

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# Flutuações estatísticas e mobilidade em teoria de jogos: barganha e cooperação

Pablo Javier Valverde Arias

Porto Alegre  
Dezembro, 2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# Flutuações estatísticas e mobilidade em teoria de jogos: barganha e cooperação\*

**Pablo Javier Valverde Arias**

Tese realizada sob orientação do Prof. Dr. Roberto da Silva e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Porto Alegre  
Dezembro, 2016

---

\*Trabalho financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Prof. Roberto da Silva, pela sua orientação e confiança para o desenvolvimento da presente tese, assim como seus conselhos e conhecimento sobre o tema que foram de grande valor na minha formação de doutorado.

Meus agradecimentos aos professores do Instituto de Física pelos conhecimentos e sua dedicação dos conhecimentos adquiridos durante meu mestrado e doutorado.

Agradeço aos colegas e amigos que eu fiz aqui no Brasil, pela sua amizade, companheirismo nos bons e maus momentos também.

À minha família, aos meus irmãos, primos, tios por todo seu grande apoio a distancia.

*E para as três grandes mulheres altruístas na minha vida:*

para Susi, agradecimientos infinitos por tu grande ayuda tia querida!,

para mi madre, Rosa Alba, es poco lo que he hecho hasta ahora para compensar todo el amor, cariño y apoyo que tu siempre me has brindado, te quiero mucho madre!,

e finalmente á Júlia, minha companheira, obrigado pelo tua apoio, carinho e motivação, nesta ultima etapa do meu doutorado.

# Resumo

A teoria da evolução de Darwin - como introduzida em teoria de jogos por Maynard Smith - não é o único aspecto evolucionário importante a ser considerado em uma dinâmica evolucionária, uma vez que as complexas interdependências, competição, e o crescimento podem ser modelados por, por exemplo, aspectos reativos. No jogo do ultimato, a reciprocidade e a partição meio-a-meio parecem ser um desvio do comportamento racional dos jogadores sob a luz do Equilíbrio de Nash. Tal equilíbrio emerge, por exemplo, da punição do respondedor que geralmente tende a refutar propostas injustas. Na versão iterada do jogo do ultimato, os proponentes são capazes de melhorar suas propostas por adicionar um valor a elas tornando-as mais justas. Tais aspectos evolucionários não são propriamente Darwinianos, mas eles são dotados de um aspecto fundamental: eles refletem suas ações de acordo com suas ofertas. Recentemente, uma versão reativa do jogo do ultimato onde a aceitação ocorre com probabilidade fixa foi proposta. Na **primeira parte desta tese**, exploramos esta versão reativa do jogo do ultimato onde a aceitação pelos jogadores depende da oferta. A fim de realizar tal procedimento, analisamos duas situações: (i) campo médio e (ii) consideramos jogadores inseridos em redes com coordenação arbitrária. Assim, mostramos então que o aspecto reativo aqui estudado, não amplamente estudado, de acordo com o nosso conhecimento, na teoria evolucionária de jogos da literatura pode desvendar um aspecto essencial para a convergência da divisão *fifty-fifty*. Além disso, nós também analisamos populações sobre quatro diferentes políticas que variavam de uma altamente conservadora até uma moderada, com respeito à decisão de mudar as propostas baseadas na quantidade de aceitações recebidas. Mostramos que a ideia de ganhar menos, mais vezes, adicionada à reciprocidade dos jogadores, concomitantemente ao lema do “dando mais pra receber mais”, é altamente relevante para o conceito de populações economicamente saudáveis que barganham. Finalmente, para completar nossos estudos no jogo do ultimato reativo, adicionamos a mobilidade aos jogadores. Neste caso, realizamos algumas mudanças le-

---

vando em consideração então a seleção natural (cópia Darwiniana). Mostramos que a mobilidade lidera a menores ofertas médias e também elaboramos um estudo complementar que mostra os valores médios das densidades de ofertas e estratégias/políticas mediadas em intervalos finais para grandes tempos de evolução temporal. Nossos resultados sugerem que apesar de uma coexistência temporária, a política/estratégia III (só oferece menos se todos aceitarem) deve prevalecer em relação a todas as outras em redes quadradas considerando apenas 4 vizinhos sob os efeitos de mobilidade.

Finalmente, na segunda parte desta tese, continuamos a estudar os efeitos de mobilidade, no entanto, em outro paradigma da teoria de jogos, mais precisamente no que tange aos dilemas sociais relacionados aos conflitos entre cooperação e interesses próprios de indivíduos em grandes populações, uma vez que a emergência da cooperação e sua manutenção é a chave para o entendimento dos conceitos fundamentais sobre a evolução das espécies. A fim de entender os mecanismos envolvidos neste contexto, aqui estudamos o jogo de bem público opcional com foco nos efeitos dos aspectos difusivos nos padrões emergentes de dominância cíclica entre as diferentes estratégias. Diferentemente de outros trabalhos, mostramos que os padrões de pedra-papel-tesoura (*RPS*, em inglês, *rock-paper-scissors*) ocorrem por introduzir no jogo um tipo simples de mobilidade aleatória em uma rede esparsadamente ocupada. Tal padrão tem se revelado muito importante na conservação das espécies em ambientes ecológicos e sociais. Uma das mais importantes contribuições desta tese é mostrar que não precisamos de esquemas mais elaborados para construção da vizinhança no jogo para observar padrões de RPS como sugerido na literatura. Como um interessante resultado adicional, propomos um método alternativo para quantificar a densidade de RPS em um contexto quantitativo da teoria de jogos que torna possível realizar um estudo de tamanho finito. Tal abordagem pode ser muito interessante para ser aplicada em outros jogos genericamente.

# Abstract

Darwin's theory of evolution - as introduced in game theory by Maynard Smith - is not the only important evolutionary aspect in evolutionary dynamics, since complex interdependencies, competition, and growth should be modeled by, for example, reactive aspects. In the ultimatum game, the reciprocity and the fifty-fifty partition seems to be a deviation from rational behaviour of the players under the light of Nash equilibrium. Such equilibrium emerges, for example, from the punishment of the responder who generally tends to refuse unfair proposals. In the iterated version of the game, the proposers are able to improve their proposals by adding a value thus making fairer proposals. Such evolutionary aspects are not properly Darwinian-motivated, but they are endowed with a fundamental aspect: they reflect their actions according to value of the offers. Recently, a reactive version of the ultimatum game where acceptance occurs with fixed probability was proposed. In the **first part of this thesis**, we aim at exploring this reactive version of the ultimatum game where the acceptance by players depends on the offer. In order to do so, we analyse two situations: (i) mean field and (ii) we consider players inserted within the networks with arbitrary coordination. We then show that the reactive aspect, here studied, thus far not analysed in the evolutionary game theory literature can unveil an essential feature for the convergence to fifty-fifty split. Moreover we also analyse populations under four different polices ranging from a highly conservative to a moderate one, with respect to the decision in changing the proposal based on acceptances. We show that the idea of gaining less more times added to the reciprocity of the players is highly relevant to the concept of "healthy" societies population bargaining. Finally by completing our studies in the reactive ultimatum game, we added mobility to the players. In this case, we performed some changes taking into account the natural selection (Darwinian copy). We show that mobility leads to lower average offers and we also elaborated color maps for all occupation and mobility values show the density of offers and strategies/polices which

suggests a temporary coexistence.

Finally, in the **second part of this thesis**, we explore the mobility effects which are very important in social dilemmas that concern a natural conflict between cooperation and self interests among individuals in large populations. The emergence of cooperation and its maintenance is the key for the understanding of fundamental concepts about the evolution of species. In order to understand the mechanisms involved in this framework, here we study the Optional Public Good Games with focus on the effects of diffusive aspects in the emergent patterns of cyclic dominance between the strategies. Differently from other works, we showed that rock-paper-scissors (RPS) patterns occur by introducing a simple kind of random mobility in a lattice sparsely occupied. Such pattern has been revealed to be very important in the conservation of the species in ecological and social environments. The goal of this paper is to show that we do not need more elaborated schemes for construction of the neighbourhood in the game to observe RPS patterns as suggested in the literature. As an interesting additional result, in this contribution we also propose an alternative method to quantify the RPS density in a quantitative context of the game theory which becomes possible to perform a finite size scaling study. Such approach can be very interesting to be applied in other games generically.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>16</b>
1.1	Introdução ao Jogo de Ultimato . . . . .	20
1.1.1	Jogo de Ultimato Reativo . . . . .	22
1.2	O problema da Cooperação . . . . .	23
1.2.1	Introdução ao Jogo de Bem Público Opcional . . . . .	25
1.3	Estudo de arte sobre Mobilidade . . . . .	29
<b>I</b>	<b>Flutuações e Mobilidade no Jogo do último</b>	<b>31</b>
<b>2</b>	<b>Aproximação de campo médio no jogo do ultimato reativo</b>	<b>33</b>
2.1	Não estacionariedade da oferta e estudo das correlações do ganho acumulado no caso de aceitação com probabilidade fixa . . . . .	34
2.2	Estacionariedade da oferta e estudo das correlações quando a aceitação depende da oferta . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Jogo do ultimato reativo na rede: automata celular, redes de mundo pequeno e mobilidade</b>	<b>41</b>
3.1	Redes Complexas . . . . .	42
3.1.1	Redes de <i>Mundo pequeno</i> . . . . .	43
3.2	Implementando o jogo do ultimato reativo como um autômato celular na rede incluindo diluição e mobilidade . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Resultados para o jogo do ultimato reativo em campo médio, na rede regular e na rede de pequeno mundo</b>	<b>48</b>
4.1	Resultados na aproximação de campo médio . . . . .	48
4.2	Resultados das Prescrições Pavlovianas para o jogo do ultimato na rede	55

---

4.2.1	Rede Regular Quadrada Bidimensional . . . . .	55
4.2.2	Redes de mundo pequeno . . . . .	62
4.2.3	Resultados para riqueza acumulada e coeficiente de Gini sob as quatro prescrições Pavlovianas para redes de mundo pequeno par- tindo de um anel: análise da desordem e da conectividade . . .	67
<b>5</b>	<b>Jogo de Ultimato Reativo com Mobilidade</b>	<b>75</b>
5.1	Modelo de jogo de ultimato reativo com mobilidade aleatória . . . . .	75
5.2	Simulações Numéricas . . . . .	80
<b>II</b>	<b>Oscilações globais e mobilidade no jogo de bem público opcional</b>	<b>88</b>
<b>6</b>	<b>Jogos de Bem Público Opcional com Mobilidade</b>	<b>89</b>
6.1	Descrevendo o modelo e sua implementação . . . . .	89
6.2	Simulações Numéricas . . . . .	91
<b>III</b>	<b>Conclusões, discussões e resultados futuros</b>	<b>102</b>
<b>IV</b>	<b>Artigos referente a este trabalho</b>	<b>113</b>
<b>7</b>	<b>Artigo publicado</b>	<b>114</b>
<b>8</b>	<b>Artigo submetido</b>	<b>134</b>

# Lista de Tabelas

3.1	<b>Algoritmo para mobilidade dos jogadores a ser utilizado neste trabalho.</b> So sorteados $L^2$ stios para esse algoritmo que podem ou no estarem vazios . . . . .	46
5.1	<b>Esta tabela mostra o cenário de possíveis fusões e sobrevivência de estratégias</b> , levando-se em consideração que pode haver menos que quatro vizinhos em alguns sítios no jogo do ultimato reativo. . . . .	79

# Lista de Figuras

1.1	<b>Diagrama de uma típica realização do jogo do ultimato com dois jogadores <math>A</math> e <math>B</math></b> , onde se repartem 10 unidades monetárias ou simplesmente um bolo dividido em 10 pedaços. Aqui $A$ é o proponente e $B$ o respondedor. No ramo esquerdo, o jogador $A$ propõe uma divisão (8,2), onde ele ganha 8 unidades, o jogador $B$ em caso de aceitar a proposta de $A$ , ganha as 2 unidades restantes. Similarmente, na ramo da direita, $A$ propõe uma divisão equitativa, onde ambos jogadores ganham a mesma quantia, sempre e quando o jogador $B$ aceita a proposta de $A$ , neste caso (5,5) temos um caso de divisão justa (50% – 50%), (ou que o jogador $A$ mostra <i>empatia</i> com o jogador $B$ ).	21
1.2	<b>O experimento de Jogo de Bem Público Opcional.</b> No gráfico se apresentam as médias das frequências das três estratégias durante um período de dez rodadas após a sincronização dos 20 grupos. Na figura (a) se começa com dominância dos <i>loners</i> (preto), (b) se começa com dominância dos cooperadores (vermelho) e (c) se começá com dominância dos <i>defectors</i> (azul-claro). Podemos observar as oscilações globais dinâmica de pedra-papel-tesoura emergente. Para estas figuras, os autores utilizarem um fator de multiplicação do bem público $r=3.6$ e lucro fixo de <i>loner</i> $\sigma = 1.25$ [62].	28
3.1	<b>O modelo de pequeno mundo ou de Watts-Strogatz.</b> O procedimento de Watts-Strogatz de religação aleatória, que interpola entre um anel de rede regular e uma rede aleatória mantendo o número de vértices e links constante. Aqui, $N = 20$ , inicialmente com quatro vizinhos mais próximos. Para $p = 0$ , o anel original permanece inalterado, e conforme $p$ aumenta o anel torna-se cada vez mais desordenado, até para $p = 1$ , onde uma rede aleatória é recuperada. Figura obtida por [5].	43

3.2 **O comprimento característico  $l(p)$ , e o coeficiente de agrupamento  $C(p)$  para o modelo de Watts-Strogatz.** Os dados são normalizados pelos valores de  $l(0)$  e  $C(0)$  para uma rede regular. Foram realizadas médias sobre mais de 20 realizações aleatórias do processo de religação;  $N = 1000$ , e um grau médio de  $\bar{k} = 10$ . Figura obtida por [5]. . . . . 44

4.1 **Variância local do ganho do respondedor para  $p = 1/2$  com  $O_0 = 1/4$ , para diferentes valores de  $\epsilon$ .**Vemos diferentes estágios de crescimento da variância local em função do tempo. . . . . 49

4.2 **Módulo de  $\Phi(t)$  dado pela Equação 2.8 para diferentes valores de  $O_0$ , com  $p = 1/2$ .** É muito peculiar observar que  $\Phi(t)$  se anula para diferentes instantes de tempo que são maiores conforme o valor da oferta inicial. Após este instante o módulo da soma das correlações torna a crescer novamente. . . . . 50

4.3 **Ganho acumulado pra p fixo** Na fig.4.3(a) : O ganho acumulado para diferentes valores de  $p$  (pontos) com  $O_0 = 1/2$ . A curva continua em vermelho constitui o caso em que a probabilidade de aceitação é a própria oferta. Observe que ela equivale ao caso  $p = 1/2$ . Fig. 4.3(b) : Os mesmos resultados para a variância local. . . . . 52

4.4 **Variância local no caso onde a aceitação depende da oferta como função do tempo.** Os pontos são resultados analíticos enquanto as linhas são provenientes de simulações Monte Carlo. . . . . 53

4.5 **Correlação dependente da oferta.** Fig. 4.5(a) : Variância (pontos cheios) e a versão decorrelacionada da variância (pontos vazios) no caso dependente da oferta via simulações Monte Carlo. As curvas correspondem aos resultados analíticos obtidos com nossa aproximação de campo médio respectivos aos gráficos de  $\Phi$  (fig. 4.5(b)) do caso (a). . . . . 54

4.6 **Oferta na rede Quadrada.** Fig. 4.6(a) : Valor médio da oferta para simulações na rede quadrada . Fig 4.6(b): Valor médio da oferta no caso do campo médio. . . . . 56

4.7 **Valor médio para diferentes prescrições do jogo do ultimato Pavloviano na rede quadrada ,  $O_0 = 1/2$ .** . . . . . 57

4.8 **Valor médio para as ofertas no jogo do ultimato Pavloviano na rede quadrada.** Em função do tempo para diferentes valores do número de vizinhos mas escolhidos aleatoriamente. . . . . 58

- 4.9 **Coefficiente de Gini do ganho de todos os jogadores no instante  $t$  para as quatro prescrições utilizadas.** . Dividimos nossos resultados tanto no ganho como proponente (fig.4.9(a)) quanto no caso de ser o aceitador (fig. 4.9(b)). . . . . 60
- 4.10 **Evolução temporal do Ganho Médio.** Fig. 4.10(a) : A evolução temporal do ganho médio do aceitador, fig. 4.10(b): do proponente e fig. 4.10(c) a variância da oferta para as diferentes prescrições. . . . . 61
- 4.11 **Evolução temporal da média de  $O_t$  no Jogo de Ultimato na rede regular quadrada,** para diferentes valores de probabilidade  $p$  de religação de rede e da vizinhança média respectivamente dados  $\langle k \rangle$  : Fig 4.11(a): 0.03, 4, Fig. 4.11(b): 0.03, 16, Fig 4.11(c): 0.01, 8, Fig. 4.11(d): 0.50, 8, respectivamente. Com valores iniciais da proposta  $O_o = O(0)$  iguais a: 0.2 (violeta) , 0.4 (azul), 0.5(verde), 0.6(vermelho), 0.8(preto). O valor de  $\epsilon = 6 \times 10^{-4}$  . Usamos  $L=100$ . . . . . 63
- 4.12 **Diagrama de fase no espaço  $p-k$ ,** no Jogo de ultimato reativo partindo de uma rede quadrada. . . . . 64
- 4.13 **Valores  $O_\infty$  para redes de mundo pequeno constuída a partir de um anel em função de  $k$  para  $p$  fixo e em função de  $p$  para  $k$  fixo.** Os valores podem ser comparados com os resultados das redes de mundo pequeno partindo da rede quadrada (preto) com respeito a um anel (vermelho). Na fig. 4.13(a) o valor de  $\langle k \rangle = 4$ , e na fig. 4.13(b) o valor de  $p = 0.01$  . . . . . 65
- 4.14 **Evolução temporal da média de  $O_t$  do jogo do ultimato no anel,** para diferentes valores de probabilidade  $p$  de religação de rede e de vizinhança  $\langle k \rangle$ : Fig 4.14(a): 0.00, 2, Fig. 4.14(b): 0.50, 2, Fig 4.14(c): 0.00, 99, Fig. 4.14(d): 0.00, 99, respectivamente. Com valores iniciais da proposta  $O_o = O(0)$  iguais a: 0.2 (violeta) , 0.4 (azul), 0.5(verde), 0.6(vermelho), 0.8(preto). . . . . 66
- 4.15 **Mapa de calor no espaço  $p-k$  no jogo de ultimato partindo do anel,** onde se pode apreciar em que regiões o valor de  $O_\infty$  determina se o Jogo de Ultimato tende a ser mais justo/altruista  $O_\infty < 1/2$  ou egoista  $O_\infty > 1/2$ . O valor da vizinhança  $\langle k \rangle$  varia entre um valor mínimo igual a 2 ate o valor limite de  $N - 1 = 99$  tal como se queria conseguir anteriormente . . . . . 67

4.16 **Análise da dependência da conectividade  $k$  de grandezas no jogo do ultimato Pavloviano.** Simulações são realizadas no anel, sem desordem ( $p = 0$ ): a cor preta representa a prescrição I, vermelha a IV, verde a III e azul a II. As quantidades são as seguintes: i) parte superior esquerda: A oferta média dos jogadores; ii) parte superior direita: A fração de aceitadores; iii) parte inferior esquerda: O valor da média dos ganhos acumulados e sua variância e iv) parte inferior direita: O coeficiente de Gini da riqueza acumulada. Com valores iniciais da proposta  $O_o = 0.25$ . O valor de  $\epsilon = 6 \cdot 10^{-4}$ . O tamanho do sistema é de  $N = 100$ . . . . . 69

4.17 **Resultados no Jogo do ultimato no anel para variação do parâmetro de religação  $p$ , com número fixo de vizinhos  $k = 4$ :** a cor preta com círculos, representa a proposta I, a vermelha a IV, a verde corresponde à III e a cor azul com círculos representa a proposta II, depois de  $10^4$  realizações (garantindo com muita folga estado estacionário. As características são as seguintes :i) parte superior esquerda: a ofertas média; ii) parte superior direita: a fração de aceitadores; iii) parte inferior esquerda: o valor médio do ganho acumulado e sua variança e iv) parte inferior direita: O coeficiente de Gini da riqueza acumulada. Valores iniciais da proposta  $O_o = 0.25$ . O valor de  $\epsilon = 6 \cdot 10^{-4}$ . O tamanho do sistema é de  $N = 100$ . 71

4.18 **Efeitos de tamanho finito para o Jogo de Ultimato pavloviano:** comportamento da oferta no caso assintótico como função de  $\langle k \rangle / k$  max para diferentes tamanhos de rede. Utilizamos para isso uma rede de mundo pequeno construída a partir de um anel. O gráfico superior( fig. 4.18(a) ) corresponde a prescrição I enquanto que o inferior (fig. 4.18(b)) corresponde a prescrição III. . . . . 73

5.1 **Efeito de mobilidade para o ultimato reativo com mobilidade,** e todos os jogadores seguindo a prescrição I. . . . . 76

5.2 **Evolução temporal da oferta media no jogo de ultimato reativo com mobilidade igual a zero, para vários valores de densidade,**  $\rho = 0.3$  (linha azul), 0.6 (linha verde), 0.8 (linha vermelha) e 1.0 (linha preta), para cada valor de  $\langle O(t) \rangle$  foram feitas 100 realizações para diferentes configurações iniciais juntamente com uma média sobre os  $N$  agentes em cada passo do tempo, para  $t = 20000$  unidades temporais. Aqui usamos,  $L = 100$  em todas as simulações  $\rho_{S_I}^0 = \rho_{S_{II}}^0 = \rho_{S_{III}}^0 = \rho_{S_{IV}}^0 = 1/4$ . 81

- 5.3 **Variação da oferta media com a mobilidade  $p$  para diferentes diluições no sistema**, os valores de mobilidade  $p$  utilizados são: 0.0 (linha azul), 0.01 (linha verde), 0.02 (linha vermelha), 0.04 (linha preta), 0.05 (linha azul tracejada), 0.1 (linha verde tracejada), 0.3 (linha vermelha tracejada), 0.6 (linha preta tracejada), 0.8 (linha azul combinada entre traços e pontos alternados) e 1.0 (linha verde combinada) Na fig.5.3(a) : para  $\rho = 0.3$ , na fig.5.3(b)  $\rho = 0.6$ , na fig. 5.3(c) para  $\rho = 0.8$  e finalmente na fig. 5.3(d) para  $\rho = 1.0$ . As medidas das ofertas no jogo de ultimato reativo com mobilidade foram feitas médias sobre 100 realizações para diferentes configurações iniciais e sobre  $L^2\rho$  agentes em cada instante do tempo  $t$ . Usamos,  $L = 100$ ,  $\rho_{S_I}^0 = \rho_{S_{II}}^0 = \rho_{S_{III}}^0 = \rho_{S_{IV}}^0 = 1/4$ , e oferta inicial  $\langle O_{(0)} \rangle = 0.5$ . . . . . 82
- 5.4 **Variação das estratégias com a mobilidade  $p = 0.1$  para diferentes diluições no sistema:** fig.5.4(a)  $\rho = 0.6$  e fig.5.4(b)  $\rho = 0.8$ , onde as estratégias estão apresentadas da seguinte maneira:  $\rho_{S_I}$  linha azul,  $\rho_{S_{II}}$  (linha verde),  $\rho_{S_{III}}$  (linha vermelha),  $\rho_{S_{IV}}$  (linha preta). As medidas das estratégias no jogo de ultimato reativo com mobilidade foram feitas com médias sob 100 realizações (diferentes configurações iniciais) e sob  $L^2\rho$  agentes. Da mesma forma aqui usamos,  $L = 100$ ,  $\rho_{S_I}^0 = \rho_{S_{II}}^0 = \rho_{S_{III}}^0 = \rho_{S_{IV}}^0 = 1/4$ , e oferta inicial  $\langle O_{(0)} \rangle = 0.5$ . . . . . 83
- 5.5 **Mapa de cor da dependência da oferta media no espaço  $(\rho, p)$** . Para cada valor de  $\langle O_{(t)} \rangle$  foram feitas 100 realizações para diferentes configurações iniciais e as médias correspondem aos últimos 500 passos do tempo. A emergência de padrões de cor que obedecem a diferentes ranges de ofertas medias no sistema, e que classificamos desde um range de empatia máxima **E** (zona azul cor obscura), a continuação as zonas de altruísmo:  $A_1$  (azul claro),  $A_2$  (azul turquesa),  $A_3$  (verde turquesa) e  $A_4$  (amarelo). Usamos aqui também  $L = 100$ ,  $\rho_{S_I}^0 = \rho_{S_{II}}^0 = \rho_{S_{III}}^0 = \rho_{S_{IV}}^0 = 1/4$ , e oferta inicial  $\langle O_0 \rangle = 0.5$ . . . . . 84
- 5.6 **Mapa de cor da dependência das estratégias no espaço  $(\rho, p)$** , para isso foram feitas 100 realizações para diferentes configurações iniciais e promediadas nos últimos 500 passos do tempo. Nos usamos,  $L = 100$ ,  $\rho_{S_I}^0 = \rho_{S_{II}}^0 = \rho_{S_{III}}^0 = \rho_{S_{IV}}^0 = 1/4$ , e oferta inicial  $\langle O_{(0)} \rangle = 0.5$ . . . . . 86

6.1 **Evolução temporal da da fração das estratégias no Jogo de Bem Público Opcional com varios valores de mobilidade e diluição de agentes.** Apresentamos a fração de cooperadores (linha negra), desertores (linha vermelha) e solitários (linha azul) para  $p = 0.005$ . Nós usamos,  $L = 100$ ,  $\rho_c^0 = \rho_d^0 = \rho_l^0 = 1/3$ . . . . . 92

6.2 **Forma de como foi feita a caracterização na evolução temporal das oscilações periódicas da dinâmica de *pedra-papel-tesoura* para o Jogo de Bem Público Opcional na rede com mobilidade,** (de forma ideal) : densidade de cooperadores  $\rho_c$  (linha preta), desertores  $\rho_d$  (linha vermelha) e solitários (*loners*)  $\rho_l$  (linha azul), e com condições iniciais:  $\rho_c^o = \rho_d^o = \rho_l^o = 0.333$ . Figura **A**) No caso no que um intervalo do tempo se tem coexistência mas não dominância cíclica, **B**) no caso no que um determinado intervalo do tempo se tem só dominância cíclica (LDCLCDLCD,etc). Tomado do ref.[84]. . . . . 94

6.3 **Média das densidades das estratégias em função do fator de multiplicação  $r$  do Jogo de Bem Público Opcional,** onde se tem a media das densidades de cooperadores (círculos pretos), desertores (quadrados azuis), e loners (triângulos azuis) e a proporção de ciclos pedra-papel-tesoura ( $\alpha$ ) (green zone) como função do fator de multiplicação  $r$ . A figura de acima corresponde a  $p = 0.60$ , com os correspondentes valores de densidade (a)  $\rho = 0.1$ , (b)  $\rho = 0.5$ , (c)  $\rho = 0.6$ . O gráfico de abaixo corresponde ao caso de  $p = 0.001$  para os mesmos valores de densidade previamente mencionados. . . . . 95

6.4 **Média das densidades das estratégias em função da diluição total de agentes na rede  $\rho$  no Jogo de Bem Público Opcional com mobilidade,** onde se tem a media das densidades de cooperadores (círculos pretos), desertores (quadrados vermelhos) e *loners*(triângulos azuis) e a proporção dos ciclos pedra-papel-tesoura ( $\alpha$ ) (zona verde) como função da diluição de agentes total na rede  $\rho$ . A figura da acima corresponde a  $p = 0.60$  considerando quatro diferentes valores do fator de multiplicação (a)  $r = 2$ , (b)  $r = 3$ , (c)  $r = 4$  and (d)  $r = 5$ . A figura de abaixo corresponde ao caso de mobilidade baixa  $p = 0.001$  com os mesmos valores de  $r$  previamente mencionados. . . . . 96

6.5 **Mapa de cores que mostra a densidade dos ciclos pedra-papel-tesoura  $\alpha$  para cada par  $(\rho, p)$ ,** considerando  $r = 5$ . Os três diferentes gráficos correspondem a diferentes sementes. . . . . 97

- 6.6 **Snapshots e evolução temporal para diferentes pontos no gráfico de cores.**  
 Figura da acima: Evolução temporal de dois diferentes pontos no mapa de cores: I  $\rho = 0.2$  e II:  $\rho = 0.5$  com  $p = 0.5$ . Figura de médio: Sequência de snapshots para diferentes evoluções temporais para o ponto I:  $\rho = 0.2$  e  $p = 0.5$ . Finalmente a figura de baixo mostra a mesma sequência para o ponto II:  $\rho = 0.5$  e  $p = 0.5$ . . . . . 99
- 6.7 **Efeitos de tamanho finito.** A Densidade de ciclos  $RPS$  ( $\alpha$ ) como função da ocupação na rede  $\rho$  em escala log-log. Nós mostramos os gráficos para diferentes tamanhos do sistema:  $L = 100$  (triângulos)  $L = 200$  (quadrados),  $L = 400$  (triângulos invertidos) and  $L = 500$  (círculos). Nós escolhemos o fator de multiplicação  $r = 3.0$  e mobilidade  $p = 0.5$ . O gráfico inserido na parte da cima corresponde ao caso de  $L = 400$  em escala linear, onde não existem flutuações observadas. O gráfico de baixo mostra a *massa de RPS*  $S(L)$  como função de  $L$ . . . . . 100

# Capítulo 1

## Introdução

Ao usar regras bem estabelecidas na descrição microscópica da interação entre as partículas, a Física Estatística permite explicar de uma maneira razoavelmente profunda e as vezes concisa as propriedades emergentes de sistemas coletivos (nível macro). Esse paradigma micro-macro é também utilizado para explicar os problemas dentro da Economia, Biologia, que são baseados nas interações entre agentes [1]. No contexto das ciências econômicas, tal paradigma foi postulado no trabalho de Thomas Schelling (1978), que foi um dos principais economistas em reconhecer a dependência entre os micro-motivos dos indivíduos e o macro-comportamento do agregado, mostrando que é o tipo de interação que de fato regula a dependência entre ambos os níveis [2]. Da mesma forma, os conceitos e métodos da Teoria dos Sistemas Complexos e da Física Estatística, tais como emergência <sup>1</sup> do parâmetro de ordem ou de seus cumulantes, tanto em equilíbrio quanto em não-equilíbrio, no contexto da teoria das transições de fase, formam uma poderosa ferramenta para entender os aspectos econômicos e sociais em populações e os mecanismos de emergência de muitos fenômenos tais como a dinâmica da opinião, a competição de linguagem, a cooperação, a empatia, a justiça, e alguns dilemas sociais, etc. [4].

Quando há estrutura espacial, os agentes colocados nos vértices do grafo formado, tem seus estados alterados de acordo com regras específicas de interação social, o que geralmente chamamos de dinâmica, levando em conta apenas os vizinhos mais próximos

---

<sup>1</sup>O comportamento coletivo de um sistema, ou conjunto de indivíduos que resulta das interações locais entre seus membros, sem a existência de um controle ou coordenação central, e que não pode ser explicado de forma trivial via tais interações locais é referido como *comportamento emergente*. Geralmente essas propriedades são difíceis de prever, salvo quando as interações são simples de modelar [3].

---

na rede. As redes complexas são consideradas como o esqueleto dos sistemas complexos a serem estudados, que podem ser de vários tipos. Topologias comuns a serem empregadas no estudo de sistemas complexos são as conhecidas redes regulares, onde os vértices tem a mesma coordenação (por exemplo, temos as tradicionais redes quadradas utilizadas para estudar os sistemas de spins), as redes de mundo pequeno (em inglês, “small world networks”) onde um fator de desordem mapeia desde uma rede regular até uma rede completamente aleatória, o que é bastante interessante para modelar aspectos migratórios em processos epidêmicos [5]. Temos ainda as abrangentes redes livres de escala de Barabasi-Albert construídas pelo “preferential attachment mechanism” capaz de descrever, por exemplo, a topologia e o crescimento dos grafos formados na Web, redes de contato de doenças sexualmente transmissíveis e muitos outros contextos [6]. Não poderíamos deixar de mencionar aqui também as recentes redes multiplex que vêm sendo foco de atenção nos últimos anos com potencial aplicação em muitas áreas como climatologia, neurociência dentre muitas outras [7]. Aliás pode-se dizer que a teoria de redes para modelar sistemas complexos constitui hoje uma área própria e interdisciplinar envolvendo Física, Biologia, Economia e Ciência da Computação com produção em crescimento [8].

É reconhecível que os incentivos que influenciam as escolhas das estratégias nas interações sociais ou econômicas dos indivíduos são, em certa medida, moldados pelo comportamento dos outros agentes, e, baseando-nos nessa hipótese, podemos buscar entender as causas e consequências do fenômenos coletivos emergentes já citados anteriormente.

Os indivíduos em todas as sociedades ou mesmo em populações biológicas são membros de redes políticas, sociais e econômicas, e o comportamento dos outros influenciam em suas próprias e melhores decisões e vice-versa. Neste ponto, a teoria de jogos cai como uma luva, porque justamente explora a situação onde a escolha e o bem estar dos indivíduos são interdependentes (ver por exemplo [9, 10]).

Muitos jogos, tais como as interações entre cidadãos e os servidores públicos, têm diferentes soluções ou equilíbrios. Essas soluções podem favorecer ou podem beneficiar apenas poucos indivíduos. Algumas podem favorecer os indivíduos com mais poder sobre outros vulneráveis, e outras podem ser devastadoras para todos. Nesse cenário, o desenvolvimento econômico de um dado sistema como uma cidade, país ou estado está fortemente relacionado às instituições e aos incentivos que definem os equilíbrios

---

possíveis na interação social [11].

Porém, as ferramentas matemáticas da teoria dos jogos quando usadas para inferir entendimento sobre comportamentos em nível social ou econômico, se levadas a cabo, podem não ter uma direta explicação quantitativa dos fenômenos, mas podem prover explicações, predições e constatações interessantes sobre fenômenos naturais e financeiros.

Com o advento de grandes recursos computacionais, desde o final da década de 70, já se tem tentado entender os fenômenos sociais, usando simulações computacionais baseadas em modelos de agentes [12, 13], que com regras definidas, permitem aos físicos, matemáticos e cientistas sociais estudar e simular sociedades artificiais onde, cada indivíduo é obrigado a habitar em um único sítio na estrutura e se envolver em interações de pares com os seus vizinhos locais. O ganho total é acumulado em todas as interações e determina o ganho (*payoff*) de um indivíduo que depende da sua habilidade (ou como comumente se conhece na biologia, seu *fitness*) [14].

Dependendo dos ganhos do agente e dos seus vizinhos, cada indivíduo reconsidera sua estratégia e pode adotar a estratégia de um deles. O sistema evolui ao longo do tempo, considerando as gerações sucessivas. Em cada geração, certos indivíduos são selecionados de acordo com a regra de atualização da estrutura e ao interagir com seus vizinhos. Cada indivíduo, em seguida, recebe a oportunidade de atualizar a sua estratégia de acordo com a respectiva regra de atualização. Neste contexto existem dois tipos básicos de atualização dos estados dos agentes: *síncrona* onde os agentes após jogarem com seus vizinhos locais, somente no final do que se considera um instante de tempo atualizam suas estratégias de maneira simultânea, que na literatura é próprio das dinâmicas no contexto dos autômatos celulares, ou *assíncrona*, onde se seleciona aleatoriamente um agente que interage com seus vizinhos com atualização já é instantânea “on the fly”. Após um número de seleções (que geralmente é o número de nodos da rede) e interações-atualizações, onde inclusive pode haver repetição do agente, considera-se então um instante de tempo da dinâmica em questão.

Para realizar a dinâmica local de um jogo, um jogador pode adotar a estratégia de seu vizinho mais próximo, mas existem várias alternativas que são baseadas na dinâmica evolutiva dos sistemas biológicos como por exemplo: seleção, replicação e mutação [15, 16]. Concentrando-nos agora especificamente no conceito de seleção, o que

---

geralmente um jogador faz durante uma simulação, é copiar a melhor estratégia seja de forma determinística ou probabilisticamente [17, 18, 19] (o aqui vamos denominar de cópia darwiniana (CD) ). Dado uma vizinhança de jogadores com o qual ele tenha jogado, isso seria uma forma de incorporar os aspectos evolucionários de acordo com a teoria Darwin na simulação de jogos em populações finitas no regime que a física estatística chama de limite termodinâmico (populações grandes).

Portanto, com ajuda destes princípios e ferramentas teóricas e computacionais, podemos tentar entender melhor alguns fenômenos sociais que motivam a elaboração do presente trabalho, neste caso queremos estudar que comportamentos podem emergir: a justiça (ou empatia) e a cooperação em tais sociedades artificiais.

Nesta tese estudamos aspectos emergentes relacionados aos aspectos evolucionários em dois jogos: um jogo que imita situações de barganha, conhecido como jogo do Ultimato (UG, em inglês *Ultimatum game*) e um jogo que explora os aspectos de bem público com opção de participação ou não, conhecido como jogo de bem público opcional (OPGG, em inglês *Optional Public Goods Game*).

No primeiro jogo, nossas contribuições foram concentradas inicialmente em um conceito que cunhamos de *jogo do ultimato reativo* (RUG, em inglês *Reactive Ultimatum Game*) baseado na ideia de que o jogador altera suas ações de acordo com as propostas e não só apenas copiando uma estratégia de maior payoff como é feito numa evolução estritamente Darwiniana ao se estudar a dinâmica evolucionária em teoria de jogos. As ideias iniciais sobre o RUG foram inicialmente introduzidas em [20] pelo orientador deste trabalho e colaboradores, e nossa proposta aqui estende, modifica e explora outros pontos dessa ideia inicial. Assim nesta tese, no jogo do ultimato, o jogador regula suas propostas dado seu último resultado prévio e com probabilidade que pode ser fixa ao longo das simulações ou proporcionais as ofertas que são atualizadas ao longo do tempo dada a reação do jogador a uma barganha bem ou mal sucedida.

Em uma primeira parte do jogo do ultimato, estudamos via campo médio e simulações Monte Carlo as propriedades das flutuações estocásticas, propriedades estacionárias e propriedades do estudo do jogo na rede, em regime de baixa e alta coordenação. Mostramos que as ofertas estacionárias tendem a independer da oferta inicial atribuída aos membros da população. Em campo médio mostramos que o mesmo acontece contudo e o resultado é quantitativamente recuperado no regime de alta coordenação da rede estudada. Efeitos de desordem são também analisados em redes de

mundo pequeno. Finalmente em uma última parte analisamos a mobilidade para o jogo do ultimato introduzindo uma variação com cópia Darwiniana para esse jogo.

Já no OPGG, que corresponde ao outro jogo a ser estudado nesta tese, nossa contribuição foi mais específica: estudar os efeitos da mobilidade dos jogadores na cooperação. Mais precisamente, exploramos a emergência das oscilações globais de pedra-papel-tesoura (RPS, em inglês *Rock-Scissors-Paper*) que aparecem com o surgimento da mobilidade dos jogadores. Tal efeito foi devidamente quantificado por introduzir um parâmetro que mede a massa de RPS considerando todas as possíveis diluições e que pode ser aplicado e estendido para jogos na rede ou sem estrutura espacial em outros contextos.

Antes porém de dizer quais foram nossas contribuições em relação a esses dois paradigmas da teoria de jogos, precisamos definí-los e ilustrar alguns detalhes importantes sobre eles e a sua importância no contexto da teoria evolucionária dos jogos. O que faremos na próxima seção deste capítulo.

## 1.1 Introdução ao Jogo de Ultimato

Um dos mais debatidos resultados na economia experimental chega dos estudos que provêm do chamado *jogo do ultimato* [21]. Neste jogo um jogador chamado de proponente oferece uma divisão de um bolo de determinado tamanho. O segundo jogador respondedor pode aceitar ou rejeitar. O jogo é detrimental no sentido que se o segundo jogador rejeita, ambos jogadores nada ganham. No caso de aceitação, a divisão do bolo é realizada como foi proposta. Na Fig. 1.1, temos uma representação por um diagrama de árvores de uma típica realização do jogo do ultimato.

Mas como o jogo do ultimato fica no contexto da teoria clássica de jogos? Esta teoria, parte do pressuposto que os indivíduos são agentes racionais. Se entende por racional, indivíduos com estratégias bem definidas e estabilizadas e que eles maximizam seus ganhos dadas as possibilidades existentes [22]. Parafraseando a Rubinstein [23], dizemos que um tomador de decisão racional é alguém que pede, em primeiro lugar, o que é viável, em segundo lugar, o que é desejável e, finalmente, o que é a melhor alternativa de acordo com a noção de conveniência, dadas as restrições viáveis. Portanto, ao considerar jogadores racionais no contexto do jogo do ultimato, o jogador  $B$  aceitaria qualquer proposta do jogador  $A$  por menor que ela seja, já que seria a melhor resposta

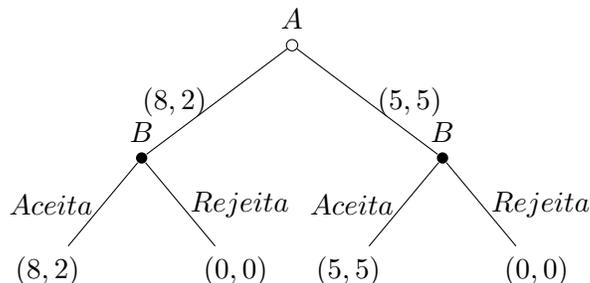


Figura 1.1: **Diagrama de uma típica realização do jogo do ultimato com dois jogadores A e B**, onde se repartem 10 unidades monetárias ou simplesmente um bolo dividido em 10 pedaços. Aqui A é o proponente e B o respondedor. No ramo esquerdo, o jogador A propõe uma divisão (8,2), onde ele ganha 8 unidades, o jogador B em caso de aceitar a proposta de A, ganha as 2 unidades restantes. Similarmente, na ramo da direita, A propõe uma divisão equitativa, onde ambos jogadores ganham a mesma quantia, sempre e quando o jogador B aceita a proposta de A, neste caso (5,5) temos um caso de divisão justa (50% – 50%), (ou que o jogador A mostra *empatia* com o jogador B).

para a proposta de A, enquanto o jogador A praticamente ficaria com toda a quantia a ser repartida [24], sendo essa a atitude racional segundo o proponente.

Mas os resultados experimentais estão em contraste com as suposições teóricas <sup>2</sup>. Na média, as ofertas estão em torno de 40% do bolo ao segundo jogador. Porém, ofertas são rejeitadas em torno de 15% – 20% das vezes. Não surpreendentemente, baixas ofertas são mais prováveis de serem rejeitadas [26]. Também fatores de índole cultural e ancestral são considerados em outros estudos. Em experimentos com sociedades urbanas, em ambientes acadêmicos ou de homens de negócios, estudos sugerem que propostas injustas são em grande medida rejeitadas, mas no caso de sociedades indígenas como Machiguenga localizada na Amazônia peruana experimentos reportados por Henrich e colaboradores [27] com membros dessa tribo sugerem um comportamento mais altruísta (indivíduos desta tribo aceitam propostas de até menos que 30% do total).

É importante mencionar que os dados nestes experimentos são obtidos fortemente calcados em conceitos de antropologia, questionáveis no nosso entendimento dada as muitas flutuações existentes nestes dados, como também em comportamentos associa-

<sup>2</sup>Neste ponto cabe ressaltar que outros cientistas sociais consideram que o *homo economicus* (indivíduo racional) como modelo de *homo sapiens* na tomada de decisões não necessariamente pensam iguais. Na verdade o *homo sapiens* (no jogo de ultimato por exemplo), pensa de forma aproximada como um *homo sociologicus*, um homínido ficcional que é governado pelas normas sociais que regem numa sociedade [25]. Mas isso requer uma confrontação com a experimentação adequada no contexto da antropologia, que não é explorado neste trabalho.

dos na psicologia e sociologia do comportamento, para entender maneiras de resolução de conflitos e sobre como as decisões individuais são influenciadas pelas decisões dos outros. Indo em direção ao lado psicológico do jogador, um fato que nos chama atenção neste contexto é o dito reflexo condicionado proposto por Ivan Petrovich Pavlov [28]. Observou-se que este tipo de comportamento condicionado ou *reflexológico*<sup>3</sup> pode ser incorporado às simulações computacionais para estudar a emergência da cooperação em teoria de jogos [29]. A estratégia *Pavlov* é também conhecida nesses jogos como *Win-Stay, Lose-Shift*, se ganhar fica, se perder muda [30]. Baseando-nos nesse tipo de trabalho, nós consideramos um modelo para o jogo do ultimato que considerasse a reação do jogador a respostas positivas e negativas dos seus oponentes, o que denominamos neste trabalho de jogo do ultimato *reativo*.

### 1.1.1 Jogo de Ultimato Reativo

Recentemente o orientador deste trabalho e colaboradores [20] deram um passo inicial para incluir aspectos reativos no jogo do ultimato. Ao pensar em um jogo iterado fora da rede, eles inicialmente imaginaram uma situação simples onde o proponente oferece inicialmente uma quantia  $O_o$  ao respondedor que a aceita com uma probabilidade fixa  $p$ . Ao ter sua oferta rejeitada, o proponente corrige-a para uma próxima jogada fazendo-a um pouco mais generosa  $O_o + \varepsilon$ . Se aceita ele imediatamente a corrige para  $O_o - \varepsilon$  na tentativa de ficar com mais da quantia a ser repartida. Aqui  $\varepsilon$  é a taxa de mudança do jogo.

