Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Co)Ações Parciais da Álgebra de Hopf de Multiplicadores: Morita e Galois

Tese de Doutorado

Grasiela Martini

Porto Alegre, 14 de dezembro de 2016

Tese submetida por Grasiela Martini*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Antonio Paques

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques (UFRGS - Orientador)
Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)
Prof. Dr. Marcelo Muniz S. Alves (UFPR)
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (UFRGS)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Aos meus pais

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais, que apesar da distância e das dificuldades sempre me apoiaram em todos os momentos da vida. Incentivaram a estudar, para sair da roça e ter uma vida melhor que a deles e principalmente, me ensinaram que na vida precisamos lutar pelos nossos objetivos, sem jamais desistir. Vocês são meu maior exemplo de luta e superação.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Antonio Paques pelos ensinamentos transmitidos, pela paciência, por acreditar em mim e sempre exigir o meu melhor. Nesse período, cresci não só como pessoa, mas como pesquisadora.

Agradeço aos meus colegas Danielle, Eneilson e Graziela que participaram ativamente das múltiplas discussões em torno de questões pertinentes a este trabalho. E, um agradecimento especial ao professor Eliezer, pela disponibilidade em ajudar sempre que foi necessário.

Agradeço o professor A. Van Daele pela solicitude em esclarecer minhas dúvidas.

Por fim, agradeço a todos os membros da banca, que aceitaram ler meu trabalho, e à Capes pelo suporte financeiro.

"Só pode saborear bem a vitória
aquele que já sentiu o amargo da derrota."
(Pe. Fábio de Melo)

Resumo

Neste trabalho tratamos com (co)ações parciais de álgebra de Hopf de multiplicadores sobre álgebras, não necessariamente unitárias, com o objetivo principal de construir um contexto de Morita relacionando a álgebra dos coinvariantes $R^{\underline{coA}}$ com uma determinada subálgebra do produto smash $R\#\widehat{A}$. Além disso, apresentamos a noção de uma coação de Galois parcial, a qual guarda uma íntima relação com o contexto de Morita assim construído.

Abstract

In this work we deal with partial (co)action of multiplier Hopf algebras on algebras, not necessarily unital. Our main goal is to construct a Morita context relating the coinvariant algebra $R^{\underline{coA}}$ with a certain subalgebra of the smash product $R\#\widehat{A}$. Besides that, we present the notion of partial Galois coaction, which is closely related with the Morita context as constructed.

Índice

Introdução

Ações parciais de grupos foram introduzidas por R. Exel em [12], no contexto de álgebra dos operadores. Alguns anos depois, M. Dockuchaev e R. Exel, em [7], generalizaram alguns resultados clássicos de ações de grupos para o contexto de ações parciais de grupos sob um ponto de vista puramente algébrico. Dando sequência, S. Caenepeel e K. Jassen, em [4], estenderam esse conceito para álgebras de Hopf e desenvolveram uma teoria para (co)ações parciais de álgebra de Hopf, bem como uma teoria de Hopf-Galois parcial.

Posteriormente, muitos autores têm explorado essas novas estruturas, proporcionando um grande desenvolvimento dessa teoria. Porém, os principais resultados obtidos a partir de (co)ações parciais em álgebras, são quando estas são unitárias e quando a álgebra de Hopf tem dimensão finita. Uma pergunta natural é saber se existe alguma estrutura de álgebra, não necessariamente unitária, com a qual possamos (co)agir parcialmente em álgebras também sem unidade.

Note que, se G é um grupo qualquer, a álgebra de grupo $\Bbbk G$ sobre um corpo $\Bbbk$ tem uma estrutura natural de álgebra de Hopf. Além disso, se o grupo é finito, essa álgebra de Hopf tem dimensão finita e então seu dual também é uma álgebra de Hopf, o que não ocorre quando G é infinito.

Nesse contexto, A. Van Daele em [13], introduziu a noção de álgebra de Hopf de multiplicadores, generalizando a definição clássica de álgebra de Hopf. O exemplo motivador para esse conceito foi a álgebra das funções complexas com suporte finito em um grupo qualquer.

Desde então, a teoria foi desenvolvida seguindo as mesmas linhas de estudo de álgebras de Hopf e obtendo alguns novos resultados, como a existência de unidades locais bilaterais para qualquer álgebra de Hopf de multiplicadores. A principal diferença, além dos aspectos técnicos, reside no fato da dualidade, no caso de álgebras de Hopf de dimensão finita, ser estendida para álgebras de Hopf de multiplicadores com integrais.

No Capítulo 1 tratamos dos pré-requisitos minimamente necessários para a compreensão do texto. Referências para o aprofundamento deste assunto são dadas sempre que necessário.

No Capítulo 2 apresentamos a definição de ação parcial de uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular A em uma álgebra R, com produto não degenerado, juntamente com exemplos e propriedades. Esses conceitos não só generalizam a teoria construída por S. Caenepeel e K. Jassen, em [4], mas também a teoria desenvolvida por A. Van Daele em [8].

Seguindo as ideias de A. Van Daele em [8], "estendemos" a ação parcial acima para a álgebra de multiplicadores de R e definimos as álgebras $R\#A$ e $R^{\underline{A}}$, necessárias para a construção de um contexto de Morita desenvolvido neste trabalho. Ao final do capítulo, com o objetivo de apresentar uma relação para a aplicação antípoda de A, semelhante a realizada por K. Janssen and J. Vercruysse em [10], construímos uma estrutura de álgebra para um subconjunto do $Hom(A, R)$ utilizando [13].

No capítulo 3 estudamos o conceito de coações parciais de uma álgebra de Hopf de multiplicadores A em R e trabalhamos com exemplos e importantes propriedades relacionadas a essa nova estrutura parcial, estendendo a teoria proposta por A. Van Daele em [22]. Na sequência, supondo A um grupo quântico algébrico, relacionamos as estruturas de ação e coação parcial.

No último capítulo construímos um contexto de Morita relacionando a álgebra dos coinvariantes $R^{\underline{coA}}$ e uma subálgebra do produto smash, o qual estende o contexto de Morita apresentado por A. Van Daele em [22] e o contexto clássico unitário e finito dimensional. Como consequência desenvolvemos uma teoria de Galois conectando o contexto de Morita e a noção de coação de Galois parcial.

Convenções

Produtos tensoriais e espaços vetoriais sem identificação serão sobre um corpo fixo $\Bbbk$. Para não sobrecarregar a escrita, denotamos por 1 a unidade da álgebra de multiplicadores de A e a unidade da álgebra de multiplicadores de R, ficando claro ao longo do texto a qual álgebra estamos nos referindo. Demais notações, serão fixadas ao longo do trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo mencionamos alguns conceitos básicos que serão necessários ao longo deste trabalho. Para facilitar a leitura, não vamos apresentar as demonstrações dos resultados que serão enunciados, mas em cada seção indicamos os textos que o leitor poderá consultar caso necessite de informações adicionais.

1.1 Álgebra de Hopf de Multiplicadores

Iniciamos com a definição de álgebra de multiplicadores para introduzirmos a noção e propriedades de uma álgebra de Hopf de multiplicadores. No que segue, A será uma álgebra não necessariamente unitária e, para maiores informações, veja [13], [15], [8] e [17].

Definição 1.1.1 ([13])**.** Uma álgebra dos *multiplicadores* de A é o espaço vetorial dos pares ordenados

$$M(A) = \{(\lambda, \rho) \; ; \; \lambda, \rho : A \to A \; \Bbbk\text{-lineares}\},$$

tais que $\lambda(ab) = \lambda(a)b$, $\rho(ab) = a\rho(b)$ e $a\lambda(b) = \rho(a)b$, para todo $a, b \in A$ munido de uma multiplicação definida por

$$(\lambda, \rho) \cdot (\lambda', \rho') = (\lambda \circ \lambda', \rho' \circ \rho).$$

$M(A)$ é unitária e denotamos $1_{M(A)} = (\imath_A, \imath_A)$ por 1, onde $\imath_A$ é a aplicação identidade de A para A.

A aplicação λ é chamada um *multiplicador à esquerda* e ρ um *multiplicador à direita*. Nessas condições, as composições acima, também definem a álgebra de multiplicadores à esquerda de A ($L(A)$) e a álgebra de multiplicadores à direita de A ($R(A)$).

A partir de agora, assumimos o produto em A *não degenerado* no seguinte sentido, se para todo $b \in A$, $ab = 0$ então $a = 0$ e similarmente se, para todo $a \in A$, $ab = 0$ então $b = 0$. Essa propriedade é automática para álgebras com unidade. Da mesma forma, podemos pensar no produto não degenerado lateralmente.

Obtemos uma imersão natural de A em $L(A)$, $R(A)$ e $M(A)$, da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & L(A) \\ a & \longmapsto & L_a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & R(A) \\ a & \longmapsto & R_a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & M(A) \\ a & \longmapsto & (L_a, R_a) \end{array}$$

onde $L_a(b) = ab$, $R_a(b) = ba$, para todo $b \in A$. Se A tem unidade, então $A = L(A) = R(A) = M(A)$.

