúons, os quarks possuem carga

elétrica e as distribuições dos quarks de valência pode ser comparada, razoavelmente, com a distribuição de carga do próton. Como uma consequência, uma escolha comum para as densidades de recobrimento  $W_{\text{suave}}^-(b)$  e  $W_{\text{suave}}^+(b)$  vem da aproximação da carga de dipolo para os fatores de forma  $G_A(k_\perp)$  e  $G_B(k_\perp)$  dos hádrons colidentes  $A$  e  $B$ , onde

$$\begin{aligned} W(b) &= \int \rho_A(|\vec{b} - \vec{b}'|) \rho_B(b') d^2b' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(k_\perp) G_A(k_\perp) G_B(k_\perp) k_\perp dk_\perp, \end{aligned} \quad (3.13)$$

com os fatores de forma dados na aproximação de dipolo por

$$G_A(k_\perp) = G_B(k_\perp) \equiv G_{\text{dip}}(k_\perp, \mu) = \left( \frac{\mu^2}{k_\perp^2 + \mu^2} \right)^2, \quad (3.14)$$

e  $\rho(b)$  representando a densidade de pártons, que dá a densidade de probabilidade de encontrar um glúon na área  $d^2b$  de parâmetro de impacto  $b$ . Em termos dos fatores de forma essa densidade é escrita simplificadamente como

$$\rho(b) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int G(k_\perp) e^{i\vec{k}_\perp \cdot \vec{b}} d^2k_\perp. \quad (3.15)$$

Sendo assim, usando o fator de forma de dipolo  $G_{\text{dip}}(k_\perp, \mu)$ , obtemos a densidade de recobrimento suave

$$\begin{aligned} W_{\text{suave}}^+(b; \mu_{\text{suave}}^+) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(k_\perp) G_{\text{dip}}^2(k_\perp) k_\perp dk_\perp \\ &= \frac{(\mu_{\text{suave}}^+)^2}{96\pi} (\mu_{\text{suave}}^+ b)^3 K_3(\mu_{\text{suave}}^+ b), \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde  $K_3(x)$  é a função modificada de Bessel de 2ª espécie e  $\mu_{\text{suave}}^+$  é um parâmetro livre ajustável que contribui para a distribuição de matéria (quarks) dentro do hádron. A função  $W(b, \mu)$  é normalizada para  $\int A(b) d^2b = 1$ . Da mesma forma, a densidade suave ímpar é escrita como

$$W_{\text{suave}}^-(b; \mu_{\text{suave}}^-) = \frac{(\mu_{\text{suave}}^-)^2}{96\pi} (\mu_{\text{suave}}^- b)^3 K_3(\mu_{\text{suave}}^- b), \quad (3.17)$$

onde  $\mu_{\text{suave}}^- \equiv 0.5 \text{ GeV}$  (valor fixado para a eiconal ímpar levando em conta apenas a diferença entre os canais  $pp$  e  $\bar{p}p$  a baixas energias).

Em relação aos glúons semiduros, que dominam a altas energias, consideramos a possibilidade de uma ampliação da distribuição espacial. Nossa hipótese é de que ocorre um aumento do raio médio da distribuição em função do crescimento da energia total no centro de massa  $\sqrt{s}$ . A consequência mais importante dessa hipótese, está no fato de fornecer uma excelente descrição dos dados de  $\sigma_{\text{tot}}^{pp, \bar{p}p}(s)$  e  $\rho^{pp, \bar{p}p}(s)$ , como será mostrado na próxima seção, sugerindo fortemente uma dependência com a energia para a densidade de recobrimento semidura. Nossa hipótese pode ser propriamente implementada usando dois ansatz para os fatores de forma dependentes da energia, chamados monopolo e dipolo dados respectivamente por

$$G_{\text{sd}}^{(m)}(s, k_{\perp}; \nu_{\text{sd}}) = \frac{\nu_{\text{sd}}^2(s)}{k_{\perp}^2 + \nu_{\text{sd}}^2(s)}, \quad (3.18)$$

e

$$G_{\text{sd}}^{(d)}(s, k_{\perp}; \nu_{\text{sd}}) = \left( \frac{\nu_{\text{sd}}^2(s)}{k_{\perp}^2 + \nu_{\text{sd}}^2(s)} \right)^2, \quad (3.19)$$

onde  $\nu_{\text{sd}}(s) \equiv \nu_1 - \nu_2 \ln(s/s_0)$ , com  $s_0 \equiv 5 \text{ GeV}$ . Os fatores  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são constantes de ajuste. Semelhantemente ao caso (3.16) as densidades de recobrimento de monopolo e dipolo são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} W_{\text{sd}}^{(m)}(s, b; \nu_{\text{sd}}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(k_{\perp} b) [G_{\text{sd}}^{(m)}(s, k_{\perp}; \nu_{\text{sd}})]^2 k_{\perp} dk_{\perp} \\ &= \frac{\nu_{\text{sd}}^2}{4\pi} (\nu_{\text{sd}} b) K_1(\nu_{\text{sd}} b), \end{aligned} \quad (3.20)$$

e

$$W_{\text{sd}}^{(d)}(s, b; \nu_{\text{sd}}) = \frac{\nu_{\text{sd}}^2}{96\pi} (\nu_{\text{sd}} b)^3 K_3(\nu_{\text{sd}} b), \quad (3.21)$$

onde  $K_1(x)$  é uma função de Bessel Modificada de 2<sup>a</sup> espécie.

Podemos notar que, como mencionado anteriormente, as interações semiduras dominam a altas energias. Assim, consideramos uma dependência da distribuição espacial com a energia apenas para  $W_{\text{sd}}(s, b)$ . Dessa forma, as densidades suaves de recobrimento  $W_{\text{suave}}^-(b)$  e

$W_{\text{suave}}^+(b)$  emergirão apenas da estatística do fator de forma do dipolo, isto é, das equações (3.16) e (3.17), enquanto que a densidade semidura de recobrimento  $W_{\text{sd}}(s, b)$  serão diretamente associadas às equações (3.20) e (3.21).

### 3.2.2 Relações de dispersão integrais e a eiconal a altas energias

A analiticidade da amplitude de espalhamento  $f(s, t)$  leva às relações de dispersão com a condição de simetria de troca. Usando a relação de dispersão (A.45), obtida no apêndice A (aqui não usamos constante de subtração por considerar que a amplitude de espalhamento já tem um bom comportamento assintótico)

$$\text{Im}f(x_0) = -\frac{2x_0}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re}f(x)}{x^2 - x_0^2} dx,$$

onde  $P$  indica o valor principal de Cauchy. Fazendo as mudanças de variáveis  $x_0 \rightarrow s$  e  $x \rightarrow s'$ , obtemos

$$\text{Im}f(s, b) = -\frac{2s}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re}f(s', b)}{s'^2 - s^2} ds'. \quad (3.22)$$

No nosso modelo, as eiconais são escritas em termos das partes eiconais pares e ímpares, conectadas pela simetria de cruzamento, denominadas  $\chi_{pp}^{\bar{p}p} = \chi^+ \pm \chi^-$ , onde  $\chi^+$  e  $\chi^-$  são funções reais e analíticas de  $s$ , ou seja, elas assumem valores reais sobre o seguimento do eixo real, com a mesma estrutura de corte de  $f^+$  e  $f^-$ , respectivamente. Dessa forma, encontramos que a eiconal par satisfaz a relação de dispersão (3.22)

$$\text{Im} \chi^+(s, b) = -\frac{2s}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re} \chi^+(s', b)}{s'^2 - s^2} ds'. \quad (3.23)$$

Escrevendo o valor principal de Cauchy (ver apêndice A) e integrando por partes,

$$\begin{aligned}
 \text{Im } \chi^+(s, b) &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ s'' \rightarrow \infty}} -\frac{2s}{\pi} \left[ \int_0^{s-\epsilon} \frac{\text{Re } \chi^+(s', b)}{s'^2 - s^2} ds' + \int_{s+\epsilon}^{s''} \frac{\text{Re } \chi^+(s', b)}{s'^2 - s^2} ds' \right] \\
 &= \lim_{s'' \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left[ \text{Re } \chi^+(s'', b) \ln \left( \frac{s'' + s}{s'' - s} \right) - \int_0^\infty \ln \left( \frac{s' + s}{|s' - s|} \right) \frac{d \text{Re } \chi^+(s', b)}{ds'} ds' \right] \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \ln \left( \frac{s' + s}{|s' - s|} \right) \frac{d \text{Re } \chi^+(s', b)}{ds'} ds', \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

sendo  $\epsilon$  o raio do pequeno contorno tomado a fim de evitar a singularidade da integral de Cauchy. Podemos observar que o primeiro termo desaparece no limite  $s'' \rightarrow \infty$ . Aplicando essa relação para  $\text{Re } \chi_{\text{sd}}(s, b) = \text{Re } \chi_{\text{sd}}^+(s, b) = \frac{1}{2} W_{\text{sd}}(s, b) \sigma_{\text{QCD}}(s)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \text{Im } \chi_{\text{sd}}(s, b) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \ln \left( \frac{s' + s}{|s' - s|} \right) \left[ \sigma_{\text{QCD}}(s') \frac{dW_{\text{sd}}(s', b)}{ds'} \right] ds' \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty ds' \ln \left( \frac{s' + s}{|s' - s|} \right) \left[ W_{\text{sd}}(s', b) \frac{d\sigma_{\text{QCD}}(s')}{ds'} \right] ds'. \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

Considerando a primeira integral, a densidade de recobrimento  $W_{\text{sd}}(s, b)$  pode apresentar um fator de forma tipo monopolo (3.20) ou um tipo dipolo (3.21). No caso de um fator de forma tipo monopolo, a integral pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 I_1^{(m)}(s, b) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \ln \left( \frac{s' + s}{|s' - s|} \right) \sigma_{\text{QCD}}(s') \frac{dW_{\text{sd}}^{(m)}(s', b; \nu_{\text{sd}})}{ds'} ds' \\
 &= -\frac{b}{8\pi^2} \sum_{ij} \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \int_0^\infty \ln \left( \frac{s' + s}{|s' - s|} \right) \frac{ds'}{s'} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_{Q_{\text{min}}^2}^\infty \frac{d\hat{\sigma}_{ij}(\hat{s}', \hat{t})}{d|\hat{t}|} d|\hat{t}| \\
 &\quad \times f_{i/A}(x_1, |\hat{t}|) f_{j/B}(x_2, |\hat{t}|) [b\nu_2 \nu_{\text{sd}}^3 K_0(\nu_{\text{sd}} b) - 2\nu_2 \nu_{\text{sd}}^2 K_1(\nu_{\text{sd}} b)] \Theta \left( \frac{\hat{s}'}{2} - |\hat{t}| \right);
 \end{aligned}$$

no caso de um dipolo, temos

$$\begin{aligned}
 I_1^{(d)}(s, b) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \ln \left( \frac{s' + s}{|s' - s|} \right) \sigma_{\text{QCD}}(s') \frac{dW_{\text{sd}}^{(d)}(s', b; \nu_{\text{sd}})}{ds'} ds' \\
 &= -\frac{b^3}{192\pi^2} \sum_{ij} \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \int_0^\infty \ln \left( \frac{s' + s}{|s' - s|} \right) \frac{ds'}{s'} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_{Q_{\text{min}}^2}^\infty \frac{d\hat{\sigma}_{ij}(s', \hat{t})}{d|\hat{t}|} \\
 &\quad \times f_{i/A}(x_1, |\hat{t}|) f_{j/B}(x_2, |\hat{t}|) [b \nu_2 \nu_{\text{sd}}^5 K_2(\nu_{\text{sd}} b) - 2\nu_2 \nu_{\text{sd}}^4 K_3(\nu_{\text{sd}} b)] \Theta \left( \frac{s'}{2} - |\hat{t}| \right).
 \end{aligned}$$

A segunda integral envolve a derivada da seção de choque  $\sigma_{\text{QCD}}(s')$  dada por (3.9). Nesse ponto, devemos notar que a dependência de  $s'$  nos termos  $d\hat{\sigma}_{ij}/d|\hat{t}|$  pode ser ignorada, uma vez que suas derivadas são da ordem de  $1/s'^2$ . Dessa forma, a única dependência com a energia aparece na função de Heaviside [53], em que

$$\frac{d}{ds'} \Theta \left( \frac{s'}{2} - |\hat{t}| \right) = \frac{d}{ds'} \Theta \left( s' - \frac{2|\hat{t}|}{x_1 x_2} \right) = \delta \left( s' - \frac{2|\hat{t}|}{x_1 x_2} \right). \quad (3.26)$$

A função delta remove a integração sobre  $ds'$ ; assim, a segunda integral de (3.25) pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
 I_2(s, b) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \ln \left( \frac{s' + s}{|s' - s|} \right) W_{\text{sd}}(s', b) \frac{d\sigma_{\text{QCD}}(s')}{ds'} ds' \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{ij} \frac{1}{1 + \delta_{ij}} W_{\text{sd}} \left( \frac{2|\hat{t}|}{x_1 x_2}, b \right) \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_{Q_{\text{min}}^2}^\infty \frac{d\hat{\sigma}_{ij}(\hat{s}, \hat{t})}{d|\hat{t}|} \\
 &\quad \times f_{i/A}(x_1, |\hat{t}|) f_{j/B}(x_2, |\hat{t}|) \ln \left( \frac{\hat{s}/2 + |\hat{t}|}{\hat{s}/2 - |\hat{t}|} \right). \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Uma vez que a principal contribuição para o comportamento assintótico da seção de choque total hádron-hádron vem das colisões semiduras párton-párton, a eiconal suave é importante apenas para descrever os dados frontais a baixas energias. Sendo assim, é suficiente construirmos uma parametrização para a eiconal suave contendo termos ditados pela teoria de Regge [56]. Para a parte par da eiconal suave, temos portanto

$$\chi_{\text{suave}}^+(s, b) = \frac{1}{2} W_{\text{suave}}^+(b; \mu_{\text{suave}}^+) \left[ A' + \frac{B'}{(s/s_0)^\gamma} e^{i\pi\gamma/2} - iC' \left[ \ln \left( \frac{s}{s_0} \right) - i\frac{\pi}{2} \right] \right], \quad (3.28)$$

onde  $\sqrt{s_0} \equiv 5$  GeV e  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $\gamma$  e  $\mu_{\text{suave}}^+$  são parâmetros de ajuste. Particularmente, o fator em (3.28) proporcional a  $C'$  corresponde à um termo ditado pela teoria de Regge para pequeno  $t$ . O fator de fase  $e^{i\pi\gamma/2}$ , que insere em (3.28) as propriedades analiticamente corretas da amplitude de espalhamento, é um resultado da relação de dispersão integral (3.23).

A eiconal ímpar  $\chi^-(s, b)$ , que contribui para a diferença entre os canais  $pp$  e  $\bar{p}p$  e some a altas energias, é dada por

$$\chi^-(s, b) = \frac{1}{2} W_{\text{suave}}^-(b; \mu_{\text{suave}}^-) D' \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{s/s_0}}, \quad (3.29)$$

onde  $D'$ , que corresponde a intensidade da eiconal ímpar, também é um parâmetro de ajuste. A expressão (3.29) está escrita com suas propriedades analíticas corretas, uma vez que o fator de fase  $e^{-i\pi/4}$  é um resultado da relação de dispersão (válida para  $s \gg m$ )

$$\text{Im } \chi^-(s, b) = -\frac{2s^2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re } \chi^-(s', b)}{s'^2 - s^2} ds'. \quad (3.30)$$

### 3.3 Escala de massa infravermelha e o papel dos glúons

O cálculo da seção de choque da QCD  $\sigma_{\text{QCD}}(s)$  implica a soma sobre todos os possíveis tipos de pártons, mas é suficientemente preciso para nossa proposta a fixação do número de sabores  $n_s = 4$  e permanecendo apenas o glúon  $g$  e os quarks  $u, d, s$  e  $c$ . De fato  $\text{Re } \chi_{\text{sd}}(s, b)$  e  $\text{Im } \chi_{\text{sd}}(s, b)$  podem ser determinadas levando em conta todos os quarks pesados, onde cada quark pesado  $h = c, b, t$  com massa  $M_h$ , é efetivamente desacoplado das seções de choque físicas em escalas de momenta abaixo do limiar  $Q_h = M_h$ , com  $n_s$  sendo uma função crescente de  $Q_h$ . No entanto nossos resultados numéricos mostram que as contribuições dos quarks  $b$  e  $t$  a  $\chi_{\text{sd}}(s, b)$  são muito pequenas. De fato, a própria contribuição do *charm* é

minúscula, e foi incluída apenas por motivo de alta precisão. Sendo assim, o papel dos quarks pesados ( $m_q \approx M_h$ ,  $h = c, b, t$ ) não é fundamental em nossas análises. Essa pode ser melhor compreendida da seguinte forma: quarks pesados são produzidos (perturbativamente) do desdobramento de glúons em pares  $\bar{h}h$  a energias acima do limiar  $Q_h = M_h$ . Para  $x$  suficientemente pequeno, a razão da função de distribuição partônica do quark pesado,  $h(x, Q^2)$ , pela do glúon,  $g(x, Q^2)$  é [57]

$$\frac{h(x, Q^2)}{g(x, Q^2)} \sim \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \ln \left( \frac{Q^2}{M_h^2} \right). \quad (3.31)$$

No limiar  $Q = M_h$ , teremos  $h(x, Q^2) = 0$ . Além disso, as dependências angulares dos subprocessos dominantes em (3.9) são muito semelhantes e são todas dominadas por distribuições angulares no canal-t; como consequência, as seções de choque diferenciais párton-párton variam basicamente como  $d\hat{\sigma}_{ij}/d|\hat{t}| \sim 1/Q^4$ . Portanto, os efeitos das funções de distribuição bem como das correntes de massa de quarks pesados sobre  $\sigma_{\text{QCD}}(s)$  podem ser absolutamente desconsiderados.

A fim de obtermos  $\chi_{\text{sd}}(s)$  selecionamos os processos de espalhamento párton-párton contendo pelo menos um glúon no estado inicial. A razão para essa escolha vem do comportamento do desdobramento partônico dado pelas equações de evolução DGLAP a ordem dominante [38], em que as funções de desdobramento do glúon  $P_{gq} \rightarrow \frac{4}{3z}$  e  $P_{gg} \rightarrow \frac{6}{z}$  são singulares para  $z \rightarrow 0$ . Como resultado, a distribuição de glúons torna-se muito grande para  $x \rightarrow 0$ , e seu papel na evolução das distribuições de pártons torna-se central. Mais especificamente, selecionamos os seguintes processos no cálculo de  $\chi_{\text{sd}}(s)$ :  $gg \rightarrow gg$  (espalhamento glúon-glúon),  $qg \rightarrow qg$  e  $\bar{q}g \rightarrow \bar{q}g$  (espalhamento quark-glúon) e  $gg \rightarrow \bar{q}q$  (fusão de glúons em um par de quarks). Os processos de espalhamento glúon-glúon e quark-glúon de fato dominam a altas energias. Por exemplo, para  $\sqrt{s} = 7$  TeV e com  $Q_{\text{min}} = 1.3$  GeV, suas contribuições relativas à seção de choque  $\sigma_{\text{QCD}}(s)$  é em torno de 98,84% para o conjunto de distribuições partônicas CTEQ6 e 98,66% para o conjunto de distribuições partônicas MSTW. A contribuição relativa ao processo  $gg \rightarrow \bar{q}q$  é minúscula. No entanto ela foi incluída nos nossos cálculos apenas por complemento.

Esses processos elementares são afetados por divergências infravermelhas, que devem ser regularizadas por meio de algum procedimento de corte. Um regulador natural para essas divergências foi introduzido algum tempo atrás [58], e tem sido um importante ingrediente

de nossos modelos eiconais [29, 51]. Ele é baseado na crescente evidência de que a QCD desenvolve uma massa efetiva, dependente de momentum, para os glúons, preservando a invariância local  $SU(3)_c$  da teoria. Essa massa dinâmica  $M_g(Q^2)$  introduz uma escala natural que, a princípio, apresenta um limiar para o surgimento de glúons a partir do vácuo [59]. Portanto, isto está intrinsecamente ligado a uma carga efetiva infravermelha finita da QCD  $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ . Essas duas quantidades não-perturbativas são de fato nossos reguladores naturais para o nosso modelo eiconal.

Visto que a geração de massa do glúon é um efeito puramente dinâmico, a ferramenta formal para tratar esse fenômeno não-perturbativo, no contínuo, são as equações de Schwinger-Dyson [60]. Essas equações constituem uma torre infinita de equações integrais não-lineares acopladas, que governam a dinâmica de todas as funções de Green da QCD. As formas funcionais de  $M_g$  e  $\bar{\alpha}_s$ , obtidas por Cornwall através do uso da técnica de pinch a fim de derivar uma equação de Schwinger-Dyson invariante de calibre para o propagador do glúon e o vértice triplo de glúons são dadas respectivamente por [58]

$$\bar{\alpha}_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln [(Q^2 + 4M_g^2(Q^2))/\Lambda^2]}, \quad (3.32)$$

$$M_g^2(Q^2) = m_g^2 \left[ \frac{\ln \left( \frac{Q^2 + 4m_g^2}{\Lambda^2} \right)}{\ln \left( \frac{4m_g^2}{\Lambda^2} \right)} \right]^{-12/11}, \quad (3.33)$$

onde  $\Lambda (\equiv \Lambda_{\text{QCD}})$  é o parâmetro de escala da QCD,  $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_s$ , e  $m_g$  é uma escala de massa infravermelha a ser ajustada a fim de oferecer resultados confiáveis referentes ao cálculo de processos fortemente interagentes. Como mencionado na seção anterior, a existência da escala de massa do glúon  $m_g$  é fortemente baseada pelas simulações de QCD na rede, e seus valores são tipicamente fundamentados para serem da ordem de  $m_g = 500 \pm 200$  MeV.

Podemos notar que no limite  $Q^2 \gg \Lambda^2$  a massa dinâmica desaparece, e a carga efetiva iguala-se ao acoplamento da QCD na ordem perturbativa de um *loop*  $\alpha_s^{\text{PQCD}}(Q^2)$ . Isto significa que o comportamento assintótico ultravioleta da constante de acoplamento em LO, obtida da teoria de perturbação via equação do grupo de renormalização, é reproduzido nas soluções das equações de Schwinger-Dyson,

$$\bar{\alpha}_s(Q^2 \gg \Lambda^2) \sim \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)} = \alpha_s^{\text{PQCD}}(Q^2), \quad (3.34)$$

com a condição apenas de que os métodos de truncagem aplicados na análise preservam a renormalizabilidade multiplicativa [29]. Assim, na região infravermelha, o acoplamento  $\alpha_s^{\text{pQCD}}(Q^2)$  apresenta uma singularidade tipo polo de Landau sobre semi-eixo tipo espaço  $0 \leq Q^2 \leq \Lambda^2$ , ou seja, ele tem um comportamento singular para pequeno  $Q^2$ . Esse problema foi tratado nos últimos anos com as versões analíticas da QCD, cujo acoplamento  $\alpha_s(Q^2)$  é holomórfico no plano complexo, exceto no semi-eixo tipo tempo ( $Q^2 < 0$ ) [61]. Por outro lado, a carga efetiva  $\bar{\alpha}_s(Q^2)$  do nosso modelo mostra a existência de um ponto fixo infravermelho para  $Q^2 \rightarrow 0$ , ou seja, o termo de massa dinâmica tende ao pólo de Landau e  $\bar{\alpha}_s$  congela em um valor finito no limite infravermelho. Dessa forma, considerando que a escala de massa de glúons é maior que metade do parâmetro de escala da QCD,  $m_g/\Lambda > 1/2$ , a analiticidade de  $\bar{\alpha}_s(Q^2)$  é preservada. Essa razão é também determinada fenomenologicamente [29, 51, 55] e tipicamente se estende no intervalo  $m_g/\Lambda \in [1.1, 2]$ . Porém, como apontado recentemente por Cvetič [62], a evolução de quantidades tipo espaço independente da escala de renormalização em baixo  $Q^2$ , em termos do acoplamento congelado infravermelho, pode realizada como uma série truncada em derivadas do acoplamento com relação ao logaritmo de  $Q^2$ .

Levando em conta o mecanismo de geração de massa dinâmica na QCD, as seções de choque párton-pártion necessárias para o cálculo de  $\sigma_{\text{QCD}}(s)$  são reescritas como

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(gg \rightarrow gg) = \frac{9\pi\bar{\alpha}_s^2}{2\hat{s}^2} \left( 3 - \frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}^2} - \frac{\hat{s}\hat{u}}{\hat{t}^2} - \frac{\hat{t}\hat{s}}{\hat{u}^2} \right), \quad (3.35)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(qg \rightarrow qg) = \frac{\pi\bar{\alpha}_s^2}{\hat{s}^2} (\hat{s}^2 + \hat{u}^2) \left( \frac{1}{\hat{t}^2} - \frac{4}{9\hat{s}\hat{u}} \right), \quad (3.36)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(gg \rightarrow \bar{q}q) = \frac{3\pi\bar{\alpha}_s^2}{8\hat{s}^2} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) \left( \frac{4}{9\hat{t}\hat{u}} - \frac{1}{\hat{s}^2} \right). \quad (3.37)$$

e no limite de  $Q^2$  grande o suficiente, as expressões (3.35), (3.36) e (3.37) reproduzem os contratermos da QCD perturbativa. Nas expressões acima as restrições cinemáticas em consideração, são dadas por  $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 4M_g^2(Q^2)$  no caso do espalhamento e  $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 2M_g^2(Q^2) + 2M_q^2(Q^2)$  nos casos do quark-glúon e da fusão de glúons em um par de quarks. Aqui introduzimos a massa dinâmica do quark  $M_q(Q^2)$ , dada pela expansão em produto de

operadores (*Operator Product Expansion* (OPE)) [14, 63, 64, 65]:

$$M_q(Q^2) = \frac{m_q^3}{Q^2 + m_q^2}, \quad (3.38)$$

onde  $m_q$  é também uma escala de massa infravermelha a ser ajustada. Podemos notar que a massa efetiva para os quarks é uma soma da massa dinâmica com  $Q^2$ . Porém, como foi dito anteriormente, apenas as contribuições dos quarks leves são relevantes no cálculo da seção de choque  $\sigma_{\text{QCD}}$ , e como um resultado, o comportamento da massa efetiva é dominado pela parte dinâmica. A expressão (3.38), que decresce rapidamente com o crescimento de  $Q$ , é o Ansatz simples para uma massa dinâmica de quark de acordo com a expansão em produto de operadores. Conforme o OPE, a massa dinâmica é uma função do condensado de quarks

$$M_q(P^2) \propto \frac{\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle}{P^2}, \quad (3.39)$$

onde  $P^2 = -p^2$  é o momentum no espaço Euclidiano. A escala de massa  $m_q$  pode ser relacionada ao condensado  $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$  por considerações dimensionais, ou seja,  $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle \propto m_q^3$  e os limites gerais são satisfeitos para  $m_q \in [100, 250]$  MeV. O comportamento em pequena ordem de potência de  $M_q(Q^2)$  é obtido pela introdução do fator  $m_q^2$  no denominador de (3.38) a fim de obtermos o limite infravermelho  $M_q^2(Q^2 \rightarrow 0) = m_q^2$ .

## 3.4 Resultados

Para determinarmos os parâmetros do modelo, fixamos  $n_s = 4$  e definimos as escalas de massa dos quarks e glúons para  $m_q = 250$  MeV e  $m_g = 400$  MeV respectivamente. As escolhas de escala de massa são consistentes para nossos procedimentos apenas para ordem dominante (*Leading Order* (LO)), mas também são usuais para cálculos de processos fortemente interagente [15, 16, 29, 51]. Em seguida realizamos um ajuste global para os dados de espalhamento frontal a altas energias  $pp$  e  $\bar{p}p$  acima de  $\sqrt{s} = 10$  GeV, definindo as seções de choque total  $\sigma_{\text{tot}}^{pp, \bar{p}p}$  e a razão da parte real pela parte imaginária da amplitude de espalhamento frontal  $\rho^{pp, \bar{p}p}$ . Usamos os dados compilados e analisados pelo Particle Data Group [19] bem como os dados recentes do LHC através da colaboração TOTEM, com a estatística e análise de somas de erros em quadratura. O conjunto de dados TOTEM incluem a primeira e a segunda medidas da seção de choque total  $pp$  para  $\sqrt{s} = 7$  TeV,  $\sigma_{\text{tot}}^{pp} = 98.3 \pm 2.8$  [20] e  $\sigma_{\text{tot}}^{pp} = 98.58 \pm 2.23$  [21], ambas usando o teorema óptico e a

luminosidade fornecida pelo CMS [66], a medida independente da luminosidade para  $\sqrt{s} = 7$  TeV,  $\sigma_{\text{tot}}^{pp} = 98.3 \pm 2.5$  [22], a medida de  $\rho$  independente para  $\sqrt{s} = 7$  TeV,  $\sigma_{\text{tot}}^{pp} = 99.1 \pm 4.3$  [22], e a medida independente da luminosidade para  $\sqrt{s} = 8$  TeV,  $\sigma_{\text{tot}}^{pp} = 101.7 \pm 2.9$  [23]. Incluímos no conjunto de dados o valor do parâmetro  $\rho$  adotado pela colaboração TOTEM em sua medida independente da luminosidade para  $\sqrt{s} = 7$  TeV, a saber  $\rho^{pp} = 0.145 \pm 0.091$  [22].