Os mesmos autores estudam esse jogo com funções de aceitação generalizadas mais complexas e pontos de otimização para o ganho máximo e variância são do ganho local dos respondedores (e também dos proponentes) são estudadas analiticamente. Contudo, algumas inovações poderiam tornar essa versão reativa do ultimato ainda mais realística, como por exemplo:

1. A aceitação não ser realizada com uma probabilidade fixa e sim com uma proba-

---

<sup>3</sup>Premiado com o Nobel de Fisiologia (Medicina) de 1904 por suas descobertas sobre os processos digestivos de animais, ele entrou pra história, quase que por acaso por estudar o papel do condicionamento na psicologia do comportamento, o dito reflexo condicionado. Em 1920 ao estudar a produção de saliva em cães expostos há diversos tipos de estímulos paletares, Pavlov percebeu que com o tempo a salivação passava a ocorrer diante de situações e estímulos que antes não causavam tal comportamento. Essa descoberta abriu caminho para o desenvolvimento da reflexologia e psicologia comportamental e mostrou ter ampla aplicação prática, inclusive no tratamento de fobias, nos anúncios publicitários, e em outras outras aplicações da medicina e ciências cognitivas.

- bilidade, por exemplo, que seja proporcional à oferta realizada;
2. Realizá-la em uma topologia diferente onde se possa explorar algum efeito de desordem;
  3. O jogo poderia ser simulado computacionalmente como um automato celular probabilístico (ACP);
  4. Incluir os aspectos difusivos do jogo do ultimato reativo na rede e incluir os efeitos de seleção (Darwiniana).

Então de forma inédita nosso trabalho nesta tese foi considerar esses quatro tópicos e estudá-los em algum nível de detalhes. Utilizando resultados de campo médio e principalmente simulações Monte Carlo, nossos resultados exploram as médias das ofertas no estado estacionário ( $t \rightarrow \infty$ ), comportamentos relacionados a distribuição de ganhos considerando diferentes políticas/estratégias adotadas pelos jogadores.

Com o jogo de ultimato podemos compreender como os processos de negociação em jogos não cooperativos são feitos, o que é uma fonte importante para entender por exemplo, como surgem fenômenos sociais tais como a justiça ou empatia. No entanto existem na literatura vários estudos feitos onde se criam e exploram outros tipos de jogos, neste caso o jogo do dilema do prisioneiro, que é paradigma para entender um outro fenômeno coletivo, tão importante como a empatia: a cooperação [31, 32].

## 1.2 O problema da Cooperação

A cooperação é um fenômeno coletivo emergente e um modo de interação social, econômica e biológica, em que indivíduos ou grupos trabalham para um fim comum [33, 34]. No entanto, as pessoas podem ser oportunistas e egoístas e tendem a cuidar de si mesmas e de seus próprios interesses. Diante disso, é crucial entender sob quais condições a cooperação pode emergir em grandes populações. O dilema social do conflito entre o interesse individual e o bem comum têm sido tema de pesquisa que atrai não só a atenção dos cientistas sociais, mas também dos físicos e matemáticos [35, 36, 15, 37].

Da mesma maneira como a justiça e a empatia, a emergência da cooperação pode ser estudada também no contexto da jogo, e paradigma mais simples em teoria de jogos

que explora esse conceito, é conhecido como o *dilema do prisioneiro* [26], e que estuda o dilema social dos indivíduos entre cooperar ou não cooperar com apenas dois participantes. Uma generalização ocorre quando ele é aplicado a interações utilizando grupos de  $N$  indivíduos, o que é usualmente referido como *jogos de bem público* [38].

A teoria dos jogos de bem público tem sido utilizada de diversas formas em grande parte da literatura para explicar a emergência da cooperação em interações de  $N$  indivíduos [39]. O mecanismo básico do jogo de bem público consiste na escolha de duas estratégias possíveis: cooperar ou desertar. Em um dado momento, se todos os jogadores cooperam, o bem público pode ser mantido, já que ele depende do número de cooperadores presentes nesse instante, mas como os benefícios do bem público são compartilhados tanto por cooperadores como por desertores (ou egoístas), os cooperadores percebem que estão sendo explorados pelos desertores e, na próxima rodada do jogo, tendem a mudar para a estratégia de desertor. Assim, o bem público tenderia a desaparecer se, ao longo do tempo, o número de desertores aumentasse. Haveria, então, o conflito social, conseqüente do comportamento egoísta de cada um dos desertores<sup>4</sup>, o que exigiria a necessidade de cooperação entre os indivíduos para continuar a manter a existência do bem público (por exemplo, o transporte público ou a saúde pública, no caso social; ou a proteção a camada de ozônio, um bem público natural).

Assim os mecanismos que fazem a atitude de cooperar emergir de forma a manter a saúde coletiva já foram discutidas em pesquisas anteriores, nas quais foram apresentados alguns modelos de Jogos de Bem Público. Nelas, concluiu-se que a cooperação pode se estabilizar e se manter vigente [41, 42, 37, 43, 44]. Nesse sentido, a opção de ser cooperador beneficia uma sociedade, já que, a partir disso, se pode manter e desenvolver os bens públicos fornecidos pelo Estado para a sua nação, e, no caso das espécies, a cooperação para a manutenção da biodiversidade [45, 37, 46].

Para contrapor o efeito de não cooperar em um típico jogo de bem público, vários modelos foram propostos, por exemplo, punindo os desertores [41], ou em uma forma mais branda que os cooperadores recompensem outros cooperadores [42]. Mas tais modelos tem seu calcanhar de Aquiles: no primeiro caso, a punição é o um fato que custa caro e envolve um dispêndio de energia de parte das instituições que controlam e punem

---

<sup>4</sup>Neste sentido, a solução de equilíbrio racional, dentro da teoria dos jogos, conduz a um impasse econômico, e, a cooperação desce ao nível mais baixo. Este dilema social é conhecido como *tragedia dos comuns*, caracterizado pelo *free-rider problem* [40].

aos desertores e por outra parte, não esta claro como ela surge nem como se estabiliza. A fragilidade do segundo caso é que a recompensa também incorpora um custo de manutenção, já que há aqueles que contribuem ao bem comum mas não recompensam os outros cooperadores são chamados de *second-order-free-riders* [46]. Todos esses mecanismos além de possuírem um alto custo, envolvem outra questão importante, a necessidade de identificar quais indivíduos cooperam e quais não cooperam nos jogos de bem público. De maneira que têm surgido outras alternativas para resolver este dilema social. Em nosso caso, estamos interessados na variante de jogo chamado de jogo de bem público com participação voluntaria ou *Optional Public Good Games* [44], com os jogadores arranjados numa rede e com permissão de mobilidade para os jogadores o que é uma das contribuições desta tese. A seguir, vamos falar um pouco sobre o jogo de bem público opcional a fim de contextualizar o leitor da literatura sobre isso.

### 1.2.1 Introdução ao Jogo de Bem Público Opcional

Na sociedade humana a participação nos bens públicos não é necessariamente obrigatória: muitas vezes as pessoas tem a opção de se abster ou mesmo se recusar a participar neles, por exemplo, pode-se visualizar numa cidade onde um ou mais indivíduos podem ou não fazer uso do transporte público, porque contam com transporte individual ou podem ir caminhando ate seus destinos.

No jogo de bem público opcional, temos três tipos de estados: o estado dos cooperadores, o estado dos desertores (*defectors*) e o estado dos voluntários (*loners*) [47], onde estes últimos, são os jogadores que optam por não participar do bem público e que tem um lucro fixo que não depende dos outros participantes. A inclusão do estado dos *loners* pode limitar a dominância dos *free-riders* (que é o estado dominante nos jogos de bem público obrigatórios) e deste forma relaxar o dilema social [48].

A modelagem deste cenário foi pela primeira vez tratada com as ferramentas matemáticas da teoria evolucionária dos jogos <sup>5</sup> por Hauert e colaboradores [54], onde se

---

<sup>5</sup>A dinâmica evolucionaria apresenta aqueles princípios matemáticos básicos de acordo com o qual a vida tem evoluído e continua e evoluir [45, 49, 50, 51, 52]. É neste contexto que surgiu a teoria dos jogos evolucionários ou a teoria evolucionaria de jogos. Originada em 1973 com John Maynard Smith e George R. Price [53], os quais introduziram conceitos da teoria de evolução de Darwin na teoria clássica de jogos, tal teoria foca-se na dinâmica das estratégias mais do que nas propriedades do equilíbrio em si. Smith e Price, forneceram uma formalização das estratégias evolucionariamente estáveis como uma aplicação formal da teoria de jogos para contextos biológicos. A dinâmica do replicador por ser escrita,

supõe a existência de grande população misturada (ou seja populações de agentes onde cada indivíduo tem a mesma probabilidade de encontro com quaisquer outros jogadores no jogo de bem público opcional) de  $N$  jogadores consistindo de cooperadores, desertores e voluntários. Em cada passo de tempo, considera-se uma vizinhança consistindo de  $n$  indivíduos aleatoriamente escolhidos na população. Os jogadores são perguntados se desejam participar ou não do jogo. Sendo  $S$  o número de indivíduos que vão participar, os  $n_l = n - S$  indivíduos que rejeitam a participação no jogo, adotam o estado *loner*, e recebem um ganho fixo  $P_l = \sigma$ , uma constante. O grupo restante de  $S$  jogadores é formado por  $n_c$  cooperadores e  $n_d = S - n_c$  desertores. As quotas de investimento ou de operação no fundo dos bens públicos são normalizadas a um ( $c = 1$ ). O lucro dos desertores é calculada como  $P_d = rn_c/S$ , onde  $r$  é o fator de multiplicação de bem público, e o lucro dos cooperadores é calculada como  $P_c = rn_c/S - c$  [55]. Se o grupo consta de um só jogador ( $S = 1$ ) é fácil comprovar que ele vai optar por tornar-se *loner*.

A dinâmica do jogo é a seguinte: para este modelo se  $0 < r \leq \sigma + 1$ , é melhor ser *loner* no grupo de cooperadores e desertores, já que o fator de multiplicação de jogo público  $r$  é baixo. Mas se  $r > \sigma + 1$ , começa a crescer o número de cooperadores, porque o incentivo para cooperar aumenta, e sob estas condições do jogo se existem muitos jogadores que são cooperadores, é melhor tornar-se desertor; se os desertores são maioria, é melhor não participar no jogo porque não se tem lucro algum e, portanto, é melhor tornar-se *loner*; por fim, se os loners são maioria, é melhor tornar-se cooperador.

A dinâmica de jogo de bem público opcional para esses valores do fator  $r$  podem então apresentar as conhecidas oscilações globais, ou ciclos do tipo *pedra-papel-tesoura*.<sup>6</sup> É interessante que quando temos muitos jogadores que são *loners*, formam-se pe-

---

em sua versão discreta relacionada diretamente com a matriz de ganho do jogo:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i [ (A\rho)_i - \rho^T A\rho ]$$

onde  $A$  é a matriz de ganhos, que proporciona todos os possíveis resultados entre os confrontos de todos os pares de estratégias existentes, portanto tem dimensão  $N_s \times N_s$ , onde  $N_s$  é o número de estratégias na população. Aqui  $\rho_i$  é a proporção do tipo  $i$  na população,  $f_i(\rho)$  é o *fitness* do tipo  $i$ ,  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ , tal que  $\sum_{i=1}^n \rho_i = 1$ , é o vetor da distribuição de tipos na população e  $\varphi(\rho) = \sum_{i=1}^n \rho_i f_i(\rho)$  é o *fitness* médio da população. Esta equação de tipo determinista e aplicado a populações infinitas, não considera, por exemplo, aspectos de **mutação**. Nós sabemos que as flutuações estatísticas em uma dinâmica de população traz aspectos valiosos para uma análise completa de suas propriedades, o que é uma das propostas deste trabalho.

<sup>6</sup>A Natureza utiliza as vezes a ação de três tipos de participantes para manter a diversidade e o equilíbrio das espécies mas com diferentes estratégias de sobrevivência. Existem dois casos principais

quenos grupos de cooperadores e grandes grupos de desertores, mas a opção de poder sair ou abster-se do jogo preserva o equilíbrio entre as duas opções de uma maneira natural. Desta forma, esta dinâmica cria uma situação em que nenhum estado pode ter dominância sobre os outros, mantendo-se assim níveis de cooperação aceitáveis [17]. Ela já foi observada na natureza, e em experimentos de jogo de bem público opcional realizado com seres humanos como, por exemplo, um realizado no ano 2002 com 280 alunos do primeiro semestre de biologia em uma Universidade da Alemanha [62]. Os alunos foram divididos em 20 grupos de 14 alunos cada. Em cada grupo foram realizados jogos de bem público opcional com 57 rodadas consecutivas. Nas primeiras sete rodadas do jogo, aos jogadores são mostrados resultados falsos na tela para convencer-lhes que existe um comportamento dominante. Este procedimento foi necessário para forçar uma condição inicial em que a maioria adote um dos 3 estados possíveis: loner (L), cooperador (C) ou desertor (D). Na oitava rodada, o painel passou a mostrar os resultados reais e assim o comportamento cíclico pode ser testado(ver figura 1.2) .

---

da competição entre as espécies, a competição conhecida como hierárquica (onde apenas uma espécie é mais apta para sobreviver entre três tipos de espécies existentes, digamos A, B e C), e a competição *transitiva ou cíclica*, onde as três espécies A, B e C coexistem. Em uma competição cíclica as regras são: A ganha de B, B de C e C de A. Assim, todas as estratégias têm a mesma chance de ganhar ou perder na competição como no típico jogo de pedra-papel-tesoura. [56, 48]. Existem estudos com sistemas compostos da maneira hierárquica onde um predador tem mais de uma presa, e num curto período de tempo o sistema competitivo hierárquico desaparece e tende a um ciclo não-hierárquico descrito pelo jogo de pedra-papel-tesoura [57, 47]. O jogo do pedra-papel-tesoura tem sido extensivamente estudado não só em biologia, mas também em dinâmicas sociais, tais como na dinâmica de opiniões [58] e emergência de cooperação na teoria dos jogos públicos opcionais [54, 59] que é o tema que vamos explorar nesta tese. Para complementar, mencionamos duas pesquisas no campo biológico onde o tipo de competição de pedra-papel-tesoura foi observada: a primeira por Barry Sinervo e Curt Lively da Universidade de Indiana [60]. Neste trabalho foram descritos padrões de comportamento sexual de um tipo de lagarto abundante na faixa litoral da Califórnia. E o outro caso foi a pesquisa realizada por cientistas das Universidades de Yale e Stanford [61, 49, 19], que descobriram que o mesmo cenário é responsável pela preservação da biodiversidade em populações de bactérias. A bactéria em questão foi a *Escherichia Coli*, que é encontrada particularmente em nosso sistema digestivo.

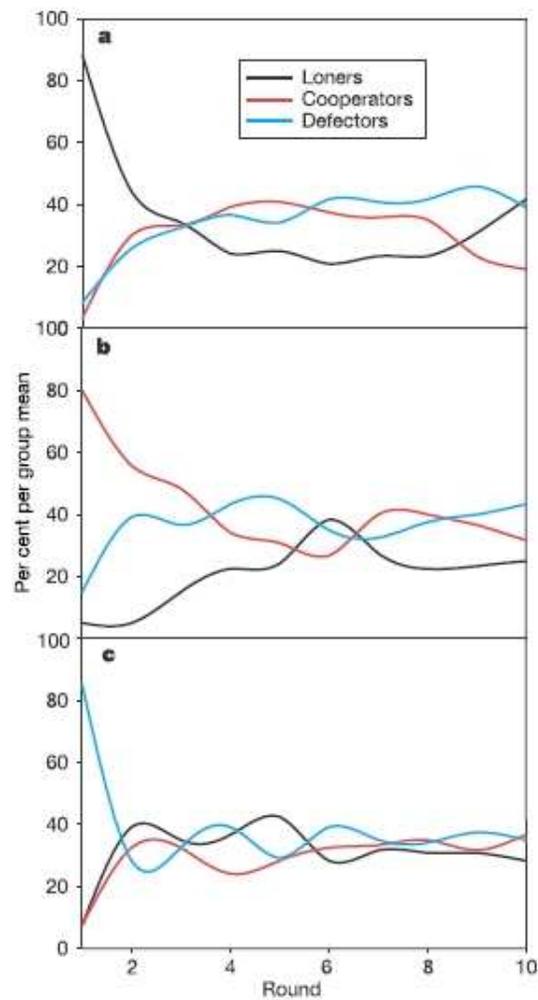


Figura 1.2: **O experimento de Jogo de Bem Público Opcional.** No gráfico se apresentam as médias das frequências das três estratégias durante um período de dez rodadas após a sincronização dos 20 grupos. Na figura (a) se começa com dominância dos *loners* (preto), (b) se começa com dominância dos cooperadores (vermelho) e (c) se começá com dominância dos *defectors* (azul-claro). Podemos observar as oscilações globais dinâmica de pedra-papel-tesoura emergente. Para estas figuras, os autores utilizarem um fator de multiplicação do bem público  $r=3.6$  e lucro fixo de *loner*  $\sigma = 1.25$  [62].

Desta forma a dinâmica de *pedra-papel-tesoura* parte da contribuição à deserção e daí à opção de abster-se de participar no jogo para depois voltar à contribuição e continuar com a sequência (C-D-L-C,etc). Porém, isso não é suficiente para estabelecer a cooperação, porque a longo prazo as médias dos ganhos dos cooperadores são as mesmas que se os participantes se abstivessem de participar no jogo [46, 18]. Quando o jogo evolui desse jeito nestes grupos, os jogos de bem públicos já não são mais um dilema social. Mas além da inserção de uma nova estratégia, existem outros mecanismos que poderiam ou não superar o dilema da cooperação, como é o caso da mobilidade dos jogadores, onde os agentes tem uma certa probabilidade de se movimentar no meio.

### 1.3 Estudo de arte sobre Mobilidade

A mobilidade é um fenômeno que está presente tanto em sociedades humanas como animais. Estudos mostram a importância da mesma na determinação da conservação das espécies num cenário de interação entre suas componentes de tipo biológico [63, 64] ou social [65, 66], outros trabalhos baseados em jogos de cooperação como o dilema de prisioneiro [67, 68, 69] propõem que a mobilidade pode desestabilizar e prejudicar a cooperação ou sobrevivência das espécies, ou que para valores baixos de mobilidade, certos mecanismos de blindagem fazem manter a biodiversidade, ou a cooperação pode se manter no tempo até chegar ao equilíbrio do sistema.

De uma maneira mais geral, o movimento dos agentes pode levar a uma segregação de acordo as suas estratégias, e assim, formar aglomerados fortemente ligados que evitem a invasão das outras estratégias, neste caso a invasão de egoístas em grandes grupos de cooperadores, mantendo assim a cooperação [70]. Podemos mencionar também a inclusão de outros parâmetros de controle no caso de vários tipos de mobilidade dependendo do lucro das estratégias em jogos de bem público opcional [71], ou de inclusão de outras variantes ao jogo de dilema do prisioneiro espacial [72, 73] com o objetivo de que a cooperação prevaleça.

No jogo do ultimato a mobilidade tem sido pouco explorada. Neste tese procuramos explorar esse ponto. Nosso modelo explora agentes que adotam quatro diferentes estratégias na nossa variação do jogo de ultimato, o ultimato reativo. Essas estratégias estão associadas a diferentes mudanças de como se atualiza a oferta com respeito aos vizinhos mais próximos, indo do mais guloso ao mais conservador. A oferta inicial de

todos os jogadores tem um valor fixo, mas tende a avariar em cada passo do tempo, neste caso tanto a variação da média da oferta total, como da fração das estratégias no jogo são influenciadas pela mobilidade como a ocupação na rede, como veremos adiante.

Então dividiremos essa tese em duas partes.

Na primeira parte, nós estudamos a versão reativa do jogo do ultimato tendo como meta:

1. Explorá-lo em campo médio;
2. Via simulações Monte Carlo olhando para o jogo em termo de um autômato celular em redes quadradas bidimensionais. Complementarmente a fim de estudar os efeitos de alta coordenação, e os efeitos de desordem sobre o sistema, exploramos o jogo com um foco especial para as redes de mundo pequeno;
3. Introduzindo uma versão do jogo do ultimato reativo com adicionais efeitos de seleção Darwiniana, exploramos os efeitos de mobilidade na rede quadrada bidimensional;

Na segunda parte da tese estudamos o jogo de bem público no que tange aos efeitos de mobilidade e mais precisamente como esta mobilidade influencia nas oscilações globais que emergem em regimes de alta ocupação. Nesta parte após introduzir os detalhes do jogo e mostramos as simulações relativas aos fenômenos de sobrevivência da cooperação e de dominância cíclica ou pedra-papel-tesoura no jogo de bem público.

Utilizamos uma terceira e última parte para sumarizar e apresentar algumas conclusões do nosso trabalho (Parte III). Aproveitamos também para nesta parte final, apresentar algumas breves discussões e outros fenômenos a serem explorados em pesquisas futuras que possam dar continuidade ao presente trabalho.

## Parte I

# Flutuações e Mobilidade no Jogo do últimato

Nesta parte da tese exploraremos os aspectos reativos do jogo do ultimato. No primeiro capítulo, mostraremos nossos resultados de campo médio adequadamente definido para a versão reativa do jogo do ultimato <sup>7</sup>. Antes porém, realizamos um estudo complementar à referência [20] com probabilidade de aceitação fixa, mostrando resultados analíticos sobre a soma das correlações temporais do ganho acumulado. Finalmente, nesta mesma seção, nós apresentamos o campo médio para o caso onde aceitação é realizada com probabilidade variável proporcional ao valor da oferta.

No segundo capítulo desta seção, apresentamos como o jogo do ultimato reativo é implementado como um autômato celular. Descrevemos brevemente as redes de mundo pequeno que utilizaremos para estudar os efeitos de alta coordenação e efeitos de desordem sobre o jogo do ultimato reativo. Finalizando este capítulo, mostraremos como a mobilidade será incorporada neste modelo, ilustrando o que entendemos pela difusão dos jogadores na rede particularmente para essa versão do jogo do ultimato estudado.

Já no Capítulo 4 apresentamos os resultados do jogo do ultimato tanto na versão de campo médio quanto simulado como um autômato celular na rede quadrada e de mundo pequeno. No último capítulo da parte I (Cap. 5), mostramos as mudanças introduzidas no jogo do ultimato reativo e então apresentamos os resultados para a mobilidade no jogo do ultimato.

---

<sup>7</sup>Não encontramos nenhum nome melhor do que campo médio para o que vamos fazer no próximo capítulo.

## Capítulo 2

# Aproximação de campo médio no jogo do ultimato reativo

Em [20] os autores (incluindo particularmente o orientador deste trabalho), propõem o que entendemos ser como a versão mais simples possível (talvez a única) de um modelo Pavloviano para o jogo do ultimato. Neste modelo, um jogador (proponente) realiza uma proposta  $O_t \in [0, 1]$  no tempo  $t$  que é aceita com uma probabilidade fixa  $p$  pelo respondedor/aceitador. Quando rejeitada, ela faz com que o proponente mude suas expectativas de ganho e aumente a proposta de uma quantidade  $\epsilon$  que é parâmetro do problema.

Por outro lado, quando aceita faz com que o proponente decresça a oferta numa quantidade, exatamente como ocorre com moedinhas de chocolate das crianças no experimento reportado no Youtube [74].

Primeiro vamos revisitar este problema para descrever as possíveis correlações, o que não foi discutido no artigo [20]. Para  $p$  fixo os efeitos de rede não são importantes, assim campo médio é a única análise interessante, o que será feito na próxima seção. Logo após, na seção seguinte mostraremos os resultados para o jogo onde a probabilidade de aceitação é exatamente igual a proposta. Isso conduz a uma situação interessante de oferta estacionária justa:  $O_{t \rightarrow \infty} = 1/2$ , independente da oferta inicial arbitrária considerada.

## 2.1 Não estacionariedade da oferta e estudo das correlações do ganho acumulado no caso de aceitação com probabilidade fixa

Considere o caso onde o respondedor, sempre aceita a oferta com uma probabilidade fixa  $p \in [0, 1]$  [20], e naturalmente a rejeição da oferta ocorre com probabilidade  $1 - p$ . Vamos imaginar que o jogo ocorra iteradamente, rodada após rodada entre o mesmo par de jogadores. E também sabemos que quando rejeitada, a oferta é corrigida pela adição de  $\varepsilon$  e na aceitação decrementada pela mesma quantidade.

Para este simples jogo iterado de memória igual à 1 (os jogadores mudam de acordo com sua última rodada), dado  $\varepsilon$ ,  $p$  o valor esperado do ganho na  $i$ -ésima rodada, supondo que ele parta da oferta inicial  $O_0$ , é dada pela equação

$$\langle O_i \rangle = O_0 + i\varepsilon(1 - 2p), \quad (2.1)$$

onde  $i = 0, 1, 2, \dots, t, \dots$  uma vez que em cada rodada a oferta média é modificada em média por  $\langle (\Delta O)_i \rangle = (1 - p)\varepsilon - p\varepsilon = \varepsilon(1 - 2p)$ . Assim na  $i$ -ésima rodada, o valor esperado do ganho do respondedor, recompensa (tradução para o termo em inglês: payoff) é:

$$\langle g_i \rangle = p \langle O_i \rangle = pO_0 + ip\varepsilon(1 - 2p). \quad (2.2)$$

Neste problema, em particular, torna-se mais interessante calcular a média do ganho acumulado após  $t$  iterações, que para o respondedor fica:

$$\langle G_r \rangle (t) = \sum_{i=0}^t \langle g_i \rangle = pO_0(t + 1) + \frac{t(t + 1)}{2}p(1 - 2p)\varepsilon \quad (2.3)$$

É importante observar que neste caso há um valor de  $p$  dado  $t$  que maximiza o ganho acumulado do respondedor  $\langle G_r \rangle (t)$ , e este valor é dado por:

$$p^* = \frac{1}{4} \left[ \frac{2y_0}{t \Delta y} + 1 \right].$$

Analogamente, o ganho acumulado médio do proponente no instante  $t$  pode ser calculado de forma similar de acordo com a fórmula <sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Neste trabalho frequentemente vamos em algumas vezes reportar (principalmente no caso da aproximação de campo médio) ao ganho do respondedor. É importante salientar que toda a análise feita para o respondedor pode ser feita para o proponente, por isso algumas vezes vamos nos concentrar em grandezas relacionadas apenas ao respondedor.

$$\langle G_p \rangle (t) = p(1 - O_0)(t + 1) - \frac{t(t + 1)}{2}p(1 - 2p)\varepsilon.$$

Aqui agora gostaríamos de reportar um resultado obtido em [20] com respeito ao cálculo da variância do ganho acumulado, que não é uma tarefa simples. Na verdade, obteve-se uma fórmula analítica, se é que podemos chamar assim, que é suportada por computador, isto é não é um resultado rigorosamente analítico. A coisa funciona assim: suponha que a variância é um polinômio de grau 4 de  $p$  e que obviamente tem duas raízes triviais:  $p = 0$  e  $p = 1$ , assim se supomos que  $var(G_r) = ap(p - 1)(p - p_1)(p - p_2)$ , temos que  $a$ ,  $p_1$  e  $p_2$  são constantes a serem determinadas.

O que se fez foi um programa que para um número arbitrário de rondas  $t$  ele obtinha a variância considerando muitas repetições (séries temporais) para o ganho acumulado para 3 valores diferentes de  $p$  :  $p = 1/2$ ,  $p = 1/4$  and  $p = 3/4$ . Neste caso, para cada  $t$  obtinha-se a solução do sistema linear determinando  $a$ ,  $p_1$  and  $p_2$  e constatando que eles eram o mesmo para todos os valores de  $t$  testados.

Desta forma, chegou-se a uma fórmula analítica semi-empírica [20] para o ganho do respondedor:

$$\begin{aligned} var(G_r)(t) = & (t + 1)p(1 - p)O_0^2 + 4t(t + 1)p(p - 1) \left( p - \frac{1}{4} \right) O_0\varepsilon \quad (2.4) \\ & + [2t(t + 1)(2t - 1)p^3(1 - p) - 2t(t^2 - 1)p^2(1 - p) \\ & + \frac{t(t + 1)(2t + 1)p(1 - p)}{6}] \varepsilon^2 \end{aligned}$$

e de maneira similar obteve-se a variância do ganho acumulado do proponente:

$$\begin{aligned} var(G_p) = & (t + 1)p(1 - p)(1 - O_0)^2 - 4t(t + 1)p(p - 1) \left( p - \frac{1}{4} \right) (1 - O_0)\varepsilon \\ & + [2t(t + 1)(2t - 1)p^3(1 - p) - 2t(t^2 - 1)p^2(1 - p) \\ & + \frac{t(t + 1)(2t + 1)p(1 - p)}{6}] \varepsilon^2 \end{aligned}$$

estas fórmulas concordaram exatamente com as simulações Monte Carlo que foram realizadas nesta pesquisa.

Neste trabalho, primeiramente dando continuidade a esses resultados, começamos a nos perguntar onde está a dificuldade de obter analiticamente a variância do ganho

acumulado. Claro ela reside no fato que não conseguimos controlar as correlações do problema. Sendo assim, resolvemos investigar as correlações envolvidas neste caso.

A variância do ganho (vamos nos concentrar apenas no caso do respondedor e sabendo que a dificuldade é análoga para o caso do proponente) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} var(G_r)(t) &= \sum_{t'=0}^t \langle g_{t'}^2 \rangle - \langle g_{t'} \rangle^2 + \sum_{t'=0}^t \sum_{t''=0}^t (\langle g_{t'} g_{t''} \rangle - \langle g_{t'} \rangle \langle g_{t''} \rangle) \\ &= \sum_{t'=1}^t var(g_{t'}) + \sum_{t'=1}^t \sum_{t''=1}^t corr(g_{t'}, g_{t''}) \end{aligned}$$

Vamos pensar então na primeira parte da soma. Podemos escrever que:  $\langle g_{t'}^2 \rangle = p \langle O_{t'}^2 \rangle$ . Mas como computar  $\langle O_{t'}^2 \rangle$ ? Uma vez que  $\langle O_{t'} \rangle = (1-p) \langle (O_{t'-1} + \varepsilon) \rangle + p \langle (O_{t'-1} - \varepsilon) \rangle$ , nós temos  $\langle O_{t'}^2 \rangle = \varepsilon^2 + \langle O_{t'-1}^2 \rangle + 2\varepsilon(1-2p) \langle O_{t'-1} \rangle$ .

Podemos facilmente concluir que iterando esta equação chegamos em:

$$\langle O_t^2 \rangle = O_0^2 + 2(1-2p)O_0t\varepsilon + (t(t-1)(1-2p)^2 + t)\varepsilon^2.$$

Então,  $\langle g_t^2 \rangle = p[O_0^2 + 2(1-2p)O_0t\varepsilon + (t(t-1)(1-2p)^2 + t)\varepsilon^2]$  e naturalmente  $\langle g_t \rangle^2 = p^2 [O_0^2 + 2(1-2p)O_0t\varepsilon + (1-2p)^2 t^2 \varepsilon^2]$ .

Abrindo so termos temos que:

$$\begin{aligned} \langle g_t^2 \rangle - \langle g_t \rangle^2 &= p(1-p)O_0^2 + 2p(1-p)(1-2p)O_0t\varepsilon \\ &\quad + [p(t(t-1)(1-2p)^2 + t) - p^2(1-2p)^2 t^2] \varepsilon^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

E realizando a soma obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{var(G_r)}(t) &= \sum_{t'=0}^t \langle g_{t'}^2 \rangle - \langle g_{t'} \rangle^2 \\ &= \left( 2p^2(1-p)t(t+1) + \frac{1}{6}p(1-p)(1-2p)^2 t(2t+1)(t+1) \right) \varepsilon^2 + \\ &\quad + p(1-p)(1-2p)O_0t(t+1)\varepsilon + p(1-p)O_0^2(t+1) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Esta fórmula agora pode ser usada para estimar a magnitude das correlações uma vez que na equação 2.4 temos uma forma exata (empiricamente obtida) para a variância. Subtraindo as fórmulas podemos medir a magnitude das correlações definida pela somas de todas as correlações entre os ganhos locais até o instante  $t$ .

$$\Phi(t) = \sum_{t'=0}^t \sum_{t''=0}^t corr(g_t, g_{t'}) \tag{2.7}$$

Após alguma álgebra obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & 2t(t+1)p^2(p-1)O_0\varepsilon + \\ & \left( -\frac{8}{3}p^4t^3 + \frac{8}{3}p^4t + \frac{10}{3}p^3t^3 - \frac{10}{3}p^3t - \frac{2}{3}p^2t^3 + \frac{2}{3}p^2t \right) \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Então nós podemos estudar esta função em detalhes uma vez que a oferta  $O_t$  não toca os limites (0 or 1), há um limite inferior para o número de iterações necessárias para que o sistema atinja tais limites:

$$t_c = \min(\lfloor O_0/\varepsilon \rfloor, \lfloor (1 - O_0)/\varepsilon \rfloor)$$

## 2.2 Estacionariedade da oferta e estudo das correlações quando a aceitação depende da oferta

Em situações mais realísticas, a aceitação depende da oferta. Então, uma escolha natural é colocar a probabilidade de aceitação dependente da oferta, uma vez que muitos jogadores tendem a rejeitar propostas infames com maior probabilidade. Então uma escolha natural é colocar a probabilidade de aceitação exatamente como valor da oferta já que esse valor varia de 0 a 1. Neste caso considerar uma aproximação de *campo médio* onde mudamos  $O_t$  por  $\langle O_t \rangle$ , nos proporciona obter uma relação de recorrência para a oferta e podemos escrevê-la como:

$$\begin{aligned} \langle O_{t+1} \rangle &= \langle O_t \rangle - \langle O_t \rangle \varepsilon + (1 - \langle O_t \rangle) \varepsilon \\ &= (1 - 2\varepsilon) \langle O_t \rangle + \varepsilon \end{aligned}$$

Iterando esta equação obtemos que:

$$\begin{aligned} \langle O_t \rangle &= (1 - 2\varepsilon)^t O_0 + \varepsilon \sum_{k=0}^{t-1} (1 - 2\varepsilon)^k \\ &= (O_0 - 1/2) (1 - 2\varepsilon)^t + 1/2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

e naturalmente vemos que no estado estacionário  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O_t \rangle = 1/2$ .

Uma vez que  $(1 - 2\varepsilon)^t = 1 - 2\varepsilon t + O(\varepsilon^2)$  para valores, digamos, intermediários de  $t$ , onde  $\varepsilon$  é um número pequeno, podemos ser mais preciosistas e escrever que assintoticamente:

$$\langle O_t \rangle \sim \begin{cases} (O_0 - 1/2) (1 - 2\varepsilon t) + 1/2 & t \rightarrow 0 \\ 1/2 & t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.10)$$

Então uma aproximação para o ganho médio do respondedor no instante  $t$  é

$$\langle g_t \rangle \approx \langle O_{t'} \rangle^2 = (O_0 - 1/2)^2 (1 - 2\epsilon)^{2t} + 1/4 + (O_0 - 1/2) (1 - 2\epsilon)^t.$$

Isto assintoticamente nos conduz à:

$$\langle g_t \rangle \sim \begin{cases} O_0^2 + (2 - 4O_0)\epsilon O_0 t & t \rightarrow 0 \\ (O_0 - 1/2)^2 + (O_0 - 1/2) + 1/4 & t \rightarrow \infty \end{cases}$$

Assim em nossa aproximação, nesta versão Pavloviana de jogo as ofertas devem convergir para uma proposta dita justa para o ultimato. Este resultado embora simples, merece um bocado de discussão na literatura e distorções deste comportamento devem ser melhor entendidos, principalmente porque conseguimos mostrar tal comportamento para a versão Pavloviana que propomos aqui para o jogo do Ultimato.

Agora podemos seguir para completar nossa análise determinando fórmulas para grandezas mais complexas. Começamos pelo ganho acumulado no instante  $t$  na aproximação de campo médio. Diante das fórmulas anteriores sob a mesma aproximação temos que:

$$\begin{aligned} \langle G_r(t) \rangle &= \sum_{t'=0}^t \langle O_{t'} \rangle^2 \\ &= (O_0 - \frac{1}{2})^2 \frac{(2\epsilon-1)^{2t+2}-1}{4\epsilon(\epsilon-1)} + (O_0 - \frac{1}{2}) \frac{1-(1-2\epsilon)^{t+1}}{2\epsilon} + \frac{t+1}{4} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Novamente, temos dois regimes: para  $t \rightarrow 0$ , assintoticamente temos:

$$\begin{aligned} \langle G_r(t) \rangle &\sim \left( O_0 - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{(t+1)}{1-\epsilon} + (t+1) + \frac{t+1}{4} \\ &= \left( \frac{5}{4} + \frac{1}{1-\epsilon} \left( O_0 - \frac{1}{2} \right)^2 \right) (1+t) \end{aligned}$$

For  $t \rightarrow \infty$ ,  $\langle G_r(t) \rangle \sim (O_0 - \frac{1}{2})^2 \frac{1}{4\epsilon(1-\epsilon)} + \frac{1}{2\epsilon} (O_0 - \frac{1}{2}) + \frac{t+1}{4}$  o que determina um *crossover* entre dois comportamentos lineares.

Se extrairmos as correlações, a variância do ganho acumulado:  $\overline{var(G_r)}(t) = var(G_r)(t) - \sum_{t'=0}^{t-1} \sum_{t''=0}^{t-1} (\langle g_{t'} g_{t''} \rangle - \langle g_{t'} \rangle \langle O_{t''} \rangle) = \sum_{t'=0}^{t-1} \langle g_{t'}^2 \rangle - \langle g_{t'} \rangle^2$  pode neste caso ser obtida analiticamente. Primeiro lembramos da equação  $\langle g_t \rangle \approx \langle O_{t'} \rangle^2$  e então considerando que:

$$\langle O_t^2 \rangle \approx (1 - \langle O_{t-1} \rangle) \langle (O_{t-1} + \epsilon)^2 \rangle + \langle O_{t-1} \rangle \langle (O_{t-1} - \epsilon)^2 \rangle$$

após alguma álgebra obter a seguinte relação de recorrência:

$$\langle O_t^2 \rangle = \varepsilon^2 + \langle O_{t-1}^2 \rangle + 2\varepsilon \langle O_{t-1} \rangle - 4\varepsilon \langle O_{t-1} \rangle^2$$

se substituirmos 2.9 na equação de acima obtemos:

$$\begin{aligned} \langle O_t^2 \rangle &= \langle O_{t-1}^2 \rangle + \varepsilon^2 + 2\varepsilon [(O_0 - 1/2)(1 - 2\varepsilon)^{t-1} + 1/2] - 4\varepsilon [(1 - 2\varepsilon)^{t-1} + 1/2]^2 \\ &= O_0^2 + \varepsilon^2 t - (O_0 - 1/2) [1 - (1 - 2\varepsilon)^t] - \frac{(O_0 - 1/2)^2}{(1 - \varepsilon)} [1 - (1 - 2\varepsilon)^{2t}] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Seguindo exatamente o que consideramos explicitamente, podemos aproximar:

$$\begin{aligned} \langle g_{t'}^2 \rangle &\approx \langle O_{t'} \rangle \langle O_{t'}^2 \rangle \\ \langle g_{t'} \rangle^2 &\approx \langle O_{t'} \rangle^4 \end{aligned}$$

Desta forma temos que para variância local:

$$var(g_t) = \langle g_t^2 \rangle - \langle g_t \rangle^2 \sim \frac{1}{2}(O_0^2 + \varepsilon^2 t - (O_0 - 1/2) - \frac{(O_0 - 1/2)^2}{(1 - \varepsilon)}) - \frac{1}{16} \quad (2.13)$$

para  $t \rightarrow \infty$ , o que conduz a um comportamento linear no tempo diferentemente do que acontece quando a probabilidade de aceitação é fixa. Neste caso devemos nos lembrar que  $var(g_t)$  tem um termo líder quadrático em função de  $t$ .

Através das equações previamente calculadas podemos computar numericamente, mas de forma exata a variância do ganho desconsiderando as correlações que de acordo com nossas aproximações são dadas por:

$$\overline{var(G)} \approx \sum_{t'=0}^t \langle O_{t'} \rangle (\langle O_{t'}^2 \rangle - \langle O_{t'} \rangle^3) \quad (2.14)$$

com  $\langle O_{t'} \rangle$  e  $\langle O_{t'}^2 \rangle$  dada pelas expressões 2.9 e 2.12 respectivamente, e assim naturalmente podemos computar  $\Phi(t)$  como realizado para o caso onde  $p$  é fixo (ver equação 2.8) para este particular caso onde a aceitação depende da oferta, mas para isto devemos computar  $var(G_r)$  que só pode ser feito numericamente pelo método Monte Carlo, diferentemente do caso onde a aceitação ocorre com probabilidade fixa  $p$  onde se usou um método semi-empírico para obter  $var(G_r)$  analiticamente. Uma vez que podemos computar  $\overline{var(G)}$  através de 2.14, subtraímos do resultado obtido por Monte Carlo para então computar  $\Phi(t)$ .

Uma vez estudado a aproximação de campo médio do modelo reativo, estamos prontos para definir o jogo na rede e também mostrar como analisaremos o efeito da

mobilidade dos jogadores nessas rede dado sua ocupação e probabilidades de transição para sítios vizinhos que é um dos nossos objetivos principais neste trabalho.

Nossa escolha é fazer o jogo com atualização síncrona (como um automata celular probabilístico). Esse é o assunto do próximo capítulo.

## Capítulo 3

# Jogo do ultimato reativo na rede: automata celular, redes de mundo pequeno e mobilidade

Antes de falar sobre como implementar o jogo do ultimato reativo na rede, é interessante discutir alguns detalhes sobre um tipo especial de topologia a ser utilizada pra analisar os efeitos de coordenação e desordem sobre o jogo, que são as conhecidas redes de mundo pequeno que foi onde nosso trabalho foi concentrado. Para isso, apresentaremos um breve resumo sobre o estado da arte atual em redes complexas. A escolha das redes de mundo pequeno para este trabalho é que elas podem mapear desde redes regulares até redes totalmente desordenadas <sup>1</sup>. Na sequência, mostramos como podemos implementar computacionalmente o jogo do ultimato reativo na rede com um conjunto de prescrições que definem diferentes tipos de jogadores neste jogo.

Finalmente, na última parte deste capítulo mostramos como introduzir a mobilidade no jogo do ultimato em redes quadradas bidimensionais uma vez que a mobilidade em particular é estudada apenas neste tipo de rede por razões de simplicidade e análise dos resultados <sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Cabe salientar que não apresentamos o conteúdo sobre redes livres de escala pois nossos resultados a esse respeito, considerando o jogo do ultimato reativo nestas redes não estão totalmente claros e merecem um melhor polimento.

<sup>2</sup>Nesta tese mobilidade foi estudada em todos os modelos de jogos apenas em redes quadradas bidimensionais. Outras redes podem e devem ser exploradas por nós ou mesmo outros autores futuramente, mas deve-se lembrar que os efeitos de mobilidade são mais difíceis de medir e ou discernir em redes de mundo pequeno com desordem ou nas redes livres de escala de Barabási-Albert.

## 3.1 Redes Complexas

O estudo das inter-relações sobre elementos interativos tem revelado a existência de redes subjacentes de conexões em muitos sistemas [75]. Alguns anos atrás foi descoberto que sistemas diversos como a Internet, redes de telecomunicação, grupos sociais dinâmicos, corporações econômicas, fluxos metabólicos nas células, neurônios no cérebro, e muitas outras, apresentam às vezes características comuns e algumas compartilham de propriedades similares de auto-organização. A estrutura topológica das redes de interação podem ser consideradas como um ingrediente essencial dos sistemas complexos.

Uma rede é um conjunto de elementos, chamados de vértices ou nós com ligações ou conexões entre eles denominadas *links*. O aparecimento da teoria das redes como estrutura matemática é um território da Teoria dos Grafos [76]. A teoria dos Grafos começou com o trabalho de Leonhard Euler para resolver o problema das sete pontes de *Königsberg*, cidade localizada na Prússia do século XVIII (atual Kaliningrado, Rússia). Após Euler esta teoria desenvolveu-se bastante com contribuições feitas por expoentes da Matemática, como Cauchy, Hamilton, Cayley, Kirchoff e Polya [77] e nas pesquisas pioneiras em redes aleatórias na metade do século XX por Erdos e Renyi [78], mais recentemente a investigação das redes complexas desde o ponto de vista da Física chegou a ser foco de atenção nestos últimos anos.

A introdução dos modelos por Watts-Strogatz [5] e na amplitude das redes livres de escala construídas pelo método de “preferential attachment” criadas por A. Barabasi e R. Albert [6], para explicar e estudar as características básicas observadas nas redes reais tais como redes WWW, de contágio sexual, etc, levou a uma revolução no campo dos Sistemas Complexos com um crescente número de pesquisas neste campo até hoje. Na atualidade, os físicos estão interessados na formação, estrutura e evolução das redes complexas, como também nos efeitos da topologia de rede sobre problemas de interação social tais como a dinâmica de opinião, cooperação, difusão cultural ou competição de linguagem [1].

### 3.1.1 Redes de *Mundo pequeno*

As redes de pequeno mundo que usamos no nosso modelo foram identificadas como uma classe de grafos aleatórios por Watts e Strogatz [5].

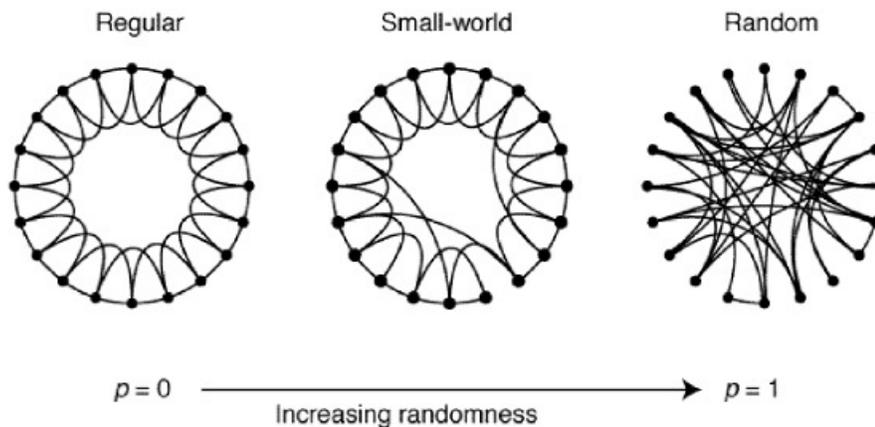


Figura 3.1: **O modelo de pequeno mundo ou de Watts-Strogatz.** O procedimento de Watts-Strogatz de religação aleatória, que interpola entre um anel de rede regular e uma rede aleatória mantendo o número de vértices e links constante. Aqui,  $N = 20$ , inicialmente com quatro vizinhos mais próximos. Para  $p = 0$ , o anel original permanece inalterado, e conforme  $p$  aumenta o anel torna-se cada vez mais desordenado, até para  $p = 1$ , onde uma rede aleatória é recuperada. Figura obtida por [5].