Dessa forma, $a \in A$ pode ser considerado como um elemento $(L_a, R_a) \in M(A)$ e, portanto, para $x = (\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \in M(A)$, ax e xa podem ser interpretados como elementos em $M(A)$. Logo, pela definição do produto em $M(A)$, é natural escrevermos $\overline{x}(a) = xa$ e $\overline{\overline{x}}(a) = ax$, e assim, temos a seguinte relação: $a(xb) = (ax)b$, para todo $a, b \in A$.

A não degenerescência de A também implica que uma álgebra de multiplicadores pode ser definida apenas usando a relação

$$a\lambda(b) = \rho(a)b, \tag{1.1}$$

para todo $a, b \in A$. De fato,

$$a\lambda(bc) = \rho(a)bc = a\lambda(b)c,$$

para qualquer $a \in A$, assim $\lambda(bc) = \lambda(b)c$, para todo $b, c \in A$. Similarmente, $\rho(ab)c = ab\lambda(c) = a\rho(b)c$, para todo $c \in A$, ou seja, $\rho(ab) = a\rho(b)$, para qualquer $a, b \in A$ e dessa forma, λ e ρ são unicamente determinados.

Nesse contexto, definimos o seguinte homomorfismo:

Definição 1.1.2 ([13]). Sejam A e B duas álgebras com produto não degenerado e $\varphi : A \longrightarrow M(B)$ um homomorfismo. A aplicação φ é dita *não degenerada* se, $B = \varphi(A)B$ e $B = B\varphi(A)$.

Tal homomorfismo tem uma única extensão:

Proposição 1.1.3 ([13]). *Se φ é um homomorfismo não degenerado de A para $M(B)$, então existe um único homomorfismo de $M(A)$ para $M(B)$ que estende φ.*

Demonstração. Definimos $\varphi(x) = (\overline{\varphi(x)}, \overline{\overline{\varphi(x)}}) \in M(B)$, para $x \in M(A)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(x)} : B &\longrightarrow B \\ \varphi(a)b &\longmapsto \varphi(xa)b \end{aligned}$$

Analogamente, $\overline{\overline{\varphi(x)}}(b\varphi(a)) = b\varphi(ax)$, para qualquer $b \in B$ e $a \in A$. $\square$

No que segue, consideramos o espaço vetorial $A \otimes A$, o qual é uma álgebra de maneira natural com produto não degenerado. Assim, temos as seguintes inclusões naturais:

$$A \otimes A \hookrightarrow M(A) \otimes M(A) \hookrightarrow M(A \otimes A) \tag{1.2}$$

Nessas hipóteses, podemos introduzir a noção de uma comultiplicação em A.

Definição 1.1.4 ([13])**.** Uma *comultiplicação (ou coproduto)* em A é um homomorfismo $\Delta : A \longrightarrow M(A \otimes A)$ tal que

(i) $\Delta(a)(1 \otimes b) \in A \otimes A$ e $(a \otimes 1)\Delta(b) \in A \otimes A$;

(ii) $(a \otimes 1 \otimes 1)((\Delta \otimes \imath)(\Delta(b)(1 \otimes c))) = ((\imath \otimes \Delta)((a \otimes 1)\Delta(b)))(1 \otimes 1 \otimes c)$,

para todo a, b e $c \in A$, sendo $\imath$ a aplicação identidade de A para A.

Se A tem unidade, podemos tomar $a = c = 1_A$ e com isso, obtemos a noção usual de coassociatividade.

Observação 1.1.5. Usando as imersões em 1.2, temos:

(i) $(1 \otimes a)$ e $(a \otimes 1) \in M(A \otimes A)$;

(ii) $(a \otimes y)(x \otimes b) = (ax \otimes yb) \in A \otimes A$;

(iii) $(a \otimes 1)(1 \otimes b) = (a \otimes b) = (1 \otimes b)(a \otimes 1)$,

para todo $a, b \in A$ e $x, y \in M(A)$.

Definição 1.1.6 ([13])**.** Um par (A, Δ), onde A é uma álgebra e Δ é uma comultiplicação é dito uma *álgebra de Hopf de multiplicadores* se as aplicações lineares

$$\begin{aligned} T_1 : A \otimes A &\longrightarrow A \otimes A \\ a \otimes b &\longmapsto \Delta(a)(1 \otimes b) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} T_2 : A \otimes A &\longrightarrow A \otimes A \\ a \otimes b &\longmapsto (a \otimes 1)\Delta(b) \end{aligned}$$

são bijetivas.

Semelhante a teoria de álgebras de Hopf, a definição acima implica o seguinte resultado:

Proposição 1.1.7 ([13]). *Seja (A, Δ) uma álgebra de Hopf de multiplicadores. Então, existe um único homomorfismo $\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{k}$ tal que*

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes \imath)(\Delta(a)(1 \otimes b)) &= ab\\ (\imath \otimes \varepsilon)((a \otimes 1)\Delta(b)) &= ab\end{aligned}$$

para todo $a, b \in A$. Temos também a existência de um único anti-homomorfismo $S : A \longrightarrow M(A)$ tal que

$$\begin{aligned}m(S \otimes \imath)(\Delta(a)(1 \otimes b)) &= \varepsilon(a)b\\ m(\imath \otimes S)((a \otimes 1)\Delta(b)) &= \varepsilon(b)a\end{aligned}$$

para todo $a, b \in A$, onde m é denotada a multiplicação em A e $\imath$ a aplicação identidade de A. As aplicações ε e S são chamadas de counidade e antípoda de A, respectivamente.

Observação 1.1.8. O homomorfismo ε é não nulo, logo existe pelo menos um elemento $b \in A$ tal que $\varepsilon(b) = 1_{\mathbb{k}}$, ou seja, ε é um homomorfismo não degenerado, pois $\mathbb{k} = \varepsilon(A)\mathbb{k}$. Portanto, aplicando a Proposição 1.1.3, existe uma única extensão $\varepsilon : M(A) \longrightarrow \mathbb{k}$.

Nessas condições, se A tem unidade segue que,

Teorema 1.1.9 ([15]). *(A, Δ) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores com unidade se e somente se A é uma álgebra de Hopf.*

O exemplo motivador dessa álgebra de Hopf generalizada surgiu considerando o espaço das funções com suporte finito de um grupo G em $\mathbb{k}$, como segue abaixo.

Exemplo 1.1.10 ([15])**.** Seja G um grupo qualquer e consideramos A_G o espaço das funções com suporte finito de G em $\Bbbk$. Esse espaço vetorial é uma álgebra com produto pontual e possui produto não degenerado. Uma base para tal álgebra é o conjunto $\{\delta_p \ ; \ p \in G\}$, onde $\delta_p : G \longrightarrow \Bbbk$ tal que $\delta_p(p) = 1_{\Bbbk}$ e $\delta_p(q) = 0$, se $q \neq p$. A álgebra de multiplicadores de A_G é o espaço de todas as funções de G em $\Bbbk$ e será denotado por B_G.

É possível identificar a álgebra $A_G \otimes A_G$ com o espaço $A_{G\times G}$ e definir a aplicação $\Delta : A_G \longrightarrow M(A_{G\times G})$ por $\Delta(f)(p,q) = f(pq)$, para todo $f \in A_G$ e $p, q \in G$. Então, A_G é uma álgebra de Hopf de multiplicadores, pois para qualquer $g \in A_G$, pelas propriedades de grupo, segue que as funções

$$\begin{aligned} \Delta(f)(1 \otimes g) : (p,q) &\to f(pq)g(q) \\ (g \otimes 1)\Delta(f) : (p,q) &\to g(p)f(pq), \end{aligned}$$

também possuem suporte finito. Em outras palavras, vale o item (i) da Definição 1.1.4 e, consequentemente, Δ é uma comultiplicação. Note que, nas aplicações acima, estamos usando fortemente o isomorfismo entre as álgebras $A_G \otimes A_G$ e $A_{G\times G}$. Além do mais, as aplicações T_1 e T_2 da Defnição 1.1.6, construídas a partir das funções acima, geram todo espaço $A_{G\times G}$.

A aplicação ε é dada por $\varepsilon(f) = f(e)$, onde e é o elemento neutro de G e S é dada por $(S(f))(p) = f(p^{-1})$, para todo $f \in A_G$ e $p \in G$.

Exemplo 1.1.11 ([21])**.** Sejam $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos e A o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, gerado pelos elementos $\{e_p d^q ; p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}\}$. Definimos o produto em A da seguinte forma

$$de_p = e_{p+1}d \text{ e } e_p e_r = \delta_{p,r} e_p,$$

onde δ é o delta de Kronecker. Assim, A é uma álgebra sem unidade, mas com produto não degenerado. Seja $c \in M(A)$, denotado por $c = \sum\limits_{r\in\mathbb{Z}} \lambda^r e_r$, para $\lambda \in \mathbb{C}$

não nulo, definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}(\sum_{r\in\mathbb{Z}}\lambda^r e_r)(e_p d^q) &= \lambda^p e_p d^q\\(e_p d^q)(\sum_{r\in\mathbb{Z}}\lambda^r e_r) &= \lambda^{p-q} e_p d^q,\end{aligned}$$

para todo $e_p d^q \in A$, logo c é um elemento invertível em $M(A)$, cuja inversa é dada por $\sum\limits_{r\in\mathbb{Z}} \lambda^{-r} e_r$ e, quando $\lambda = 1_{\mathbb{C}}$, c é a unidade de $M(A)$.