Em todos os ajustes feitos nesse trabalho usamos um procedimento de análise em  $\chi^2$ , assumindo um intervalo  $\chi^2 - \chi_{\text{min}}^2$ , correspondendo, no caso de erros normais, à da hiper-superfície  $\chi^2$  contendo 90% de probabilidade. Em nosso modelo (com oito parâmetros de ajuste) isso corresponde ao intervalo  $\chi^2 - \chi_{\text{min}}^2 = 13.36$ .

Em nossas análises investigamos os efeitos de alguns dados atualizados de distribuições partônicas sobre as seções de choque a altas energias. Na construção dos nossos ajustes usamos as fórmulas a nível de árvore para as seções de choque párton-párton. Dessa forma escolhemos as funções de distribuição partônicas convoluídas com as funções de desdobramento LO, como no caso dos dados a LO CTEQL, CTEQL1 e MSTW. Para o acoplamento  $\alpha_s(Q^2)$  pode-se de qualquer uma das fórmulas (LO ou NLO), ambas são formalmente consistentes. No caso específico das distribuições CTEQ [67], a CTEQ6L1 usa a expressão LO para  $\alpha_s(Q^2)$  com  $\Lambda_{\text{CTEQ6L1}}^{(4\text{sabores})} = 215$  MeV, para a CTEQ6L usamos a fórmula NLO para  $\alpha_s(Q^2)$  com  $\alpha_s(M_z) = 0.118$ , consistente com o valor  $\Lambda_{\text{CTEQ6L}}^{(4\text{sabores})} = 326$  MeV. Como a massa dinâmica  $M_g(Q^2)$  tende praticamente a zero para escalas onde quatro sabores de quarks estão ativos, escolhemos os mesmos valores de  $\Lambda^{(4\text{sabores})}$  em nossas cargas efetivas  $\bar{\alpha}_s^{\text{LO}}(Q^2)$  e  $\bar{\alpha}_s^{\text{NLO}}(Q^2)$ . No caso da fórmula em LO, o acoplamento  $\bar{\alpha}_s^{\text{LO}}$  é dado por (3.32), enquanto que  $\bar{\alpha}_s^{\text{NLO}}(Q^2)$  é dada por [29]

$$\bar{\alpha}_s^{\text{NLO}}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{Q^2 + 4M_g^2(Q^2)}{\lambda^2}\right)} \left[ 1 - \frac{\beta_1 \ln\left(\ln\left(\frac{Q^2 + 4M_g^2(Q^2)}{\Lambda^2}\right)\right)}{\beta_0^2 \ln\left(\frac{Q^2 + 4M_g^2(Q^2)}{\Lambda^2}\right)} \right], \quad (3.40)$$

sendo os valores  $\beta_1 = 102 - \frac{38}{3}n_f$  e  $\Lambda = \Lambda_{\text{CTEQ6L}}^{(4\text{sabores})}$ . Esse acoplamento NLO não-perturbativo é construído pelo desenvolvimento da constante de acoplamento forte  $\alpha_s^{\text{NLO}}$  até segunda ordem de perturbação, isto é feito introduzindo a substituição  $\alpha_s^{\text{NLO}}(Q^2) \rightarrow \bar{\alpha}_s^{\text{NLO}}(Q^2) = \alpha_s^{\text{NLO}}(Q^2)(Q^2 + 4M_g^2)$  no resultado perturbativo.

Na expressão (3.40) observamos que, semelhante ao caso  $\bar{\alpha}_s^{\text{LO}}(Q^2)$ , o comportamento da carga efetiva  $\bar{\alpha}_s^{\text{NLO}}(Q^2)$  é controlada pela massa dinâmica  $M_g^2(Q^2)$ , dada por (3.33). Os

resultados da referência [29] dão suporte para a afirmação de que a escala de massa dinâmica  $m_g$  não é fortemente dependente com a ordem de perturbação.

As funções de distribuição MSTW apresentam uma definição alternativa de  $\alpha_s$ , onde a equação do grupo de renormalização para  $\alpha_s$  é truncada em uma ordem apropriada e solucionada a partir de um valor inicial  $\alpha_s(Q_0^2)$ . Esse valor imposto é um dos parâmetros de ajuste e substitui o parâmetro  $\Lambda$  [68]. No esquema de prescrição usual o comportamento de  $\alpha_{s_{\text{MSTW}}}(Q^2)$  pode ser propriamente reproduzido da escolha  $\Lambda_{\text{MSTW}}^{(4\text{sabores})} \sim 319$  MeV.

Os valores dos parâmetros de ajuste são apresentados nas tabelas 1 e 2. Na tabela 1 observamos os valores dos parâmetros no caso de um fator de forma do tipo monopolo, no setor semiduro. Na tabela 2 apresentam-se os valores dos parâmetros para o caso de um fator de forma tipo dipolo, também no setor semiduro. O valor de  $\chi^2/\text{gl}$  para todos os ajustes foi obtido para 154 graus de liberdade. A sensibilidade de  $\chi^2/\text{gl}$  para o corte  $Q_{\text{min}}$  é mostrado em Fig. 1.

Observamos que  $\chi^2/\text{gl}$  não é muito sensível para  $Q_{\text{min}}$  no intervalo [1.0, 1.5] GeV para todas as PDF's consideradas. Os resultados dos ajustes para  $\sigma_{\text{tot}}$  e o parâmetro  $\rho$  para ambos os canais  $pp$  e  $\bar{p}p$  são apresentados nas figuras 2, 3, 4 e 5 juntamente com os dados experimentais. Na figura 6 mostramos as previsões teóricas para as seções de choque  $pp$  para energias de raios cósmicos; a comparação das curvas com os dados experimentais do AUGER para  $\sqrt{s} = 57$  TeV [69] e do Telescope Array (TA) para  $\sqrt{s} = 95$  TeV [70], mostra uma boa concordância.

As curvas plotadas nas figuras 2-6 foram todas calculadas usando o corte  $Q_{\text{min}} = 1.3$  GeV, o valor da distribuição CTEQ6 fixado na escala inicial  $Q_0$ . Assim, no caso de ajustes usando a distribuição CTEQ6, coloca-se PDF's para  $Q = Q_0 = 1.3$  GeV, usando nos cálculos com  $Q_{\text{min}} < Q_0$ . No caso da MSTW adota-se um valor ligeiramente menor  $Q_0 \equiv 1$  GeV, e a condição  $Q_{\text{min}} \geq Q_0$  é sempre satisfeita em nossa análise. Na tabela 3 mostramos as previsões teóricas para as quantidades de espalhamento frontal  $\sigma_{\text{tot}}^{pp, \bar{p}p}$  e  $\rho^{pp, \bar{p}p}$  usando diferentes conjuntos de distribuições partônicas.

	CTEQ6L	CTEQ6L1	MSTW
$\nu_1$ [GeV]	$1.712 \pm 0.54$	$1.980 \pm 0.75$	$1.524 \pm 0.77$
$\nu_2$ [GeV]	$(3.376 \pm 1.31) \times 10^{-2}$	$(5.151 \pm 1.63) \times 10^{-2}$	$(9.536 \pm 8.69) \times 10^{-3}$
$A'$ [GeV $^{-1}$ ]	$125.3 \pm 14.7$	$107.3 \pm 9.0$	$107.2 \pm 13.6$
$B'$ [GeV $^{-1}$ ]	$42.96 \pm 24.91$	$28.73 \pm 14.78$	$30.54 \pm 16.20$
$C'$ [GeV $^{-1}$ ]	$1.982 \pm 0.68$	$1.217 \pm 0.40$	$1.186 \pm 0.47$
$\gamma$	$0.757 \pm 0.19$	$0.698 \pm 0.21$	$0.644 \pm 0.25$
$\mu_{soft}^+$ [GeV]	$0.777 \pm 0.18$	$0.407 \pm 0.27$	$0.475 \pm 0.300$
$D'$ [GeV $^{-1}$ ]	$23.78 \pm 1.97$	$21.37 \pm 2.67$	$21.92 \pm 2.83$
$\chi^2/\text{gl}$	1.060	1.063	1.049

Tab. 3.1: Valores dos parâmetros de ajuste global do modelo para os dados de espalhamento  $pp$  e  $\bar{p}p$ , para o caso do fator de forma de monopolo.

	CTEQ6L	CTEQ6L1	MSTW
$\nu_1$ [GeV]	$2.355 \pm 0.62$	$2.770 \pm 0.87$	$2.267 \pm 0.85$
$\nu_2$ [GeV]	$(5.110 \pm 4.20) \times 10^{-2}$	$(7.860 \pm 5.44) \times 10^{-2}$	$(3.106 \pm 2.92) \times 10^{-2}$
$A'$ [GeV $^{-1}$ ]	$128.9 \pm 13.9$	$108.9 \pm 8.6$	$108.5 \pm 11.5$
$B'$ [GeV $^{-1}$ ]	$46.73 \pm 26.13$	$30.19 \pm 15.78$	$31.63 \pm 16.16$
$C'$ [GeV $^{-1}$ ]	$2.103 \pm 0.67$	$1.260 \pm 0.44$	$1.230 \pm 0.47$
$\gamma$	$0.780 \pm 0.17$	$0.719 \pm 0.20$	$0.660 \pm 0.23$
$\mu_{\text{suave}}^+$ [GeV]	$0.821 \pm 0.15$	$0.457 \pm 0.21$	$0.506 \pm 0.24$
$D'$ [GeV $^{-1}$ ]	$23.96 \pm 1.92$	$21.73 \pm 2.26$	$22.14 \pm 2.38$
$\chi^2/\text{gl}$	1.064	1.062	1.047

Tab. 3.2: Valores dos parâmetros de ajuste global do modelo para os dados de espalhamento  $pp$  e  $\bar{p}p$ , para o caso do fator de forma de dipolo.

	$\sqrt{s}$ [TeV]	$\sigma_{tot}$ [mb]		$\rho$	
		monopolo	dipolo	monopolo	dipolo
CTEQ6L	8.0	$100.9^{+8.6}_{-7.3}$	$101.0^{+8.6}_{-7.3}$	$0.115^{+0.009}_{-0.008}$	$0.106^{+0.009}_{-0.007}$
	13.0	$111.5^{+9.7}_{-8.4}$	$111.7^{+9.7}_{-8.4}$	$0.110^{+0.010}_{-0.008}$	$0.101^{+0.009}_{-0.008}$
	14.0	$113.2^{+9.9}_{-8.6}$	$113.5^{+9.9}_{-8.6}$	$0.110^{+0.010}_{-0.008}$	$0.100^{+0.009}_{-0.008}$
	57.0	$152.5^{+15.4}_{-14.7}$	$154.1^{+15.6}_{-14.9}$	$0.097^{+0.010}_{-0.010}$	$0.088^{+0.009}_{-0.009}$
	95.0	$170.3^{+17.2}_{-16.5}$	$172.9^{+17.5}_{-16.8}$	$0.092^{+0.010}_{-0.010}$	$0.083^{+0.009}_{-0.009}$
CTEQ6L1	8.0	$101.1^{+8.6}_{-7.3}$	$101.2^{+8.6}_{-7.3}$	$0.134^{+0.012}_{-0.009}$	$0.124^{+0.011}_{-0.009}$
	13.0	$112.4^{+9.8}_{-8.5}$	$112.9^{+9.8}_{-8.5}$	$0.131^{+0.012}_{-0.010}$	$0.120^{+0.011}_{-0.009}$
	14.0	$114.2^{+10.0}_{-8.7}$	$114.9^{+10.0}_{-8.7}$	$0.130^{+0.012}_{-0.010}$	$0.119^{+0.011}_{-0.009}$
	57.0	$159.3^{+16.1}_{-15.4}$	$163.7^{+16.5}_{-15.8}$	$0.117^{+0.012}_{-0.012}$	$0.106^{+0.011}_{-0.011}$
	95.0	$181.5^{+18.3}_{-17.6}$	$188.9^{+19.0}_{-18.4}$	$0.112^{+0.012}_{-0.012}$	$0.101^{+0.011}_{-0.011}$
MSTW	8.0	$101.3^{+8.6}_{-7.3}$	$101.3^{+8.7}_{-7.3}$	$0.142^{+0.013}_{-0.010}$	$0.131^{+0.012}_{-0.009}$
	13.0	$113.3^{+9.9}_{-8.5}$	$113.6^{+9.9}_{-8.5}$	$0.139^{+0.012}_{-0.011}$	$0.128^{+0.011}_{-0.010}$
	14.0	$115.4^{+10.1}_{-8.7}$	$115.7^{+10.1}_{-8.8}$	$0.139^{+0.013}_{-0.011}$	$0.128^{+0.012}_{-0.010}$
	57.0	$162.1^{+16.4}_{-15.6}$	$164.7^{+16.6}_{-15.9}$	$0.127^{+0.013}_{-0.013}$	$0.116^{+0.012}_{-0.011}$
	95.0	$183.0^{+18.5}_{-17.8}$	$187.3^{+18.9}_{-18.2}$	$0.123^{+0.013}_{-0.013}$	$0.112^{+0.012}_{-0.012}$

Tab. 3.3: Previsões para as quantidades de espalhamento frontal  $\sigma_{tot}^{pp,\bar{p}p}$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}$  usando diferentes conjuntos de distribuições partônicas.

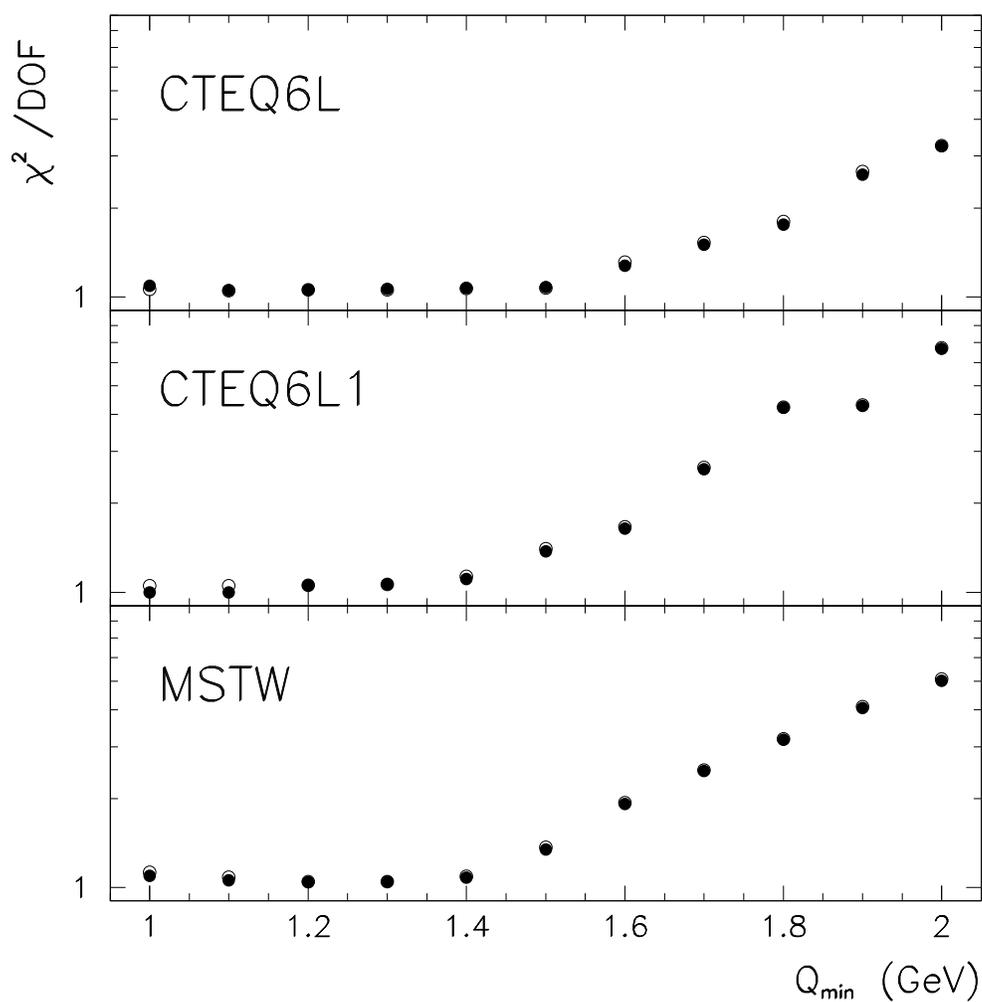


Fig. 3.1: O  $\chi^2/\text{gl}$  em função do corte  $Q_{\min}$  para o monopolo (○) e dipolo (●).

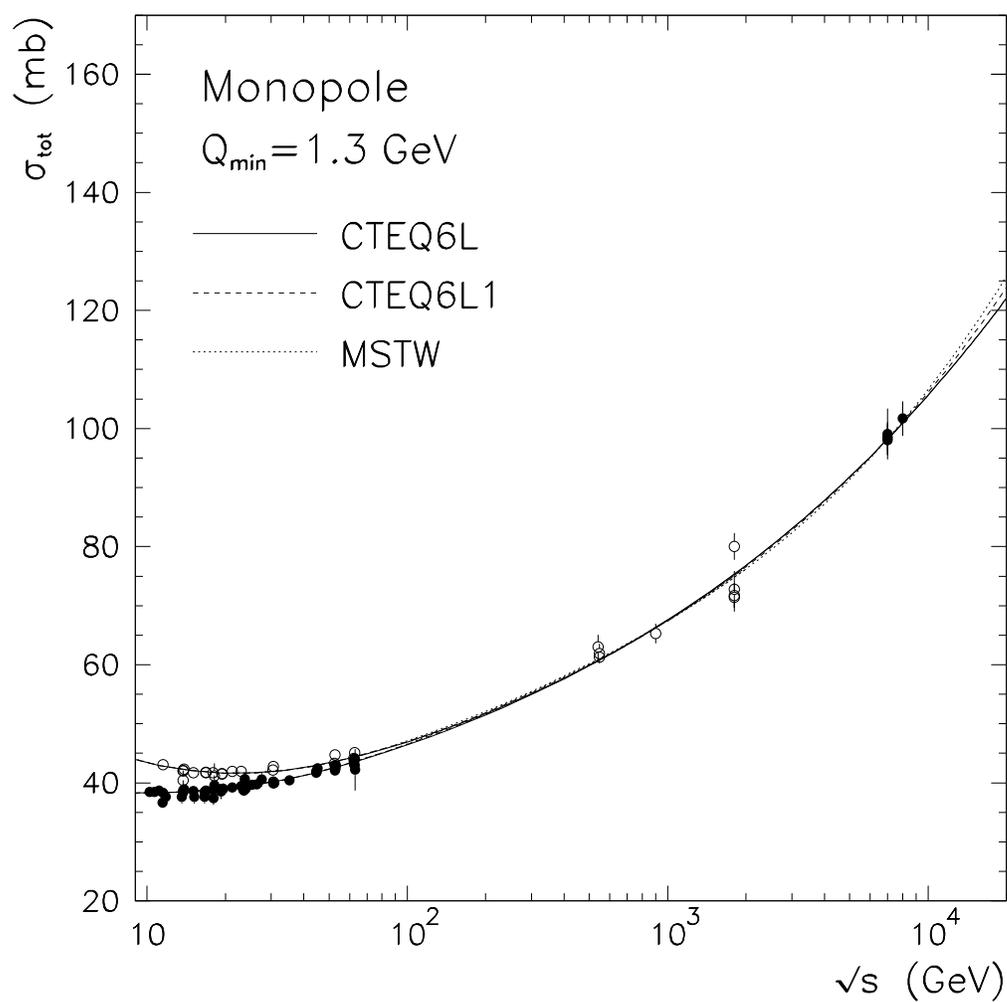


Fig. 3.2: Seção de choque total  $pp$  ( $\bullet$ ) e  $\bar{p}p$  ( $\circ$ ).

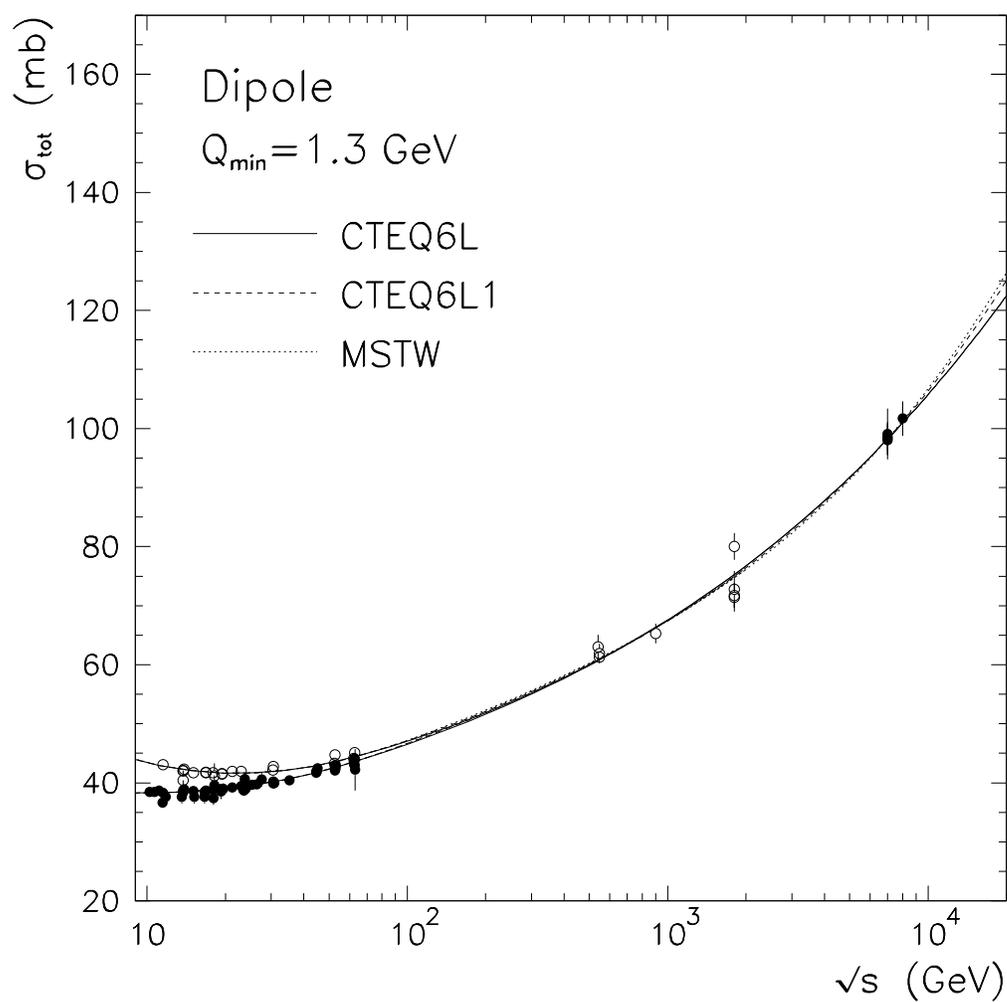


Fig. 3.3: Seção de choque total  $pp$  ( $\bullet$ ) e  $\bar{p}p$  ( $\circ$ ) para o fator de forma tipo monopolo.

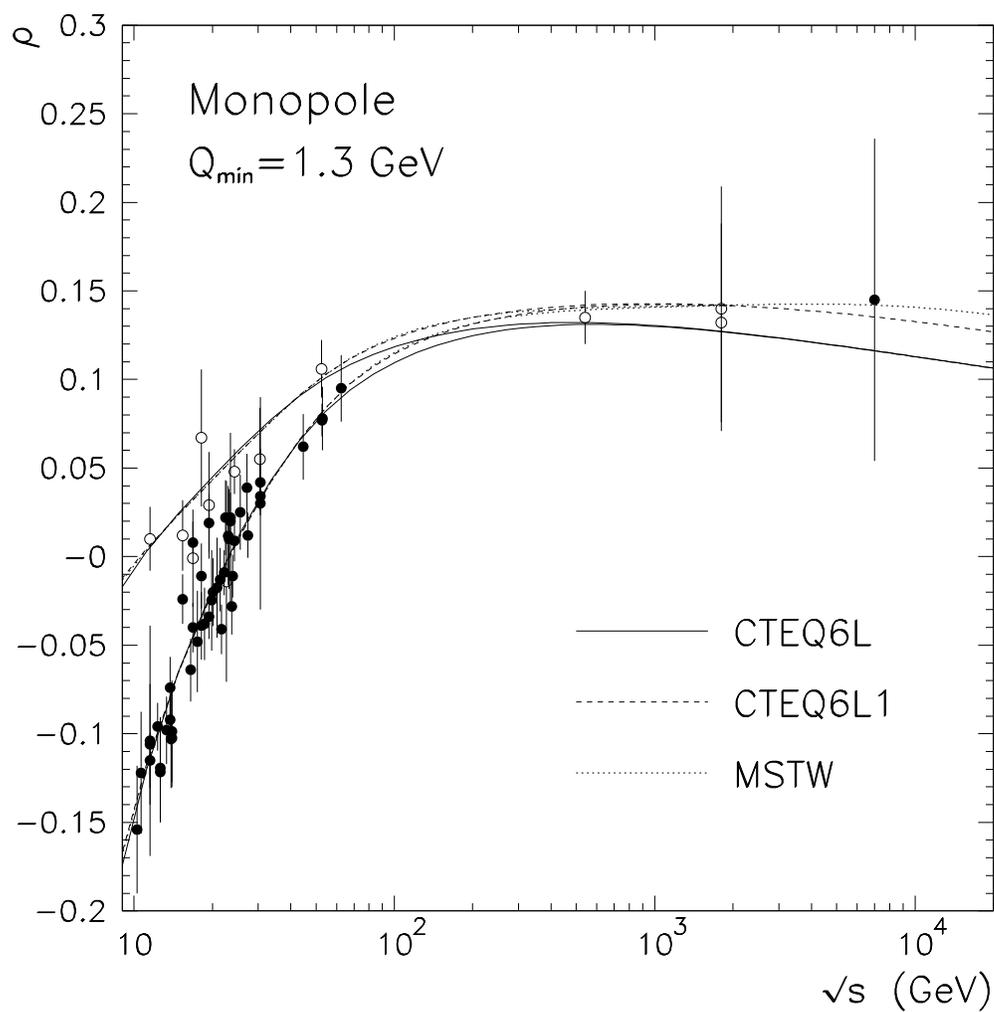


Fig. 3.4: Razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal para  $pp$  ( $\bullet$ ) e  $\bar{p}p$  ( $\circ$ ) com fator de forma tipo mopolo.

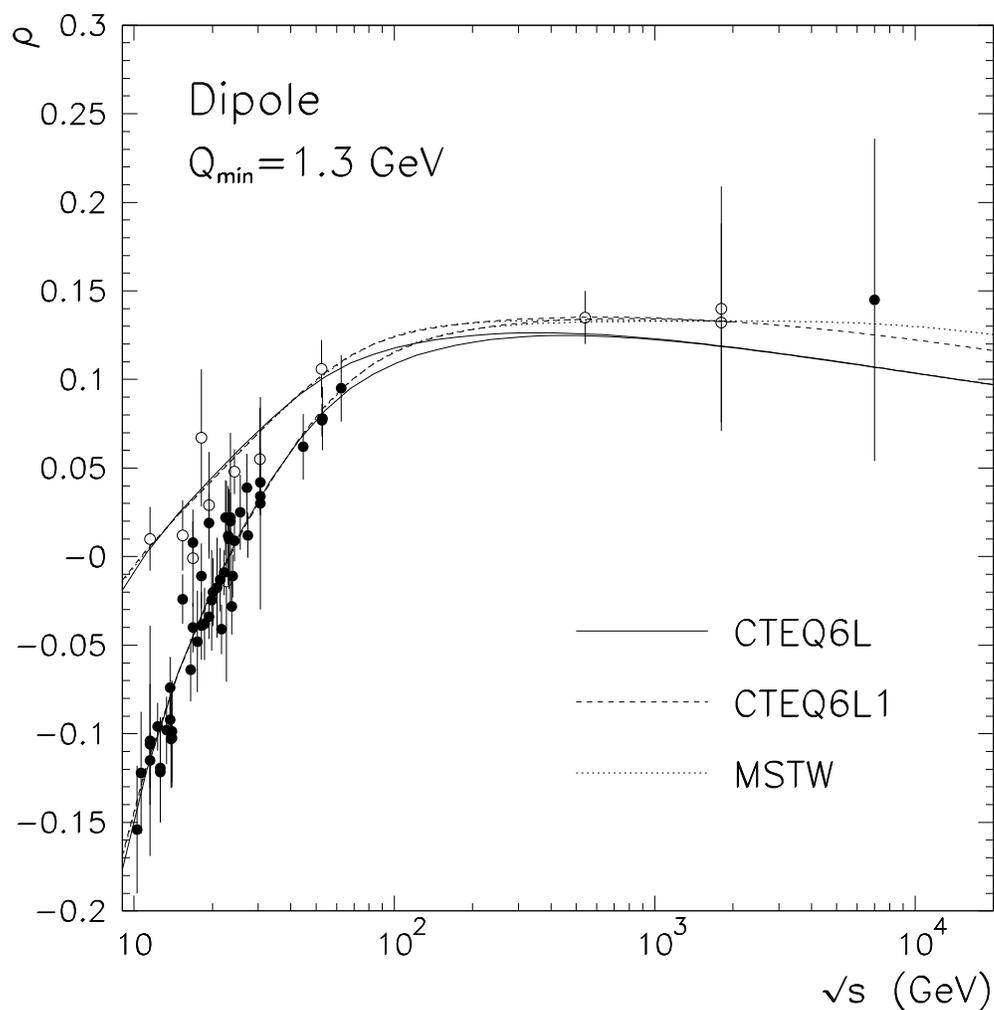


Fig. 3.5: Razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal para  $pp$  ( $\bullet$ ) e  $\bar{p}p$  ( $\circ$ ) com fator de forma tipo dipolo.