Para construir uma rede de pequeno mundo se começa com uma rede regular de  $N$  vértices, e cada vértice está conectado aos  $k$  vizinhos mais próximos em cada direção, onde  $N \gg k$ . No passo seguinte, cada link ou aresta é aleatoriamente religada com a probabilidade  $p$ <sup>3</sup>. Se  $p = 0$  se tem uma rede regular com um número elevado de laços mas com grandes distâncias, mas quando  $p \rightarrow 1$ , a rede é aleatória com curtas distâncias mas poucos laços entre os elementos da rede. Assim, mudando o parâmetro  $p$ , se observa uma transição entre a rede regular e uma rede aleatória mostradas na Figura 3.1. Portanto, existe uma região considerável entre estes dois extremos, uma região chamada *small-world*. O *small-world* está a meio caminho entre a rede ordenada e a rede completamente aleatória para os quais o modelo tem as duas características:

<sup>3</sup>É importante comentar que aqui também usamos  $p$  para probabilidade de religação assim como usamos no capítulo anterior a mesma letra para probabilidade de aceitação de uma oferta. Cabe salientar também que  $p$  será utilizada como probabilidade de locomoção quando definirmos mobilidade. Isso será modificado em uma versão futura, contudo agora envolveria gerar problemas com os inúmeros gráficos do trabalho.

comprimentos característicos (menor caminho ligando dois vértices no grafo) curtos e um alto coeficiente de *clustering* ou agrupamento, isto é, a maioria dos vértices não são ilhados ou ainda a maioria dos pares de vértices em geral existem caminhos que os ligam, para valores de  $p$  intermediários (ver Figura 3.2 retirada da ref. [5]).

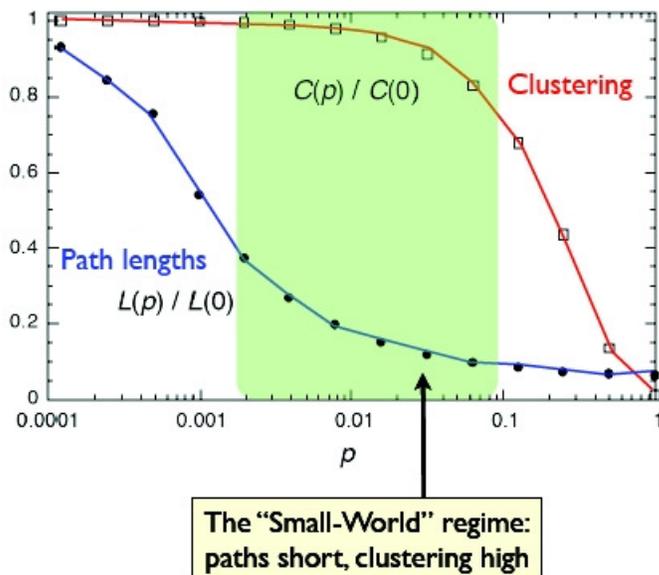


Figura 3.2: O comprimento característico  $l(p)$ , e o coeficiente de agrupamento  $C(p)$  para o modelo de Watts-Strogatz. Os dados são normalizados pelos valores de  $l(0)$  e  $C(0)$  para uma rede regular. Foram realizadas médias sobre mais de 20 realizações aleatórias do processo de religação;  $N = 1000$ , e um grau médio de  $\bar{k} = 10$ . Figura obtida por [5].

## 3.2 Implementando o jogo do ultimato reativo como um autômato celular na rede incluindo diluição e mobilidade

Vamos considerar agora os detalhes do jogo do ultimato em uma rede complexa indexando cada indivíduo por  $i = 1, \dots, N$ . Nesta rede cada agente interage com todos seus vizinhos como proponente. Naturalmente se todos os jogadores nos sítios serão proponentes para todos os agentes vizinhos, e considerando os sítios ocupados da rede são lidos todos em sequência, esses mesmos proponentes serão aceitadores de todos os seus vizinhos implicando que todos os jogadores, participam a mesma quantidade de vezes como proponentes e como aceitadores caso a rede esteja totalmente preenchida.

Quando ocorre a aceitação da proposta na interação de dois vizinhos, o proponente não atualiza de imediato o seu valor de proposta. Apenas quando todos os jogadores são lidos, essas atualizações são então realizadas de forma simultânea, como se elas acontecessem ao mesmo tempo concluindo o que é uma unidade de tempo da simulação.

Assim no instante  $t = 0$ , é atribuído o valor da oferta inicial  $O_0$  aos jogadores/agentes (pode ou não serem diferentes) em qualquer das redes previamente discutidas. O jogo então segue de acordo com seguinte algoritmo:

1. No instante  $t$  arbitrário, lê-se o elemento  $i = 1, \dots, N$  da rede. Este elemento proporá para seus  $j = 1, \dots, k_i$  vizinhos. Cada vizinho  $j$ , aceitará ou não a proposta com probabilidade  $p_a(t) = O_t^{(i)}$ , onde  $O_t^{(i)}$  é o valor da oferta do proponente no instante, instante  $t$ .
2. Conta-se o número de jogadores que aceitaram a proposta do proponente, chamamos isso de  $n_a(i)$ . A partir disso o algoritmo pode usar 4 diferentes prescrições (políticas) diferentes para atualizar suas ofertas:

Prescrição I Se  $n_a(i) > k_i/2$  então o valor de oferta do proponente passa a ser  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$ . Caso contrário  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$ ;

Prescrição II Se  $n_a(i) \geq 1$  então o valor de oferta do proponente passa a ser  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$ . Caso contrário  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$ ;

Prescrição III Se  $n_a(i) = k_i$  então o valor de oferta do proponente passa a ser  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$ . Caso contrário  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$ ;

Prescrição IV Se  $n_a(i) \geq k_i/2$  então o valor de oferta do proponente passa a ser  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$ . Caso contrário  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$ ;

3. Repete-se o procedimento para todos os sítios e só então faz-se as atualizações das ofertas prescritas pelo passo 2 para todos os jogadores da rede simultaneamente.

Este é basicamente o algoritmo que utilizamos para realizar as simulações sem a mobilidade dos jogadores e também para comparar com resultados de campo médio o que será feito no próximo capítulo. No caso de reticulados (redes regulares retangulares) diluídos (com sítios vazios), podemos considerar os jogadores se movendo na rede para sítios mais próximos vazios. Particularmente para o dilema do prisioneiro, os autores em

---



---

– Algoritmo Mobilidade para rede retangular –

---



---

1	<b>Para</b> todo sítio $(i_x, i_y)$ sorteado: $i_x = 1, \dots, L_x$ e $i_y = 1, \dots, L_y$
2	quando habitado por um jogador <b>faça</b> :
3	<b>Se</b> $(rand\ 1 < p)$ <b>então</b>
4	*/ Então se o jogador decidiu que vai se movimentar,
5	isso depende pra onde: /*
6	<b>Se</b> $(rand\ 2 < 1/2)$ <b>então</b>
7	*/ Então caso se movimente será na direção $x$ /*
8	$mov_x = int[2 \cdot rand\ 3]$
9	*/ Para direita ou esquerda,
10	$i_x^{(new)} = i_x + (2 \cdot mov_x - 1)$
11	$i_y^{(new)} = i_y$
12	<b>Senão</b>
13	*/ Então caso se movimente será na direção $y$
14	$mov_y = int[2 \cdot rand\ 4]$
15	*/ Para cima ou para baixo,
16	$i_x^{(new)} = i_x$
17	$i_y^{(new)} = i_y + (2 \cdot mov_y - 1)$
18	<b>FimdoSe</b>
19	<b>Se</b> (o sítio $(i_x^{(new)}, i_y^{(new)})$ está vazio) <b>então</b>
20	Jogador move-se de $(i_x, i_y)$ para $(i_x^{(new)}, i_y^{(new)})$
21	<b>FimdoSe</b>
22	<b>FimdoSe</b>

---



---

Tabela 3.1: **Algoritmo para mobilidade dos jogadores a ser utilizado neste trabalho.** So sorteados  $L^2$  stios para esse algoritmo que podem ou no estarem vazios

[68] consideraram um particular tipo de mobilidade onde uma vez que o jogador decide se deslocar para o sítio mais próximo, o que ocorre com uma determinada probabilidade  $p$ . Ele se move para lá apenas se o sítio, obviamente, está vazio. Isto é diferente de primeiramente escolher previamente um sítio vazio e depois então se mover pra lá ou não de acordo com a probabilidade estabelecida. Isso pode gerar uma longa discussão entre o que seria um agente reativo ou preditivo e não é o cerne desta tese.

Nós simplesmente aqui utilizamos essa mesma maneira de implementar a mobilidade que a utilizada em [68], que inclusive já foi utilizada para estudar propagação epidêmica na rede (veja por exemplo artigo recente do orientador deste trabalho [65]).

Para sanar dúvidas de como a mobilidade é implementada neste trabalho, resumimos via um algoritmo como ela é realizada <sup>4</sup>:

---

<sup>4</sup>Embora não esteja explícito no algoritmo abaixo, condições periódicas de contorno foram utilizadas no nosso trabalho.

Neste algoritmo,  $ran1$ ,  $ran2$ , e  $ran3$  e  $ran4$  são números aleatórios definidos para diferentes sementes. É importante observar que  $L_x$  e  $L_y$  são as dimensões da rede retangular utilizada que neste trabalho são sempre feitas iguais (rede quadrada). No próximo capítulo vamos apresentar os resultados de campo médio, ultimato na rede utilizando o algoritmo que descrevemos acima mas ainda sem mobilidade. Vamos estudar a mobilidade no ultimato no capítulo seguinte 5 onde mostraremos que a introdução de seleção (cópia Darwiniana) deve necessariamente ser introduzida no algoritmo acima para se observar efeitos de mobilidade.

# Capítulo 4

## Resultados para o jogo do ultimato reativo em campo médio, na rede regular e na rede de pequeno mundo

Neste capítulo exploramos os principais resultados para o jogo do ultimato sem efeito de mobilidade dos jogadores via campo médio e simulações Monte Carlo via autômato celular.

### 4.1 Resultados na aproximação de campo médio

Primeiramente começamos por checar as equações obtidas no capítulo 2. Vamos começar explorando alguns resultados relativos a aceitação com probabilidade fixa  $p$ . Primeiro vamos nos ater às correlações do ganho acumulado. Olhando para a fórmula 2.4, que descreve a variância acumulada do respondedor e que não possui uma demonstração (na referência [20] ela foi obtida de uma forma numérica exata com fit polinomial e posteriormente testada) nós podemos analisar as correlações de forma a explorar melhor esse resultado.

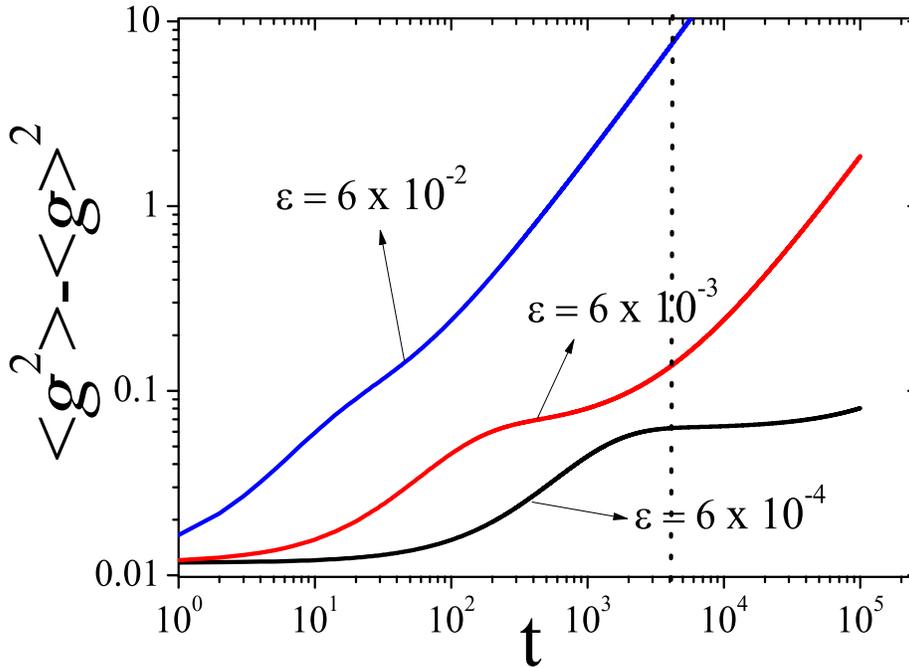


Figura 4.1: Variância local do ganho do respondedor para  $p = 1/2$  com  $O_0 = 1/4$ , para diferentes valores de  $\varepsilon$ . Vemos diferentes estágios de crescimento da variância local em função do tempo.

O fato de não existir um resultado exato nos remete a pensar o que seria a variância do ganho acumulado no caso descorrelacionado. Ela seria a soma das variâncias dos ganhos locais de um jogador. A variância do ganho local foi por nós calculada e é dada pela expressão 2.5. Apenas como teste, nós expressamos o comportamento desta variância como função do tempo para diferentes valores de  $\varepsilon$ , com  $p = 1/2$  e  $O_0 = 1/4$ . Veja que os resultados estabelecem diferentes estágios de crescimento para a variância local do ganho, uma vez que estabelecem como as ofertas são alteradas na dinâmica Pavloviana, conforme observamos na Figura 4.1. A soma destas variâncias locais estabelece uma variância do ganho acumulado que desprezaria as correlações. Assim se a fórmula 2.4 é a fórmula que corresponde a variância do ganho acumulado considerando as correlações, se subtrairmos  $\overline{\text{var}(G_r)}(t)$  analiticamente obtida em 2.6, que corresponde a soma das variâncias dos ganhos locais, teremos a soma das correlações dos ganhos locais até o instante  $t$ , que corresponde ao resultado também analiticamente obtido (ver Eq. 2.8).

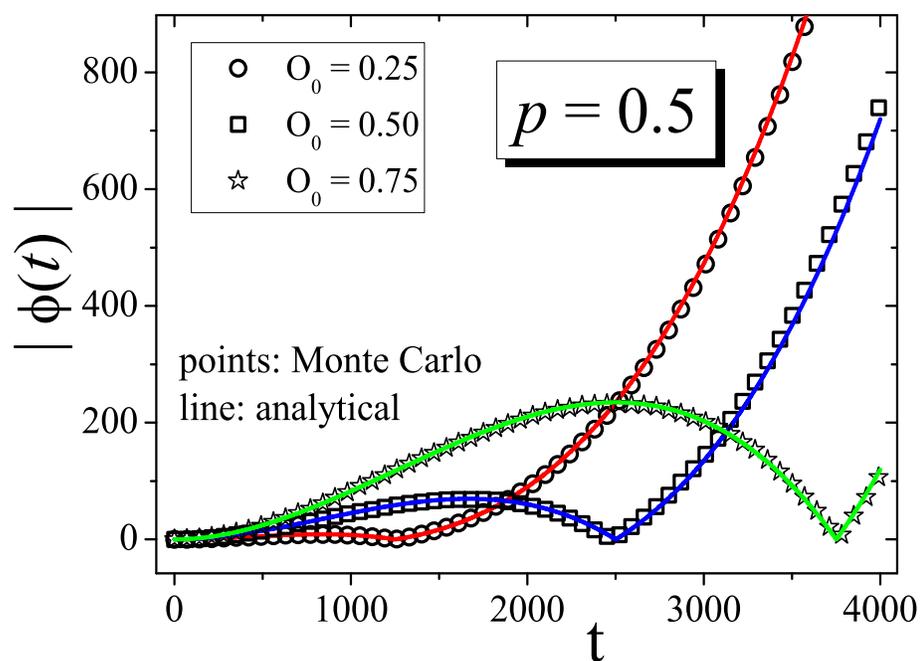


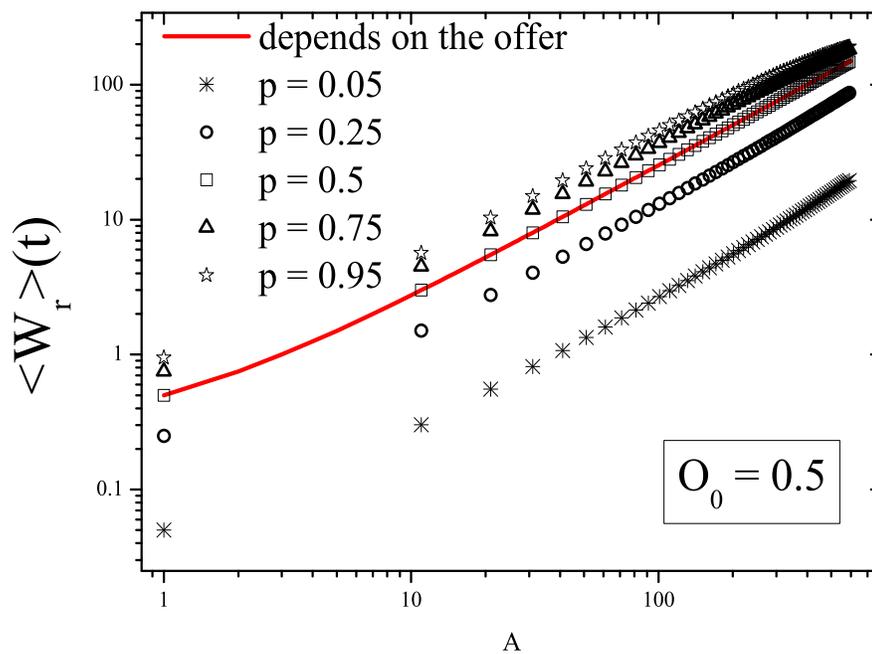
Figura 4.2: Módulo de  $\Phi(t)$  dado pela Equação 2.8 para diferentes valores de  $O_0$ , com  $p = 1/2$ . É muito peculiar observar que  $\Phi(t)$  se anula para diferentes instantes de tempo que são maiores conforme o valor da oferta inicial. Após este instante o módulo da soma das correlações torna a crescer novamente.

A figura dada pela Equação 2.8 (fig. 4.2), mostra as diferentes evoluções temporais de  $\Phi(t)$  (em módulo) para diferentes valores de  $O_0$ , com  $p = 1/2$ . É muito peculiar observar que  $\Phi(t)$  se anula para diferentes instantes de tempo que são maiores conforme o valor da oferta inicial. Após este instante o módulo da soma das correlações volta novamente a crescer. As linhas correspondem a fórmula analítica, já os pontos correspondem a simulações Monte Carlo que fizemos para corroborar as fórmulas analíticas obtidas. Esse Monte Carlo é algo simples: apenas simulamos as jogadas entre dois jogadores e repetimos o experimento  $10^5$  vezes, isto é  $10^5$  séries temporais diferentes são utilizadas, por isso não apresentamos detalhes adicionais sobre isso neste texto. É importante salientar que ainda estamos explorando o significado do anulamento de  $\Phi(t)$  e isso ainda merece uma melhor exploração. Para o momento deixamos apenas o resultado para ser apreciado.

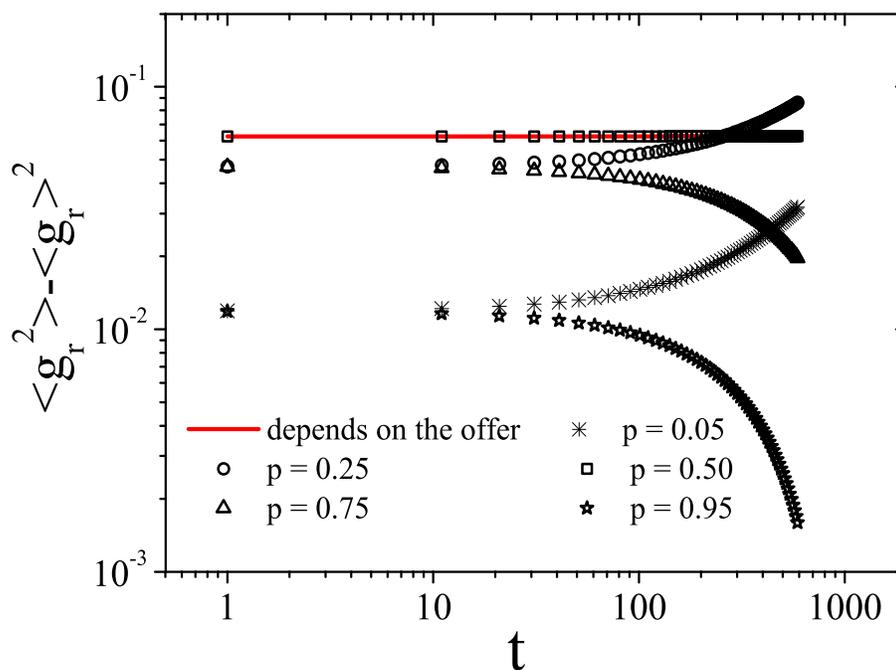
Uma vez explorado os resultados com  $p$  fixo, vamos agora considerar os resultados com aceitação dependente da oferta. Primeiro ponto importante é observar se para  $O_0 = 0.5$  o resultado neste regime equivale a  $p = 0.5$ .

Na figura 4.3(a) realizamos um gráfico de  $\langle G_r \rangle(t)$  dado pela equação 2.3 para vários valores de  $p$ . Vemos que o resultado com aceitação dependente da oferta (2.11) corresponde a  $p = 0.5$ . Na figura 4.3(b) realizamos um gráfico similar para a variância do ganho local (veja equação para  $p$  fixo: 2.5 e para aceitação dependente da oferta 2.13). Novamente para  $p = 0.5$  há um concordância com o caso dependente da oferta.

Apenas não se engane com o gráfico para  $p = 0.5$  que parece ser constante no tempo, ela está levemente inclinada (cresce com coeficiente angular  $\varepsilon^2$ ). No caso dependente da oferta, nós olhamos a variância local para diferentes ofertas iniciais. Neste caso novamente utilizamos simulações para checar se as expressões analíticas que são corroboradas.



(a)



(b)

Figura 4.3: **Ganho acumulado pra  $p$  fixo** Na fig.4.3(a) : O ganho acumulado para diferentes valores de  $p$  (pontos) com  $O_0 = 1/2$ . A curva contínua em vermelho constitui o caso em que a probabilidade de aceitação é a própria oferta. Observe que ela equivale ao caso  $p = 1/2$ . Fig. 4.3(b) : Os mesmos resultados para a variância local.

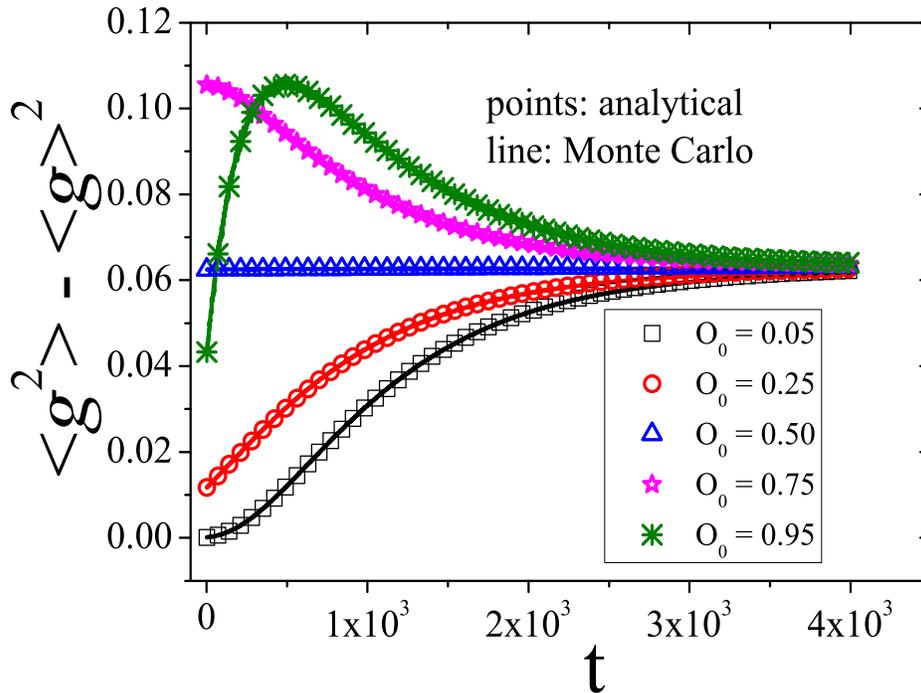
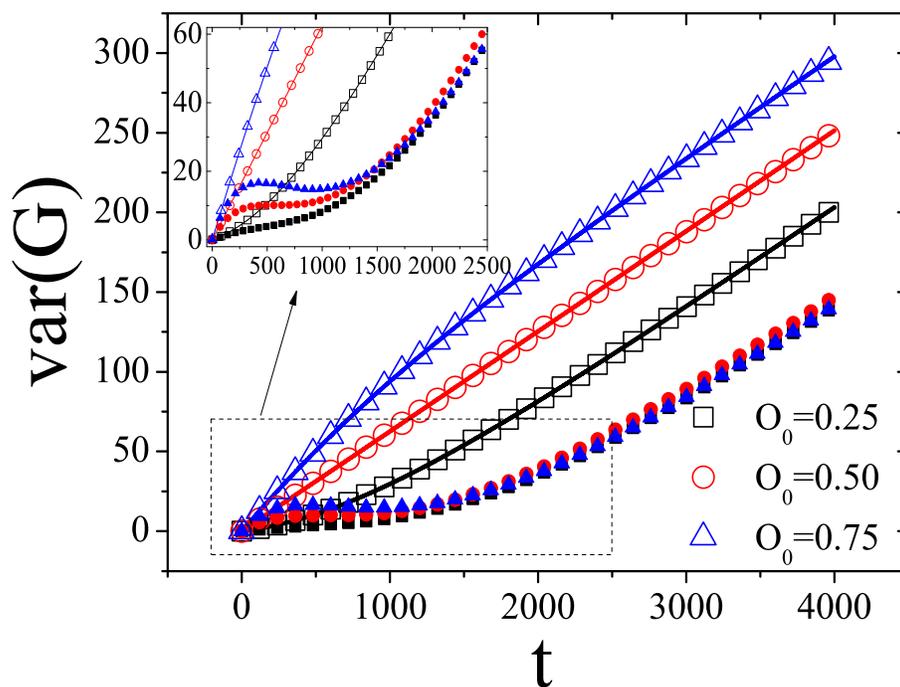


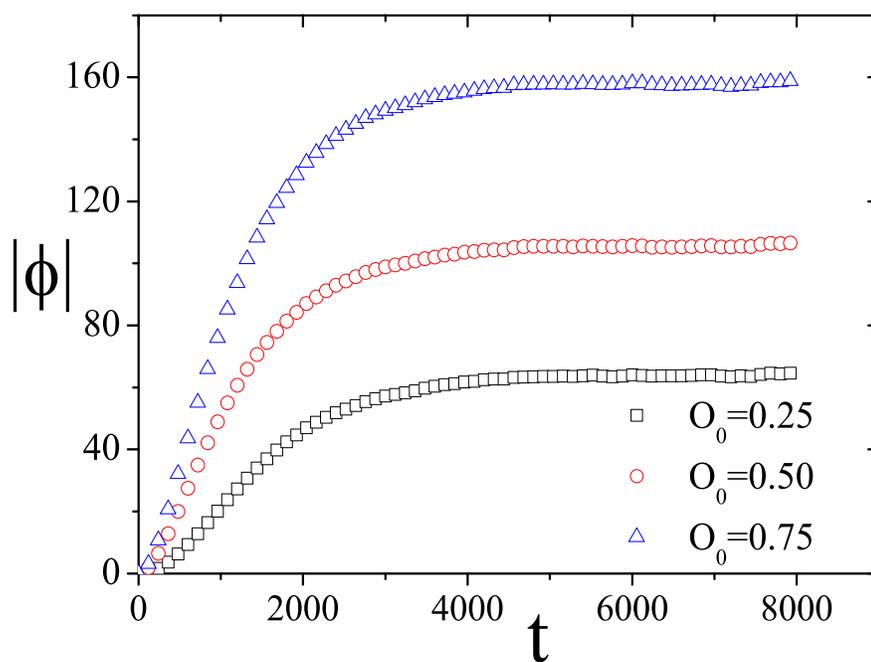
Figura 4.4: **Variância local no caso onde a aceitação depende da oferta como função do tempo.** Os pontos são resultados analíticos enquanto as linhas são provenientes de simulações Monte Carlo.

Podemos observar no gráfico 4.4 que os valores da variância local convergem para o mesmo valor  $var(g) \approx 0.06$ , independente do valor inicial da oferta. Observe particularmente o valor para oferta  $O_0 = 0.95$ . Neste caso a variância local tem um máximo antes de convergir para este valor. Obviamente isso acontece porque a oferta média converge para o mesmo valor independente da oferta inicial  $O_0$ , isto é  $\langle O_t \rangle \rightarrow O_\infty = 1/2$  (ver 2.10).

Finalmente, terminando a análise de campo médio analisamos a correlação no caso da aceitação dependente da oferta. Na figura 4.5 (superior) mostramos o caso da variância do ganho acumulado total no instante  $t$ . Salientamos que os pontos cheios correspondem a variância  $var(G_r)$  que só pode ser obtida via simulações Monte Carlo enquanto que os pontos vazios correspondem ao resultado de Monte Carlo para  $\overline{var(G_r)}$  que é obtido analiticamente através das equações 2.14, 2.12, e 2.9 que é mostrada na mesma figura pelas linhas contínuas que concordam muito bem com o Monte Carlo. Na mesma figura (superior) apresentamos o gráfico de  $\Phi(t)$  para este caso onde a aceitação



(a)



(b)

Figura 4.5: **Correlação dependente da oferta.** Fig. 4.5(a) : Variância (pontos cheios) e a versão decorrelacionada da variância (pontos vazios) no caso dependente da oferta via simulações Monte Carlo. As curvas correspondem aos resultados analíticos obtidos com nossa aproximação de campo médio respectivos aos gráficos de  $\Phi$  (fig. 4.5(b)) do caso (a).

depende da oferta e podemos observar que ela converge para um valor estacionário diferentemente do que acontece com o caso de  $p$  fixo (Figure 4.2), onde há um instante  $t^*$ , onde  $\Phi(t^*) = 0$ , mostrando que além da oferta e da variância local a soma das correlações deve se estabilizar.

Concluindo parcialmente, podemos observar que a dependência da oferta na aceitação reproduz os resultados onde o comportamento "justo" deve emergir contrariando o comportamento racional de aceitar qualquer coisa mesmo que pequena. Agora queremos saber que tipo de distorção tais resultados, na abordagem onde aceitação dependentes da oferta pode ter, quando jogamos em diferentes topologias e quais os efeitos reais do tamanho da vizinhança.

## 4.2 Resultados das Prescrições Pavlovianas para o jogo do ultimato na rede

A seguir apresentamos os resultados obtidos em simulações numéricas para nosso modelo de jogo de ultimato em diferentes topologias: rede regular bidimensional (quadrada), redes desordenadas (small worlds) construídas a partir de um uma rede quadrada e também a partir de um anel e para rede regular aleatória ou rede de *Erdős-Rényi*. Para tanto, utilizamos a atualização síncrona sequencial dos vértices da rede conforme descrito na seção 3.2 do capítulo 3.

### 4.2.1 Rede Regular Quadrada Bidimensional

Realizamos simulações com  $N = 100 \times 100$  jogadores onde as flutuações já não são perceptíveis. Nesta rede, então, como já foi mostrado na seção 3.2 o jogador propõe para quatro vizinhos e depois claro será aceitador de quatro vizinhos na rede regular quadrada.

Nosso primeiro objetivo nesta parte é encontrar o valor da proposta  $O_t$  como função do tempo para diferentes ofertas iniciais e comparar com o resultado de campo médio previamente desenvolvido neste texto. Vamos nos fixar inicialmente prescrição I. Na Figura 4.6 (a) apresenta a oferta média para o caso da rede quadrada. Na figura (b) ilustramos o caso do campo médio para fins de comparação. Vemos que a oferta converge para um valor superior ao do campo médio, mais precisamente para o valor  $O_\infty \approx 0.614$ . Possíveis suspeitas de que outra prescrição trouxesse o resultado de campo médio são

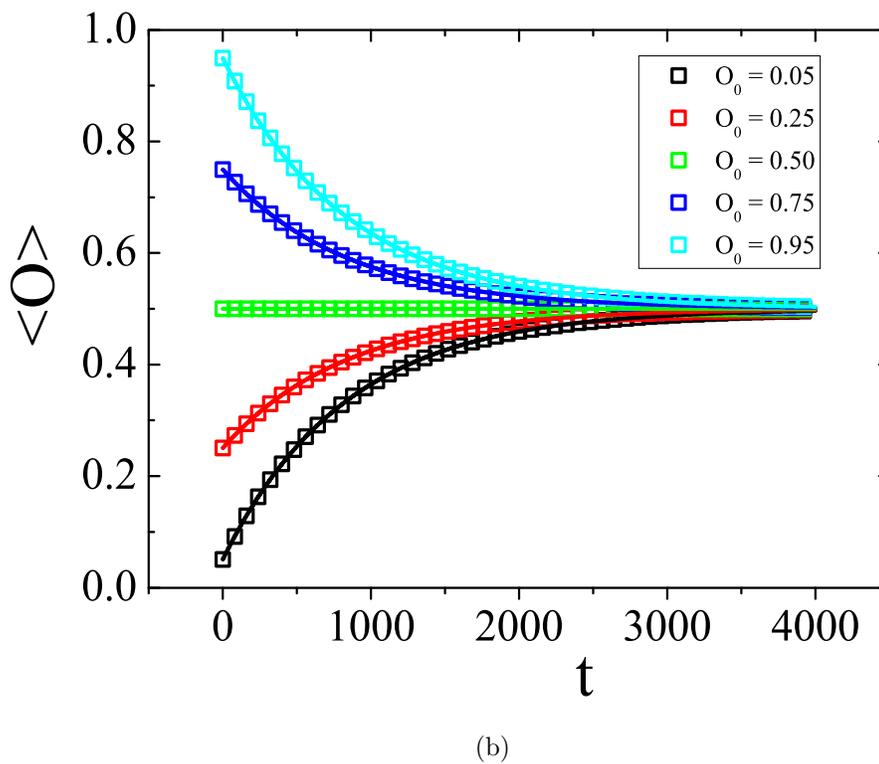
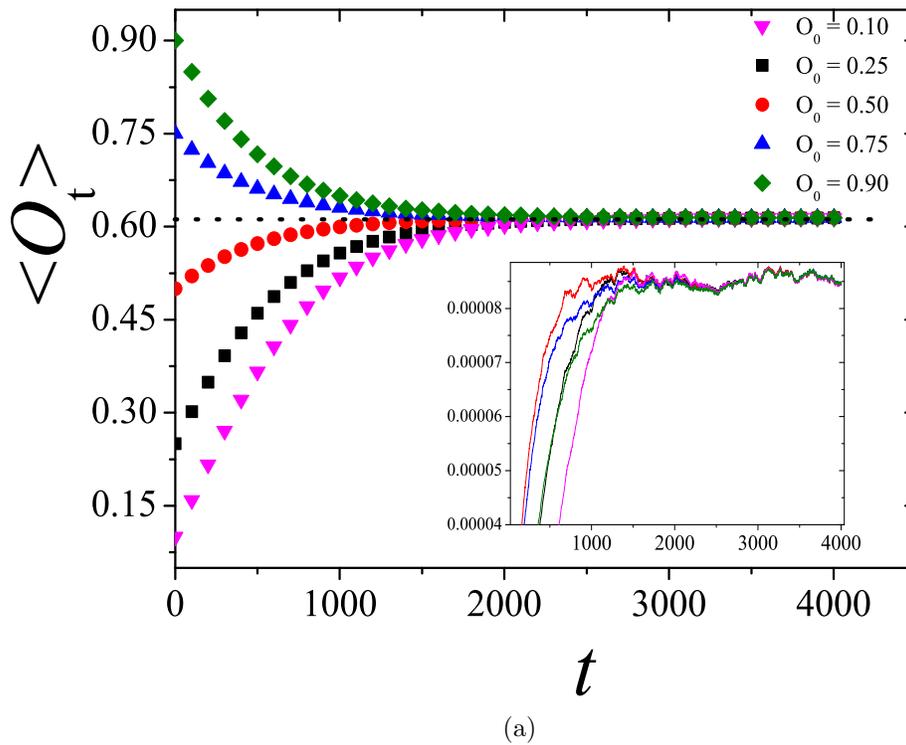


Figura 4.6: **Oferta na rede Quadrada.** Fig. 4.6(a) : Valor médio da oferta para simulações na rede quadrada . Fig 4.6(b): Valor médio da oferta no caso do campo médio.

quebradas como pode ser observado na Figura 4.7. Como podemos perceber nenhum

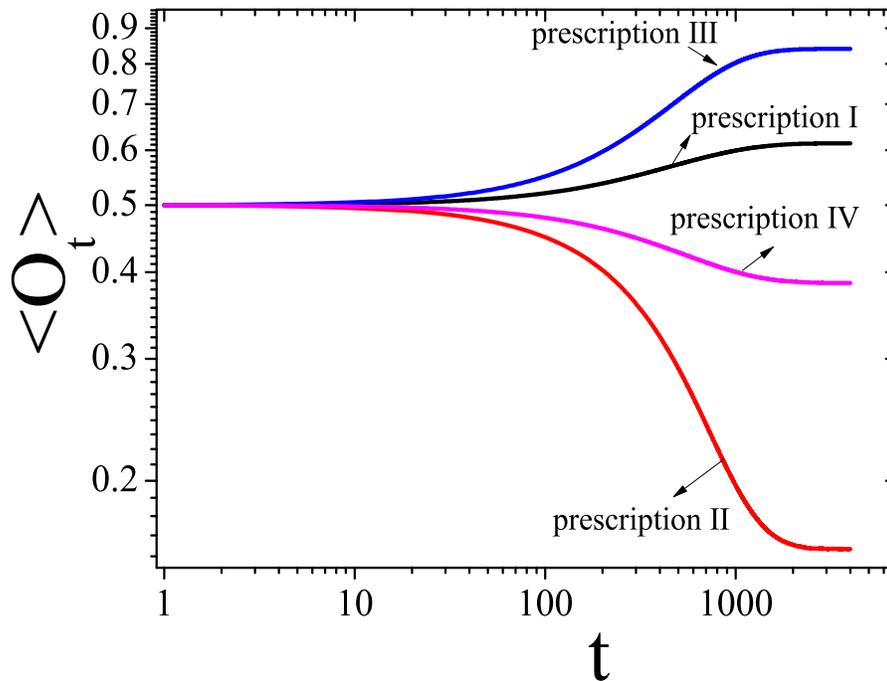


Figura 4.7: Valor médio para diferentes prescrições do jogo do ultimato Pavloviano na rede quadrada,  $O_0 = 1/2$ .

caso vai para  $O_\infty = 0.5$ . Agora deixe-nos fazer um experimento muito simples, na rede quadrada ao invés de jogar com apenas 4 jogadores, o jogador (proponente) propõe para  $k$  outros jogadores, dispostos na rede quadrada contudo escolhidos aleatoriamente. O resultado é interessante, mesmo na prescrição I, o que temos é que conforme  $k$  aumenta  $O_\infty$  se aproxima sistematicamente de 0.5 conforme pode ser observado na Figura 4.8. Assim resgatamos o valor de campo médio na rede quadrada. Tomando por exemplo uma vizinhança fixa, aparentemente o mesmo processo tende a ocorrer. Para  $k = 16$  vizinhos mais próximos (não aleatórios) obtemos  $O_\infty = 0.524$  que é praticamente o comportamento justo.

Estudaremos outras topologias na próxima subseção. Antes porém, gostaríamos de explorar melhor alguns aspectos do jogo do ultimato na rede quadrada com respeito à comparação entre as diferentes prescrições Pavlovianas previamente definidas. Uma pergunta que se faz, por exemplo, é como se dá a distribuição dos ganhos dos jogadores

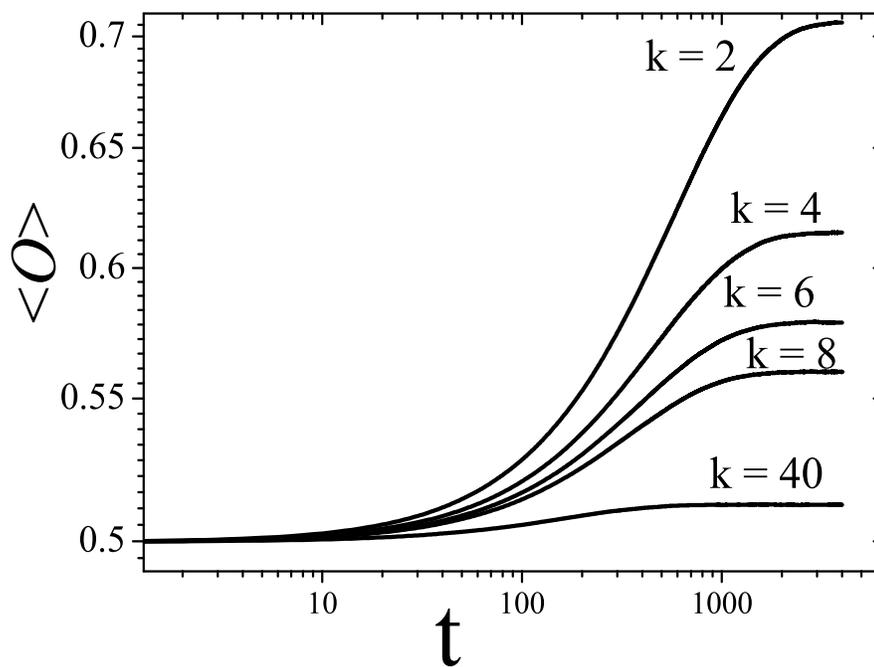


Figura 4.8: Valor médio para as ofertas no jogo do ultimato Pavloviano na rede quadrada. Em função do tempo para diferentes valores do número de vizinhos mas escolhidos aleatoriamente.

ao longo do tempo. Neste caso podemos importar um conceito bastante interessante usado em economia, o coeficiente de *Gini*. O coeficiente de Gini, mede o quão dispare é a distribuição de riqueza de um jogador. Considere que os  $N$  jogadores tenham seus ganhos dispostos em ordem crescente: no instante  $t$ :  $g_1(t) \leq g_2(t) \leq \dots \leq g_N(t)$ . Para defini-lo primeiro consideramos

$$\varphi_i(t) = \frac{\sum_{j=1}^i g_j(t)}{\sum_{j=1}^N g_j(t)}$$

**A curva de Lorentz**, determina a quantidade riqueza dos jogadores como função da fração de jogadores que detém essa quantia  $f_i = i/N$ . Naturalmente esperaríamos que  $\varphi_i(t) \times i/N$  fosse uma função identidade se o ganho entre os jogadores é bem distribuído. Contudo ele não o é. O coeficiente de Gini mede o quanto essa curva foge da função identidade e pode ser calculado da forma mais prática pela conhecida fórmula de Brown que simplesmente integra a curva  $\varphi_i(t) \times i/N$  através de uma regra trapezoidal:

$$Gini(t) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_i(t)$$

Sendo assim medimos este coeficiente para as quatro prescrições utilizadas neste trabalho na rede quadrada tanto para o ganho como proponente quanto como aceitador separadamente o que é mostrado nas duas subfiguras da figura 4.9. Como podemos perceber tanto como proponente quanto aceitando o menor coeficiente de Gini ocorre com prescrição III. Qual seria o real motivo disso estar acontecendo? A prescrição III é conservadora no sentido que apenas quando todos os vizinhos aceitaram a proposta o proponente irá diminuir a oferta. Ele não arrisca se um dos aceitadores negarem o feito. Isso faz com que ele aumente a proposta em níveis maiores e isso aumenta suas chances. Mas é interessante observar a prescrição III também proporciona não apenas melhor distribuição de ganhos mas também ganhos médios maiores (ver Figura 4.10). Claro ganha-se muito como aceitador e embora o ganho como respondedor seja mais baixo do que as das prescrições I e IV ele não é pequeno e somado com o do aceitador a prescrição III é de fato a vencedora.

O último gráfico na Figura 4.10 mostra que a variância na oferta da prescrição III converge para valores menores mostrando que a baixa variabilidade na oferta está associada a um baixo coeficiente de Gini que é acompanhado de alto valor médio no ganho.