O coproduto Δ será dado por,

$$\begin{aligned}\Delta(e_p) &= \sum_{r\in\mathbb{Z}} e_r \otimes e_{p-r}, \quad p \in \mathbb{Z}\\\Delta(d) &= d \otimes c + 1 \otimes d,\end{aligned}$$

assim $\Delta(c) = c \otimes c \in M(A \otimes A)$ e, portanto, (A, Δ) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores, com antípoda e counidade dadas por

$$\begin{aligned}S(e_p) = e_{-p}, &\qquad \varepsilon(e_p) = \delta_{0,p}, \quad p \in \mathbb{Z},\\S(d) = -dc^{-1}, &\qquad \varepsilon(d) = 0.\end{aligned}$$

Note que, o coproduto Δ depende do escalar λ, ou seja, o correto seria escrever Δ_λ, mas para simplificar a notação, escrevemos apenas Δ.

Observação 1.1.12. Se Δ é um homomorfismo não degenerado então, pelo Teorema 1.1.3, os homomorfismos $(\Delta \otimes \imath)$ e $(\imath \otimes \Delta)$ de $A \otimes A$ em $M(A \otimes A)$ possuem uma única extensão para $M(A \otimes A)$. Portanto, a coassociatividade da Definição 1.1.4 pode ser expressa na forma $(\Delta \otimes \imath)\Delta = (\imath \otimes \Delta)\Delta$.

Para mostrar a não degenerescência do coproduto é necessário introduzir a noção de unidades locais bilaterais, conceito trivial no caso de álgebras com unidade.

Definição 1.1.13 ([8])**.** Dizemos que uma álgebra A possui *unidades locais bilaterais* se dados $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, existe um elemento $e \in A$ tal que $ea_i = a_i$ e $a_i e = a_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

Inicialmente B. Drabant, A. Van Daele e Y. Zang, em [8], mostraram que adicionando uma certa propriedade na álgebra de Hopf de multiplicadores, esta sempre teria unidades locais bilaterais. Mas, observaram que não tinham certeza se essa hipótese, chamada de regular, era fundamental para esse resultado. Posteriormente, em [17], A. Van Daele melhorou essas hipóteses apresentando o próximo resultado e, devido ao fato de [17] não ter sido publicada, apresentamos aqui sua demonstração.

Teorema 1.1.14. *Seja (A, Δ) uma álgebra de Hopf de multiplicadores, então A tem unidades locais bilaterais.*

Demonstração. A demonstração será realizada em três passos:

- Dado $a \in A$, existem elementos $e, f \in A$ tais que $ea = a$ e $af = a$.

De fato, seja $a \in A$ e consideramos o subespaço Aa de A. Para mostrar a existência de tal elemento e, precisamos provar que $a \in Aa$. Supomos que isso não ocorre e seja ω um funcional linear em A tal que $\omega(ba) = 0$, para todo $b \in A$, mas $\omega(a) \neq 0$. Então, para todo $c \in A$ e $m \in M(A)$, $(c \otimes m)\Delta(b) \in A \otimes A$, logo

$$(\imath \otimes \omega)((c \otimes m)\Delta(b)(1 \otimes a)) = 0,$$

onde $\imath$ é a aplicação identidade de A. Escolhemos um elemento $b \in A$ tal que $\varepsilon(b) = 1_{\Bbbk}$ e escrevemos $\Delta(b)(1 \otimes a) = \sum\limits_i p_i \otimes q_i$, onde os elementos p_i são linearmente independentes, assim

$$\sum_i cp_i\omega(mq_i) = 0,$$

para todo $c \in A$. O fato do produto em A ser não degenerado implica $\sum\limits_i^n p_i\omega(mq_i) = 0$ e, como $\{p_i\}$ é linearmente independentes, segue $\omega(mq_i) = 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $m \in M(A)$. Pela Prosição 1.1.7, $S(p_i) \in M(A)$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e, portanto, $\omega(\sum\limits_i (S(p_i)q_i)) = 0$. Agora observamos,

$$\sum_i S(p_i)q_i = m(S \otimes \imath)(\Delta(b)(1 \otimes a)) = \varepsilon(b)a = a,$$

ou seja, $\omega(a) = 0$, contradizendo a hipótese e, concluíndo assim, $a \in Aa$. Similarmente, mostramos que $a \in aA$ e com isso, existe um elemento $f \in A$ satisfazendo $a = af$, completando a demonstração do primeiro passo.

- Para todo $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, existem elementos $e, f \in A$ tais que $a_j = ea_j$ e $a_j f = a_j$ para todo j.

A prova será feita por indução em n. O caso $n = 1$ é decorrente da primeira parte e então, assumimos verdadeiro para $n-1$, ou seja, existe $e' \in A$ tal que $e'a_j = a_j$ para todo $j = 1, 2, ..., n-1$. Consideramos $e'' \in A$ tal que $e''(1-e')a_n = (1-e')a_n$, e facilmente verificamos que $e = e' + e'' - e''e'$ satisfaz $ea_j = a_j$ para todo $j = 1, ..., n$. Da mesma forma, encontramos um elemento $f \in A$ tal que $a_j f = a_j$, para todo $j = 1, ..., n$.

- Para todo $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ existe um elemento $p \in A$ tal que $a_j = pa_j$ e $a_j p = a_j$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$. Para tal, assumimos a existência desses elementos $e, f \in A$ como acima e, consideramos $p = e + f - fe$. Então,

$$\begin{aligned} pa_j &= ea_j + fa_j - fea_j = a_j + fa_j - fa_j = a_j \\ a_j p &= a_j e + a_j f - a_j fe = a_j e + a_j - a_j e = a_j, \end{aligned}$$

para todo $j \in \{1, ..., n\}$, completando a demonstração. $\square$

Algumas consequências importantes são geradas a partir desse resultado.

Corolário 1.1.15. *Toda álgebra de Hopf de multiplicadores (A, Δ) é idempotente, ou seja, $A^2 = A$.*

Corolário 1.1.16. *Se (A, Δ) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores, então a aplicação Δ é um homomorfismo não degenerado.*

B. Drabant, A. Van Daele e Y. Zang, em [8], justificam o uso da notação de Sweedler para álgebra de Hopf de multiplicadores usando unidades locais bilaterais.

Observação 1.1.17. Se (A, Δ) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores, seria útil obtermos uma expressão para $\Delta(a)$, quando $a \in A$ mas, o problema é que $\Delta(a)$ não pertence a $A \otimes A$, em geral. Sabemos, no entanto, que $\Delta(a)(1 \otimes b) \in A \otimes A$, para todo $a, b \in A$ e, portanto, podemos escrever $\Delta(a)(1 \otimes b) = \sum_a a_1 \otimes a_2 b$. De fato, pelo Teorema 1.1.14, existe $e \in A$ tal que $b = eb$ e, com isso, podemos pensar $\sum_a a_1 \otimes a_2$ para $\Delta(a)(1 \otimes e)$. Essa notação ainda depende de $b \in A$, mas para finitos elementos de A podemos usar a mesma unidade local $e \in A$. Similarmente, denotamos $(b \otimes 1)\Delta(a)$ por $\sum_a ba_1 \otimes a_2 \in A \otimes A$.

A notação de Sweedler é muito conveniente, pois podemos escrever as fórmulas de uma maneira mais clara, mas usá-la requer muita atenção. Para estar bem definida, precisamos cuidar para no máximo um fator a_k não estar *coberto* por um elemento de A. Em [17], A. Van Daele também justifica o uso da notação de Sweedler, não utilizando a existência das unidades locais bilaterais.

No que segue, omitimos o uso do somatório na notação de Sweedler, dessa maneira, a coassociatividade da Definição 1.1.4 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$ab_{11} \otimes b_{12} \otimes b_2 c = ab_1 \otimes b_{21} \otimes b_{22} c = ab_1 \otimes b_2 \otimes b_3 c,$$

para todo $a, b, c \in A$.

A condição de regularidade nos dá uma classe especial de álgebras de Hopf de multiplicadores. Para defini-la, denotamos σ a aplicação linear de $A \otimes A$ para $A \otimes A$ dada por $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$, a qual é um homomorfismo não degenerado. Portanto, pelo Teorema 1.1.3, σ pode ser estendida a um homomorfismo em $M(A \otimes A)$ e com isso, faz sentido compor as aplicações σ e Δ, denotando por $\sigma\Delta$. Note que, essa noção em uma álgebra com unidade é trivialmente satisfeita.

Definição 1.1.18 ([13])**.** Uma álgebra de Hopf de multiplicadores (A, Δ) é chamada de *regular* se $(A, \sigma\Delta)$ também for uma álgebra de Hopf de multiplicadores.

Um importante resultado segue dessa nova classe de álgebras.

Proposição 1.1.19 ([13]). *Uma álgebra de Hopf de multiplicadores* (A, Δ) *é regular se, e somente se,* S *é bijetiva e* $S(A) \subseteq A$.

Exemplo 1.1.20. As álgebras de Hopf de multiplicadores construídas nos Exemplos 1.1.10 e 1.1.11 são regulares.

