

COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES

REGIÃO SUL



IV Colóquio de Matemática
da Região Sul

O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

**MIRIAM TELICHEVESKY
PATRÍCIA KLASER**



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

O problema isoperimétrico

COLÓQUIOS DE MATEMÁTICA DAS REGIÕES

REGIÃO SUL



IV Colóquio de Matemática
da Região Sul

O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

MIRIAM TELICHEVESKY
PATRÍCIA KLASER

1ª EDIÇÃO
2016
RIO GRANDE



“A Matemática é não só um conjunto de técnicas úteis mas também um conjunto de ideias que fazem parte do patrimônio cultural da humanidade. Nesse sentido, ela existe há mais de dois mil anos, contém elementos de rara beleza, e constitui um dos maiores monumentos criados pelo espírito humano”

Manfredo P. do Carmo,
prefácio do livro “Superfícies Mínimas”,
16º Colóquio Brasileiro de Matemática

Sumário

1	Introdução	3
2	Soluções geométricas	7
2.1	Primeira solução: Método das reflexões	7
2.2	Segunda solução: Polígonos	11
3	Soluções utilizando Cálculo	17
3.1	Pré-requisitos de Cálculo e geometria de curvas	17
3.2	Terceira solução: Multiplicadores de Lagrange	25
3.3	Quarta solução: Teorema de Stokes	29
3.4	Quinta solução: Série de Fourier	35
3.4.1	A Desigualdade de Faber-Krahn	39
4	Bolhas de sabão	41
4.1	O caso tridimensional (primeiros passos)	41
4.2	Problema no semiespaço e problemas relacionados	44
4.3	Bolhas duplas	47
4.4	Problema de Plateau	47

Prefácio

Essas notas foram escritas como base para o minicurso “O Problema Isoperimétrico” ministrado pelas autoras no IV Colóquio de Matemática da Região Sul, que aconteceu de 02 a 06 de maio de 2016 na Universidade Federal do Rio Grande.

Aproveitamos a oportunidade para dizer um forte “Muito obrigada!” ao professor Leonardo Bonorino, nosso colega, que nos clareou pontos importantes acerca dos conteúdos de Análise e EDP contidos neste texto, desde a primeira edição deste minicurso, apresentada na Semana Acadêmica da Matemática da UFRGS em 2011.

Agradecemos também às Comissões Organizadora e Científica do IV Colóquio Regional de Matemática da Região Sul, pela oportunidade e pelo grande incentivo em organizar o minicurso, além da calorosa recepção em Rio Grande. Por fim, agradecemos especialmente ao público do minicurso. Esperamos que vocês se divirtam tanto quanto nós com o Problema Isoperimétrico.

Capítulo 1

Introdução

O problema isoperimétrico (clássico) no plano consiste em:

Dado um comprimento $L > 0$, encontrar, dentre todas as curvas do plano de comprimento L , aquela que engloba a maior área.

Esse problema possui uma versão chamada dual, que é equivalente e consiste em

Dada uma área $A > 0$, encontrar, dentre todas as curvas que englobam esta área, a que tem menor perímetro.

Apesar de ser antiquíssimo¹, o problema isoperimétrico (que vamos abreviar, daqui em diante, por PI) ainda inquieta matemáticos de todo o mundo: generalizações do PI ainda estão sendo formuladas e objetos matemáticos que foram desenvolvidos no seu estudo seguem sendo amplamente utilizados como ferramentas em outros contextos. Algumas das áreas da Matemática nas quais o PI ainda é um campo ativo são: Geometria Diferencial, Geometria Discreta e Convexa, Probabilidade, Teoria de Espaços de Banach, Equações Diferenciais Parciais, Teoria Geométrica da Medida, etc.

Quanto às generalizações do PI, elas consistem em considerar o PI em \mathbb{R}^3 , em \mathbb{R}^n ou ainda em variedades riemannianas. No espaço euclidiano \mathbb{R}^3 ele consiste em encontrar a superfície de área fixada A que engloba o maior volume possível. Podemos também falar desse problema em espaços de dimensão maior do que três, os \mathbb{R}^n , nos quais se procura hipersuperfícies de “área” (ou volume $(n - 1)$ -dimensional) A que englobem regiões de maior volume n -dimensional possível. Aqui usamos a palavra volume, como é em geral feito na literatura, para

¹O PI foi inicialmente formulado no plano Euclidiano provavelmente na Grécia Antiga, ou ainda antes. Segundo Blasjö [5] sua primeira solução foi exibida quando Zenodorus demonstrou que o círculo de comprimento L tem área maior do que qualquer polígono plano de comprimento L . O trabalho de Zenodorus, no entanto, foi perdido. A segunda solução que exibiremos nestas notas assemelha-se ao trabalho de Zenodorus.

falar no quanto de espaço é ocupado na dimensão que queremos tratar. Por exemplo, a área de uma região poderia ser chamada de volume 2–dimensional e o comprimento de volume 1–dimensional.

Além dos espaços euclidianos, o PI pode ser formulado em outros espaços, chamados variedades riemannianas, que podem, por ora, ser pensadas como ambientes em que uma noção de comprimento (ou volume $n - 1$ dimensional) e área estão bem definidos. Por exemplo, considere S uma esfera de raio 1 em \mathbb{R}^3 , ou seja, a superfície que engloba uma bola. Sabemos que S tem área 4π . Qual será a curva em S de menor perímetro que engloba área π sobre S ?

O PI também pode ser tratado em variedades com bordo, como é o caso do semiplano: Dentre todas as curvas de perímetro P contidas em um semiplano, qual delimita a maior área? É esperado que a solução desse problema seja diferente da solução do PI no plano todo porque ao englobar uma região do semiplano pode-se aproveitar parte da reta que o delimita. O mesmo para semiespaço, para um hemisfério da esfera, etc.

No plano, bem como em \mathbb{R}^n e em algumas variedades riemannianas, como as esferas \mathbb{S}^n e os espaços hiperbólicos \mathbb{H}^n , o PI já foi solucionado. Porém em certos espaços não homogêneos², o PI foi apenas recentemente solucionado ou ainda está em aberto. Por exemplo, para o parabolóide, que é uma superfície de revolução simples, a demonstração da solução foi exibida apenas em 1996, [3].

Gostaríamos de chamar atenção do leitor sobre o quanto as noções de perímetro, área, volume, etc, podem ser matematicamente complicadas, e portanto requerem cuidados ao serem precisadas. Afinal de contas, o que é o comprimento de uma curva plana? A noção de comprimento é muito simples entre curvas poligonais (ou seja, uniões de segmentos de reta): basta somar os comprimentos de todos os segmentos. Mas o que vem a ser, por exemplo, o comprimento de um círculo? Intuitivamente, podemos pensar que o círculo pode ser aproximado por polígonos, inscritos ou circunscritos, e à medida que o número de lados destes polígonos aumenta, seus comprimentos tendem a um número que chamamos comprimento do círculo. De fato esta é a abordagem natural para todas as curvas *retificáveis*, conforme veremos na Seção 3.1. Por outro lado, devemos chamar atenção que existem curvas que não são retificáveis, e se fizéssemos aproximações delas por poligonais, os comprimentos destas convergiriam para infinito! Exemplos destas curvas são os fractais. Mas não precisamos nos preocupar com estas curvas “de comprimento infinito” porque elas com certeza não são soluções do problema isoperimétrico! Então nestas notas nos restringimos apenas ao estudo de curvas de comprimento finito. As áreas englobadas por estas curvas são também finitas e podem ser calculadas utilizando a mesma aproximação por polígonos.

O terreno fica menos seguro quando estamos em contextos mais gerais, onde noções de área e perímetro, ou de volumes n e $(n - 1)$ –dimensionais, são ainda mais delicadas. Até mesmo quando continuamos no espaço Euclidiano, mas au-

²Espaços nos quais a geometria em torno de um ponto é diferente da geometria na vizinhança de de outro ponto.

mentamos a dimensão de 1 para 2, e precisamos então conhecer a noção de área de superfície. Para ilustrar o como isso pode ser complicado, citamos o que diz Radó em [28]: *a diferença em medir comprimento de curva e área de superfície é tão grande que pesa em vários campos, incluindo teorias de integração dupla em problemas de Cálculo das Variações*. Muitas vezes a pergunta passa a ser qual é a noção correta de área, antes mesmo de tentar minimizá-la.

Um aspecto interessante dentro de problemas isoperimétricos nos mais diversos ambientes é determinar a existência e propriedades das soluções. Soluções existem? São convexas? São regulares? São únicas? Nenhuma destas questões é trivial em geral. No plano, como veremos logo na primeira demonstração, as soluções devem ser convexas. É fácil observar porque isso é verdade, pois ao substituir um conjunto por sua envoltória convexa, aumentamos a área e reduzimos o perímetro, visto que a menor distância entre dois pontos é realizada pelo segmento de reta que os une. Mas a situação fica completamente diferente em dimensão 3 : existem regiões tridimensionais cuja envoltória convexa, embora tenha maior volume, tem área de superfície maior também, e portanto não podemos pensar que ela tenha uma razão *a priori* para ser o modo mais econômico de englobar o volume desejado.

Outra propriedade de soluções cuja demonstração rigorosa foi difícil de ser obtida, até mesmo no problema no plano, é sua regularidade. Intuitivamente, espera-se que uma solução do PI no plano seja uma curva suave, sem bicos ou pontas, já que parece que bicos e pontas “gastam” muita curva para delimitar pouca área. Assim, por muito tempo, aceitou-se como solução do PI o fato que qualquer curva **suave** de comprimento L delimita uma região de área menor ou igual a $L^2/4\pi$. Inclusive, 3 das soluções exibidas nessas notas são deste tipo, a saber, as três apresentadas no Capítulo 3.

Quanto à unicidade, o leitor talvez fique espantado com o seguinte fato, comentado de maneira muito interessante por Berger em [4]: *o plano é a única superfície onde a unicidade de solução do PI é fácil de provar. Existe uma boa razão para se esperar isso: mesmo em dimensão 3, a unicidade pode não ser verdade. Imagine uma esfera no espaço, e adicione a ela “cabelos”, ou seja, curvas (para dentro ou para fora, tanto faz). A área de superfície não se altera, tampouco o volume englobado por ela, e portanto a esfera “cabeluda” também é solução! Então a unicidade só pode ser esperada se adicionamos algumas hipóteses, como por exemplo pedindo regularidade ou convexidade (ambas não são satisfeitas pela esfera cabeluda)*. E Berger conclui dizendo que *desta simples observação podemos entender porque as questões envolvendo problemas isoperimétricos (um assunto surpreendentemente bonito, útil e simples de enunciar) estão usualmente fora dos currículos matemáticos*.

Existem muitos textos sobre o problema isoperimétrico. *Muitos mesmo*. Este é só mais um deles! Foi um trabalho difícil selecionar que abordagens faríamos aqui, quais resultados teriam demonstração, quais fatos seriam contados. Decidi-

mos organizar estas notas, bem como o minicurso para o qual elas servem de base, da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentamos duas soluções envolvendo apenas argumentos geométricos. No Capítulo 3, apresentamos três soluções que utilizam ferramentas de Cálculo e um pouco de Geometria Diferencial de curvas, que são apresentadas no começo do capítulo, na Seção 3.1. Por fim, no Capítulo 4 apresentamos algumas generalizações do PI e também alguns problemas relacionados, como é o caso do Problema de Plateau, e para isso utilizamos o exemplo concreto das bolhas e películas de sabão. Ao longo das notas, fazemos alguns comentários com indicações bibliográficas sobre tópicos um pouco mais avançados, e convidamos o leitor curioso a explorar mais a literatura a respeito do assunto. Advertimos, no entanto, que tais indicações estão longe de representar a imensidão de trabalhos a respeito.

Capítulo 2

Soluções geométricas

Nesse capítulo mostraremos duas resoluções do PI que utilizam apenas argumentos de geometria plana. A primeira delas, chamada *método das reflexões* consiste em supor que existe uma solução do PI e mostrar que um círculo pode ser tomado como essa solução. A segunda resolução considera inicialmente o problema isoperimétrico para polígonos e aborda o caso geral das curvas como um caso limite. Ambas as soluções podem ser encontradas em [17], porém sua origem não é clara, embora tenha aparecido nos trabalhos de Steiner.

2.1 Primeira solução: Método das reflexões

A primeira solução do problema isoperimétrico que vamos apresentar é bastante elementar. Ela consiste em supor que o PI admite de fato uma solução, fato que convidamos o leitor a refletir sobre a dificuldade de demonstrar, e, com essa suposição, demonstrar que uma solução é um círculo.

Com a suposição de que existe solução para o PI, pode-se considerar R uma região do plano de área π que é delimitada por uma curva suave C , de modo que C tem o menor dentre todos os possíveis comprimentos de uma curva que delimita uma região de área π . Para o leitor que não está familiarizado com os conceitos de curva e comprimento, recomendamos a leitura da seção 3.1.

Inicialmente, analisamos porque podemos escolher a área π sem perda de informação. Isso se deve ao que chamamos de homogeneidade do plano euclidiano, que nada mais é do que dizer que olhar o plano com uma lente de aumento não altera suas propriedades. A consequência disso para o PI é o fato que se conhecemos uma solução de área π , dilatando-a ou encolhendo-a, conhecemos uma solução correspondente à área que escolhermos.

Para justificar esse fato, fixamos um ponto O do plano e definimos uma espécie de multiplicação em relação a O , o que nada mais é do que fazer uma homotetia de centro O . Assim, dado um ponto X e um número positivo λ , o ponto λX é o ponto da semirreta de origem O que contém X que está a uma distância λ multiplicado pelo comprimento de OX , $\lambda|OX|$, do ponto O . São válidas as seguintes

propriedades para as homotetias:

1. Se R é uma região do plano de área a , então a região $\lambda R = \{\lambda X \mid X \in R\}$ tem área $\lambda^2 a$.
2. Se C é uma curva plana de comprimento c , então λC tem comprimento λc .

Conhecidas essas propriedades, convidamos o leitor a demonstrar o seguinte lema

Lema 1 (homogeneidade do PI). *Se R é uma solução do PI de área a e λ é um número positivo, então λR é uma solução do PI de área $\lambda^2 a$.*

Levando em conta o lema acima, podemos escolher o número positivo π e tratar do PI para área π .

Exercício 1. *Formule precisamente e demonstre que no Lema acima poderíamos ter fixado o perímetro, ao invés da área.*

Assim, seja R uma solução do PI de área π .