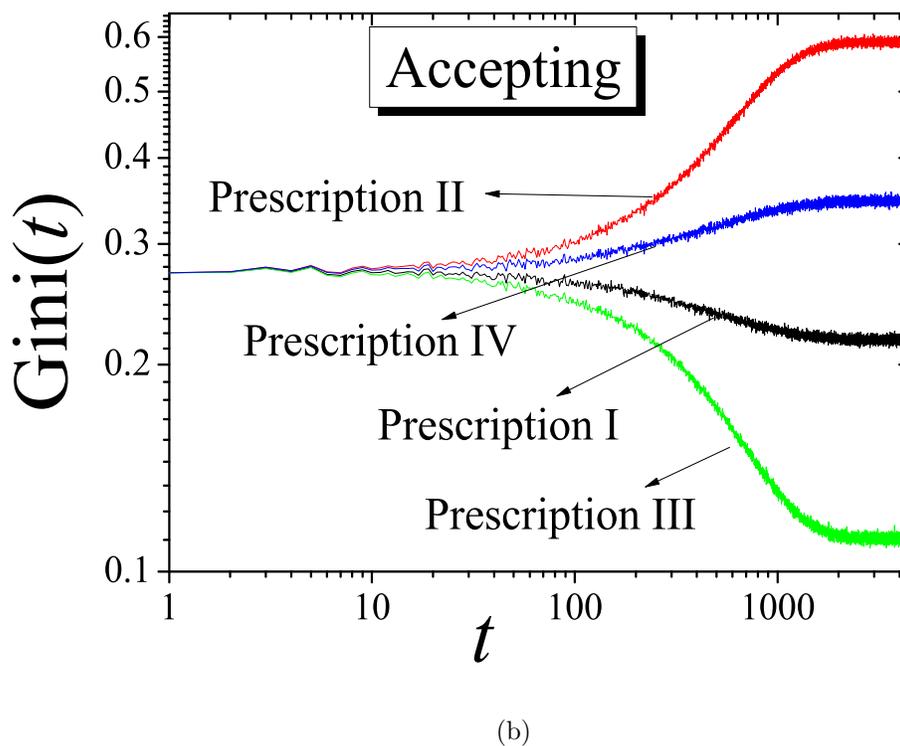
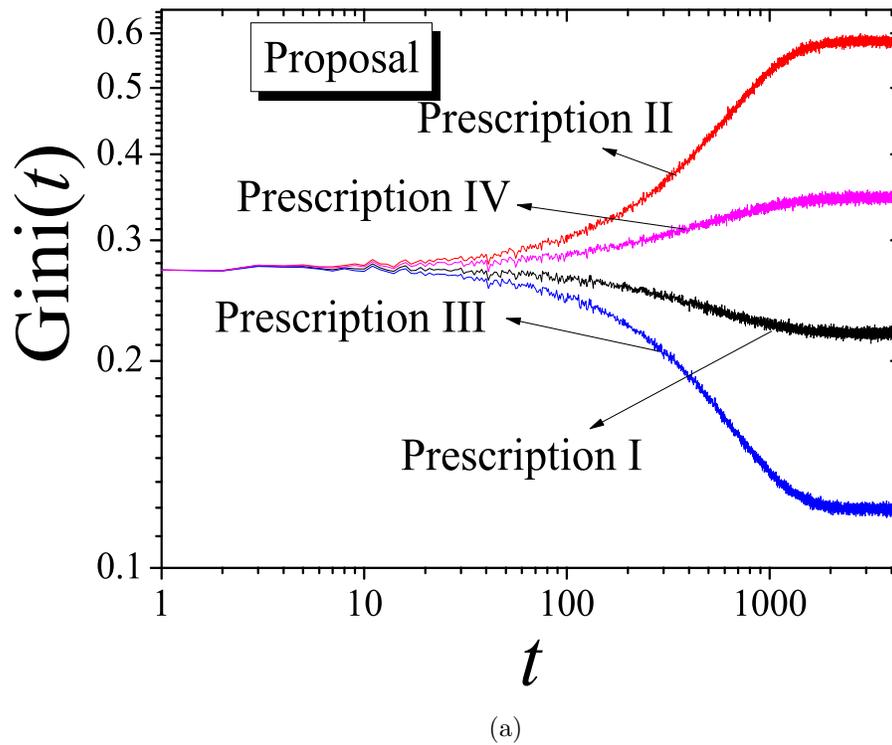


Figura 4.9: Coeficiente de Gini do ganho de todos os jogadores no instante  $t$  para as quatro prescrições utilizadas. . Dividimos nossos resultados tanto no ganho como proponente (fig.4.9(a)) quanto no caso de ser o aceitador (fig. 4.9(b)).

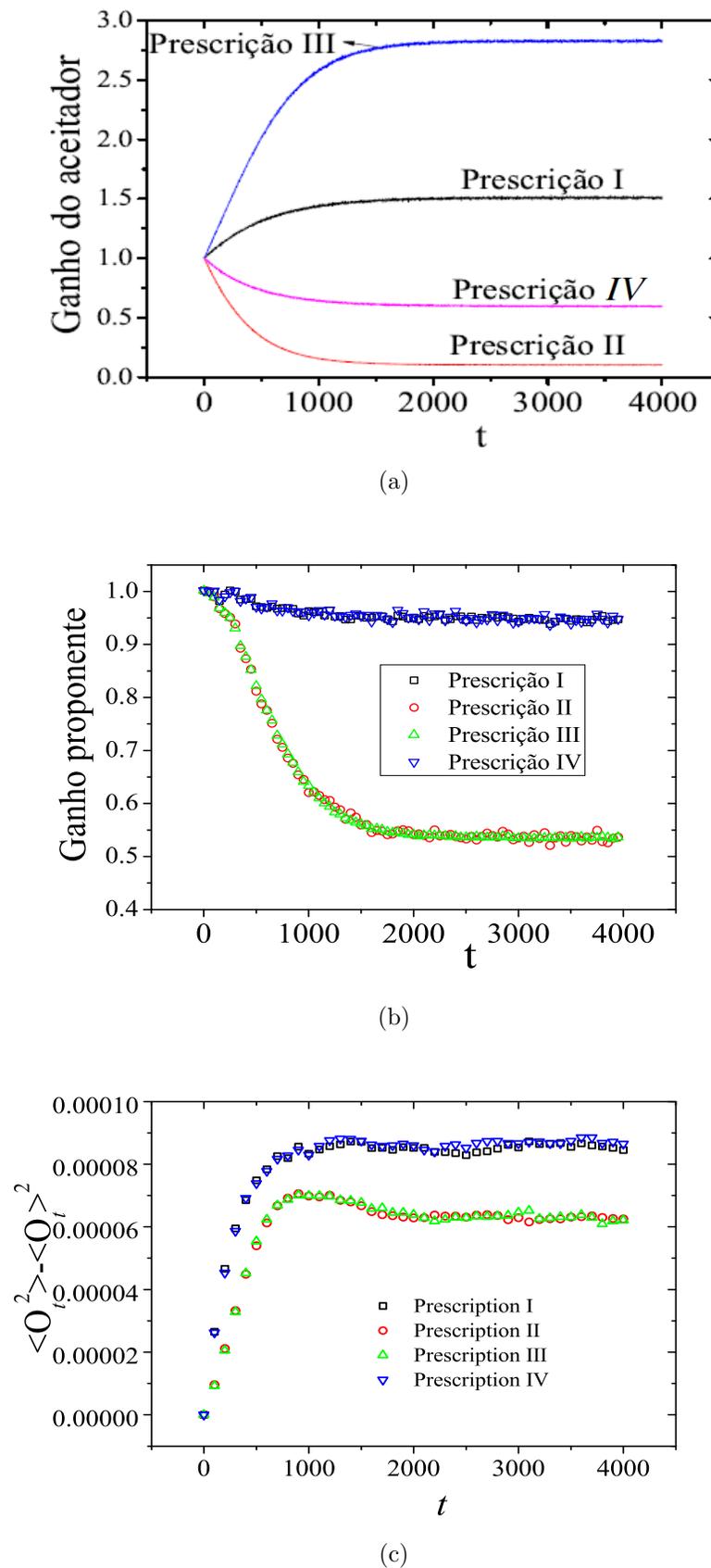


Figura 4.10: **Evolução temporal do Ganho Médio.** Fig. 4.10(a) : A evolução temporal do ganho médio do aceitador, fig. 4.10(b): do proponente e fig. 4.10(c) a variância da oferta para as diferentes prescrições.

Vamos agora analisar aspectos da jogo reativo em redes onde a coordenação dos nodos é variável e estudar também propriedades relativas ao ganho acumulado que pode ser mais importante. Vimos que o número de vizinhos é importante, mas o que dizer da topologia? Qual é o real papel da topologia no jogo do ultimato pavloviano (reativo)? Teria ela o mesmo efeito se a dinâmica em questão fosse um cenário onde os jogadores adotam as estratégias com maior sucesso reprodutivo ou econômico, que é conhecida também como dinâmica **darwiniana**?. Nosso próximo passo é entender a primeira parte. Comparações com dinâmicas darwinianas serão realizadas no penúltimo capítulo deste texto. Na próxima subseção estudaremos o jogo em redes de mundo pequeno.

### 4.2.2 Redes de mundo pequeno

Uma rede regular é o marco mais simples possível onde as interações locais podem ser estudadas. Em particular, deve-se observar que na rede regular todos os indivíduos encaram as mesmas condições simétricas. Vamos nos focar agora no possível efeito de que um desvio desse marco pode induzir no resultado das estratégias dos jogos na rede. Um estudo do efeito de uma desordem controlada e gradativa pode ser feito através do algoritmo que foi proposto por Watts e Strogatz para construir uma rede de mundo pequeno que chamaremos de rede *WS*.

#### Rede de mundo pequeno partindo da rede quadrada bidimensional

Desta maneira procedemos a analisar a dinâmica do jogo de ultimato nesta topologia de rede da mesma maneira que fazemos na Seção 4.2.1 com a rede quadrada. Aqui então nós analisamos o jogo com diferentes coordenações  $k$  da rede regular e probabilidade de religação  $p$  das redes de mundo pequeno.

A figura 4.11 mostra tais evoluções temporais. O que se observa é que o aumento da desordem  $p$  (religação) tende mesmo com coordenação baixa fazer com que a oferta se aproxime mais do resultado esperado para campo médio. Para olhar isso de uma maneira mais precisa elaboramos um diagrama de cores (veja Figura: 4.12) que pinta com o valor estacionário  $O_\infty$  como função dos parâmetros de controle  $(p, \langle k \rangle)$ .

Observamos que no primeiro caso para um  $p$  fixo e variando o valor da vizinhança  $\langle k \rangle$ ,  $O_t$  tende para valores mais próximos ao valor teórico obtido no campo médio. Mas se controlamos o valor de  $p$  e deixamos fixo a coordenação média  $\langle k \rangle$ , se pode apreciar

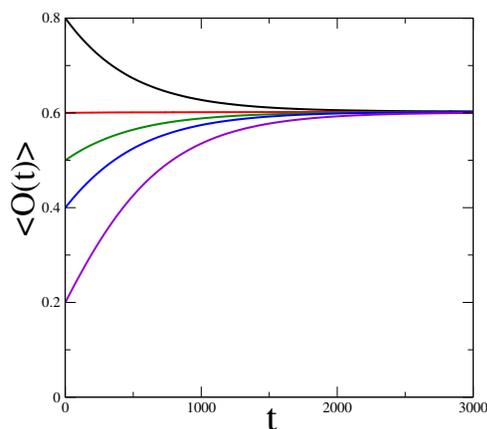
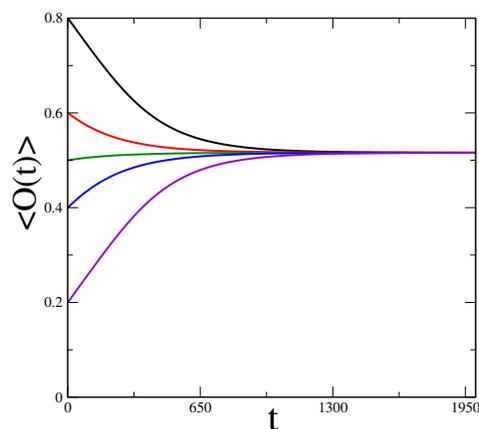
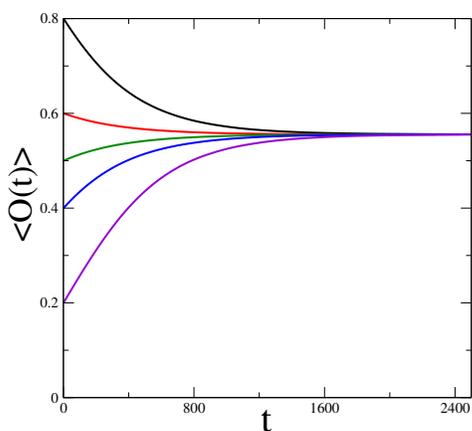
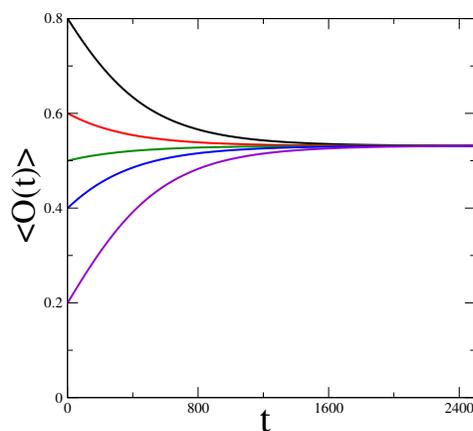
(a)  $p = 0.03, k = 4$ (b)  $p = 0.03, k = 16$ (c)  $p = 0.01, k = 8$ (d)  $p = 0.50, k = 8$ 

Figura 4.11: **Evolução temporal da média de  $O_t$  no Jogo de Ultimato na rede regular quadrada**, para diferentes valores de probabilidade  $p$  de religação de rede e da vizinhança média respectivamente dados  $\langle k \rangle$  : Fig 4.11(a): 0.03, 4, Fig. 4.11(b): 0.03, 16, Fig 4.11(c): 0.01, 8, Fig. 4.11(d): 0.50, 8, respetivamente. Com valores iniciais da proposta  $O_o = O(0)$  iguais a: 0.2 (violeta) , 0.4 (azul), 0.5(verde), 0.6(vermelho), 0.8(preto). O valor de  $\epsilon = 6 \times 10^{-4}$  . Usamos  $L=100$ .

que a valores pequenos de desligação da rede  $p$  já se pode obter um jogo mais justo de Ultimato de forma global. Os transientes diferem substancialmente tendo uma relação proporcional mais do tamanho do grupo de interação local no jogo que da desligação global da rede.

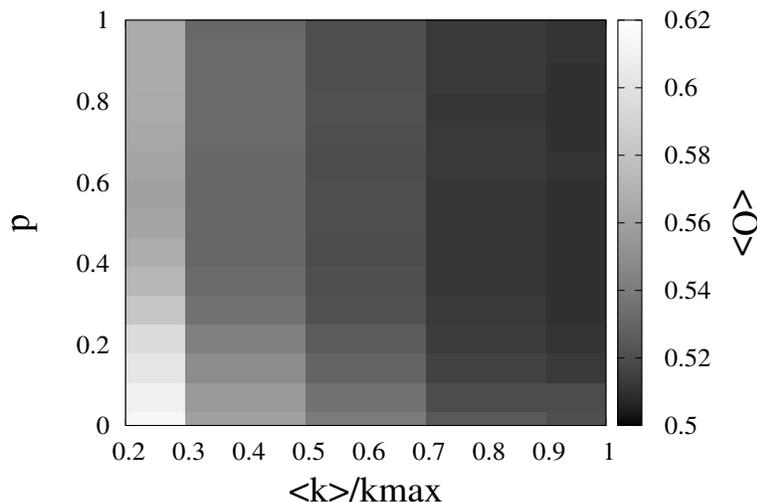


Figura 4.12: **Diagrama de fase no espaço  $p - k$** , no Jogo de ultimato reativo partindo de uma rede quadrada.

### Rede de mundo pequeno partindo de um anel

Exatamente como fizemos para análise da evolução de  $O_t$ , em base aos parâmetros de controle  $(p, \langle k \rangle)$  na secção anterior 4.2.2, aqui procedemos a ver que propriedades emergem partindo de um anel nas redes de mundo pequeno. Como primeiro passo procedemos a comparar o que acontece pra os mesmos valores de  $(p, k)$  analisados na rede quadrada e com o anel se os resultados depois de um transiente são comparáveis. (Ver Fig.4.13).

Baseados nessa informação e comparando todos os dados tanto da rede quadrada como de o anel se aproximam intuitivamente dentro de um intervalo aceitável, podemos fazer a análise com o anel para comprovar além da aproximação da vizinhança  $\langle k \rangle_{\max} \sim N$  e também para valores  $\langle k \rangle_{\min} = 2$ .

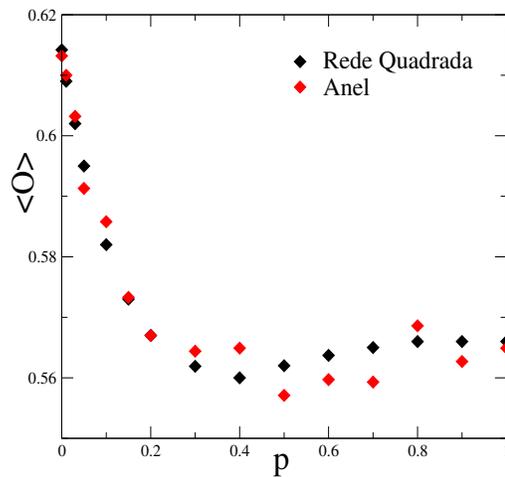
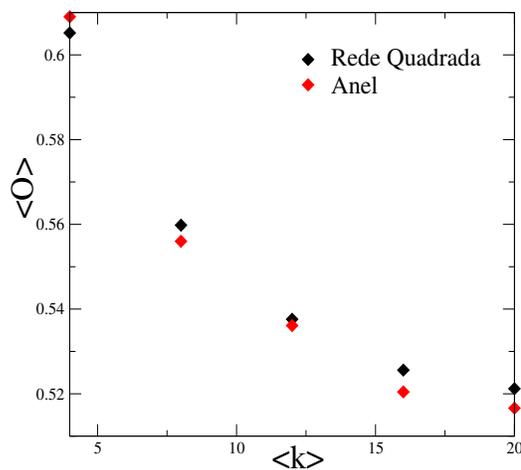
(a)  $k = 4$ (b)  $p = 0.01$ 

Figura 4.13: Valores  $O_\infty$  para redes de mundo pequeno constituída a partir de um anel em função de  $k$  para  $p$  fixo e em função de  $p$  para  $k$  fixo. Os valores podem ser comparados com os resultados das redes de mundo pequeno partindo da rede quadrada (preto) com respeito a um anel (vermelho). Na fig. 4.13(a) o valor de  $\langle k \rangle = 4$ , e na fig. 4.13(b) o valor de  $p = 0.01$

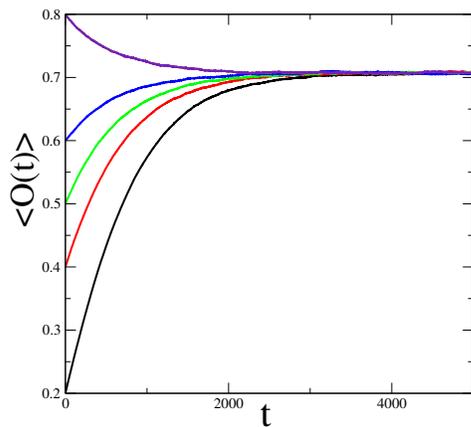
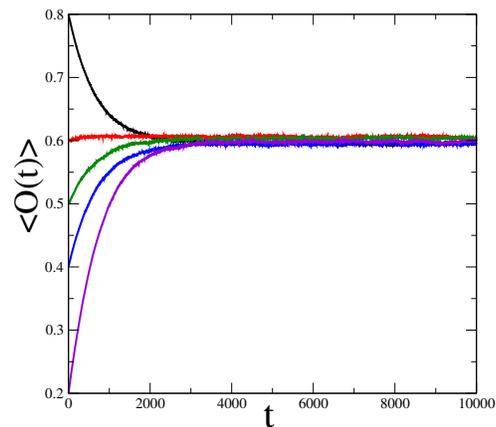
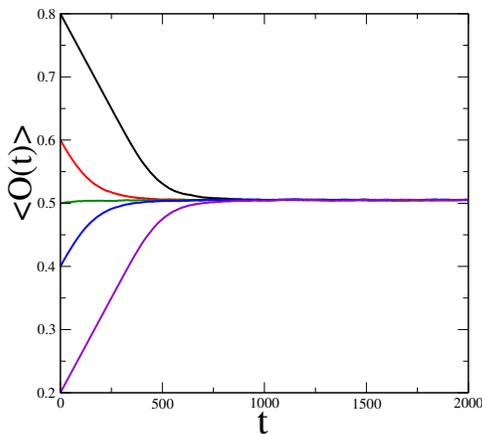
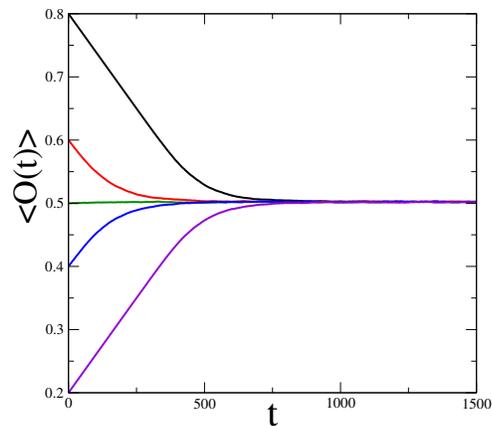
(a)  $p = 0.00, k = 2$ (b)  $p = 0.50, k = 2$ (c)  $p = 0.00, k = 99$ (d)  $p = 0.50, k = 99$ 

Figura 4.14: **Evolução temporal da média de  $O_t$  do jogo do ultimato no anel**, para diferentes valores de probabilidade  $p$  de religação de rede e de vizinhança  $\langle k \rangle$ : Fig 4.14(a): 0.00, 2, Fig. 4.14(b): 0.50, 2, Fig 4.14(c): 0.00, 99, Fig. 4.14(d): 0.00, 99, respetivamente. Com valores iniciais da proposta  $O_o = O(0)$  iguais a: 0.2 (violeta) , 0.4 (azul), 0.5(verde), 0.6(vermelho), 0.8(preto).

Tomando em base a informação refletida nas figs: 4.13 e 4.14 procedemos a construir (similar como se fez na rede quadrada) o diagrama de cores  $p - k$  do jogo de ultimato para rede de mundo pequeno no anel.

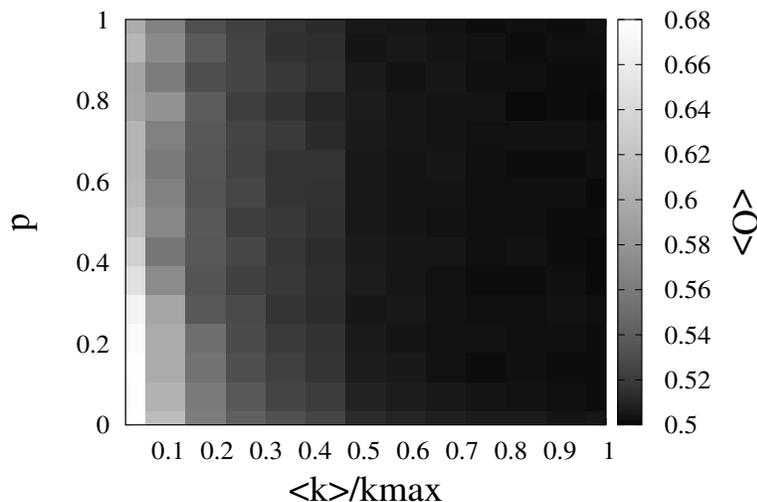


Figura 4.15: Mapa de calor no espaço  $p - k$  no jogo de ultimato partindo do anel, onde se pode apreciar em que regiões o valor de  $O_{\infty}$  determina se o Jogo de Ultimato tende a ser mais justo/altruista  $O_{\infty} < 1/2$  ou egoista  $O_{\infty} > 1/2$ . O valor da vizinhança  $\langle k \rangle$  varia entre um valor mínimo igual a 2 até o valor limite de  $N - 1 = 99$  tal como se queria conseguir anteriormente.

### 4.2.3 Resultados para riqueza acumulada e coeficiente de Gini sob as quatro prescrições Pavlovianas para redes de mundo pequeno partindo de um anel: análise da desordem e da conectividade

Vamos aqui analisar as quatro prescrições com respeito ao ganho acumulado para redes de mundo pequeno construídas a partir de um anel. Resultados para redes quadradas são similares e, por isso, foram naturalmente omitidos deste trabalho. Para isso consideramos os resultados em duas situações particulares:

1. Removendo a desordem ( $p = 0$ ) e variando o número de vizinhos  $k$ ;
2. Fixando um número de vizinhos ( $k = 4$ ) e variando a desordem  $p$ ;

### Conectividade no anel com desordem nula

Até agora vimos que os resultados de campo médio são corroborados para redes com  $\langle k \rangle \sim N$ , isto é as ofertas a longos tempos convergem para  $1/2$  que é o comportamento dito justo no jogo do ultimato. Mas não analisamos, por exemplo, propriedades relativas à riqueza acumulada dos jogadores como função do tamanho da vizinhança sem desordem do sistema e também como essas mesmas propriedades variam quando temos um tamanho fixo de vizinhança e variamos a desordem, quando consideramos as quatro diferentes prescrições Pavlovianas. É o que faremos agora.

O jogo como vimos, torna-se especialmente interessante quando a conectividade é incrementada e as ofertas se aproximam daquelas obtidas e calculadas no campo médio. Portanto, vamos dar continuidade e explorar os resultados estacionários da evolução de grandezas sob as diferentes prescrições. As grandezas utilizadas (obtidas no caso estacionário), são a oferta média, a densidade de aceitadores, a riqueza acumulada e o coeficiente de Gini da riqueza acumulada, o que é diferente do que calculamos em seções anteriores.

Os resultados no estado estacionário (fig. 4.16) mostram uma notável vantagem da proposta III com respeito às outras propostas de negociação, conduzindo a mais baixos coeficientes de Gini e uma maior riqueza média dos jogadores. A questão é simples, embora o altruísmo não seja a atitude racional, como proponente em rede ela é mais vantajosa porque ela gerará maior número de negócios. A analogia é simples, o velho dilema: um corretor de imóveis que fecha muitos negócios de valores menores é melhor do que aquele que fecha poucas corretagens de valores mais altos se elas são muito raras. Sem contar, que de vez em quando você é o comprador do imóvel, e você vai ganhar mais nas aceitações, numa espécie de: *todo mundo beneficia todo mundo*. Em rede, no jogo reativo aqui inventado, é como se o altruísmo fosse a atitude mais **racional**. É importante lembrar que a proposta III é a de uma pessoa que pode ser considerada conservadora em seus investimentos, ela só deu propostas menores no caso de uma aceitação plena (de todos os vizinhos), isto é, só mudou em cenários amplamente favoráveis, preferindo continuar com uma estratégia que privilegiasse a chance de fazer mais negócios ao invés de beneficiar-se rapidamente! Isto concorda e muito com os resultados obtidos em [79].

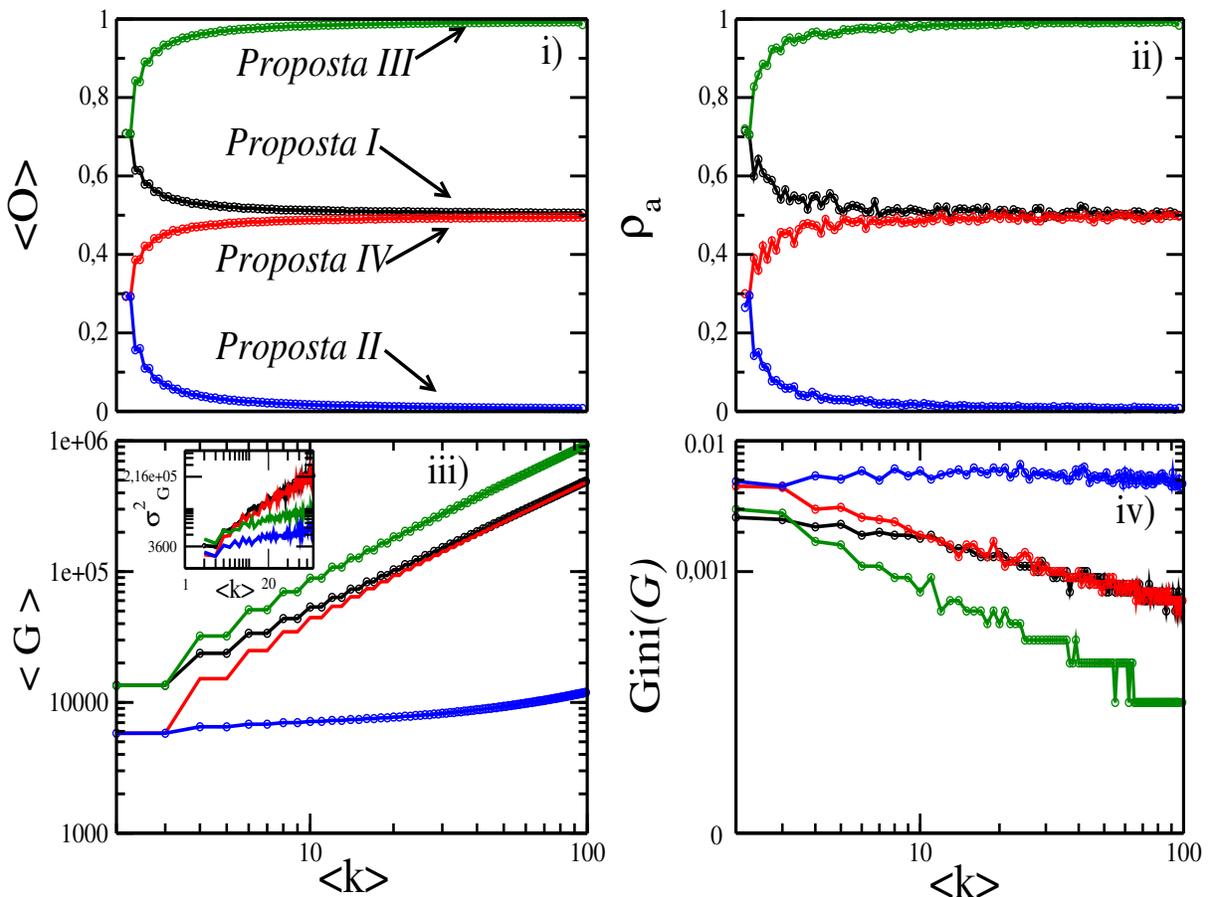


Figura 4.16: **Análise da dependência da conectividade  $k$  de grandezas no jogo do ultimato Pavloviano.** Simulações são realizadas no anel, sem desordem ( $p = 0$ ): a cor preta representa a prescrição I, vermelha a IV, verde a III e azul a II. As quantidades são as seguintes: i) parte superior esquerda: A oferta média dos jogadores; ii) parte superior direita: A fração de aceitadores; iii) parte inferior esquerda: O valor da média dos ganhos acumulados e sua variância e iv) parte inferior direita: O coeficiente de Gini da riqueza acumulada. Com valores iniciais da proposta  $O_o = 0.25$ . O valor de  $\epsilon = 6.10^{-4}$ . O tamanho do sistema é de  $N = 100$ .

A proposta II por outro lado, leva que abaixar propostas pois muda com poucas garantias de um cenário favorável, conduz a um egoísmo que não encontrará parceiros de negócios na rede. Esse ostracismo econômico conduz o jogador a ganhos pífios e ainda sendo mal distribuídos entre os jogadores, pois o coeficiente de Gini é o mais alto de todos!

Observe que para valores baixos de  $k$ , o jogo poderia se tornar um jogo no limite do que se espera na atitude racional [80, 81], observando que a fração de aceitadores pode chegar a valores nulos com o aumento da conectividade (Veja Fig. 4.16 ii) .

As propostas I e IV no estado assintótico chegam se aproximar de valores considerados justos conduzindo ao que se espera por exemplo no experimento de Machiguenga na Amazônia peruana como reportado nos trabalhos de Henrich [27], conceito estudado no jogo do ultimato por diversos autores (veja por exemplo [82, 79])

É importante salientar que, em geral, a forma de negociação deste tipo pavloviano faz com que praticamente todos os indivíduos tendem a ter uma riqueza igual, é importante salientar que o coeficiente de Gini para o ganho em cada rodada é bem maior como mostramos na subseção 4.2.1.

Outro fato importante é a dispersão dos resultados do ganho total acumulado, no caso da proposta III (fig. 4.16 iii) (pequena figura inserida) ser baixa. Isso deve ao fato que vai demorar até que a negociação seja feita, e até que todos aceitem a proposta, o tempo requerido vai ser longo para que se chegue no consenso de parte de todos no jogo local, este efeito será mais emergente em nível global se a vizinhança tende a ser o tamanho do sistema.

### **Desordem no anel com conectividade fixa**

Nesta subseção vamos revisar que fator de importância tem no jogo do ultimato se o analisamos para uma conectividade fixa, mas variando o desordem das ligações no anel. Neste caso variamos desde uma rede ordenada  $p = 0.0$ , até uma rede aleatória  $p = 1.00$  .

Na fig. 4.17 se aprecia os valores no estado assintótico de algumas propriedades importantes no jogo de ultimato tal como se analisou na seção anterior, mas nesta oportunidade se quer ver o efeito da desordem, fixando-se a conectividade (usamos  $k = 4$ ). O efeito do desordem não tem uma preponderância tão grande como no caso de aumentar a vizinhança, já que como se observa, os parâmetros (valor da oferta, a

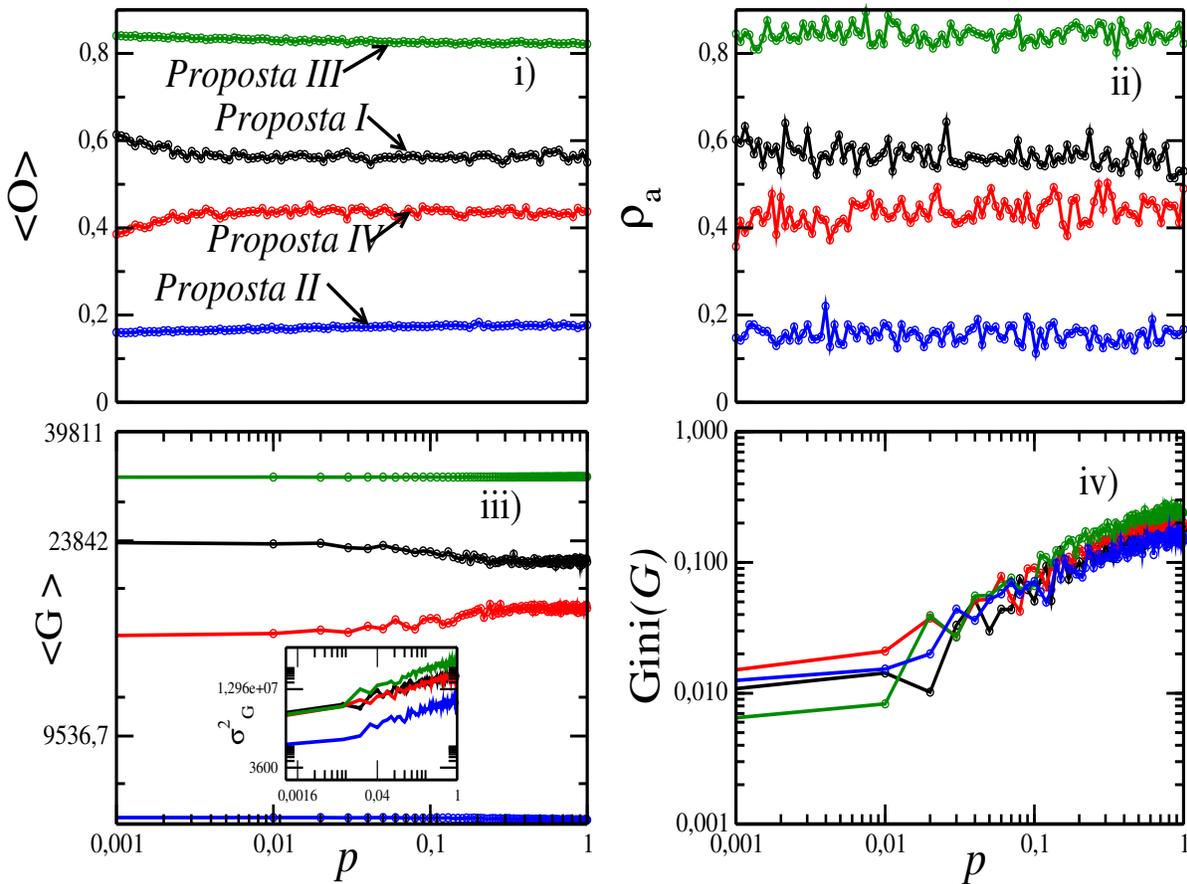


Figura 4.17: Resultados no Jogo do ultimato no anel para variação do parâmetro de religação  $p$ , com número fixo de vizinhos  $k = 4$ : a cor preta com círculos, representa a proposta I, a vermelha a IV, a verde corresponde à III e a cor azul com círculos representa a proposta II, depois de  $10^4$  realizações (garantindo com muita folga estado estacionário. As características são as seguintes: i) parte superior esquerda: a ofertas média; ii) parte superior direita: a fração de aceitadores; iii) parte inferior esquerda: o valor médio do ganho acumulado e sua variância e iv) parte inferior direita: O coeficiente de Gini da riqueza acumulada. Valores iniciais da proposta  $O_o = 0.25$ . O valor de  $\epsilon = 6 \cdot 10^{-4}$ . O tamanho do sistema é de  $N = 100$ .

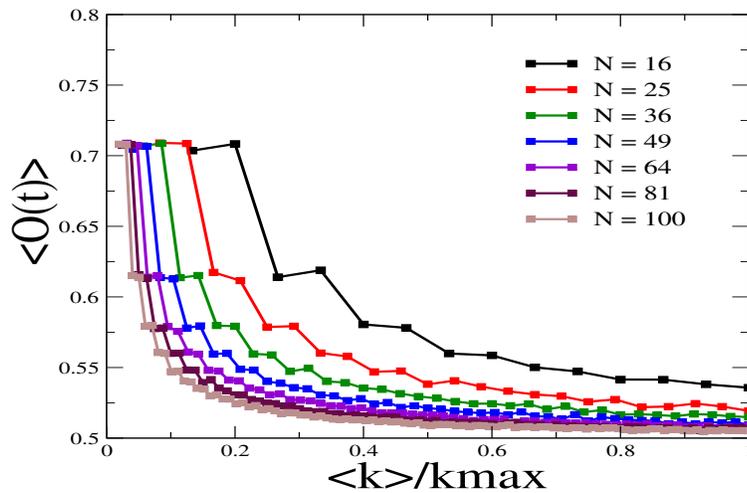
fração de número de aceitadores e o ganho médio acumulado não se desviam muito ao aumentar o valor de  $p$ .

Mas se observa também que o coeficiente de Gini da riqueza acumulada aumenta consideravelmente para todas as prescrições, os valores indicam que a desordem não proporciona distribuição dos ganhos de maneira homogênea. Isso provavelmente deve ser devido à uma disparidade gerada pelo processo de religação da rede.

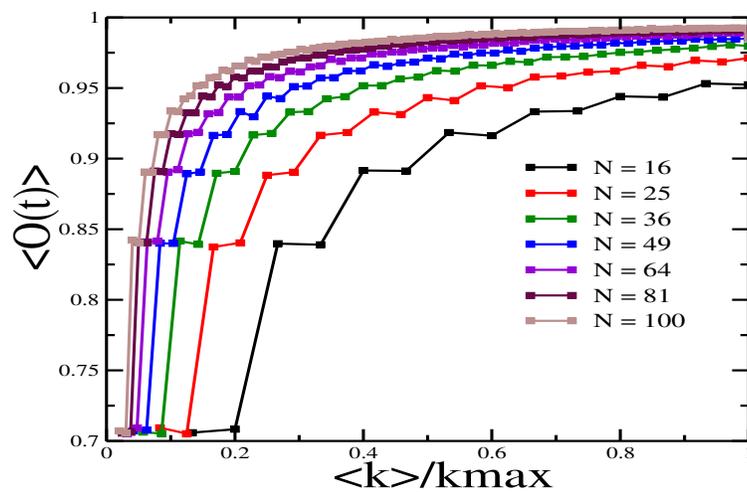
Finalmente deixamos para o final um estudo detalhado sobre os efeitos de tamanho finito no jogo de ultimato reativo.

### **Efeitos de tamanho finito**

Deixamos essa parte para estudar os efeitos de tamanho finito no jogo de ultimato reativo.



(a)



(b)

Figura 4.18: **Efeitos de tamanho finito para o Jogo de Ultimato pavloviano:** comportamento da oferta no caso assintótico como função de  $\langle k \rangle / k_{\max}$  para diferentes tamanhos de rede. Utilizamos para isso uma rede de mundo pequeno construída a partir de um anel. O gráfico superior ( fig. 4.18(a) ) corresponde a prescrição I enquanto que o inferior (fig. 4.18(b)) corresponde a prescrição III.

Os efeitos de tamanho finito aqui são analisados observando os valores das ofertas no estado estacionário como função de  $\langle k \rangle / k_{\max}$  onde  $k_{\max} = N - 1$ , para diferentes tamanhos do sistema (ver: Fig.4.18). A parte superior na Fig. 4.18 corresponde a prescrição I, enquanto que o gráfico inferior na Fig. 4.18 corresponde a prescrição III.

É importante salientar que os efeitos de escala são preponderantes na análise dos valores estacionários em função de  $\langle k \rangle / k_{\max}$ , contudo não se observa discrepâncias no valor estacionário da oferta para um  $k$  fixo, na verdade neste caso o que se verifica é uma variância maior no valor estacionário da oferta e não no seu valor médio em si. No próximo capítulo falaremos dos nossos resultados sobre a mobilidade no jogo do ultimato reativo, realizando algumas modificações no que propusemos até agora. Basicamente faremos algumas modificações nas atualizações das ofertas segundo as prescrições previamente definidas e também por introduzir o aspecto de seleção até aqui ignorado nesta tese.

# Capítulo 5

## Jogo de Ultimato Reativo com Mobilidade

Neste capítulo vamos explorar, que efeitos podem emergir, quando os agentes adotam um das quatro estratégias vistas em capítulos anteriores, inicialmente espalhadas de maneira uniforme e aleatória, mas adicionalmente com a probabilidade de se movimentar na mesma. Para esse propósito, no nosso modelo, implementamos os seguintes parâmetros de ordem: a diluição de agentes na rede  $\rho$  e a mobilidade  $p$ . As atualizações das estratégias (seleção) serão realizadas levando-se em conta os maiores ganhos totais (*copia darwiniana*) em cada passo do tempo.

### 5.1 Modelo de jogo de ultimato reativo com mobilidade aleatória

Para o estudo de jogo de ultimato com mobilidade, consideramos uma rede quadrada bidimensional, com número total de sítios  $N = L^2$  vértices (onde  $L$  é a dimensão linear). Agora, a rede pode não estar totalmente ocupada, e  $k_i$  indica o número de vizinhos do vértice  $i = 1, \dots, N$ , que não necessariamente é 4 para todos eles.

Primeiramente realizamos simulações preliminares para checar se a mobilidade tinha efeito sob as ofertas considerando nosso modelo de ultimato reativo previamente descrito no capítulo 3 e preenchemos a rede com 75% jogadores ( $\rho = 0.75$ ) seguindo a prescrição I e então procuramos observar o que aconteceria com as ofertas se variássemos a mobilidade dos jogadores de acordo com o algoritmo de mobilidade descrito também no Cap. 3. Surpreendentemente, não vimos diferenças na evolução temporal da oferta média como pode ser observado no gráfico da Fig. 5.1.

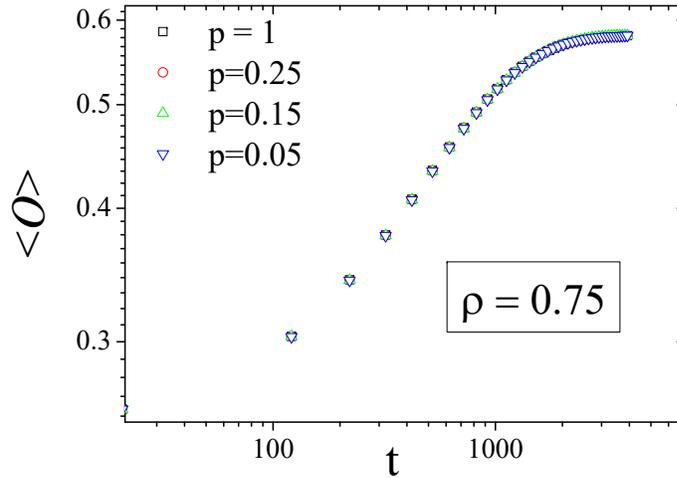


Figura 5.1: Efeito de mobilidade para o ultimato reativo com mobilidade, e todos os jogadores seguindo a prescrição I.

O ponto importante aqui não é que não utilizamos mais estratégias, mas isso também não deve alterar os efeitos de mobilidade. O argumento é muito simples, porque dado uma fração fixa de estratégias, sem o efeito de seleção natural, ou com correlações direta entre as ofertas, a mobilidade não deve mudar a oferta média. Por que? Se considerarmos que  $\rho_c$ ,  $\rho_G$ ,  $\rho_{HC}$  and  $\rho_M$  são as densidades de conservadores, gulosos, altamente conservadores e moderados, podemos escrever que os jogadores inseridos em uma população com coordenação fixa  $k$ , temos que a relação de recorrência para as ofertas dos jogadores pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \langle O_{t+1} \rangle \approx & \langle O_t \rangle + \rho_c \cdot [2 \Pr(0 \leq n_a \leq k/2 | \langle O_t \rangle) - 1] \varepsilon + \rho_G \cdot [2 \Pr(n_a = 0 | \langle O_t \rangle) - 1] \varepsilon + \\ & + \rho_{HC} [2 \Pr(0 < n_a < k | \langle O_t \rangle) - 1] \varepsilon + \rho_M [2 \Pr(0 < n_a < k/2 - 1 | \langle O_t \rangle) - 1] \varepsilon, \end{aligned}$$

o que resulta em:

$$\begin{aligned} \langle O_{t+1} \rangle \approx & \langle O_t \rangle + \rho_c \left( 2 \sum_{m=0}^{k/2} \frac{k! \langle O_t \rangle^m (1 - \langle O_t \rangle)^{k-m}}{m! (k-m)!} - 1 \right) \\ & + \rho_G (2(1 - \langle O_t \rangle)^k - 1) + \rho_{HC} (1 - 2 \langle O_t \rangle^k) \\ & + \rho_M \left( 2 \sum_{m=0}^{k/2-1} \frac{k! \langle O_t \rangle^m (1 - \langle O_t \rangle)^{k-m}}{m! (k-m)!} - 1 \right) \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Observe que dada concentração das diferentes prescrições e a coordenação da rede

as ofertas não devem mudar o que generaliza nosso campo médio ( $k \rightarrow \infty$ ) valendo claro apenas para o limite termodinâmico ( $N \rightarrow \infty$ ). Ou seja as simulações com coordenação fixa são exatas para o nosso problema e esta solução por exemplo para  $k = 4$  pode reproduzir todos os resultados que obtivemos para simulações em redes com coordenação fixa que fizemos no capítulo anterior, claro, desde que a desordem seja nula. Neste caso, temos apenas que zerar ou não as densidades de estratégias desejadas (resultados interessantes de misturas de estratégias, o que não foi feito no capítulo anterior, podem ser observados no artigo publicado relativo a parte desta tese que aparece no seu final).