Exemplo 1.1.21. Sejam (A, Δ_A) e (B, Δ_B) duas álgebras de Hopf de multiplicadores regulares. Então, $(A \otimes B, \Delta)$ é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular com produto e coproduto definidos de maneira usual.

Observação 1.1.22. Para álgebras de Hopf de multiplicadores regulares $\Delta(A)(A \otimes 1)$ e $(1 \otimes A)\Delta(A)$ geram todo o espaço $A \otimes A$ e a coassociatividade é equivalente à

$$(\Delta \otimes \imath)((1 \otimes b)\Delta(a))(c \otimes 1 \otimes 1) = (1 \otimes 1 \otimes b)(\imath \otimes \Delta)(\Delta(a)(c \otimes 1)), \tag{1.3}$$

para todo a, b e $c \in A$. E, usando a notação de Sweedler, escrevemos $(1 \otimes b)\Delta(a) = a_1 \otimes ba_2$ e $\Delta(a)(b \otimes 1) = a_1 b \otimes a_2$, para $b, a \in A$.

Note que, analogamente ao caso usual de álgebras de Hopf, a inversa S^{-1} de S é a antípoda da álgebra de Hopf de multiplicadores $(A, \sigma\Delta)$. Nessas condições, a aplicação S é um homomorfismo não degenerado e, com isso, pode ser unicamente estendida.

Ao longo deste trabalho, usamos uma outra escrita para os elementos do espaço $A \otimes A$, conforme será observado abaixo:

Observação 1.1.23. Usando a sobrejetividade da aplicação T_1, da Definição 1.1.6, dados $a, b \in A$, escrevemos $a \otimes b = \sum_i \Delta(p_i)(1 \otimes q_i)$. Por outro lado, usando a notação de Sweedler e a regularidade da álgebra de Hopf de multiplicadores, temos as seguintes escritas:

$$a \otimes b = \Delta(a_1)(1 \otimes S(a_2)b)$$

$$= \Delta(b_2)(S^{-1}(b_1)a \otimes 1), \qquad (1.4)$$

para todo $a, b \in A$.

1.2 Grupos Quânticos Algébricos

Na teoria usual de álgebras de Hopf, a álgebra dual de uma álgebra de Hopf também será uma álgebra de Hopf, se sua dimensão for finita. Essa hipótese, no contexto de álgebras de Hopf de multiplicadores é muito forte, pois se A tiver dimensão finita, pelo Teorema 1.1.14, A tem unidade e, consequentemente, A é uma álgebra de Hopf. Nesta seção, introduzimos a noção de uma álgebra de Hopf de multiplicadores dual e, para isso, o conceito de integrais. Para maiores informações, o leitor poderá consultar o artigo [15].

Para o que segue, (A, Δ) (ou simplesmente A) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular, A' seu espaço vetorial dual e denotamos por $\imath$ a aplicação identidade de A.

Sejam $a \in A$ e $\omega \in A'$ (um funcional linear em A), definimos um elemento $m \in M(A)$ por

$$\begin{aligned} mb &= (\omega \otimes \imath)(\Delta(a)(1 \otimes b)) \\ bm &= (\omega \otimes \imath)((1 \otimes b)\Delta(a)), \end{aligned} \qquad (1.5)$$

para todo $b \in A$ e, escrevemos $m = (\omega \otimes \imath)\Delta(a)$. Similarmente, definimos $(\imath \otimes \omega)\Delta(a)$ em $M(A)$. Usando essa notação, segue abaixo, a noção de funcionais invariantes à esquerda e à direita.

Definição 1.2.1. Um funcional linear φ em A é chamado de *invariante à esquerda* se $(\imath \otimes \varphi)\Delta(a) = \varphi(a)1$, para todo $a \in A$. Analogamente, um funcional linear ψ em A é chamado *invariante à direita* se $(\psi \otimes \imath)\Delta(a) = \psi(a)1$, para todo $a \in A$.

Exemplo 1.2.2. No exemplo 1.1.10, o funcional linear φ em A_G definido por $\varphi(f) = \sum_{p \in G} f(p)$ é invariante à esquerda e à direita.

Observação 1.2.3. Se φ é um funcional invariante à esquerda, então $\psi = \varphi \circ S$ é um funcional invariante à direita.

Funcionais invariantes nem sempre existem, basta considerar o Exemplo 1.1.11. Também sabemos da teoria clássica de álgebras de Hopf, que sua existência está atrelada a finitude da álgebra, mas como mencionamos acima, este não é o caso que estamos interessados em estudar.

Definição 1.2.4. Um funcional invariante à esquerda é dito uma *integral à esquerda*, se este for não nulo. Da mesma forma, funcionais invariantes à direita, não nulos, são chamados de *integrais à direita*.

Se integrais à direita e à esquerda coincidem, chamamos a álgebra de Hopf de multiplicadores regular A de *unimodular*.

Proposição 1.2.5. *Sejam φ uma integral à esquerda em A e $a \in A$. Se $\varphi(ba) = 0$, para todo $b \in A$, então $a = 0$. Similarmente, se $\varphi(ab) = 0$, para todo $b \in A$, então $a = 0$.*

A propriedade acima, chamada de *fiel*, também é válida para integrais à direita. Outro fato, análogo ao caso de álgebras de Hopf, é a unicidade (a menos de um escalar) das integrais, caso elas existam. Para esse propósito, enunciamos alguns resultados básicos.

Lema 1.2.6. *Se φ é um funcional invariante à esquerda em A e ψ é uma integral à direita em A, então para cada $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $\varphi(ca) = \psi(cb)$, para todo $c \in A$. Similarmente, se φ é não nulo, dado $b \in A$, existe $a \in A$ tal que $\varphi(ca) = \psi(cb)$, para todo $c \in A$.*

Lema 1.2.7. *Se φ_1 e φ_2 são duas integrais à esquerda em A, então os espaços dos funcionais*

$$\{\varphi_1(\_a); a \in A\} \quad e \quad \{\varphi_2(\_a); a \in A\}$$

são iguais.

Juntando esses fatos, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.8. *Seja (A, Δ) uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular. Se A admite uma integral à esquerda, então ela é única a menos de um escalar e, dessa forma, existe uma única integral à direita.*

Uma consequência importante do teorema anterior é a existência de um multiplicador invertível.

Proposição 1.2.9. *Seja (A, Δ) uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular, então existe um elemento invertível $\delta \in M(A)$ tal que $(\varphi \otimes \imath)\Delta(a) = \varphi(a)\delta$ e $(\imath \otimes \psi)\Delta(a) = \psi(a)\delta^{-1}$, para todo $a \in A$, onde φ e ψ são funcionais invariantes à esquerda e à direita, respectivamente.*

Observação 1.2.10. Usando as extensões das aplicações Δ, ε e S, obtemos as seguintes relações: $\Delta(\delta) = \delta \otimes \delta$, $\varepsilon(\delta) = 1$ e $S(\delta) = \delta^{-1}$.

Esse multiplicador δ é chamado *elemento modular* e relaciona φ e ψ da seguinte maneira:

Proposição 1.2.11. *Se φ é um funcional invariante à esquerda em A, então $\varphi(S(a)) = \varphi(a\delta)$, para todo $a \in A$. Similarmente, se ψ é um funcional invariante à direita em A, então $\psi(S^{-1}(a)) = \psi(a\delta^{-1})$, para todo $a \in A$.*

Finalizando as propriedades necessárias para a construção da álgebra dual de uma álgebra de Hopf dos multiplicadores, apresentamos a seguinte consequência:

Proposição 1.2.12. *Se φ uma integral à esquerda em A, então para cada $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $\varphi(ca) = \varphi(bc)$, para todo $c \in A$.*

Aplicando S no resultado acima, obtemos uma propriedade análoga para funcionais invariantes à direita ψ em A. Além do mais, combinando a proposição acima e o Lema 1.2.6, obtemos a igualdade dos seguintes conjuntos de funcionais lineares:

$$\begin{aligned}
&\{\varphi(a_) \quad ; \quad a \in A\} \\
&\{\varphi(_a) \quad ; \quad a \in A\} \\
&\{\psi(a_) \quad ; \quad a \in A\} \\
&\{\psi(_a) \quad ; \quad a \in A\}.
\end{aligned}$$

Para definir o dual de uma álgebra de Hopf de multiplicadores utilizamos os funcionais invariantes acima mas para isso, precisamos supor a existência de uma integral em A.

Definição 1.2.13. Um *grupo quântico algébrico* é uma álgebra de Hopf de multiplicadores com integrais.

Notação 1.2.14. Se φ é uma integral à esquerda em A, então denotamos a álgebra dual de A por

$$\widehat{A} = \{\varphi(\_a); a \in A\}.$$

Note que, elementos em $\widehat{A}$ também podem ser escritos da forma $\varphi(b\_)$, $\psi(\_c)$ ou $\psi(d\_)$, para $b, c, d \in A$. Usamos durante este trabalho essas diferentes fórmulas em situações apropriadas.

O espaço $\widehat{A}$ é uma álgebra com a seguinte estrutura:

Proposição 1.2.15. *Sejam $w, u \in \widehat{A}$. Definimos um funcional linear wu em A por*

$$(wu)(a) = (w \otimes u)\Delta(a), \tag{1.6}$$

para todo $a \in A$. Então, $wu \in \widehat{A}$ e, com isso, esse produto transforma $\widehat{A}$ em uma álgebra com produto não degenerado.