Proposição 1. *Se h é uma reta horizontal que divide R em duas regiões de mesma área, então h divide a curva C que delimita R em duas curvas de mesmo comprimento.*

Demonstração. Essa proposição pode ser demonstrada por absurdo. Suponha que a parte de C abaixo da reta h tem comprimento menor. Então, seria possível substituir R pela região formada pela parte de R que está abaixo de h unida com uma reflexão dessa região através de h , como mostra a Figura 2.1. Com essa substituição, a área da nova região permaneceria a mesma de R e o comprimento da sua fronteira ficaria menor.

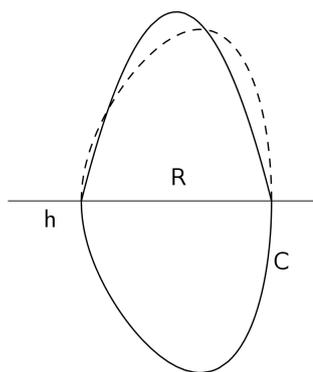


Figura 2.1: Reflexão

□

2.1. PRIMEIRA SOLUÇÃO: MÉTODO DAS REFLEXÕES

Por causa da Proposição acima podemos supor que a região R é simétrica com respeito a reflexões em relação a reta h . Caso isso não ocorra, basta substituir R pela região obtida pela metade inferior de R unida com sua reflexão.

O mesmo procedimento da prova da Proposição acima, tomando agora v uma reta vertical que divide R em duas regiões de mesma área, permite concluir que v divide C em duas curvas de mesmo comprimento. Assim, podemos supor também que R é simétrica com respeito a reflexões por v .

As retas h e v são perpendiculares. Seja O o ponto em que elas se encontram. Como consequência do próximo exercício (por quê?), tem-se que qualquer reta pelo ponto O divide R em duas regiões de mesma área delimitadas por curvas de mesmo comprimento.

Exercício 2. *Demonstre que, se R é simétrica com respeito às reflexões por h e v , então R é simétrica com respeito a rotações de 180° em torno do ponto O . Dica: Olhe a Figura 2.2.*

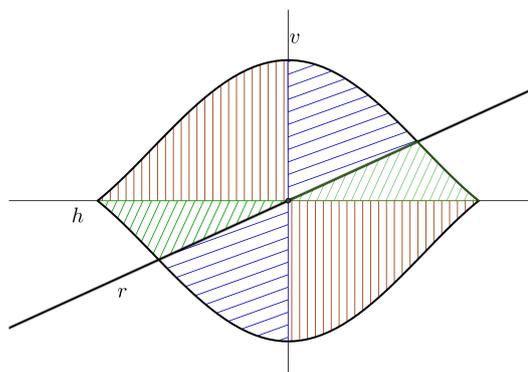


Figura 2.2: Rotação

Até aqui observamos que se o PI tem uma solução, podemos supor que existe um ponto O , tal que qualquer reta por O divide a região R em duas de mesma área e a curva C em duas de mesmo comprimento.

Uma propriedade sobre soluções do PI que se verifica em diversos contextos é o fato de que essas soluções são sempre conjuntos convexos. Vamos usar esse fato, cuja prova apresentamos aqui, também em outras soluções do PI.

Definição 1. *Uma região S do plano é dita convexa se dados dois pontos A e B pertencentes a S , o segmento AB está contido em S .*

Lema 2 (Lema da Convexidade). *Se S é uma solução do PI no plano, então S é convexa.*

Demonstração. Suponha por absurdo que S é uma solução do PI que não é convexa. Então existem dois pontos A e B de S tais que o segmento AB não está

contido em S . Assim, AB deve sair e entrar em S pelo menos uma vez. Sejam A' e B' os primeiros pontos de saída e entrada em S . Considere S' a região obtida substituindo o trecho da fronteira de S que vai de A' a B' pelo segmento $A'B'$.

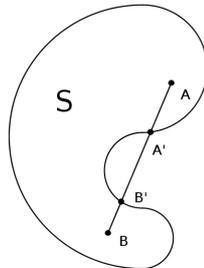


Figura 2.3: Convexidade das Soluções

Tem-se que a região S' tem área maior do que a área de S e, como o segmento é o caminho mais curto entre dois pontos no plano, S' tem perímetro menor do que S . Esse fato contradiz a suposição de que S é solução do PI. Mais precisamente, poderíamos encolher S' por uma homotetia de modo que a área da região encolhida coincida com a área de S e o perímetro dessa região seria menor do que o de S' , portanto menor do que o de S . \square

Usando a convexidade das soluções do PI, demonstramos a última proposição dessa solução.

Proposição 2. *Seja R a solução do PI de área π que estamos supondo simétrica em relação à reflexões com respeito a h e v . Então qualquer reta r pelo ponto O de intersecção entre h e v encontra a curva C ortogonalmente.*

Demonstração. Se existisse uma reta r por O que não interseccionasse C ortogonalmente, como sabemos que r divide R em regiões de mesma área e C em curvas de mesmo comprimento, poderíamos obter uma solução não convexa para o PI, como mostra a Figura 2.4. Com isso, teríamos uma contradição com o Lema da convexidade (Lema 2). \square

As únicas curvas planas que interceptam todas as retas por um ponto O ortogonalmente são os círculos de centro O . Assim, concluímos que se existe uma região isoperimétrica que delimita uma área de medida π , então essa região pode ser delimitada por um ou mais círculos concêntricos. A região delimitada por mais de um círculo concêntrico não é convexa, portanto a solução que procuramos é necessariamente um círculo.

Observação 1. *Ressaltamos aqui que essa primeira demonstração prova que o círculo é uma solução partido do pressuposto que dentre todas as regiões de área*

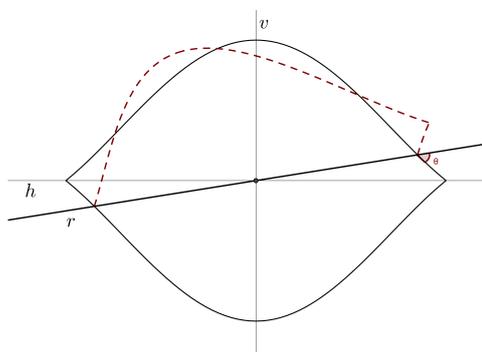


Figura 2.4: Ângulo com a reta r

π , existe uma cuja curva de fronteira é o mais curta possível. Essa é uma hipótese bastante forte, como chama atenção Perron em [27], veja também em [5]: Suponha que existe um número natural n que é o maior de todos. Então é fácil mostrar que esse número é 1, já que caso $n \neq 1$, existe um método de obter um número maior que n , a saber, elevá-lo ao quadrado: $n^2 > n$. Todos sabemos que 1 não é o maior número natural, mas a única falha na demonstração acima é supor a existência de um maximizante. Fica a pergunta aqui se não estamos falhando da mesma forma ao supor a existência de uma curva minimizante delimitando uma região de área π . A demonstração da próxima seção bem como as soluções das Seções 3.3 e 3.4 não supõem existência.

2.2 Segunda solução: Polígonos

Nessa seção, antes de tratar do problema isoperimétrico para curvas em geral, vamos considerar uma versão restrita ao polígonos de n lados, que chamamos n -ângonos. Essa solução, por seu caráter geométrico, inclui ideias muito antigas (Zenodorus, em torno de 200 a. C.) e pode ser lida no trabalho de conclusão de Howards, [16].

PI para n -ângonos: Fixado n natural e um número positivo A , dentre todos os n -ângonos de área A , qual tem o menor perímetro?

Nesse momento, sugerimos ao leitor que pare e pense sobre como deve ser a solução antes de continuar a leitura.

Primeiramente justificamos que existe um n -ângono solução do PI, que aqui é conveniente pensar na versão equivalente com perímetro fixo L . Observamos que cada n -ângono fica determinado pela localização de seus n vértices $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ no plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Assim, um n -ângono \mathcal{P}_n pode ser visto como um elemento de \mathbb{R}^{2n} . a saber, a $2n$ -upla $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$. Com isso, a área de \mathcal{P}_n pode ser interpretada como uma função

$A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$. Queremos nos restringir ao conjunto dos n -ágonos de perímetro L e demonstrar que nesse conjunto a função área tem um mínimo. Como todos os pontos do plano são 'iguais', podemos fazer mais uma restrição e pensar que o domínio de \mathbb{R}^{2n} ao qual queremos restringir a função A é o conjunto dos pontos que são vértices de \mathcal{P}_n com perímetro L e que além disso o último vértice é a origem, ou seja,

$$\{(x_1, y_1, \dots, y_{n-1}, x_n = 0, y_n = 0) \mid \|(x_1, y_1)\| + \sum_{i=1}^{n-1} \|(x_i, y_i) - (x_{i+1}, y_{i+1})\| = P\}.$$

Como o conjunto acima é um conjunto compacto e a função A é contínua, tem-se que existe um minimizante¹. Assim, concluímos que o PI para n -ágonos tem solução.

Exercício 3. *O Lema da Convexidade 2 foi demonstrado para curvas. Enuncie e demonstre uma versão para n -ágonos.*

Decorre do exercício que um n -ágono solução deve ser convexo. Vamos exibir a solução através de duas proposições. Nossas demonstrações seguem as ideias de [17] e outras provas dessas proposições podem ser encontradas em [12].

Proposição 3. *Se \mathcal{P}_n é um n -ágono de área A que é solução do PI, então \mathcal{P}_n é equilátero, i. e., todos os lados de \mathcal{P}_n têm mesma medida.*

Demonstração. Vamos supor por absurdo que \mathcal{P}_n tem dois lados consecutivos de medidas distintas (AB e BC) e mostraremos que existe um n -ágono de mesma área que \mathcal{P}_n , porém com perímetro menor. Com isso, temos um absurdo e podemos concluir que \mathcal{P}_n não é a solução que buscamos.

Suponha que AB e BC são lados consecutivos de \mathcal{P}_n e considere a reta \overline{AC} , que tem o segmento AC inteiramente contido em \mathcal{P}_n , já que ele é convexo. Considere r a reta paralela a AC pelo ponto B . Observe que se trocamos B por qualquer outro ponto B' de r , e formarmos um novo polígono \mathcal{Q} , então \mathcal{Q} terá a mesma área de \mathcal{P}_n . Tome A' como a reflexão de A pela reta r . Note que os comprimentos $|AB|$ e $|A'B|$ coincidem, bem como quaisquer comprimentos $|AX|$ e $|A'X|$ com $X \in r$. Assim, trocando B por um ponto $B' \in r$ tal que $|A'B'| + |B'C|$ é o menor possível, encontramos o ponto B' que ao substituir B diminui o perímetro de \mathcal{P}_n .

Deixamos a cargo do leitor justificar porque o ponto que minimiza a soma acima é o ponto M indicado na Figura 2.5 que satisfaz $|AM| = |CM|$. Com isso concluímos que \mathcal{P}_n , é um n -ágono equilátero. \square

Proposição 4. *Se \mathcal{P}_n é um n -ágono que é solução do PI, então \mathcal{P}_n é regular, i. e., todos os lados e ângulos de \mathcal{P}_n têm mesma medida.*

¹O leitor que não teve ainda contato com Topologia deve pensar que os conjuntos compactos funcionam como intervalos fechados de \mathbb{R} , nos quais funções contínuas assumem sempre valores máximo e mínimo.

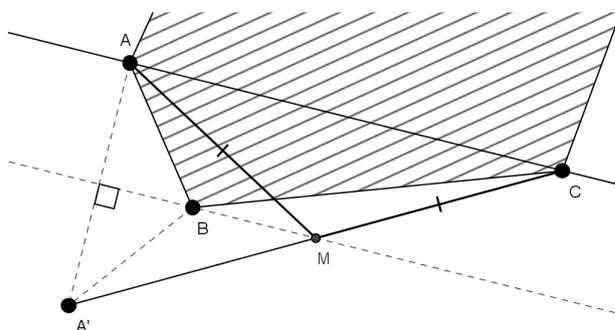


Figura 2.5: Polígono equilátero

Demonstração. Pela proposição anterior, já sabemos que \mathcal{P}_n é equilátero.

Para a prova dessa proposição vamos considerar a versão equivalente do PI, i. e., vamos encontrar o n -ágono de perímetro fixo que tem a maior área. Vamos demonstrar que os vértices de \mathcal{P}_n devem estar todos sobre uma circunferência. Para tal, lembramos um fato sobre circunferências.

Fato da Geometria Plana: Se o segmento PQ é diâmetro de uma circunferência \mathcal{C} e X é um ponto do plano tal que \widehat{PXQ} mede 90° , então X está sobre \mathcal{C} .

Caso 1: $n = 2k$ é um número par.

Considere P e Q dois vértices opostos de \mathcal{P}_n , isto é, existem $k - 1$ vértices de \mathcal{P}_n entre P e Q . Seja r a reta por P e Q e observe que r divide \mathcal{P}_n em dois polígonos de mesma área. Isso se dá porque os polígonos têm o mesmo perímetro e estamos supondo que \mathcal{P}_n é solução do PI. Assim, se um dos polígonos tivesse área menor do que o outro, poderíamos substituir o de área menor pela reflexão do de área maior, obtendo assim um polígono de área maior do que \mathcal{P}_n e mesmo perímetro de \mathcal{P}_n .

Seja X um dos vértices de \mathcal{P}_n entre P e Q . Afirmamos que \widehat{PXQ} mede 90° .

Se Q denota o $(k + 1)$ -ágono que corresponde a parte de \mathcal{P}_n que contém X , então a área de Q é dada por

$$A(Q) = A(PolP) + A(PXQ) + A(PolQ),$$

com $PolP$ e $PolQ$ como indicados na Figura 2.6. Pensando que o polígono $PolQ$ da figura é um polígono rígido, vamos mover Q sobre a reta r carregando o polígono $PolQ$ sobre o segmento XQ . Observe que isso não altera o perímetro de Q nem as áreas de $PolP$ e $PolQ$. Assim, se posicionamos Q sobre r de modo que \widehat{PXQ} meça 90° , maximizamos a área de PXQ (exercício 4 abaixo) e portanto a área de Q . Tomando \mathcal{R} o polígono que é a união de Q com sua reflexão sobre a reta r , temos que ou $\mathcal{R} = \mathcal{P}_n$ ou \mathcal{R} tem área maior do que a área de \mathcal{P}_n . Com isso, con-

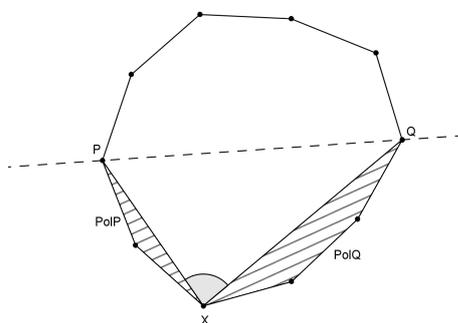


Figura 2.6: Polígono equiângulo

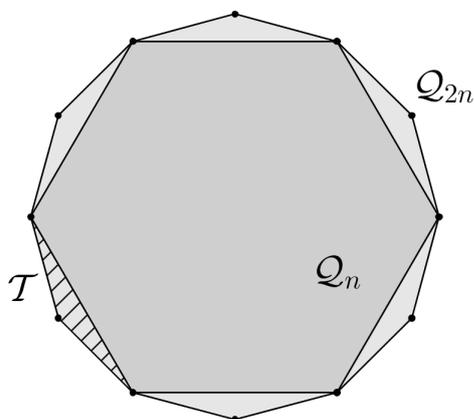


Figura 2.7: Polígono equiângulo II

concluimos que para qualquer X vértice de \mathcal{P}_n , temos \widehat{PXQ} medindo 90° . Usando o fato de Geometria Plana acima mencionado, concluimos que \mathcal{P}_n tem seus vértices sobre uma circunferência de diâmetro PQ . Portanto \mathcal{P}_n é regular.