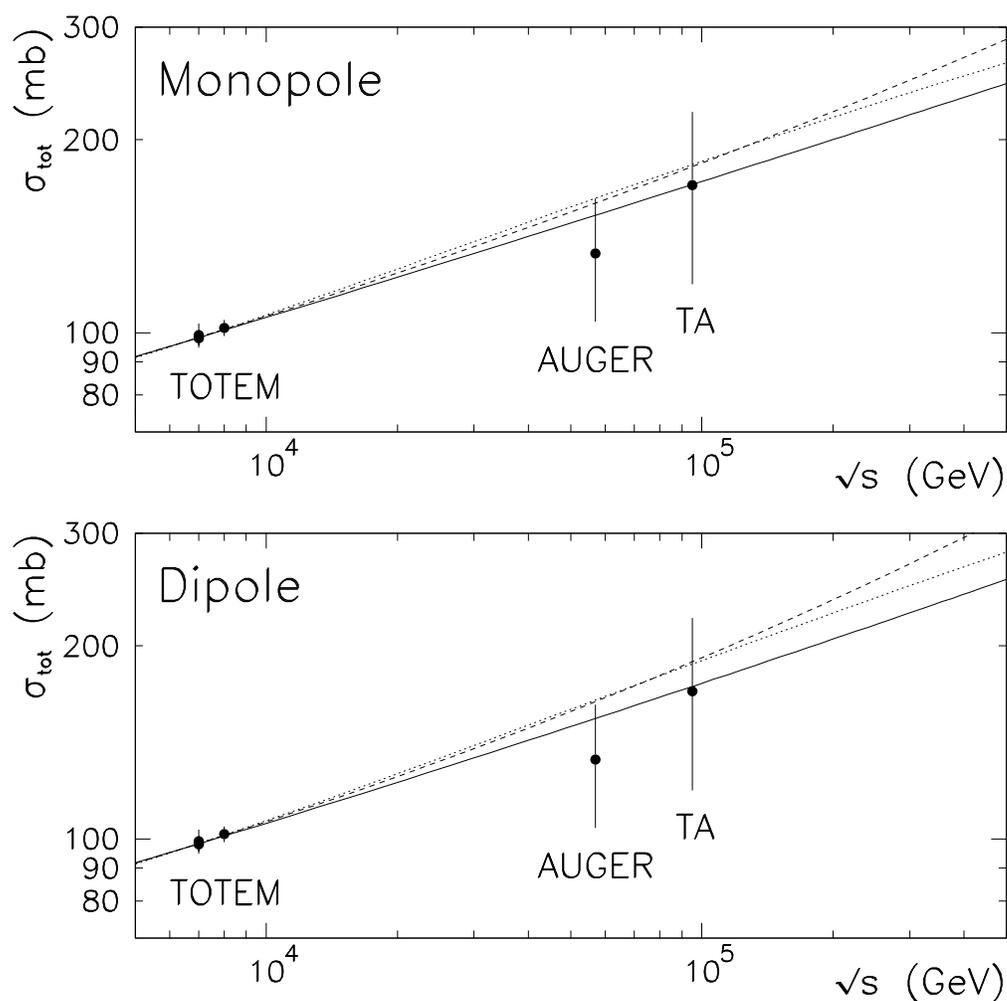


Fig. 3.6: Resultados de TOTEM, AUGER e TA comparados com as previsões teóricas obtidas usando as funções de distribuição partônicas CTEQ6L (linha sólida), CTEQ6L1 (linha pontilhada) e MSTW (linha pontuada) com fatores de forma tipo monopolo e dipolo.

## Capítulo 4

# Teoria de Regge

Neste capítulo abordamos a teoria dos polos de Regge, ou simplesmente teoria de Regge. Descreveremos a sua construção matemática que começa com a extensão analítica da amplitude de onda parcial a valores complexos do momentum angular e vai até a imposição de um novo número quântico, a assinatura. O formalismo desenvolvido neste capítulo servirá de base para o capítulo 5, onde abordaremos a estrutura fenomenológica da teoria e a sua aplicação ao espalhamento hadrônico. Além das referências específicas recomendadas ao longo do texto, este capítulo é baseado principalmente nos livros citados nas referências [3] e [71].

### 4.1 Os polos de Regge

A teoria de Regge corresponde à uma das alternativas para a descrição de seção de choque total e parâmetro  $\rho$  em processos de espalhamento frontal a altas energias [3]. Sua formulação leva à existência de duas categorias de objetos principais que apresentam contribuições dominantes em diferentes regiões físicas: o Pomeron, que controla o comportamento da seção de choque total em altas energias, e os Reggeons secundários cujas trocas contribuem principalmente na região de baixas energias. Dessa forma, na formulação de Regge, os processos de espalhamento hadrônico ocorrem através da troca desses objetos, ocasionalmente denominados “trajetórias de Regge”.

Apesar de termos as principais aplicações da teoria de Regge no campo da física de partículas a altas energias, a teoria foi formulada (1959, 1960) no contexto da mecânica quântica não-relativística, tendo como base a observação dos estados fundamentais de um potencial atrativo com simetria esférica. Esses estados surgem como polos da amplitude de

onda parcial  $a_l(k)$  (polos da matriz-S) para um  $l$  inteiro. A ideia fundamental de Regge foi continuar os momenta angular  $l$  para valores complexos, obtendo assim uma função  $a(l, k)$ , que recai em  $a_l(k)$  para  $l = 0, 1, 2, \dots$ . As singularidades de  $a(l, k)$ , no caso de potenciais bem comportados, aparecerão como polos simples removíveis, denominados polos de Regge, obtidos através da relação

$$l = \alpha(k), \quad (4.1)$$

com  $\alpha(k)$  sendo uma função da energia denominada trajetória de Regge. No contexto do espalhamento hadrônico<sup>1</sup>, esse objeto faz o papel de mediador das interações. Cada família de estados fundamentais (ou ressonâncias) corresponde à uma trajetória de Regge (4.1). Atribuindo valores inteiros (físicos) ao momentum angular  $l$ , obtém-se as energias dos estados. No caso de um espalhamento relativístico, podemos, através da matriz-S, fazer uma extensão analítica da amplitude de onda parcial  $A_l(t)$  à valores complexos de  $l$ , obtendo uma função  $A(l, t)$  que semelhantemente ao caso anterior, apresenta polos simples para

$$l = \alpha(t). \quad (4.2)$$

A contribuição de cada singularidade para a amplitude de espalhamento é dada por

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(s, t) \sim s^{\alpha(t)}, \quad (4.3)$$

essa equação nos mostra que a singularidade dominante<sup>2</sup> no canal- $t$  determina o comportamento assintótico da amplitude de espalhamento no canal- $s$ .

## 4.2 Os mésons de Yukawa e os polos de Regge.

De acordo com a proposta de Yukawa, os processos hadrônicos ocorrem através da troca de “objetos”, que na versão mais simples de modelos de canal- $t$ , correspondem à partículas virtuais. Temos, por exemplo, a interação eletromagnética que é mediada por fótons virtuais, semelhantemente as forças nucleares ocorrem graças à troca de mésons ( $\pi, \rho, etc.$ ). Porém,

<sup>1</sup> A aplicação das técnicas de Regge à física de altas energias foi feita inicialmente por Chew e Frautschi (1961) e Gribov (1961).

<sup>2</sup> Como as partículas mediadoras aparecem como polos no eixo real, as singularidades dominantes são aquelas que apresentam maior valor nesse eixo.

essa interpretação não é adequada no contexto da teoria de Regge (que pertence a classe dos modelos de canal- $t$ ). Consideremos um espalhamento de duas partículas de massas iguais  $m$   $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , mediado por um méson de massa  $M$  e spin  $J$  no canal- $t$ : a amplitude de espalhamento será proporcional a

$$A_{\text{mes}}(s, t) \sim A_J(t)P_J(\cos \vartheta_t), \quad (4.4)$$

onde  $P_J$  é o polinômio de Legendre e  $\vartheta_t$  o ângulo de espalhamento no referencial do centro de massa, onde para o canal- $t$  temos

$$\cos \vartheta_t = 1 + \frac{2s}{t - 4m^2}. \quad (4.5)$$

Tomando o limite, com  $t$  fixo

$$\lim_{\cos \vartheta_t \rightarrow \infty} \cos \vartheta_t = k \lim_{s \rightarrow \infty} s, \quad (4.6)$$

sendo  $k$  constante e usando a propriedade dos polinômios de Legendre

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} P_l(z) \sim z^l, \quad (4.7)$$

teremos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} P_J(ks) \sim s^J. \quad (4.8)$$

Considerando que a amplitude de onda parcial  $A_J(t)$  contém uma singularidade tipo pólo, e reescrevendo (4.4) nas condições ( $s \rightarrow \infty$ ,  $t$  fixo), obtemos

$$A_{\text{mes}}(s, t) \sim \frac{s^J}{t - M^2} \sim s^J. \quad (4.9)$$

Que representa uma amplitude real para a troca de uma ressonância simples, logo não contribui para a seção de choque total, que é dada pela parte imaginária da amplitude de espalhamento segundo o teorema óptico[3, 12]. O cálculo de  $\text{Im}A(s, t = 0)$  para o processo elástico  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  pode ser dado segundo a expressão [3]

$$\text{Im} A_{\text{mes}}(s, t) = \frac{1}{2s} \int \frac{d^3 \vec{k}_1}{2(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{k}_2}{2(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) A_{\text{el}}(s, t_1) A_{\text{el}}^*(s, t_2), \quad (4.10)$$

usando a expressão (4.9), teremos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{Im } A_{\text{mes}}(s, t) \sim s^{2J-1}. \quad (4.11)$$

Pelo teorema óptico

$$\sigma_{\text{tot}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \text{Im } A_{\text{mes}}(s, t=0) \sim s^{2J-2}, \quad (4.12)$$

onde  $A$  é invariante de Lorentz.<sup>3</sup>

Observamos então que a expressão (4.12) é inadequada para expressar a interação forte mediada por mésons com spin maior que 1, pois isso levaria à violação de unitariedade (limite de Froissart-Martin) de  $\sigma_{\text{tot}}$ . Mas a teoria de Regge apresenta uma solução para esse problema propondo que a interação forte ocorre através da troca de uma trajetória de Regge (família inteira de ressonâncias), e não da troca de partículas com spin definidos, sendo assim, a troca de trajetórias de Regge (chamadas reggeons na física de partículas) em vez de partículas, conduzirá à amplitudes do tipo (4.3) que não violam a unitariedade se  $\alpha(0) < 1$ . Dessa forma, o limite de grande  $s$ , é dado pela troca de uma ou mais trajetórias de Regge no canal- $t$ .

### 4.3 Regiões de convergência da expansão em ondas parciais e introdução dos momenta angulares complexos.

Tão importante quanto fazer a continuação para os momenta angular complexos é estabelecer o domínio de convergência da amplitude de espalhamento, para que seja possível fazer uma continuação analítica adequada para valores de energia arbitrariamente grandes. Construiremos agora os domínios de convergência, tendo como ponto de partida a expansão em ondas parciais da amplitude de espalhamento no canal- $s$  [3]

$$A(s, z) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(s) P_l(z), \quad (4.13)$$

---

<sup>3</sup> A conexão entre as amplitudes 1.59 e 4.12 é dada por  $A = 8\pi\sqrt{s}f$ .

sendo  $A_l$  dada por

$$A_l(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} A(s, t(z, s)) P_l(z) dz, \quad (4.14)$$

com

$$z \equiv \cos \vartheta_s = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}. \quad (4.15)$$

O domínio físico da amplitude (4.13) no canal- $s$  é dado por

$$s \geq 4m^2, \quad -1 \leq z \leq 1. \quad (4.16)$$

Porém, para domínios maiores das variáveis complexas  $s$ ,  $t$  e  $u$  (4.16), ou seja grandes o suficiente para conter pelo menos uma das regiões físicas dos canais  $t$  e  $u$ , a amplitude (4.13) não converge, pois suas singularidades estão contidas nas amplitudes de ondas parciais  $A_l(s)$ , mas a dependência de  $A(s, t)$  é incorporada pelos polinômios de Legendre, que são funções inteiras. Assim, as singularidades em  $t$  se manifestam sempre que a série (4.13) diverge. Dessa forma, a representação (4.13) não carrega uma das propriedades fundamentais para uma amplitude de espalhamento que é a simetria de cruzamento, em outras palavras, ela não pode ser continuada analiticamente ao canal- $t$  (ou canal- $u$ ). A solução para se incorporar a propriedade de simetria de cruzamento à amplitude  $A(s, t)$  é introduzir o conceito de momentum angular complexo. Assumindo essa possibilidade, vamos verificar o domínio de convergência de (4.13) no plano complexo  $\vartheta$ . Inicialmente, consideremos o comportamento assintótico de  $P_l(\cos \vartheta)$  para  $l$  real e tendendo à  $\infty$  [3]

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_l(\cos \vartheta) = O(e^{l|\operatorname{Im} \vartheta|}), \quad (4.17)$$

por essa propriedade, observamos que a série (4.13) só converge com  $l \rightarrow \infty$ , se

$$A_l(s) e^{l|\operatorname{Im} \vartheta|} \leq 1. \quad (4.18)$$

Escrevendo a amplitude de onda parcial como

$$\lim_{l \rightarrow \infty} A_l(s) \sim e^{-l\eta(s)}, \quad (4.19)$$

e usando a relação (4.18), obtemos a região de convergência de  $A(s, t)$  no plano complexo

$$|\operatorname{Im} \vartheta| \leq \eta(s), \quad (4.20)$$

que corresponde a uma faixa horizontal simétrica com relação ao eixo imaginário  $\operatorname{Im} \vartheta$  de comprimento  $\eta(s)$ . Escrevendo  $z$  na forma

$$z = \cos \vartheta = x + iy, \quad (4.21)$$

e decompondo  $\vartheta = \operatorname{Re} \vartheta + i \operatorname{Im} \vartheta$ , teremos

$$z = \cos \operatorname{Re} \vartheta \cosh \operatorname{Im} \vartheta - i \sin \operatorname{Re} \vartheta \sinh \operatorname{Im} \vartheta. \quad (4.22)$$

A condição (4.20) na fronteira de  $z$  pode ser expressa por

$$\operatorname{Im} \vartheta = \epsilon \eta(s), \quad \epsilon = \pm 1,$$

de (4.22), temos

$$\operatorname{Re} z = x = \cos \operatorname{Re} \vartheta \cosh \epsilon \eta, \quad (4.23)$$

$$\operatorname{Im} z = y = -\sin \operatorname{Re} \vartheta \sinh \epsilon \eta. \quad (4.24)$$

Elevando as expressões (4.23) e (4.24) ao quadrado, e usando a relação fundamental  $\cos^2 \operatorname{Re} \vartheta + \sin^2 \operatorname{Re} \vartheta = 1$ , obtemos

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \eta} + \frac{y^2}{\sinh^2 \eta} = 1. \quad (4.25)$$

Definindo  $\cosh^2 \eta = \chi^2$  e  $\sinh^2 \eta = \chi^2 - 1$ , chegamos em

$$\frac{x^2}{\chi^2} + \frac{y^2}{\chi^2 - 1} = 1. \quad (4.26)$$

Concluimos então que o domínio de convergência da expansão de onda parcial (4.13) é uma elipse de focos  $z = \sqrt{\chi^2 - (\chi^2 - 1)} = \pm 1$ , conhecida por elipse de Lehman (ver figura 4.1).

Esse resultado nos mostra que a expansão de onda parcial converge em um domínio

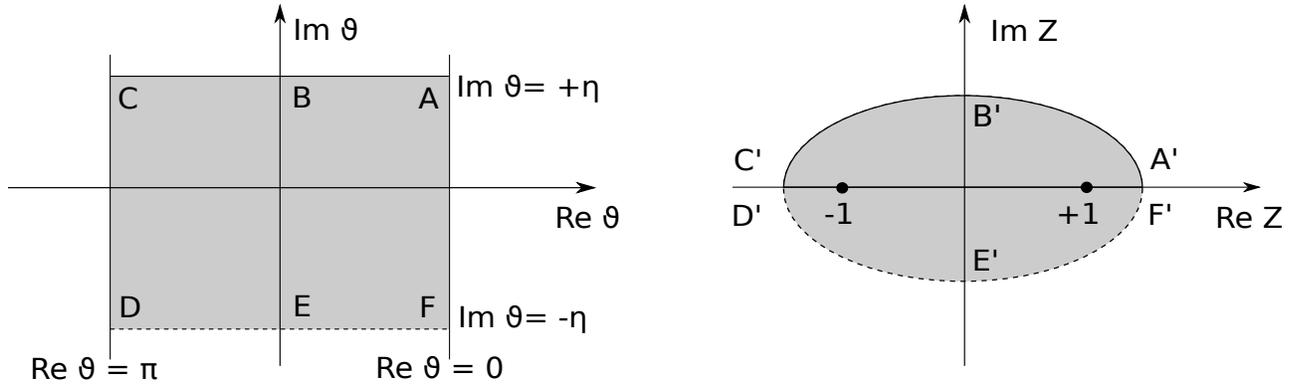


Fig. 4.1: Domínio de convergência para  $|\text{Im } \vartheta| \leq \eta(s)$ .

maior que o domínio físico elementar (4.16), no entanto, esse novo domínio nunca deve se estender a valores arbitrariamente grandes de  $z$ . Em outras palavras, a série (4.13) não serve para construir uma amplitude de espalhamento  $A(s, t)$  válida em todos os canais.

Consideremos agora a expansão (4.13) para valores imaginários puros de  $l$ . O comportamento dos polinômios de Legendre agora seria

$$\lim_{l \rightarrow i\infty} P_l(\cos \vartheta) = O(e^{|l| |\text{Re } \vartheta|}), \quad (4.27)$$

a convergência de (4.13) só deve ser alcançada se

$$\lim_{l \rightarrow i\infty} A_{|l|}(s) \sim e^{-|l| \delta(s)}. \quad (4.28)$$

usando a relação  $e^{-|l| \delta(s)} e^{|l| |\text{Re } \vartheta|} \leq 1$ , obtemos a condição de convergência para  $A(s, t)$

$$|\text{Re } \vartheta| \leq \delta(s), \quad (4.29)$$

que corresponde à uma faixa vertical paralela, simétrica em relação ao eixo real do plano complexo  $\vartheta$ .

A condição (4.29) na fronteira de  $z$  será expressa, analogamente ao caso anterior, por

$$\text{Re } \vartheta = \epsilon \delta(s), \quad \epsilon = \pm 1,$$

substituindo em (4.22), obtemos

$$z = \cos \epsilon \delta \cosh \operatorname{Im} \vartheta - i \sin \epsilon \delta \sinh \operatorname{Im} \vartheta, \quad (4.30)$$

novamente, teremos as relações

$$\operatorname{Re} z = x = \cos \epsilon \delta \cosh \operatorname{Im} \vartheta, \quad (4.31)$$

$$\operatorname{Im} z = y = -\sin \epsilon \delta \sinh \operatorname{Im} \vartheta. \quad (4.32)$$

Elevando as expressões (4.31) e (4.32) ao quadrado, e usando a relação fundamental  $\cosh^2(\operatorname{Im} \vartheta) - \sinh^2(\operatorname{Im} \vartheta) = 1$ ,

$$\frac{x^2}{\cos^2 \delta} - \frac{y^2}{\sin^2 \delta} = 1. \quad (4.33)$$

Definindo  $\cos^2 \delta = \xi^2$  e  $\sin^2 \delta = 1 - \xi^2$ , chegamos em

$$\frac{x^2}{\xi^2} - \frac{y^2}{1 - \xi^2} = 1. \quad (4.34)$$

Que corresponde à uma hipérbole com focos  $z = \sqrt{\xi^2 + (1 - \xi^2)} = \pm 1$ , ou seja, um domínio aberto garantindo a convergência de  $A(s, t)$  do lado de fora das bandas (ver figura 4.2). Essa hipérbole, além de sobrepor a elipse de Lehman, nos garante que se pudermos estender (4.13) aos valores complexos  $l$ , a nova expansão representará a mesma amplitude de espalhamento em um domínio sem restrições quanto a  $|t|$  (e/ ou  $|u|$ ).

Já conhecemos agora a região de convergência necessária para que as extensões analíticas sejam sempre válidas, partindo desse ponto, precisamos saber mais precisamente como a introdução dos momentos angular complexos nos permitem construir uma representação  $A(s, t)$  válida em todos os canais. Para isso, consideremos a hipótese, já admitida, de que a amplitude de onda parcial  $A_l(s)$  possa ser estendida à valores complexos de  $l$  fornecendo a função de interpolação  $A(l, s)$  que se reduz a  $A_l(s)$  para  $l$  real e inteiro, e possua as seguintes propriedades [3]:

- I-  $A(l, s)$  tem como singularidades apenas polos simples no plano complexo  $l$ ;
- II-  $A(l, s)$  é analítica para  $\operatorname{Re} l \geq L$ ;
- III-  $\lim_{|l| \rightarrow \infty} A(l, s) \rightarrow 0$ , para  $\operatorname{Re} l > 0$ .

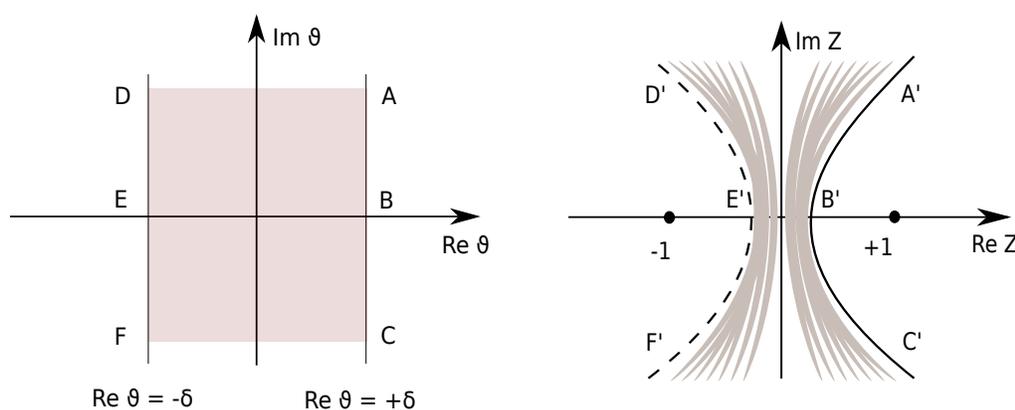


Fig. 4.2: Domínio de convergência para  $|\operatorname{Re} \vartheta| \leq \delta(s)$ .

Um teorema devido à Carlson garante que se existe uma função  $A(l, s)$  que satisfaça os critérios II e III, então,  $A(l, s)$  será determinada univocamente pelos valores inteiros de  $l$ . Usando as propriedades I e II, reescrevemos a série (4.13) como

$$A(s, z) = \sum_{l=0}^{N-1} (2l+1)A_l(s)P_l(z) + \sum_{l=N}^{\infty} (2l+1)A_l(s)P_l(z), \quad (4.35)$$

onde  $N$  é o primeiro inteiro maior que  $L$ , e a segunda região separada na soma (4.35), representa a parte de  $A(l, s)$  que carrega as singularidades no eixo real.

Usando a propriedade [3, 71]

$$\sum_l (2l+1)A_l(s)P_l(z) = -\frac{1}{2i} \int_{c_l} \frac{(-1)^l (2l+1)A(l, s)P_l(z)}{\sin \pi l} dl, \quad (4.36)$$

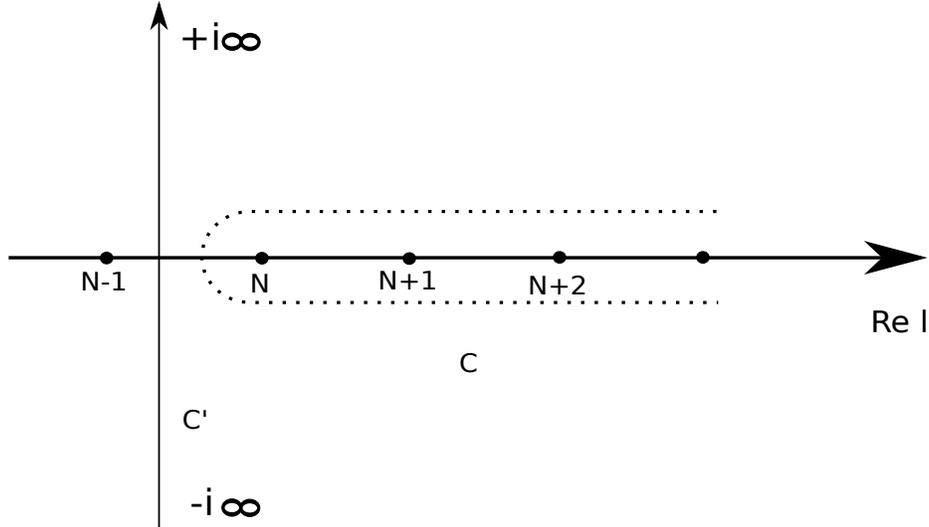


Fig. 4.3: Contorno das singularidades no eixo real.

e a relação  $(-1)^l P_l(z) = P_l(-z)$ , obtemos

$$A(s, z) = \sum_{l=0}^{N-1} (2l + 1) A_l(s) P_l(z) - \frac{1}{2i} \int_{c_l} (2l + 1) A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\sin \pi l} dl, \quad (4.37)$$

onde  $c_l$  é o contorno feito para evitar todas as singularidades de  $A(l, s)$  (ver contorno pontilhado de Fig. 4.3). Afim de envolvermos todas as singularidades de  $A(l, s)$  no plano complexo, deformaremos o contorno  $c$  em  $c'$  (Fig. 4.3), que corresponde à uma linha paralela ao eixo  $\text{Im } l$ , deixando todas as singularidades de  $A(l, s)$  para a direita. A propriedade III de  $A(l, s)$  e o comportamento assintótico dos polinômios de Legendre para  $l \rightarrow \infty$  [3]

$$\left| \frac{P_l(-z)}{\sin \pi l} \right| < O(l^{-1/2}), \quad (4.38)$$

garante que a integral sobre o semicírculo  $c'$  fechado no infinito desapareça. Assim, temos

$$A(s, z) = \sum_{l=0}^{N-1} (2l + 1) A_l(s) P_l(z) - \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (2l + 1) A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\sin \pi l} dl. \quad (4.39)$$

Deslocaremos agora o contorno  $c'$  para o intervalo  $-\frac{1}{2} \leq \text{Re } l < 0$ , se as singularidades de  $A(l, s)$  forem polos simples, teremos contribuições dos resíduos para os polos de  $A(l, s)$

e também dos resíduos dos polos de  $\sin^{-1} \pi l$ , que cancelam alguns dos termos da série de onda parcial truncada em (4.39).

$$\begin{aligned}
 A(s, z) &= \sum_{l=N}^{\infty} (2l+1)A_l(s)P_l(z) - \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (2l+1)A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\sin \pi l} dl \\
 &= -\frac{1}{2i} \int_c (2l+1)A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\sin \pi l} dl \\
 &\quad - \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (2l+1)A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\sin \pi l} dl.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Definindo a primeira integral

$$\int_c (2l+1)A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\sin \pi l} dl \equiv \int_c f(l) dl, \tag{4.41}$$

e usando o teorema do resíduo,

$$\int_c f(l) dl = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res} f(l) \Big|_{l \rightarrow \alpha_i}, \tag{4.42}$$

sendo  $\alpha_i$ , o  $i$ -ésimo pólo de  $A(l, s)$ , e o resíduo de  $f(l)$  para polos simples  $\alpha_i$  dado por

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res} f(l) \Big|_{l \rightarrow \alpha_i} &= \lim_{l \rightarrow \alpha_i} (l - \alpha_i) f(l) \\
 &= \lim_{l \rightarrow \alpha_i} (l - \alpha_i) \frac{(2l+1)A(l, s)P_l(-z)}{\sin \pi l}.
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Definindo a função residual  $\beta_i$  por

$$\beta_i(s) = \lim_{l \rightarrow \alpha_i} (l - \alpha_i) A(l, s),$$

obtemos,

$$\operatorname{Res} f(l) \Big|_{l \rightarrow \alpha_i} = \beta_i(s) \frac{(2\alpha_i + 1)P_{\alpha_i}(-z)}{\sin \pi \alpha_i}. \tag{4.44}$$

Substituindo esse resultado em (4.42), poderemos finalmente reescrever (4.40)

$$\begin{aligned}
 A(s, z) &= - \sum_i \pi \beta_i(s) (2\alpha_i(s) + 1) \frac{P_{\alpha_i}(-z)}{\sin \pi \alpha_i} \\
 &\quad - \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (2l+1) A(l, s) \frac{P_l(-z)}{\sin \pi l} dl,
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

conhecida como representação de Watson-Sommerfeld<sup>4</sup> para a amplitude de espalhamento  $A(s, z)$ , sendo  $\alpha_i$  a localização no plano complexo  $l$ , do  $i$ -ésimo pólo de  $A(s, z)$  (pólo de Regge), e  $\beta_i$  a função residual, da qual nada podemos falar. O domínio de validade da representação (4.45) é a região do plano  $z$  fora das bandas da hipérbole (4.34).