Observação 1.2.16. Se $w = \varphi(\_b)$ e $u = \varphi(\_c) \in \widehat{A}$, então

$$(wu)(a) = (w \otimes u)\Delta(a) = (\varphi \otimes \varphi)(\Delta(a)(b \otimes c)),$$

para todo $a \in A$, e escrevendo $b \otimes c = \sum_i \Delta(p_i)(q_i \otimes 1)$, encontramos o funcional $wu = \varphi(\_d)$, onde $d = \sum_i \varphi(q_i)p_i$.

No caso de A ter unidade, o produto acima, coincide com o clássico *produto de convolução* da teoria de álgebras de Hopf. No próximo passo, consideramos uma comultiplicação $\widehat{\Delta}$ em $\widehat{A}$.

Definição 1.2.17. Dados $w, u \in \widehat{A}$, definimos a aplicação $\widehat{\Delta} : \widehat{A} \longrightarrow M(\widehat{A} \otimes \widehat{A})$ por

$$\begin{aligned}(\widehat{\Delta}(w)(1 \otimes u))(a \otimes b) &= (w \otimes u)((a \otimes 1)\Delta(b)) \\ ((v \otimes 1)\widehat{\Delta}(w))(a \otimes b) &= (v \otimes w)(\Delta(a)(1 \otimes b)),\end{aligned} \tag{1.7}$$

para todo $w, u, v \in \widehat{A}$ e $a, b \in A$.

As fórmulas acima, definem completamente $\widehat{\Delta}(w) = (\overline{\widehat{\Delta}(w)}, \overline{\overline{\widehat{\Delta}(w)}}) \in M(\widehat{A} \otimes \widehat{A})$, pois

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{\Delta}(w)} : \widehat{A} \otimes \widehat{A} &\longrightarrow \widehat{A} \otimes \widehat{A} \\ v \otimes u &\longmapsto \widehat{\Delta}(w)(1 \otimes u)(v \otimes 1),\end{aligned}$$

e analogamente, $\overline{\overline{\widehat{\Delta}(w)}}(v \otimes u) = (1 \otimes u)(v \otimes 1)\widehat{\Delta}(w)$, para todo $u, v \in \widehat{A}$. Além disso, se $\varepsilon \in \widehat{A}$, as fórmulas 1.7, generalizam a comultiplicação usual em álgebras de Hopf, ou seja, $\widehat{\Delta}(w)(a \otimes b) = w(ab)$, para todo $a, b \in A$.

Proposição 1.2.18. *Se $\widehat{A}$ e $\widehat{\Delta}$ são como definidos acima, então $(\widehat{A}, \widehat{\Delta})$ é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular.*

Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} ((1 \otimes u)\widehat{\Delta}(w))(a \otimes b) &= (u \otimes w)((1 \otimes a)\Delta(b)) \\ (\widehat{\Delta}(w)(u \otimes 1))(a \otimes b) &= (w \otimes u)(\Delta(a)(b \otimes 1)), \end{aligned} \tag{1.8}$$

para todo $w, u \in \widehat{A}$ e $a, b \in A$.

A antípoda $\widehat{S}$ é dada por

$$\begin{aligned} \widehat{S} : \widehat{A} &\longrightarrow \widehat{A} \\ w &\longmapsto \widehat{S}(w) = w \circ S \end{aligned} \tag{1.9}$$

e a counidade é a avaliação em 1, ou seja, $\widehat{\varepsilon}(w) = w(1)$, para todo $w \in \widehat{A}$. Além do mais, se $w = \varphi(\_a) \in \widehat{A}$, então $w(1) = \varphi(a)$.

Observação 1.2.19. Se $\widehat{a} = \varphi(\_a)$ e $\widehat{b} = \varphi(\_b) \in \widehat{A}$, então

$$\widehat{\Delta}(\widehat{a})(1 \otimes \widehat{b}) = \varphi(\_\, S^{-1}(b_1)a) \otimes \varphi(\_\, b_2). \tag{1.10}$$

De fato, para todo $c, d \in A$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(\widehat{a})(1 \otimes \widehat{b})(c \otimes d) &= (\widehat{a} \otimes \widehat{b})((c \otimes 1)\Delta(d)) \\ &= (\varphi \otimes \varphi)((c \otimes 1)\Delta(d)(a \otimes b)) \\ &\overset{1.4}{=} (\varphi \otimes \varphi)((c \otimes 1)\Delta(d)\Delta(b_2)(S^{-1}(b_1)a \otimes 1)) \\ &= (\varphi \otimes \varphi)((c \otimes 1)\Delta(db_2)(S^{-1}(b_1)a \otimes 1)) \\ &= \varphi(c(db_2)_1 S^{-1}(b_1)a)\varphi((db_2)_2) \\ &\overset{1.2.1}{=} \varphi(cS^{-1}(b_1)a)\varphi(db_2) \\ &= (\varphi(\_\, S^{-1}(b_1)a) \otimes \varphi(\_\, b_2))(c \otimes d), \end{aligned}$$

ou seja, $\widehat{\Delta}(\widehat{a})(1 \otimes \widehat{b}) = \varphi(\_S^{-1}(b_1)a) \otimes \varphi(\_b_2)$.

O próximo resultado garante a existência de integrais na álgebra de Hopf de multiplicadores regular $\widehat{A}$.

Proposição 1.2.20. *Se φ é uma integral à esquerda e ψ é uma integral à direita em A, então*

$$\widehat{\psi}(w) = \varepsilon(a), \qquad \textit{quando} \quad w = \varphi(\_a)$$
$$\widehat{\varphi}(w) = \varepsilon(a), \qquad \textit{quando} \quad w = \psi(a\_),$$

define integrais à direita e à esquerda em $\widehat{A}$, para todo $a \in A$.

Lema 1.2.21. *Se $w = \varphi(\_a)$ e u qualquer elemento em $\widehat{A}$, então $\widehat{\psi}(uw) = u(S^{-1}(a))$.*

Como consequência do lema acima, segue o teorema da bidualidade.

Teorema 1.2.22. *Sejam (A, Δ) um grupo quântico algébrico, $(\widehat{A}, \widehat{\Delta})$ seu dual e $\big(\widehat{\widehat{A}}, \widehat{\widehat{\Delta}}\big)$ seu bidual. Então, as álgebras A e $\widehat{\widehat{A}}$ são isomorfas via a seguinte aplicação*

$$\begin{aligned} \phi : A \ &\longrightarrow \ \widehat{\widehat{A}} \\ a \ &\longmapsto \ \phi(a) := \widehat{\widehat{a}} : \widehat{A} \longrightarrow \Bbbk \\ &\qquad\qquad\qquad w \longmapsto \widehat{\widehat{a}}(w) = w(a). \end{aligned}$$

Para finalizar essa seção, definimos uma outra classe de álgebra de Hopf de multiplicadores e, para isso, introduzimos a noção de cointegral.

Definição 1.2.23. Seja (A, Δ) uma álgebra de Hopf de multiplicadores. Um elemento não nulo $h \in A$ é chamado de *cointegral à esquerda* se $ah = \varepsilon(a)h$, para todo $a \in A$. Similarmente, um elemento não nulo $k \in A$ é chamado de *cointegral à direita* se $ka = \varepsilon(a)k$, para todo $a \in A$.

Teorema 1.2.24. *Se (A, Δ) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores com cointegrais, então ela também tem integrais.*

Note que, a existência de cointegrais na teoria usual de álgebras de Hopf está fortemente ligada ao fato da álgebra ter dimensão finita. No nosso contexto, a existência de cointegrais também gera uma condição muito forte, como sugere o resultado abaixo:

Teorema 1.2.25. *Se (A, Δ) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores com cointegrais, então $(\widehat{A}, \widehat{\Delta})$ é uma álgebra de Hopf.*

Logo, ao longo deste trabalho, apenas vamos nos limitar a trabalhar com grupos quânticos algébricos.

1.3 Ações e Coações de uma Álgebra de Hopf de Multiplicadores

Nesta seção, apresentamos algumas noções a cerca de ações e coações da álgebra de Hopf de multiplicadores em uma álgebra, com o produto não degenerado. O leitor interessado em maiores detalhes poderá consultar os textos, [8] e [22].

Inicialmente, (A, Δ) (ou simplesmente A) é uma álgebra de Hopf de multiplicadores e R um espaço vetorial. Para não sobrecarregar a notação, denotamos por $\imath$ a aplicação identidade de A e a aplicação identidade de R, ficando claro no texto a quem estamos nos referindo.

Definição 1.3.1 ([8])**.** Dizemos que R é um *A-módulo à esquerda*, se existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \triangleright : A \otimes R &\longrightarrow R \\ a \otimes x &\longmapsto a \triangleright x \end{aligned}$$

satisfazendo $a \triangleright b \triangleright x = ab \triangleright x$, para todo $a, b \in A$ e $x \in R$. Nesse caso, a aplicação $\triangleright$ é chamada de ação de A em R.