Caso 2: n é um número ímpar.

Considere Q_{2n} o polígono regular de $2n$ lados que sabemos ser solução do PI para $2n$ -ágonos. Ligando n vértices de Q_{2n} , pulando um a cada passo, de modo que nenhum par de vértices consecutivos seja utilizado, obtemos Q_n , polígono regular de n lados (por quê?). Além disso, denotamos por \mathcal{T} o triângulo formado por dois lados consecutivos de Q_{2n} e o lado correspondente de Q_n .

Seja \mathcal{P}_n o polígono solução do PI para n -ágonos. Colando sobre cada lado de \mathcal{P}_n um triângulo \mathcal{T} , veja Figura 2.7, obtemos um polígono de $2n$ lados \mathcal{P}_{2n} . É necessário que \mathcal{P}_{2n} seja congruente a Q_{2n} , caso contrário teríamos uma contradição com o primeiro caso. Mas se $\mathcal{P}_{2n} \equiv Q_{2n}$, então $\mathcal{P}_n \equiv Q_n$, o que conclui essa

demonstração. □

Na última proposição não só demonstramos que os polígonos regulares são soluções do PI, como que eles são as únicas soluções.

Exercício 4. *Mostre que dentre todos os triângulos com lados medindo l e m o que tem maior área é o triângulo retângulo com catetos de medida l e m .*

Agora vamos comparar polígonos com números de lados diferentes e verificar que se mantemos o perímetro L dos polígonos e comparamos as soluções do PI para n -ágonos com n variando, a área da solução aumenta se n aumenta. Essa parte é uma adaptação das provas apresentadas em [5, 21].

Proposição 5. *A função $A(n) =$ área do n -ágono regular de perímetro L é uma função crescente.*

Demonstração. Seja \mathcal{P}_n o n -ágono regular de perímetro P . Para calcular a área de \mathcal{P}_n dividimos \mathcal{P}_n em n triângulos isósceles congruentes entre si cuja base mede L/n e o ângulo oposto a base mede $2\pi/n$. Assim,

$$A(n) = \frac{Lh_n}{2}$$

com h_n o que se chama apótema de \mathcal{P}_n , indicada na Figura 2.8.

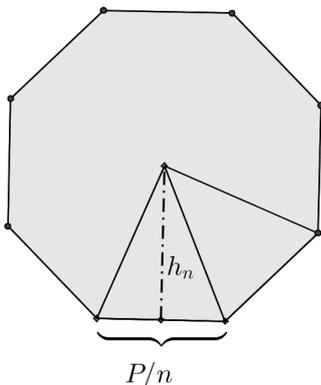


Figura 2.8: Apótema

Tem-se que h_n cresce com n e isso pode ser via trigonometria, pois tem-se que $h_n = \frac{L \cot(\pi/n)}{2n}$, que é uma função crescente de n . □

Corolário 1 (Desigualdade isoperimétrica para polígonos). *Vale uma desigualdade isoperimétrica para polígonos, isto é, se \mathcal{P} é um polígono de perímetro L , então a área de \mathcal{P} satisfaz para todo $n \geq 3$,*

$$A(\mathcal{P}) \leq \frac{L^2 \cot(\pi/n)}{4n^2} \leq \frac{L^2}{\pi^2}$$

Como consequência desse Corolário e do fato que curvas retificáveis podem ser aproximadas por poligonais (3.1), temos o próximo corolário.

Corolário 2 (Lema 1.39 de [21]). *Seja α uma curva plana fechada simples retificável de comprimento L que delimita uma região de área A e seja $\varepsilon > 0$. Existe um polígono \mathcal{P}' de perímetro L' e área A' , tal que $|L - L'| < \varepsilon$ e $|A - A'| < \varepsilon$.*

Sugerimos o leitor familiarizado com curvas escreva os detalhes da demonstração desse corolário, com o qual poderemos concluir essa segunda solução do PI.

Teorema 1 (Desigualdade isoperimétrica para curvas, Teorema 1.3.10 de [21]). *Seja C uma curva fechada simples retificável de comprimento L que engloba uma região de área A . Então*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

E, se C for um círculo, vale a igualdade.

Demonstração. Primeiramente, observe que o círculo de perímetro L tem área maior do que qualquer n -ágono (regular) de perímetro P , porque a área do círculo é

$$\frac{L^2}{4\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2 \cot(\pi/n)}{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} A(n).$$

como descrito na Proposição 5.

Agora mostramos que qualquer que seja a curva fechada simples C como no enunciado, tem-se

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja \mathcal{P}' o polígono do Corolário acima. Note que, como vale a desigualdade isoperimétrica para \mathcal{P}' ,

$$4\pi A \leq 4\pi A' + 4\pi\varepsilon \leq L'^2 + 4\pi\varepsilon \leq (L + \varepsilon)^2 + 4\pi\varepsilon = L^2 + \varepsilon(2L + 4\pi + \varepsilon).$$

Como essa desigualdade vale para ε tão pequeno quanto se queira, $4\pi A \leq L^2$. □

Capítulo 3

Soluções utilizando Cálculo

Neste capítulo apresentamos três soluções para o PI utilizando ferramentas de Cálculo e um pouco de Geometria Diferencial de curvas.

Como as ferramentas utilizadas requerem argumentos de Cálculo diferencial e de Geometria Diferencial, as curvas nesta Seção serão sempre supostas *suficientemente suaves*, no sentido que são de classe C^m para um m suficientemente grande de modo que os argumentos funcionem (em geral C^1 ou C^2 , às vezes por partes, já é o suficiente). Isso pode parecer uma grande restrição dentro da classe das curvas retificáveis. De fato, não é nem um pouco imediato que podemos reduzir o problema para trabalhar apenas com curvas suaves, mas supomos verdade neste capítulo.

3.1 Pré-requisitos de Cálculo e geometria de curvas

Nesta seção apresentamos alguns dos pré-requisitos para as três demonstrações utilizando ferramentas analíticas que aparecem neste capítulo. Não expomos todos os detalhes, mas tentamos aqui resumir tudo que é utilizado efetivamente nas demonstrações. Encorajamos o leitor menos familiarizado com a geometria de curvas no \mathbb{R}^2 ou com Cálculo a várias variáveis a fazer os exercícios propostos para se sentir um pouco mais ambientado. Ao longo do texto, fazemos algumas referências que podem guiar aqueles que queiram se aprofundar nos assuntos.

Dizemos que uma função é de classe C^m , onde $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$, quando ela possui derivadas contínuas até ordem m . Dizer que uma função é C^m por partes significa que é possível decompor o domínio de definição em uma quantidade finita de subdomínios onde ela é de classe C^m .

Curvas no plano

Uma referência interessante para o estudo de curvas (embora aqui tenhamos adaptado para nossos propósitos) é o livro clássico de Manfredo do Carmo [8].

Chamamos de *curva parametrizada* (ou, por simplicidade, *curva*) uma aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo fechado, por exemplo, $[a, b]$.

Dada uma subdivisão $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b\}$ do intervalo $[a, b]$, denotamos por $(\alpha, \{t_i\})$ a linha poligonal obtida ligando os pontos $\alpha(t_{i-1})$ e $\alpha(t_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$.



Figura 3.1: Subdivisão de uma curva

O comprimento de $(\alpha, \{t_i\})$ é $L(\alpha, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^m \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana em \mathbb{R}^2 , ou seja, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. A curva α é dita *retificável* quando for finito o supremo dos comprimentos de todas as linhas poligonais obtidas de subdivisões de $[a, b]$. Neste caso, tal supremo é dito o *comprimento de α* , e será denotado por $L(\alpha)$.

Se escrevemos a curva α em coordenadas do \mathbb{R}^2 , temos que existem x e y funções contínuas tais que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ para todo $t \in I$.

Exemplo 1. Convidamos o leitor a esboçar as curvas $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. Os esboços de $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ não são tão fáceis de fazer, e por isso os apresentamos aqui.

$$\alpha_1(t) = (t, t).$$

$$\alpha_2(t) = (t^2, t^2).$$

$$\alpha_3(t) = (t^3, t^3).$$

$$\alpha_4(t) = (\cos t, \sin t).$$

$$\alpha_5(t) = (t^3, t^2).$$

$$\alpha_6(t) = \left(\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3} \right). \text{ (Fólium de Descartes)}$$

$$\alpha_7(t) = (e^{t/10} \cos t, e^{t/10} \sin t). \text{ (uma espiral logarítmica)}$$

O leitor que quiser encontrar muitos outros exemplos de curvas (planas, em \mathbb{R}^3 e até superfícies e fractais) pode navegar em [11].

Quando x e y forem de classe C^1 (por partes), diremos que α é C^1 (por partes). Curvas C^1 por partes admitem nos pontos de diferenciabilidade o vetor velocidade

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

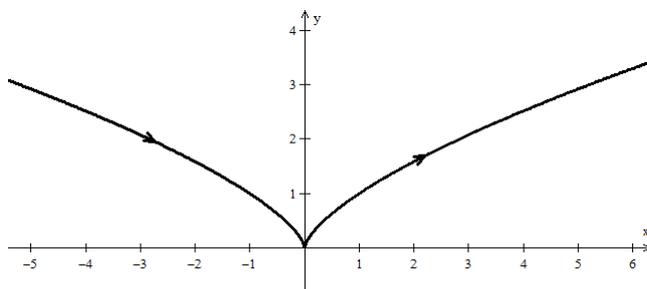


Figura 3.2: $\alpha_5(t) = (t^3, t^2)$.

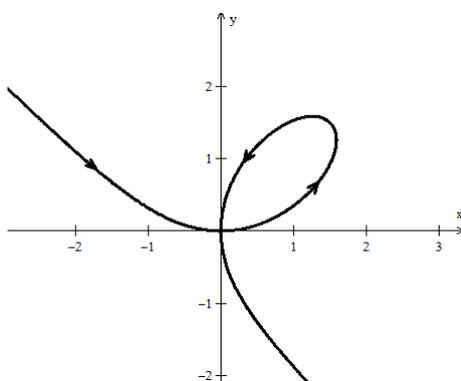


Figura 3.3: $\alpha_6(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$.

Segue das definições acima (e de que o conjunto dos pontos de não diferenciabilidade não contribui com a integral) que comprimento de uma curva $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 por partes é dado pela seguinte expressão:

$$P(\alpha) = \int_0^l \|\alpha'(t)\| dt, \quad (3.1)$$

O *traço* da curva α é o seu desenho no plano, ou seja, é a imagem

$$\alpha(I) = \{\alpha(t) \mid t \in I\}.$$

É comum, por abuso de linguagem, também chamar de curva o traço de uma curva. A diferença é sutil e às vezes irrelevante. Quando quisermos nos referir, nestas notas, ao traço de uma curva, vamos denotá-lo por C, \tilde{C} , etc. Uma curva C admite infinitas parametrizações, ou seja, funções contínuas $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $C = \beta(I)$, onde $I \subset \mathbb{R}$ são intervalos fechados. Se C admitir uma parametrização de classe C^1 , então ela é dita ser de classe C^1 .

Exercício 5. *Mostre o comprimento de uma curva de classe C^1 independe da parametrização.*

Uma curva suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *regular* se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

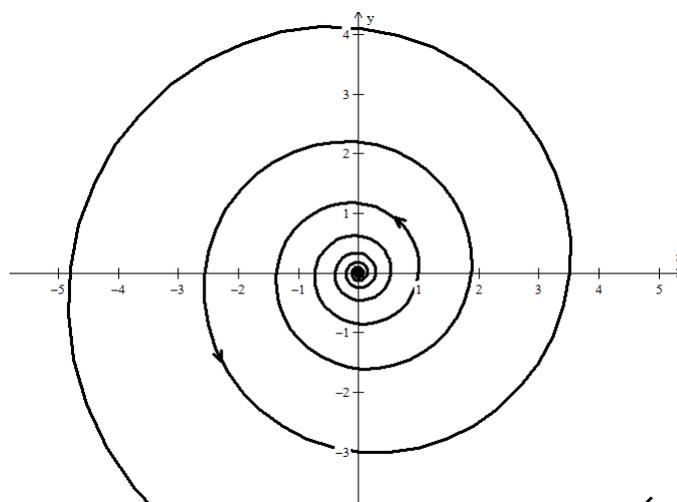


Figura 3.4: $\alpha_7(t) = (e^{t/10} \cos t, e^{t/10} \sin t)$.

Exercício 6. Indique quais curvas apresentadas no Exemplo 1 são regulares e quais não são.

Verifique se existem duas curvas no Exemplo 1 que possuem o mesmo traço.

É possível ter um traço parametrizado por uma curva parametrizada regular e por outra não regular? Justifique.

Uma propriedade bem interessante das curvas regulares (e bastante útil) é dada na proposição a seguir.

Proposição 6. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Existe $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular tal que β e α têm o mesmo traço em \mathbb{R}^2 e β satisfaz $\|\beta'(s)\| = 1, \forall s \in [0, l]$.

Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ com vetor tangente satisfazendo $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco; abreviadamente dizemos que é uma curva p.c.a. Conforme a proposição acima, todas as curvas regulares admitem parametrização p.c.a..