Consideremos agora o comportamento da representação (4.45) para  $s$  fixo e grande  $|z|$ , como  $\text{Re } l \geq -1/2$ , temos o comportamento

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} P_l(z) \sim z^l, \tag{4.46}$$

assim, no limite de grande  $|z|$ , a única contribuição relevante é dada pela série dos polos de Regge, pois a integral em (4.45) apresenta o comportamento assintótico  $|z|^{-1/2}$  no limite  $|z| \rightarrow \infty$ , oferecendo uma contribuição irrelevante à amplitude de espalhamento  $A(s, z)$ . Levando isso em consideração, a parte mais importante de (4.45) nesse limite, é

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} A(s, z) \sim - \sum_i \pi \beta_i(s) (2\alpha_i(s) + 1) \frac{(-z)^{\alpha_i(s)}}{\sin \pi \alpha_i(s)}. \tag{4.47}$$

O termo dominante da série (4.47) será aquele que fornecer o maior valor de  $\text{Re } \alpha_i$ . Dessa forma, a equação (4.47) escrita para um processo de canal- $s$ , levando em conta apenas a trajetória de Regge dominante  $\alpha(s)$ , pode ser obtida pela troca de  $-z$  por  $t$ , assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(s, t) \sim -\pi \beta(s) (2\alpha(s) + 1) \frac{t^{\alpha(s)}}{\sin \pi \alpha(s)}. \tag{4.48}$$

Absorvendo em  $\beta(s)$  os fatores  $\pi(2\alpha(s) + 1)$ , obteremos

<sup>4</sup> Representação apresentada originalmente por Poincaré, e aplicada por Regge para o caso do potencial de espalhamento.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(s, t) \sim -\beta(s) \frac{t^{\alpha(s)}}{\sin \pi \alpha(s)}, \quad (4.49)$$

que representa o comportamento assintótico da amplitude de espalhamento para  $s$  fixo e grande  $t$ , ou seja, está escrita para o canal- $s$ . Para obtermos o comportamento assintótico de  $A(s, t)$  no canal- $t$ , basta evocarmos a propriedade de cruzamento, uma vez que agora estamos no domínio que corresponde ao lado de fora das bandas da hipérbole (4.34), isso corresponde à trocarmos  $s \longleftrightarrow t$  em (4.49), assim

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(s, t) \sim -\beta(t) \frac{s^{\alpha(t)}}{\sin \pi \alpha(t)}. \quad (4.50)$$

Essa equação representa a previsão da teoria de Regge para o comportamento de grande- $s$  da amplitude de espalhamento. Podemos observar que a singularidade dominante no canal- $t$  governa o comportamento assintótico de  $A(s, t)$  para  $s \rightarrow \infty$ .

## 4.4 Representação de Froissart-Gribov para a amplitude de onda parcial.

### 4.4.1 Estruturas de singularidades.

Os polos simples vistos anteriormente são singularidades sobre o eixo real e correspondem à troca de partículas físicas nas reações [3, 71]. No caso do espalhamento de dois corpos com massas iguais  $m$  e tendo  $s$  e  $t$  como as variáveis independentes, a amplitude de espalhamento no canal- $s$   $A_s(s, t)$  é singular para o termo de pólo

$$s = m^2, \quad (4.51)$$

ou seja, a amplitude de espalhamento  $A_s(s, t)$  é para a troca de uma partícula de massa  $m$  no canal- $s$ , porém, existe a situação da troca de duas ou mais partículas físicas, nesse caso as singularidades da amplitude serão pontos ramificados sobre o eixo real, dessa forma,

$A_s(s, t)$  apresenta pontos ramificados nos limites

$$s = (2m)^2, \quad s = (3m)^2, \quad s = (4m)^2, \dots \quad (4.52)$$

De modo semelhante, as amplitudes nos canais  $t$  e  $u$ , representadas respectivamente ( $A_t(s, t)$ ) e ( $A_u(s, t)$ ), apresentam singularidades para

$$t = m^2, \quad t = (2m)^2, \quad t = (3m)^2, \quad t = (4m)^2, \dots \quad (4.53)$$

$$u = m^2, \quad u = (2m)^2, \quad u = (3m)^2, \quad u = (4m)^2, \dots \quad (4.54)$$

Usando a relação entre as variáveis de Mandelstam

$$s + t + u = 4m^2,$$

e as singularidades de  $u$ , por exemplo,

$$u = m^2, \quad u = (2m)^2, \quad u = (3m)^2, \quad (4.55)$$

obtemos a estrutura completa de singularidades de  $A(s, t)$  no plano- $s$  (fig. 4.3)

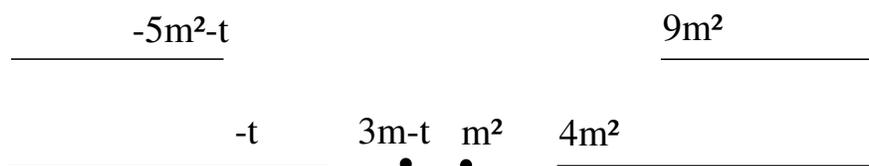


Fig. 4.4: Estrutura completa de singularidades no plano- $s$

A estrutura de singularidades é fundamental para a descrição das interações físicas, pois sem troca de partículas não há espalhamento e portanto, a própria amplitude  $A(s, t)$  não faria sentido. Sendo assim, veremos a seguir como construir a amplitude de espalhamento  $A(s, t)$  para o caso de dois polos simples e dois pontos ramificados no eixo real do plano- $s$ , e por final, como obtermos a representação de Froissart-Gribov, que corresponde

à representação da amplitude de onda parcial  $A_l(s)$  via relações de dispersão integrais com N-subtrações, objeto fundamental para a descrição do espalhamento a altas energias na teoria de Regge.

### 4.4.2 Relações de dispersão integrais.

As relações de dispersão integrais correspondem às transformadas de Hilbert aplicadas à um sistema físico, no nosso caso o sistema físico será representado pela amplitude de espalhamento  $A(s, t)$  no canal-s, cujas variáveis sejam funções complexas e satisfaçam as seguintes condições [3]:

I-  $A(s, t)$  deve ser analítica no semiplano  $\text{Im } s \geq 0$ ;

II-  $\lim_{s \rightarrow \infty} |A(s, t)| = 0$ .

Partiremos da representação integral de Cauchy para  $A(s, t)$ , com t fixo [3, 71]

$$A(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{A(s', t)}{s' - s} ds', \quad (4.56)$$

onde  $\Gamma$  representa o contorno no sentido anti-horário no plano-s, de modo que  $A(s, t)$  é analítica dentro dele. Tomando  $\Gamma$  como sendo o contorno evitando os pontos ramificados  $(T_1, T_2)$  e contornando os dois polos  $(\gamma_1, \gamma_2)$  de  $A(s, t)$ , de acordo com Fig. 4.4, teremos  $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + T_1 + T_2 + C$ .

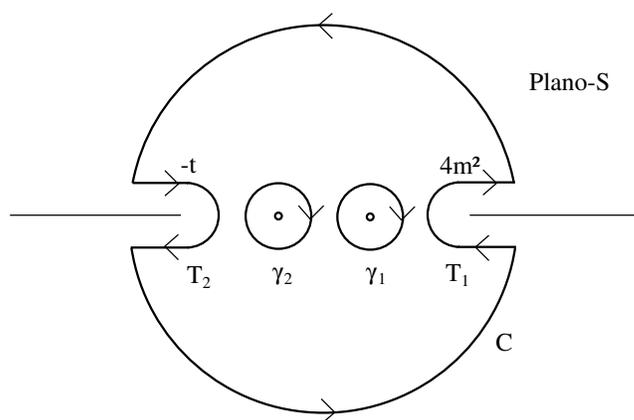


Fig. 4.5: Contorno de Cauchy.

Dessa forma, podemos reescrever a amplitude (4.56) como a soma dos termos

$$A(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} + \int_{T_1} + \int_{T_2} + \int_C \right) \frac{A(s', t)}{s' - s} ds', \quad (4.57)$$

Os dois primeiros termos são as contribuições dos polos. Definindo a primeira integral por  $I_1$  e seu integrando por  $f(s', t)$ , teremos

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(s', t) ds'.$$

Usando o teorema do resíduo

$$\int_c f(s', t) ds' = 2\pi i \operatorname{Res} f(s', t) \Big|_{s' \rightarrow m^2} = 2\pi i \frac{f_1(t)}{s - m^2},$$

sendo  $f_1(t)$  uma função residual não-específica de  $t$ . Assim,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{A(s', t)}{s' - s} ds' = \frac{f_1(t)}{s - m^2}.$$

Tomando o mesmo procedimento para a segunda integral ( $\gamma_2$ ), obtemos os termos de pólo

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} \right) \frac{A(s', t)}{s' - s} ds' = \frac{f_1(t)}{s - m^2} - \frac{f_2(t)}{u - m^2}. \quad (4.58)$$

Os próximos dois termos em (4.57) serão calculados tomando os contornos  $L_1$  e  $L_2$  evitando os pontos ramificados. Assim, a integral em  $T_1$  definida por  $I_{T_1}$  será

$$I_{T_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_1} \frac{A(s', t)}{s' - s} ds'. \quad (4.59)$$

Tomando (4.59) através dos caminhos  $L_1$  e  $L_2$ , deslocados de  $\epsilon$  do eixo  $\operatorname{Re} s$  (ver fig. 4.5), poderemos escrever

$$I_{T_1} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L_1} \frac{A(s' + i\epsilon, t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L_2} \frac{A(s' - i\epsilon, t)}{s' - s} ds', \quad (4.60)$$

dessa forma, obtemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{T_1} \frac{A(s', t)}{s' - s} ds' = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{1}{s' - s} \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [A(s' + i\epsilon) - A(s' - i\epsilon)] ds'. \quad (4.61)$$

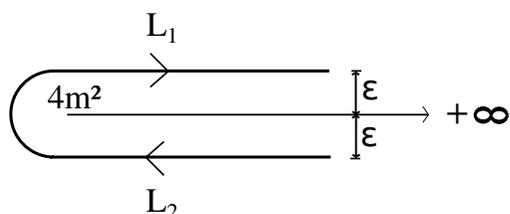


Fig. 4.6: Contorno do ponto ramificado direito.

Analogamente para a integral  $\Gamma_2$  (ver fig. 4.6), teremos

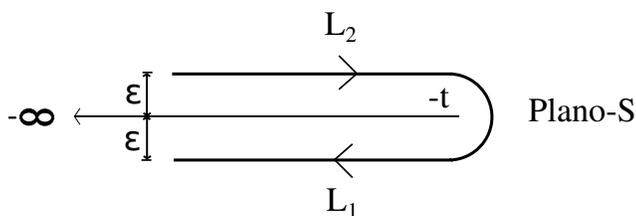


Fig. 4.7: Contorno do ponto ramificado esquerdo.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{A(s', t)}{s' - s} ds' = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-t} \frac{1}{s' - s} \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [A(s' + i\epsilon) - A(s' - i\epsilon)] ds'. \quad (4.62)$$

Definindo a função descontinuidade  $D_s(s, t)$

$$D_s(s, t) \equiv \frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [A(s' + i\epsilon) - A(s' - i\epsilon)], \quad (4.63)$$

obtemos as integrais através dos contornos  $T_1$  e  $T_2$

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{T_1} \frac{A(s', t)}{s' - s} + \int_{T_2} \frac{A(s', t)}{s' - s} \right) ds' = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_s(s', t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-t} \frac{D_s(s', t)}{s' - s} ds'. \quad (4.64)$$

Deixamos para mostrar no apêndice A que, desde que a condição (II) seja obedecida, a integral através do contorno  $C$  não contribui com (4.57), ou seja

$$I_C = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{A(s', t)}{s' - s} ds' = 0. \quad (4.65)$$

Colecionando os termos calculados, encontramos a relação de dispersão de uma variável para a amplitude de espalhamento  $A(s, t)$  com  $t$  fixo

$$A(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_s(s', t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-t} \frac{D_s(s', t)}{s' - s} ds' + \text{Termos de pólo}. \quad (4.66)$$

Fazendo a mudança de variáveis  $s' \rightarrow u' = 4m^2 - s' - t$  na segunda integral, obtemos a expressão mais simétrica

$$A(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_s(s', t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_u(u', t)}{u' - u} du' + \text{Termos de pólo}. \quad (4.67)$$

Podemos mostrar facilmente que a descontinuidade corresponde à parte imaginária da amplitude de espalhamento. Pelo princípio de reflexão de Schwarz, a existência de  $A(s, t)$  no intervalo  $-t < s < 4m^2$  implica em

$$A(s^*, t) = A^*(s, t), \quad (4.68)$$

usando as decomposições

$$A^*(s, t) = \text{Re } A(s, t) - i \text{Im } A(s, t),$$

$$A(s^*, t) = \text{Re } A(s^*, t) + i \text{Im } A(s^*, t),$$

obtemos

$$\operatorname{Re} A(s^*, t) = \operatorname{Re} A(s^*, t)$$

e

$$\operatorname{Im} A(s^*, t) = -\operatorname{Im} A(s^*, t).$$

Substituindo essas relações em (4.63), obtemos

$$D_s(s, t) = \operatorname{Im} A(s, t). \quad (4.69)$$

Dessa forma, a descontinuidade pode ser obtida diretamente da quantidade mensurável, seção de choque total via unitariedade (teorema óptico), além disso, a expressão (4.67) nos mostra que, desde que a condição de convergência (II) seja satisfeita, as relações de dispersão reconstróem toda amplitude de espalhamento, uma vez que conheçamos sua descontinuidade, ou seja, as condições de analiticidade e unitariedade determinam as amplitudes de espalhamento.

A expressão (4.67) não é válida para amplitude de espalhamento que tenham o comportamento

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(s, t) \sim s^\lambda, \quad (4.70)$$

sendo  $\lambda$  um real positivo. Para esse caso devemos escrever uma relação de dispersão com  $N$  subtrações, onde  $N$  é o menor inteiro maior que  $\lambda$ . Veremos a seguir como isso pode ser feito [3, 71].

Definimos inicialmente a seguinte função

$$f_s(s, t) \equiv \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{f_s(s', t)}{s' - s} ds' \quad (4.71)$$

e escrevemos  $f_s$  como uma subtração do tipo

$$f_s(s, t) = \frac{D_s(s, t) - D_s(s_1, t)}{s - s_1}, \quad (4.72)$$

sendo  $s_1$  um constante. Usando a receita (4.72) em (4.71), obtemos

$$\begin{aligned}
 D_s(s, t) - D_s(s_1, t) &= (s - s_1) \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_s(s', t)}{(s' - s)(s' - s_1)} ds' \\
 &- (s - s_1) \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_s(s_1, t)}{(s' - s)(s' - s_1)} ds'. \quad (4.73)
 \end{aligned}$$

A segunda integral de (4.73) é nula, portanto

$$D_s(s, t) = D_s(s_1, t) + (s - s_1) \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_s(s', t)}{(s' - s)(s' - s_1)} ds'. \quad (4.74)$$

fazendo mais uma subtração, obtemos

$$D_s(s, t) = D_s(s_1, t) + D_s(s_2, t) + (s - s_1)(s - s_2) \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_s(s', t)}{(s' - s)(s' - s_1)(s' - s_2)} ds'. \quad (4.75)$$

Generalizando para N subtrações:

$$D_s(s, t) = \sum_{n=0}^{N-1} D_s(s_n, t) + (s - s_1) \dots (s - s_N) \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_s(s', t)}{(s' - s)(s' - s_1) \dots (s' - s_N)} ds'. \quad (4.76)$$

Analogamente para  $D_u(u, t)$ ,

$$D_u(u, t) = \sum_{n=0}^{N-1} D_u(u_n, t) + (u - u_1) \dots (u - u_N) \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_u(u', t)}{(u' - u)(u' - u_1) \dots (u' - u_N)} du'. \quad (4.77)$$

Expressando  $D_s(s, t)$  e  $D_u(u, t)$  como (4.71) e substituindo em (4.67), obtemos

$$\begin{aligned}
 A(s, t) &= \sum_{n=0}^{N-1} C_n(t) s^n \\
 &+ \frac{1}{\pi} (s - s_1) \dots (s - s_N) \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_s(s', t)}{(s' - s)(s' - s_1) \dots (s' - s_N)} ds' \\
 &+ \frac{1}{\pi} (u - u_1) \dots (u - u_N) \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_u(u', t)}{(u' - u)(u' - u_1) \dots (u' - u_N)} du'. \quad (4.78)
 \end{aligned}$$

Que corresponde a uma relação de dispersão subtraída N-vezes, onde omitimos os termos de pólo. A princípio não temos como determinar o polinômio arbitrário que corresponde o primeiro termo, porém na determinação da representação de Froissart-Gribov veremos o procedimento para eliminá-lo. Por hora, vale observarmos como exemplo, qual seria a relação de dispersão para a teoria de Regge: na formulação de Regge, a seção de choque total tem o comportamento assintótico[3]

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma_{\text{tot}} \sim \text{constante}, \quad (4.79)$$

pelo teorema óptico, a parte imaginária da amplitude de espalhamento elástico frontal será

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{Im} A_{el}(s, t = 0) \sim s, \quad (4.80)$$

ou seja,  $\lambda = 1$  e  $N=2$  (menor inteiro maior que  $\lambda$ ). Dessa forma, a expressão (4.78) para  $\text{Im} A_{el}(s, t = 0)$  será

$$\begin{aligned} \text{Im} A_{el}(s, t = 0) &= C_0(t = 0) + C_1(t = 0)s \\ &+ \frac{1}{\pi}(s - s_1)(s - s_2) \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_s(s', t = 0)}{(s' - s)(s' - s_1)(s' - s_2)} ds' \\ &+ \frac{1}{\pi}(u - u_1)(u - u_2) \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{D_u(u', t = 0)}{(u' - u)(u' - u_1)(u' - u_2)} du'. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Essa expressão nos garante que a amplitude de espalhamento frontal pode ser construída à partir da seção de choque total e de duas constantes de subtração  $C_0(t = 0)$  e  $C_1(t = 0)$ .

### 4.4.3 Representação de Froissart-Gribov

A representação de Froissart-Gribov(Froissart 1961, Gribov 1961)[3, 71] corresponde à uma expressão integral para a amplitude de ondas parciais  $A_l(t)$  para o caso em que a amplitude de espalhamento  $A(s, t)$  admite uma relação de dispersão com ou sem subtrações. Trabalhando no canal- $t$  e escrevendo a amplitude de espalhamento como uma função de  $t$  e do ângulo de espalhamento  $z_t = \cos z_t$ , de maneira que ela apresente o comportamento

$$\lim_{z_t \rightarrow \infty} A(z_t, t) \sim z_t^\lambda. \quad (4.82)$$

Considerando

$$s(z_0) = 4m^2 = u(-z_0), \quad s(z_0) = +\infty = u(-z_0),$$

poderemos escrever a relação de dispersão subtraída-N vezes para a amplitude  $A(z_t, t)$ , com  $t$  fixo

$$\begin{aligned} A(s, t) &= \sum_{n=0}^{N-1} C_n(t) z_t^n \\ &+ \frac{1}{\pi} (z_t - z_{t_1}) \dots (z_t - z_{t_N}) \int_{z_0}^{+\infty} \frac{D_s(s'(z'_t, t), t)}{(z'_t - z_{t_1}) \dots (z'_t - z_{t_N}) (z'_t - z_t)} dz'_t \\ &+ \frac{1}{\pi} (z_t - z_{t_1}) \dots (z_t - z_{t_N}) \int_{-z_0}^{-\infty} \frac{D_u(u'(z'_t, t), t)}{(z'_t - z_{t_1}) \dots (z'_t - z_{t_N}) (z'_t - z_t)} dz'_t. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Considerando (por simplicidade) as constantes  $z_{t_i} = 0$ , teremos

$$\begin{aligned} A(s, t) &= \sum_{n=0}^{N-1} C_n(t) z_t^n \\ &+ \frac{z_t^N}{\pi} \int_{z_0}^{+\infty} \frac{D_s(s'(z'_t, t), t)}{z_t'^N (z'_t - z_t)} dz'_t + \frac{z_t^N}{\pi} \int_{-z_0}^{-\infty} \frac{D_u(u'(z'_t, t), t)}{z_t'^N (z'_t - z_t)} dz'_t. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Aplicando  $(1/2) \int_{-1}^{+1} P_l(z_t) dz_t$  em ambos os lados de (4.84) e usando a representação de  $A_l(s)$  (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} A_l(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} C_n(t) \int_{-1}^{+1} P_l(z_t) z_t^n dz_t \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{+\infty} D_s(s'(z'_t, t), t) dz'_t \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{z_t^n P_l(z_t)}{z_t'^N (z'_t - z_t)} dz_t \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-z_0}^{-\infty} D_u(u'(z'_t, t), t) dz'_t \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{z_t^n P_l(z_t)}{z_t'^N (z'_t - z_t)} dz_t. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Considerando o comportamento

$$\lim_{|z_t| \rightarrow \infty} P_l(z_t) \sim z_t^l, \quad l \geq N$$

o primeiro termo de (4.85) será

$$\int_{-1}^{+1} z_t^{l+N} dz_t = 0, \quad l \geq N.$$

Para os outros dois termos, podemos usar

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{z_t^n P_l(z_t)}{z_t^N (z_t' - z_t)} dz_t = Q_l(z_t'), \quad l \geq N, \quad (4.86)$$

que corresponde a função de Legendre de segunda espécie, assim, obtemos a representação de Froissart-Gribov para a amplitude de onda parcial

$$\begin{aligned} A_l(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{+\infty} D_s(s(z_t, t), t) Q_l(z_t) dz_t \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-z_0}^{-\infty} D_u(u(z_t, t), t) Q_l(z_t) dz_t, \quad l \geq N. \end{aligned} \quad (4.87)$$

## 4.5 Trajetórias de Regge no espalhamento relativístico.

Em se tratando do espalhamento de partículas a altas energias, as reações devem necessariamente ser tratadas segundo o ponto de vista relativístico. Considerando a existência de relações de dispersão com  $N$  subtrações e  $l \geq N$ , podemos representar a amplitude de onda parcial através da descrição de Froissart-Gribov (4.87). Escrevendo a segunda integral de (4.87) com a mudança  $z_t \rightarrow -z_t$  e usando  $u(-z_t, t) = s(z_t, t)$ , obtemos

$$Q_l(-z_t) = -e^{-i\pi l} Q_l(z_t), \quad (4.88)$$

assim, podemos reescrever (4.87) por

$$A_l(t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{+\infty} [D_s(s(z_t, t), t) + e^{-i\pi l} D_u(u(z_t, t), t)] Q_l(z_t) dz_t. \quad (4.89)$$

O primeiro termo de (4.89) desaparece para  $l \rightarrow \infty$ , devido o comportamento assintótico de  $Q_l(z)$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} Q_l(z_t) \sim l^{-1/2} \exp \left[ -\left(l + \frac{1}{2}\right) \ln(z_t + (z_t^2 - 1)^{1/2}) \right]. \quad (4.90)$$

Porém, a exponencial no segundo termo vale, para  $l$  inteiro

$$e^{-i\pi l} = \cos \pi l = (-1)^l,$$

que apresenta um mal comportamento para  $(\text{Im } l \rightarrow \infty)$ , como podemos verificar mais facilmente tomando  $e^{-i\pi l} = e^{-i\pi(\text{Re } l + i \text{Im } l)}$  em (4.89)

$$\lim_{l \rightarrow \infty} A_l(t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{+\infty} D_s(s(z_t, t), t) \lim_{l \rightarrow \infty} e^{-i\pi \text{Re } l} Q_l(z_t) dz_t \lim_{l \rightarrow \infty} e^{\pi \text{Im } l}. \quad (4.91)$$

Esse problema impossibilita a continuação da amplitude  $A_l(t)$  à valores complexos de  $l$ . A solução para contornarmos essa dificuldade consiste na introdução de um novo número quântico denominado assinatura [3, 71], dado por  $\xi = \pm 1$  e escrevendo a amplitude de onda parcial por

$$A_l^\xi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{+\infty} D_s^\xi(s, t) Q_l(z_t) dz_t, \quad (4.92)$$

ou seja, a amplitude de onda parcial assinada que, por construção, tem um bom comportamento para  $l \rightarrow \infty$  e portanto, conforme o teorema de Carlson, pode ser continuada analiticamente de maneira unívoca para o plano complexo. Em (4.92),  $D_s^\xi$  representa a descontinuidade assinada

$$D_s^\xi(s, t) \equiv D_s(s, t) + \xi D_u(s, t). \quad (4.93)$$

Dessa forma, os valores de (4.89) e (4.92) coincidem para valores inteiros pares e ímpares de  $l$ , ou seja,

$$A_l^+(t) = A_l(t), \quad \text{para } l \text{ par } (\xi = +1), \quad (4.94)$$

$$A_l^-(t) = A_l(t), \quad \text{para } l \text{ ímpar } (\xi = -1). \quad (4.95)$$

Escrevendo (4.92) como

$$A_l^\xi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} (D_s + \xi D_u) Q_l(z_t) dz_t, \quad (4.96)$$

aplicando  $\sum_{\xi=\pm 1} (1 + \xi e^{-i\pi l})$  em ambos os lados e usando a igualdade

$$D_s + \xi D_u = D_s + (-1)^l D_u,$$

obtemos a relação entre as amplitudes

$$A_l(t) = \frac{1}{2} \sum_{\xi=\pm 1} (1 + \xi e^{-i\pi l}) A_l^\xi(t). \quad (4.97)$$

Uma vez obtida  $A_l^\xi$ , podemos escrever a amplitude de espalhamento assinada

$$A^\xi(z_t, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) A_l^\xi(t) P_l(z_t). \quad (4.98)$$

Além dessa representação, podemos construir uma forma para  $A^\xi(z_t, t)$  a partir da série (4.40), truncada

$$\begin{aligned} A^\xi(z_t, t) &= (2l + 1) A_l^\xi(t) P_l(z_t) - \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (2l + 1) A^\xi(l, s) \frac{P_l(-z_t)}{\sin \pi l} dl \\ &= -\frac{1}{2i} \int_c (2l + 1) A^\xi(l, s) \frac{P_l(-z_t)}{\sin \pi l} dl \\ &\quad - \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (2l + 1) A^\xi(l, s) \frac{P_l(-z_t)}{\sin \pi l} dl. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Definindo o integrando em  $c$  por  $f^\xi(l)$ , teremos pelo teorema do resíduo

$$\int_c f^\xi(l) dl = 2\pi i \sum_{i_\xi} \text{Res } f^\xi(l) \Big|_{l \rightarrow \alpha_{i_\xi}}, \quad (4.100)$$

onde  $\alpha_{i_\xi}$  é o  $i$ -ésimo pólo da amplitude assinada  $A^\xi(z_t, t)$ . Repetindo exatamente o procedimento que levou à formação de (4.45), obtemos

$$\begin{aligned} A^\xi(z_t, t) &= - \sum_{i_\xi} \pi \beta_{i_\xi}(t) (2\alpha_{i_\xi}(t) + 1) \frac{P_{\alpha_{i_\xi}}(-z_t)}{\sin \pi \alpha_{i_\xi}} \\ &\quad - \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (2l+1) A(l, t) \frac{P_l(-z_t)}{\sin \pi l} dl, \end{aligned} \quad (4.101)$$

sendo o somatório, representando a soma sobre todos os polos de Regge de assinatura definida. Aplicando  $\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(z_t)$  na relação (4.97), obtemos a amplitude completa

$$A(z_t, t) = \frac{1}{2} \sum_{\xi=\pm 1} (1 + \xi e^{-i\pi l}) A_l^\xi(z_t, t). \quad (4.102)$$

Substituindo (4.101) em (4.102), chegamos em

$$\begin{aligned} A(z_t, t) &= - \sum_{\xi=\pm 1} \sum_{i_\xi} \frac{1 + \xi e^{-i\pi l}}{2} \pi \beta_{i_\xi}(t) (2\alpha_{i_\xi}(t) + 1) \frac{P_{\alpha_{i_\xi}}(-z_t)}{\sin \pi \alpha_{i_\xi}(t)} \\ &\quad - \frac{1}{2i} \sum_{\xi=\pm 1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1 + \xi e^{-i\pi l}}{2} (2l+1) A(l, t) \frac{P_l(-z_t)}{\sin \pi l} dl. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Para grande  $|z_t|$ , a série de polos apresentam a contribuição dominante, dessa forma, considerando esse limite, o comportamento dos polinômios de Legendre, e incorporando em  $\beta_{i_\xi}$  os fatores irrelevantes, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{|z_t| \rightarrow \infty} A(z_t, t) &\simeq - \sum_{\xi=\pm 1} \sum_{i_\xi} \beta_{i_\xi}(t) \frac{1 + \xi e^{-i\pi \alpha_{i_\xi}(t)}}{\sin \pi \alpha_{i_\xi}(t)} (-z_t)^{\alpha_{i_\xi}(t)} \\ &\quad - \frac{1}{2i} \sum_{\xi=\pm 1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1 + \xi e^{-i\pi l}}{2} (2l+1) A(l, t) \frac{(-z_t)^l}{\sin \pi l} dl. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Considerando que a segunda integral se anula para  $l \rightarrow \infty$ , e pegando apenas o pólo dominante, teremos a amplitude  $A(z_t, t)$  escrita para o canal- $s$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(s, t) \simeq -\beta(t) \frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha(t)}}{\sin \pi\alpha(t)} s^{\alpha(t)}. \quad (4.105)$$

Para escrevermos a amplitude espalhamento no canal- $t$ , basta escrevermos a amplitude assinada partindo da expansão em onda parcial no canal- $s$ , isso é equivalente a fazermos a extensão analítica  $s \longleftrightarrow t$  em (4.105), assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(s, t) \simeq -\beta(s) \frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha(s)}}{\sin \pi\alpha(s)} t^{\alpha(s)}. \quad (4.106)$$

As expressões (4.105) e (4.106) nos mostram que a singularidade do momentum angular complexo (pólo de Regge) da amplitude de onda parcial em um determinado canal, controla o comportamento assintótico da amplitude de espalhamento no canal cruzado.