Se A tem unidade, é natural assumirmos $1_A \triangleright x = x$, para todo $x \in R$, significando o módulo ser unitário. Em nosso contexto, como usual na literatura, vamos estender essa noção da seguinte maneira:

Definição 1.3.2. Um A-módulo à esquerda R é chamado de *unitário*, se $A \triangleright R = R$.

Uma importante consequência é gerada a partir desse conceito.

Proposição 1.3.3 ([8])**.** *Sejam R um A-módulo à esquerda unitário e $x \in R$. Se $a \triangleright x = 0$, para todo $a \in A$, então $x = 0$.*

Nessas condições, R é um A-módulo à esquerda unitário *não degenerado.* Similarmente definimos um A-módulo unitário à direita.

Exemplo 1.3.4 ([8])**.** Se A uma álgebra de Hopf de multiplicadores, então A é um A-módulo à esquerda unitário via $\triangleright := \cdot$ (produto em A).

Exemplo 1.3.5 ([8])**.** Sejam A uma álgebra de Hopf de multiplicadores e A' seu espaço dual. Definimos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \triangleright : A \otimes A' & \longrightarrow & A' \\ a \otimes \omega & \longmapsto & \omega(\_a), \end{array}$$

então A' é um A-módulo à esquerda não degenerado, mas não é unitário.

Observação 1.3.6 ([8])**.** Se R é um A-módulo à esquerda unitário, então dados $a_1, ..., a_n \in A$ e $x_1, x_2, ..., x_m \in R$, existe um elemento $e \in A$ tal que $ea_i = a_i = a_i e$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $e \triangleright x_j = x_j$, para todo $j \in \{1, ..., m\}$.

Essa propriedade será fundamental para o uso da clássica notação de Sweedler, nesse contexto. A partir de agora, R será uma álgebra com produto não degenerado e A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular.

Definição 1.3.7 ([8])**.** Dizemos que R é um A-*módulo álgebra à esquerda* se,

(i) R é um A-módulo à esquerda unitário;

(ii) $a \triangleright (xy) = (a_1 \triangleright x)(a_2 \triangleright y)$, para todo $x, y \in R$ e $a \in A$.

Analogamente, definimos um A-*módulo álgebra à direita.* A identidade (ii) faz sentido pois, do fato de R ser um A-módulo à esquerda unitário, podemos escrever $x = \sum_i b_i \triangleright x_i$, logo

$$\begin{aligned}
a \triangleright (xy) &= a \triangleright ((\sum_i b_i \triangleright x_i)y) \\
&= m_R(\sum_i (\Delta(a)(b_i \otimes 1))(\triangleright \otimes \triangleright)(x_i \otimes y)) \\
&= m_R(\sum_i (a_1 b_i \otimes a_2)(\triangleright \otimes \triangleright)(x_i \otimes y)) \\
&= \sum_i (a_1 b_i \triangleright x_i)(a_2 \triangleright y) \\
&= (a_1 \triangleright \sum_i b_i \triangleright x_i)(a_2 \triangleright y) \\
&= (a_1 \triangleright x)(a_2 \triangleright y).
\end{aligned}$$

Nesse caso, dizemos que a_1 está coberto por x e, da mesma forma, a_2 está coberto por y. Note que, se A e R têm unidade, a definição acima coincide com a definição clássica de módulo álgebra.

Exemplo 1.3.8 ([8])**.** Seja A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular. Então A é um A-módulo álgebra à esquerda via

$$\begin{aligned}
\triangleright : A \otimes A &\longrightarrow A \\
a \otimes b &\longmapsto a \triangleright b = m(\imath \otimes S)(\Delta(a)(b \otimes 1)) \\
&\qquad = a_1 b S(a_2).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.3.9. Sejam A_G a álgebra das funções com suporte finito de G em $\Bbbk$, definida no Exemplo 1.1.10 e R a álgebra de grupo $\Bbbk G$. Então, R é um A_G-módulo álgebra à esquerda dado por

$$\begin{array}{rcl} \triangleright : A_G \otimes R & \longrightarrow & R \\ \delta_p \otimes h & \longmapsto & \delta_p \triangleright h := \delta_p(h)h. \end{array}$$

De fato, seja $h \in R$, logo $h = \delta_h(h)h = \delta_h \triangleright h$, ou seja, $R \subseteq A_G \triangleright R$. Além disso,

$$\begin{array}{rcl} \delta_p \triangleright (\delta_q \triangleright h) & = & \delta_p(\delta_q(h)h) \\ & = & \delta_q(h)\delta_p(h)h \\ & = & \begin{cases} h & , p = q = h, \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} \\ & = & \delta_p\delta_q(h)h \\ & = & \delta_p\delta_q \triangleright h, \end{array}$$

para todo $\delta_p, \delta_q \in A_G$ e $h \in R$. E, finalmente

$$\begin{array}{rcl} \delta_p \triangleright (hl) & = & \delta_p(hl)hl \\ & = & \begin{cases} hl & , p = hl, \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases} \end{array}$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} ((\delta_p)_1 \triangleright h)((\delta_p)_2 \triangleright l) & = & ((\delta_p)_1 \triangleright h)((\delta_p)_2\delta_l \triangleright l) \\ & \overset{(*)}{=} & (\delta_{pl^{-1}} \triangleright h)(\delta_l \triangleright l) \\ & = & \delta_{pl^{-1}}(h)hl \\ & = & \begin{cases} hl & , pl^{-1} = h \Rightarrow p = hl, \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}, \end{array}$$

para todo $\delta_p \in A_G$ e $h, l \in R$. Na igualdade $(*)$ acima, usamos que $\Delta(\delta_p)(1 \otimes \delta_l) = \delta_{pl^{-1}} \otimes \delta_l$, igualdade obtida diretamente da definição do coproduto na álgebra A_G.

Exemplo 1.3.10 ([8])**.** Seja A_G a álgebra do exemplo anterior e denotamos $R_p = \delta_p \triangleright R$, onde $\delta_p \in A_G$ e R é uma álgebra qualquer, com produto não degenerado. Assim, se R é um A_G-módulo álgebra à esquerda via

$$\begin{aligned} \triangleright : A_G \otimes R &\longrightarrow R \\ f \otimes x &\longmapsto f \triangleright x, \end{aligned}$$

então R é uma álgebra G-graduada com graduação dada por $R = \oplus_{p\in G} R_p$. Reciprocamente, se R é G-graduada por $R = \oplus_{p\in G} R_p$, então R é um A_G-módulo álgebra definindo a aplicação $\triangleright : A_G \otimes R \longrightarrow R$ por

$$\delta_p \triangleright x = \begin{cases} x & , x \in R_p, \\ 0 & , \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema 1.3.11 ([8])**.** *Se R é um A-módulo álgebra à esquerda, então*

$$\begin{aligned} (a \triangleright x)y &= a_1 \triangleright (x(S(a_2) \triangleright y)) \\ x(a \triangleright y) &= a_2 \triangleright ((S^{-1}(a_1) \triangleright x)y), \end{aligned}$$

para todo $a \in A$, $x, y \in R$.

Para justificar o lado direito das fórmulas acima, estamos usando fortemente o fato da aplicação S ser bijetiva. Vamos apenas dar um sentido para o lado direito da primeira equação, pois a segunda segue de modo análogo.

Escrevemos $y = \sum_i b_i \triangleright y_i$ e, pela bijetividade da aplicação S, $b_i = S(c_i)$, para cada i. Logo, podemos escrever $(1 \otimes c_i)\Delta(a) = a_1 \otimes c_i a_2 \in A \otimes A$, para cada i. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_i a_1 \triangleright (x(S(c_i a_2) \triangleright y_i)) &= \sum_i a_1 \triangleright (x(S(a_2)S(c_i) \triangleright y_i)) \\ &= \sum_i a_1 \triangleright (x(S(a_2)b_i \triangleright y_i)) \\ &= a_1 \triangleright (x(S(a_2) \triangleright \sum_i b_i \triangleright y_i)) \end{aligned}$$

$$= \quad a_1 \triangleright (x(S(a_2) \triangleright y)).$$

Nesse caso, dizemos que a_2 está *coberto* por y.

As identidades acima, são úteis para estendermos uma ação de A em R para $M(R)$.

Proposição 1.3.12 ([8])**.** *Seja R um A-módulo álgebra à esquerda. Então, a ação de A em R pode ser unicamente estendida para uma "ação" de A em $M(R)$ pelas seguintes estruturas:*

$$\begin{aligned} (a \triangleright m)x &= a_1 \triangleright (m(S(a_2) \triangleright x)) \\ x(a \triangleright m) &= a_2 \triangleright ((S^{-1}(a_1) \triangleright x)m), \end{aligned}$$

para todo $a \in A$, $m \in M(R)$ e $x \in R$.

Proposição 1.3.13 ([8])**.** *Nas mesmas condições da proposição anterior, $M(R)$ é um A-módulo à esquerda e $a \triangleright 1_{M(R)} = \varepsilon(a)1_{M(R)}$, para todo $a \in A$.*

Observe que $M(R)$ não é um A-módulo álgebra, pois nesse caso, a condição de unitário é muito forte e, dessa forma, não podemos dar um significado para (ii) da Definição 1.3.7. Mas, a ação de A em $M(R)$ é não degenerada.