Exercício 7. Apresente uma parametrização pelo comprimento de arco do círculo de raio $r > 0$ centrado na origem $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

As curvas regulares têm uma direção normal bem definida ao longo delas. De fato, é a direção perpendicular a $\alpha'(t)$. Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, então um vetor normal aponta na direção ortogonal a $(x'(t), y'(t))$, que é a direção dada por $(-y'(t), x'(t))$. Quando α é p.c.a., o campo

$$N(t) := N(\alpha(t)) = (-y'(t), x'(t))$$

3.1. PRÉ-REQUISITOS DE CÁLCULO E GEOMETRIA DE CURVAS 21

é unitário e normal a α em $\alpha(t)$. Observe que $-N(t)$ também é normal unitário, mas aponta no sentido contrário. O sentido de N é preferencial, veja a Observação 2

Quando α é curva p.c.a. de classe C^2 , a derivada do campo normal N é dada por $N'(t) = (-y''(t), x''(t))$. Derivando em relação a t a igualdade $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$ obtemos

$$x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t) = 0,$$

e portanto $N'(t)$ é ortogonal a $N(t)$ ¹. Como $N(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$ e a $N'(t)$ simultaneamente, mas no \mathbb{R}^2 só existem duas dimensões, segue que obrigatoriamente $N'(t)$ é paralelo a $\alpha'(t)$. Assim, existe uma constante (que depende de t) $k(t)$, chamada *curvatura de α em $\alpha(t)$* ,² tal que

$$N'(t) = -k(t)\alpha'(t). \quad (3.2)$$

O sinal de $-$ na frente de k será melhor entendido a seguir.

Exercício 8. *Mostre que se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é curva p.c.a. e sua curvatura é $k(t)$, então x , y e k satisfazem as igualdades*

$$\begin{cases} x''(t) = -k(t)y'(t) \\ y''(t) = k(t)x'(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

A noção de curvatura é uma das mais importantes dentro da geometria de curvas. Aliás, em geral temos que *curvaturas* dizem muito a respeito de entidades geométricas diferenciáveis. Por exemplo: observe que (ao menos em módulo) $k(t)$ definido acima mede o comprimento de $N'(t)$, e portanto mede o quanto $N(t)$ varia com t . Se uma curva tem, por exemplo, k constante igual a zero, isto significa que N é constante, ou seja, α deve ser um segmento de reta. Assim, podemos ter em mente que a curvatura de uma curva mede *o quanto ela deixa de ser uma reta*.

Observação 2. *Outra possível interpretação da curvatura é a seguinte: conforme observado acima, α' e α'' são ortogonais, e portanto α'' é paralelo a N . E precisamente, o sentido preferencial de N é o sentido dado por α'' . Desta forma, a curvatura k é sempre uma quantidade não-negativa, e é dada por $k(t) = \|\alpha''(t)\|$, o que com as observações acima é equivalente a*

$$\alpha''(t) = k(t)N(t). \quad (3.4)$$

Exercício 9. *Mostre a equivalência entre as definições (3.2) e (3.4) (Dica: utilize coordenadas.)*

Exercício 10. *Mostre que a curvatura de um círculo de raio r é constante igual a $1/r$.*

¹Isto também prova que $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$, fica como exercício se convencer.

²Ressaltamos que esta definição de curvatura é feita em utilizando curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. Fica como exercício para o leitor tornar preciso o fato que k depende do traço da curva regular (isto é, da imagem de α no plano) e não da parametrização.

É possível provar a recíproca: se a curvatura de uma curva é constante igual a $1/r$, então ela está contida em um círculo de raio r . Este fato será assumido aqui como verdadeiro, pois sua prova requer um pouco de conhecimento da teoria de EDOs, o que foge do objetivo do curso.

Uma curva $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *fechada e simples*, ou simplesmente *de Jordan*, se $\alpha(0) = \alpha(l)$ e α é injetiva em $[0, l[$. Uma curva de Jordan delimita uma região R do plano. Ao parametrizá-la, costumamos orientá-la no sentido anti-horário, de modo que R fique à esquerda de quem percorre a curva no sentido de t crescente. Pode-se mostrar que (se α é regular) com esta orientação tem-se que $-N(t) = (y', -x')$ é o normal exterior a R . Estas são as orientações corretas utilizadas no Teorema da Divergência para obter a área de R como uma integral de linha, veja nas próximas subseções.

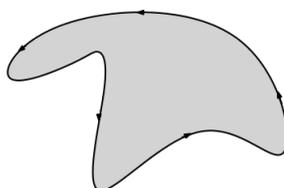


Figura 3.5: Orientação do bordo

Campos de vetores e Teorema de Stokes

Definição 2. Um campo de vetores V em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma função que a cada ponto $p \in \Omega$ associa um vetor $V(p) = (X(p), Y(p))$ do \mathbb{R}^2 , onde X, Y são funções de Ω em \mathbb{R} . O campo V é dito diferenciável quando X, Y forem diferenciáveis.

Em outras palavras, um campo V definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma aplicação $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Um exemplo de campo de vetores é o gradiente de uma função: Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, definimos o campo gradiente de f por $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right)$.

Definição 3. Se V é um campo de vetores em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dado por $V(p) = (X(p), Y(p))$, o divergente de V é definido por

$$\operatorname{div} V(p) = \frac{\partial X}{\partial x}(p) + \frac{\partial Y}{\partial y}(p).$$

Exemplo 2. a) Se $V(x, y) = (-y, x)$, então $\operatorname{div} V(x, y) = 0$.

b) Se $V(x, y) = (\cos x + 7y^2 - 8e^x, \sin x + e^{-y})$, então $\operatorname{div} V = -\sin x - 8e^x + \cos x - e^{-y}$.

3.1. PRÉ-REQUISITOS DE CÁLCULO E GEOMETRIA DE CURVAS 23

O próximo exercício dá ao leitor um pouco de familiaridade com o operador divergente e servirá de ferramenta nas demonstrações que seguem.

Exercício 11. Considere V e W campos de vetores diferenciáveis em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Demonstre que o divergente tem as seguintes propriedades:

- a) $\operatorname{div}(V + W) = \operatorname{div}V + \operatorname{div}W$.
 b) $\operatorname{div}(fV) = f\operatorname{div}V + \langle \nabla f, V \rangle$.

Também precisamos que o leitor conheça a definição de *laplaciano de uma função*.

Definição 4. Se f é de classe C^2 , o Laplaciano de f , denotado por Δf , é definido por

$$\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f).$$

Note que se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 , então $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Em algumas soluções do PI, bem como em outros contextos de matemática que relacionam fronteira e interior, utiliza-se o Teorema de Stokes (ou do Divergente).

Teorema 2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira suave C . Se V é um campo de vetores diferenciável com derivada contínua em uma vizinhança de $\overline{\Omega}$, então

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}V \, dx \, dy = \int_C \langle V, n \rangle \, ds,$$

para n o campo de vetores unitário ortogonal a C que aponta na direção exterior de Ω , onde ds denota o elemento de comprimento da curva C .

Observe que o teorema pode ser visto como uma versão bidimensional do Teorema Fundamental do Cálculo, já que relaciona a integral da derivada de uma função com a própria função no bordo.

Observação 3. Uma integral de linha na curva C é calculada da seguinte forma: se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametriza C , e $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ é a função a ser integrada, então

$$\int_C g \, ds = \int_a^b g(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| \, dt.$$

Note que esta é, então, a integral de uma função de uma variável. O elemento de comprimento citado no Teorema 2 é então $\|\alpha'(t)\| \, dt$. Fica como exercício para o leitor mostrar que a integral de linha independe da parametrização.

Existem ainda as integrais de linha com respeito às variáveis x e y , para curvas orientadas: se escrevemos α em coordenadas $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e α concorda com a orientação de C , tais integrais são definidas por

$$\int_C g(x, y) \, dx := \int_a^b g(\alpha(t)) x'(t) \, dt, \quad \int_C g(x, y) \, dy := \int_a^b g(\alpha(t)) y'(t) \, dt.$$

Diferentemente da integral de linha do parágrafo anterior, estas **dependem da orientação**.

3.2 Terceira solução: Multiplicadores de Lagrange em um espaço de curvas

A solução apresentada nesta Seção tem uma pitada de Cálculo das Variações, área da Análise que estuda o problema de encontrar extremos para funções contínuas definidas em algum espaço de funções. A técnica utilizada é a de Multiplicadores de Lagrange em espaços de Banach (veja por exemplo [32]). Nestas notas o que fazemos é a variação de uma curva a partir de sua direção normal, utilizando para isso funções diferenciáveis.

Outra abordagem (possivelmente mais natural) é obter equações de Euler-Lagrange para o problema. Em [5] é possível encontrá-la com detalhes. Estas duas resoluções via variações guardam várias semelhanças, mas optamos por utilizar multiplicadores de Lagrange porque a técnica é análoga à que é vista em cursos de Cálculo a várias variáveis, com a qual o leitor possivelmente apresenta alguma familiaridade.

Por fim, um argumento variacional similar ao que apresentamos aqui, utilizando também a desigualdade isoperimétrica (veja (3.13)), pode ser encontrado em [23].

É importante salientar que **esta demonstração supõe existência de solução** para o PI, o que não é imediato, conforme já discutido na Observação 1. Além disso, é suposto que a solução é de classe C^2 .

Num primeiro curso de Cálculo, aprendemos que se uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $]a, b[$ tem um ponto de máximo ou mínimo relativo (qualquer um dos dois é chamado extremo relativo) em $c \in]a, b[$, então c é um ponto crítico de f , ou seja, $f'(c) = 0$. Em dimensões maiores acontece algo similar. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $q \in U$ é um extremo relativo de F , então para qualquer direção $v \in \mathbb{R}^n$, vale que a restrição de F a um segmento de reta

$$s \in [-\varepsilon, \varepsilon] \mapsto q + sv$$

tem extremo relativo em $s = 0$, e portanto se anula a derivada

$$\left. \frac{d}{ds} F(q + sv) \right|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(q + sv) - F(q)}{s}. \quad (3.6)$$

ou seja,

$$\langle \nabla F(q), v \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Resumindo:

Teorema 3. *Se $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável definida no aberto U e tal que q é um ponto de extremo relativo de F , então o gradiente de F em q satisfaz $\nabla F(q) = 0$.*

Seguindo esta ideia, poderíamos ser tentados a atacar o PI da seguinte forma: imaginamos que o conjunto de todas as curvas regulares fechadas faz o papel de um certo U , e $\mathcal{L} : U \rightarrow \mathbb{R}$ é a função que a cada curva destas associa seu comprimento (fazendo o papel da F acima). Para encontrar uma curva cujo comprimento é mínimo, poderíamos, então, derivar a função \mathcal{L} (ou encontrar seu “gradiente”) e verificar quando esta derivada é zero. Qual o problema nesta forma de atacar? Em algum momento temos que nos restringir às curvas que *delimitam uma mesma área* fixada $A = \pi$.

Um exemplo um pouco mais simples para entender a situação é o seguinte problema clássico (o leitor bem familiarizado com multiplicadores de Lagrange pode pular este exemplo):

Exemplo 3. *Dentre todas as triplas de números positivos x, y, z que somam 3, qual delas tem o maior produto? Queremos de alguma forma maximizar a função “produto dos três números” $F(x, y, z) = xyz$ e se procuramos por pontos (x, y, z) com $x + y + z = 3$ onde F tem gradiente zero, temos a seguinte surpresa: isso nunca acontece! Então como explicar que existe solução para esse problema, a saber, $x = y = z = 1$? A solução não deveria ter gradiente nulo?*

A resposta é: não! Isso acontece porque não estamos procurando por maximizantes em um aberto do \mathbb{R}^3 . Estamos procurando por soluções apenas num subconjunto S de \mathbb{R}^3 , e precisamos que, em certo sentido, o “gradiente” de F sob o ponto de vista deste subconjunto se anule. Isso acontece quando a projeção ortogonal de ∇F sobre S é nula, como vemos a seguir. Note que S é o conjunto de nível de uma função, a saber: se $G(x, y, z) = x + y + z$, então

$$S := G^{-1}\{3\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x, y, z) = 3\}.$$

Como o ponto $(1, 1, 1) \in S$ é ponto de máximo para a função F em S , temos que, em particular, $(1, 1, 1)$ é ponto de máximo de F ao longo de qualquer curva em S passando por este ponto, digamos, uma curva $\beta : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow S$, com $\beta(0) = (1, 1, 1)$. Isso implica que $F \circ \beta$ tem um máximo em 0, e portanto

$$\left. \frac{d}{dt} F(\beta(t)) \right|_{t=0} = 0.$$

Mas por outro lado a regra da cadeia nos dá

$$\frac{d}{dt} F(\beta(t)) = \langle \nabla F(\beta(t)), \beta'(t) \rangle.$$

Conclusão 1: $\langle \nabla F(1, 1, 1), \beta'(0) \rangle = 0$.

Por outro lado, note que $G(\beta(t)) = 3$ para todo $t \in [-1, 1]$ e portanto temos também que $\langle \nabla G(1, 1, 1), \beta'(0) \rangle = 0$.

Para concluir o argumento, observamos que β pode ser tomada como uma curva em S passando por $(1, 1, 1)$ com qualquer vetor tangente a S em $(1, 1, 1)$. Assim, temos que ambos os vetores $\nabla F(1, 1, 1)$ e $\nabla G(1, 1, 1)$ são ortogonais ao

3.2. TERCEIRA SOLUÇÃO: MULTIPLICADORES DE LAGRANGE 27

plano tangente a S em $(1, 1, 1)$. Como este plano tangente tem exatamente uma dimensão a menos que o \mathbb{R}^3 , sobra apenas uma direção: tais vetores são paralelos.

Assim, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, chamado multiplicador de Lagrange, tal que $\nabla F(1, 1, 1) = \lambda \nabla G(1, 1, 1)$. A função G é chamada a função vínculo.

Suponhamos, então, que o PI admita solução para a área $A = \pi$ fixada. Seja C uma curva de Jordan regular, parametrizada por $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 , delimitando uma região R , que seja solução do PI. Supomos sem perda de generalidade que α é parametrizada pelo comprimento de arco, e que está orientada positivamente, isto é, ao percorrer a curva com t crescente, R situa-se à esquerda. Como na Seção 3.1, denotamos por N o vetor normal a α e por k sua curvatura.

Afirmamos (sem demonstração) que, uma vez que α é regular, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que se $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável com $-\varepsilon < f(t) < \varepsilon$ para todo $t \in [0, l]$, então a curva

$$\alpha_f(t) := \alpha(t) + f(t)N(t)$$

não tem autointersecção e é regular. Além disso, se $f(0) = f(l)$, então α_f é uma curva fechada, e portanto delimita uma região, que denotamos por R_f .