## 4.6 Limite de altas energias.

Para situações em que estivermos tratando de processos de espalhamento a altas energias, é mais conveniente introduzirmos na amplitude de onda parcial

$$A_l^\xi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} D_s^\xi(s, t) Q_l(z_t) dz_t,$$

o comportamento assintótico dos polinômios de legendre de segunda espécie

$$\lim_{|z_t| \rightarrow \infty} Q_l(z_t) \sim \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} (2z_t)^{-l-1}. \quad (4.107)$$

Usando a aproximação (limite de Regge)

$$z_t \simeq -\frac{2s}{|t|}, \quad (4.108)$$

teremos

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{(-4)^l} \frac{\Gamma(l+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+1)} A_l^\xi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} D_s^\xi(s, t) \left( \frac{s}{|t|} \right)^{-l-1} d \left( \frac{s}{|t|} \right).$$

Definindo o lado esquerdo por  $a_s^\xi(l, t)$  e usando  $z_0 = 1$ , obtemos a expressão

$$a_s^\xi(l, t) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty D_s^\xi(s, t) \left( \frac{s}{|t|} \right)^{-l-1} d \left( \frac{s}{|t|} \right), \quad (4.109)$$

que corresponde a projeção de Froissart-Gribov das amplitudes de ondas parciais assinadas no limite de Regge ([3, 71]).

Observando a equação (4.109), percebemos que a relação entre  $a_s^\xi(l, t)$  e a descontinuidade assinada  $D_s^\xi(l, t)$ , é dada por uma transformada de Mellin. Dessa forma, definindo a transformada de Mellin e a sua inversa, respectivamente, por

$$\mathcal{M}[g(x), y] \equiv g(y) = \int_0^\infty g(x) x^{y-1} dx \quad (4.110)$$

e

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(y) x^{-y} dy. \quad (4.111)$$

Identificando em (4.111) as variáveis  $y = -l$  e  $x = s/|t|$ , obtemos

$$D_s^\xi(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a_s^\xi(l, t) \left( \frac{s}{|t|} \right)^l dl. \quad (4.112)$$

Dessa forma, observamos que a descontinuidade assinada corresponde à transformada inversa de Mellin da projeção de Froissart-Gribov das amplitudes de ondas parciais assinadas, definidas no limite de Regge.

Lembrando que a descontinuidade corresponde à parte imaginária da amplitude de espalhamento, poderemos considerar o caso em que  $D_s^\xi$  se comporta como

$$D_s^\xi(s, t) = s^\alpha. \quad (4.113)$$

Substituindo em (4.109), obtemos

$$a_s^\xi(l, t) = |t|^l \int_1^\infty s^{-l-1+\alpha} ds \sim \frac{1}{l-\alpha}, \quad (4.114)$$

que nos mostra que, nesse caso, a amplitude de onda parcial no plano  $l$  tem um pólo simples que corresponde ao pólo de Regge. Dessa forma, na presença um pólo de Regge, a amplitude

de onda parcial relativística  $A(l, t)$  comporta-se como

$$\lim_{l \rightarrow \alpha(t)} A(l, t) \sim \frac{\beta(t)}{l - \alpha(t)}. \quad (4.115)$$

Para um processo de canal- $s$  e  $t$  físico ( $t \leq 0$ ), as singularidades no plano  $l$  da amplitude de onda parcial (4.115) serão complexas, e essas singularidades denominadas trajetórias de Regge (ou polos de Regge) correspondem à ressonâncias ou estados limites. Para verificarmos como isso ocorre, consideremos o pequeno deslocamento para  $\alpha(t_0)$

$$\alpha(t_0) = l + i\epsilon, \quad (4.116)$$

sendo  $l$  inteiro,  $t_0$  um valor real e  $\epsilon$  um número real pequeno. Desenvolvendo  $\alpha(t)$  em uma série de Taylor, obtemos a aproximação

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t)|_{t=t_0} + \dots \\ &\simeq l + i\epsilon + (t - t_0)\alpha'(t_0). \end{aligned} \quad (4.117)$$

Definindo a razão  $\Gamma$  por

$$\Gamma = \frac{\epsilon}{\alpha'(t_0)} = \frac{\text{Im } \alpha(t_0)}{\alpha'(t_0)}, \quad (4.118)$$

obtemos o comportamento do denominador de (4.115)

$$\frac{1}{l - \alpha(t)} \propto \frac{1}{t - t_0 + i\Gamma}. \quad (4.119)$$

A relação (4.119) corresponde à estrutura de um termo tipo Breit-Wigner para uma ressonância de massa  $M = \sqrt{t_0}$ . Para que a razão  $\Gamma$  seja levada em consideração, deve ser verificada a relação

$$\left. \text{Im } \alpha'(t) \right|_{t=t_0} \ll \left. \text{Re } \alpha'(t) \right|_{t=t_0}. \quad (4.120)$$

Para processos com partículas de massas iguais  $m$ , a relação  $t \geq 4m^2$  nos mostra que no limite inferior de  $t$ , verifica-se  $\text{Im } \alpha(t) = 0$ , daí surge a expressão de que os polos de Regge correspondem aos estados limites. Dessa forma, os polos de Regge correspondem à

ressonâncias e estados ligados de incremento de momento angular  $l$  (spin), quando  $t$  for uma massa quadrada, ou seja, para valores reais e positivos. Na literatura, Chama-se  $\alpha(t)$  de trajetória de Regge.

Seja agora a amplitude de espalhamento no canal- $s$  já definida anteriormente em (4.105)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(s, t) \simeq -\beta(t) \frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha(t)}}{\sin \pi\alpha(t)} s^{\alpha(t)}.$$

Pode-se observar que seus denominadores são nulos para valores inteiros de  $\alpha(t)$ , levando isso em consideração e para evitar que o fator de assinatura se anule nos outros casos, impomos que cada trajetória com assinatura positiva ( $\xi = +1$ ) seja interpolada com ressonâncias de momentum angular par, enquanto que as trajetórias com assinatura negativa ( $\xi - 1$ ) são interpoladas com ressonâncias de momentum angular ímpar. Dessa forma, concluímos que a troca de uma família de ressonâncias em um certo canal (no exemplo aqui visto canal- $s$ ), governa o comportamento assintótico da amplitude de espalhamento no canal cruzado (no exemplo, canal- $t$ ), além disso, reinterpretando a equação (4.105), observamos que o coeficiente linear  $\alpha(0)$  define a trajetória que apresenta a contribuição mais importante para o crescimento de  $s$ .

Escrevemos agora a expansão (4.117), tomada para  $t_0 = 0$  e  $t$  suficiente pequeno

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha' t, \tag{4.121}$$

onde novamente chamamos  $\alpha(0)$  de coeficiente linear, e  $\alpha'$  de coeficiente angular, ambos se referindo à trajetória. Essa expressão nos ajuda a visualizar melhor as trajetórias de Regge. Na verdade, quando as ressonâncias são interpoladas com os mesmos números quânticos (menos o spin), a expansão (4.121) também servirá para grandes valores de  $t$ , e isso vale tanto para trajetórias mesônicas quanto para bariônicas, ou seja, para trajetórias onde as interpolações possuem spins inteiros e semi-inteiros, respectivamente.

Na tabela 4.1, apresentamos alguns números quânticos (paridade (p), conjugação de carga (c), G-paridade (G), isospin (I) e assinatura ( $\xi$ )) para as trajetórias  $\rho$ ,  $f_2$ ,  $\omega$ , e  $\alpha_2$

Particularmente, a trajetória  $f_2$  apresenta os números quânticos do vácuo. Em se tratando das trajetórias bariônicas, elas apresentam coeficiente angular  $\alpha'$  semelhante ao das mesônicas, mas o coeficiente linear bastante pequeno e em alguns casos, negativo.

Encerramos a seção com as seguintes observações:

reggeon	paridade	conjugação de carga	G-paridade	isospin	assinatura
$[f_2]$	+1	+1	+1	0	+1
$[\rho]$	-1	-1	+1	+1	-1
$[\omega]$	-1	-1	-1	0	-1
$[a_2]$	+1	+1	-1	+1	+1

Tab. 4.1: Números quânticos dos mésons dominantes

- a) O intervalo de massa para cada uma das trajetórias é linear;
- b) O coeficiente angular é universal;
- c) As trajetórias mesônicas dominantes são degeneradas, ou seja, elas apresentam o mesmo coeficiente linear e mesmo coeficiente angular.

Na prática, as trajetórias com  $\xi = +1$  ( $f_2$  e  $a_2$ ) são indistinguíveis das trajetórias com assinatura  $\xi = -1$  ( $\rho$  e  $\omega$ ).

## Capítulo 5

# Modelo baseado em polos de Regge

Neste capítulo estudamos duas variantes de um modelo de interação entre hádrons baseado em polos de Regge. Descrevemos os observáveis frontais  $\sigma_{\text{tot}}^{pp, \bar{p}p}$  e  $\rho^{pp, \bar{p}p}$  por meio de duas amplitudes de espalhamento com comportamento assintóticos distintos. A primeira amplitude corresponde à amplitude de Regge efetiva ao nível de Born, que apresenta resultados satisfatórios, apesar de violar a unitariedade para energias  $\sqrt{s} > 10^{27}$  GeV. A segunda forma é a amplitude de Regge eiconalizada, que preserva a unitariedade, satisfazendo assim uma das propriedades fundamentais da teoria de partículas a altas energias. Também investigamos uma amplitude eiconalizada onde a trajetória do Pomeron, não-linear, agrega um *loop* de píons.

### 5.1 Fenomenologia de Regge.

Vimos no capítulo anterior que na interpretação da teoria de Regge, a amplitude de espalhamento de dois corpos  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  no limite de grande  $s$  é dada por

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(s, t) \simeq \beta(t) \left[ -\frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha(t)}}{\sin \pi\alpha(t)} \right] s^{\alpha(t)}. \quad (5.1)$$

Definindo o termo entre colchetes como fator de assinatura  $\eta(t)$ , podemos escrever a amplitude de espalhamento para a troca de uma trajetória de Regge, como

$$A(s, t) = \beta(t) \eta(t) s^{\alpha(t)}, \quad (5.2)$$

sendo o fator de assinatura representado de maneira geral por

$$\eta(t) = -\frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha(t)}}{\sin \pi\alpha(t)}. \quad (5.3)$$

Separando  $\alpha(t)$  em duas metades, obtemos

$$\eta(t) = -\frac{1 + \xi [\cos^2 \frac{\pi}{2}\alpha(t) - \sin^2 \frac{\pi}{2}\alpha(t) - 2i \sin \frac{\pi}{2}\alpha(t) \cos \frac{\pi}{2}\alpha(t)]}{2 \sin \frac{\pi}{2}\alpha(t) \cos \frac{\pi}{2}\alpha(t)}. \quad (5.4)$$

Assim, para trajetórias com assinatura positiva ( $\xi = +1$ ), teremos

$$\eta(t) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha(t)}}{\sin \frac{\pi}{2}\alpha(t)}, \quad (5.5)$$

e para as trajetórias com assinatura negativa ( $\xi = -1$ ),

$$\eta(t) = -i \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha(t)}}{\cos \frac{\pi}{2}\alpha(t)}. \quad (5.6)$$

Considerando as trajetórias lineares  $\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha' t$ , teremos para a assinatura par

$$\eta(t) = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(\alpha(0) + \alpha' t)}}{\sin \frac{\pi}{2}(\alpha(0) + \alpha' t)}. \quad (5.7)$$

No modelo de Regge que iremos explorar utiliza-se uma aproximação válida para pequenos valores de  $|t|$  dada por

$$\cos \frac{\pi}{2}\alpha' t \simeq 1, \quad \sin \frac{\pi}{2}\alpha' t \simeq \frac{\pi}{2}\alpha' t, \quad (5.8)$$

de tal forma que

$$\sin \frac{\pi}{2}(\alpha(0) + \alpha' t) \sim t. \quad (5.9)$$

Desconsiderando a dependência com  $t$  do denominador de (5.7), escrevemos

$$\eta(t) = -e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha(0)} e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha't} = -\eta(0) e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha't}. \quad (5.10)$$

Repetindo o procedimento anterior para a assinatura negativa e considerando o seguinte comportamento do denominador

$$\cos \frac{\pi}{2}(\alpha(0) + \alpha't) \sim -t. \quad (5.11)$$

Desconsiderando novamente a dependência em  $t$ , obtemos

$$\eta(t) = i e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha(0)} e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha't} = i\eta(0) e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha't}. \quad (5.12)$$

Em determinadas situações, é comum considerar  $\eta(0) = 1$ , ou absorvê-lo em outras constantes da amplitude de espalhamento, como fazem, por exemplo, Goulianos e colaboradores [78] (este modelo, que chamaremos por *modelo CMG*, será visto com detalhes mais adiante). Com estes passos, os fatores de assinatura par e ímpar serão, respectivamente

$$\eta(t) = -e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha't}, \quad (5.13)$$

e

$$\eta(t) = i e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha't}. \quad (5.14)$$

Retornando à expressão (5.2) e assumindo o comportamento exponencial para o resíduo

$$\beta(t) = \beta(0) e^{B_0 t/2},$$

teremos

$$A(s, t) = \beta(0) \eta(0) s^{\alpha(0)} e^{\frac{B_0 t}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha' t} s^{\alpha' t}. \quad (5.15)$$

### 5.1.1 Seções de choque total e parâmetro $\rho$ .

Uma vez obtida a amplitude de espalhamento (5.2), e entendidas as suas propriedades, podemos calcular os observáveis frontais ( $t = 0$ ) seção de choque total e parâmetro  $\rho$ . A previsão da teoria de Regge para a seção de choque total, considerando apenas um polo simples é dada por

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma_{\text{tot}}(s, t = 0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} A(s, t = 0) \sim s^{\alpha(0)-1}. \quad (5.16)$$

Para o caso em que  $s$  não é tão grande, ou seja, quando houverem contribuições dos polos de menor parte real que a trajetória dominante, a seção de choque total será dada por uma soma de termos semelhantes a (5.16)

$$\sigma_{\text{tot}} \sim \sum_i A_i s^{\alpha_i(0)-1}. \quad (5.17)$$

Conforme já visto nos capítulos anteriores, um dos observáveis frontais corresponde à razão da parte real pela parte imaginária da amplitude de espalhamento, denominado parâmetro  $\rho$ . Para determinarmos esse observável na teoria de Regge, para processos de dois corpos no limite de grande  $s$ , tomamos a amplitude (5.1) na forma

$$A(s, t) = -\beta(t) s^{\alpha(t)} \frac{1 + \xi \cos \pi\alpha(t)}{\sin \pi\alpha(t)} + i\beta(t)\xi s^{\alpha(t)}. \quad (5.18)$$

Dividindo a parte real pela parte imaginária na direção frontal ( $t = 0$ ), obtemos

$$\frac{\text{Re}A(s, t = 0)}{\text{Im}A(s, t = 0)} = -\frac{\xi + \cos \pi\alpha(0)}{\sin \pi\alpha(0)} = \rho(s, t = 0). \quad (5.19)$$

Assim, o parâmetro  $\rho$  é obtido na teoria de Regge através do coeficiente linear da trajetória trocada.

### 5.1.2 O Pomeron.

De acordo com (5.16), a teoria de Regge prevê o comportamento decrescente com a energia para as seções de choque total em processos cujas trajetórias trocadas possuam coeficientes lineares inferiores a 1, como é o caso das trajetórias vistas anteriormente ( $\alpha(0) = 0.5$ ). Porém, já observamos nos dados experimentais (primeiro capítulo) que as seções de choque total hadrônicas, como funções de  $s$  são aproximadamente constantes em torno de  $\sqrt{s} \sim (10 - 20 \text{ GeV})$  e crescem com o aumento da energia de centro de massa em energias maiores. A solução para a descrição das seções de choque total no contexto da teoria de Regge foi introduzida por Chew e Frautschi (1961) e Gribov (1961). Assim, foi-se introduzida uma trajetória de Regge com coeficiente linear  $\alpha(0) = 1$ , chamada Pomeron <sup>1</sup> denotada por  $\mathbb{P}$ , a fim de descrever as seções de choque constantes.

A partir de ajustes de dados em processos de espalhamento elástico, encontra-se que o coeficiente angular do Pomeron é da ordem de  $\alpha'_{\mathbb{P}} \simeq 0.25 \text{ GeV}^2$ , ou seja, a trajetória  $\mathbb{P}$  é menos inclinada que as demais (vistas anteriormente). Como a introdução do Pomeron foi feita, em parte, para reproduzir o comportamento das seções de choque total constantes, a equação (5.16) nos mostrar que necessariamente deve-se ter  $\alpha_{\mathbb{P}}(0) = 1$ . Dessa forma, o Pomeron é a trajetória dominante nos processos elásticos difrativos, que ocorrem pela troca de números quânticos do vácuo no canal-t. Assim,

$$[\mathbb{P}] : \quad P = +1, \quad C = +1, \quad G = +1, \quad I = 0, \quad \xi = +1. \quad (5.20)$$

Como a assinatura é positiva, temos (usando a regra de L'Hopital),

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + e^{-i\pi x}}{\sin \pi x} = -i, \quad (5.21)$$

assim, a amplitude com o Pomeron dominante tem  $\eta(0) = i$ . Comportando-se assintoticamente, para  $t = 0$ , como

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A_{\mathbb{P}}(s, t = 0) \simeq i \beta_{\mathbb{P}}(0) s^{\alpha_{\mathbb{P}}(0)}, \quad (5.22)$$

que é um valor imaginário puro.

---

<sup>1</sup> Graças a I. Ya. Pomeranchuk.

### 5.1.3 Trajetórias de Regge e a interação de hádróns

Apresentamos aqui alguns exemplos de processos hadrônicos elásticos e suas respectivas trajetórias trocadas [3].

$$\pi^- p \Rightarrow \mathbb{P} + f_2 + \rho,$$

$$\pi^+ p \Rightarrow \mathbb{P} + f_2 - \rho,$$

$$K^- p \Rightarrow \mathbb{P} + f_2 + \rho + a_2 + \omega,$$

$$K^+ p \Rightarrow \mathbb{P} + f_2 - \rho + a_2 - \omega,$$

$$pp \Rightarrow \mathbb{P} + f_2 - \rho + a_2 - \omega,$$

$$\bar{p}p \Rightarrow \mathbb{P} + f_2 + \rho + a_2 + \omega,$$

$$pn \Rightarrow \mathbb{P} + f_2 - \rho - a_2 - \omega.$$

Nas seções de choque total anti-partícula-partícula as diferenças dos Pomerons são canceladas, então temos

$$\sigma_{\text{tot}}(K^- p) - \sigma_{\text{tot}}(K^+ p) \Rightarrow 2(\omega + \rho),$$

$$\sigma_{\text{tot}}(\bar{p}p) - \sigma_{\text{tot}}(pp) \Rightarrow 2(\omega + \rho),$$

$$\sigma_{\text{tot}}(pn) - \sigma_{\text{tot}}(pp) \Rightarrow 2(\omega - a_2),$$

$$\sigma_{\text{tot}}(\pi^- p) - \sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p) \Rightarrow 2\rho.$$

Como as trajetórias  $\omega$ ,  $\rho$  e  $a_2$  são secundárias, as diferenças entre as seções de choque

total tendem a desaparecer no limite  $s \rightarrow \infty$ , conforme o teorema de Pomeranchuk.

Considerando a contribuição do Pomeron, a seção de choque total (5.16), na abordagem de Regge será

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma_{\text{tot}}(s, t = 0) \sim s^{\alpha_{\mathbb{P}}(0)-1}, \quad (5.23)$$

que é constante para  $\alpha_{\mathbb{P}}(0) = 1$ . Em outras palavras, o coeficiente linear do Pomeron satura o limite de unitariedade, porém os dados experimentais de processos de espalhamento de hádrons a altas energias nos mostram que as seções de choque total crescem com a energia, contrariando, aparentemente, a previsão de Regge. Na verdade, esses resultados nos mostram que o Pomeron tem um coeficiente linear ligeiramente maior que 1. Nos modelos aqui propostos, procuraremos obter os melhores ajustes para os parâmetros do Pomeron, uma vez que na descrição dos processos hadrônicos a altas energias, via teoria de Regge, ele corresponde à trajetória dominante.

## 5.2 Ajustes para o coeficiente linear do Pomeron

Entre as trajetórias de Regge, o Pomeron controla o comportamento dos observáveis frontais  $\sigma_{\text{tot}}$  e  $\rho$  a altas energias, por outro lado, os reggeons secundários contribuem principalmente na região de baixas energias. Dessa forma, na descrição de processos de espalhamento  $pp$  e  $\bar{p}p$ , a altas energias, a trajetória mais importante corresponde ao Pomeron, porém, informações experimentais de processos a altas energias indicam diferentes resultados para a seção de choque total  $\bar{p}p$  em  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV fornecidos pelas colaborações E710 [72], CDF [73] e E811 [74, 75]. Essas discrepâncias apontavam para diferentes medidas do coeficiente linear do Pomeron, portanto resultavam em diferentes valores para os observáveis frontais  $\sigma_{\text{tot}}$  e  $\rho$ , porém, os dados recentes do LHC através da colaboração TOTEM nos permitem ajustar os valores mais adequados dos parâmetros para a elaboração de um modelo de descrição dos observáveis frontais a altas energias. Dessa forma, a teoria de Regge é capaz de fornecer uma boa descrição dos observáveis frontais em um processo de espalhamento de hádrons.

Os observáveis frontais de um processo hadrônico  $\sigma_{\text{tot}}$  e  $\rho$  podem ser descritos no modelo de Pomeron simples através da amplitude de Regge efetiva  $\mathcal{A}(s, t)$  apresentada por

Donnachie e Landshoff (DL) como [76]

$$\mathcal{A}(s, t) = X_{hh} s^{\alpha_{\mathbb{P}}(t)} + Y_{hh} s^{\alpha_{\eta}(t)}. \quad (5.24)$$

Usando o teorema óptico, obtemos a seção de choque total

$$\sigma_{\text{tot}}(s, t = 0) = X_{hh} s^{\alpha_{\mathbb{P}}(t)-1} + Y_{hh} s^{\alpha_{\eta}(t)-1}, \quad (5.25)$$

onde o primeiro termo corresponde à troca de um Pomeron, e o segundo à troca dos reggeons secundários  $f_2, a_2, \omega$  e  $\rho$ . Os fatores  $X_{hh}$  e  $Y_{hh}$  correspondem aos acoplamentos entre as trajetórias e as partículas hadrônicas. Particularmente no caso do Pomeron, pelo fato de ter os números quânticos do vácuo, seus acoplamentos à uma partícula e à uma antipartícula são iguais.

Como já mencionado, o termo  $\mathcal{A}(s, t)$  corresponde à uma amplitude efetiva, no sentido de que a expressão (5.25) não obedece a unitariedade assintoticamente, portanto não respeita o limite de Froissart-Martin, porém, essa violação só ocorre a altíssimas energias de centro de massa ( $\sqrt{s} \sim 10^{27}$  GeV). Dessa forma, enquanto não atingirmos esse limite superior, a abordagem de Regge permanece válida e espera-se que a unitariedade seja preservada mesmo na amplitude a nível de Born.

Originalmente o modelo de Donnachie e Landshoff apresenta os mesmo coeficientes linear  $\alpha_{\eta}(0)$  e angular  $\alpha'_{\eta}$  para os reggeons secundários, ou seja, as trajetórias de Regge secundárias são degeneradas, diferenciando-se entre si apenas por um intervalo linear de massa. No entanto, ajustes globais de seção de choque total e parâmetro  $\rho$  indicam que essa degenerescência não é válida para regiões de energia de centro de massa abaixo de 9.0 GeV [77]. Uma forma de contornar essa dificuldade é separar na amplitude de espalhamento efetiva as contribuições das trajetórias secundárias pares ( $\xi = +1$ )  $f_2$  e  $a_2$ , das contribuições ímpares ( $\xi = -1$ )  $\rho$  e  $\omega$ , assim, a amplitude (5.24) poderá ser escrita como

$$\mathcal{A}^{pp, \bar{p}p}(s, t) = \mathcal{A}_{\alpha_{\mathbb{P}}}(s, t) + \mathcal{A}_{a_2/f_2}(s, t) + \tau \mathcal{A}_{\omega/\rho}(s, t), \quad (5.26)$$

sendo

$$\tau = \begin{cases} -1, & \text{para } pp \\ +1, & \text{para } \bar{p}p \end{cases}$$

Semelhantemente aos capítulos anteriores, escrevemos os observáveis frontais seção de

choque total  $\sigma_{\text{tot}}$  e  $\rho$  através da amplitude de espalhamento  $\mathcal{A}(s, t)$  por

$$\sigma_{\text{tot}}(s) = \frac{4\pi}{s} \mathcal{A}(s, t = 0) \quad (5.27)$$

e

$$\rho(s) = \frac{\text{Re } \mathcal{A}(s, t = 0)}{\text{Im } \mathcal{A}(s, t = 0)}, \quad (5.28)$$

onde  $s$  é o quadrado da energia de centro de massa e  $t$  o quadrado do quadrimomentum transferido no processo de espalhamento.

Resultados recentes de ajustes globais para  $\sigma_{\text{tot}}$  e  $\rho$  [77, 78] indicam que os melhores resultados são obtidos com trajetórias não degeneradas. Dessa forma, a amplitude de espalhamento a nível de Born é formada através das contribuições

$$\mathcal{A}_{\text{Born}}^{pp,\bar{p}p}(s, t) = \mathcal{A}_{\alpha_{\mathbb{P}}}(s, t) + \mathcal{A}_{a_2/f_2}(s, t) + \tau \mathcal{A}_{\omega/\rho}(s, t), \quad (5.29)$$

onde cada termo do lado direito corresponde à uma amplitude hádron-próton a nível de Born para a troca de um reggeon simples.

### 5.2.1 O modelo CMG original

No modelo fenomenológico proposto por Goulianos e colaboradores, que denominaremos aqui por modelo CMG [78], os autores apresentam as contribuições de cada reggeon genericamente por

$$\mathcal{A}_i(s, t) = \beta_i^h \beta_i^p F_i^h(t) F_i^p(t) \eta(t) \left( \frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_i(t)}, \quad (5.30)$$

sendo  $i = \mathbb{P}$ ,  $a_2/f_2$ ,  $\omega/\rho$  os reggeons considerados,  $\beta_i^h(t)$  o acoplamento entre os reggeons e os hádrons e  $F_i^h(t)$  o fator de forma correspondente ao vértice, que na referência é assumido como um fator exponencial  $F_i^h(t) = e^{b_{0,i}^h t}$ . As trajetórias são consideradas lineares,  $\alpha_i(t) = \alpha_i(0) + \alpha_i' t$ , e os fatores de assinatura para trajetórias com assinatura par ( $\mathbb{P}$ ,  $a_2$ ,  $f_2$ ) são  $\eta(t) = -e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha' t}$  e para trajetórias com assinatura ímpar ( $\omega$ ,  $\rho$ )  $\eta(t) = i e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha' t}$ .

Uma vez obtida a amplitude de espalhamento a nível de Born, a função eiconal é dada

pela integral no espaço do parâmetro de impacto  $b$  ( $t = -q^2$ )

$$\mathcal{A}_{\text{Eic}}(s, t) = i \int_0^\infty J_0(bq) [1 - e^{ix(s,b)}] b db, \quad (5.31)$$

sendo a função eiconal definida por

$$\chi(s, b) = s^{-1} \int_0^\infty J_0(bq) \mathcal{A}_{\text{Born}}(s, t) q dq. \quad (5.32)$$

No modelo CMG também são usados dados de  $\pi^\pm p$  e  $K^\pm p$  a fim de verificar a relevância da contribuição dominante do Pomeron a altas energias.

No ajuste global para os processos  $pp$  e  $\bar{p}p$ , o modelo CMG a nível de Born apresenta seis parâmetros livres ( $\alpha_{\mathbb{P}}(0), \alpha_{a/f}(0), \alpha_{\omega/\rho}(0)$ ) e ( $\beta_{\mathbb{P}}, \beta_{a/f}, \beta_{\omega/\rho}$ ). Na versão eiconalizada, o número de parâmetros aumenta para doze, devido à adição dos fatores ( $b_{0,\mathbb{P}}, b_{0,a/f}, b_{0,\omega/\rho}$ ) e ( $\alpha'_{\mathbb{P}}, \alpha'_{a/f}, \alpha'_{\omega/\rho}$ ). Considerando  $\alpha'_{\mathbb{P}} = 0.25 \text{ GeV}^{-2}$  e as expressões para as trajetórias secundárias

$$\alpha_{a/f} = 0.68 + 0.82t, \quad \alpha_{\omega/\rho} = 0.46 + 0.92t, \quad (5.33)$$

os autores conseguem reduzir o número de parâmetros de ajuste. Na Tabela 5.1 apresentamos os ajustes obtidos no modelo CMG original a nível de Born e eiconalizado, a partir desses ajustes, os autores obtiveram os coeficientes lineares do Pomeron, para as amplitudes de espalhamento a nível de Born e eiconal, respectivamente, por

$$\alpha_{\mathbb{P}}^{\text{Born}}(0) = 1.104 \pm 0.002, \quad \alpha_{\mathbb{P}}^{\text{Eic}}(0) = 1.122 \pm 0.002, \quad (5.34)$$

com  $\chi^2/\text{gl} = 1.56$  para a amplitude a nível de Born e 1.46 para a amplitude eiconalizada.