A fim de observar os efeitos da mobilidade sobre o jogo do ultimato reativo, realizamos algumas modificações nas simulações realizadas até então. Agora nós damos as prescrições I, II, III e IV previamente a qualidade de estratégia. Assim cada elemento  $i \in N$  pode estar em um dos quatro estados  $s(x) : \{ C \text{ (conservativo) ou } S_I, G \text{ (Ambicioso) ou } S_{II}, HC \text{ (altamente conservativo) ou } S_{III} \text{ e } M \text{ (Moderado) ou } S_{IV} \}$  para qualquer passo de tempo. Os quatro estados são distribuídos aleatoriamente na rede em proporções iguais a  $1/4$  (do total de agentes) para cada um.

A forma de implementar o jogo de ultimato é o mesmo como já foi descrito na seção , mas agora com a implementação da mobilidade e a estratégia do elemento  $i$ , consiste no método que ele adota para mudar ao estado que tem melhor sucesso no jogo, em cada passo de interação do mesmo e esta atualização é realizada ao mesmo tempo para todos os jogadores (preservando as características de autômato celular do modelo). O algoritmo modificado segue o seguinte roteiro:

1. No instante  $t$  arbitrário, lê-se o elemento  $i = 1, \dots, N$  da rede. Este elemento proporá para seus  $j = 1, \dots, k_i$  vizinhos. Cada vizinho  $j$ , aceitará ou não a proposta com probabilidade  $p_a(t) = O_t^{(i)}$ , onde  $O_t^{(i)}$  é o valor da oferta do proponente no instante, mas agora incluímos também como condicionante que o ganho que recebe do aceitador tem que ser maior ou igual ao ganho que ele perceberia quando ele é o proponente, ou seja  $O_t^{(i)} \geq 1 - O_t^{(j)}$  que é o mesmo que  $O_t^{(i)} + O_t^{(j)} \geq 1$ . Ou seja, a aceitação ocorre sob essas duas condições que devem ser satisfeitas simultaneamente.
2. Conta-se o número de jogadores que aceitaram a proposta do proponente  $i$ , chamamos isso de  $n_a(i)$ . A partir disso o algoritmo usa as 4 prescrições (dinâmicas)

diferentes já anteriormente mencionadas, só que agora há um detalhe importante, o jogador decrescerá sua oferta com probabilidade que é a própria oferta e permanecerá com a mesma como probabilidade complementar. Isto significa que o jogador tende a abaixar sua oferta apenas em situação em que ela não esteja extremamente baixa. Trata-se de impor um mínimo respeito ao adversário ou uma barreira contra a gulodice extrema. Por outro lado, ele incrementará sua oferta com probabilidade que é o complementar dela e permanecerá com mesma com probabilidade que é a própria oferta. Trata-se, neste caso, uma maneira de coibir/controlar um altruísmo sem limites o que neste caso significaria para o jogo um comportamento quase que autodestrutivo. Assim as novas prescrições ficam:

Prescrição I Se  $n_a(i) > k_i/2$  então  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$  com uma probabilidade igual a  $O_t^{(i)}$ ,  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)}$  com probabilidade complementar  $1 - O_t^{(i)}$ . Caso contrário, isto é, se  $n_a(i) \leq k_i/2$ , então  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$  com probabilidade  $1 - O_t^{(i)}$ , mas permanece com a mesma oferta  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)}$  com probabilidade  $O_t^{(i)}$ .

Prescrição II Se  $n_a(i) \geq 1$  então  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$  com uma probabilidade igual a  $O_t^{(i)}$ ,  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)}$  com probabilidade complementar  $1 - O_t^{(i)}$ . Caso contrário, isto é, se  $n_a(i) < 1$ , então  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$  com probabilidade  $1 - O_t^{(i)}$ , mas permanece com a mesma oferta  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)}$  com probabilidade  $O_t^{(i)}$ .

Prescrição III Se  $n_a(i) = k_i$  então  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$  com uma probabilidade igual a  $O_t^{(i)}$ ,  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)}$  com probabilidade complementar  $1 - O_t^{(i)}$ . Caso contrário, isto é, se  $n_a(i) < k_i$ , então  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$  com probabilidade  $1 - O_t^{(i)}$ , mas permanece com a mesma oferta  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)}$  com probabilidade  $O_t^{(i)}$ .

Prescrição IV Se  $n_a(i) \geq k_i/2$  então  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$  com uma probabilidade igual a  $O_t^{(i)}$ ,  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)}$  com probabilidade complementar  $1 - O_t^{(i)}$ . Caso contrário, isto é, se  $n_a(i) < k_i/2$ , então  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$  com probabilidade  $1 - O_t^{(i)}$ , mas permanece com a mesma oferta  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)}$  com probabilidade  $O_t^{(i)}$ .

3. Repete-se o procedimento para todos os sítios ocupados e só então faz-se as atualizações das ofertas prescritas pelo passo 2 para todos os jogadores da rede simultaneamente.
4. Para todo sítio ocupado  $i$ , seleciona-se um elemento  $j$  ( $j$  diferente de um sitio vazio) da vizinhança de  $i$ . Então procede-se com a atualização darwiniana: se o

payoff do elemento  $i$  é inferior ao do  $j$ ,  $P(s(i)) < P(s(j))$ , a estratégia (prescrição) do elemento  $j$  é copiada. Caso contrário o elemento  $i$  permanece em seu estado original. Repete-se o procedimento para todos os sítios da rede de forma síncrona.

5. Aplica-se a mobilidade dos jogadores de acordo com o algoritmo descrito na tabela 3.1.

Tendo em conta que nosso modelo do jogo tem como vizinhança  $k = 4$  para a rede totalmente cheia (i.e., sem a presença de vacâncias na rede), com vacâncias teremos em média um número menor de vizinhos por sítio ocupado e as regras estabelecidas pelas prescrições/estratégias podem ser afetadas, havendo por exemplo fusão das estratégias. Assim elaboramos em função de  $k$ , uma análise da sobrevivência e fusão das estratégias que podem ocorrer com a diluição da rede. Neste cenário a vizinhança varia de 0 a 4 jogadores como produto da ocupação  $0 \leq \rho \leq 1$  de agentes na rede, e a influência da vizinhança nas estratégias durante a evolução do jogo vai ser como se amostra na tabela 5.1 a continuação:

$\langle k \rangle$	Número de aceitações	Estratégias que sobrevivem	Efeito
<b>0</b>	–	–	Sem mudanças
<b>1</b>	1	$S_I S_{II} S_{III} S_{IV}$	Fusão total
<b>2</b>	1	$\mathcal{S}_I S_{II} \mathcal{S}_{III} S_{IV}$	$S_{II}$ e $S_{IV}$ se fundem
	2	$S_I S_{II} S_{III} S_{IV}$	Fusão total das estratégias
<b>3</b>	1	$\mathcal{S}_I S_{II} \mathcal{S}_{III} \mathcal{S}_{IV}$	Só sobrevive $S_{II}$
	2	$S_I S_{II} S_{IV}$	$S_I$ , $S_{II}$ e $S_{IV}$ se fundem
	3	$S_I S_{II} S_{III} S_{IV}$	Fusão total das estratégias
<b>4</b>	1	$\mathcal{S}_I S_{II} \mathcal{S}_{III} \mathcal{S}_{IV}$	Só sobrevive $S_{II}$
	2	$\mathcal{S}_I S_{II} \mathcal{S}_{III} S_{IV}$	$S_{II}$ e $S_{IV}$ se fundem
	3	$S_I S_{II} \mathcal{S}_{III} S_{IV}$	$S_I$ , $S_{II}$ e $S_{IV}$ se fundem
	4	$S_I S_{II} S_{III} S_{IV}$	Fusão total das estratégias

Tabela 5.1: Esta tabela mostra o cenário de possíveis fusões e sobrevivência de estratégias, levando-se em consideração que pode haver menos que quatro vizinhos em alguns sítios no jogo do ultimato reativo.

Esses efeitos descritos na tabela 5.1, vão ser importantes na descrição em nível global do jogo do ultimato reativo com mobilidade, descritos na próxima seção, onde apresentamos os resultados numéricos de simulação.

## 5.2 Simulações Numéricas

A seguir apresentamos os resultados obtidos em simulações numéricas para o jogo do ultimato reativo com diluição  $(1 - \rho)$  e mobilidade  $p$ . Em todas nossas simulações, as condições iniciais são aleatórias, ou seja, a distribuição na rede é aleatória de  $1/4$  da densidade total de agentes  $\rho$  que está no estado  $C$ ,  $1/4$  do estado  $G$ ,  $1/4$  do estado  $HC$  e  $1/4$  do estado  $M$ . A oferta inicial de todos os jogadores parte sempre da mesma situação que é o jogador totalmente justo:  $O_0 = 0.5$ .

Com o objetivo de pesquisar o comportamento coletivo do sistema, primeiramente medimos a evolução da oferta média no sistema sem mobilidade dos agentes ( $p = 0$ ) como se vê na figura 5.2, onde foram feitas 100 realizações para diferentes configurações especiais para  $t = 20000$  passos temporais. Na figura 5.2 se mostra a influência da diluição do sistema, à medida que vamos diminuindo a média da oferta que tinha um valor máximo de aproximadamente de 0.72 para a rede completamente cheia:  $\rho = 1.0$  até aproximadamente 0.63 que ocorre para ocupação  $\rho = 0.6$ , é visto que entre densidades compreendidas entre 0.6 e 0.3 a oferta média tende a ser quase parecida, mas uma análise mais geral do comportamento coletivo da oferta média poderá ser melhor apreciado conforme segue.

Uma vez analisado o efeito da diluição, partimos agora para analisar os efeitos de mobilidade no nosso jogo. Para esse propósito utilizamos vários valores de densidade e observamos como a inclusão da mobilidade afeta na medida global da oferta média durante a evolução temporal.

É importante observar a influencia da mobilidade quando temos uma variação de diluição, como mostrado na fig.5.3. Para uma diluição baixa como  $\rho = 0.3$  (Fig. 5.3(a)) se têm uma diminuição da média da oferta à medida que a mobilidade vai aumentando, chegando a um valor máximo para valores de alta mobilidade. Mas esse comportamento, a medida que vamos aumentando a diluição, vai desaparecendo. Para valores de mobilidade baixos podemos observar que a média da oferta em caso quando a diluição é alta (neste exemplo a partir de  $\rho = 0.6$ ), tende a ser praticamente a mesma (com algumas diferenças numéricas) quando chegam a se estabilizar as ofertas depois de um transiente (de 15000 passos do tempo aproximadamente), existem diferenças quando incrementamos a mobilidade a partir de  $p = 0.1$  (linha verde tracejada) tanto para  $\rho$

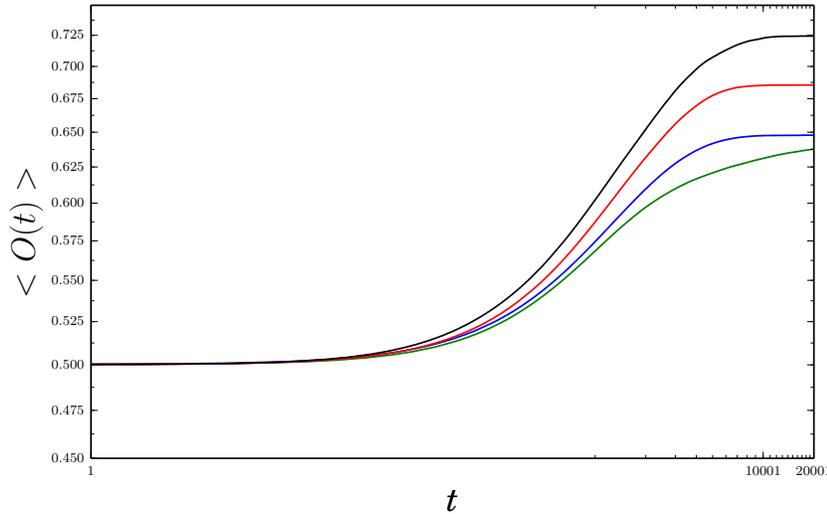


Figura 5.2: **Evolução temporal da oferta media no jogo de ultimato reativo com mobilidade igual a zero, para vários valores de densidade,  $\rho = 0.3$  (linha azul),  $0.6$  (linha verde),  $0.8$  (linha vermelha) e  $1.0$  (linha preta), para cada valor de  $\langle O(t) \rangle$  foram feitas 100 realizações para diferentes configurações iniciais juntamente com uma média sobre os  $N$  agentes em cada passo do tempo, para  $t = 20000$  unidades temporais. Aqui usamos,  $L = 100$  em todas as simulações  $\rho_{S_I}^0 = \rho_{S_{II}}^0 = \rho_{S_{III}}^0 = \rho_{S_{IV}}^0 = 1/4$ .**

=  $0.6$  fig. 5.3(b) e  $\rho = 0.8$  fig. 5.3(c). No caso quando a diluição é máxima:  $\rho = 1.0$ , fig. 5.3(d), obviamente não esperamos diferença entre as curvas e serve apenas como comparação já que não há interferência da mobilidade.

Agora partimos para estudar a evolução temporal das estratégias. Para esse propósito, utilizamos dois valores diferentes de diluição e observamos como a densidade de estratégias muda conforme o tempo o que é descrito pela Fig.5.4.

Na figura 5.4 apresentamos duas situações com diluições diferentes: quando  $\rho = 0.6$  (fig.5.4(a)) temos duas estratégias que tendem a aumentar inicialmente:  $C$  ou  $S_I$  e  $HC$  ou  $S_{III}$ , que podem sofrer fusão em uma só estratégia dependendo do valor de  $k$  (ver 5.1). As duas estratégias que consideramos no tempo máximo de simulação sobrevivem, mas para tempos absurdamente longos, apenas  $HC$  irá dominar. Vemos que para  $\rho = 0.8$  (fig.5.4(b)), temos que a estratégia  $HC$  ou  $S_{III}$  é a dominante da mesma forma ao chegar no tempo máximo de simulação, ou seja, neste caso o sistema chegou a um estado absorvente. Portanto, o comportamento para baixos valores de ocupação, os efeitos da mobilidade podem dar aos estados uma situação de coexistência ainda que temporária. A fim de estudar esse fenômeno de *coexistência temporária* partimos para

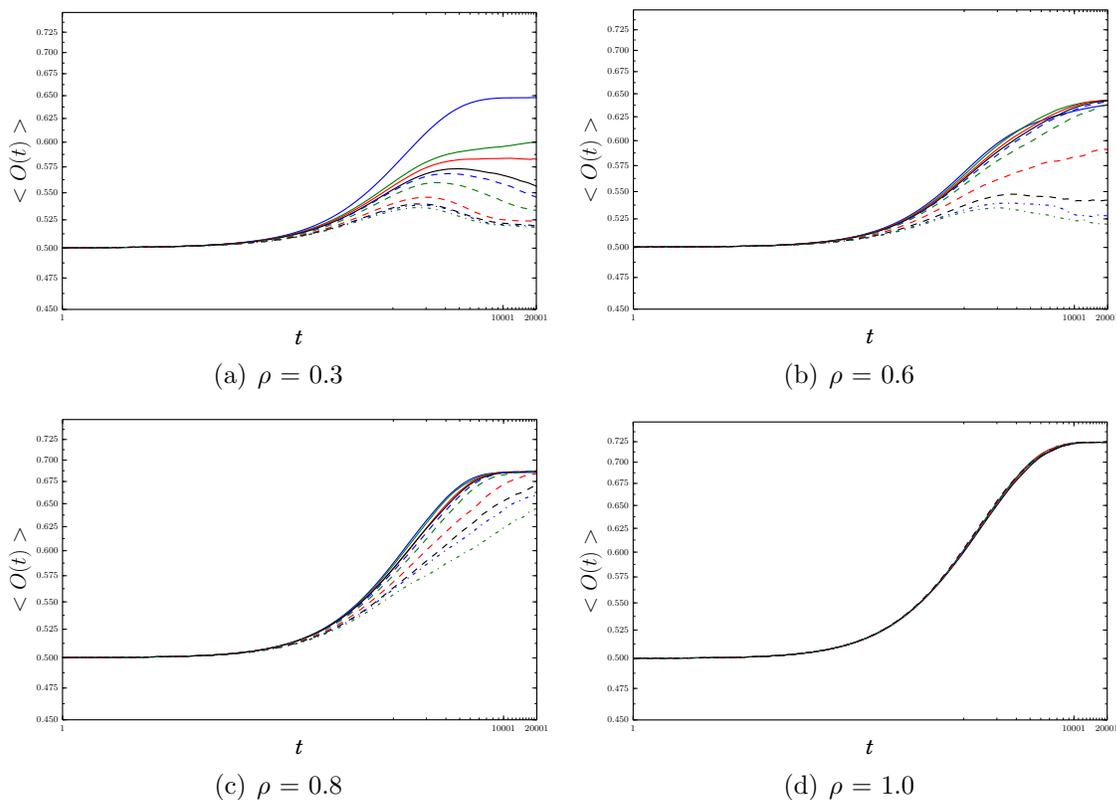


Figura 5.3: **Varição da oferta média com a mobilidade  $p$  para diferentes diluições no sistema**, os valores de mobilidade  $p$  utilizados são: 0.0 (linha azul), 0.01 (linha verde), 0.02 (linha vermelha), 0.04 (linha preta), 0.05 (linha azul tracejada), 0.1 (linha verde tracejada), 0.3 (linha vermelha tracejada), 0.6 (linha preta tracejada), 0.8 (linha azul combinada entre traços e pontos alternados) e 1.0 (linha verde combinada) Na fig.5.3(a) : para  $\rho = 0.3$ , na fig.5.3(b)  $\rho = 0.6$ , na fig. 5.3(c) para  $\rho = 0.8$  e finalmente na fig. 5.3(d) para  $\rho = 1.0$ . As medidas das ofertas no jogo de ultimato reativo com mobilidade foram feitas médias sobre 100 realizações para diferentes configurações iniciais e sobre  $L^2 \rho$  agentes em cada instante do tempo  $t$ . Usamos,  $L = 100$ ,  $\rho_{S_I}^0 = \rho_{S_{II}}^0 = \rho_{S_{III}}^0 = \rho_{S_{IV}}^0 = 1/4$ , e oferta inicial  $\langle O_{(0)} \rangle = 0.5$ .

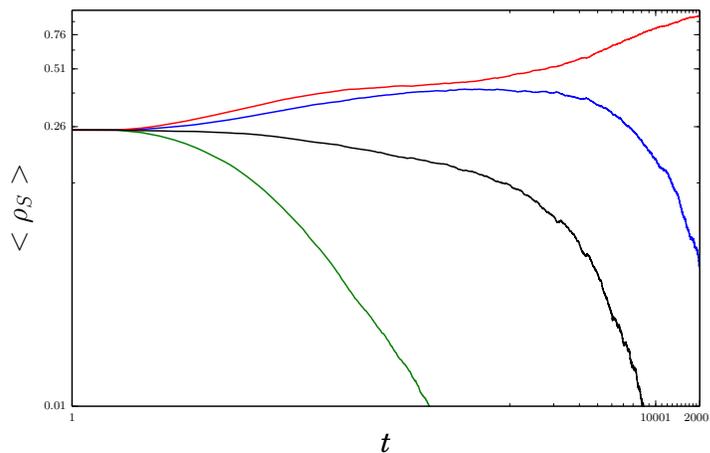
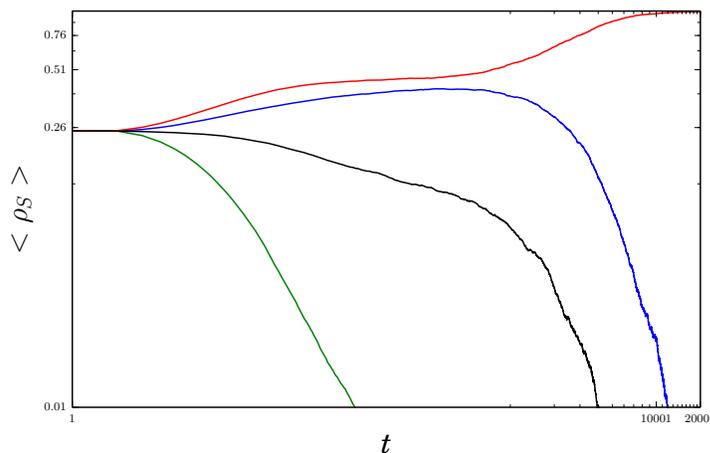
(a)  $\rho = 0.6$ (b)  $\rho = 0.8$ 

Figura 5.4: **Varição das estratégias com a mobilidade  $p = 0.1$  para diferentes diluições no sistema:** fig.5.4(a)  $\rho = 0.6$  e fig.5.4(b)  $\rho = 0.8$ , onde as estratégias estão apresentadas da seguinte maneira:  $\rho_{S_I}$  linha azul,  $\rho_{S_{II}}$  (linha verde),  $\rho_{S_{III}}$  (linha vermelha),  $\rho_{S_{IV}}$  (linha preta). As medidas das estratégias no jogo de ultimato reativo com mobilidade foram feitas com médias sob 100 realizações (diferentes configurações iniciais) e sob  $L^2\rho$  agentes. Da mesma forma aqui usamos,  $L = 100$ ,  $\rho_{S_I}^0 = \rho_{S_{II}}^0 = \rho_{S_{III}}^0 = \rho_{S_{IV}}^0 = 1/4$ , e oferta inicial  $\langle O_{(0)} \rangle = 0.5$ .

estudar a densidade das estratégias em função de todas as mobilidades e ocupações.

A fig.5.5 mostra um mapa de cor para vários valores de ocupação  $\rho$  e mobilidade  $p$ . Cada ponto neste diagrama corresponde ao valor de oferta média no jogo de ultimato reativo com mobilidade e atualização de tipo darwiniana. As médias são realizadas sob os últimos 500 passos temporais dos  $t_{\max} = 20000$  realizados.

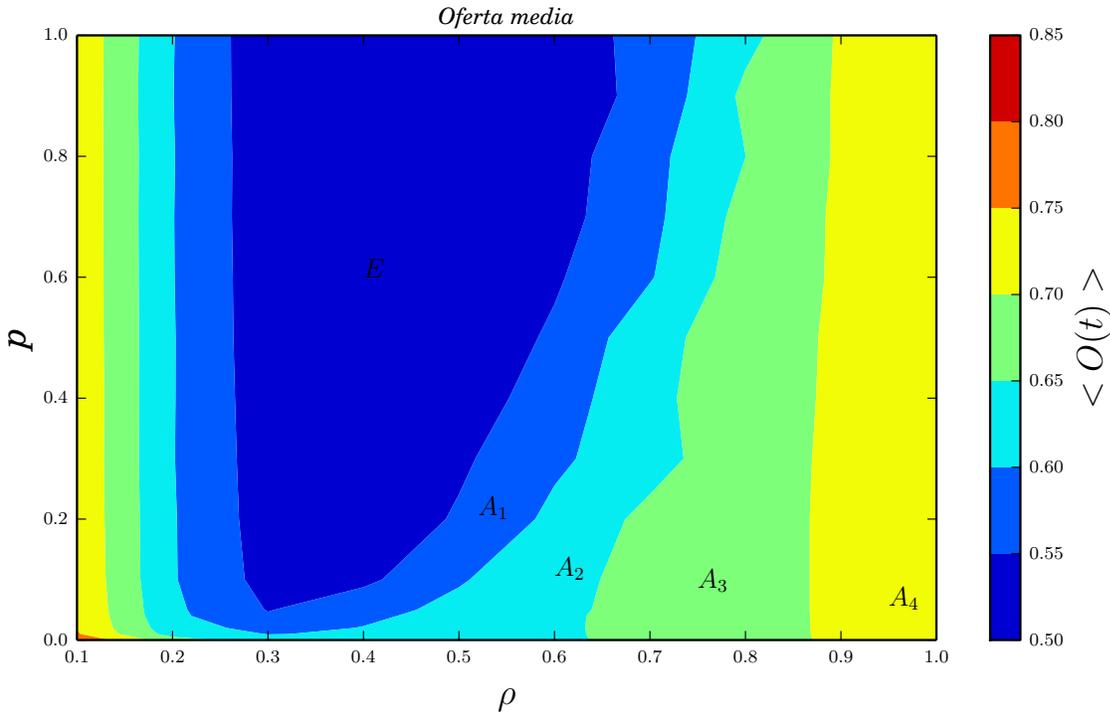


Figura 5.5: **Mapa de cor da dependência da oferta média no espaço  $(\rho, p)$** . Para cada valor de  $\langle O(t) \rangle$  foram feitas 100 realizações para diferentes configurações iniciais e as médias correspondem aos últimos 500 passos do tempo. A emergência de padrões de cor que obedecem a diferentes ranges de ofertas médias no sistema, e que classificamos desde um range de empatia máxima **E** (zona azul cor obscura), a continuação as zonas de altruísmo:  $A_1$  (azul claro),  $A_2$  (azul turquesa),  $A_3$  (verde turquesa) e  $A_4$  (amarelo). Usamos aqui também  $L = 100$ ,  $\rho_{S_I}^0 = \rho_{S_{II}}^0 = \rho_{S_{III}}^0 = \rho_{S_{IV}}^0 = 1/4$ , e oferta inicial  $\langle O_0 \rangle = 0.5$ .

Na fig.5.5 se apresenta a variação da oferta média no espaço  $(\rho, p)$ , nele se podem distinguir varias capas de cores que mostram cada uma diferentes ranges de valores da oferta média para tempos longos. Distinguimos aqueles valores em duas regiões específicas, a zona **E** vamos chamar de **zona de empatia máxima**, onde o oferta se consegue a estabilizar dentro de um intervalo de 0.5 ate aproximadamente 0.55 no equilíbrio, a zona **A** é aquela correspondente a **zona de altruísmo**, que tem vários

níveis onde a zona  $A_1$  corresponde a um altruísmo de nível moderado (entre 0.55 até aproximadamente 0.60) e, assim, diante com as outras zonas, até chegar a zona de altruísmo alto que é a zona  $A_4$ , que neste caso corresponde a valores da média da oferta entre 0.7 e 0.75 no estado de equilíbrio.

O que chama a atenção também é que as diferentes zonas mostram um padrão de repetição, onde a zona central por dizer assim corresponde a zona de empatia máxima, e em torno dela, as zonas da média da oferta neste ordem  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_4$  respectivamente. Portanto, nosso modelo podemos dizer que em torno da zona de empatia, temos uma zona de altruísmo que vai depender da variação dos parâmetros  $\rho$  e  $p$ , por exemplo para obter propostas generosas onde praticamente o proponente não ganha nada para densidades baixas (debaixo de  $\rho = 0.2$  aproximadamente) e densidades altas (quase perto de  $\rho = 0.9$  aproximadamente) para qualquer valor de mobilidade.

Mas se queremos considerar a influência da mobilidade, baseados na fig.5.5, podemos concluir que esse parâmetro é importante para valores de densidade compreendidas entre 0.2 até 0.9 aproximadamente. Uma vez estudado um mapa das ofertas médias, da mesma maneira podemos explorar o que ocorre com a densidade média das estratégias no espaço  $(\rho, p)$ , como se mostra na fig.5.6.

Tão como se amostra na fig.5.6, é claro ver que a estratégia  $S_{III}$  é a dominante para altos valores de densidade no sistema (fig.5.6c)), como podemos observar, o sistema pode chegar a alcançar um estado absorvente com aquela estratégia dominante no jogo. É importante avisar que nossos resultados podem mudar tanto para médias maiores e trata-se de uma análise setorial do problema. O problema merece ser investigado mais profundamente no futuro.

Outra característica importante é que a estratégia egoísta  $S_{II}$  é dominante para baixas densidades no sistema como podemos observar na 5.6b, isso pode ser pelo fato que temos vizinhanças que podem ser até de um vizinho em média, e como vimos na tabela 5.1. As estratégias  $S_I$  e  $S_{IV}$  são praticamente equivalentes dentro de quase o mesmo intervalo de densidades: entre 0.4 e 0.6 aproximadamente (figs. 5.6a e 5.6d)). Analisando o efeito da mobilidade de uma forma geral, se vê que é importante para ranges entre valores intermédios (desde  $\rho = 0.4$  aproximadamente) até valores altos da densidade ( $\rho = 0.8$  aproximadamente). Poderíamos considerar nessa análise temporária, aparecimento de coexistência de duas até três estratégias no sistema, geralmente a estratégia  $S_{II}$  é a que se extingue de forma rápida e as outras três coexistem temporariamente como se vê na

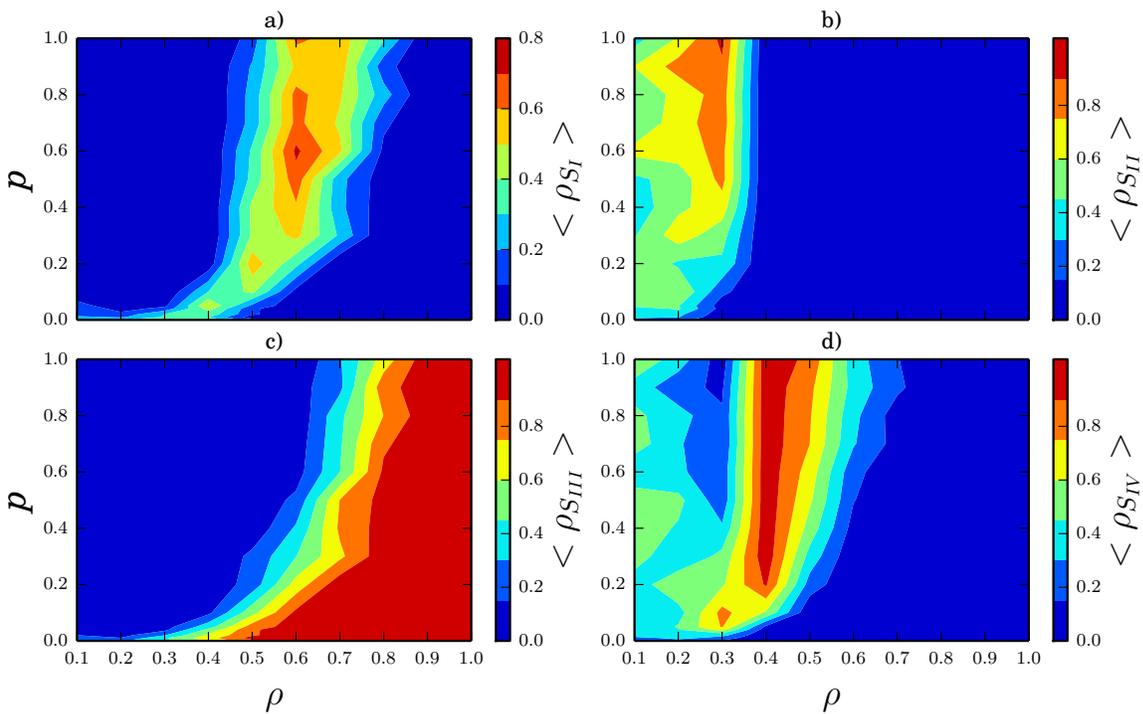


Figura 5.6: Mapa de cor da dependência das estratégias no espaço  $(\rho, p)$ , para isso foram feitas 100 realizações para diferentes configurações iniciais e promediadas nos últimos 500 passos do tempo. Nos usamos,  $L = 100$ ,  $\rho_{S_I}^0 = \rho_{S_{II}}^0 = \rho_{S_{III}}^0 = \rho_{S_{IV}}^0 = 1/4$ , e oferta inicial  $\langle O_{(0)} \rangle = 0.5$ .

fig.5.6. Mas insistimos aqui a tempos realmente longos,  $S_{III}$  deve dominar. Admitimos que essa análise de coexistência temporária é tênue e algo mais robusto deve ser tratado para estudar esse problema. Contudo tal análise mostra que a estratégia  $S_{III}$  tem algum confronto com outras estratégias e pode ser quantificada.

## Parte II

# Oscilações globais e mobilidade no jogo de bem público opcional

# Capítulo 6

## Jogos de Bem Público Opcional com Mobilidade

Nesta parte da tese exploramos simulações Monte Carlo aplicadas ao jogo de bem público opcional estudando o aparecimento de coexistência e oscilações pela introdução da mobilidade dos jogadores.

A introdução dos loners no jogo de bem público parece não gerar os padrões conhecidos por pedra-papel-tesoura de oscilações globais em redes onde os jogadores não podem se mover. Contudo, não é claro que a mobilidade gerará tais padrões de coexistência e alguns trabalhos mostram alguns resultados nesta direção, mas as conclusões com respeito aos padrões RPS devem ser melhor investigados. Nesta tese mostramos que o jogo de bem público opcional apresenta estas oscilações e mais, propomos uma forma simples de quantificar tais oscilações que pode ser facilmente aplicadas a outros paradigmas em teoria de jogos. A seguir, descrevemos o modelo de uma forma algorítmica e os detalhes para se medir as oscilações globais no jogo de bem público.

### 6.1 Descrevendo o modelo e sua implementação

Para o estudo da evolução da cooperação em Jogos de Bem Público Opcional na rede com mobilidade, consideramos uma topologia de rede de dimensão  $d = 2$  com  $N = L \times L$  vértices ( onde  $L$  é a dimensão linear da rede quadrada) que possui um número de conexões  $k = 4$  (rede quadrada com contato de primeiros vizinhos),  $k_i$  indica o número de vizinhos do vértice  $i$  (na rede quadrada ordenada  $k_i \leq k = 4$ ). Cada elemento  $i \in N$  pode estar em um dos três estados  $s(x) : \{ C$  (cooperador),  $D$  (desertor),  $L$  (loner)  $\}$  para qualquer passo de tempo. Os três estados são distribuídos aleatoriamente

na rede em proporções iguais a  $1/3$  para cada um.

A estratégia do elemento  $i$  consiste no método que ele adota para mudar ao estado que tem melhor sucesso no jogo em cada passo de interação do mesmo. Este método segue os seguintes passos:

1. Seleciona-se aleatoriamente um elemento da rede, a fim de estudar a interação deste elemento com sua vizinhança local.
2. Cada elemento contribui para o fundo comum de acordo a seu estado (L,C,D). Os cooperadores na sua vizinhança contribuem ao fundo comum um custo de investimento  $c$ . Os desertores participam, mas sem contribuir ao bem publico. Enquanto os solitários (loners) não participam do jogo, mas recebem um ganho fixo  $\sigma$ . Mas sem perda de generalidade, podemos normalizar o custo do investimento  $c$  e o lucro da estratégia dos loners,  $\sigma$ , igual à unidade.
3. Calculam-se os payoffs de acordo com a seguinte função:

$$P(s(x)) = \begin{cases} \frac{rcN_C}{(N_C+N_D)} - c & : s(x) = C \\ \frac{rcN_C}{(N_C+N_D)} & : s(x) = D \\ \sigma & : s(x) = L \end{cases} \quad (6.1)$$

onde  $r$  é o fator de multiplicação no Jogo de Bem Público Opcional,  $N_c$ ,  $N_d$  e  $N_l$  são os números de participantes que adotam as estratégias  $C$ ,  $D$  e  $L$  respectivamente na vizinhança local,  $c$  é o custo do investimento no Bem Público Opcional e finalmente  $\sigma$  é o lucro fixo dos *loners*. Se definimos  $s_i = 0$  para  $C$ ,  $s_i = 1$  para  $D$  e  $s_i = 2$  para  $L$ ,  $c = \sigma = 1$ , podemos reduzir a formula 3 à seguinte função:

$$P(s) = \frac{rN_C}{(N_C + N_D)} \left[ 1 - \frac{s(s-1)}{2} \right] + s - 1$$

4. Seleciona-se de forma aleatória um elemento  $j$  da vizinhança de  $i$ . Se o elemento  $j$  é um sítio vazio, o agente localizado no sítio  $i$  ocupa esse sitio com uma probabilidade  $p$ , caso contrario, se o lucro do elemento  $i$  satisfaz a condição:  $P(s(i)) < P(s(j))$ , então a estratégia do elemento  $j$  é copiada. Caso contrário, o elemento  $i$  permanece em seu estado.

5. Depois de  $N$  atualizações, incrementa-se unitariamente o tempo.

Temos que sinalizar que o mecanismo da mobilidade e atualização das estratégias implementado neste capítulo, é diferente ao considerado no cap. 5, já que o presente jogo é assíncrono e sequencial na mobilidade diferente do que consideramos no jogo do ultimato reativo na rede, que é síncrono e não sequencial a mobilidade.

## 6.2 Simulações Numéricas

A seguir apresentamos os resultados obtidos em simulações numéricas para nosso modelo de Jogo de Bem Público Opcional com Mobilidade *JB POM*. Nesta parte de nosso trabalho, utilizamos a atualização assíncrona aleatória dos vértices da rede (ver capítulo 1): em cada interação um vértice da rede é aleatoriamente escolhido para jogar e atualiza sua estado  $s(x)$ : C,D ou L, de acordo com os passos 1 à 4 da Seção anterior. De acordo com o item 5 acima, cada passo de tempo corresponde a  $N$  interações ( $N$  jogos e  $N$  atualizações), de forma que em média cada vértice atualiza uma vez. Em todas nossas simulações, as condições iniciais são aleatórias, ou seja, a distribuição na rede é aleatória de  $1/3$  da densidade total de agentes  $\rho$  que está no estado  $C$ ,  $1/3$  do estado  $D$  e  $1/3$  do estado  $L$ .

As interações locais são reproduzidas por uma vizinhança de Von Neumann  $k = 4$  ([83, 17]), ou seja, o vértice a ser atualizado interage com seus quatro vizinhos (no máximo) mais próximos caracterizando uma vizinhança local. O tamanho da vizinhança determina o número máximo de participantes nos *JB POM* [47, 57].

Com o objetivo de pesquisar o comportamento coletivo do sistema, primeiramente se mede a evolução da fração (ou densidade) de indivíduos nas três possíveis estratégias:  $\rho_c = \frac{N_c}{(1-\rho)L^2}$ ,  $\rho_d = \frac{N_d}{(1-\rho)L^2}$  and  $\rho_l = \frac{N_l}{(1-\rho)L^2}$ , cooperadores, desertores, e solitários respectivamente, desde que  $(1 - \rho)L^2 = L^2 - N$  é o número de agentes na rede.

Começamos apresentando a evolução de  $\rho_c(t)$ ,  $\rho_d(t)$ , e  $\rho_l(t)$  considerando que  $N_{mc} = 10^4$  *mcs* como se observa na figura Fig.6.2. Nós escolhemos duas situações particulares: a)  $\rho = 0.4$  and b)  $\rho = 0.6$ , ambas considerando  $r = 5$  e  $p = 0.005$  com uma população inicial de  $\rho_c^0 = \rho_d^0 = \rho_l^0 = 0.333$ . Esta figura revela dois típicos padrões da nossa análise : na fig.6.2a): Coexistência das três estratégias de forma cíclica. Na fig.6.2b), não existe

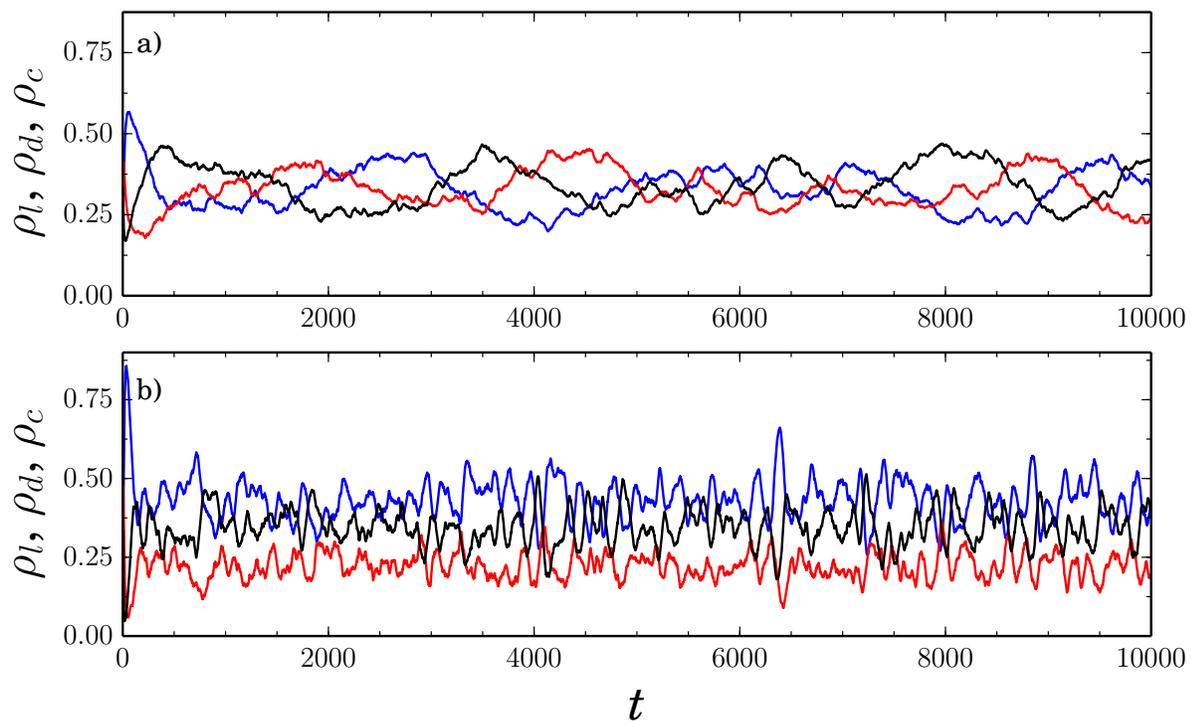


Figura 6.1: Evolução temporal da da fração das estratégias no Jogo de Bem Público Opcional com varios valores de mobilidade e diluição de agentes. Apresentamos a fração de cooperadores (linha negra), desertores (linha vermelha) e solitários (linha azul) para  $p = 0.005$ . Nós usamos,  $L = 100$ ,  $\rho_c^0 = \rho_d^0 = \rho_l^0 = 1/3$ .

dominância cíclica sobre as estratégias.

Agora vamos a explorar os efeitos da vacância da rede e da mobilidade dos jogadores e como isso está relacionado com a emergência dos padrões de pedra-papel-tesoura no jogos de bem público opcional. Aqui a ideia é simples: por variar a densidade de jogadores e a mobilidade do sistema podemos encontrar pequenas flutuações que conduzem a grandes e sustentadas oscilações, assim vão emergindo estados cíclicos no comportamento global do sistema, onde a fração de cada estratégia deve variar de forma cíclica. Mas como medimos a densidade da ocorrência dos padrões de pedra-papel-tesoura no sistema de uma maneira simples?

Descrevemos o método utilizado para caracterizar a dominância cíclica no jogo (quando há ciclos do tipo L-C-D-L, etc).<sup>1</sup>Esta medida, foi realizada mediante o sequenciamento de imprimir caracteres: L (loner), C (cooperador) ou D (desertor), em cada valor máximo que cada uma das frequências alcança sobre as outras dois (seja L, C ou D) em cada instante do tempo. Uma amostra de realização desta caracterização está ilustrada na Figura 6.2.

Desta maneira precisamos identificar que, para um valor dado de probabilidade  $p$ , e de  $\rho$  as oscilações periódicas seguem esta sequência de pedra-papel-tesoura no Jogo de Bem Público Opcional com mobilidade. Para isto nos baseamos em três condicionamentos:

1. Há um período durante o qual cada estado domina.
2. Os três estados (L,C,D) aparecem.
3. A sequência de pedra-papel-tesoura se repete (exemplo: LLLCCDDLLL,etc).

Por exemplo, na sequencia de 40 términos: CCLLLCCDDDLCCCCDLCCCCDDDDC-CCLLCCCCDDCCC, ele tem 4 ciclos do tipo LCD, onde a densidade é igual a  $\alpha = (24 + 8)/40 = 0.8$ , onde nós definimos  $\alpha$  como o porcentagem dos ciclos de pedra-papel-tesoura no jogo de bem público opcional com mobilidade, e é definido como:

$$\alpha = \frac{\sum_j t_j}{t_{\max}}$$

---

<sup>1</sup>Daqui em diante, nos vamos referir aos ciclos de pedra-papel-tesoura no Jogo de Bem Público Opcional como ciclos L-C-D *Loner-Cooperador-Desertor*, para ter concordância nos termos assumidos no artigo submetido do mesmo título deste capítulo.