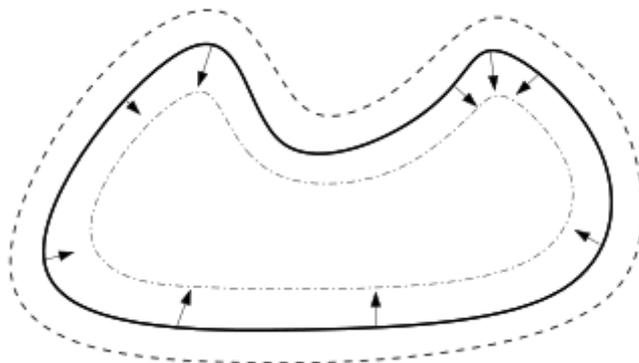


Figura 3.6: Perturbação de α

Denotaremos por \mathcal{F}_ε o conjunto de todas as funções com as propriedades citadas no parágrafo anterior. Este conjunto \mathcal{F}_ε é um subconjunto aberto, contendo o 0, do espaço vetorial \mathcal{F} de todas as funções diferenciáveis em $[0, l]$ que coincidem nos extremos 0 e l . Desta forma, os elementos de \mathcal{F}_ε podem ser tratados como vetores; além disso todo elemento de \mathcal{F} pode ser multiplicado por uma constante suficientemente pequena para gerar um elemento de \mathcal{F}_ε (exercício!).

Consideramos as funções $\mathcal{A}, \mathcal{L} : \mathcal{F}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\mathcal{A}(f) = A(R_f), \quad \mathcal{L}(f) = L(R_f).$$

Estas são as funções contínuas definidas em um espaço de funções, referidas no começo da Seção como sendo objeto de estudo do Cálculo das Variações. Queremos extremizar \mathcal{L} de modo que $\mathcal{A}(f)$ seja constante.

Usando o que foi visto na Seção 3.1, podemos calcular \mathcal{A} e \mathcal{L} explicitamente em termos de α e f . Para tal, note que se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, então escrevemos α_f e α'_f em coordenadas:

$$\alpha_f(t) = (x(t) - f(t)y'(t), y(t) + f(t)x'(t))$$

e

$$\alpha'_f(t) = (x'(t) - f(t)y''(t) - f'(t)y'(t), y'(t) + f(t)x''(t) + f'(t)x'(t)). \quad (3.7)$$

Ainda, é útil notar que utilizando (3.3), a expressão (3.7) se reescreve por (omitindo a variável t para limpar notação)

$$\alpha'_f = (1 - kf)\alpha' + f'N = ((1 - kf)x' - f'y', (1 - kf)y' + f'x'). \quad (3.8)$$

Finalmente, escrevemos \mathcal{A} e \mathcal{L} em termos de α e f :

$$\mathcal{A}(f) = \frac{1}{2} \int_0^l (x - fy')[(1 - kf)y' + f'x'] - (y + fx')[(1 - kf)x' - f'y'] dt \quad (3.9)$$

e

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^l \|\alpha'_f(t)\| dt = \int_0^l \sqrt{[(1 - kf)x' - f'y']^2 + [(1 - kf)y' + f'x']^2} dt. \quad (3.10)$$

Exercício 14. Manipule as expressões (3.9) e (3.10) acima, obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f) &= A(R) + \frac{1}{2} \int_0^l [f(xx' + yy')] dt + \int_0^l \left(\frac{k}{2}f - 1 \right) f dt \\ &= A(R) + \int_0^l \left(\frac{k}{2}f - 1 \right) f dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

e

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^l \sqrt{(1 - kf)^2 + f'^2} dt \quad (3.12)$$

Dica: para a primeira, utilize as expressões de (3.3) e regra do produto para derivada.

Por hipótese, a função 0 pertencente a \mathcal{F}_ϵ é a que minimiza \mathcal{L} sob a restrição $\mathcal{A} = A$. O que os multiplicadores de Lagrange nos dizem, então, é que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que (dentro do espaço vetorial \mathcal{F})

$$\nabla \mathcal{L}(0) = \lambda \nabla \mathcal{A}(0).$$

De modo análogo ao que ocorre no \mathbb{R}^n (veja expressão (3.6)) isso é equivalente a dizer que para toda $v \in \mathcal{F}$, vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(hv) - \mathcal{L}(0)}{h} = \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{V}(hv) - \mathcal{V}(0)}{h}.$$

Calculamos cada um dos limites separadamente:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(hv) - \mathcal{L}(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^l \sqrt{(1 - khv)^2 + h^2v'^2} - 1 dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^l \frac{(1 - khv)^2 + h^2v'^2 - 1}{\sqrt{(1 - khv)^2 + h^2v'^2} + 1} dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^l \frac{-2khv + h^2(k^2v^2 + v'^2)}{h(\sqrt{(1 - khv)^2 + h^2v'^2} + 1)} dt \\ &= - \int_0^l k(t)v(t) dt. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(hv) - \mathcal{A}(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[A(R) - \int_0^l \left(1 - \frac{k}{2}hv\right)hvd t - A(R) \right] \\ &= - \int_0^l v(t) dt. \end{aligned}$$

Logo quando α dá uma solução temos que para toda $v \in \mathcal{F}$ vale

$$\int_0^l (k(t) + \lambda)v(t) dt = 0.$$

Em particular, isso deve valer para $v(t) = k(t) + \lambda$, fazendo com que

$$\int_0^l |k(t) + \lambda|^2 dt = 0,$$

e, sendo zero a integral de uma função contínua não-negativa, esta deve ser identicamente nula, ou seja, $k(t) = -\lambda$ para todo $t \in [0, l]$. Isto nos diz que α tem curvatura constante, e portanto é um círculo. Como a área é $A = \pi$, podemos ainda concluir que o raio deste círculo é 1, e $l = 2\pi$ é o menor comprimento possível. Isto conclui a demonstração.

3.3 Quarta solução: Teorema de Stokes

Teorema 4 (A desigualdade isoperimétrica (bis)). *A área A englobada por qualquer curva de Jordan retificável C de comprimento L satisfaz a desigualdade isoperimétrica*

$$A \leq L^2/4\pi. \tag{3.13}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, C for um círculo.

Desta vez, para provar a desigualdade acima usamos uma ideia de Gromov [15] que foi aprimorada em [17]. A ideia de Gromov consiste em encontrar um campo de vetores V definido em uma região que contém R com duas propriedades que garantem (3.13). Essas propriedades são

$$\operatorname{div}V \geq 2 \text{ em } R \text{ e } \langle V, n \rangle \leq 1 \text{ em } C, \tag{3.14}$$

com n o vetor normal a C unitário exterior a R . Se V satisfaz as propriedades acima, a desigualdade (3.13) é consequência do Teorema do Divergente (Teorema 2):

$$L(C) = \int_C 1 ds \geq \int_C \langle V, n \rangle ds = \int_R \operatorname{div}V dx dy \geq 2A(R) = 2\pi.$$

A construção do campo de vetores de Gromov funciona em \mathbb{R}^n , não apenas em \mathbb{R}^2 . O campo que apresentamos aqui foi exibido em [17] para \mathbb{R}^2

$$V(p) = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{p - q}{\|p - q\|^2} dq.$$

Mais precisamente, se $p = (x_p, y_p)$, então a coordenada X do campo de vetores V é

$$X(p) = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{x_p - x_q}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} dx_q dy_q$$

e de maneira análoga escrevemos a coordenada Y .

Se $p \in R$, o integrando na definição de $V(p)$ tem uma singularidade quando $p = q$ e por isso precisamos verificar que V está de fato bem definido.³

Vamos verificar a boa definição de $X(p)$ para $p \in R$. Escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset R$, assim

$$X(p) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{R \setminus B_\varepsilon(p)} \frac{x_p - x_q}{\|p - q\|^2} dq + \int_{B_\varepsilon(p)} \frac{x_p - x_q}{\|p - q\|^2} dq \right) \tag{3.15}$$

e a primeira parcela pode ser calculada, de modo que a boa definição de X depende de analisar a segunda parcela. Com um sistema de coordenadas polares (r, θ) centrado em p podemos escrever

$$\int_{B_\varepsilon(p)} \frac{|x_p - x_q|}{\|p - q\|^2} dq \leq \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r dr d\theta = 2\pi\varepsilon. \tag{3.16}$$

Portanto, existe o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon(p)} \frac{|x_p - x_q|}{\|p - q\|^2} dq = 0$$

³Se o leitor está familiarizado apenas com Cálculo de uma variável, esse fato é o análogo bidimensional do fato que a função $f(t) = \int_{-1}^t \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ está bem definida em \mathbb{R} .

e podemos definir e calcular $X(p)$ via

$$X(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{R \setminus B_\varepsilon(p)} \frac{x_p - x_q}{\|p - q\|^2} dq.$$

Exercício 15.

a) Escreva a coordenada Y do campo V .

b) Verifique que se $p \notin R$, então $\operatorname{div} V(p) = 0$.

Sugestão: Lembre que você precisa calcular o divergente em relação as coordenadas de p e a integral é em q e está bem definida. Portanto a derivação comuta com a integração.

Vamos calcular $\operatorname{div} V(p)$ para $p \in R$. Esse cálculo é mais complicado do que o caso $p \notin R$ devido a singularidade no integrando. Considere a função $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$w(p) = \frac{1}{\pi} \int_R \ln \|p - q\| dq.$$

Deixamos a cargo do leitor, através de argumento análogo ao da equação (3.15), demonstrar que w está bem definida. Vamos demonstrar que $\nabla w = V$ e portanto, o laplaciano de w satisfaz $\Delta w = \operatorname{div} V$. Depois disso, bastará notar que $\Delta w = 2$ na região R .

Para verificar que $\nabla w = V$, note que

$$X(p) = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{\partial}{\partial x_p} (\ln \|p - q\|) dq.$$

No que segue faremos um argumento preciso e bastante comum em Análise para demonstrar que

$$X(p) = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{\partial}{\partial x_p} \ln \|p - q\| dq = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_p} \int_R \ln \|p - q\| dq = \frac{\partial w}{\partial x_p}(p).$$

O leitor que estiver pouco familiarizado com Análise pode pular essa parte, mas não sem antes notar que pode não ser trivial trocar a ordem entre a derivação e a integração.

Considere uma função auxiliar $\eta \in C^1([0, \infty))$ com as seguintes propriedades:

- i)** $0 \leq \eta(t) \leq 1$ para todo t ;
- ii)** $\eta(t) = 0$ se $t \in [0, 1]$;
- iii)** $\eta(t) = 1$ se $t \in [2, +\infty)$;
- iv)** $0 \leq \eta'(t) \leq 2$ para todo t .

Essa função é chamada função suavizadora, ou 'molifier' em inglês, e serve para reduzir a contribuição da singularidade como faremos ao definir para cada $\varepsilon > 0$,

$$w_\varepsilon(p) = \frac{1}{\pi} \int_R \ln \|p - q\| \eta\left(\frac{\|p - q\|}{\varepsilon}\right) dq.$$

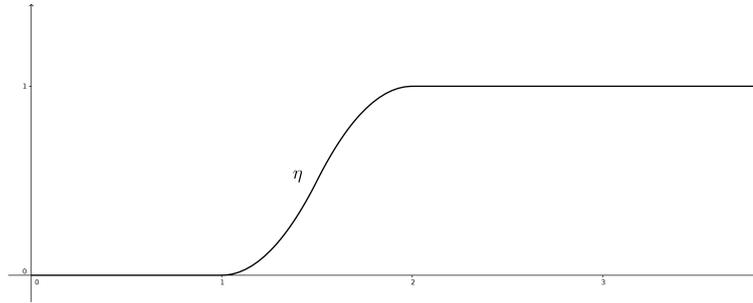


Figura 3.7: Molifier padrão

Exercício 16. *Mostre que se $p \in R$ e $\varepsilon < 1/2$, $|w_\varepsilon(p) - w(p)| < C\varepsilon$ para alguma constante positiva C .*

Como consequência do exercício acima podemos dizer que a família de funções $\{w_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge uniformemente a função w em R , e na verdade até em \mathbb{R}^2 , já que para ε pequeno e $p \notin R$, $w_\varepsilon(p) = w(p)$.

A vantagem de w_ε em comparação com w é não ter a singularidade no integrando que a define. Por isso,

$$\frac{\partial}{\partial x_p} w_\varepsilon(p) = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\ln \|p - q\| \eta \left(\frac{\|p - q\|}{\varepsilon} \right) \right) dq.$$

E pela regra do produto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_p} w_\varepsilon(p) &= \frac{1}{\pi} \left(\int_R \frac{x_p - x_q}{\|p - q\|^2} \eta \left(\frac{\|p - q\|}{\varepsilon} \right) dq \right. \\ &\quad \left. + \int_R \ln(\|p - q\|) \eta' \left(\frac{\|p - q\|}{\varepsilon} \right) \frac{x_p - x_q}{\varepsilon \|p - q\|} dq \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| X(p) - \frac{\partial}{\partial x_p} w_\varepsilon(p) \right| &\leq \frac{1}{\pi} \left(\left| \int_R \frac{x_p - x_q}{\|p - q\|^2} \left(1 - \eta \left(\frac{\|p - q\|}{\varepsilon} \right) \right) dq \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_R \ln(\|p - q\|) \frac{x_p - x_q}{\|p - q\|} \eta' \left(\frac{\|p - q\|}{\varepsilon} \right) dq \right| \right). \end{aligned}$$

Como vimos em (3.16), temos

$$\left| \int_R \frac{x_p - x_q}{\|p - q\|^2} \left(1 - \eta \left(\frac{\|p - q\|}{\varepsilon} \right) \right) dq \right| \leq \left| \int_{B_{2\varepsilon}(p)} \frac{x_p - x_q}{\|p - q\|^2} dq \right| \leq 2\pi\varepsilon,$$

Por outro lado, como $\eta' \leq 2$ e η' só não se anula em $[1, 2]$, e como $\frac{x_p - x_q}{\|p - q\|} \leq 1$, temos

3.3. QUARTA SOLUÇÃO: TEOREMA DE STOKES

33

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_R \ln(\|p - q\|) \frac{x_p - x_q}{\|p - q\|} \eta' \left(\frac{\|p - q\|}{\varepsilon} \right) dq \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_{2\varepsilon}(p)} 2 \ln(\|p - q\|) dq \right| \leq 8\pi\varepsilon |\ln(2\varepsilon)| \end{aligned}$$

Portanto,

$$|X(p) - \frac{\partial}{\partial x_p} w_\varepsilon(p)| \leq 2\varepsilon + 8\varepsilon |\ln(2\varepsilon)| = 2\varepsilon(1 + 4|\ln(2\varepsilon)|),$$

o que nos permite concluir que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial x_p} w_\varepsilon = X.$$

Um Teorema (Teorema 7, cap X de [20]) geralmente estudado em cursos de Análise na Reta garante que se temos uma sequência de funções deriváveis (w_ε com $\varepsilon \rightarrow 0$) convergindo a uma função (w) cujas derivadas convergem uniformemente a uma função (X), então a função limite (w) é derivável e sua derivada é o limite da sequência das derivadas. Cabe mencionar aqui que estamos trabalhando com uma função de duas variáveis, mas os argumentos para analisar funções de variável real se aplicam. Uma segunda observação é que fazer $\varepsilon \rightarrow 0$ não é trabalhar com uma sequência, e quanto a isso o leitor pode pensar apenas em $\varepsilon = 1/n$ com $n \in \mathbb{N}$.