Proposição 1.3.14 ([8])**.** *Se $m \in M(R)$ e $a \triangleright m = 0$, para todo $a \in A$, então $m = 0$.*

Dualizando a estrutura de módulo, obtemos o conceito de comódulo.

Definição 1.3.15. Sejam A uma álgebra de Hopf de multiplicadores e R uma álgebra. Dizemos que R é um *A-comódulo álgebra (à direita)*, se existe um homomorfismo injetor $\rho : R \longrightarrow M(R \otimes A)$ satisfazendo

(i) $\rho(R)(1 \otimes A) \subseteq R \otimes A$ e $(1 \otimes A)\rho(R) \subseteq R \otimes A$;

(ii) $(\rho \otimes \imath)\rho = (\imath \otimes \Delta)\rho$.

Neste caso, a aplicação ρ é dita uma coação de A em R. Se, adicionarmos, $(R \otimes 1)\rho(R) \subseteq R \otimes A$, então ρ é chamada de *reduzida*.

Observação 1.3.16. Pelo fato da aplicação Δ ser não degenerada, o lado direito da igualdade (ii) faz sentido, pois podemos pensar em extensão, mas o lado esquerdo não. Logo, utilizando o item (i), a coassociatividade pode ser expressa da seguinte forma:

$$(\rho \otimes \imath)(\rho(x)(1 \otimes b)) = (\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(1 \otimes 1 \otimes b) \tag{1.11}$$

para todo $b \in A$.

Se A e R têm unidade, o item (i) da definição acima é imediato, generalizando assim, o conceito de comódulo álgebra da teoria clássica de álgebras de Hopf.

Exemplo 1.3.17 ([22])**.** Se A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular, então A é um A-comódulo álgebra com $\rho := \Delta$ (comultiplicação de A).

Exemplo 1.3.18 ([22])**.** Sejam R uma álgebra e A_G a álgebra de Hopf de multiplicadores do Exemplo 1.1.10, considerando G o grupo dos automorfismos de R. Então, R é um A_G-comódulo álgebra com coação dada por

$$\begin{aligned} \rho : R &\longrightarrow M(R \otimes A_G) \\ x &\longmapsto \sum_{g \in G} g(x) \otimes \delta_g, \end{aligned}$$

onde $\delta_g(h) = \delta_{g,h}$, para todo $h \in H$ (delta de Kronecker). Além do mais, ρ é reduzida se, e somente se, para quaisquer $x, y \in R$, $xg(y) = 0$, exceto para uma quantidade finita de elementos $g \in G$.

O próximo resultado nos mostra que dada uma coação $\rho : R \longrightarrow M(R \otimes A)$, a injetividade de ρ é equivalente a propriedade da counidade.

Proposição 1.3.19 ([22]). *Se R é um A-comódulo álgebra via ρ, então $(\imath\otimes\varepsilon)\rho(x) = x$, para todo $x \in R$.*

Note que, $(\imath \otimes \varepsilon)\rho(x)$ está bem definida, pois ε é um homomorfismo não degenerado e, com isso, podemos estender a aplicação $(\imath \otimes \varepsilon)$.

Observação 1.3.20. Usamos a notação Sigma (sem somatório) para expressar uma coação $\rho : R \longrightarrow M(R \otimes A)$. De fato, os itens (i) e (ii) da Definição 1.3.15, podem ser reescritos da seguinte maneira:

(i) $\rho(x)(1 \otimes a) = x^0 \otimes x^1 a \in R \otimes A$ e $(1 \otimes a)\rho(x) = x^0 \otimes ax^1 \in R \otimes A$;

(ii) $x^{00} \otimes x^{01} a \otimes x^1 b = \sum_i x^0 \otimes (x^1 a_i)_1 \otimes (x^1 a_i)_2 b_i$, onde $a \otimes b = \sum_i \Delta(a_i)(1 \otimes b_i)$.

Algumas propriedades são obtidas usando a notação Sigma.

Proposição 1.3.21 ([22]). *Para todo $x \in R$ e $a \in A$, temos:*

(i) $x^{00} \otimes x^{01} S(x^1) a = x \otimes a$;

(ii) $x^{00} \otimes S(x^{01}) x^1 a = x \otimes a$.

Proposição 1.3.22 ([22]). *As aplicações*

$$\begin{array}{rcl} T_1 : R \otimes A & \longrightarrow & R \otimes A \\ x \otimes a & \longmapsto & \rho(x)(1 \otimes a) \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{rcl} T_2 : R \otimes A & \longrightarrow & R \otimes A \\ x \otimes a & \longmapsto & (1 \otimes a)\rho(x) \end{array}$$

são bijetivas.

As bijeções acima implicam $\rho(R)(1 \otimes A) = R \otimes A = (1 \otimes A)\rho(R)$. Logo,

$$\rho(R)(R \otimes A) = R^2 \otimes A = (R \otimes A)\rho(R),$$

ou seja, ρ é não degenerado se $R^2 = R$.

Apesar da aplicação ρ não ser um homomorfismo não degenerado, ela pode ser unicamente estendida para $M(R)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho : M(R) &\longrightarrow M(R \otimes A) \\ m &\longmapsto \rho(m) = (\overline{\rho(m)}, \overline{\overline{\rho(m)}}) \end{aligned}$$

tal que $\overline{\rho(m)}(\rho(x)(1 \otimes a)) = \rho(mx)(1 \otimes a) = \rho(m)\rho(x)(1 \otimes a)$ e $\overline{\overline{\rho(m)}}((1 \otimes a)\rho(x)) = (1 \otimes a)\rho(xm) = (1 \otimes a)\rho(x)\rho(m)$, para todo $x \in R$ e $a \in A$. Note que, estamos usando fortemente a Proposição 1.3.22.

Lema 1.3.23 ([22]). *Se R é um A-comódulo álgebra reduzido, então $\rho(R)(R \otimes 1) \subseteq R \otimes A$.*

Para finalizar a seção, queremos estabelecer uma relação entre os conceitos de módulo álgebra e comódulo álgebra. Para isso, consideramos A um grupo quântico algébrico e R uma álgebra com produto não degenerado.

Proposição 1.3.24 ([22]). *Se (R, ρ) é um A-comódulo álgebra (à direita), então R é um $\widehat{A}$-módulo álgebra à esquerda dada por*

$$\begin{aligned} \triangleright : \widehat{A} \otimes R &\longrightarrow R \\ \varphi(\_a) \otimes x &\longmapsto \varphi(\_a) \triangleright x := (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes a)). \end{aligned}$$

Reciprocamente, segue o resultado abaixo.

Proposição 1.3.25 ([22]). *Se $(R, \triangleright)$ é um A-módulo álgebra à esquerda, então R é um $\widehat{A}$-comódulo álgebra (à direita), considerando $\rho : R \longrightarrow M(R \otimes \widehat{A})$ tal que*

$$\rho(x)(1 \otimes u) = S^{-1}(a_1) \triangleright x \otimes \varphi(\_\, a_2)$$

$$(1 \otimes v)\rho(x) \quad = \quad S(b_2) \triangleright x \otimes \psi(\_\, b_2),$$

onde $u = \varphi(\_\, a)$ *e* $v = \psi(\_\, b)$*, para todo* $a, b \in A$ *e* $x \in R$*. As igualdades acima fazem sentido, pois pelo fato da ação ser unitário, existem elementos na álgebra* A *cobrindo* a_1 *e* a_2*.*

1.4 Contexto de Morita e Teoria de Galois

Nesta seção, construímos um contexto de Morita conectando as álgebras $R^{\widehat{A}}$ e $R\#\widehat{A}$ e, após relacionamos esse contexto com uma coação de Galois. Os resultados e definições que seguem, são baseados nos artigos [8] e [22], onde o leitor poderá encontrar maiores informações.

Sejam A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular e R uma álgebra com produto não degenerado. Quando R é um A-módulo álgebra à esquerda unitário, podemos definir pontos fixos em R, da seguinte forma:

Definição 1.4.1 ([8])**.** Seja R um A-módulo álgebra à esquerda unitário. Um *ponto fixo* em R é um elemento $x \in R$ tal que $a \triangleright x = \varepsilon(a)x$, para todo $a \in A$.

O conjunto dos pontos fixos formam uma subálgebra de R, mas em geral é um conjunto muito pequeno. Por isso, faz mais sentido analisar os pontos fixos na álgebra de Hopf de multiplicadores $M(R)$, dessa forma estendemos a ação de A para $M(R)$.

Definição 1.4.2 ([8])**.** Um *ponto fixo em* $M(R)$ é um elemento $m \in M(R)$ satisfazendo $a \triangleright m = \varepsilon(a)m$, para todo $a \in A$.

Proposição 1.4.3 ([8])**.** *Se* m *é um ponto fixo em* $M(R)$*, então*

$$a \triangleright (mx) \quad = \quad m(a \triangleright x)$$

$$a \triangleright (xm) \quad = \quad (a \triangleright x)m, \tag{1.12}$$

para todo $a \in A$ *e* $x \in R$.

Observação 1.4.4. Se $m \in M(R)$ satisfaz as equações 1.12, então m é um ponto fixo de $M(R)$.