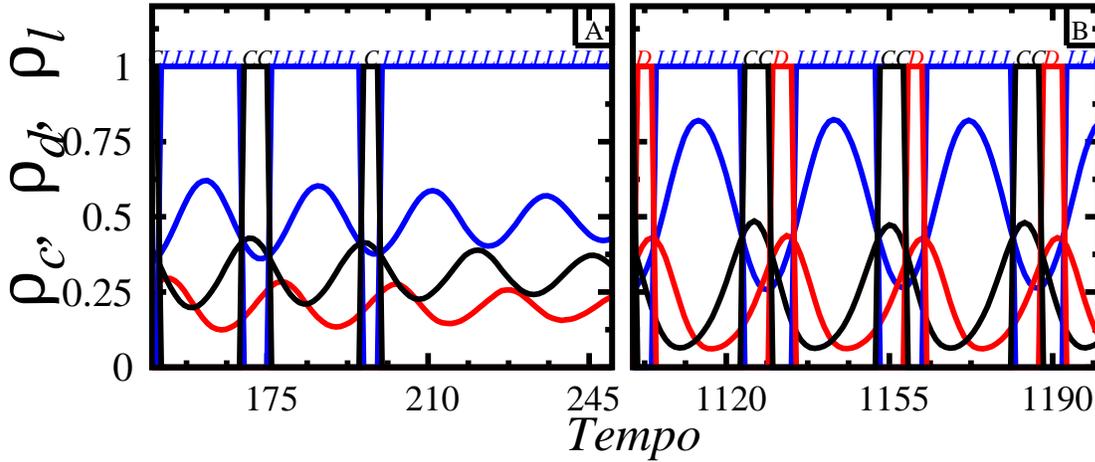


Figura 6.2: Forma de como foi feita a caracterização na evolução temporal das oscilações periódicas da dinâmica de *pedra-papel-tesoura* para o **Jogo de Bem Público Opcional na rede com mobilidade**, (de forma ideal) : densidade de cooperadores  $\rho_c$  (linha preta), desertores  $\rho_d$  (linha vermelha) e solitários (*loners*)  $\rho_l$  (linha azul), e com condições iniciais:  $\rho_c^o = \rho_d^o = \rho_l^o = 0.333$ . Figura **A**) No caso no que um intervalo do tempo se tem coexistência mas não dominância cíclica, **B**) no caso no que um determinado intervalo do tempo se tem só dominância cíclica (LDCLCDLCD, etc). Tomado do ref. [84].

onde  $\{t_i\}_{i=1}^m$  onde denotamos o conjunto de todas as sequencias LCD encontradas em todas as series temporais de tamanho  $t_{\max}$ , onde é claro que  $\sum_j t_j \leq t_{\max}$ , qual conduz a  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Agora apresentamos os gráficos onde amostra que  $\langle \rho_l \rangle$ ,  $\langle \rho_c \rangle$ ,  $\langle \rho_d \rangle$  e  $\alpha$  como função de  $r$ , o factor de multiplicação do jogo de Bem Público Opcional observado na figura 6.3. As médias:

$$\langle \rho_i \rangle = \frac{1}{t_{\max}} \sum_{t=1}^{t_{\max}} \rho_i(t),$$

onde  $i = l, c$ , ou  $d$ , e  $\alpha$  foram calculadas onde se considerou:  $t_{\max} = 10^4$  mcs para calcular as médias.

Esta figura corrobora qualitativamente que existe dominância cíclica para baixas densidades e alta mobilidade. Para altas mobilidades podemos observar que a presença é ausente, só temos regime de coexistência. Este comportamento pode ser melhor explorado a dependência das médias das densidades (L,C,D) como função de  $\rho$  como podemos observar no seguinte figura 6.4

A ideia que baixa densidade e alta mobilidade promove os ciclos pedra-papel-tesoura

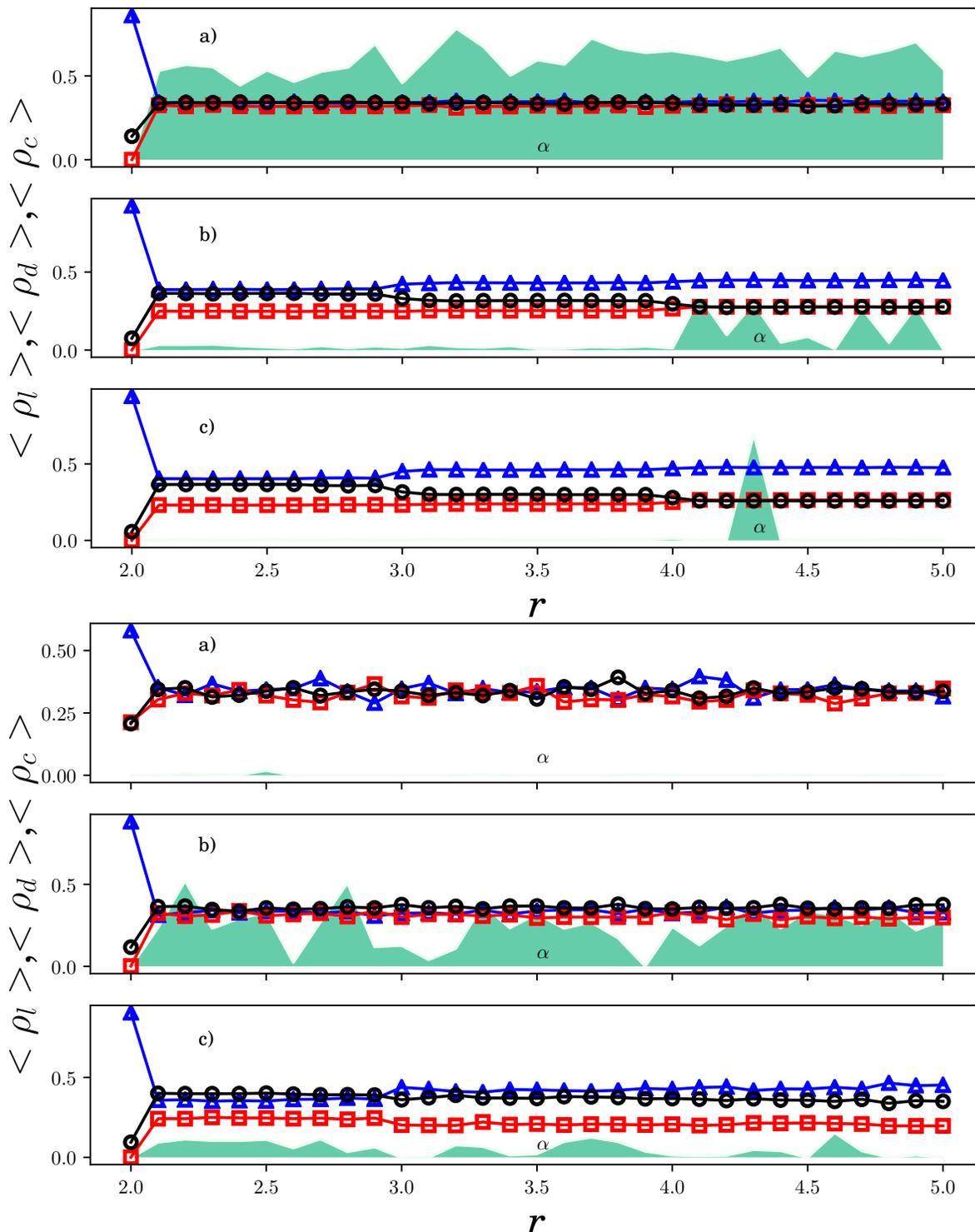


Figura 6.3: Média das densidades das estratégias em função do fator de multiplicação  $r$  do Jogo de Bem Público Opcional, onde se tem a media das densidades de cooperadores (círculos pretos), desertores (quadrados azuis), e loners (triângulos azuis) e a proporção de ciclos pedra-papel-tesoura ( $\alpha$ ) (green zone) como função do fator de multiplicação  $r$ . A figura de acima corresponde a  $p = 0.60$ , com os correspondentes valores de densidade (a)  $\rho = 0.1$ , (b)  $\rho = 0.5$ , (c)  $\rho = 0.6$ . O gráfico de abaixo corresponde ao caso de  $p = 0.001$  para os mesmos valores de densidade previamente mencionados.

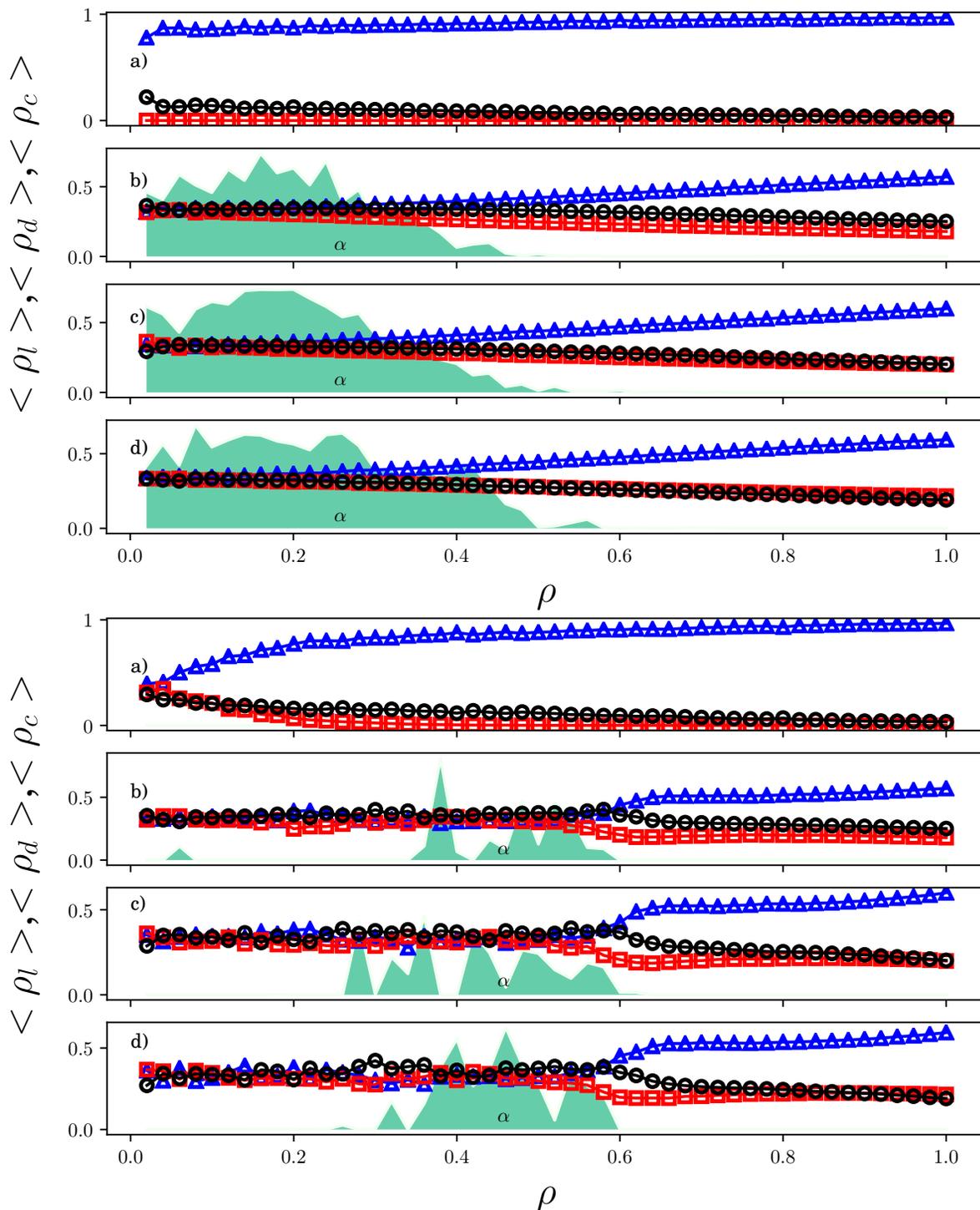


Figura 6.4: Média das densidades das estratégias em função da diluição total de agentes na rede  $\rho$  no Jogo de Bem Público Opcional com mobilidade, onde se tem a media das densidades de cooperadores (círculos pretos), desertores (quadrados vermelhos) e loners (triângulos azuis) e a proporção dos ciclos pedra-papel-tesoura ( $\alpha$ ) (zona verde) como função da diluição de agentes total na rede  $\rho$ . A figura da acima corresponde a  $p = 0.60$  considerando quatro diferentes valores do fator de multiplicação (a)  $r = 2$ , (b)  $r = 3$ , (c)  $r = 4$  and (d)  $r = 5$ . A figura de abaixo corresponde ao caso de mobilidade baixa  $p = 0.001$  com os mesmos valores de  $r$  previamente mencionados.

parece ser qualitativamente corroborado por esta figura. Na figura 6.4, também apresenta que para  $r > 2$  os padrões de RPS começam a emergir. Porém, uma alternativa para aclarar este ponto, é observar a proporção de  $\alpha$  correspondente ao espaço de fase  $(\rho, p)$ . Portanto, nós elaboramos mapas de cor que apresentam como esta proporção muda em todas as combinações de mobilidade e ocupação quais podem ser observados na fig. 6.5. Nessa figura tem uma amostra de 3 diferentes sementes respectivamente, onde se vê a robustez das zonas obtidas para diferentes sementes, podemos observar que se mostra similar padrões para três diferentes sementes. Por uma questão de simplicidade, nós separamos o espaço de fase em duas diferentes regiões: I) qual corresponde a zona onde se tem uma alta probabilidade de encontrar ciclos de tipo pedra-papel-tesoura (esquerda), e II) onde somente se tem coexistência das três estratégias sem presença da dominância cíclica (direita).

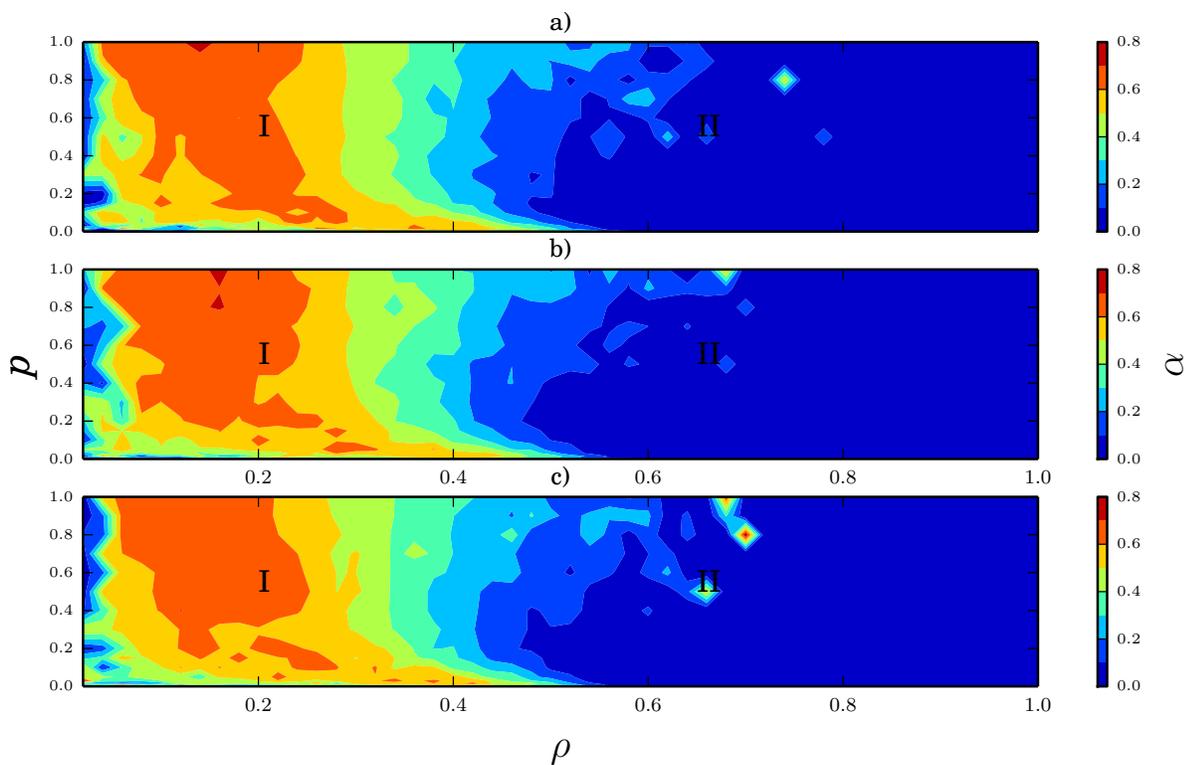


Figura 6.5: Mapa de cores que mostra a densidade dos ciclos pedra-papel-tesoura  $\alpha$  para cada par  $(\rho, p)$ , considerando  $r = 5$ . Os três diferentes gráficos correspondem a diferentes sementes.

Então, vamos pegar dois típicos pontos em duas diferentes zonas para explorar seu comportamento típico. Para a zona I nós fixamos os parâmetros  $\rho = 0.20$ , e  $p = 0.5$  enquanto a zona II nós escolhemos os valores  $\rho = 0.65$ , and  $p = 0.5$  e nós construímos a

figura (Fig. 6.6) que amostra a evolução temporal das densidades das estratégias para as duas situações onde se apresenta coexistência sem ciclos pedra-papel-tesoura (figura de abaixo) e coexistência com ciclos de dominância cíclica (figura do médio).

Os *snapshots* correspondem aos tempos a)  $t = 20$  b)  $t = 200$ , c)  $t = 400$ , d)  $t = 1000$  e)  $t = 2000$ , e f)  $t = 5000$  passos de MC. Nós claramente observamos o comportamento com dominância cíclica para o caso da região I, enquanto isso não se apresenta na região II. Portanto, podemos concluir que uma simples classe de mobilidade, os padrões de pedra-papel-tesoura podem ser observados com baixa ocupação e alta mobilidade, mas os padrões ocorrem continuamente.

Finalmente nós estudamos os efeitos de  $L$  (tamanho do sistema) na densidade dos ciclos pedra-papel-tesoura. Para esse propósito, elaboramos a dependência de  $\alpha(\rho)$  como função de  $\rho$ , para diferentes tamanhos da rede:  $L = 100, 200, 400$  e  $500$  qual é apresentado na figura principal da fig. 6.7 em escala mono-log. É importante notar, que observamos grandes flutuações para  $\alpha(\rho)$  por considerar diferentes tamanhos do sistema. Mas, a fim de realizar um análise de tamanho finito, nós propusemos a usar a densidade de dominância cíclica integrado sobre diferentes valores de  $\rho$ , quais nós definimos como massa de densidade de ciclos de pedra-papel-tesoura “*RPS mass*” que é calculada de acordo com a seguinte equação:

$$S(L) = \int_0^1 \alpha(\rho, L) d\rho \quad (6.2)$$

a qual é obtido pela formula da regra de Simpson:

$$S(L) \approx \frac{\alpha(0,L) + \alpha(1,L)}{3} \Delta\rho + \frac{2}{3} \Delta\rho \sum_{i=1}^n \alpha(\rho_{2i-1}, L) + \frac{4}{3} \Delta\rho \sum_{i=1}^{n-1} \alpha(\rho_{2i}, L) \quad (6.3)$$

Nós sabemos que erros numéricos na aproximação 6.2 por 6.3 qual é do ordem de  $O(1/n^4)$ , porém nós obtemos os resultados da fig.6.7 usando cinco diferentes sementes e assim obtemos as barras de erros para cada  $\alpha(\rho_i, L)$ , representados por o erro padrão  $\sigma_\alpha(\rho_i)$ . Agora, por considerar somente os erros estatísticos e não os numéricos como principais fontes, obtemos a formula de propagação de incerteza como:

$$\sigma_S^2 = \frac{\sigma_{\alpha(0)}^2 + \sigma_{\alpha(1)}^2}{3} \Delta\rho + \frac{2\Delta\rho}{3} \sum_{i=1}^n \sigma_{\alpha(\rho_{2i-1})}^2 + \frac{4\Delta\rho}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{\alpha(\rho_{2i})}^2 \quad (6.4)$$

Nós realizamos a gráfica de  $S(L)$  como função de  $L^{-1}$  qual é mostrada na figura de baixo insertada na fig.6.7 com barra de erros calculada de acordo com a equação Eq.

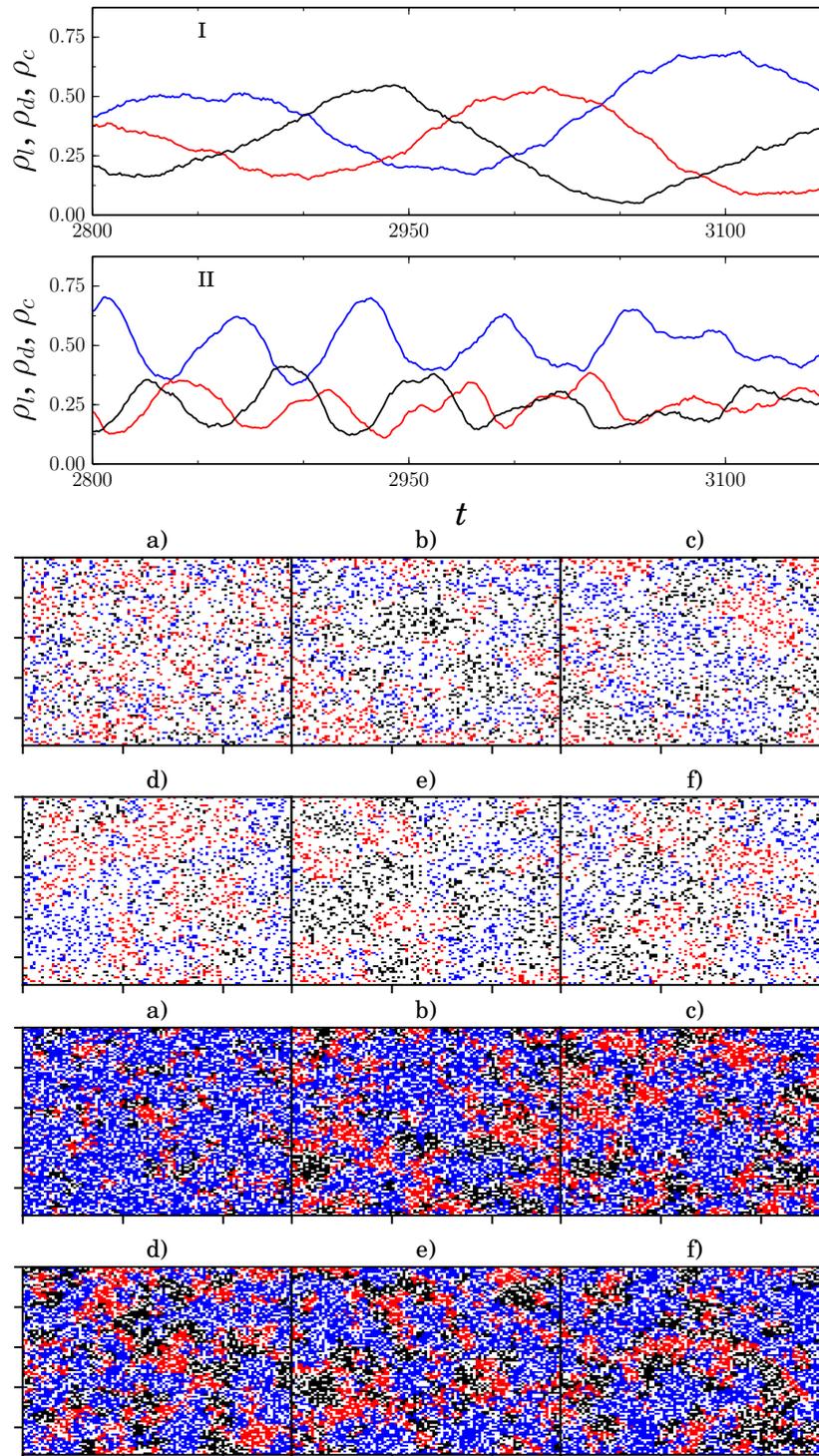


Figura 6.6: **Snapshots e evolução temporal para diferentes pontos no gráfico de cores.** Figura da acima: Evolução temporal de dois diferentes pontos no mapa de cores: I  $\rho = 0.2$  e II:  $\rho = 0.5$  com  $p = 0.5$ . Figura de médio: Sequência de snapshots para diferentes evoluções temporais para o ponto I:  $\rho = 0.2$  e  $p = 0.5$ . Finalmente a figura de baixo mostra a mesma sequência para o ponto II:  $\rho = 0.5$  e  $p = 0.5$ .

6.4. Nós podemos observar uma forte dependência no tamanho do sistema. A figura de acima mostra o caso em que  $L = 400$  in escala lineal só para observação.

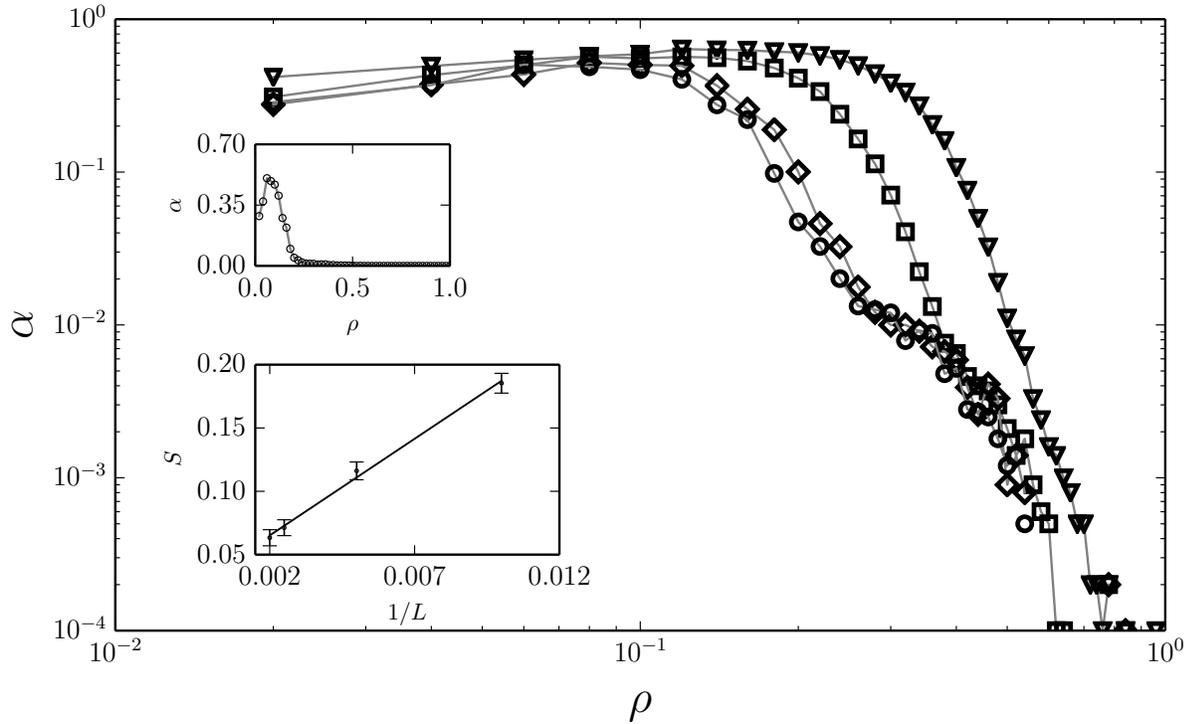


Figura 6.7: **Efeitos de tamanho finito.** A Densidade de ciclos  $RPS$  ( $\alpha$ ) como função da ocupação na rede  $\rho$  em escala log-log. Nós mostramos os gráficos para diferentes tamanhos do sistema:  $L = 100$  (triângulos)  $L = 200$  (quadrados),  $L = 400$  (triângulos invertidos) and  $L = 500$  (círculos). Nós escolhemos o fator de multiplicação  $r = 3.0$  e mobilidade  $p = 0.5$ . O gráfico inserido na parte da cima corresponde ao caso de  $L = 400$  em escala linear, onde não existem flutuações observadas. O gráfico de baixo mostra a *massa de RPS*  $S(L)$  como função de  $L$ .

Nós observamos que a massa de  $RPS$  decresce como  $L$  de acordo com o comportamento algébrico. Portanto, nossas conclusões conduzem a que as ocorrências dos ciclos de dominância cíclica no  $JBPO$  podem ser observados não no regime de percolação de ocupação quando a mobilidade é incrementada no sistema. Nossos *snapshots* mostram tais fenômenos por amostrar que a mobilidade possibilita os encontros entre os jogadores que começam com o processo de  $RPS$ . O fenômeno não ocorre em diluições altas e o processo é contínuo, é dizer, que os ciclos de  $RPS$  tem regiões preferenciais com baixas ocupações que muda de maneira suave de semente a semente. Alguns eventos esporádicos de ciclos de dominância cíclica se podem encontrar no regime de percolação ( $\rho > 0.6$ ), mais alguns não são observados em todos os diferentes mapas de cor corres-

pondentes à diferentes sementes.

## Parte III

# Conclusões, discussões e resultados futuros

---

Neste trabalho estudamos em detalhes o jogo do ultimato em sua versão pavloviana (reativa). Olhamos o problema tanto na versão de campo médio, quanto para o jogo na rede, quanto no jogo simulado via um autômato celular probabilístico através de simulações Monte Carlo. No caso de campo médio podemos elencar nossas contribuições

1. Mostramos resultados para a variância do ganho em diferentes instantes de tempo, para diferentes valores de  $\varepsilon$  (valor de decremento/incremento da oferta) no caso em que a aceitação ocorre com probabilidade fixa. Mostramos que em todos os casos temos um crescimento dessa variância, mas ela se dá sob estágios diferentes no tempo. Cabe salientar que um resultado interessante é que a soma de todas as correlações ( $\Phi$ ) entre todos os pares de instantes de tempo até um certo tempo  $t$  se anula para um particular instante de tempo que depende da oferta inicial.
2. Diferentemente do caso onde a aceitação ocorre com probabilidade fixa, no caso da aceitação dependente da oferta, a oferta tende a convergir no estado estacionário, via aproximação de campo médio, para o valor justo ( $O_\infty = 1/2$ ) e isso ocorre independente da oferta inicial. Isto não ocorre no caso da aceitação com probabilidade fixa. A variância do ganho também converge para valores estacionários, mas há um fenômeno interessante dela atingir um máximo e depois diminuir até se estacionar, por exemplo, para ofertas iniciais muito altas.
3. No caso do jogo na rede enumeramos inicialmente algumas contribuições importantes:
  - 3.1. Mostramos que para baixas conectividades o jogo tende a fugir do resultado esperado por campo médio. Contudo, o jogo assume o comportamento de campo médio para grandes conectividades.
  - 3.2. Cabe salientar que a melhor prescrição para os jogadores na rede (independente da conectividade), é só aumentar as propostas quando há um nítido cenário favorável (todos os vizinhos aceitam) (prescrição III). Isso proporciona um altruísmo que acaba sendo benéfico a todos os jogadores da rede. Mostramos que a ideia de ganhar menos mais vezes adicionada a reciprocidade dos jogadores, concomitantemente ao lema do “dando mais para receber mais” é o segredo do sucesso da prescrição III.

- 
- 3.3. Mostramos que nossas simulações indicam que para uma coleção de características empregadas: propostas de negociação, diferentes tipos de topologia, diferentes tamanhos de sistema e diferentes valores de parâmetros de controle – coordenação  $k$  e desordem  $p$ , o sistema evolui para mostrar emergência de altruísmo ou na pior das hipóteses de comportamento justo.
  - 3.4. A desordem favorece que muitos indivíduos consigam participar mais do jogo que outros e, portanto, com chances de acúmulos maiores de ganhos. Isso pode favorecer ao aparecimento de grupos de indivíduos com maior riqueza acumulada o que é refletido no coeficiente de Gini.
  - 3.5. É importante salientar que a situação estacionária da oferta, depende da desordem e da conectividade mas não da topologia em si, sem efeitos de seleção natural.
4. Realizamos um estudo adicional onde incluindo seleção natural no modelo do ultimato reativo, mostramos que a mobilidade faz decrescer a oferta média. Ao mesmo tempo, embora haja coexistência temporal das prescrições (nesse caso com status de estratégia e portanto sendo copiadas), a prescrição III (só reduzir a oferta quando todos os vizinhos aceitarem) domina a longos tempos.
  5. Quanto aos jogos de bem público opcional com mobilidade, ressaltamos as seguintes contribuições:
    - 5.1. A influencia da mobilidade nos jogos de bem público opcional, na emergência dos ciclos pedra-papel-tesoura, corresponde a dois cenários: baixa mobilidade e alta densidade, como também de alta mobilidade e baixa densidade de ocupação dos sítios na rede regular.
    - 5.2. Nós também exploramos as relações numéricas entre o fator de multiplicação de jogo de bem público  $r$  e os padrões de ciclos de pedra-papel-tesoura.
    - 5.3. Realizamos um estudo de tamanho finito, propondo um parâmetro de ordem que pode ser descrito como a massa de dominância cíclica  $S$ . Este parâmetro que é a integração da densidade de padrões RPS, sobre todas as possíveis ocupações para um tamanho de rede, decai algebricamente a medida que o tamanho do sistema vai se incrementando. Nosso trabalho quantifica a

emergência dos padrões de ciclos pedra-papel-tesoura em redes diluídas, ou somente padrões de coexistência, os quais aparecem com mobilidade simples, e diferencia dos outros trabalhos que exploram mais complexos mecanismos de difusão para estabelecer frequências estáveis no estado de equilíbrio (ver por exemplo [71]). Nesta parte de nosso trabalho que corrobora outros resultados no contexto de jogos de pedra-papel-tesoura os quais sugerem que a biodiversidade sob certas condições é promovida pela mobilidade no sistema (ver por exemplo [63]).

# Referências Bibliográficas

- [1] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 81:591–646, May 2009.
- [2] T. Schelling. *Micromotives and Microbehavior*. Norton, Norton, 1 edition, 1978.
- [3] Y. Bar-Yam. *Dynamics of complex systems*. Addison-Wesley studies in nonlinearity. Westview Press, 2003.
- [4] X. Castell. *Collective phenomena in social dynamics: consensus problem, ordering dynamics and language competition*. PhD Thesis. Universitat de les Illes Balears, 2010.
- [5] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of "small world" networks. *Nature*, 393:440–442, Jun. 1998.
- [6] A. L. Barabási and R. Albert. Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 286(5439):509–512, Oct. 1999.
- [7] Jesús Gómez-Gardeñes, Irene Reinares, Alex Arenas, and Luis M. Floría. Evolution of Cooperation in Multiplex Networks. *Scientific Reports*, 2, Aug. 2012.
- [8] Matthew O. Jackson. *Social and Economic Networks*. Princeton University Press, Aug. 2008.
- [9] J. V. Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [10] B. Wydick. *Games in Economic Development*. Cambridge University Press, 2008.
- [11] Daron Acemoglu and James Robinson. *Why Nations Fail: the Origins of Power, Prosperity, and Poverty*. Crown Publishers, New York, 2012.

- [12] R. Axelrod. *Handbook of Computational Economics Vol. 2: Agent-Based Computational Economics*, ch. *Agent-based modeling as a bridge between disciplines*. North Holland/Elsevier, 2006.
- [13] Robert Axelrod. Advancing the art of simulation in the social sciences. *Complex.*, 3(2):16–22, Nov. 1997.
- [14] J. Maynard Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982.
- [15] M. A. Nowak and R. M. May. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, 359:826–829, 1992.
- [16] Christoph Hauert. Effects of space in 2x2 games. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 12(7):1531–1548, 2002.
- [17] C. Hauert and G. Szabó. Game Theory and Physics. *Am. J. Phys.*, 73:405–414, May 2005.
- [18] C. Hauert. Cooperation, Collectives and Especialization. *Advances in Complex Systems*, 9(4), 2006.
- [19] M. A. Nowak and K. Sigmund. Bacterial game dynamics. *Nature*, 418(6894):138–9, 2002.
- [20] Enock Almeida, Roberto da Silva, and Alexandre Souto Martinez. Strategies generalization and payoff fluctuation optimization in the iterated ultimatum game. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 412(0):54 – 65, 2014.
- [21] Werner Guth, Rolf Schmittberger, and Bernd Schwarze. An experimental analysis of ultimatum bargaining. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 3(4):367–388, 1982.
- [22] Michael Kosfeld. Individual decision making and social interaction. Other publications tistem, Tilburg University, School of Economics and Management, 1999.
- [23] A. Rubinstein. *Modeling Bounded Rationality*. Zeuthen lecture book series. MIT Press, 1998.

- [24] S. Tadelis. *Game Theory: An Introduction*. Princeton University Press, 2013.
- [25] K.G. Binmore. *Game Theory and the Social Contract: Playing fair*. Number v. 1 in Binmore, Ken: Game theory and the social contract. MIT Press, 1994.
- [26] H. Gintis. *Game theory evolving: a problem-centered introduction to modeling strategic behavior*. Princeton University Press, 2000.
- [27] Joseph Henrich. Does Culture Matter in Economic Behavior? Ultimatum Game Bargaining among the Machiguenga of the Peruvian Amazon. , 90, 2000.
- [28] I.P. Pavlov and G.V. Anrep. *Conditioned Reflexes*. Dover Publications, 2003.
- [29] C Wedekind and M Milinski. Human cooperation in the simultaneous and the alternating prisoner's dilemma: Pavlov versus generous tit-for-tat. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93(7):2686–2689, 1996.
- [30] Martin Nowak and Karl Sigmund. A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit-for-tat in the prisoner's dilemma game. *Nature*, 364(6432):56–58, 1993.
- [31] R. Axelrod. *The Evolution of Co-operation*. Penguin Books, 1981.
- [32] R. Axelrod. *The Complexity of Cooperation*. Princeton University Press, 1997.
- [33] R. Dias. *Introdução à Sociologia*. Prentice-Hall Brasil, 2009.
- [34] M. Shubik. *Game Theory and Related Approaches to Social Behavior*. John Wiley and Sons, 1964.
- [35] Robert Axelrod. Effective Choice in the Prisoner's Dilemma. *Journal of Conflict Resolution*, 24:3–25, 1980.
- [36] Robert Axelrod. More Effective Choice in the Prisoner's Dilemma. *Journal of Conflict Resolution*, 24:379–403, 1980.
- [37] M. A. Nowak. Five Rules for the Evolution of Cooperation. *Science*, 314:1560–1563, Dec. 2006.
- [38] J.H. Kagel, editor. *The handbook of experimental economics*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.

- [39] C. Hauert. Spatial effects in social dilemmas. *Journal of Theoretical Biology*, 240(4):627–636, 2006.
- [40] N.G. Mankiw. *Macroeconomics*. Worth Publishers, 2007.
- [41] E. Fehr and S. Gächter. Cooperation and punishment in public goods experiments. *American Economic Review*, 90:980–994, Sep. 2000.
- [42] A. Szolnoki and M. Perc. Reward and cooperation in the spatial public goods game. *CoRR*, abs/1010.5771, 2010.
- [43] G. Szabo and C. Hauert. Evolutionary prisoner’s dilemma games with optional participation. *Phys.Rev.E*, 66:062903, 2002.
- [44] C. Hauert, S. De Monte, J. Hofbauer, and K. Sigmund. Volunteering as red queen mechanism for cooperation in public good games. *Science*, 296:1129–1132, May 2002.
- [45] M. A. Nowak. *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*. Harvard University Press, Harvard, 1 edition, 2006.
- [46] K. Sigmund. *The Calculus of Selfishness*. Princeton University Press, 2010.
- [47] J. R. Minkel. The Physics of Loners. *Phys. Rev. Focus*, 10:10, Sep 2002.
- [48] L. Fisher. *Rock, paper, scissors: game theory in everyday life*. Basic Books, Basic, 1 edition, 2008.
- [49] Martin A. Nowak and Karl Sigmund. Evolutionary dynamics of biological games. *Science*, 303(5659):793–799, 2004.
- [50] J. Hofbauer, P. Schuster, and K. Sigmund. A note on evolutionary stable strategies and game dynamics. *Journal of Theoretical Biology*, 81(3):609–612, 1979.
- [51] J. Hofbauer and K. Sigmund. *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge University Press, 1998.
- [52] G. Mailath. Introduction: Symposium on evolutionary game theory. *Journal of Economic Theory*, 57(2):259–277, Aug. 1992.

- [53] J. Maynard Smith and G. R. Price. The logic of animal conflict. *Nature*, 246(5427):15–18, 1973.
- [54] C. Hauert, S. De Monte, J. Hofbauer, and K. Sigmund. Replicator dynamics for optional public goods games. *J. Theor. Biol.*, 218:187–194, Apr. 2002.
- [55] C. Hauert, N. Haiden, and K. Sigmund. The Dynamics of Public Goods. *Discrete and Continuos Dynamical Systems-Series B*, 4(3):575–587, 2004.
- [56] A. P. Müller. *Importância do tamanho da comunidade na competição cíclica de microorganismos*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Física, May 2012.
- [57] G. Szabó and C. Hauert. Phase Transitions and Volunteering in Spatial Public Goods Games. *Phys. Rev. Lett.*, 89:118101, Aug 2002.
- [58] Gven Demirel, Roshan Prizak, P. N. Reddy, and Thilo Gross. Cyclic dominance in adaptive networks. *Eur. Phys. J. B*, pages 1–8, 2011.
- [59] T. Sasaki and T. Unemi. Replicator dynamics in public goods games with reward funds. *Journal of Theoretical Biology*, 287(0):109 – 114, 2011.
- [60] B. Sinervo and C. M. Lively. The rock-paper-scissors game and the evolution of alternative male strategies. *Nature*, 380:240–243, 1996.
- [61] Benjamin C. Kirkup and Margaret A. Riley. Antibiotic-mediated antagonism leads to a bacterial game of rock-paper-scissors in vivo. *Nature*, 428(6981):412–414, Mar. 2004.
- [62] D. Semmann, H.J. Krambeck, and M. Milinski. Volunteering leads to rock-paper-scissors dynamics in a public goods game. *Nature*, 425(6956):390–393, 2003.
- [63] T Reichenbach, M Mobilia, and E Frey. Mobility promotes and jeopardizes biodiversity in rock-paper-scissors games. *Nature*, 448:1046–1049, 2007.
- [64] E. Frey and T. Reichenbach. Bacterial Games. In H. Meyer-Ortmanns and S. Thurner, editors, *Principles of Evolution*, The Frontiers Collection, pages 297–329. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

- [65] Roberto da Silva and Henrique A. Fernandes. A study of the influence of the mobility on the phase transitions of the synchronous sir model. *eprint arXiv:1411.7105*, 244(4), 2014.
- [66] Anatolij Gelimson, Jonas Cremer, and Erwin Frey. Mobility, fitness collection, and the breakdown of cooperation. *Phys. Rev. E*, 87:042711, Apr 2013.
- [67] M. Enquist and O. Leimar. The evolution of cooperation in mobile organisms. *Animal Behaviour*, 45(4):747 – 757, 1993.
- [68] Mendeli H. Vainstein, Ana T.C. Silva, and Jeferson J. Arenzon. Does mobility decrease cooperation? *Journal of Theoretical Biology*, 244(4):722 – 728, 2007.
- [69] T Reichenbach, M Mobilia, and E Frey. Self-organization of mobile populations in cyclic competition. *J Theor Biol*, 254:368–383, 2008.
- [70] D. Helbing and W. Yu. Migration as a mechanism to promote cooperation. *Advances in Complex Systems*, 11(04):641–652, 2008.
- [71] Zhong L., Xu W., Shi Y., and Qiu T. Coupled dynamics of mobility and pattern formation in optional public goods games. *Chaos, Solitons and Fractals*, 47:18 – 26, 2013.
- [72] Maud D. Gibbons, Colm O’Riordan, and Josephine Griffith. *Follow Flee: A Contingent Mobility Strategy for the Spatial Prisoner’s Dilemma*, pages 34–45. Springer International Publishing, Cham, 2016.
- [73] A. Traulsen and M. A. Nowak. Evolution of cooperation by multilevel selection. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 103(29):10952–10955, 2006.
- [74] Raul Marinho Gregorin. Jogo do ultimato (ultimatum game). <https://www.youtube.com/watch?v=YXfEv-xEWtE>, Outubro 2008.
- [75] M. E. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45:167–256, Jun. 2003.
- [76] R. Albert and A. L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74:47–97, Jan 2002.

- [77] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- [78] P. Erdős and A. Rényi. On Random Graphs. *Publicationes Mathematicae*, 6:290–297, 1959.
- [79] Roberto da Silva, Gustavo A. Kellermann, and Luis C. Lamb. Statistical fluctuations in population bargaining in the ultimatum game: Static and evolutionary aspects. *Journal of Theoretical Biology*, 258(2):208 – 218, 2009.
- [80] C. P. Roca, J. A. Cuesta, and A. Sánchez. Evolutionary game theory: Temporal and spatial effects beyond replicator dynamics. *Phys. Life Rev.*, 6(4):208 – 249, 2009.
- [81] K Sigmund, E Fehr, and M Nowak. The economics of fair play. *Sci Am*, 2002.
- [82] J. Iranzo, , J. Román, and A. Sánchez. The spatial Ultimatum game revisited. *Journal of Theoretical Biology*, 278(2):1–10, Jul. 2011.
- [83] C. Hauert and G. Szabó. Prisoner’s dilemma and public goods games in different geometries: Compulsory versus voluntary interactions. *Complexity*, 8(4):31–38, 2003.
- [84] P. Valverde. Efeitos da Topologia de Rede num modelo de Jogo de Bem Público Opcional. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Física, Nov. 2012.

## Parte IV

**Artigos referente a este trabalho**

# Capítulo 7

## Artigo publicado

“ Randomness and arbitrary coordination in the reactive ultimatum game”

Publicado na revista: Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat., 2016, Jul 16  
(apresentado nesta tese por direitos de autor só na versão publicada no arxiv)

# Randomness and Arbitrary Coordination in the Reactive Ultimatum Game

Roberto da Silva<sup>1</sup>, Pablo Valverde<sup>1</sup>, Luis C. Lamb<sup>2</sup>

*1-Institute of Physics, Federal University of Rio Grande do Sul, Av. Bento Gonçalves, 9500, Porto Alegre, 91501-970, RS, Brazil  
E-mail: rdasilva@if.ufrgs.br, pblvalverde@gmail.com*

*2-Institute of Informatics, Federal University of Rio Grande do Sul, Av. Bento Gonçalves, 9500, Porto Alegre, 91501-970, RS,  
Brazil E-mail: lamb@if.ufrgs.br*

---

## Abstract

The ultimatum game explains and is a useful model in the analysis of several effects of bargaining in population dynamics. Darwin's theory of evolution - as introduced in game theory by Maynard Smith - is not the only important evolutionary aspect in a evolutionary dynamics, since complex interdependencies, competition, and growth should be modeled by, for example, reactive aspects. In biological models, computationally or analytically considered, several authors have been able to show the emergence of cooperation with stochastic or deterministic dynamics based on the mechanism of copying the best strategies. On the other hand, in the ultimatum game the reciprocity and the fifty-fifty partition seems to be a deviation from rational behavior of the players under the light of the Nash equilibrium concept. Such equilibrium emerges from the punishment of the responder who generally tends to refuse unfair proposals. In the iterated version of the game, the proposers are able to improve their proposals by adding an amount thus making fairer proposals. Such evolutionary aspects are not properly Darwinian-motivated, but they are endowed with a fundamental aspect: they reflect their actions according to value of the offers. Recently, a reactive version of the ultimatum game where the acceptance occurs with fixed probability was proposed. In this paper, we aim at exploring this reactive version of the ultimatum game where the acceptance by the players depends on the offer. In order to do so, we analyze two situations: (i) mean field and (ii) by considering the players inserted within the networks with arbitrary coordinations. In the proposed model we not only explore situations of occurrence of the fifty-fifty steady-state, in both homogeneous and heterogeneous populations, but also explore the fluctuations and payoff distribution characterized by the Gini coefficient of the population. We then show that the reactive aspect, here studied, thus far not analyzed in the evolutionary game theory literature can unveil an essential feature for the convergence to fifty-fifty split. Our approach concerns four different policies to be adopted by the players. In such policies the evolutionary aspects do not work through a Darwinian copying mechanism, but by following a policy that governs the increase or decrease of their offers according to the response of the result - i.e. acceptance or refusal. Moreover, we present results where the acceptance occurs with fixed probability. Our contribution is twofold: we present both analytical results and MC simulations which in turn are useful to design new controlled experiments in the ultimatum game in stochastic and deterministic scenarios.