Com isso, concluímos que $X = \frac{\partial}{\partial x} w$. De maneira análoga, mostra-se que $Y = \frac{\partial}{\partial y} w$, do que decorre a afirmação que $\nabla w = V$.

Para concluir que $\operatorname{div} V = \Delta w$, novamente usa-se a função η e um argumento semelhante ao que acabamos de exibir para demonstrar que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(p) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial R_0} \frac{\partial}{\partial x} \ln(\|p - q\|) n_x(q) ds,$$

para R_0 uma região que contém R e onde vale o Teorema do Divergente, n_x a primeira coordenada do vetor n normal exterior a ∂R_0 e ds o elemento de comprimento de ∂R_0 .

Para concluir que $\Delta w = 2$, considere R_0 um círculo grande de centro p e raio M e, usando coordenadas polares,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(p) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial B_M(p)} \frac{\partial}{\partial x} \ln(\|p - q\|) n_x(q) ds = \frac{1}{\pi} \int_{\partial B_M(p)} \frac{(x_p - x_q)^2}{M^3} dq.$$

Fazendo o mesmo para y

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} w(p) = \frac{1}{\pi} \int_{\partial B_M(p)} \frac{(y_p - y_q)^2}{M^3} dq,$$

de modo que somando $w_{xx} + w_{yy}$, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}w + \frac{\partial^2}{\partial y^2}w = \frac{1}{\pi} \int_{\partial B_M(p)} \frac{1}{M} dq = \frac{2\pi M}{\pi M} = 2.$$

Para concluir essa solução do PI, resta mostrar que $\langle V, n \rangle \leq 1$ ao longo de ∂R , qualquer que seja a região R . Afirma-se que $\langle V, n \rangle$ assume o maior valor possível em $p \in \partial R$ caso R seja um círculo unitário.

Para demonstrar essa afirmação, considere um sistema de coordenadas polares com origem o ponto $p \in \partial R$ e o ângulo θ definido de modo que $n(p)$ tenha ângulo π .

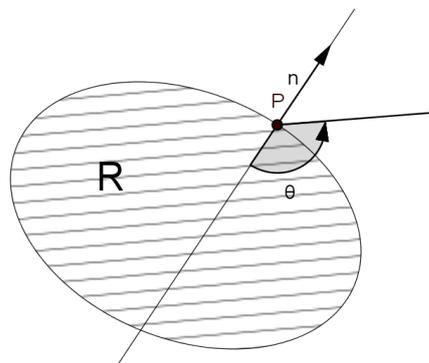


Figura 3.8: Coordenadas polares

Note que se $q \in R$, lembrando a identidade sobre o produto escalar $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \phi$, para ϕ o ângulo entre os vetores u e v , temos

$$\langle q - p, n(p) \rangle = \|n\| \|q - p\| \cos \theta = r \cos \theta,$$

para θ a coordenada polar referente ao ângulo de q . Portanto

$$\langle V, n \rangle = \frac{1}{\pi} \int_R \left\langle \frac{p - q}{\|p - q\|^2}, n(p) \right\rangle dq = \frac{1}{\pi} \int_R \frac{\cos \theta}{r} dq.$$

Finalmente, observe que as curvas de nível da função $f(r, \theta) = \frac{\cos \theta}{r}$ são círculos que passam por p com vetor normal exterior $n(p)$. Além disso, quanto maior o círculo, menor é o valor de f ao longo dele. Assim, a integral acima será máxima quando R for um círculo unitário D , pois sua área é π , passando por p com normal $n(p)$. Note que caso D seja dessa forma, terá $\langle V, n \rangle$ maximizado em todos os pontos de ∂D .

Resta verificar que no caso do círculo, tem-se que $\langle V, n \rangle$ é constante igual a 1 ao longo de ∂D . Para calcular a última integral, pode-se usar um novo sistema de coordenadas polares, agora centrado no centro de D . Denotando por (r', θ') esse novo sistema com θ' tomado de modo que a semirreta $\theta' = 0$ esteja contida na semirreta $\theta = 0$, temos que

$\mathbb{R} \mid \{g \text{ é contínua e de classe } C^1 \text{ por partes}\}$ como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B} = \{\cos(2n\pi x), \sin(2n\pi x), 1\}_{n \in \mathbb{N}}$. Além disso, a expressão (3.17) funciona tão bem porque esse espaço vetorial possui um produto interno (ou produto escalar) que é definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad (3.18)$$

de modo que a expressão dos coeficientes de Fourier é exatamente a mesma que a expressão vista em Álgebra Linear para escrever um vetor em uma base ortonormal. A única diferença entre essas duas situações é que aqui a base tem infinitos elementos (o que nos leva a dizer que \mathcal{E} tem dimensão infinita) e por isso algumas questões de convergência se tornam mais delicadas.

Exercício 17. *Mostre que o conjunto \mathcal{B} é um subconjunto ortonormal do espaço vetorial \mathcal{E} munido do produto escalar (3.18), ou seja, verifique que se $u, v \in \mathcal{B}$, então*

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } u=v \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A base \mathcal{B} é na verdade base de Hilbert de um espaço vetorial \mathcal{H} que contém \mathcal{E} .⁴ Ela também tem origem semelhante à origem de certas bases de espaços de dimensão finita. Ela é obtida quando se diagonaliza o operador de Laplace em \mathcal{H} . Esse operador aplicado a funções com domínio $[0, 1]$ nada mais é do que derivar duas vezes a função. Assim, uma autofunção (análogo de autovetor) do $\frac{d^2}{dx^2}$ é uma função que satisfaça $\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \lambda f(x)$. Observe que os elementos de \mathcal{B} tem essa propriedade:

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin(2n\pi x) = -4n^2 \sin(2n\pi x). \quad (3.19)$$

A diferença é que aqui existem infinitos autovetores e autovalores. Essa observação é feita de maneira mais detalhada no texto [23] e será retomada no fim da seção. No que segue, enunciamos os resultados sobre séries de Fourier que serão necessários.

Teorema 5 (Teorema de Fourier e Identidade de Parseval). *Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua de classe C^1 por partes e tal que $f(0) = f(1)$. Então a série de Fourier de f converge em cada ponto $x \in [0, 1]$ para $f(x)$. Além disso, vale a identidade de Parseval sobre a integral do quadrado de f*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \int_0^1 |f(x)|^2 dx. \quad (3.20)$$

⁴Mais precisamente, \mathcal{B} é uma base de Hilbert do espaço vetorial das funções $H_0^1([0, 1])$ com, \mathcal{B} exibida acima com a norma proveniente do produto interno dado em (3.18). O conceito de base de Hilbert é semelhante ao conceito de base (de Hamel) estudado em Álgebra Linear.

Observação 5. Mesmo que a função f tenha alguns pontos de descontinuidade, ainda é válido o resultado acima para os pontos em que f é contínua.

Corolário 3. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua de classe C^2 por partes e tal que $f(0) = f(1)$. Então os coeficientes da série de Fourier de f' , que converge, podem ser obtidos a partir da série de Fourier de f derivando termo a termo essa série.

Esse Corolário pode ser demonstrado usando integração por partes para o cálculo dos coeficientes e o teorema anterior para a convergência da série. Sobre a identidade de Parseval, também enunciamos um corolário.

Corolário 4. Se f e g são funções como no Teorema anterior, a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f e c_n e d_n os de g , então

$$\frac{a_0 b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n) = 2 \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

O leitor interessado pode demonstrar esse Colário usando a Identidade de Parseval para a função $f + g$.

Com esse teorema estamos aptos a expor mais uma demonstração da desigualdade isoperimétrica.

Prova do Teorema 4 para curvas C^1 por partes. Seja C uma curva fechada simples de classe C^1 por partes de comprimento L que engloba uma área A . Considere uma parametrização $\tilde{\gamma}$ de C por comprimento de arco, isto é, $\tilde{\gamma}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ e $\tilde{x}'^2(s) + \tilde{y}'^2(s) = 1$ sempre que \tilde{x}' e \tilde{y}' estiverem bem definidas. Podemos reparametrizar C com funções x e y definidas em $[0, 1]$ via $x(t) = \tilde{x}(Lt)$ e $y(t) = \tilde{y}(Lt)$. Assim, $x'^2(t) + y'^2(t) = L^2$ para $t \in [0, 1]$ no qual a expressão faz sentido, o que ocorre exceto em um conjunto finito de pontos. Usando o teorema de Fourier para as funções x e y , temos que

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2n\pi t + b_n \sin 2n\pi t),$$

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos 2n\pi t + d_n \sin 2n\pi t).$$

Derivando, de acordo com o Corolário 3 obtemos a expressão abaixo para x' e uma análoga para y'

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi (-a_n \sin 2n\pi t + b_n \cos 2n\pi t)$$

Pela Identidade de Parseval aplicada às funções x' e y' , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\pi^2 (a_n^2 + b_n^2) = 2 \int_0^1 |x'(t)|^2 dt$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4n^2 \pi^2 (c_n^2 + d_n^2) = 2 \int_0^1 |y'(t)|^2 dt.$$

Somando as duas igualdades

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) = \int_0^1 |x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 dt = L^2.$$

Conforme visto no Exercício 12, a área da região englobada pela curva C é dada por $A = \frac{1}{2} \int_0^1 x(t)y'(t)dt$. Pelo Corolário 4,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi (a_n d_n - b_n c_n).$$

Assim,

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left((na_n)^2 + (nb_n)^2 + (nc_n)^2 + (nd_n)^2 - 2na_n d_n + 2nb_n c_n \right) \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left((na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + c_n^2(n^2 - 1) + d_n^2(n^2 - 1) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ para todo $n > 1$ e $b_1 = -c_1 = -ca_1 = d_1 = d$, ou seja,

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + d \cos(2\pi t) - c \sin(2\pi t) \text{ e } y(t) = \frac{c_0}{2} + c \cos(2\pi t) + d \sin(2\pi t) \tag{3.21}$$

que corresponde a um círculo de raio $\sqrt{d^2 + c^2}$ e centro $(a_0/2, c_0/2)$. □

Exercício 18. Complete o final da última prova justificando que (3.21) é de fato uma parametrização do círculo ali descrito.

Exercício 19. (Desafio) Usando o fato que toda curva retificável pode ser aproximada por curvas C^1 por partes, faça a demonstração do caso geral do teorema.

Agora retomamos a discussão que relaciona séries de Fourier à Álgebra Linear. Mencionamos anteriormente que escrever uma função definida em $[0, 1]$ em série de Fourier está associado a escrever um elemento do espaço vetorial \mathcal{H} como soma de autovetores do operador de Laplace. Olhando a expressão (3.19), vemos que os autovalores desse operador são dados por $\lambda_n = 4n^2\pi^2$ (na verdade seria $-4n^2\pi^2$, mas costuma-se usar o operador com sinal trocado para que os autovalores sejam positivos.) Quando escrevemos a série de Fourier de uma função, olhamos o operador derivada segunda no espaço das funções que satisfazem $f'(0) = f'(1)$, porque na verdade são funções que poderiam ser estendidas ao reais como funções periódicas de período 1.

3.4.1 A Desigualdade de Faber-Krahn

Vamos finalizar esse seção citando algumas curiosidades sobre o primeiro autovalor de Dirichlet do Laplaciano.

Definição 6. *O primeiro autovalor de Dirichlet do Laplaciano ($\lambda(\Omega)$) em um domínio limitado Ω é o menor número real λ , para o qual o problema*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.22)$$

admite uma solução não trivial.

A solução trivial é a solução constante zero.

Tem-se que o primeiro autovalor $\lambda(\Omega)$ é sempre positivo e que a solução de (3.22) com $\lambda = \lambda(\Omega)$ não troca de sinal. O par {primeiro autovalor, primeira autofunção} corresponde à frequência de vibração fundamental de um domínio. Por exemplo, se Ω corresponde à forma da membrana de um tambor que produz som, o som mais grave produzido tem frequência associada a $\lambda(\Omega)$. Pode-se mostrar que se dilatamos um domínio, seu primeiro autovalor diminui e portanto, se aumentamos a membrana de um tambor por uma dilatação, ele se torna capaz de produzir sons mais graves. Uma outra caracterização de $\lambda(\Omega)$ é dada pelo ínfimo do quociente de Rayleigh:

$$\lambda(\Omega) = \inf \frac{\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx},$$

onde u percorre $H_0^1(\Omega)$ que é, a grosso modo, o espaço das funções não triviais que se anulam na fronteira e para as quais tanto o numerador quanto o denominador no quociente acima estão bem definidos.

Uma razão pela qual é interessante conhecer estimativas para $\lambda(\Omega)$ decorre diretamente do quociente de Rayleigh e é chamada Desigualdade de Sobolev: Se $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_{\Omega} |u|^2 dx.$$

Desigualdades como essa são úteis em Análise, por exemplo em algumas demonstrações de existência se solução de equações diferenciais. Por causa do quociente de Rayleigh, se conhecemos uma estimativa $\lambda(\Omega) \geq C$, temos uma desigualdade como a de Sobolev.

Nesse contexto torna-se natural questionar se uma desigualdade do tipo $\lambda(\Omega) \geq C$ pode ser obtida conhecendo apenas certas propriedades de Ω , como por exemplo sua área. A resposta aqui é sim, como mostra o próximo resultado, que foi obtido de forma independente por Faber [10] e Krahn [19].

Teorema 6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio de área A e seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um disco de mesma área A , então $\lambda(\Omega) \geq \lambda(D)$.*

Assim, o disco não só é o conjunto de área com menor perímetro, como também é o que tem menor primeiro autovalor. Esse teorema pode ser demonstrado usando uma técnica chamada simetrização de funções que consiste em transformar de modo específico uma função definida em Ω em uma função definida em D . Usando, entre outras ferramentas, a desigualdade isoperimétrica, mostra-se que esse processo diminui o quociente de Rayleigh do que decorre o resultado.

Observamos que além de \mathbb{R}^2 , os demais espaços euclidianos \mathbb{R}^n , bem como os espaços hiperbólicos \mathbb{H}^n e as esferas \mathbb{S}^n , são ambientes nos quais vale a desigualdade de Faber-Krahn. Para detalhes referimos [7].

Capítulo 4

Bolhas de sabão

As bolhas de sabão nos dizem bastante sobre isoperimetria no espaço tridimensional. Quando fazemos uma bolha de sabão, existem razões físicas, envolvendo tensão superficial, que fazem com que ela tenha a menor área possível envolvendo um volume já pré-fixado (o volume de ar que foi soprado). Assim sendo, bolhas de sabão, quando livres no ambiente, são esféricas. Mas elas podem nos dizer ainda mais sobre o PI em outras situações e outros problemas variacionais. Neste capítulo vamos tratar um pouco disto, depois de desenvolver algumas noções iniciais ao trabalhar com o PI em \mathbb{R}^3 .