Em Fig. 5.1 apresentamos, separadamente, as contribuições de cada trajetória de Regge para  $\sigma_{\text{tot}}^{\bar{p}p}$  tanto a nível de Born quanto eiconalizado. Nestes gráficos, é possível perceber claramente o papel dominante do Pomeron para o crescimento da seção de choque total a altas energias, em relação aos reggeons secundários, dessa forma, podemos afirmar que o Pomeron é objeto central para a descrição dos observáveis frontais  $\sigma_{\text{tot}}$  e  $\rho$  em altas energias, nos modelos de Regge estendidos. Em Fig. 5.2 e Fig. 5.3 apresentamos, respectivamente as seções de choque total e parâmetro rho para os processos  $pp$  e  $\bar{p}p$ , a nível de Born e Eiconal, obtidos originalmente no modelo CMG. Além dessas medidas, apresentamos na Fig. 5.4 a comparação entre as seções de choque total a nível de Born e Eiconal do modelo CMG

original, e os dados atuais de TOTEM, AUGER e TA (dados de raios cósmicos).

### 5.3 Extensões do modelo CMG original

Levando em consideração que o Pomeron apresenta as contribuições dominantes a altas energias, podemos dizer que ele corresponde à trajetória mais importante em nossa análise de espalhamento hadrônico via formulação fenomenológica de Regge. Dessa forma, assumindo o Pomeron como objeto central em nossas análises, reinterpretaremos os processos de espalhamento  $pp$  e  $\bar{p}p$  segundo o modelo CMG, porém com novos conjuntos de dados de LHC, através da colaboração TOTEM.

Através do procedimento de análise de erros em quadratura, ajustamos os parâmetros do Pomeron e das trajetórias secundárias para as seguintes versões: modelo CMG reanalisado e modelo CMG estendido, que corresponde à introdução de um loop de píons na amplitude eiconalizada, produzindo uma modificação em  $\alpha_{\mathbb{P}}(t)$ , através de um fator não-linear na contribuição do Pomeron, que pode ser interpretado como uma auto-correção na trajetória  $\mathbb{P}$ . Uma vez ajustados globalmente aos dados de  $\sigma_{\text{tot}}^{pp, \bar{p}p}$  e  $\rho^{pp, \bar{p}p}$  apresentamos parâmetros do Pomeron e das trajetórias secundárias, considerando, além dos dados atualizados de TOTEM de seção de choque total, os dados de AUGER e TA.

#### 5.3.1 Modelo CMG reanalisado

Consideremos a amplitude próton-reggeon por

$$\mathcal{A}_i(s, t) = \beta_i^2(t) \eta(t) \left( \frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_i(t)}, \quad (5.35)$$

onde  $\beta_i(t)$  representa o fator de vértice próton-reggeon, e  $\eta(t)$  o fator de assinatura das trajetórias, dado para trajetórias lineares ( $\alpha_i(t) = \alpha_i(0) + \alpha'_i t$ ), par  $\mathbb{P}$ ,  $a_2$  e  $f_2$  ( $\xi = +1$ ) e ímpar  $\omega$  e  $\rho$  ( $\xi = -1$ ), respectivamente por

$$\eta(t) = -e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha't}, \quad \eta(t) = ie^{-i\frac{\pi}{2}\alpha't}$$

assim, a parte imaginária da amplitude de espalhamento a nível de Born será

$$\text{Im}\mathcal{A}_{\text{Born}}(s, t) = \beta_{\mathbb{P}}^2(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_{\mathbb{P}}(t)} + \beta_{a_2/f_2}^2(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_{a_2/f_2}(t)} - \tau \beta_{\omega/\rho}^2(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_{\omega/\rho}(t)}, \quad (5.36)$$

Usando o teorema óptico, chegamos em

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}(s) &= 4\pi s^{-1} \beta_{\mathbb{P}}^2(0) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_{\mathbb{P}}(0)} \\ &+ 4\pi s^{-1} \beta_{f_2/a_2}^2(0) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_{f_2/a_2}(0)} \\ &- \tau 4\pi s^{-1} \beta_{\rho/\omega}^2(0) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_{\rho/\omega}(0)}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Definindo os coeficientes lineares

$$\alpha_{\mathbb{P}}(0) \equiv 1 + \epsilon, \quad \alpha_{f_2/a_2}(0) \equiv 1 - \eta_+ \quad \text{e} \quad \alpha_{\rho/\omega}(0) \equiv 1 - \eta_-,$$

obtemos a expressão para a seção de choque total

$$\sigma_{\text{tot}}(s) = 4\pi [X s^\epsilon + Y_+ s^{-\eta_+} - \tau Y_- s^{-\eta_-}], \quad (5.38)$$

onde os coeficientes  $X$ ,  $Y_+$  e  $Y_-$  são dados por

$$X = \frac{\beta_{\mathbb{P}}^2(0)}{s_0^{1+\epsilon}}, \quad Y_+ = \frac{\beta_{f_2/a_2}^2(0)}{s_0^{1-\eta_+}} \quad \text{e} \quad Y_- = \frac{\beta_{\rho/\omega}^2(0)}{s_0^{1-\eta_-}}.$$

### Ajuste global dos parâmetros

Em Tab. 5.1 apresentamos os parâmetros ajustados para o modelo CMG reanalisado. A análise foi feita tanto a nível de Born quanto Eiconal, através do ajuste global para os dados de espalhamento frontal  $pp$  e  $\bar{p}p$  acima de  $\sqrt{s} = 10$  GeV. Os ajuste foram realizados através do programa CERN-MINUIT e do procedimento de análise de erros em  $\chi^2$ , assumindo um intervalo  $\chi^2 - \chi_{\text{min}}^2 = 14.684$  no caso de 9 parâmetros livres. Utilizamos os dados compilados

e analisados pelo *Particle Data Group*[19]. Em nossa análise, obtemos o ajuste global aos dados de  $\sigma_{\text{tot}}^{pp,\bar{p}p}(s)$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}(s)$  para os parâmetros do Pomeron ( $s_0 = 1.0 \text{ GeV}^2$ ), bem como para as trajetórias secundárias. Com base nesses valores, obtemos as previsões do modelo CMG reanalisado para  $\sigma_{\text{tot}}^{pp,\bar{p}p}(s)$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}(s)$ , a nível de Born e eiconal apresentados em (Fig. 5.5) e (Fig. 5.6), Além da comparação entre as seções de choque total a nível de Born e Eiconal do modelo, e os dados atuais de TOTEM, AUGER e TA.

## 5.4 Modelo CMG estendido

Nossa última análise utiliza uma versão estendida do modelo CMG, proposta originalmente nesta tese e denominada *modelo CMG estendido*, onde a interação de hádrons a altas energia é mediada pela troca de uma trajetória não-linear para o Pomeron, definida por

$$\alpha_{\mathcal{P}}(t) = 1 + \epsilon + \alpha'_{\mathcal{P}} t + \frac{\beta_{\pi}^2 m_{\pi}^2}{32\pi^3} h(\tau), \quad (5.39)$$

onde

$$h(\tau) = -\frac{4}{\tau} F_{\pi}^2(t) \left[ 2\tau - (1 + \tau)^{3/2} \ln \left( \frac{\sqrt{1 + \tau} + 1}{\sqrt{1 + \tau} - 1} \right) + \ln \left( \frac{m^2}{m_{\pi}^2} \right) \right], \quad (5.40)$$

sendo  $\tau = 4m_{\pi}^2/|t|$  e  $m = 1 \text{ GeV}$ . Nessa expressão  $F_{\pi}$  é o fator de forma do vértice pion-pomeron, para o qual tomamos a expressão de polo padrão  $F_{\pi} = \beta_{\pi}(0)/(1 - t/a_1)$ . O coeficiente  $\beta_{\pi}(0)$  especifica o valor do acoplamento pion-pomeron e para isso adotamos a relação aditiva do modelo de quark  $\beta_{\pi}(0)/\beta_{\mathcal{P}}(0) = 2/3$ . Nesta tese fixamos o parâmetro  $a_1 \equiv m_{\rho}^2$ .

Novamente realizamos os ajustes dos dados através do programa CERN-MINUIT via um procedimento de minimização em  $\chi^2$ , assumindo agora um intervalo  $\chi^2 - \chi_{\text{min}}^2 = 15.987$  (10 parâmetros livres).

Em nossa análise, obtemos os ajustes para os parâmetros do Pomeron e das trajetórias secundárias. Com base nesses valores, obtemos as curvas do modelo CMG estendido para  $\sigma_{\text{tot}}^{pp,\bar{p}p}(s)$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}(s)$ , a nível de Born e eiconal apresentados nas figuras 5.8 e 5.9. Na Figura 10 comparamos os resultados dos modelos CMG original, CMG reanalisado e CMG estendido para as seções de choque total a nível de Born e Eiconal e comparamos os resultados com

Modelos:	CMG original		CMG reanalisado		CMG estendido
Amplitudes:	Born	Eiconal	Born	Eiconal	Eiconal
$\epsilon$	0.104±0.002	0.122	0.095±0.01	0.116	0.100
$\beta_{\mathcal{P}}(0)$	1.865	1.925	1.940±0.07	1.958±0.03	2.036
$\alpha'$	0.25 (fixo)	0.25 (fixo)	0.25 (fixo)	0.25 (fixo)	0.790±0.74
$b_{\mathcal{P}}$	-	1.668	-	1.764±0.30	0.708±0.03
$\eta_+$	0.32	0.32	0.325±0.06	0.308±0.02	0.331
$\beta_+(0)$	3.766	4.470	3.644±0.40	4.183±0.22	4.350±0.01
$b_+$	-	1.511	-	2.270±0.65	2.235±0.11
$\eta_-$	0.54	0.54	0.526±0.08	0.545±0.02	0.562±0.01
$\beta_-(0)$	2.938	3.326	2.885±0.48	3.507±0.45	3.782±0.06
$b_-$	-	6.250	-	2.566±0.99	1.005±0.45
$\chi^2/gl$	1.66	57.30	1.08	1.11	1.10

Tab. 5.1: Valores dos parâmetros do Pomeron e dos Reggeons secundários obtidos a partir do ajuste global aos dados de  $\sigma_{tot}^{pp,\bar{p}p}$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}$ .

os dados de TOTEM, AUGER e TA.

Na Tabela 5.1 apresentamos os parâmetros ajustados para o modelo CMG estendido. Nos dois casos, a análise foi feita tanto a nível de Born quanto Eiconal, através do ajuste global para os dados de espalhamento frontal  $pp$  e  $\bar{p}p$  acima de  $\sqrt{s} = 10$  GeV. Na Tabela 5.2 apresentamos as previsões para os observáveis frontais  $\sigma_{tot}^{pp,\bar{p}p}(s)$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}(s)$  através dos modelos CMG reanalisado e CMG estendido, com amplitudes eiconalizadas. Observamos que os erros em torno dos valores centrais não foram efetivamente calculados, mas simplesmente estimados a partir de uma comparação direta com os erros em torno dos valores centrais indicados na Tabela 3.3, ou seja, por simplificação, tomamos os erros das previsões de  $\sigma_{tot}^{pp,\bar{p}p}(s)$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}(s)$  na Tabela 5.2 como equivalentes em proporcionalmente aos erros calculados na Tabela 3.3.

$\sqrt{s}$ [TeV]	$\sigma_{tot}$ [mb]		$\rho$	
	CMGr	CMGe	CMGr	CMGe
8.0	$100.3^{+8.5}_{-7.3}$	$100.5^{+8.6}_{-7.3}$	$0.137^{+0.01}_{-0.01}$	$0.142^{+0.01}_{-0.01}$
13.0	$109.1^{+9.5}_{-8.2}$	$109.7^{+9.5}_{-8.3}$	$0.134^{+0.01}_{-0.01}$	$0.141^{+0.01}_{-0.01}$
14.0	$110.4^{+9.7}_{-8.4}$	$111.2^{+9.7}_{-8.4}$	$0.134^{+0.01}_{-0.01}$	$0.141^{+0.01}_{-0.01}$
57.0	$139.3^{+14.1}_{-13.4}$	$142.4^{+14.4}_{-13.7}$	$0.125^{+0.01}_{-0.01}$	$0.137^{+0.01}_{-0.01}$
95.0	$151.0^{+15.3}_{-14.6}$	$155.6^{+15.7}_{-15.1}$	$0.122^{+0.01}_{-0.01}$	$0.135^{+0.02}_{-0.02}$

Tab. 5.2: Previsões para as quantidades de espalhamento frontal  $\sigma_{tot}^{pp,\bar{p}p}$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}$  usando diferentes variantes do modelo CMG. Todos os resultados são obtidos a partir de amplitudes eiconalizadas.

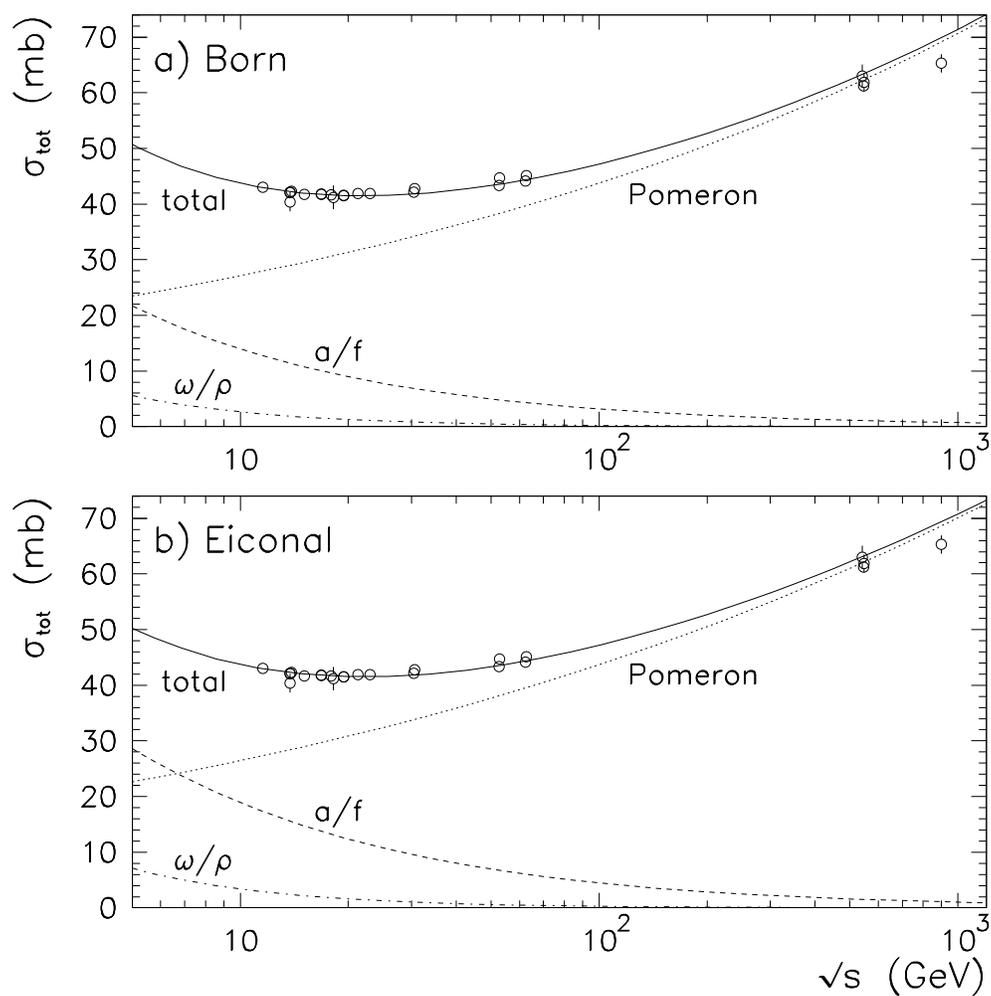


Fig. 5.1: Contribuições das trajetórias de Regge para a seção de choque total  $\bar{p}p$  ( $\circ$ ) a nível de Born e eiconalizado no modelo CMG original.

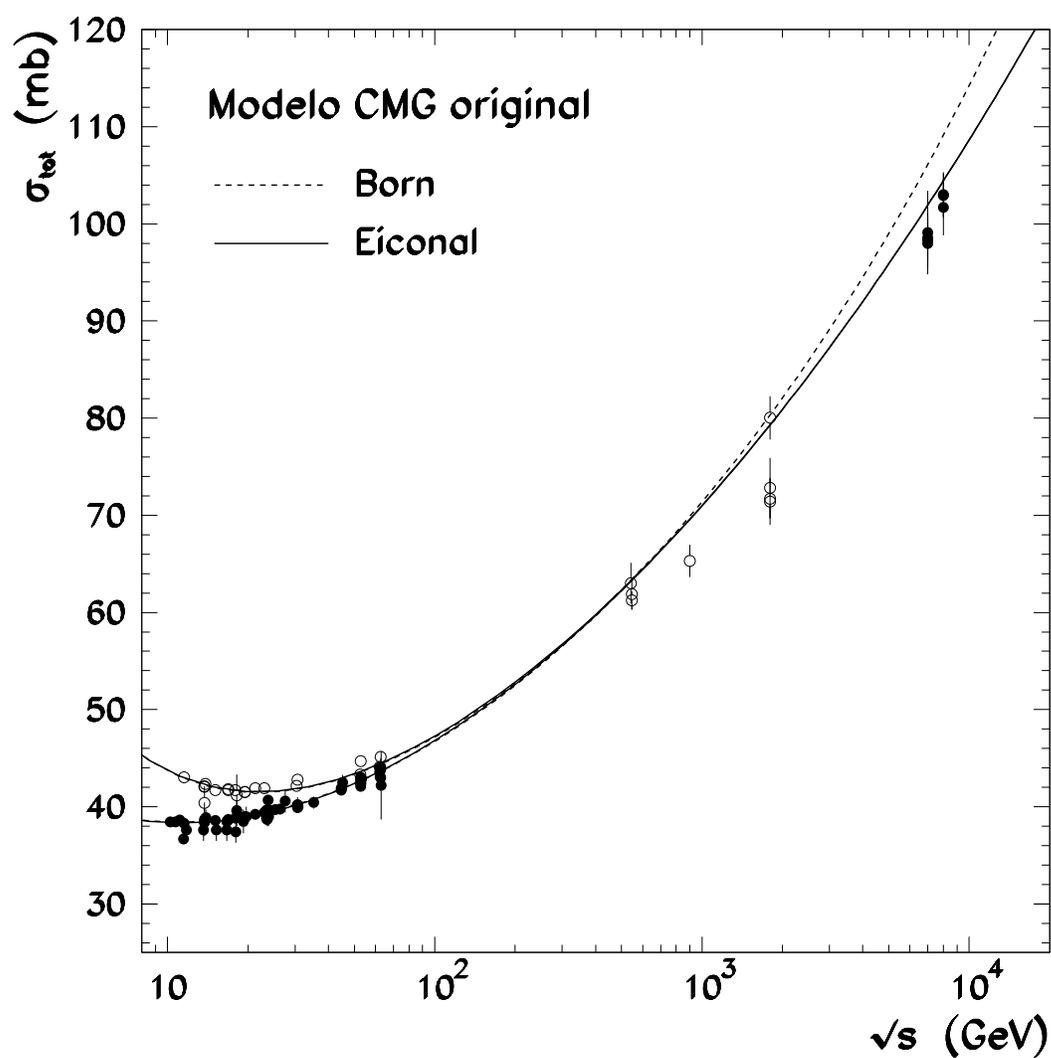


Fig. 5.2: Seções de choque total  $pp$  (●) e  $\bar{p}p$  (○), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG original.

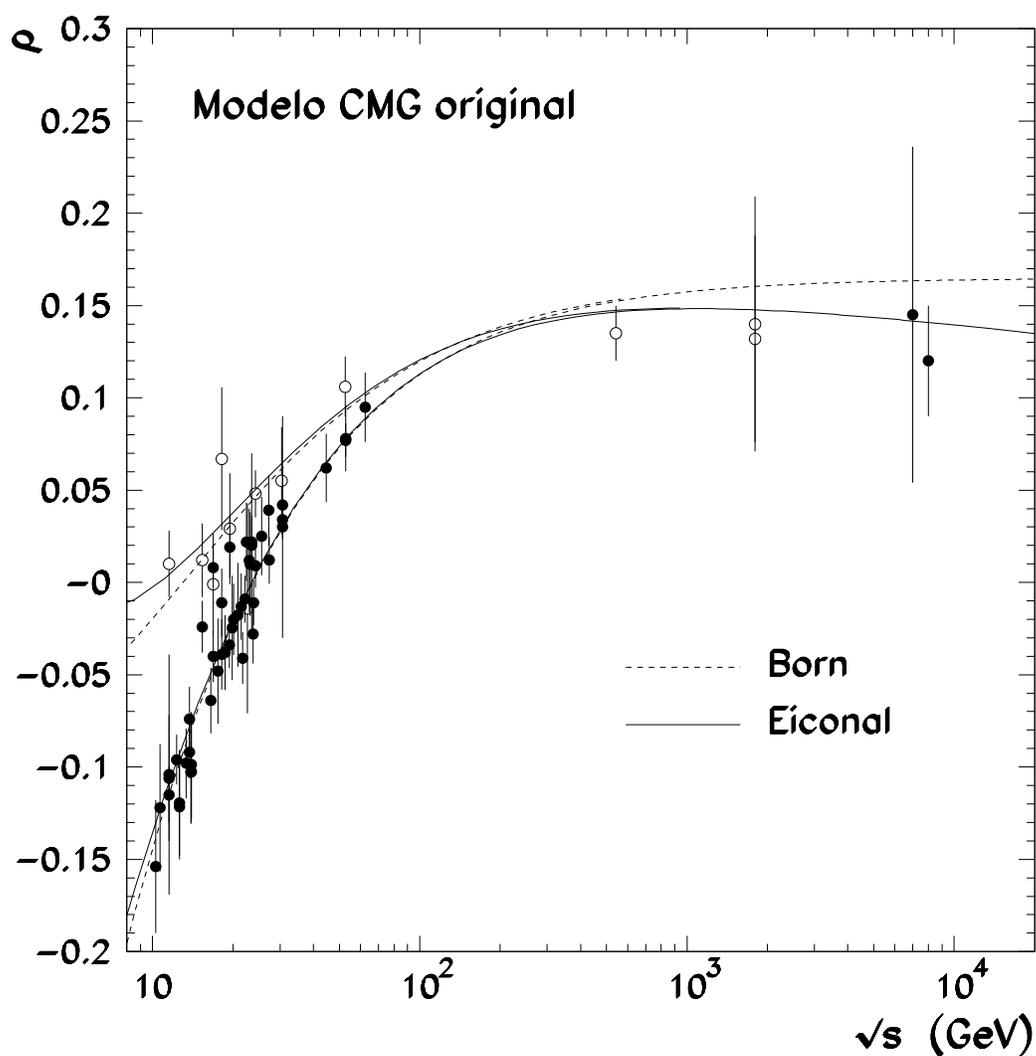


Fig. 5.3: Razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal  $pp$  (●) e  $\bar{p}p$  (○), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG original.

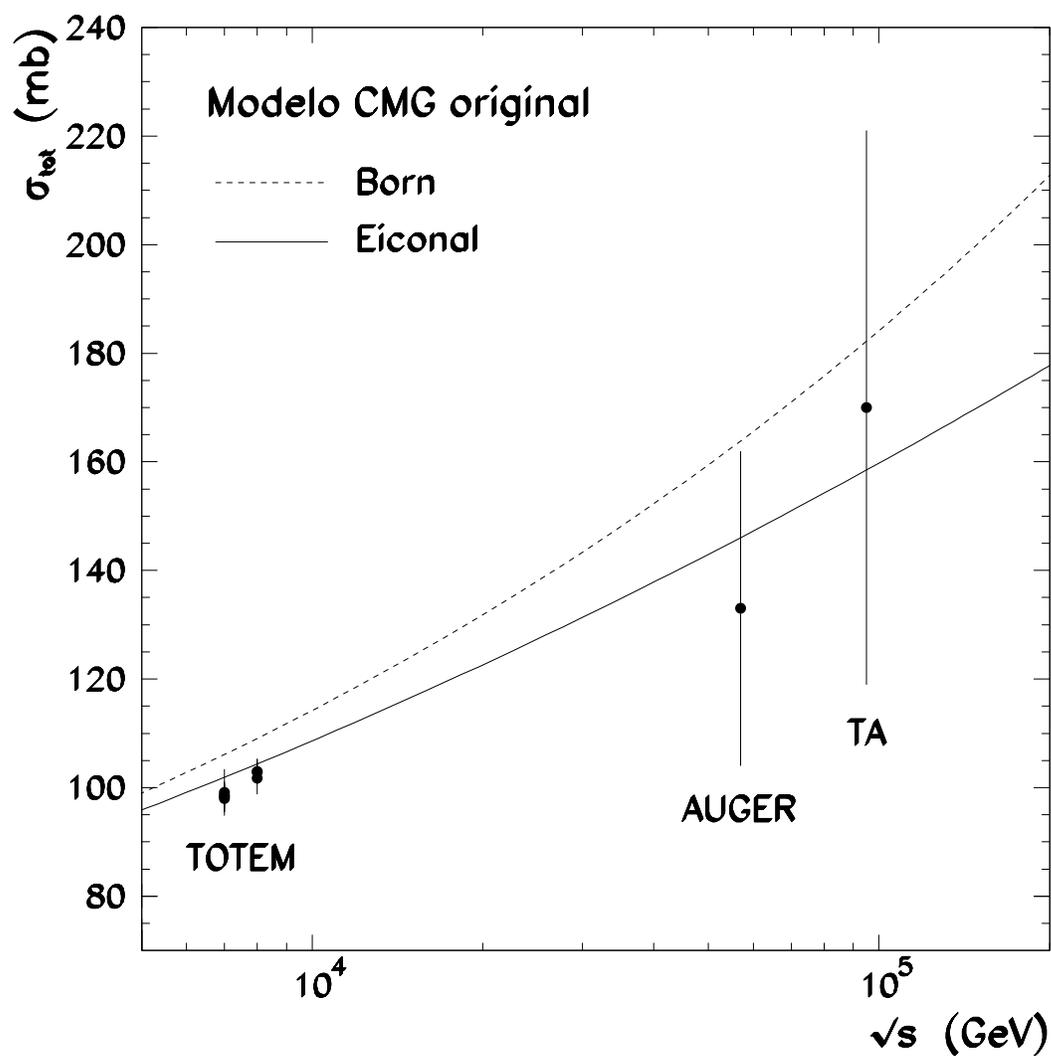


Fig. 5.4: Comparação entre as seções de choque total a nível de Born e Eiconal do modelo CMG, e os dados atuais de TOTEM, AUGER e TA.

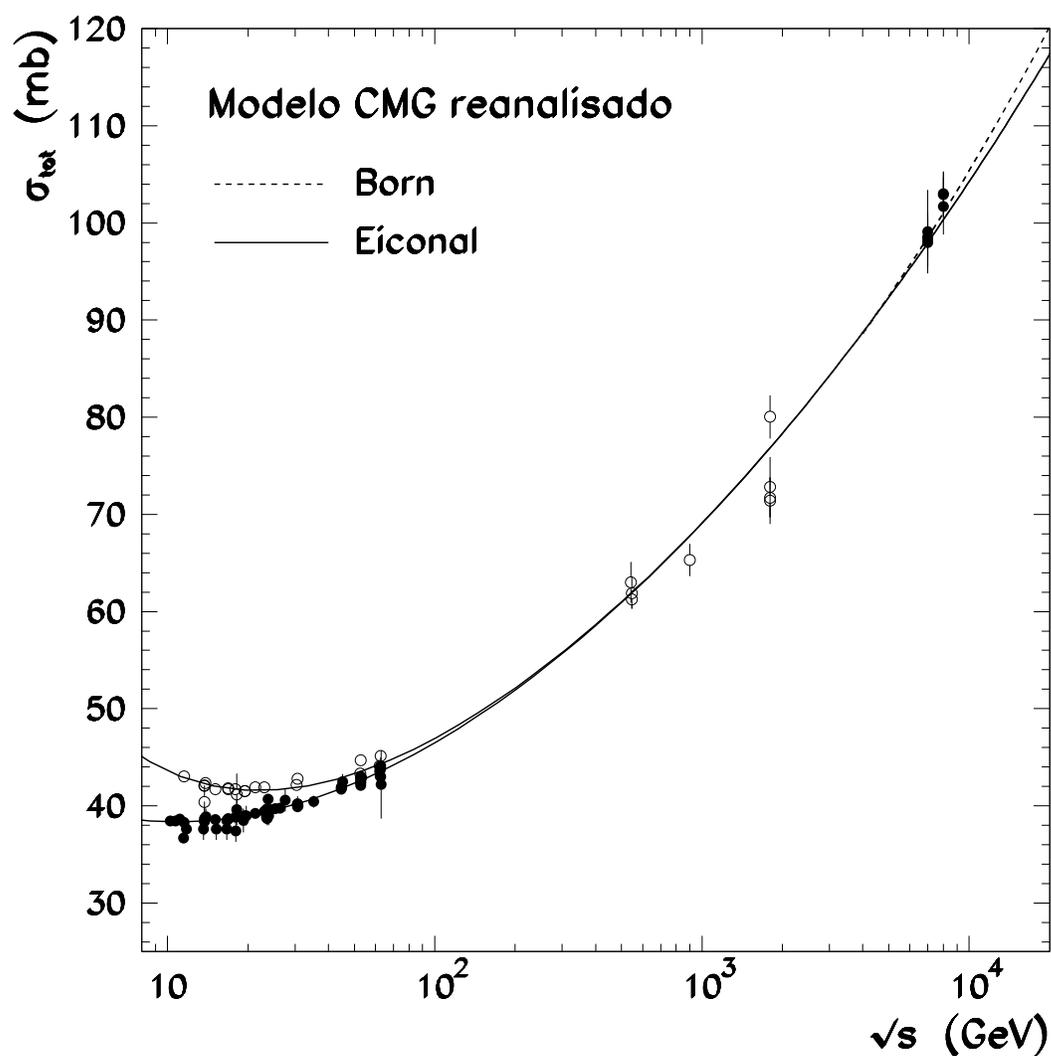


Fig. 5.5: Seções de choque total  $pp$  ( $\bullet$ ) e  $\bar{p}p$  ( $\circ$ ), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG reanalísado.