---

## 1. Introduction

Game theory analyzes several important aspects of the Economical and Biological sciences such as bargaining, cooperation and other social features. The theory plays an important role in explaining the

interaction between individuals in homogeneous and heterogeneous populations, with or without spacial structure, in which agents negotiate/combat/collaborate via certain protocols. The full understanding of cooperation between individuals as an emergent collective behavior remains an open challenge [1, 2, 3]. In this context, bargaining is an important feature has called attention of many authors: two players must divide an amount (resources, money, food, or other interesting quantity) and the disagreement (or no agreement) between them in a given deal could mean that both lose something. This dilemma motivates a simple game that mimics the bargaining between two players - the Ultimatum Game.

In this game, firstly proposed by Güth *et al.* [4], one of the players proposes a division (the proposer) and the second player (the responder) can either accept or reject it. If the responder (the second player) accepts it, the values are distributed according to the division established by the proposer. Otherwise, no earning is distributed to both players.

Real situations in western societies suggest that unfair proposals are refused for either fairer or even more selfish amounts. However some isolated societies as Machiguenga localized at Peruvian Amazon seem to show a behavior opposed to such fact, which suggests a more altruistic behavior [5]. On the other hand, scientists have studied and simulated artificial societies where players confront each other according the ultimatum game protocol. In order to consider a simple evolutionary probabilistic model where unsatisfactory proposals are refused, in this paper we propose to study a model where accepting depends on proposal.<sup>1</sup>

Although it is rationally better for the responder to accept any offer, offers below one third of the available amount to be shared are often rejected [6]. The responder punishes the proposer up to the balance between proposal and acceptance in the iterated game. In general, values around a half of the total amount are accepted [6, 7]. Other interesting experimental results suggest that high-testosterone men reject low offers in the ultimatum game [8]. Nowak *et. al* [9] showed that the evolution of fairness, similarly to the evolution of cooperation, is linked to reputation by considering a simple memory mechanism: fairness will evolve if the proposer can obtain some information on what deals the responder has accepted in the past .

Our contribution goes precisely along this line of research. In this manuscript, we extend the memory-1 model proposed by one of the authors in [10] that considers the acceptance with fixed probability, by putting this probability variable and assigning the offer  $O_t$ , at time  $t$ , that is a number belonging to  $[0, 1]$  and performing the game in graphs with arbitrary homogeneous and heterogeneous coordination.

---

<sup>1</sup>This game scenario is common and expected in real situations, at least in western societies, illustrated even when children negotiate chocolate coins (see e.g. this video <https://www.youtube.com/watch?v=YXfEv-xEWtE>).

In this reactive and iterated version of the ultimatum game, the players are able to correct their offers by adding/subtracting an amount to the offers in order to make fairer proposals. Such mechanisms, which we assume are an essential ingredient for the convergence to fifty-fifty partitions seems to be discarded in typical evolutionary game theory based on probabilistic Darwinian copies. By performing a detailed study, we investigate the game both analytically and via Monte Carlo (MC) simulations under four different policies about the increase or decrease of the offer under different levels of greed. Moreover, we present results about temporal correlations in the model with fixed probability for a suitable comparison with the model where the offer is time-dependent.

The remainder of paper is organized as follows. Next, we define the reactive model and its mean-field approximation. Then, we show how the model can be run in networks with arbitrary coordination. In Section 2 we present the first part of our results corresponding to the mean-field approximation. In Section 5 we present the results for the game with arbitrary coordination via equation integrations. Particularly for  $k = 4$  we explore the randomness effects by considering MC simulations in small world networks. A general and analytical formula is obtained for the stationary average offer and a complete study of the fluctuations and distribution of the payoffs are performed considering homogeneous and heterogeneous populations. Then we present a comparative analysis between mean-field and the model on networks. Finally, we conclude and comment on the relevance of the reactive ultimatum game, in particular on the experimental evidence of the effect of fairer offers in different international societies.

## 2. Modeling and Mean-field Approximation: Analyzing the correlations

In the reactive ultimatum game, when a player (proposer) performs an offer  $O_t \in [0, 1]$  at time  $t$ , it can be accepted or rejected by the other player (i.e. the responder). Let us think that such acceptance occurs with probability  $p_t$ . Let us consider two simple situations:

1.  $p_t = p$  fixed, and does not change along time;
2.  $p_t = O_t$ , i.e., the acceptance occurs with higher probability as the offer is more generous.

When the offer is rejected it will take the proposer to change its expectations increasing its proposed offer  $\varepsilon$ . On the other hand when it is accepted the proposer decreases its proposal by a quantity  $\varepsilon$ . Here  $\varepsilon$  is a rate of offer change. We can consider the mean-field regime as the average under all different time series of parameters of two players interacting according to a dynamics. We also can imagine it as parameters averaged by the different players in a large population, where the players interact at each time  $t$  (denoted

by authors in refs. [11], and [12] as one ‘turn’) by pairs composing a perfect matching with  $N$  players (for the sake of simplicity  $N$  is an even number) randomly composed. In this pairing, no player is left out of the game, with each individual playing once by turn, by construction.

Both ways provide similar ways to compute averaged parameters evolving along time, since in this reactive formulation of the ultimatum game, the interaction depends only on the proposal (offer). The first case ( $p$  fixed) were partially explored in [10] but some important points involving the existing correlations, have not been studied yet.

First, we would like to revisit the problem  $p_t = p$  to describe the possible correlations which were not studied in [10]. In this case the clustering effects are not important, and in the next subsection we revisit some results for  $p_t = p$  to deduce some semi-analytical formulas for the sum of temporal correlations of the payoff. Next, in the following subsection, we define the model for  $p_t = O_t$ , and we deduce some relevant results by mean-field approximation. Our results show that independently from  $O_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} O_t = 1/2$ .

### 2.1. Reactive Ultimatum Game With $p_t = p$ : Mean-field approximations

Let us consider the case where the responder always accepts the offer with a fixed probability  $p \in [0, 1]$  [10], and the offer rejection occurs with probability  $1 - p$ . This assumption allows us to obtain analytical results in the one-step memory iterated game. Given  $\varepsilon$  and  $p$ , in the  $i$ -th round, the average offer is:

$$\langle O_i \rangle = O_0 + i\varepsilon(1 - 2p), \quad (1)$$

where  $i = 0, 1, 2, \dots, t$ , since in each round the average offer is modified by  $\langle (\Delta O)_i \rangle = (1 - p)\varepsilon - p\varepsilon = \varepsilon(1 - 2p)$ . In the  $i$ -th round, the responder average payoff is  $\langle g_i \rangle = p \langle O_i \rangle = pO_0 + ip\varepsilon(1 - 2p)$ . Thus, after  $t$  iterations, the average of the cumulative payoff is

$$\langle W_r \rangle(t) = \sum_{i=0}^t \langle g_i \rangle = pO_0(t+1) + \frac{t(t+1)}{2} p(1 - 2p)\varepsilon \quad (2)$$

and there is a probability  $p$ , for a given  $n$ , that maximizes the cumulative responder gain  $\langle W_r \rangle(t)$  is given by  $p^* = \frac{1}{4} \left[ \frac{2y_0}{t\Delta y} + 1 \right]$ . Similarly we have that for proposer the average cumulative payoff is given by  $\langle W_p \rangle(t) = p(1 - O_0)(t+1) - \frac{t(t+1)}{2} p(1 - 2p)\varepsilon$ .

In order to calculate the variance of the cumulative gain, the task is not so simple. The result was obtained in [10] but only this computed result was shown. Basically, this is not only an analytical task. We suppose that variance is four-degree polynomial  $p$  with at least two roots:  $p = 0$  and  $p = 1$ . So the variance is considered as a polynomial  $\text{var}(W_r) = ap(p-1)(p-p_1)(p-p_2)$  where  $a$ ,  $p_1$  and  $p_2$  are constants to be determined. By observing the variance for an arbitrary number of rounds (numerically) for three different

$p$  values  $p = 1/2$ ,  $p = 1/4$  and  $p = 3/4$  we solve a linear system to find  $a$ ,  $p_1$  and  $p_2$  and we can check the semi-empirical analytical formula obtained in [10]:

$$\begin{aligned} \text{var}(W_r)(t) = & (t+1)p(1-p)O_0^2 + 4t(t+1)p(p-1)\left(p - \frac{1}{4}\right)O_0\varepsilon + [2t(t+1)(2t-1)p^3(1-p) \\ & - 2t(t^2-1)p^2(1-p) + \frac{t(t+1)(2t+1)p(1-p)}{6}]\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (3)$$

and similarly, we can obtain the variance of the cumulative gain of the proposer:  $\text{var}(W_p) = (t+1)p(1-p)(1-O_0)^2 - 4t(t+1)p(p-1)\left(p - \frac{1}{4}\right)(1-O_0)\varepsilon + [2t(t+1)(2t-1)p^3(1-p) - 2t(t^2-1)p^2(1-p) + \frac{t(t+1)(2t+1)p(1-p)}{6}]\varepsilon^2$ .

Implicitly, our difficulty in analytically obtaining a formula to the variance of the gain is related to the the fact that there is no control of correlation in the problem. Here aim at providing a more detailed exploration in order to understand the correlations involved in such a problem.

Since for example  $\text{var}(W_r)(t) = \sum_{t'=0}^t \langle g_{t'}^2 \rangle - \langle g_{t'} \rangle^2 + \sum_{t'=0}^t \sum_{t''=0}^t (\langle g_{t'} g_{t''} \rangle - \langle g_{t'} \rangle \langle g_{t''} \rangle) = \sum_{t'=1}^t \text{var}(g_{t'}) + \sum_{t'=1}^t \sum_{t''=1}^t \text{corr}(g_{t'}, g_{t''})$ . Let us think about the first part of sum: we can write that  $\langle g_{t'}^2 \rangle = p \langle O_{t'}^2 \rangle$ . But, how can one compute  $\langle O_{t'}^2 \rangle$ ? Since  $\langle O_{t'}^2 \rangle = (1-p) \langle (O_{t'-1} + \varepsilon)^2 \rangle + p \langle (O_{t'-1} - \varepsilon)^2 \rangle$ , we have that  $\langle O_{t'}^2 \rangle = \varepsilon^2 + \langle O_{t'-1}^2 \rangle + 2\varepsilon(1-2p) \langle O_{t'-1} \rangle$ . We can easily conclude, by iterating such equation, that:  $\langle O_{t'}^2 \rangle = O_0^2 + 2(1-2p)O_0t\varepsilon + (t(t-1)(1-2p)^2 + t)\varepsilon^2$ . So  $\langle g_{t'}^2 \rangle = p[O_0^2 + 2(1-2p)O_0t\varepsilon + (t(t-1)(1-2p)^2 + t)\varepsilon^2]$  and  $\langle g_{t'} \rangle^2 = p^2 [O_0^2 + 2(1-2p)O_0t\varepsilon + (1-2p)^2t^2\varepsilon^2]$ . Expanding the terms we have that

$$\begin{aligned} \langle g_{t'}^2 \rangle - \langle g_{t'} \rangle^2 = & p(1-p)O_0^2 + 2p(1-p)(1-2p)O_0t\varepsilon \\ & + [p(t(t-1)(1-2p)^2 + t) - p^2(1-2p)^2t^2]\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (4)$$

By performing the sum we obtain:

$$\begin{aligned} \overline{\text{var}(W_r)}(t) = & \sum_{t'=0}^t \langle g_{t'}^2 \rangle - \langle g_{t'} \rangle^2 = \left( 2p^2(1-p)t(t+1) + \frac{1}{6}p(1-p)(1-2p)^2t(2t+1)(t+1) \right) \varepsilon^2 \\ & + p(1-p)(1-2p)O_0t(t+1)\varepsilon + p(1-p)O_0^2(t+1) \end{aligned} \quad (5)$$

This formula, can be used to estimate the magnitude of correlations since from Eq. 3 we have an exact form (empirically obtained) for the variance. So by measuring this magnitude we can define the following:

$$\Phi(t) = \sum_{t'=0}^t \sum_{t''=0}^t \text{corr}(g_{t'}, g_{t''}) \quad (6)$$

By some algebra derivations we obtain:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= 2t(t+1)p^2(p-1)O_0\varepsilon + \\ &\quad \left( -\frac{8}{3}p^4t^3 + \frac{8}{3}p^4t + \frac{10}{3}p^3t^3 - \frac{10}{3}p^3t - \frac{2}{3}p^2t^3 + \frac{2}{3}p^2t \right) \varepsilon^2\end{aligned}\quad (7)$$

So we can study this function in detail. Since the offer  $O_i$  does not touch the limits (0 or 1) there is a lower bound for the number of iterations necessary for the system to reach such limits:  $n_c = \min(\lfloor y_0/\varepsilon \rfloor, \lfloor (1-y_0)/\varepsilon \rfloor)$ .

## 2.2. Reactive Ultimatum Game With $p_t = O_t$ : Mean-field approximations

In more realistic situations, the acceptance depends on the offer. So, a natural choice is setting the accepting probability as exactly the value of the offer. In this case, considering a simple "mean-field" approximation where we change  $O_t$  by  $\langle O_t \rangle$ , a recurrence relation for the offer can be written as:

$$\begin{aligned}\langle O_{t+1} \rangle &= \langle O_t \rangle - \langle O_t \rangle \varepsilon + (1 - \langle O_t \rangle) \varepsilon \\ &= (1 - 2\varepsilon) \langle O_t \rangle + \varepsilon\end{aligned}$$

By iterating this equation we obtain:

$$\begin{aligned}\langle O_t \rangle &= (1 - 2\varepsilon)^t O_0 + \varepsilon \sum_{k=0}^{t-1} (1 - 2\varepsilon)^k \\ &= (O_0 - 1/2)(1 - 2\varepsilon)^t + 1/2\end{aligned}\quad (8)$$

and  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle O_t \rangle = 1/2$ . Since  $(1 - 2\varepsilon)^t = 1 - 2\varepsilon t + O(\varepsilon^2)$  for intermediate  $t$ -values, since  $\varepsilon$  is a small number we have the asymptotical behavior:

$$\langle O_t \rangle \sim \begin{cases} (O_0 - 1/2)(1 - 2\varepsilon t) + 1/2 & t \rightarrow 0 \\ 1/2 & t \rightarrow \infty \end{cases}\quad (9)$$

Therefore an approximation for the average gain of the responder at time  $t$  is  $\langle g_t \rangle \approx \langle O_t \rangle^2 = (O_0 - 1/2)^2 (1 - 2\varepsilon)^{2t} + 1/4 + (O_0 - 1/2)(1 - 2\varepsilon)^t$ . That asymptotically gives

$$\langle g_t \rangle \sim \begin{cases} O_0^2 + (2 - 4O_0)\varepsilon O_0 t & t \rightarrow 0 \\ (O_0 - 1/2)^2 + (O_0 - 1/2) + 1/4 & t \rightarrow \infty \end{cases}$$

In our approximation, in this Pavlovian version the offer must converge to a fair proposal. This result although simple, deserves a lot of discussion in the literature and distortions of this behavior must be better understood since it has an important role in the Pavlovian version of the ultimatum game.

So a formula for the average of the cumulative gain at time  $t$  in mean field approximation can be written,

since the acceptance probability is the owner's offer value:

$$\begin{aligned}\langle W_r(t) \rangle &= \sum_{t'=0}^t \langle O_{t'} \rangle^2 \\ &= \left(O_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{(2\varepsilon-1)^{2t+2}-1}{4\varepsilon(\varepsilon-1)} + \left(O_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1-(1-2\varepsilon)^{t+1}}{2\varepsilon} + \frac{t+1}{4}\end{aligned}\quad (10)$$

Again, we have two regimes: for  $t \rightarrow 0$ , asymptotically we have  $\langle W_r(t) \rangle \sim \left(O_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{(t+1)}{1-\varepsilon} + (t+1) + \frac{t+1}{4} = \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{1-\varepsilon} \left(O_0 - \frac{1}{2}\right)^2\right) (1+t)$ . For  $t \rightarrow \infty$ ,  $\langle W_r(t) \rangle \sim \left(O_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4\varepsilon(1-\varepsilon)} + \frac{1}{2\varepsilon} \left(O_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{t+1}{4}$  which determines a crossover between two different linear behaviors.

If we extract the correlations, the variance of the cumulative gain:

$$\begin{aligned}\overline{\text{var}(W_r)}(t) &= \text{var}(W_r)(t) - \sum_{t'=0}^{t-1} \sum_{t''=0}^{t-1} (\langle O_{t'} O_{t''} \rangle - \langle O_{t'} \rangle \langle O_{t''} \rangle) \\ &= \sum_{t'=0}^{t-1} \langle g_{t'}^2 \rangle - \langle g_{t'} \rangle^2 \\ \langle O_t^2 \rangle &\approx (1 - \langle O_{t-1} \rangle) \langle (O_{t-1} + \varepsilon)^2 \rangle + \langle O_{t-1} \rangle \langle (O_{t-1} - \varepsilon)^2 \rangle\end{aligned}$$

After some algebraic calculations:

$$\langle O_t^2 \rangle = \varepsilon^2 + \langle O_{t-1}^2 \rangle + 2\varepsilon \langle O_{t-1} \rangle - 4\varepsilon \langle O_{t-1} \rangle^2$$

what after the iteration and some algebra leads to:

$$\begin{aligned}\langle O_t^2 \rangle &= \langle O_{t-1}^2 \rangle + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \left[ (O_0 - 1/2) (1 - 2\varepsilon)^{t-1} + 1/2 \right] - 4\varepsilon \left[ (1 - 2\varepsilon)^{t-1} + 1/2 \right]^2 \\ &= O_0^2 + \varepsilon^2 t - (O_0 - 1/2) \left[ 1 - (1 - 2\varepsilon)^t \right] - \frac{(O_0 - 1/2)^2}{(1-\varepsilon)} \left[ 1 - (1 - 2\varepsilon)^{2t} \right]\end{aligned}\quad (11)$$

Following exactly what we considered previously, we can approximate

$$\begin{aligned}\langle g_{t'}^2 \rangle &\approx \langle O_{t'} \rangle \langle O_{t'}^2 \rangle \\ \langle g_{t'} \rangle^2 &\approx \langle O_{t'} \rangle^4\end{aligned}$$

It is important to see that

$$\text{var}(g_t) = \langle g_t^2 \rangle - \langle g_t \rangle^2 \sim \frac{1}{2} (O_0^2 + \varepsilon^2 t - (O_0 - 1/2) - \frac{(O_0 - 1/2)^2}{(1-\varepsilon)}) - \frac{1}{16}\quad (12)$$

for  $t \rightarrow \infty$ , which leads to a linear behavior in time for the variance differently from case where accepting occurs with fixed probability. In this case  $\text{var}(g_t)$  has a quadratic leader term in time.

We can evaluate numerically the expression

$$\overline{\text{var}(W_r)} \approx \sum_{t'=0}^t \langle O_{t'} \rangle \left( \langle O_{t'}^2 \rangle - \langle O_{t'} \rangle^3 \right) \quad (13)$$

and naturally to compute  $\Phi(t)$  as performed for the case of the fixed  $p$  (equation 2) for the particular case where acceptance depends on the offer, but for this case we have to compute  $\text{var}(W_r)$  numerically by a Monte Carlo simulation differently from the case where the acceptance occurs with fixed value of  $p$  (3) and computing  $\overline{\text{var}(W_r)}$  by using 11.

### 3. Extending the Model to Networks

In this second part we analyze the model considering coordination and randomness. In this case we consider that players are inserted into a network (or graph) by considering the reactive ultimatum game with acceptance probability equal to offer  $O_t$ .

To extend our results to networks, we consider four different policies that governs the update dynamics of the player offers in the network, which works as a greedy level. Here, the term *conservative* must be understood by the policy: *if you are not sure about the acceptance of your offer in the neighborhood, you will increase your offer; otherwise you will decrease it.*

Our simulations consider a simple initial condition: first, an initial offer  $O_0$  is assigned equally to all players. Such initial condition is initially adopted for the sake of simplicity.

At  $t$ -th simulation step, each player  $i = 1, \dots, N$  in the network, where  $N$  is the number of nodes, offers a value for its  $k_i$  neighbors. Each neighbor accepts or not the proposal with probability  $p_a(t) = O_t^{(i)}$ , where  $O_t^{(i)}$  is the offer of  $i$ -th player at time  $t$ . Since we compute the number of players that accept the proposal,  $n_a(i)$ , we have the possible policies:

1. **Conservative:** *Ensures that more than half of the neighbors accept the proposal in order to reduce the offer*- If  $n_a(i) > k_i/2$ , so  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$ , otherwise  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$ ;
2. **Greedy:** *One acceptance is enough to reduce the offer* - If  $n_a(i) \geq 1$ , so  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$ , otherwise  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$ ;
3. **Highly Conservative:** *All neighbors must accept the proposal to reduce the offer* - If  $n_a(i) = k_i$ , so  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$ , otherwise  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$ ;
4. **Moderate:** *If exactly half of the neighbors accept it, then the proposal is reduced* -  $n_a(i) \geq k_i/2$ , , so  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} - \varepsilon$ , otherwise  $O_{t+1}^{(i)} = O_t^{(i)} + \varepsilon$ ;

Let us consider a particular and interesting case, where the coordination of all nodes is fixed and made equal to  $k$  (regular graph). For example, in the first case we have,

$$\begin{aligned}\langle O_{t+1} \rangle &\approx \langle O_t \rangle - \varepsilon (\Pr(n_a > k/2 | \langle O_t \rangle) - \Pr(n_a \leq k/2 | \langle O_t \rangle)) \\ &= \langle O_t \rangle + \varepsilon (2\Pr(n_a \leq k/2 | \langle O_t \rangle) - 1)\end{aligned}$$

But

$$\Pr(n_a \leq k/2 | \langle O_t \rangle) = \sum_{m=0}^{k/2} \frac{k! \langle O_t \rangle^m (1 - \langle O_t \rangle)^{k-m}}{m!(k-m)!}$$

and so

$$\langle O_{t+1} \rangle \approx \langle O_t \rangle + \left[ 2 \sum_{m=0}^{k/2} \frac{k! \langle O_t \rangle^m (1 - \langle O_t \rangle)^{k-m}}{m!(k-m)!} - 1 \right] \varepsilon \quad (14)$$

We can iterate this recurrence relation and compare with results from Monte Carlo simulations in networks with fixed coordination  $k$ . Monte Carlo simulations can also be performed to analyze the deviations of this formula when the average degree is  $k$  in disordered networks. In section 5 we analyze, for example, the deviations from formula 14 when we introduce effects of randomness  $p$  in small worlds built from rings and two-dimensional lattices.

In this same section we present studies about payoff distribution for  $k = 4$  and analyses of stationary offer  $\langle O_\infty \rangle$  for arbitrary  $k$  in heterogeneous population of players, i.e., we consider different partition of players that play under four different policies.

#### 4. Results Part I: Mean-field Regime

In the sequel, we present our main results in the mean-field regime.

##### 4.1. Mean-field for acceptance with fixed probability $p$

In the previous section, we observe that in such case, the offer increases or decreases linearly with time. The cumulative payoff (wealth) of the responder ( $\langle W_r \rangle(t)$ ) also is easily calculated by Eq. 2. For  $p = 1/2$ , we can verify that  $\langle W_r \rangle$  grows linearly in time, independently from rate  $\varepsilon$ . The quadratic term is relevant for  $p \neq 1/2$ . This simple calculation suggests that the variance of cumulative gain should also be calculated. Here a problem occurs: The authors in [10] have analyzed this particular case of the game. They calculated it by using a semi-empirical method to obtain  $\text{var}(W_r)(t)$ , fitting a polynomial in  $p$  which has two obvious roots:  $p = 0$  and  $p = 1$ , resulting in equation 3. This is so because the authors avoid the correlations of the problem, the only reason that prohibits an analytical derivation of this formula by direct methods. But why

is this important? Because we can use the semi-empirical formula for the variance obtained by [10] given by Equation 3 in order to study the correlations of the problem.

By performing such correlations, first of all, it is important to observe the behavior of variances of the payoff at time  $t$  of responder:  $var(g_t) = \langle g_t^2 \rangle - \langle g_t \rangle^2$ . We know how to calculate this value as can be seen in Eq. 4. Here our first study is to observe the influence of the changing rate of  $\varepsilon$ .

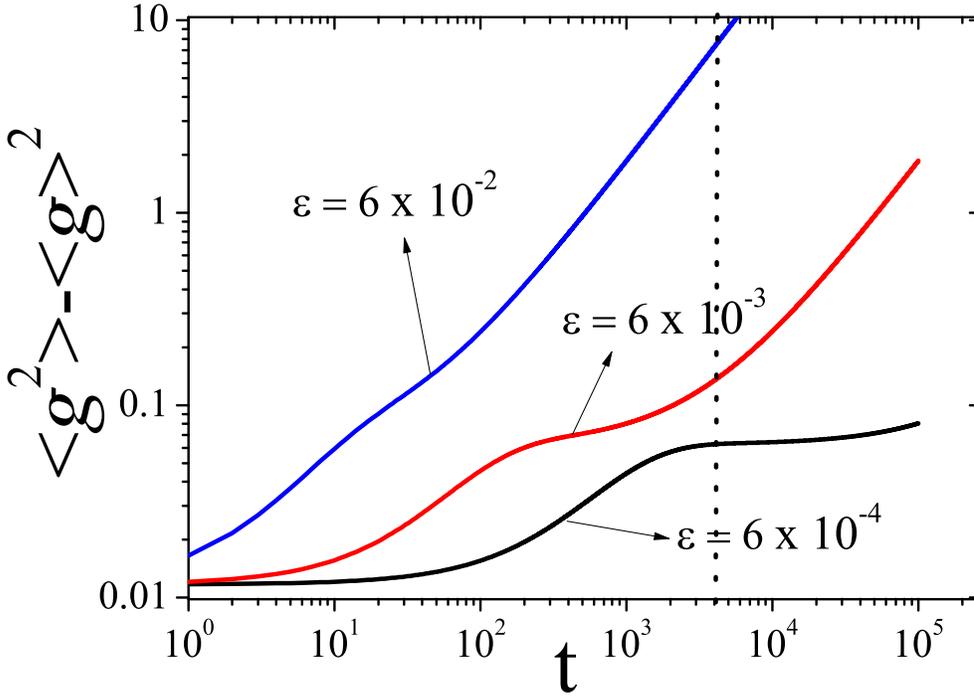


Figure 1: Variance of the payoff of responder for  $p = 1/2$  and  $O_0 = 1/4$ , for different  $\varepsilon$ -values according to Eq. 4 We can observe in this log-log plot different stages of growing as function of time.

We can observe that  $var(g_t)$  increases with time, as Fig. 1. A convexity change is more sensitive to higher  $\varepsilon$ -values. The sum of these local variances corresponds to a part of  $var(W_r)(t)$ , denoted by  $\overline{var(W_r)}(t)$  which was analytically obtained by Eq. 5. So we compute  $\Phi(t) = var(W_r)(t) - \overline{var(W_r)}(t)$  estimated by equation 7 which corresponds to the sum of all correlations of the payoffs until time  $t$ , i.e., a kind of “cumulative” correlation.

In Fig. 2 we can check the behavior of  $|\Phi(t)|$ . The points  $t^*(O_0)$  where  $\Phi = 0$ , give  $var(W_r)(t^*) =$

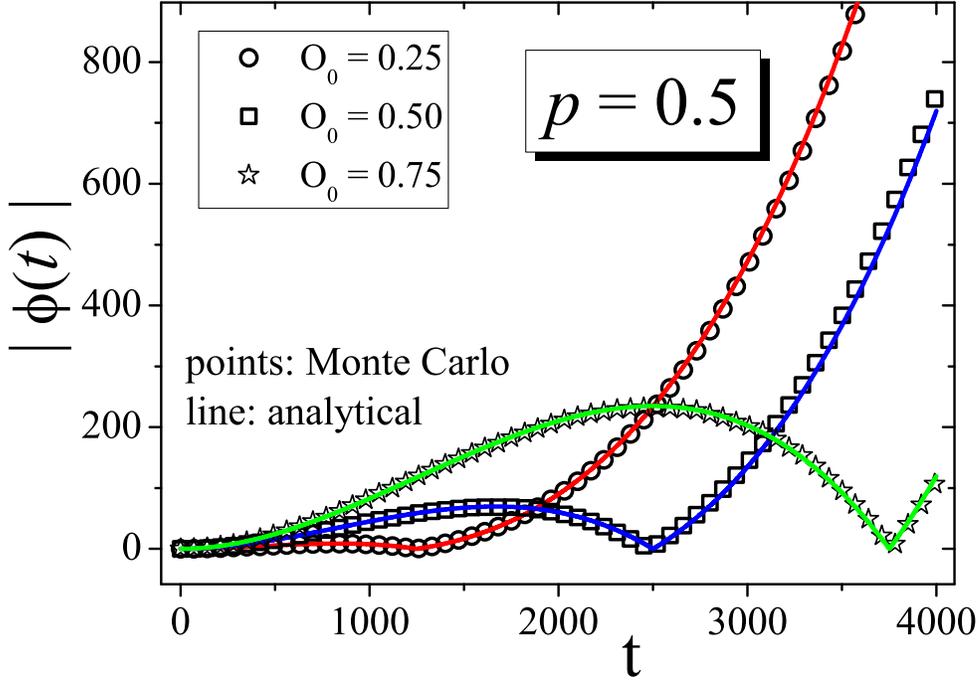


Figure 2: Absolute value of  $\Phi(t)$  given by Eq. 7 for different values of  $O_0$ , with  $p = 1/2$ . We can observe that there is a  $t^*$  which corresponds to  $\Phi = 0$  for each  $O_0$ . Such point corresponds to a signal change of  $\Phi(t)$ .

$\overline{\text{var}(W_r)}(t^*)$ , i.e., they work as a “decorrelation time” of the system that depends on initial offer  $O_0$ . The points in Fig. 2 corresponds to MC simulations used to corroborate the results from equation 7. In this simulations we performed  $10^5$  runs of the iterated game performing averages for each time. We can see a perfect agreement between Eq. 7 and MC simulations.

Now let us show the results for the reactive ultimatum game version when the acceptance depends on the offer and compare with the results of this subsection.

#### 4.2. Mean-field for Acceptance Dependent on the Offer

We observed that reactive  $p$ -fixed approach for acceptance of the offer leads to offers that increase or decrease along time. This is a possible behavior, but the experiments with human beings (see e.g. [5]) seem to avoid the undesirable situation leading to a fair steady state: fifty-fifty sharing.

The reactive ultimatum game, based on acceptances that depend on the offers produce a stable state

$O_\infty = 1/2$  independently of  $O_0$ . This strong fixed point must be better understood. Here, the first question is to check the cumulative gain and variance of the offer for  $O_0 = 1/2$  in this situation comparing these same values in the reactive  $p$ -fixed game.

In Figure 3 (**left plot**) we show the temporal evolution of  $\langle W_r \rangle(t)$ , i.e., the cumulative payoff up to time  $t$ , according to Equation 2 for five  $p$ -values. We can observe that case  $p = 1/2$  corresponds to the regime which  $p$  changes with offer (10).

In the same Figure (**right plot**) we show the behavior of the variance of the payoff for the same  $p$ -values (Eq. 4). The variance can increase or decrease, respectively, for  $p > 1/2$  and  $p < 1/2$ . For  $p = 1/2$  we have also the agreement with the case with  $p$  dependent on the offer given by Equation 12

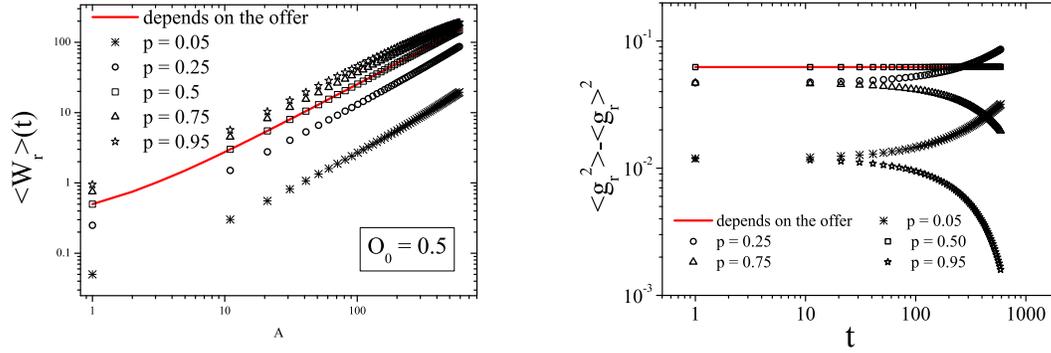


Figure 3: **Left:** Cumulative payoff (wealth) for different  $p$ -values with  $O_0 = 1/2$ . The red line corresponds to the case in which accepting depends on the offer. It fits very well the case  $p = 1/2$ . **Right:** The same results corresponding to the variance of payoff.

Now, it is interesting to observe what happens with other initial conditions for variance of payoff when the acceptance depends on the offer. We can observe in Fig. 4 that values of payoff dispersion always converge to the same value  $var(g) \approx 0.06$  which does not depend on  $O_0$ .

Particularly for  $O_0 = 0.95$ , we observe that variance has a maximum before it converges to the steady state. This rich behavior is obviously related to the fact that on average that offer converges  $\langle O_t \rangle \rightarrow O_\infty = 1/2$  (see Eq. 9). In this same plot, we also show that MC simulations corroborate our analytical results.

So our reactive ultimatum game in mean field regime (two individuals iteratively playing) and with the values averaged for a huge number of repetitions (mean-field regime) is able to reproduce the intuitive aspect of the ultimatum game, which corroborates real situations.<sup>2</sup> Finally looking at the variance of the cumulative

<sup>2</sup>As seen in this simple video: <https://www.youtube.com/watch?v=YXfEv-xEWtE>

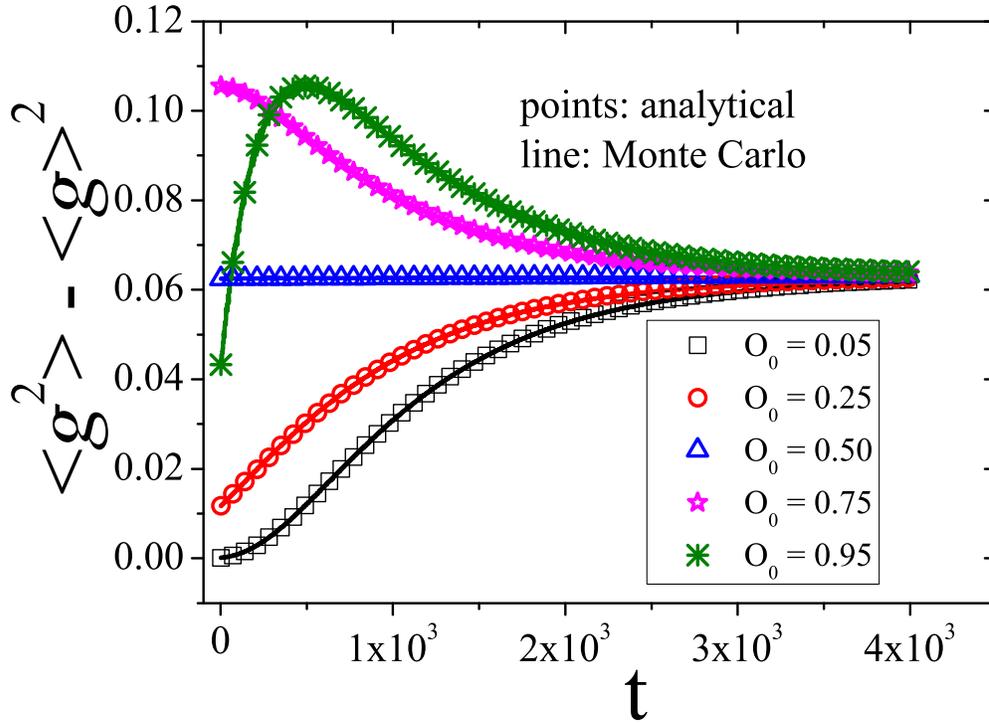


Figure 4: Temporal evolution of the payoff dispersion for the case which accepting depends on the offer. The points correspond to analytical results and the lines to Monte Carlo simulations.

payoff we can also estimate the value  $\Phi(t)$  for this case as we performed for the  $p$ -fixed approach.

In Fig. 5 (left) we show the variance of the cumulative payoff  $var(W_r)$  as a function of time which is only obtained by Monte Carlo simulations (full points). On the other hand,  $\overline{var(W_r)}$  (lines), the sum of payoff variances for all times  $t' < t$ , were analytically estimated by Equations 13, 11, and 8.

The empty points correspond to  $\overline{var(W_r)}$  obtained by Monte Carlo simulations. By performing the difference  $var(W_r) - \overline{var(W_r)}$  we obtain  $\Phi(t)$ . In Fig. 5 (right) we can observe that  $\Phi(t)$  converges to a steady state well defined as the payoff and its variance. Remember that this is different for the  $p$ -fixed approach (as seen in Fig. 2).

In summary, we observed that offer-dependent acceptance produces a fair steady state for these offers contrary to the expected rational behavior. But in this version of reactive ultimatum game other important questions can be answered: which are the effects of topologies, randomness, and the neighborhood size on

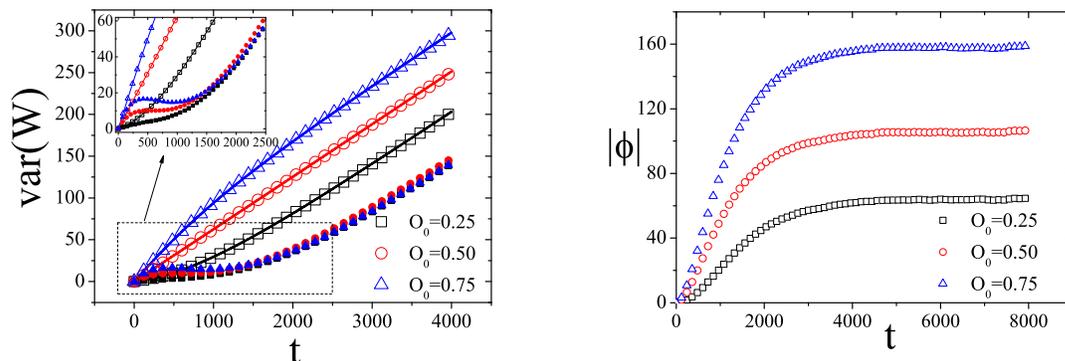


Figure 5: **Left:** Variance of the cumulative payoff (filled in points) and the sum of payoff variances (empty points) obtained by MC simulations. The lines correspond to analytical results obtained by Mean-Field approximation. **Right:** Temporal evolution of  $\Phi(t)$  corresponding to results of the left plot in this same figure.

the offers. In the next section (second part of our results) we analyze such effects on the reactive ultimatum game when the acceptance depends on the offer.

## 5. Results Part II: Coordination ( $k \neq 1$ ) and Randomness Effects ( $p \neq 0$ )

In this section we analyze the reactive ultimatum game in networks. We initially concentrate our attention for populations that play under policy I, in a regular graph with  $k = 4$ . In this case, we can set  $k = 4$  in equation 14, we have  $\langle O_{t+1} \rangle = \langle O_t \rangle + (6 \langle O_t \rangle^4 - 8 \langle O_t \rangle^3 + 1)\varepsilon$ . For  $\langle O_0 \rangle = O_0$ . We can iterate this equation. Simultaneously we have performed Monte Carlo simulations in a square lattice by considering that a player will make an offer to their four different neighbors and therefore will be the responder to another four different neighbors. The player changes her decision with respect to the offer only after having played with all neighbors, and the synchronous or asynchronous version of the MC simulations which are similar in this case.

Here an important question to ask is about the influence of randomness on these results. If we imagine for example a small world built from a simple ring or even a square lattice with coordination  $k_0$ , by introducing a rewiring probability  $p$ , we have  $\langle k \rangle = k_0$  but the result corresponds exactly, for example to policy I, by changing  $k$  by corresponding  $\langle k \rangle$ ? This is not what happens. This occurs only if  $k_0$  is large; for smaller  $k_0$  we have a dependence on  $p$  as can be observed in the color maps of Figure 7.

Such behavior can be checked by looking the dependence of stationary offer as function of  $p$  and  $\langle k \rangle$  as shown in fig. 7. We performed simulations in a small world starting from a ring and a square lattice. It is

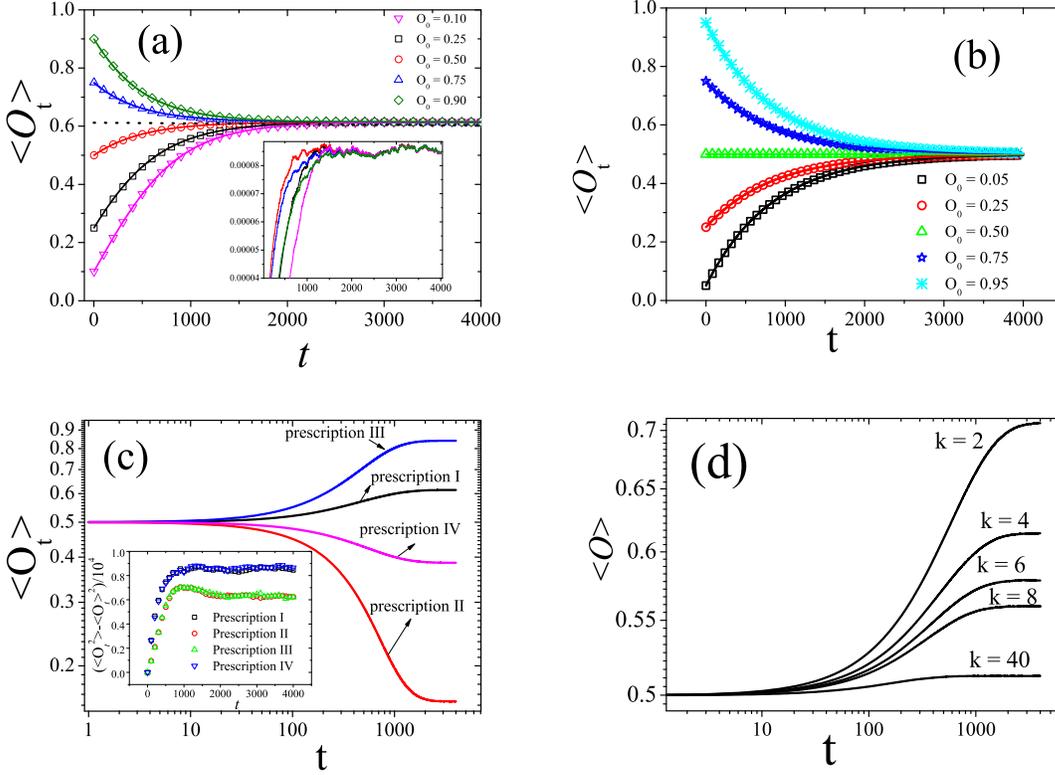


Figure 6: (a): Average offer, for different initial value  $O_0$ , equally attributed to all players. We considered the exact recurrence from Eq: 14 (continuous curves) and MC simulation (points) in a square lattice which corresponds to use  $k = 4$  in formula. Inset plot correspond to stationarity of the offer dispersion. (b): Results obtained from mean field which corresponds to  $k = 1$  (no policy dependent). (c): Results for the other policies also for  $k = 4$ . (d) Results for policy I simulated on the square but with arbitrary neighborhood for different  $k$ -values.

interesting observe that for low coordination even for  $p = 1$  we do not obtain the result expected for mean field ( $\langle O_{t \rightarrow \infty} \rangle = 1/2$ ).

Now it is interesting to analyze the effects about the payoff of the players in populations under four different policies. We want to show the effects about distribution of payoff in populations as a function of time considering the populations in which the offers are performed under 4 different policies and acceptance occurs with probability exactly the offer of the player. We consider ( $k = 4$ ). We can see from plot (C) in Fig. 6 that policy 3 leads to higher offers. This happens because players with this behavior only decrease their offers in really favorable situation; they prefer to deal with more players under lower  $k$  offer values than playing with only one player under higher offer values. Bigger offers mean higher acceptance probabilities, which mean larger number of deals.