4.1 O caso tridimensional (primeiros passos)

Robert Osserman em [26] nos diz algo fundamental sobre o PI com relação à dimensão: para dimensões maiores que 2, não existe prova que aproxime a simplicidade das provas existentes para domínios planos. Ele também afirma que talvez a abordagem mais direta, pelo menos supondo que as soluções são suficientemente diferenciáveis, seja utilizar Cálculo das Variações.

Imaginemos o caso do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 . Seja V um volume dado. Procuramos, dentre todas as superfícies regulares que englobam uma região tridimensional de volume V , aquela(s) que te(ê)m a menor área, se é que existe(m). Supondo existência, seja S uma tal superfície e W a região delimitada por ela.

Ainda, é preciso supor que S é uma superfície *orientável*, ou seja, que exista um campo unitário contínuo $\eta : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ normal a S .¹ Note que se tal η existe, $-\eta$ também é unitário e normal a S , cada um deles define uma orientação diferente em S . Fixamos, então, a orientação de S dada por η . Essa suposição é relativamente natural, já que se S delimitada uma região, então devem haver os lados de dentro e de fora de S . Assim, a grosso modo, podemos tomar o normal η que aponta para dentro de S .

Assim como fizemos com as curvas (Seção 3.2, a superfície S pode ser variada na direção do normal, digamos, $S_f := S + f\eta$, onde $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função

¹O exemplo mais clássico de superfície não orientável é a *Faixa de Möbius*.

suave². Então é possível, utilizando um pouco de Geometria Diferencial e novamente o Teorema de Stokes, calcular a área $\mathcal{L}(f)$ de S_f e o volume $\mathcal{A}(f)$ de W_f , a região englobada por S_f . O que deve ocorrer, novamente, é que deve existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla \mathcal{L}(0) = \lambda \nabla \mathcal{A}(0).$$

Prova-se, então, que isto é equivalente a

$$\int_S (H - \lambda) v dA = 0$$

para toda $v : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, onde H é a *curvatura média* de S com respeito ao normal η .

A conclusão, então, é a seguinte:

Teorema 7. *Se uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ tem área mínima dentre todas as superfícies que englobam um mesmo volume, então S tem curvatura média constante.*

Não vamos entrar em grandes detalhes matemáticos aqui a respeito do que é a curvatura média, mas não poderíamos deixar de dar uma ideia intuitiva de como ela pode ser pensada. Vejamos duas formas.

As curvas contidas em uma superfície do \mathbb{R}^3 se curvam no espaço, mas se curvam também sobre a superfície. Por exemplo, imagine um equador de uma esfera. Ele é uma curva “curvada” em \mathbb{R}^3 , mas se olhamos sob o ponto de vista da própria esfera, ele não se curva, pois em certo sentido acompanha a curvatura ditada pela esfera. Não haveria como ser reto, pois sairia da superfície! Outro exemplo interessante para se pensar é um cilindro. Imagine que o cilindro foi construído a partir de uma folha de papel enrolada. Se desenharmos uma reta no papel antes de enrolá-la, o que acontece com ela no cilindro? Dependendo da situação, ela se curvará no espaço, junto com a folha, mas é sensato pensar que sob o ponto de vista do cilindro ela não se curva.

Afirmamos (sem demonstração) que dado qualquer ponto $p \in S$ e qualquer vetor v unitário tangente a S em p , existe uma curva $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow S$ contida em S , com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, e de forma que sua curvatura *sob o ponto de vista da superfície*, chamada curvatura geodésica, é nula. No exemplo do cilindro, ela é uma reta que foi enrolada. Nas esferas, são os círculos máximos. No plano, são as retas. Estas curvas que não se curvam sob o ponto de vista da superfície são chamadas *geodésicas*, e têm muitas propriedades importantes dentro da geometria,

²Aqui está uma diferença sutil com relação às curvas, e que torna o problema muito mais difícil em dimensões maiores. Note que as funções f utilizadas na abordagem com as curvas estava definida no mesmo intervalo que parametrizava o bordo C . Acontece que parametrizar uma superfície requer muito mais cuidado que parametrizar uma curva de Jordan; não se trata apenas de deformar um pedaço de arame e fechá-lo. É fácil ver isso ao tentar moldar uma superfície utilizando um pedaço de papel, ou mesmo de pano, mesmo quando este pano estica. Como é que se “fecha” a superfície? A colagem é um problema complicado; em geral o que se pode fazer é tentar usar mais de um pedaço de pano. Essas ideias são discutidas em cursos de Geometria Diferencial de superfícies.

Por fim, a *curvatura média* H de S no ponto p (segundo o normal η) é a média aritmética das curvaturas principais, ou seja,

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Exemplo 4. 1. Num plano, as geodésicas são retas, que têm curvatura nula. Logo a curvatura média do plano é constante igual a zero.

2. Numa esfera de raio r , as geodésicas são círculos máximos, e que têm raio r . A curvatura normal destes círculos, quando o normal aponta para dentro, é $1/r$. Assim, $k_1 = k_2 = 1/r$ em todos os pontos da esfera, o que dá $H = 1/r$. (conforme Exercício 10).
3. Num cilindro de raio r , as geodésicas são obtidas enrolando as retas. Note que a única chance de uma reta não se enrolar (e portanto ter curvatura zero no espaço) é quando ela é paralela ao eixo do cilindro. Além disso, todas as outras se curvam “para dentro”, e portanto dão origem ao mesmo sinal para curvatura normal. Assim, uma das curvaturas principais é zero. A outra é dada em uma direção ortogonal, e portanto em um círculo na cintura do cilindro, que tem curvatura (orientando para dentro) $1/r$. Assim, a curvatura média do cilindro de raio r é $1/2r$.
4. No ponto de sela de um parabolóide hiperbólico, é possível mostrar que uma das curvaturas normais é positiva e a outra é negativa. É um pouco intuitivo pensar que num ponto de sela temos curvas que se curvam no sentido do normal e outras que se curvam no sentido contrário. Por exemplo, no parabolóide $\{(x, y, y^2 - x^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, a origem $o = (0, 0, 0)$ é um ponto de sela e $k_1(o) = -2$, $k_2(o) = 2$. Neste caso, $H(o) = 0$.

Voltando à nossa história como o PI foi atacado: o Teorema 7 pode ser obtido de maneira razoavelmente simples supondo que S seja de classe C^2 . O problema é a partir daí: como garantir que uma superfície compacta de curvatura média constante (CMC) é uma esfera? Uma série de passos foram dados neste sentido ao longo do século passado a fim de responder essa pergunta, e fez muita teoria ser estudada e desenvolvida. Em [26] é possível encontrar um pouco desta história, seguida do artigo de Lucas Barbosa e Manfredo do Carmo [2], onde a questão se encerra por esse ponto de vista, mostrando que uma superfície de curvatura média constante que tenha sido obtida através desta abordagem variacional é uma esfera.

4.2 Problema no semiespaço e problemas relacionados

O leitor pode neste momento lembrar de várias experiências com bolhas de sabão. Uma delas consiste em formar a bolha de modo que ela encoste no chão ou

4.2. PROBLEMA NO SEMIESPAÇO E PROBLEMAS RELACIONADOS 45

numa outra superfície plana⁵. Qual o formato desta bolha?

A resposta é uma semiesfera. Por quê? O que acontece é que o ambiente onde queremos resolver o problema não é mais o espaço tridimensional inteiro, mas sim um semiespaço, e de modo que a solução utilize um pedaço da fronteira do ambiente para se formar (o que economiza sua própria fronteira).

O análogo bidimensional a fazer a bolha de sabão tocar o chão é a conhecida lenda de Dido, que parece ter sido o primeiro aparecimento do PI, no século IX a.C.. Dido, ou Elissa, foi a primeira rainha de Cartago, e sua história ficou conhecida por ser narrada na obra *Eneida*, de Virgílio. Uma história completa pode ser encontrada em [31].

Resumidamente, Dido teve que fugir da cidade de Tiro, devido a uma disputa que lhe ameaçava a vida, e já tinha a deixado viúva. Chegou à África, depois de uma longa viagem, e precisava de terra para ela e seus seguidores. Os habitantes do local disseram-lhe que ela teria direito de tanta terra quanto coubesse na sua sacola. O que ela fez foi cortar a sacola (que era de couro de boi) em tiras, formar uma grande tira e, utilizando uma parte da costa marítima, delinear sobre a terra um pedaço de círculo que fosse perpendicular à orla. Reza a lenda que foi dentro deste pedaço de terra que ela construiu a cidade de Cartago.

Assim, o problema de Dido consiste em limitar, numa região do plano limitada por uma curva que separe o plano em duas componentes (por exemplo, uma reta), a maior área com um dado perímetro. No caso desta curva ser uma reta, a solução é dada por um semicírculo.

As soluções do PI no semiplano ou no semiespaço têm características em comum que na verdade são válidas em situações muito mais gerais. Eles podem se enquadrar na classe de problemas isoperimétricos chamados de *problemas relativos*, pois as superfícies que resolvem o problema têm fronteira e esta não está previamente estabelecida pelo problema. Por exemplo, a fronteira da semi-esfera é o equador onde ela termina, a fronteira do semi-círculo no problema de Dido são seus ponto inicial e final. Outros problemas relativos em \mathbb{R}^2 podem ser encontrados na Seção 1.4 de [6].

O seguinte teorema, que é enunciado em [29] por uma combinação de resultados lá citados, ilustra isso.

Teorema 8. *Se M é uma variedade riemanniana compacta de dimensão n e de volume $V(M)$, então para todo $V \in]0, V(M)[$ existe uma região compacta Ω cuja fronteira $\Sigma = \partial\Omega$ minimiza área dentre todas as regiões de volume V . Além disso, exceto por um conjunto singular de dimensão de Hausdorff no máximo $n-8$, a fronteira Σ de qualquer região minimizante é uma hipersuperfície mergulhada de curvatura média constante e, se $\partial M \cap \Sigma \neq \emptyset$, então ∂M e Σ se encontram ortogonalmente.*

⁵Na verdade, esta superfície deve ter algumas propriedades físicas que a tornem de fato uma espécie de fronteira para o espaço tridimensional. Bolhas que caem sobre a água ou caem sobre uma superfície hidrofóbica tendem a ter outros formatos. Veja, por exemplo, as imagens em [33].

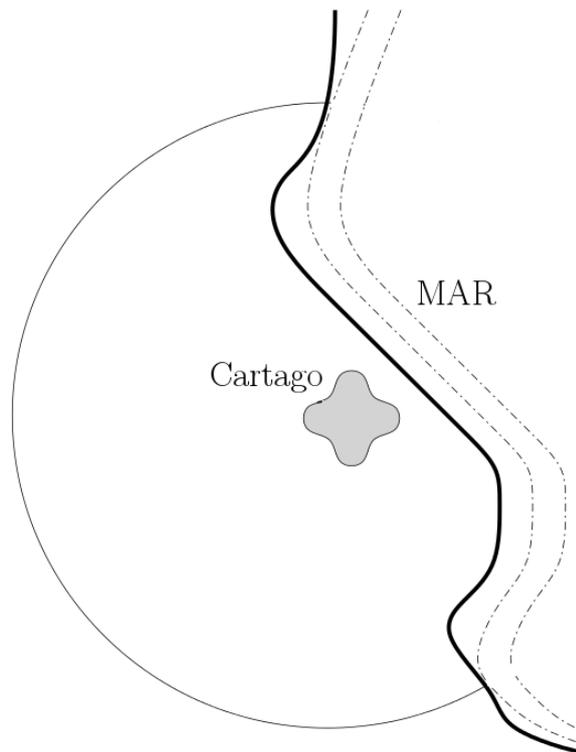


Figura 4.1: A lenda de Dido. Figura inspirada no mapa de [31]

Mesmo que o leitor não tenha entendido todo o enunciado do teorema, duas propriedades aparecem: curvatura média constante (que já falamos um pouco na Seção 4.1) e ortogonalidade com a fronteira do ambiente. A demonstração disto pode ser feita também utilizando Cálculo das Variações, mas envolve outros entes geométricos que infelizmente não temos como introduzir nestas notas.

Chamamos atenção para a conclusão que envolve um conjunto de dimensão de Hausdorff $n - 8$. O leitor que não conhece dimensões de Hausdorff pode pensar que ela coincide com a dimensão usual sempre que há regularidade. O Teorema acima dá que se M tem dimensão menor ou igual a 8, não há singularidades na solução. A dimensão 8 é de fato um divisor de águas: dimensões abaixo de 8 admitem muito pouca singularidade, mas a partir de 8, os conjuntos singulares podem ser mais expressivos e fenômenos mais estranhos podem acontecer.

Este fato curioso é explicado por uma área chamada Teoria Geométrica da Medida, que é muito útil para o estudo de singularidades em entes geométricos (ou seja, onde se perde diferenciabilidade), como é o caso dos pontos onde as bolhas de sabão se intersectam.

4.3 Bolhas duplas

Ainda sobre bolhas de sabão, podemos remeter o leitor às lembranças da infância novamente. O que ocorre quando duas bolhas de sabão se tocam, ou quando se faz uma bolha sobre outra bolha? O problema é mais complicado, trata-se do problema da bolha dupla (“double bubble”).

Uma conjectura famosa, resolvida no começo dos anos 2000 por Hutchings, Morgan, Ritoré e Ros [18], é que a maneira mais econômica de empacotar separadamente dois volumes no espaço é usando uma bolha dupla usual, ou seja, aquela que é realizada fisicamente, soprando duas bolhas de sabão uma colada na outra. Mas ainda não se sabe o que acontece quando o número de volumes aumenta:

Conjectura 1. *A maneira mais econômica de empacotar $m \geq 4$ volumes no espaço tridimensional é utilizando uma bolha m -upla usual.*

Muitos trabalhos ainda estão sendo feitos neste sentido, com diferentes abordagens e generalizações, na sua grande parte envolvendo Teoria Geométrica da Medida. Convidamos o leitor a dar uma olhada no livro clássico de Frank Morgan [24] para saber um pouco mais sobre essa teoria.

4.4 Problema de Plateau – uma introdução às superfícies mínimas

Construa com pedaços de arame algumas curvas de Jordan no espaço tridimensional. Mergulhe estas curvas dentro do recipiente com água e sabão, obtendo, ao retirá-las, películas de sabão. O problema de Plateau consiste em determinar quais são as possíveis películas obtidas. Existem razões físicas, também envolvendo tensão superficial, para provar que estas soluções devem ser *superfícies mínimas*.