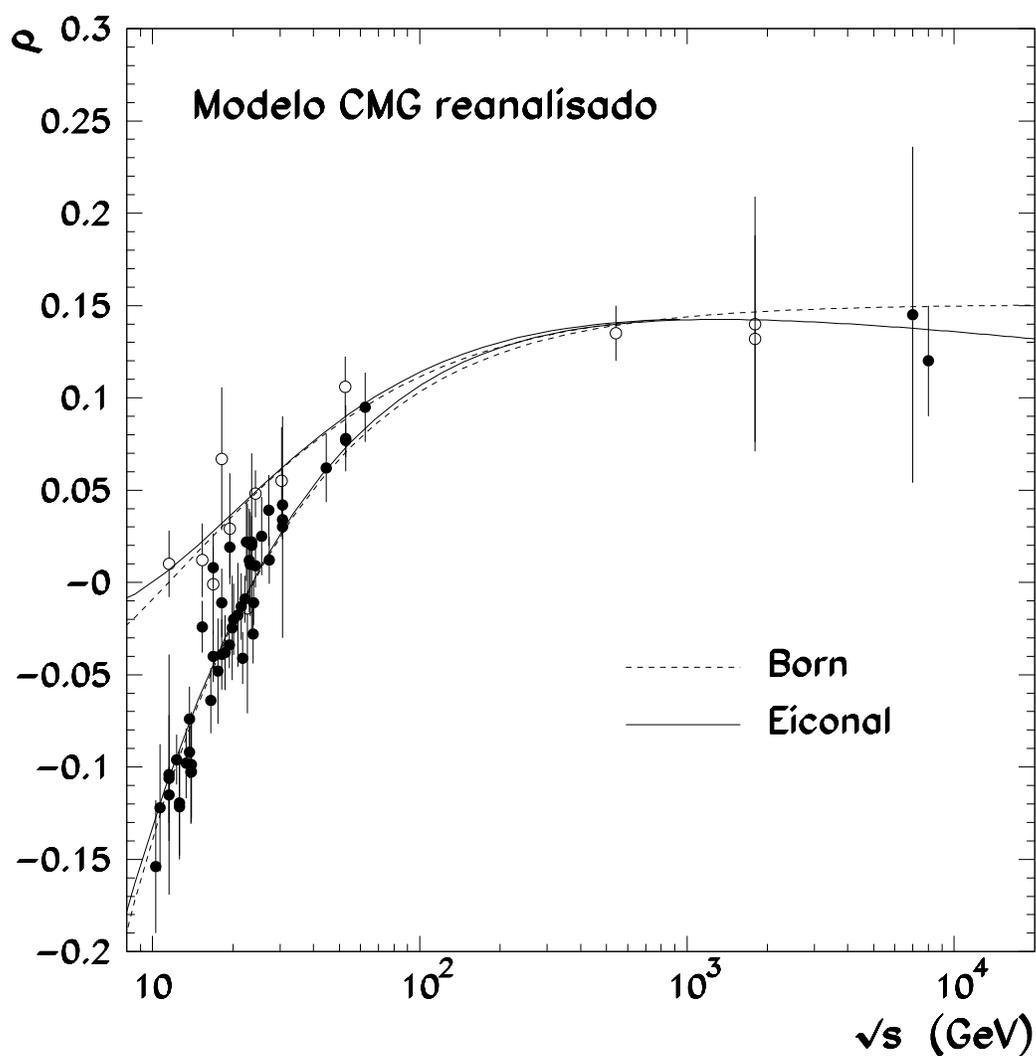


Fig. 5.6: Razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal  $pp$  ( $\bullet$ ) e  $\bar{p}p$  ( $\circ$ ), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG reanalísado.

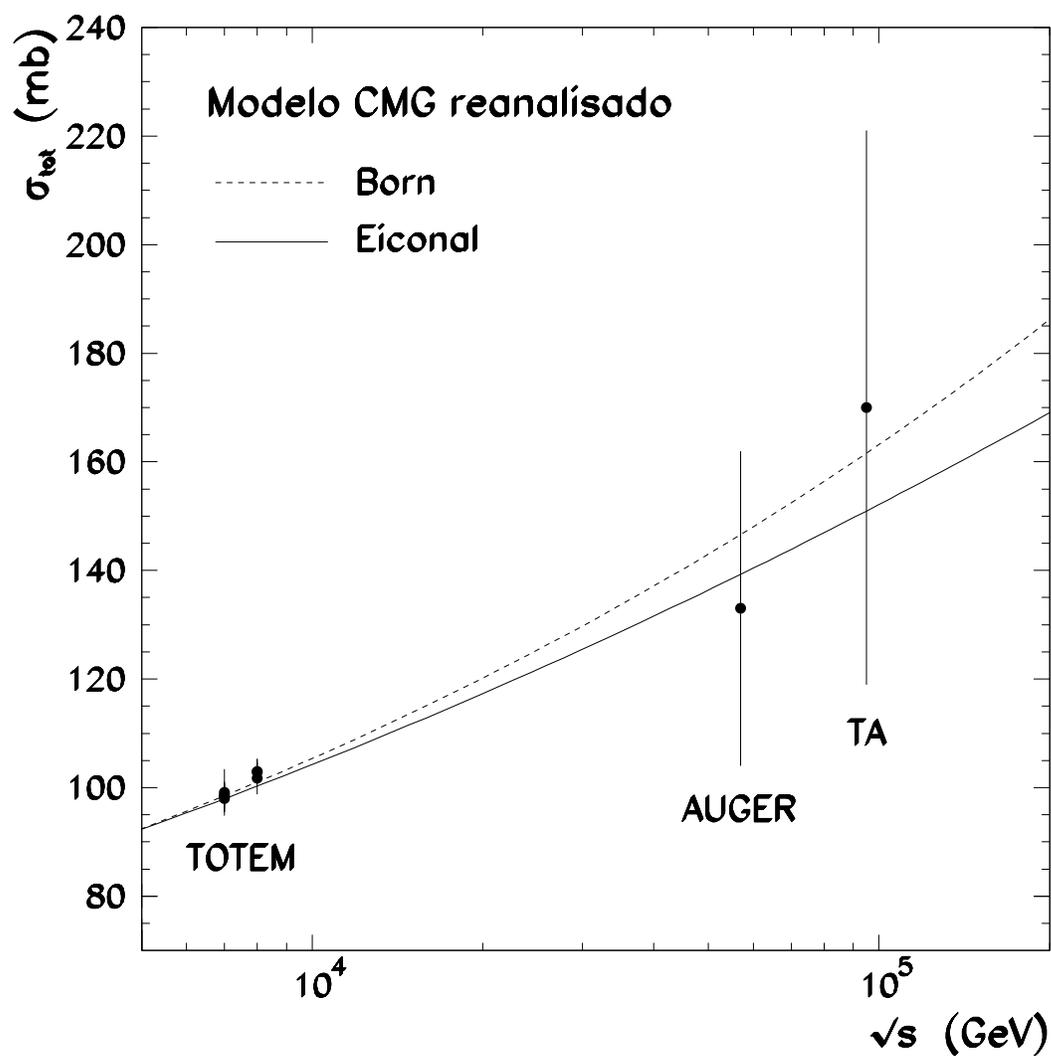


Fig. 5.7: Comparação entre as seções de choque total a nível de Born e Eiconal do modelo CMG reanalísado, e os dados atuais de TOTEM, AUGER e TA.

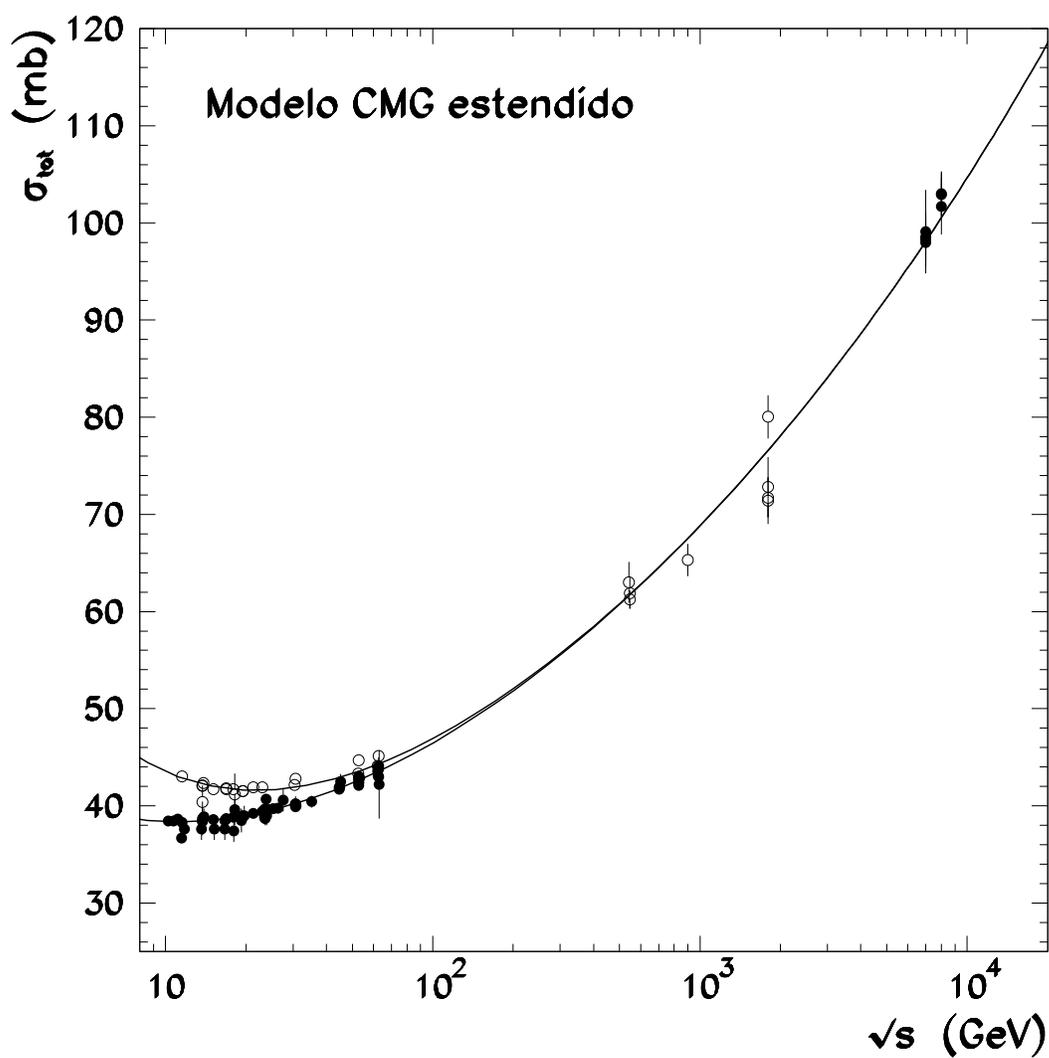


Fig. 5.8: Seções de choque total  $pp$  ( $\bullet$ ) e  $\bar{p}p$  ( $\circ$ ), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG estendido.

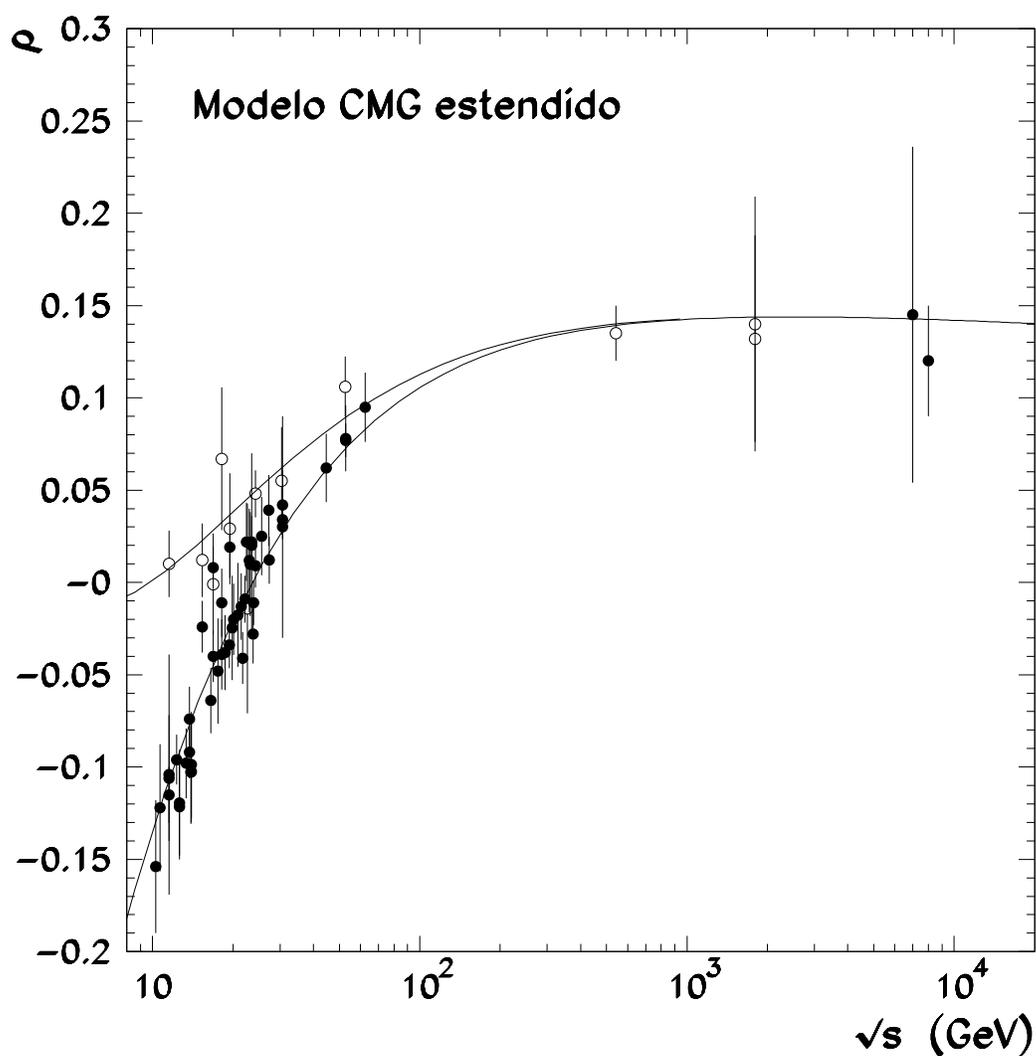


Fig. 5.9: Razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento frontal  $pp$  (●) e  $\bar{p}p$  (○), a nível de Born e Eiconal para o modelo CMG estendido.

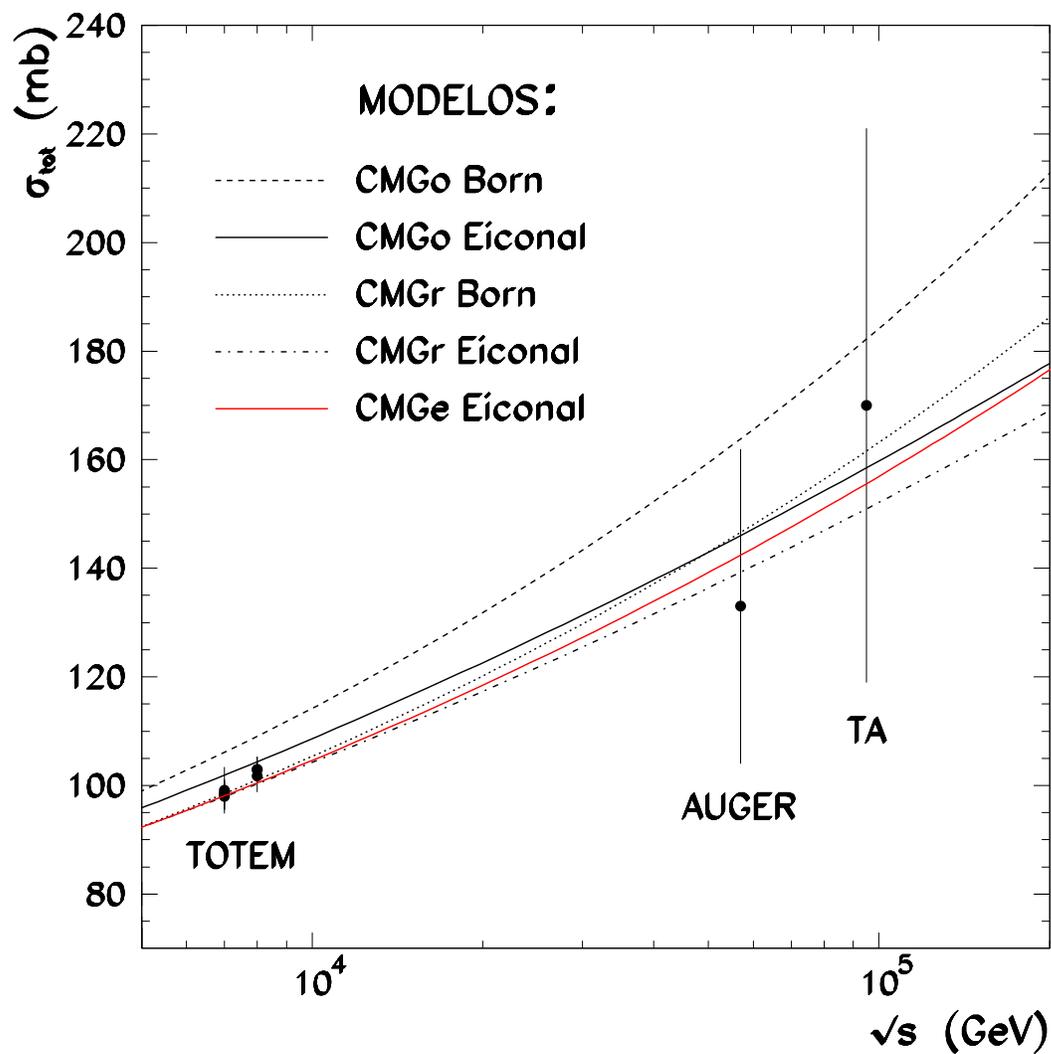


Fig. 5.10: Comparação dos dados atuais de TOTEM, AUGER e TA com os modelos CMG original (CMG<sub>o</sub>), CMG reanalisado (CMG<sub>r</sub>) e CMG estendido (CMG<sub>e</sub>) para as seções de choque total a nível de Born e Eiconal.

## Capítulo 6

# Conclusão

Nesta tese estudamos os processos de espalhamento próton-próton e antipróton-próton desenvolvendo modelos eiconais baseados nas duas principais teorias, compatíveis com vínculos de analiticidade e unitaridade, para a descrição dos observáveis frontais em altas energias: a formulação eiconal inspirada em QCD e a teoria dos polos de Regge. O primeiro, segundo e quarto capítulos corresponde à uma revisão da literatura relacionada aos assuntos abordados na nossa pesquisa. Os capítulos 3 e 5 correspondem aos trabalhos originais desenvolvidos em nossa pesquisa. Iniciamos o trabalho apresentando a cinemática e as grandezas físicas envolvidas os processos de espalhamento, obtemos o teorema óptico através da teoria de difração de Kirchoff e do formalismo da matriz-S, isso nos permite fazer relacionar o princípio de conservação de energia no estudo do fenômeno óptico de difração com a conservação de probabilidades no contexto do espalhamento quântico de partículas. Em seguida estudamos as representações de parâmetro de impacto e eiconal obtendo nessa formulação as expressões para as seções de choque total elástica e inelástica, a seção de choque diferencial elástica e o parâmetro  $\rho$ , finalizamos o capítulo apresentando os dados experimentais para as grandezas frontais  $\sigma$  e  $\rho$  referentes aos espalhamentos elásticos próton-próton e antipróton-próton através dos dados recentes do LHC. No segundo capítulo apresentamos os conceitos fundamentais da cromodinâmica quântica (QCD), onde deduzimos as expressões em ordem dominante (*leading order*, LO) e em ordem seguinte à dominante (*next to leading order*, NLO) para a constante de acoplamento da QCD, que, corresponde a um dos parâmetros fundamentais do modelo padrão, e estudamos o modelo a pártons original e o modelo a pártons modificado, no qual a invariância de escala de Bjorken verificada no modelo simples é quebrada por logaritmos de  $Q^2$  devido à atividade gluônica ignorada no modelo a pártons original.

O terceiro capítulo corresponde à primeira parte original da tese, nele desenvolvemos um modelo inspirado em QCD no qual investigamos as contribuições infravermelhas às interações partônicas considerando o comportamento infravermelho da carga efetiva de QCD em ordem dominante e ordem seguinte à dominante. Investigamos os processos de espalhamento  $pp \rightarrow pp$  e  $\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p$ , no regime de energia do LHC, considerando que o crescimento observado das seções de choque total hádron-hádron deve-se exclusivamente às interações partônicas semiduras. Usamos os dados atuais das funções de distribuição partônicas CTQL, CTEQ6L1 e MSTW na investigação do comportamento das amplitudes frontais e dos observáveis  $\sigma_{\text{tot}}^{pp,\bar{p}p}$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}$ , e consideramos as implicações fenomenológicas ocorridas pela introdução dos fatores de forma dependentes da energia para as interações partônicas semiduras. Através das relações de dispersão integrais, conectamos as partes real e imaginária das funções eiconais com fatores de forma dependentes da energia. Incluímos em nossa análise os dados recentes do LHC através da colaboração TOTEM, dedicando atenção à sensibilidade do  $\chi^2/\text{gl}$  para o corte  $Q_{\text{min}}$ , que controla os processos partônicos para as interações semiduras. Os resultados mostram que uma descrição satisfatória dos dados de  $\sigma_{\text{tot}}^{pp,\bar{p}p}$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}$  é obtida limitando o corte entre o intervalo  $1.0 \leq Q_{\text{min}} \lesssim 1.5$  GeV. O  $\chi^2/\text{gl}$  para o melhor ajuste global encontra-se entre os valores  $[1.05, 1.06]$  para 154 graus de liberdade. Os bons resultados estatísticos mostram que nosso modelo eiconal, onde os efeitos não-perturbativos são incluídos via carga efetiva de QCD, é adequado para a previsão dos observáveis frontais a altas energias. Nossas previsões para seção de choque total  $pp$  são estatisticamente compatíveis com os resultados do AUGER para  $\sqrt{s} = 57$  TeV, bem como para os resultados de TA para  $\sqrt{s} = 95$  TeV. A incerteza em nossas previsões teóricas para os observáveis frontais para  $\sqrt{s} = 8, 13, 14, 57$  e 95 TeV foram estimadas variando a escala de massa do glúon com uma incerteza típica  $\delta m_g$  tomando todos os outros parâmetros constantes, e explorando as incertezas das distribuições partônicas sobre a produção das seções de choque. Para altas energias os observáveis frontais são controlados pelas interações semiduras representadas pelo termo eiconal  $\chi_{\text{sd}}(s, b)$ , que depende de três parâmetros livres,  $\nu_1, \nu_2$  e  $m_g$ . No setor semiduro, consideramos uma nova classe de fatores de forma em que o raio médio da distribuição espacial dos glúons cresce com  $\sqrt{s}$ . Levando esse efeito em consideração obtivemos outra forma na qual a eiconal pode ser fatorizada através do modelo a pártons da QCD,  $\text{Re } \chi_{\text{sd}}(s, b) = \frac{1}{2} W_{\text{sd}}(s, b) \text{Re } \sigma_{\text{QCD}}(s)$ . Usando as relações de dispersão integrais, obtivemos a parte imaginária da eiconal fatorizada, que incorpora fatores de forma dependentes da energia.

No quarto capítulo, tendo como base a literatura [3, 71] realizamos um estudo teoria dos polos de Regge e descrevemos a sua construção matemática a partir da extensão analítica da amplitude de onda parcial a valores complexos do momentum angular, chegando até a imposição do número quântico, a assinatura. Também abordamos a estrutura fenomenológica da teoria e sua aplicação ao espalhamento hadrônico.

O quinto e último capítulo corresponde à segunda parte original da tese. Nele descrevemos os observáveis frontais  $\sigma_{tot}^{pp,\bar{p}p}$  e  $\rho^{pp,\bar{p}p}$  por meio de duas amplitudes de espalhamento com comportamentos assintóticos diferentes: uma amplitude ao nível de Born e outra eiconalizada. Usamos como modelo-base o modelo desenvolvido por Goulianos e colaboradores, que denominamos por *modelo CMG*. No modelo CMG original (CMGo) [78], os dados nos canais  $pp$  e  $\bar{p}p$  são analisados conjuntamente com os dados nos canais  $\pi^\pm p$  e  $K^\pm p$ . A introdução de dados de espalhamento méson-próton na análise original deve-se ao fato do Pomeron, nestes canais, tornar-se dominante em energias menores do que no caso dos canais  $pp$  e  $\bar{p}p$ , pois as seções de choque totais dos canais  $\pi^\pm p$  e  $K^\pm p$  começam a crescer em energias de centro de massa ligeiramente menores do que nos casos dos canais  $pp$  e  $\bar{p}p$ . Porém, nesta região de energia a contribuição dos Reggeons secundários é ainda muito grande, não permitindo avaliar de forma efetiva a real contribuição da componente do Pomeron. Com o advento dos dados de  $\sigma_{tot}$  e  $\rho$  na região de energia do LHC temos agora disponível uma região de energia onde o Pomeron é definitivamente dominante, permitindo uma clara separação entre as componentes do Pomeron e dos reggeons secundários. Isto motivou a nossa reanálise dos dados atualmente disponíveis no LHC com o modelo CMG. Em seguida investigamos o efeito de um *loop* de píons na trajetória do Pomeron. Estes *loops*, que representam a singularidade no canal- $t$  mais próxima, modificam a trajetória do Pomeron, tornando-a não-linear. Verificamos que no modelo reanalisado ao nível de Born (modelo CMGr) obtemos o menor coeficiente linear do Pomeron,  $\alpha_{\mathbb{P}}(0) = 1.095 \pm 0.005$ . No modelo CMGr com amplitude eiconalizada obtemos  $\alpha_{\mathbb{P}}(0) = 1.116 \pm 0.004$ , enquanto que com o modelo CMGe (com *loops* de píons) obtemos o valor intermediário  $\alpha_{\mathbb{P}}(0) = 1.100 \pm 0.001$ . Apesar do modelo CMGr eiconal apresentar um maior valor para  $\alpha_{\mathbb{P}}(0)$ , é o modelo CMGe (dentro dos modelos com amplitudes eiconalizadas) que apresenta maiores valores de  $\sigma_{tot}$  na região de altíssimas energias, pois apresenta um maior valor para o acoplamento Pomeron-próton  $\beta_{\mathbb{P}}(0)$ .

Nesta tese ambos os formalismos, o inspirado em QCD e o de Regge, foram desenvolvidos por meio de eiconais de 1 canal, onde apenas o canal elástico do próton é levado em conta. Uma possível extensão dos resultados apresentados nesta tese estaria na construção de

modelos eiconais de 2 canais, onde o estado excitado  $N^*$  do próton é considerado como um estado intermediário no espalhamento elástico  $pp$ . Desta forma seria possível o estudo de efeitos de reespalhamento.

## Apêndice A

# Relações de dispersão integrais

Neste apêndice, discutimos algumas ferramentas fundamentais ao estudo das interações hadrônicas a altas energias. Baseados na referência [80], iniciamos com o teorema de Cauchy para um integrando complexo  $f(z)$ , considerando inicialmente, por simplicidade, a ocorrência de um pólo simples no eixo real. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e as condições assintóticas sobre  $f(z)$ , chegamos às transformadas de Hilbert. No passo seguinte, usando relações de simetria sobre  $f(z)$ , determinamos as relações de dispersão integrais com uma singularidade no eixo real, essas relações correspondem às transformadas de Hilbert aplicadas a um sistema físico. No próximo ponto, calculamos as relações de dispersão com uma constante de subtração e também o caso da ocorrência de uma singularidade tipo ponto ramificado no eixo real. Encerramos determinando as relações de dispersão integrais aplicadas ao espalhamento de hádrons a altas energias.

### A.1 Transformadas de Hilbert

Consideremos uma função  $f(z)$  analítica<sup>1</sup> no semiplano complexo superior ( $\text{Im}z \geq 0$ ). Definimos em termos dessa função a razão  $R(z)$  dada por

$$R(z) = \frac{f(z)}{z - x_0}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $x_0$  corresponde à um pólo simples de  $R(z)$  no eixo real, apresentado na figura (A.1).

---

<sup>1</sup> Funções analíticas são funções definidas sobre um subconjunto aberto do plano dos números complexos  $\mathbb{C}$ , com valores em  $\mathbb{C}$  diferenciáveis em cada ponto. São funções infinitamente diferenciáveis e que podem ser descritas por uma série de Taylor.