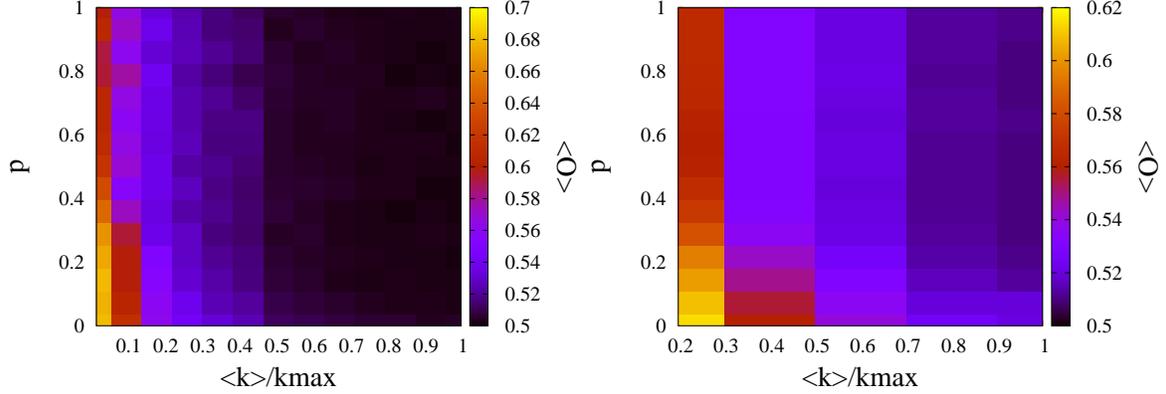


Figure 7: Randomness effects on stationary offers for the policy I: a) Left plot: small world built from a ring b) Right plot: small world built from a square lattice.

By considering the payoff obtained by players in populations interacting under the different policies, we analyzed statistics related to payoff obtained by the players in populations interacting under these different policies separately. We consider  $k = 4$ , for the sake of simplicity. One question to ask is how the payoff is distributed among the players along time. In this case, we can use an interesting concept from Economics, the Gini coefficient. Considering that  $N$  players have their payoffs at time  $t$  in increasing order:  $g_1(t) \leq g_2(t) \leq \dots \leq g_N(t)$ . So we consider the cumulative distribution:

$$\varphi_i(t) = \frac{\sum_{j=1}^i g_j(t)}{\sum_{j=1}^N g_j(t)}$$

The Lorentz ( $\varphi_i(t) \times i/N$ ) curve shows the corresponding wealth (sum of payoffs) corresponding to population fraction  $f_i = i/N$ . We expect an identity function for a well distributed payoff. By a trapezoidal formula, the Gini coefficient can be estimated by

$$G(t) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_i(t)$$

which measures the difference between the Lorentz curve and the identity function. This number changes from 0 up to 1, and the higher the value of  $G$ , the worse is the payoff distribution.

Since we analyzed the properties of populations under different policies for  $k = 4$ , now we would like to better explore a general formula for the stationary offer for arbitrary coordination, considering populations under proportions of different policies. If we consider that  $\rho_c$ ,  $\rho_G$ ,  $\rho_{HC}$  and  $\rho_M$  are the densities of conservative, greedy, highly conservative and moderated players, we can write that with the players inserted in a

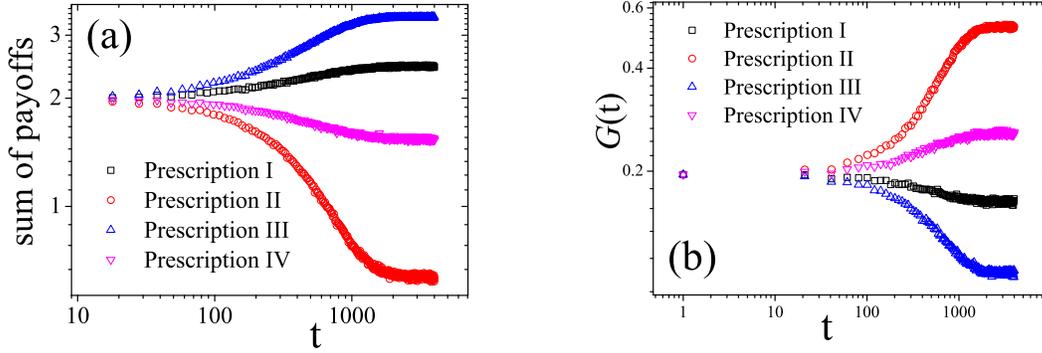


Figure 8: (a): Average total payoff of the players for  $k = 4$  by considering the different policies. (b): Corresponding Gini coefficient of the average payoff described by Plot (a).

population with coordination  $k$ , is

$$\begin{aligned} \langle O_{t+1} \rangle \approx & \langle O_t \rangle + \rho_c \cdot [2\Pr(0 \leq n_a \leq k/2 | \langle O_t \rangle) - 1] \varepsilon + \rho_G \cdot [2\Pr(n_a = 0 | \langle O_t \rangle) - 1] \varepsilon + \\ & + \rho_{HC} [2\Pr(0 < n_a < k | \langle O_t \rangle) - 1] \varepsilon + \rho_M [2\Pr(0 < n_a < k/2 - 1 | \langle O_t \rangle) - 1] \varepsilon \end{aligned}$$

which results in

$$\begin{aligned} \langle O_{t+1} \rangle \approx & \langle O_t \rangle + \rho_c \left( 2 \sum_{m=0}^{k/2} \frac{k! \langle O_t \rangle^m (1 - \langle O_t \rangle)^{k-m}}{m!(k-m)!} - 1 \right) + \rho_G (2(1 - \langle O_t \rangle)^k - 1) + \rho_{HC} (1 - 2 \langle O_t \rangle^k) \\ & + \rho_M \left( 2 \sum_{m=0}^{k/2-1} \frac{k! \langle O_t \rangle^m (1 - \langle O_t \rangle)^{k-m}}{m!(k-m)!} - 1 \right) \varepsilon \end{aligned} \quad (15)$$

Obviously, Eq. 14 is a particular case of Eq. 15 ( $\rho_c = 1$ ,  $\rho_G = \rho_{HC} = \rho_M = 0$ ). So our work now is to change the proportions  $\rho_c$ ,  $\rho_G$ ,  $\rho_{HC}$  and  $\rho_M$ , by numerically solving this equation and answering an important question: Is there some proportion that is able to change the behavior as  $\langle O_{t \rightarrow \infty} \rangle = 1/2$ ? First of all, it is important to mention that all results obtained by numerical integration of Eq. 15 were checked by performing simulations in rings and square lattices with arbitrary coordination. For this reason we will omit any information about MC simulations from that part until the final results, but remember that we have a perfect agreement between MC simulations and numerical integration of Eq. 15.

First, we would like to analyze the stationary average offer for mixing of different strategies, by looking at differences between the homogeneous populations (i.e., that one where players only use the same policy (I, II, III, or IV)). In plot (a), Fig. 9, we show the behavior of  $\langle O_{t \rightarrow \infty} \rangle$  as a function of  $k$  in log-log scale. Each

plot corresponds to one population interacting according to a specific policy (we denote it as homogeneous population). The inset plot corresponds to the same plot in linear scale. We can observe that in policies I and IV, the stationary offers converge to  $1/2$  when  $k \rightarrow \infty$ , differently from II and III.

It is important to mention that a population with only greedy players leads to an algebraic decay of the offer as coordination ( $k$ ):  $\langle O_{t \rightarrow \infty} \rangle \sim k^{-\xi}$ . We measured the exponent  $\xi \approx 0.95$  by using  $k_{\max} = 40$  and  $\xi \approx 0.97$  for  $k_{\max} = 60$  which indicates a kind of hyperbolic scaling in coordination  $\langle O_{t \rightarrow \infty} \rangle \sim 1/k$ .

The first experiment with heterogeneous population keeps ( $\rho_c = \rho_g = \rho_{HC} = \rho_m = 1/4$ ). In this case, surprisingly the stationary case is  $\langle O_{t \rightarrow \infty} \rangle = 1/2$  independently from  $k$  (by simplicity we omit this obvious plot). We cannot observe such behavior in the studied homogeneous populations.

Other exotic choices can be performed in which  $\langle O_{t \rightarrow \infty} \rangle$  shows convex and concave behaviors as function of  $k$ , i.e., with extrema well defined as we can observe in plot (b), Fig. 9.

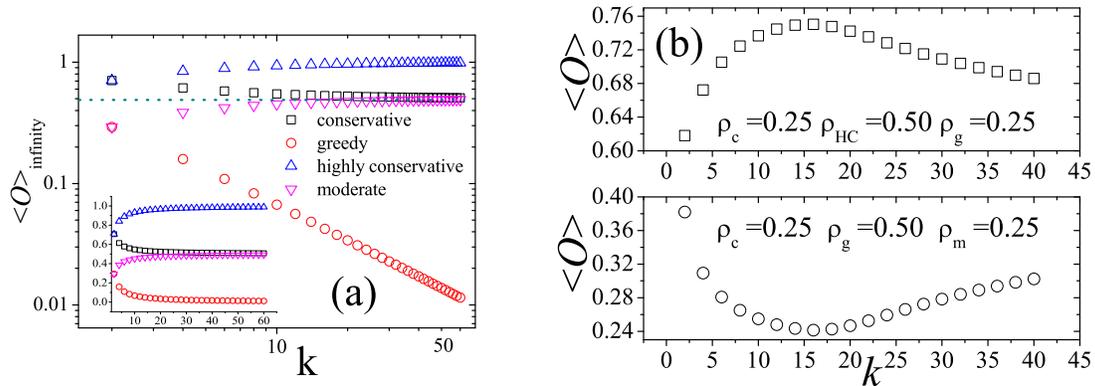


Figure 9: (a): Stationary average offers as a function of  $k$  considering homogeneous populations - players follow a single policy - in log-log scale. (b): Some mixing of policies (heterogeneous population) illustrating one case where there is a coordination that maximizes the stationary offer and one that minimizes it.

## 6. Conclusions

In this paper we analyze some important aspects of populations which interact under a reactive ultimatum game. First we extended results of a recent publication where acceptance of the offers occurs with fixed probability  $p$ . We show an interesting behavior for the sum of all temporal correlations of the payoff from  $t' = 0, \dots, t$ :  $\Phi(t)$ , which changes its signal in time that depends on the acceptance probability  $p$ , that is a property from the fact that  $\langle O_t \rangle$  increases (respectively, decreases) as  $p > 0$  (resp.,  $< 0$ ) as function of time.

Based on the fact that unfair offers have small acceptance probabilities, we proposed a new model where

acceptance occurs with probability  $O_t$ , i.e. the offer of the opponent. In this case a mean field regime leads to a interesting stationary fair offer:  $O_{t \rightarrow \infty} = 1/2$  independently from the initial offer  $O_0$ . Thus, the sum of the temporal correlations of the payoff has a steady state well defined, but depends on  $O_0$ .

When studied in networks the model does not present  $O_{t \rightarrow \infty} = 1/2$  for low coordination (small  $k$ ) whatever the policy analyzed. Particularly for  $k = 4$  we showed that the average payoff is larger and the Gini coefficient is smaller for the policy that decreases the respective offer only when all players have accepted the offer at hand. This apparently altruistic player gains low values as proposer, but higher values as a responder; this combination leads to a well distributed payoff. We show that the absolutely greedy policy (II) leads to low payoffs and to high Gini coefficients.

Further, we introduced four policies that differ in how each player increases/decreases her offer. Only two policies present  $\langle O_{t \rightarrow \infty} \rangle = 1/2$  for  $k \rightarrow \infty$ . However a perfect equilibrium among policies, i.e. 1/4 of population for each policy, leads to  $\langle O_{t \rightarrow \infty} \rangle = 1/2$  independently from  $k$ . There is a breaking of monotonicity of  $\langle O_{t \rightarrow \infty} \rangle(k)$  for mixing of strategies, which presents  $k$ -values where  $\langle O_{t \rightarrow \infty} \rangle$  is a extreme, either maximum or minimum value.

## References

- [1] J. von Neumann, O. Morgenstern, "Theory of Games and Economic Behavior" (Princeton University Press, Princeton NJ) (1944)
- [2] J. M. Smith, Journ. Theor. Biol. **47**, 209-221 (1974)
- [3] G. Szabó, G. Fáth, Phys. Rep. **446**, 97-216(2007)
- [4] W. Guth, R. Schmittberger and B. Schwarze, J. Econ. Behav. Org., **24**, 153 (1982).
- [5] J. Henrich, Am. Econ. Rev. **90**, 973 (2000)
- [6] A. Szolnoki, M. Perc, G. Szabó, Phys. Rev. Lett. **109**, 078701-1 (2012).
- [7] A.G. Sanfey, J. K. Rilling, J.A. Aronson, L. E. Nystrom and J. D. Cohen, Science **300** 1755 (2003).
- [8] T. C. Burnham, Proc. Royal Soc. B, **274**, 2327-2330 (2007)
- [9] M. A. Nowak, K. M. Page, K. Sigmund, Science, **289** 1773-1775 (2000).
- [10] E. Almeida, R. da Silva, A. S. Martinez, Physica A, **412**, 54 (2014)
- [11] R. da Silva, G. A. Kellermann and L. C. Lamb, J. Theor. Biol., **258**, 208-218 (2009).
- [12] R. da Silva and G. A. Kellerman, Braz. J. Phys., **37**, 1206-1211 (2007).

# Capítulo 8

## Artigo submetido

“ Towards Rock-paper-scissors patterns in Optional Public Goods Game under random mobility”

Submetido para: Physica A, 2016

# Towards Rock-paper-scissors patterns in the Optional Public Goods Game under random mobility

Pablo A. Valverde, Roberto da Silva, Eduardo V. Stock

*Institute of Physics, Federal University of Rio Grande do Sul, Av. Bento Gonçalves, 9500, Porto Alegre, 91501-970, RS, Brazil  
E-mail: rdasilva@if.ufrgs.br*

---

## Abstract

Social dilemmas concern a natural conflict between cooperation and self interests among individuals in large populations. The emergence of cooperation and its maintenance is the key for the understanding of fundamental concepts about the evolution of species. In order to understand the mechanisms involved in this framework, here we study the Optional Public Good Games with focus on the effects of diffusive aspects in the emergent patterns of cyclic dominance between the strategies. Differently from other works, we showed that rock-paper-scissors (RPS) patterns occur by introducing a simple kind of random mobility in a lattice sparsely occupied. Such pattern has been revealed to be very important in the conservation of the species in ecological and social environments. The goal of this paper is to show that we do not need more elaborated schemes for construction of the neighbourhood in the game to observe RPS patterns as suggested in the literature. As an interesting additional result, in this contribution we also propose an alternative method to quantify the RPS density in a quantitative context of the game theory which becomes possible to perform a finite size scaling study. Such approach can be very interesting to be applied in other games generically.

---

## 1. Introduction

The evolution of cooperation, fairness, or pro-social behavior among non-related individuals is one of the fundamental problems in biology and social sciences [1]. Reciprocal altruism fails in providing a good solution if the iterations are not repeated. Some mechanisms as punishment can be effective, for example in the iterated ultimatum game (UG) where players reject offers far from fifty-fifty division [2, 3, 4, 5, 6]. However this mechanism, in the case of prisoner dilemma (PD) or even public goods games (PGG) requires that defectors must be identified as observed in ref. [7]. Optional participation in the PGG is a simple but effective mechanism that can avoid possible exploiters and overcome the social dilemma [8, 9], since the cooperators and defectors can coexist due to the abstention alternative. These works as well as many others (see for example [10, 11, 12]) consider a dynamics with many public games, where each one of them corresponds to a different neighbourhood and its central node, differently from some alternative works (not so explored in literature) that consider the dynamics of an only single and large public goods game with interacting players (see for example [13, 14]).

Therefore, the so called Optional Public Goods Game (OPGG) can provide an useful representation of many social conflicts which the cooperation plays an important role in the good operation of general public services. Voluntary participation in PGG may provide a way to keep stable and persistent levels of cooperation, without secondary mechanisms as punishment or reward [15]. In the stationary state of dynamics in OPGG the coexistence of the three strategies: cooperators, defectors, and loners, as well as dominance cycles of each one of these strategies in sequence, i.e., the so called rock-paper-scissors (RPS) regime, were reported as solutions of the mean field replicator dynamics [16], as well as for simulation in different topologies [11, 12, 17].

Other important aspects may influence the cooperation patterns in PD and PGG and among them, one has called the attention of physicists that study evolutionary game theory: the mobility of the players [18]. Mobility is an interesting mechanism to evaluate if a social or biological system preserve its environment or biodiversity by considering the different strategies in the population [19, 18], or by simply to change the critical rates in epidemiological systems simulated by cellular automata [20]. So, the investigation of RPS pattern which is an interesting case of emergence of cooperation, deserves more attention in OPGG and in this point we would asking for: Is the mobility an important ingredient to influence or even preserve the RPS patterns in OPGG? If yes, for which occupation this can happen?

In this paper we propose to study the effects of mobility in OPGG. We focus our investigation in three different contributions:

1. First, we would like to answer about the connection between the mobility and RSP patterns observed in OPPG and in other game theory protocols;
2. In square lattices, where each site can be occupied by only one player, we intend to explain how the occupation (density of occupied sites) and mobility characterized by a simple diffusion parameter  $p$ , probability that a player moves to a empty site, randomly chosen among nearest neighbours, influence the RSP patterns;
3. By following this investigation, we would like to propose a parameter to measure the density of RPS patterns in Game theory, more precisely in PD and PGG with voluntary participation, or even in other game theory protocols;

In this contribution we present an analysis, by means of Monte Carlo Simulations, looking for the coexistence of the two strategies in the steady states or in a more singular and rare case, the alternate dominance of each single strategy (RPS patterns) in the presence of mobility. We simultaneously analyse the effects of the multiplication factor ( $r$ ), the density of mobile agents in the lattice ( $\rho$ ) and the mobility parameter ( $p$ ).

It is important to notice that other studies considering mobility in OPGG reveal some features to maintain the cooperation but these results do not explore the existence of cyclic dominance of the strategies (see for example [10]). More precisely, we are interested in how these three important parameters of the game are able to modulate the emergence of spontaneous cooperation, looking simply for coexistence of strategies or cycles of the three possible strategies. In the next section we present the essential points about the model and how our simulations are implemented considering our Monte Carlo Simulations for OPGG with mobility of the players. In section 3 we present our main results.

## 2. The OPGG with Monte Carlo simulations considering mobility of the players

In this paper we consider a population of  $N$  players randomly distributed over a square lattice of linear dimension  $L$ , so  $N \leq L^2$  and the density of players is defined by  $0 \leq \rho = \frac{N}{L^2} \leq 1$ . Every player interacts only with its nearest neighbours, and each site in the lattice can contain a player or simply to be a vacancy (empty space). So if we include the vacancy with status of state, we have a four-state model, where each site can have four possible states: C (cooperator), D (defector), or L (loner) if there is a player occupying the site which represent the three possible strategies for a player and V (vacancy) otherwise. The OPGG with Mobility evolves according to steps of the following algorithm:

1. An agent  $i$  is randomly chosen.
2. Each cooperator in its neighbourhood contributes to the common pool with a unit of wealth. Defectors participate, but without contribution (free-rider action), while loners stay out of game getting a fixed payoff  $\sigma$ , which we make equal to the unit, without loss of generality.
3. Payoffs are then calculated for the three possible strategies:

$$P = \begin{cases} \frac{rN_C}{(N_C+N_D)} - 1 & ; C \\ \frac{rN_C}{(N_C+N_D)} & ; D \\ 1 & ; L \end{cases} \quad (1)$$

where  $r$  is the multiplication factor of the public good,  $N_c$ ,  $N_d$  and  $N_l$  are the number of players with each corresponding strategy in the local configuration (neighbourhood). If we define  $s_i = 0$  for C,  $s_i = 1$  for D and  $s_i = 2$  for L, we can reduce this formula to:

$$P(s) = \frac{rN_C}{(N_C+N_D)} \left[ 1 - \frac{s(s-1)}{2} \right] + s - 1$$

4. An occupied site  $i$  is randomly drawn. So a site  $j$  in the neighbourhood of  $i$  is also randomly drawn. If the site  $j$  is a vacancy the player localized in  $i$  jumps to site  $j$  with probability  $p$ . Otherwise, if  $P(s_i) < P(s_j)$  then  $i$  copy the strategy of  $j$ . If this condition is not satisfied, so  $i$  keeps its current strategy.
5. The process is repeated  $N$  times, i.e., we randomly choose  $N$  players from the population, and so we replicate the process. In average each agent has the opportunity to change its state once per Monte Carlo time step;

So we present time evolution densities of the three kinds of strategies,  $\rho_i(t)$ . In all our simulations, the initial configuration is fixed but random, where the population is composed by 1/3 of the each one of the three strategies, in order to observe the survival of the strategies. Clearly, other situations should be biased to lead the system to the emergence of cooperators. However we opted by avoiding this possible bias. In the next section we present our main results. Basically, we define an interesting parameter to able to describe the density of RPS patterns in the time evolution of strategies, considering the system over different occupations and mobilities.

### 3. Results

In order to investigate the collective dynamical behaviour of the system, we measure the time evolution of fraction (or density) of individuals in the three possible strategies,  $\rho_c = \frac{N_c}{(1-\rho)L^2}$ ,  $\rho_d = \frac{N_d}{(1-\rho)L^2}$  and  $\rho_l = \frac{N_l}{(1-\rho)L^2}$ , cooperators, defectors, and loners respectively, since  $(1-\rho)L^2 = L^2 - N$  is the number of players in the lattice.

First, we start showing the time evolution of  $\rho_c(t)$ ,  $\rho_d(t)$ , and  $\rho_l(t)$  considering  $N_{mc} = 10^4$  Monte Carlo steps as can be observed in Fig. 1. We choose two particular situations: a)  $\rho = 0.4$  and b)  $\rho = 0.6$ , both considering  $r = 5$  and a low mobility:  $p = 0.005$ . As previously reported, we start from an initial concentration of  $\rho_c^0 = \rho_d^0 = \rho_l^0 = 0.3\bar{3}$ . This figure reveals two typical patterns in our analysis: In plot (a), the system reaches a configuration in which the three strategies coexist in a cyclic way while in plot (b), there is no cyclic dominance among the strategies, just coexistence where two strategies dominate one third. Now let us better explore the effects of the vacancies and mobility of the players in the emergence of cooperation or more precisely how this is related to the occurrence of RPS patterns.

Here the idea is very simple: by varying the occupation and a mobility parameters of the system we can find small fluctuations which leads to large and sustained oscillations, so a cyclic state appears in the global behaviour of the system, i.e., the fraction of each one must vary cyclically. However, an important question

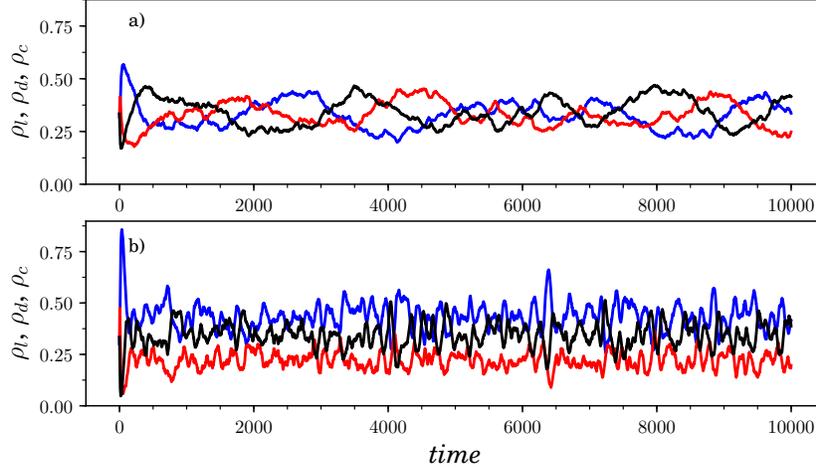


Figure 1: Time evolution of the fraction of cooperators (black line), defectors (red line) and loners (blue line) for  $r = 5$ : a)  $\rho = 0.40$ ,  $p = 0.005$  and b)  $\rho = 0.6$ ,  $p = 0.005$ . For that we used  $L = 100$ , and  $\rho_c^0 = \rho_d^0 = \rho_l^0 = 1/3$ .

is how to measure the density of the occurrence of this pattern in the time evolution of these strategies in a simple way. In this paper we suggest a natural parameter: we measure how long is the length of all L-C-D (or C-D-L, or L-D-C...) sequences that appear during the evolutions. So we establish the following convention: the condition  $\rho_l > \rho_{c,d}$  means *L*, while  $\rho_c > \rho_{l,d}$  means *C*, and finally  $\rho_d > \rho_{c,l}$  corresponds to the dominance of *D*. For example, in the sequence with 40 terms:

CCLLLCCDDDLCCCCDLCCCCDDDDCCCLLCCCCDDCCC

we have 4 LCD cycles, where the density is then equal to  $\alpha = (8 + 7 + 9 + 8)/40 = 0.8$ , since in a general evolution we define  $\alpha$  as

$$\alpha = \frac{\sum_j t_j}{t_{\max}}$$

where  $\{t_i\}_{i=1}^m$  denote the set of lengths of all sequences of LCD found in the whole series of size  $t_{\max}$ , where sure  $\sum_j t_j \leq t_{\max}$ , which leads to  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

So we elaborate an interesting plot that shows  $\langle \rho_l \rangle$ ,  $\langle \rho_c \rangle$ ,  $\langle \rho_d \rangle$  and  $\alpha$  as function of  $r$ , the multiplication factor of the OPPG as can be observed in Fig. 2. The averages were computed by:

$$\langle \rho_i \rangle = \frac{1}{t_{\max}} \sum_{t=1}^{t_{\max}} \rho_i(t)$$

where  $i = l, c$ , or  $d$ , and  $\alpha$  were computed considering  $t_{\max} = 10^4$  MC steps to compose the averages.

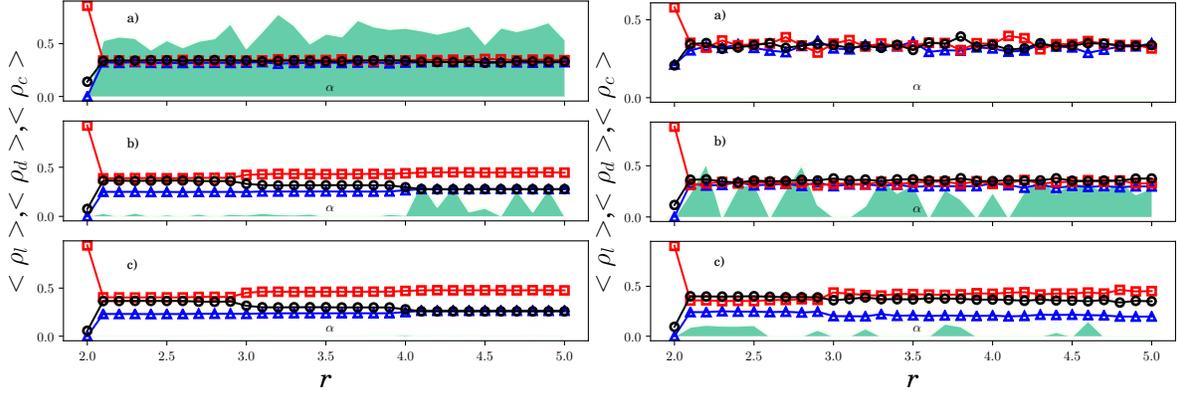


Figure 2: Average frequencies of cooperators (black circles), defectors (red squares), and loners (blue triangles) and the proportion of rock-paper-scissors cycles ( $\alpha$ ) (green zone) as a function of multiplication rate  $r$ . The three first upper plots correspond to  $p = 0.60$ , with the corresponding density values (a)  $\rho = 0.1$ , (b)  $\rho = 0.5$ , (c)  $\rho = 0.6$ . The three last lower plots correspond to case  $p = 0.001$  for the same corresponding density values previously used.

This figure qualitatively corroborates that there is a relation between occupation and mobility, however this relation must be more explored. So we perform a plot of  $\langle \rho_l \rangle$ ,  $\langle \rho_c \rangle$ ,  $\langle \rho_d \rangle$  and  $\alpha$  as function of  $\rho$  as can be observed in Fig. 3.

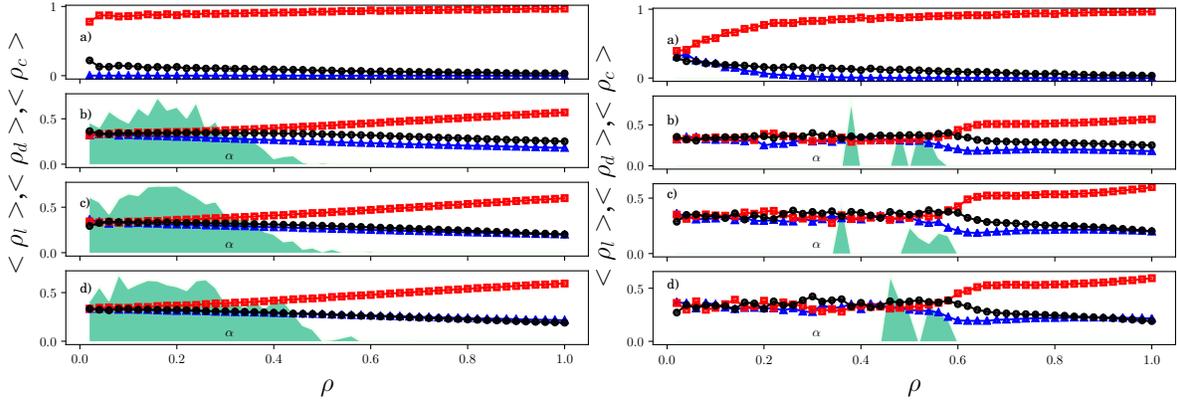


Figure 3: Average frequencies of cooperators (black circles), defectors (red squares), and loners (blue triangles) and the proportion of rock-paper-scissors cycles ( $\alpha$ ) (green zone) as a function of occupation  $\rho$ . The right side plot corresponds to  $p = 0.60$  by considering four different values of multiplication factor (a)  $r = 1$ , (b)  $r = 2$ , (c)  $r = 3$  and (d)  $r = 4$ . The left side plot corresponds to the case  $p = 0.001$  where the same multiplication factors previously were used.

The idea of low density and high mobility promotes RPS behaviour seems to be qualitatively corroborated by this figure. This figure also shows that for  $r < 2$  the RPS patterns are not observed. However, an alternative to clear up this point is to observe the proportion  $\alpha$  to all pairs  $(\rho, p)$ . So we elaborate color maps which show how this proportion changes in all combinations of occupation and mobility which can be observed in Fig. 4. We show 3 plots that correspond to the 3 different seeds respectively, by showing the

robustness of the zones obtained for the different seeds, i.e., we can observe similar maps for the different seeds. For the sake of simplicity, we can qualitatively separate the region in two different regions: I which corresponds to zone with higher RPS probability (left) and II where just coexistence of two strategies is generally observed (right).

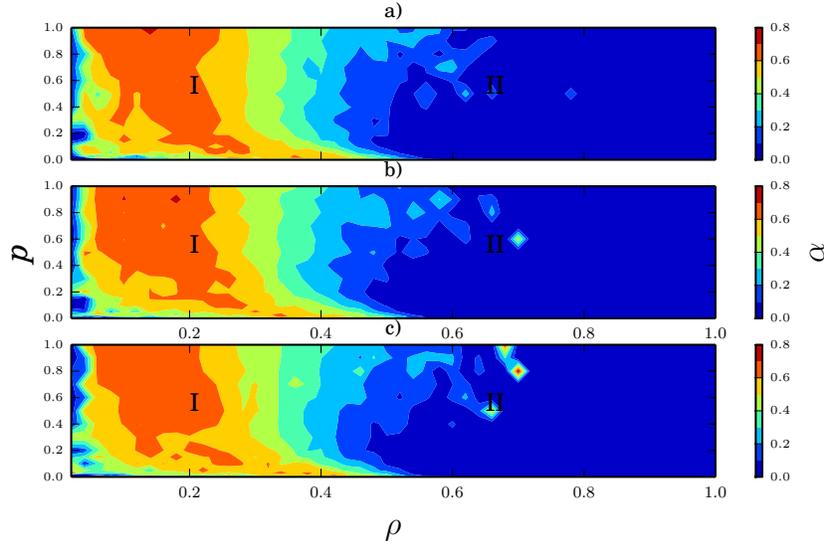


Figure 4: Color Map that show the RPS density  $\alpha$  for each pair  $(\rho, p)$  considering  $r = 5$ . The 3 different plots correspond to different seeds respectively used in our simulations to obtain the time evolution strategies.

So, let us pick up two typical points in the two different zones by exploring their typical behaviour. For zone I we fix the parameters  $\rho = 0.20$ , and  $p = 0.5$  while in zone II we choose  $\rho = 0.65$ , and  $p = 0.5$  and so we built a figure (Fig. 5) that shows the time evolution of strategy densities for these two situations (first plot from up to bottom) and a corresponding sequence of snapshots by showing the spatial distribution of strategies in the lattice, for the first situation (medium plot) and for the second situation (lower plot).

The snapshots corresponds to times a)  $t = 20$  b)  $t = 200$ , c)  $t = 400$ , d)  $t = 1000$  e)  $t = 2000$ , and f)  $t = 5000$  MC steps. We can clearly observe the RPS behaviour for the case chosen in region I while dominance of a strategy is observed for the case chosen in region II. So we can conclude that with a simple kind of mobility the RPS patterns can be observed in low occupation and high mobility, but the pattern occurs continuously.

Finally we studied the effects of  $L$  on the density of RPS. So we plot  $\alpha(\rho)$  as function of  $\rho$ , for different sizes  $L = 100, 200, 400$  and  $500$  which is shown in the main plot of the Fig. 6 in mono-log scale. It is important to notice that we can observe strong fluctuations for  $\alpha(\rho)$  by considering different size systems.

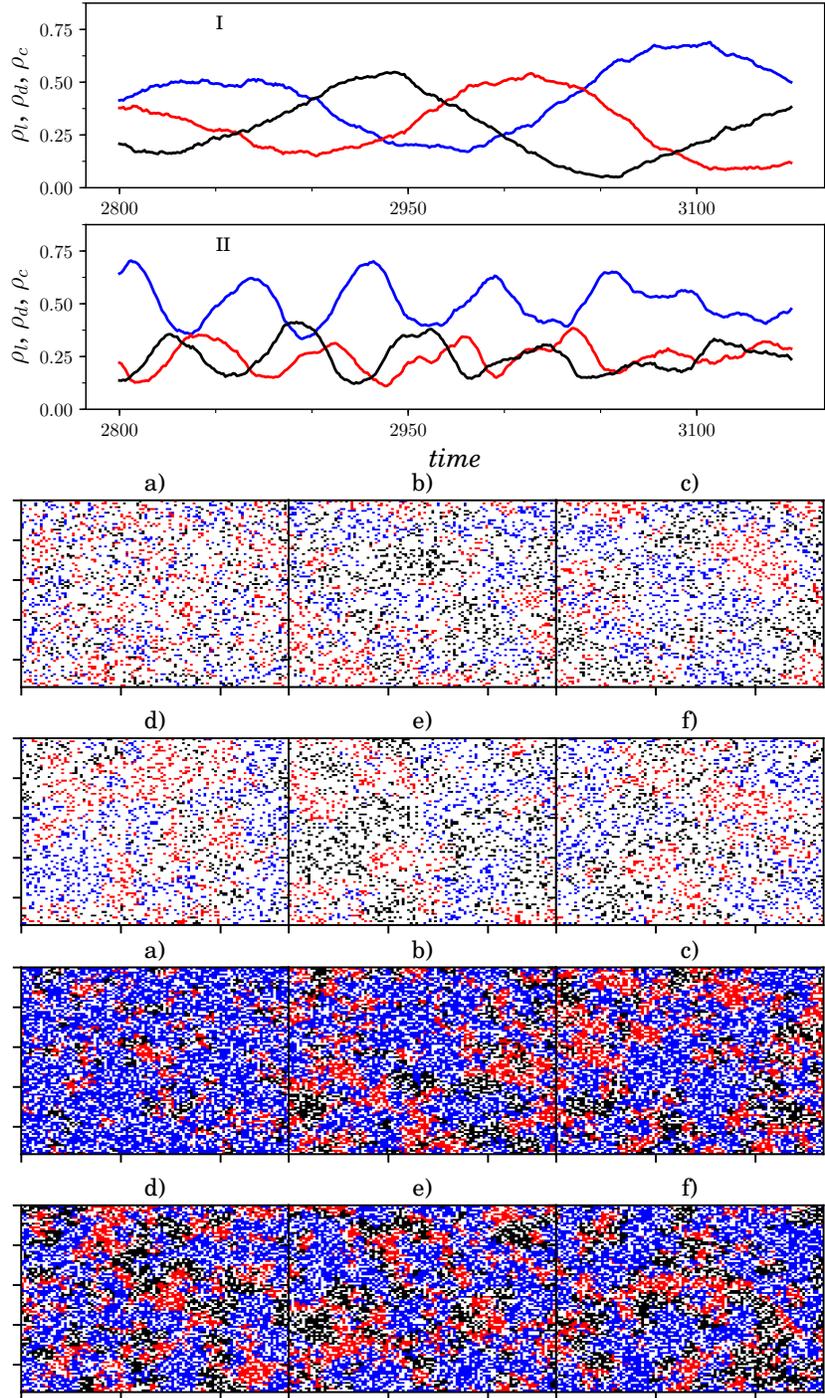


Figure 5: Upper plot: The time evolutions for two different points in the color map: I  $\rho = 0.2$  and II:  $\rho = 0.5$  with  $p = 0.5$ . Medium plot: Sequence of snapshots for the different times of evolution for the point in I:  $\rho = 0.2$  and  $p = 0.5$ . Finally in the lower plot we show the same sequence for the point in II:  $\rho = 0.5$  and  $p = 0.5$ .

So, in order to perform a finite size scaling analysis, we propose to use the RPS integrated over the different  $\rho$  values, which we define as RPS mass and calculated according to:

$$S(L) = \int_0^1 \alpha(\rho, L) d\rho \quad (2)$$

which is numerically obtained by Simpson's rule formulae:

$$S(L) \approx \frac{\alpha(0,L)+\alpha(1,L)}{3} \Delta\rho + \frac{2}{3} \Delta\rho \sum_{i=1}^n \alpha(\rho_{2i-1}, L) + \frac{4}{3} \Delta\rho \sum_{i=1}^{n-1} \alpha(\rho_{2i}, L) \quad (3)$$

We know the numerical error in approximating Eq. 2 by Eq. 3 which is of order  $O(1/n^4)$ , however we obtained the plots of Fig. 6 by using five different seeds and we have the error bars for each  $\alpha(\rho_i, L)$ , represented by standard error  $\delta_\alpha(\rho_i)$ . So by discarding the numerical errors, and considering only the statistical errors as main sources, we have the uncertainty propagation formulae:

$$\delta_S^2 = \frac{\Delta\rho}{3} \left[ \delta_{\alpha(0)}^2 + \delta_{\alpha(1)}^2 + 4 \sum_{i=1}^n \delta_{\alpha(\rho_{2i-1})}^2 + 16 \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{\alpha(\rho_{2i})}^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

So we plot  $S(L)$  as function of  $L^{-1}$  which is shown in the lower inset plot in 6 with error bars calculated according to Eq. 4. We can see the strong dependence in the size system. The upper inset plot shows the case  $L = 500$  in linear scale just for observation.

We can observe that RPS mass decreases as  $L$  increases according to algebraic behaviour. So our conclusions leads to RPS occurrences in the OPGG can be observed in no percolation regime of occupation when mobility is incremented in the system. Our snapshots show such phenomena by showing that mobility possibilities encounters between players that starts the RPS process. The phenomena does not occur in highly occupied lattices and the process is continuous, i.e., the RPS regions has a preferential region in low occupation that changes slightly from seed to seed. Some sporadic RPS events can be found in percolation regime ( $\rho > 0.6$ ) but are not observed in all different color maps corresponding to the different seeds.

#### 4. Conclusion

We have performed a thorough study about emergence of cooperation in OPGG, by showing the appearance of cycles of rock-paper-scissors patterns among the three possible strategies in an evolutionary Darwinian dynamics under diffusion effects in lattices with vacancies. We established color maps which show that more probable regions of RPS patterns occur in more sparsely lattices and intermediate mobilities while we have only coexistence domain in more occupied lattices where the RPS patterns are missing.

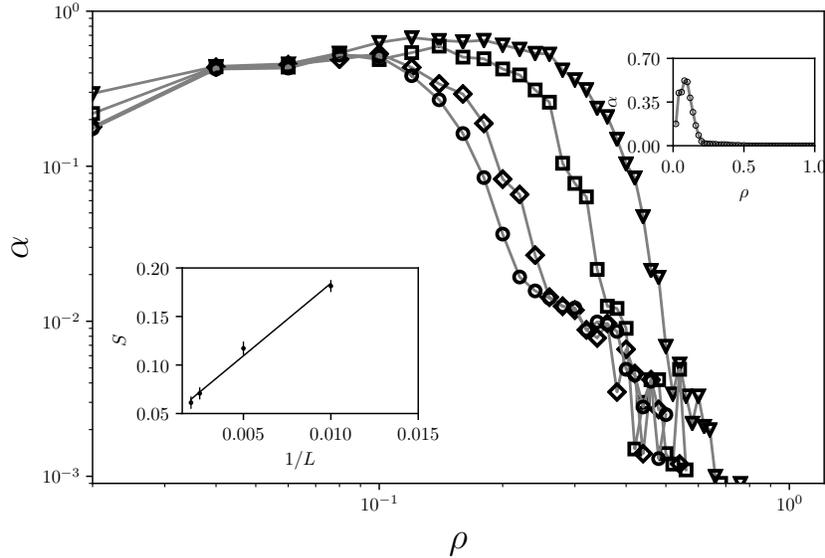


Figure 6: Finite size scaling effects. Density of RPS cycles  $\alpha$  as function of lattice occupation  $\rho$  in log-log scale. We show plots for different size systems:  $L = 100$  (triangles)  $L = 200$  (squares),  $L = 400$  (losangles) and  $L = 500$  (circles). We choose the parameters multiplicative factor  $r = 3.0$  and mobility  $p = 0.5$ . The upper inset plot shows the case  $L = 500$  in linear scale where no fluctuations are observed. The lower inset plot shows the RPS mass  $S(L)$  as function of  $L$ .

We also explore the numerical relationship between the multiplicative factor  $r$  of the OPGG and the RPS patterns. We also show that RPS mass, i.e., the integral of RPS over all possible occupations, decays as a power law as the size system enlarges. Our work quantifies RPS patterns emergent in diluted lattices, or only coexistence patterns, which occurs with simple mobility, differently from other works that explore more complex diffusion to stablish stable frequency of strategies in steady state (see for example [10]). Our work corroborates other results obtained in the context of rock-paper-scissors games which suggest that biodiversity is promoted by mobility (see for example [19]).

## References

- [1] M. A. Nowak. *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*. Harvard University Press, Harvard, 1 edition, 2006.
- [2] W. Guth, R. Schmittberger, and B. Schwarze. An experimental analysis of ultimatum bargaining. *J. Econ. Behav. Organ.*, 3(4):367 – 388, 1982.
- [3] R. da Silva, G. A. Kellermann, and L. C. Lamb. Statistical fluctuations in population bargaining in the ultimatum game: Static and evolutionary aspects. *J. Theor. Biol.*, 258(2):208 – 218, 2009.
- [4] R. da Silva and G. A. Kellerman. Analyzing the payoff of a heterogeneous population in the ultimatum game. *Braz. J. Phys.*, 37:1206 – 1211, 12 2007.
- [5] E. Almeida, R. da Silva, and A. Souto Martinez. Strategies generalization and payoff fluctuation optimization in the iterated ultimatum game. *Physica A*, 412:54 – 65, 2014.
- [6] R. da Silva, P. A. Valverde, and L. C. Lamb. Randomness and arbitrary coordination in the reactive ultimatum game. *Commun.Nonlinear Sci*, 36:419 – 430, 2016.
- [7] H. Brandt, C. Hauert, and K. Sigmund. Punishment and reputation in spatial public goods games. *P. Roy. Soc. B-Biol. Sci.*, 270(1519):1099–1104, 2003.

- [8] C. Hauert, S. De Monte, J. Hofbauer, and K. Sigmund. Volunteering as red queen mechanism for cooperation in public good games. *Science*, 296:1129–1132, May 2002.
- [9] G. Szabó and C. Hauert. Phase Transitions and Volunteering in Spatial Public Goods Games. *Phys. Rev. Lett.*, 89:118101, Aug 2002.
- [10] L.Zhong, W.Xu, Y.Shi, and T.Qiu. Coupled dynamics of mobility and pattern formation in optional public goods games. *Chaos Soliton. Fract.*, 47:18 – 26, 2013.
- [11] C. Hauert and G. Szabó. Prisoner’s dilemma and public goods games in different geometries: Compulsory versus voluntary interactions. *Complexity*, 8(4):31–38, 2003.
- [12] C. Hauert and G. Szabó. Game Theory and Physics. *Am. J. Phys.*, 73:405–414, May 2005.
- [13] R. da Silva, A.L.C. Bazzan, A.T. Baraviera, and S.R. Dahmen. Emerging collective behavior and local properties of financial dynamics in a public investment game. *Physica A*, 371(2):610 – 626, 2006.
- [14] R. da Silva. The public good game on graphs: can the pro-social behavior persist? *Braz. J. Phys.*, 38:74 – 80, 03 2008.
- [15] C Hauert. Replicator dynamics of reward & reputation in public goods games. *J. Theor. Biol.*, 267(1):22 – 28, 2010.
- [16] C. Hauert, S. De Monte, J. Hofbauer, and K. Sigmund. Replicator dynamics for optional public goods games. *J. Theor. Biol.*, 218:187–194, Apr. 2002.
- [17] C. Hauert. Cooperation, Collectives Formation and Specialization. *Adv. Complex Syst.*, 9(4), 2006.
- [18] M.H. Vainstein, A. Silva, and J. Arenzon. Does mobility decrease cooperation? *J. Theor. Biol.*, 244(4):722 – 728, 2007.
- [19] T. Reichenbach, M. Mobilia, and E. Frey. Mobility promotes and jeopardizes biodiversity in rock-paper-scissors games. *Nature*, 448:1046 – 1049, 2007.
- [20] R. da Silva and H. A Fernandes. A study of the influence of the mobility on the phase transitions of the synchronous sir model. *J. Stat. Mech-Theory E*, 2015(6):P06011, 2015.