Originalmente, o problema de Plateau foi formulado por Joseph Louis Lagrange, em 1760.

Problema 1 (Problema de Plateau clássico). *Dada uma curva de Jordan no \mathbb{R}^3 , existe uma superfície que tenha esta curva como bordo e cuja área é mínima dentre todas as superfícies de mesmo bordo?*

De fato o problema ganhou o nome de Plateau graças às contribuições do físico belga Joseph Antoine Ferdinand Plateau, que realizou a experiência com películas de sabão acima referida (mesmo sendo cego!), “provando” empiricamente a existência de soluções para o problema. Mas a prova da existência de soluções para o Problema 1 não é tão simples assim, e até o começo do século XX intrigava grandes matemáticos, sendo de fato obtida apenas em casos particulares de bordo.

Embora não seja um problema isoperimétrico, o problema de Plateau é seu primo irmão. Novamente trata-se de um problema que pode ser atacado utilizando técnicas de Cálculo de Variações, ao menos quando supomos alguma diferenciabilidade, e inclusive foi formulado por Lagrange para ilustrar aplicações de Cálculo das Variações.

No começo, a ideia era encontrar explicitamente soluções, mas no século passado este ponto de vista foi modificado, passando a interessar outros aspectos, a saber: existência, unicidade, regularidade de soluções, etc. Sob este ponto de vista, os matemáticos Tibor Radó (em 1930) e Jesse Douglas⁶ (1931) provaram, independentemente, que o *problema de Plateau no disco* era solúvel. Precisamente, denotando por D o disco unitário de \mathbb{R}^2 , isto é, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$,

Problema 2 (Problema de Plateau no disco). *Fixada uma curva de Jordan $C \subset \mathbb{R}^3$, existe uma função diferenciável $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ que se estende continuamente ao bordo ∂D de D , levando-o continuamente em C , cuja área é mínima dentre todas as outras funções com as mesmas propriedades.*

Problemas de Plateau em dimensão e codimensão maior podem ser facilmente formulados, mas estudados com bastante trabalho, utilizando ferramentas de Equações Diferenciais Parciais e de Teoria Geométrica da Medida, área que, como já mencionamos, estuda situações onde pode não haver regularidade das soluções. Muitas vezes mostrar existência de solução para os problemas é relativamente simples, mas daí para entender o quão regular as soluções são, é um passo bem complicado.

Como o objetivo destas notas é uma introdução ao assunto, vamos no que segue supor que a solução do problema de Plateau é suave. Seja S uma solução suave do problema de Plateau de fronteira C .

Fazendo variações normais de S como feito na Seção 4.1, mas com a restrição $f|_C = 0$ em vez da preservação de volume, é possível mostrar que para toda f suave com $f|_C = 0$, vale

$$\int_S f H dA = 0,$$

onde dA indica o elemento de área de S . Isso implica que H é constante igual a zero. Conclusão: as soluções do Problema de Plateau têm curvatura média constante igual a zero, o que justifica o nome clássico de *superfície mínima* para qualquer superfície que tenha curvatura média constante nula. Devemos ressaltar, no entanto, que existem superfícies mínimas que não minimizam área!

Uma outra abordagem mais elementar pode ser feita adicionando a hipótese que C é um gráfico: Suponhamos que a curva do bordo $C \subset \mathbb{R}^3$ é o gráfico de uma função (contínua) definida em uma curva de Jordan plana $\tilde{C} \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (a projeção de C sobre o plano xy), digamos, C é o gráfico de $\phi : \tilde{C} \rightarrow \mathbb{R}$.

Neste caso, afirmamos (sem demonstração) que a solução do problema de Plateau para a curva C é também um gráfico, de uma função definida na região R do plano xy delimitada por \tilde{C} , digamos $u : R \rightarrow \mathbb{R}$. (conforme o trabalho de Radó [28]). Vamos provar, usando técnicas de Cálculo de Variações, que u satisfaz a equação diferencial

⁶Douglas foi um dos primeiros medalhistas *Fields* em 1936, graças a este trabalho.

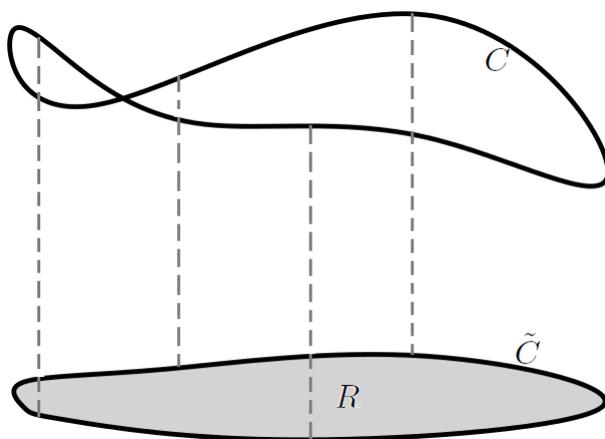


Figura 4.2: Problema de Plateau para gráficos

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0, \tag{4.1}$$

que é equivalente a

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0.$$

De fato, o que vale é o seguinte resultado, para o qual apresentamos uma possível demonstração.

Teorema 9. *Se $u : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico $\operatorname{Gr}(u) \subset \mathbb{R}^3$ tem a menor área dentre todos os gráficos cuja fronteira é C , então é solução do Problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0 \text{ em } R \\ u = \phi \text{ em } \partial R. \end{cases} \tag{4.2}$$

Demonstração. Seja $u \in C^2(R)$. Note que $S := \operatorname{Gr}(u)$ pode ser parametrizado por

$$\Psi : (x, y) \in R \mapsto (x, y, u(x, y)).$$

Assim, uma base de vetores tangentes a S em $\Psi(x, y)$ é dada por $\Psi_x = (1, 0, u_x)$ e $\Psi_y = (0, 1, u_y)$. Fazendo o produto vetorial $\Psi_x \wedge \Psi_y$, temos que o elemento de área de S é dado por $\|\Psi_x \wedge \Psi_y\| dx dy = \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} dx dy$. Desta forma,

$$A(S) = \int_S 1 dA = \int_R \sqrt{1 + \|\nabla u\|^2} dx dy.$$

Escolhendo $f \in C^2(R)$ tal que $f|_{\tilde{C}} = 0$, temos que $\operatorname{Gr}(u + f)$ tem o mesmo bordo que $\operatorname{Gr}(u)$. Digamos que u seja tal que $A(\operatorname{Gr}(u)) \leq A(\operatorname{Gr}(u + f))$ para toda f . Então, denotando por $\mathcal{A}(f) := A(\operatorname{Gr}(f))$, temos que $\nabla \mathcal{A}(0) = 0$, ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}(hv) - \mathcal{A}(0)}{h} = 0$$

Superfícies a la Scherk

É possível construir uma superfície que seja gráfico sobre um quadrado no plano, de modo que no bordo do quadrado ela tenda a $\pm\infty$. De fato, em um par de lados paralelos ela tende a $+\infty$ e nos outros dois ela tende a $-\infty$. Precisamente, trata-se da superfície

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(x, y, \log \frac{\cos x}{\cos y} \right) \mid -\frac{\pi}{2} < x, y < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Essas superfícies foram inicialmente apresentadas por H. Scherk [30], e foram o terceiro tipo de superfícies mínimas não triviais conhecidas (após os catenóides e helicóides). São, no entanto, muito mais do que exemplos: comumente elas (ou superfícies construídas inspiradas nelas!) são utilizadas como barreiras em problemas geométricos; um exemplo clássico de aplicação é na demonstração do Teorema de Bernstein, que afirma que em \mathbb{R}^3 as únicas superfícies mínimas que são gráfico de funções definidas em todo \mathbb{R}^2 são planos (ou seja, as funções são lineares afins).

A construção aproximada das superfícies de Scherk com películas de sabão consiste em construir um contorno como o da Figura 4.3 para mergulhar no sabão.

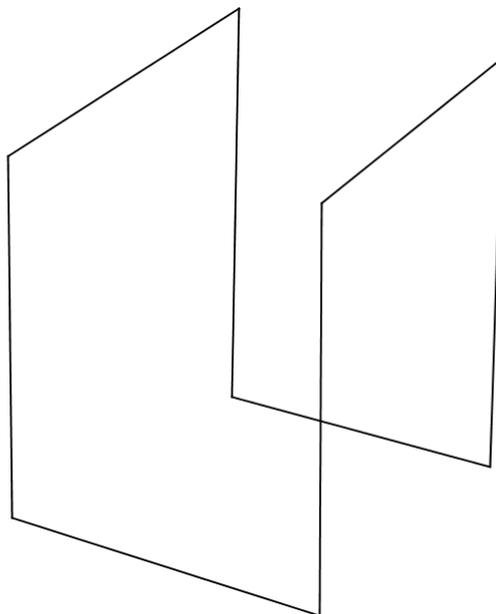


Figura 4.3: Contorno para construção de uma superfície parecida com as superfícies de Scherk

Helicóides

Um helicóide é obtido como a composição de dois movimentos rígidos de uma reta no \mathbb{R}^3 , a saber, uma translação com velocidade uniforme na direção de uma reta r e uma rotação com velocidade angular constante, em planos perpendiculares a r , centrada em um ponto de r .

Uma porção de helicóide pode ser realizada com películas de sabão como foi feito por Plateau: tome como formato para o arame uma hélice em torno de um eixo... mas para que se forme uma película de sabão, é preciso que o arame se feche, e para fazê-lo é suficiente adicionar o eixo de rotação da hélice. Não há problema em fazer isto porque o eixo de rotação está contido no helicóide.

Catenóides

Os catenóides foram as primeiras superfícies mínimas descobertas, além dos planos, por Leonhard Euler, em 1744. Eles podem ser obtidos rotacionando uma catenária (curva que aparece quando prendemos um cordão em dois extremos distintos) em torno de sua diretriz.

Para realizá-los como películas de sabão, faça dois círculos (de preferência de mesmo raio) com o arame. Vai ser necessário deixar também uma haste para puxá-los para fora do balde. Encoste-os e mergulhe-os na mistura de água e sabão. Ao retirá-los, separe-os vagarosamente. Primeiramente, aparece algo singular (no sentido matemático da palavra!): um disco se formando entre os dois arames, no meio da película. Ao furá-lo, vai ser possível ver um catenóide. Continue separando os arames vagarosamente... cada vez mais... ué! O que acontece? Acima de uma certa distância, não há mais catenóide entre os círculos. Isso pode ser provado matematicamente, e é possível calcular esta altura crítica explicitamente em termos do raio dos círculos. Curioso? Isso é só um começo...

Referências Bibliográficas

- [1] A. Arbieto, C. Matheus, K. Oliveira. *O trabalho de Ennio De Giorgi sobre o problema de Plateau*, Matemática Universitária **35**, 1–29, 2003.
- [2] Barbosa, do Carmo *The stability of hypersurfaces of constant mean curvature*. Math. Zeit. **187**, 339–353, 1984.
- [3] I. Benjamini, J. Cao *A new isoperimetric theorem for surfaces of variable curvature*. Duke Math. Journal **85**, 359–396, 1996.
- [4] M. Berger. *A panoramic view on Riemannian geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [5] V. Blåsjö *The evolution of... the Isoperimetric Problem* The American Mathematical Monthly **112** (6)526–566, 2005.
- [6] Y. D. Burago, V.A. Zalgaller. *Geometric Inequalities*. Springer, New York (1988)
- [7] I. Chavel. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Pure and applied mathematics. Academic Press, Orlando, 1994
- [8] M. P. do Carmo. *Geometria Diferencial de curvas e superfícies*, 3 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.
- [9] M. P. do Carmo. *Superfícies Mínimas* 1 ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- [10] G. Faber, *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt* Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Phys. Kl. (1923) pp. 169–172
- [11] R. Ferréol, *Encyclopédie des formes Mathématiques Remarquables* <http://www.mathcurve.com>, acesso em fevereiro de 2016.
- [12] D. G. de Figueiredo, *Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana*. Revista Matemática Universitária, **9/10**, 69–108 (1989).
- [13] D. G. de Figueiredo, *Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA-CNPq Rio, 1977.

- [14] A. T. Fomenko. *The Plateau problem. Part I: Historical Survey*, Studies in the Development of Modern Mathematics **1**. Gordon and Breach Science Publishers.
- [15] M. Gromov, *Isoperimetric inequalities in Riemannian manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, No 1200, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [16] H. Howards, *Soap bubbles on surfaces*, undergraduate thesis, Williams college, 1992.
- [17] H. Howards, M. Hutchings, F. Morgan *The Isoperimetric Problem on surfaces*, The American mathematical monthly **106 (5)**,
- [18] M. Hutchings, F. Morgan, M. Ritoré, A. Ros. *Proof of the double bubble conjecture*, Annals of Mathematics, 2nd Ser. **155 (2)**: 459–489, 2002.
- [19] E. Krahn, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises* Math. Ann. , 94 (1925) pp. 97–100
- [20] Lima, E. L. *Curso de Análise vol 1*. 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [21] T. M. Madeira. *O Problema isoperimétrico clássico*. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2005.
- [22] W. H. Meeks III and A. Ramos, *Finite topology surfaces with bounded mean curvature in hyperbolic manifolds*, trabalho em preparação.
- [23] F. Mercuri. R. L. Pedrosa. *Uma introdução às desigualdades isoperimétricas*. 19º Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1993.
- [24] F. Morgan. *Geometric measure theory: a beginner's guide*, Academic Press, Fourth Edition, 2009. 430–439 (2005).
- [25] J. Nitsche, *Plateau's Problems and their modern Ramifications*. American Mathematical Monthly, **81**, 945–968, 1974.
- [26] R. Osserman *The isoperimetric inequality*. Bull. of the Amer. Math. Soc **84 (6)**, 1182–1238 ,1978
- [27] *Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **22**, 140–144, 1913.
- [28] T. Radó, *On the problem of Plateau*, Ergebn. D. Math. u. ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, Berlin, 1933.
- [29] A. Ros *The isoperimetric problem*. Em: Global Theory of Minimal Surfaces. Clay Math. Proc., vol. 2, Am. Math. Soc., Providence, pp. 175–209 (2005).

- [30] H.F. Scherk, *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **13**, 185–208, 1835.
- [31] Sir William Thomson (Baron Kelvin), *Popular lectures and addresses, Vol. II: Geology and general Physics*, Nature Series London, Macmillan and CO. 1894. Disponível online em <http://math.arizona.edu/dido/LordKelvin1894.pdf> (acesso em março de 2016).
- [32] Wikipedia: Lagrange Multipliers on Banach spaces. https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multipliers_on_Banach_spaces, acesso em fevereiro de 2016.
- [33] Wikipedia: Soap bubbles. https://en.wikipedia.org/wiki/Soap_bubble, acesso em fevereiro de 2016.