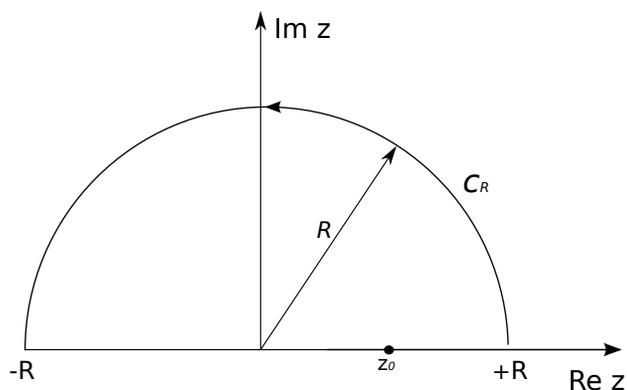


Fig. A.1: Semi-plano complexo superior

Supondo que a função  $f(z)$  tenha um bom comportamento, ou seja

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \rightarrow 0, \tag{A.2}$$

e considerando o contorno apropriado do pólo  $z_0 = x_0$  apresentado na figura (A.2), teremos pelo teorema de Cauchy

$$\oint_C R(z) dz = 0. \tag{A.3}$$

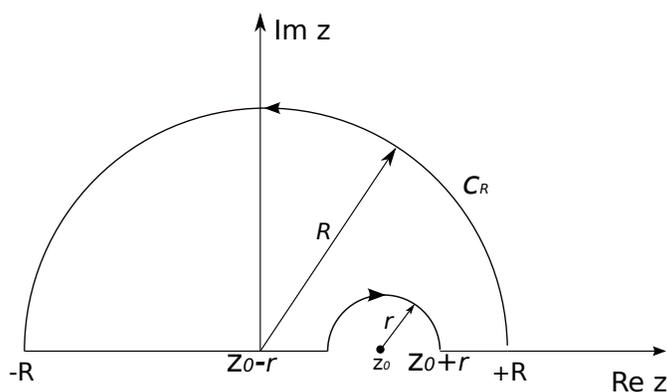


Fig. A.2: Contorno de Cauchy

Explicitando os pedaços do caminho  $C$ , poderemos reescrever (A.3) como

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - x_0} dz = \int_{-R}^{x_0-r} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - x_0} dz + \int_{x_0+r}^{+R} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = 0. \quad (\text{A.4})$$

Calcularemos cada integral de (A.4) e em seguida tomaremos os limites  $R \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$ . Começaremos determinando os limites da integral sobre o contorno  $C_R$ ,

$$\int_{C_R} \frac{f(z)}{z - x_0} dz. \quad (\text{A.5})$$

Escrevendo a variável de integração em coordenadas polares

$$z = R e^{i\theta}, \quad (\text{A.6})$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz<sup>2</sup>, poderemos analisar o comportamento assintótico da integral no limite  $R \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - x_0} dz \right| = \left| R \int_0^\pi \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - x_0} d\theta \right| \leq \frac{R}{|R - x_0|} \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| d\theta. \quad (\text{A.7})$$

Tomando o limite  $R \rightarrow \infty$ , e considerando o comportamento (A.2), obtemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{|R - x_0|} \rightarrow 1 \quad (\text{A.8})$$

e

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |f(Re^{i\theta})| \rightarrow 0. \quad (\text{A.9})$$

Assim, a integral integral (A.5) terá o comportamento

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - x_0} dz \rightarrow 0. \quad (\text{A.10})$$

---

<sup>2</sup> Desigualdade de Cauchy-Schwarz:  $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$

Consideremos agora a integral de contorno  $C_r$ , escrita como

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z) \pm f(x_0)}{z - x_0} dz. \quad (\text{A.11})$$

Tomando o limite  $r \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = f(x_0) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{dz}{z - x_0} + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} dz, \quad (\text{A.12})$$

e escrevendo a primeira integral da direita em coordenadas polares ( $z = re^{i\theta}$ ) e considerando o contorno  $C_r$  no sentido horário (negativo), obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{dz}{z - x_0} = -i\pi. \quad (\text{A.13})$$

Para calcularmos a segunda integral da direita de (A.12), consideremos  $f(z)$  contínua em  $z = x_0$ . Nesse caso, para cada intervalo  $\epsilon$  positivo

$$|f(z) - f(x_0)| < \epsilon, \quad (\text{A.14})$$

existe um outro intervalo  $\delta$ , também positivo, dado por

$$|z - x_0| \leq \delta. \quad (\text{A.15})$$

Dessa forma, identificando  $\delta = r$ , e tomando novamente o contorno horário  $C_r$ , obtemos

$$\left| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} dz \right| \leq \int_{C_r} \frac{|f(z) - f(x_0)|}{|z - x_0|} dz < - \int_{\pi}^0 \frac{\epsilon r}{r} d\theta = \epsilon\pi. \quad (\text{A.16})$$

No limite em que  $r \rightarrow 0$ , o intervalo  $\epsilon$  se anula, ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} dz \right| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon\pi, \quad (\text{A.17})$$

dessa forma, teremos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} dz = 0. \quad (\text{A.18})$$

Substituindo os resultados ( A.13) e (A.18) em (A.12), obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = -i\pi f(x_0). \quad (\text{A.19})$$

Substituindo esse resultado em (A.4), e aplicando os limites  $R \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$ , teremos

$$i\pi f(x_0) = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{-R}^{x_0-r} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \int_{x_0+r}^{+R} \frac{f(x)}{x - x_0} dx, \quad (\text{A.20})$$

onde a soma das integrais representam o valor principal de Cauchy  $P$ , dessa forma, teremos

$$f(x_0) = \frac{P}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx. \quad (\text{A.21})$$

Decompondo as funções  $f(x)$  e  $f(x_0)$  em suas partes reais e imaginárias e substituindo em (A.21), obtemos as relações

$$\text{Im}f(x_0) = -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re} f(x)}{x - x_0} dx \quad (\text{A.22})$$

e

$$\text{Re}f(x_0) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im} f(x)}{x - x_0} dx, \quad (\text{A.23})$$

que correspondem às transformadas de Hilbert. Dessa forma, considerando funções que sejam analíticas no semiplano superior e obedeçam a condição de bom comportamento (A.2), poderemos, por construção, aplicar as transformadas de Hilbert. As transformadas de Hilbert, quando aplicadas em um sistema físico, recebem o nome de relações de dispersão integrais, e podem ser aplicadas à qualquer sistema cujas variáveis sejam complexas e satisfaçam as condições de construção (por exemplo uma amplitude de espalhamento em termos das variáveis de Mandelstam  $A(s, t)$ ).

## A.2 Relações de dispersão com uma singularidade tipo pólo no eixo real

Descreveremos agora uma importante aplicação das transformadas de Hilbert para o caso de uma função física  $f(x)$ , ou seja, as relações de dispersão para a função. Consideraremos o caso em que a função física possua uma singularidade tipo pólo no eixo real, e que as relações de dispersão deverão obedecer as propriedades de analiticidade, simetria e causalidade (pode-se mostrar que a condição de causalidade implica em analiticidade ([71])).

Em muitas situações físicas, precisamos substituir o intervalo  $] -\infty, +\infty [$  pelo intervalo positivo  $[0, +\infty [$ . Para que isso seja possível a função  $f(x)$  deverá, necessariamente, obedecer às relações de simetria obtidas através do princípio de reflexão de Schwarz. O princípio de reflexão de Schwarz ( $f^*(z) = f(-z^*)$ ), aplicado ao eixo real nos dá

$$f^*(x) = f(-x^*) = f(-x), \quad (\text{A.24})$$

decompondo  $f^*(x)$  e  $f(-x)$  nas suas partes reais e imaginárias

$$f^*(x) = \text{Re } f(x) - i \text{Im } f(x),$$

$$f(-x) = \text{Re } f(-x) + i \text{Im } f(-x)$$

e usando a igualdade (A.24), obtemos as relações de simetria

$$\text{Re } f(-x) = \text{Re } f(x), \quad (\text{A.25})$$

$$\text{Im } f(-x) = -\text{Im } f(x). \quad (\text{A.26})$$

Essas expressões nos mostram que a parte real de  $f(x)$  é uma função par, e a parte imaginária é uma função ímpar. Voltando às transformadas de Hilbert, consideremos a expressão (A.23) em dois semi-intervalos

$$\text{Re } f(x_0) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Im } f(x)}{x - x_0} dx + \frac{P}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im } f(x)}{x - x_0} dx. \quad (\text{A.27})$$

Escrevendo a primeira integral de (A.27) com a mudança ( $x \rightarrow -x$ ) e usando a relação de simetria (A.26), obtemos

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \frac{2P}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 - x_0^2} \operatorname{Im} f(x) dx. \quad (\text{A.28})$$

Consideremos agora a expressão (A.22) separada em dois semi-intervalos

$$\operatorname{Im} f(x_0) = -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Re} f(x)}{x - x_0} dx - \frac{P}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x)}{x - x_0} dx. \quad (\text{A.29})$$

Escrevendo a primeira integral de (A.29) com a mudança ( $x \rightarrow -x$ ) e usando a relação de simetria (A.25), obtemos

$$\operatorname{Im} f(x_0) = -\frac{2P}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x_0}{x^2 - x_0^2} \operatorname{Re} f(x) dx. \quad (\text{A.30})$$

As expressões (A.28) e (A.30) correspondem às relações de dispersão com uma singularidade tipo pólo no eixo real ( $x_0$ ). Vale ressaltar que as condições necessárias para que elas sejam construídas à partir de uma função  $f(z)$  são:

- I-  $f(z)$  deve ser analítica em  $\operatorname{Im} z \geq 0$ ;
- II-  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$ .

### A.3 Relações de dispersão com uma subtração

Vimos que uma das condições necessárias para a construção das relações de dispersão para uma função  $f(z)$  é que ela apresente o bom comportamento (A.2). Porém, em muitos casos físicos essa condição não é satisfeita, nessas situações, devemos aplicar as chamadas regras de subtração para que as relações de dispersão tenham suas utilidades recuperadas. Veremos a seguir com implementar essas regras.

Consideremos a função  $f(z)$  analítica em  $\operatorname{Im} z \geq 0$ , apresentando o seguinte comporta-

mento

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \sim z^0. \quad (\text{A.31})$$

A maneira como implementamos as relações de dispersão para  $f(z)$  em situações desse tipo, começa com a definição de uma função  $R(z)$

$$R(z) = \frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1}, \quad x_1 \neq x_0. \quad (\text{A.32})$$

A condição (I) nos garante

$$\lim_{z \rightarrow x_1} \frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} = f'(x_1), \quad (\text{A.33})$$

portanto,  $R(z)$  é analítica no semiplano complexo superior. Tomando o limite  $|z| \rightarrow \infty$  em (A.33), obtemos

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |R(z)| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|f(z) - f(x_1)|}{|z - x_1|}. \quad (\text{A.34})$$

Usando a desigualdade triangular

$$|a - b|^2 \geq (|a| - |b|)^2, \quad (\text{A.35})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} |R(z)| &\leq \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|f(z) - f(x_1)|}{|z| - |x_1|} \\ &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{|z| - |x_1|} \cdot \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z) - f(x_1)| = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Dessa forma, graças à convergência do denominador de (A.36), obtemos

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |R(z)| = 0, \quad (\text{A.37})$$

satisfazendo, portanto, as propriedades necessária para a construção das transformadas de Hilbert em  $\text{Im} \geq 0$ . Sendo assim, usando as expressões (A.21) e (A.32), e mudando  $z \rightarrow x$ , poderemos escrever

$$\begin{aligned}
 f(x_0) - f(x_1) &= \frac{x_0 - x_1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1)} dx \\
 &- \frac{P}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_0 - x_1}{(x - x_0)(x - x_1)} f(x_1) dx.
 \end{aligned} \tag{A.38}$$

A segunda integral de (A.38) pode ser escrita como

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_1)}{x - x_0} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_1)}{x - x_1} dx = 0. \tag{A.39}$$

Dessa forma, obtemos

$$f(x_0) - f(x_1) = \frac{x_0 - x_1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(x - x_0)(x - x_1)} dx. \tag{A.40}$$

Que corresponde à regra de subtração para  $f(x)$ . Essa subtração é o fator que nos garante a condição II.

Decompondo as funções  $f(x)$ ,  $f(x_0)$  e  $f(x_1)$  em partes reais e imaginárias e substituindo em (A.40), obtemos

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \operatorname{Re} f(x_1) + \frac{x_0 - x_1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{(x - x_0)(x - x_1)} dx, \tag{A.41}$$

$$\operatorname{Im} f(x_0) = \operatorname{Im} f(x_1) - \frac{x_0 - x_1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x)}{(x - x_0)(x - x_1)} dx. \tag{A.42}$$

Que são as relações de dispersão com uma constante de subtração. Em geral, para situações em que  $f(z)$  se comporta como

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \sim z^\lambda, \tag{A.43}$$

deveremos fazer  $N$  subtrações afim de garantir a convergência para  $|z| \rightarrow \infty$ , onde  $N$  seria o primeiro inteiro maior que  $\lambda$ . Por exemplo, para  $\lambda = 1$  precisaríamos de duas constantes de subtração  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ .

Para escrevermos as relações de dispersão (A.41) e (A.42) no intervalo  $[0, +\infty[$  basta separarmos as integrais nos dois intervalos  $]-\infty, 0]$  e  $[0, +\infty[$ , e aplicarmos no integrando correspondente ao primeiro intervalo a relação de simetria  $x \rightarrow -x$ , isso nos dará

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \operatorname{Re} f(x_1) + \frac{2P}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x(x_0^2 - x_1^2)}{(x^2 - x_0^2)(x^2 - x_1^2)} \operatorname{Im} f(x) dx \quad (\text{A.44})$$

e

$$\operatorname{Im} f(x_0) = \operatorname{Im} f(x_1) - \frac{2P}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(x_0 - x_1)(x^2 + x_1x_0)}{(x^2 - x_0^2)(x^2 - x_1^2)} \operatorname{Re} f(x) dx. \quad (\text{A.45})$$

Na física, o principal uso das relações de dispersão integrais ocorre no cálculo da seção de choque total e da razão entre a parte real e a parte imaginária da amplitude de espalhamento na direção frontal [81].

# Bibliografia

- [1] S. Chatrchyan *et al.* [ATLAS Collaboration], Phys. Lett. B **716** (2012) 1;  
G. Aad *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Lett. B **716** (2012) 30.
- [2] D.J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343;  
H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [3] V. Barone and E. Predazzi, *High-Energy Particle Diffraction*, Springer-Verlag, 2002.
- [4] Yu.L. Dokshitzer, V.A. Khoze, S.I. Troyan, Sov. J. Nucl. Phys. **58** (1987) 303.
- [5] Yu.L. Dokshitzer, V.A. Khoze, T. Sjöstrand, Phys. Lett. B **274** (1992) 116.
- [6] H. Chehime, et al., Phys. Lett. B **286** (1992) 397.
- [7] J. D. Bjorken, Int. J. Mod Phys., Phys. A **7** (1992) 4189.
- [8] J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **47** (1993) 101.
- [9] G. Matthiae, Rep. Prog. Phys. **57** (1994) 743.
- [10] L.V. Gribov, E.M. Levin, and M. G. Ryskin, Phys. Rep. **100** (1983) 1;
- [11] T. Regge, Nuovo Cimento **14** (1959) 951;  
T. Regge, Nuovo Cimento **18** (1960) 947.
- [12] J.J. Sakurai and S.T. Tuan, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley Longman, 1994.
- [13] Y. Afek, C. Leroy, B. Margolis, P. Valin, *Differential and total proton cross sections, particle production, and the parton model*. Phys. Rev. Lett. **45**, (1980) 85.

- [14] M. Lavelle, Phys. Rev. D **44** (1991) 26;  
D. Dudal, J. A. Gracey, S. P. Sorella, N. Vandersickel, and H. Verschelde, Phys. Rev. D **78** (2008) 065047.
- [15] A. Doff, E. G. S. Luna, and A. A. Natale, Phys. Rev. D **88** (2013) 0550080.
- [16] E. G. S. Luna, and A. A. Natale, J. Phys. G **42** (2015) 015003.
- [17] Mandelstam, S. *Determination of the pion-nucleon Scattering amplitude from dispersion relations and unitarity. General theory.* Phys. Rev. **112** (1958) 1344.
- [18] M. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos*, Edusp, São Paulo 2002.
- [19] K. A. Olive *et al.* Chin. Phys. C **38** (2014) 090001.
- [20] G. Antchev *et al.*, EPL **96** (2011) 21002.
- [21] G. Antchev *et al.*, EPL **101** (2013) 21002.
- [22] G. Antchev *et al.*, EPL **101** (2013) 21004.
- [23] G. Antchev *et al.*, Phys. Rev. Lett **111** (2013) 012001.
- [24] T. Muta, *Foundations of quantum chromodynamics: an introduction to perturbative methods in gauge theories.* Singapore: World Scientific, 2009.
- [25] R.K. Ellis, W.J. Stirling, B.R. Webber; *QCD and collider physics.* Cambridge University Press, 1996.
- [26] G. Sterman *et al.*, Rev. Mod. Phys. **67** (1964) 157.
- [27] G. Wolf, "1981 Cargèse Summer Institute on Fundamental Interactions", (preprint DESY 81-86).
- [28] J. D Bjorken, Phys. Rev. **179** (1969) 1547.  
R. P. Feynman, Phys. Rev. Lett **23** (1969) 1415.  
R. P. Feynman, *Photon Hadron Interactions*, Benjamin, N. York, 1972.
- [29] E. G. S. Luna, A. L. dos Santos and A. A. Natale, Phys. Lett B **698** (2011) 52.

- [30] D. A. Fagundes, E. G. S. Luna, M. J. Menon, and A. A. Natale, Nucl. Phys. A **886** (2012) 48.
- [31] J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **35** (1930) 461.
- [32] J. Schwinger, Phys. Rev. **74** (1948) 1439;  
J. Schwinger, Phys. Rev. **75** (1949) 651;  
J. Schwinger, Phys. Rev. **76** (1949) 790;  
R. P. Feynman, Phys. Rev. **74** (1948) 939;  
R. P. Feynman, Phys. Rev. **76** (1949) 769.
- [33] V. A. Bezerra, Scientle Studia, Volume 1, No.2, p.151-81, 2003.
- [34] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **23** (1981) 2916;  
P. M. Stevenson, Nucl. Phys. B **204** (1982) 130.
- [35] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [36] D.J Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.
- [37] W.A Caswell, Phys. Rev. Lett **33** (1974) 244.
- [38] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **15** (1972) 438;  
L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **20** (1975) 95;  
G. Altareli and G. Parisi, Nucl. Phys. B **126** (1977) 298;  
Yu. L. Dokshitzer, Sov. Phys. JETP **46** (1977) 1387.
- [39] A. M. Cooper-Sarkar *et. al.*, J. Phys. G **25** (1999) 1387.
- [40] A. D. Martin, R. G. Roberts, and W. J. Stirling, Phys. Lett. B **387** (1996) 419.
- [41] F. Halzen, Summary Talk- Proc. 5th Blois Workshop on Elastic and Diffractive Scattering, ed. Fried, Kang e Tan (World Scientific, Cingapura, 1993) p. 433.
- [42] P. L'Heureux, B. Margolis, and P. Valin, Phys. Rev. D **32** (1985) 1681.

- [43] B. Margolis, and P. Valin, M. M. Block, F. Halzen, and R. S. Fletcher, Phys. Lett. B **213** (1988) 221.
- [44] M. M. Block, R. S. Fletcher, F. Halzen, B. Margolis, and P. Valin, Phys. Lett. D **41** (1990) 978.
- [45] M. M. Block, F. Halzen, and T. Stanev, Phys. Rev. Lett. **87** 303 (1987); Phys. Rev. D **62** (2000) 077501.
- [46] M. M. Block, F. Halzen, and B. Margolis, Phys. Rev. D **45** (1992) 839.
- [47] M. M. Block, E. M. Gregores, F. Halzen, and G. Pancheri, Phys. Rev. D **60** (1999) 054024.
- [48] M. M. Block, and A.B. Kaidalov, Phys. Rev. D **64** (2001) 076002;  
M. M. Block, F. Halzen, and G. Pancheri, Eur. Phys. J. C **23** (2002) 329;  
M. M. Block, Eur. Phys. J. C **30** (2003) 497 .
- [49] C.A.S. Bahia, M. Broilo, and E.G.S. Luna Phys. Rev. D **92**, (2015) 074039.
- [50] L. Durand and H. Pi, Phys. Rev. Lett. **58**, 303 (1987); Phys. Rev. D **38**, 78 (1988); **40**, 1436 (1989).
- [51] E.G.S. Luna, A.F. Martini, M.J. Menon, A. Mihara, and A.A. Natale, Phys. Rev. D **72**, 034019 (2005);  
E.G.S. Luna, Phys. Lett. B **641**, 171 (2006);  
E.G.S. Luna and A.A. Natale, Phys. Rev. D **73**, 074019 (2006);  
E.G.S. Luna, Braz. J. Phys. **37**, 84 (2007);  
D.A. Fagundes, E.G.S. Luna, M.J. Menon, and A.A. Natale, Nucl. Phys. **A886**, 48 (2012);  
P.C. Beggio and E.G.S. Luna, Nucl. Phys. **A929**, 230 (2014).
- [52] A. Corsetti, A. Grau, G. Pancheri, and Y.N. Srivastava, Phys. Lett. B **382**, 282 (1996);  
A. Grau, G. Pancheri, and Y.N. Srivastava, Phys. Rev. D **60**, 114020 (1999);

- R.M. Godbole, A. Grau, G. Pancheri, and Y.N. Srivastava, Phys. Rev. D **72**, 076001 (2005);
- A. Achilli *et al.*, Phys. Lett. B **659**, 137(2008);
- A. Grau, R.M. Godbole, G. Pancheri, and Y.N. Srivastava, Phys. Lett. B **682**, 55 (2009);
- G. Pancheri, D.A. Fagundes, A. Grau, S. Pacetti, and Y.N. Srivastava, AIP Conf. Proc. **1523**, 123 (2012).
- [53] E.M. Levin and M.G. Ryskin, Phys. Rep. **189**, 267 (1990).
- [54] P.O. Bowman, U.M. Heller, D.B. Leinweber, M.B. Parappilly, and A.G. Williams, Phys. Rev. D **70**, 034509 (2004);
- A. Sternbeck, E.-M. Ilgenfritz, and M. Muller-Preussker, Phys. Rev. D **73**, 014502 (2006);
- Ph. Boucaud, *et al.*, J. High Energy Phys. **06** (2006) 001;
- P.O. Bowman, *et al.*, Phys. Rev. D **76**, 094505 (2007);
- I.L. Bogolubsky, E.M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker, and A. Sternbeck, Phys. Lett B **676**, 69 (2009);
- O. Oliveira and P. J. Silva, Proc. Sci., **QCD-TNT09** (2009) 033 [arXiv:0911.1643];
- A. Cucchieri, T. Mendes, and E.M.S. Santos, Phys. Rev. Lett. **103**, 141602 (2009);
- A. Cucchieri and T. Mendes, Phys. Rev. D **81**, 016005 (2010);
- D. Dudal, O. Oliveira, and N. Vandersickel, Phys. Rev. D **81**, 074505 (2010);
- A. Cucchieri, D. Dudal, T. Mendes, and N. Vandersickel, Phys. Rev. D **85**, 094513 (2012); **90**, 051501 (2014).
- [55] N. Abou-El-Naga, K. Geiger, and B. Müller, J. Phys. G **18**, 797 (1992);
- M.F. Cheung and C.B. Chiu, arXiv:1111.6957;
- V. Sauli, J. Phys. G **39**, 035003 (2012);
- S. Jia and F. Huang, Phys. Rev. D **86**, 094035 (2012); Eur. Phys. J. C **73**, 2630 (2013);

- A.V. Giannini and F.O. Durães, *Phys. Rev. D* **88**, 114004 (2013);  
A.V. Sidorov and O.P. Solovtsova, *Nonlin. Phenom. Complex Syst.* **16**, 397 (2013);  
J.D. Gomez and A.A. Natale, *Phys. Lett. B* **747**, 541 (2015);  
G. Cvetič, *Phys. Rev. D* **89**, 036003 (2014);  
P. Allendes, C. Ayala, and G. Cvetič, *Phys. Rev. D* **89**, 054016 (2014);  
C. Ayala and G. Cvetič, *Comp. Phys. Commun.* **190**, 182 (2015).
- [56] E.G.S. Luna and M.J. Menon, *Phys. Lett. B* **565**, 123 (2003);  
E.G.S. Luna, M.J. Menon, and J. Montanha, *Nucl. Phys.* **A745**, 104 (2004);  
*Braz. J. Phys.* **34**, 268 (2004);  
E.G.S. Luna, V.A. Khoze, A.D. Martin, and M.G. Ryskin, *Eur. Phys. J. C* **59**, 1 (2009);  
**69**, 95 (2010).
- [57] R.M. Barnett, H.E. Haber, and D.E. Soper, *Nucl. Phys.* **B306**, 697 (1988);  
F.I. Olness and W.-K. Tung, *Nucl. Phys.* **B308**, 813 (1988);  
M.A.G. Aivazis, J.C. Collins, F.I. Olness, and W.-K. Tung, *Phys. Rev. D* **50**, 3102 (1994);  
T. Stelzer, Z. Sullivan, and S. Willenbrock, *Phys. Rev. D* **56**, 5919 (1997).
- [58] J. M. Cornwall, *Phys. Rev. D* **22**, 1452 (1980); *D* **26**, 1453 (1982).
- [59] J.M. Cornwall and A. Soni, *Phys. Lett. B* **120**, 431 (1983); *Phys. Rev. D* **29**, 1424 (1984).
- [60] F.J. Dyson, *Phys. Rev. D* **75**, 1736 (1949); J.S. Schwinger, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **37**, 452 (1951).
- [61] D.V. Shirkov and I.L. Solovtsov, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1209 (1997);  
B.R. Webber, *J. High Energy Phys.* **10** (1998) 012;  
A.V. Nesterenko, *Phys. Rev. D* **62**, 094028 (2000);

- A.V. Nesterenko and J. Papavassiliou, Phys. Rev. D **71**, 016009 (2005) A.I. Alekseev, Few-Body Syst. **40**, 57 (2006);
- G. Cvetič and C. Valenzuela, J. Phys. G **32**, L27 (2006);
- G. Cvetič and C. Valenzuela, Phys. Rev. D **74**, 114030 (2006);
- G. Cvetič and C. Valenzuela, Braz. J. Phys. **38**, 371 (2008);
- G. Cvetič, R. Kögerler, and C. Valenzuela, Phys. Rev. D **82**, 114004 (2010);
- G. Cvetič and C. Villavicencio, Phys. Rev. D **86**, 116001 (2012);
- C. Ayala and G. Cvetič, Phys. Rev. D **87**, 054008 (2013);
- C. Contreras, G. Cvetič, R. Kögerler, P. Kröger, and O. Orellana, Int. J. Mod. Phys. A **30**, 1550082 (2015).
- [62] G. Cvetič, Few-Body Syst. Suppl X **55**, 567 (2015).
- [63] H.D. Politzer, Nucl. Phys. **B117**, 397 (1976);  
P. Pascual and E. de Rafael, Z. Phys. C **12**, 127 (1982).
- [64] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, M.B. Voloshin, and V.I. Zakharov, Phys. Lett. B **77**, 80 (1978);  
A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, and M.A. Shifman, JETP Lett. **27**, 55 (1978).
- [65] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. **B147**, 385 (1979);  
**147**, 448 (1979).
- [66] CMS Collaboration, Report No. CMS-PAS-EWK-10-004 (2010);  
CMS Collaboration, Report No. CMS-DP-2011-000 C (2011).
- [67] J. Pumplin *et al.*, J. High Energy Phys. **07** (2002) 012;  
D. Stump *et al.*, J. High Energy Phys. **10** (2003) 046.
- [68] A.D. Martin, W.J. Stirling, R.S. Thorne, and G. Watt, Eur. Phys. J. C **63**, 189 (2009).
- [69] P. Abreu *et al.*, Phys. Rev. Lett. **109**, 062002 (2012).

- [70] R.U. Abbasi *et al.*, Phys. Rev. D **92**, 032007 (2015).
- [71] V. N. Gribov, *The Theory of Complex Angular Momenta*. Cambridge University press, New York (2003).
- [72] N. A. Amos *et al.*, Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 2433.
- [73] Abe *et al.*, Phys. Rev. D**50** (1993) 5550.
- [74] C. Avila *et al.*, Phys. Rev. Lett. **B445** (1999) 419.
- [75] C. Avila *et al.*, Phys. Lett. **B537** (2002) 41.
- [76] A. Donnachie and P. V. Landshoff, Phys. Lett. **B296** (1992) 227.
- [77] J. R. Cudell, K. Kang, and S. K. Kim, Phys. Lett. **D395** (1997) 311.
- [78] R.J.M. Covolan, J. Montanha, K. Goulianos, Phys. Lett. **B** (1996) 389.
- [79] M. L. Goldberger, Y. Nambu, and R. Oehme, Ann. Phys. **2** (1957) 226;  
P. Söding, Phys. Lett **8** (1964) 285.
- [80] F. W. Byron and R. W. Fuller *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Dover, New York, 1992.
- [81] R. F, Ávila, M. J. Menon, *Brazilian Journal of Physics*, Vol. 37, No. 2B, June, 2007.