Logo, definimos o seguinte conjunto

$$R^A = \{m \in M(R); a \triangleright m = \varepsilon(a)m, \forall a \in A\} \tag{1.13}$$

Lema 1.4.5 ([8]). R^A *é uma subálgebra (com unidade) de* $M(R)$*, chamada de álgebra dos invariantes.*

Analogamente, usando o conceito dual de módulo, definimos a álgebra dos elementos coinvariantes.

Definição 1.4.6 ([8]). Seja (R, ρ) um A-comódulo álgebra (à direita). Um elemento $m \in M(R)$ é dito *coinvariante* se, $\rho(m) = m \otimes 1 \in M(R \otimes A)$ e denotamos o conjunto de todos os elementos coinvariantes de $M(R)$ por R^{coA}.

Observação 1.4.7. Nas notações acima, R^{coA} é uma subálgebra (com unidade) de $M(R)$.

O próximo resultado nos dá uma relação entre os elementos invariantes e coinvariantes.

Proposição 1.4.8 ([8]). *Se* A *é um grupo quântico algébrico e* R *é um* A*-comódulo álgebra, então* $R^{coA} = R^{\widehat{A}}$.

Além disso, construímos uma álgebra $R\#A$, chamada de *produto smash* da seguinte maneira:

Definição 1.4.9 ([8])**.** Seja $(R, \triangleright)$ um A-módulo álgebra à esquerda. Definimos $R\#A = R \otimes A$ como espaço vetorial e o produto dado por

$$(x\#a)(y\#b) = x(a_1 \triangleright y)\#a_2 b$$

para todo $x, y \in R$ e $a, b \in A$. O produto acima só faz sentido porque, $\Delta(a)(1 \otimes b) = a_1 \otimes a_2 b \in A \otimes A$.

Agora, relembramos o conceito de um contexto de Morita entre dois anéis.

Definição 1.4.10 ([2])**.** Um *contexto de Morita* é uma sextupla $(R, S, M, N, [\_ , \_], (\_ , \_))$, onde

(i) R e S são anéis;

(ii) M é um (R, S)-bimódulo e N é um (S, R)-bimódulo;

(iii) As aplicações $[\_ , \_] : M \otimes_S N \longrightarrow R$ e $(\_ , \_) : N \otimes_R M \longrightarrow S$ são morfismos de bimódulos; tais que

$$[m, n]m' = m(n, m') \quad \text{e} \quad (n, m)n' = n[m, n'], \tag{1.14}$$

para todo $m, m' \in M$ e $n, n' \in N$.

O contexto acima é dito *estrito* se as aplicações $[\_ , \_]$ e $(\_ , \_)$ são sobrejetoras.

Para a construção do contexto de Morita, envolvendo as estruturas $R^{\widehat{A}}$ e $R\#\widehat{A}$, consideramos A um grupo quântico algébrico, R uma álgebra idempotente ($R^2 = R$) e fixamos uma integral à esquerda φ em A. Pela Proposição 1.2.9, sabemos da existência de um elemento invertível $\delta \in M(A)$ tal que $(\varphi \otimes \imath)\Delta(a) = \varphi(a)\delta$. Esse elemento, induz um automorfismo de álgebras de $\widehat{A}$, dado por

$$\phi : \widehat{A} \longrightarrow \widehat{A}$$

$$\varphi(\_\, a) \quad \longmapsto \quad \phi(\varphi(\_\, a)) := \varphi(\_\, \delta a). \tag{1.15}$$

Se $a \in A$ e $\widehat{a} = \varphi(\_\, a)$, então denotamos o elemento $\widehat{a}^{\delta}$ por $\varphi(\_\, \delta a)$.

Agora, supomos (R, ρ) um A-comódulo álgebra (à direita). Então, pela Proposição 1.3.24, R é um $\widehat{A}$-módulo álgebra à esquerda e pela Proposição 1.4.8, $R^{\widehat{A}} = R^{coA}$. Nessas condições, temos os seguintes resultados:

Lema 1.4.11 ([22]). *R é um $(R\#\widehat{A}, R^{coA})$-bimódulo com as seguintes estruturas:*

$$\begin{aligned} (x\#\widehat{a}) \triangleright y &= x(\widehat{a} \triangleright y) \\ y \triangleleft r &= yr \end{aligned}$$

para todo $x, y \in R$, $\widehat{a} \in \widehat{A}$ e $r \in R^{coA}$.

Lema 1.4.12 ([22]). *R é um $(R^{coA}, R\#\widehat{A})$-bimódulo com as seguintes estruturas:*

$$\begin{aligned} x \triangleleft (y\#\widehat{a}) &= S^{-1}(\widehat{a}^{\delta}) \triangleright (xy) \\ r \triangleright x &= rx \end{aligned}$$

para todo $x, y \in R$, $\widehat{a} \in \widehat{A}$ e $r \in R^{coA}$.

Lema 1.4.13 ([22]). *Seja $\rho : R \longmapsto M(R \otimes A)$ um comódulo álgebra reduzido. Definimos as aplicações*

$$\begin{aligned} [\_\,,\_\,] : R \otimes_{R^{coA}} R &\longrightarrow R\#\widehat{A} \\ x \otimes y &\longmapsto [x, y] = xy^0\#\varphi(y^1\_) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\_\,,\_\,) : R \otimes_{R\#\widehat{A}} R &\longrightarrow R^{coA} \\ x \otimes\ y &\longmapsto (x, y) = (id \otimes \varphi)\rho(xy). \end{aligned}$$

Então, $[\_\,,\_\,]$ é uma aplicação $R\#\widehat{A}$-bilinear satisfazendo $[x \triangleleft r, y] = [x, r \triangleright y]$, para todo $x, y \in R$, $r \in R^{coA}$. E, além disso, $(\_\,,\_\,)$ é uma aplicação R^{coA}-bilinear satisfazendo $(x \triangleleft (y\#\widehat{a}), z) = (x, (y\#\widehat{a}) \triangleright z)$, para todo $x, y, z \in R$, $\widehat{a} \in \widehat{A}$.

Nessas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.14 ([22])**.** *Sejam (A, Δ) um grupo quântico algébrico e R um A-comódulo álgebra reduzido. Então,*

$$\left(R\#\widehat{A}, R^{coA}, {}_{R\#\widehat{A}}R_{R^{coA}}, {}_{R^{coA}}R_{R\#\widehat{A}}, [\_\,,\_\,], (\_\,,\_\,)\right)$$

é um contexto de Morita.

Para finalizar a seção, introduzimos o conceito de uma coação de Galois.

Definição 1.4.15 ([22])**.** Sejam (A, Δ) uma álgebra de Hopf de multiplicadores e R um A-comódulo álgebra via ρ. A coação ρ é chamada uma *coação de Galois* se é reduzida e a aplicação

$$\begin{aligned} \beta : R \otimes_{R^{coA}} R &\longrightarrow R \otimes A \\ x \otimes y &\longmapsto (x \otimes 1)\rho(y) \end{aligned}$$

é bijetiva.

O próximo resultado caracteriza uma coação de Galois.

Teorema 1.4.16 ([22])**.** *Seja (A, Δ) um grupo quântico algébrico e supomos $\rho : R \longrightarrow M(R \otimes A)$ uma coação reduzida. Então, as seguintes sentenças são equivalentes:*

(i) ρ é uma coação de Galois;

(ii) A aplicação canônica $\beta : R \otimes_{R^{coA}} R \longrightarrow R \otimes A$, definida acima, é sobrejetiva;

(iii) $[\_\,,\_\,]$ definida no Lema 1.4.13 é sobrejetiva.

Capítulo 2

Ações Parciais da Álgebra de Hopf de Multiplicadores

2.1 Ações Parciais da Álgebra de Hopf de Multiplicadores

A seguir, A será uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular e R uma álgebra com produto não degenerado. Todas as ações parciais de A em R serão consideradas à esquerda, pois ações parciais à direita são definidas de maneira similar.

A definição clássica de um módulo álgebra parcial, quando A e R possuem unidade, é dada por:

Definição 2.1.1. ([2]) Dizemos que R é um *A-módulo álgebra parcial* se, existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \cdot : A \otimes R &\longrightarrow R \\ a \otimes x &\longmapsto a \cdot x \end{aligned}$$

tal que para todo $a, b \in A$ e $x, y \in R$,

(i) $1_A \cdot x = x$;

(ii) $a \cdot (x(b \cdot y)) = (a_1 \cdot x)(a_2 b \cdot y)$.

Nesse caso, dizemos que $\cdot$ é uma *ação parcial* de A em R. Se, além dos itens acima, tivermos a hipótese adicional de $a \cdot ((b \cdot x)y) = (a_1 b \cdot x)(a_2 \cdot y)$, a ação parcial é dita *simétrica*.

Agora, estendendo essa noção para o contexto de ações parciais de uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular em uma álgebra R com produto não degenerados, temos:

Definição 2.1.2. R é um A-**módulo álgebra parcial** se existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \cdot : A \otimes R &\longrightarrow R \\ a \otimes x &\longmapsto a \cdot x \end{aligned}$$

tal que, dados $a, b \in A$ e $x, y \in R$,

(i) $a \cdot (x(b \cdot y)) = (a_1 \cdot x)(a_2 b \cdot y)$;

(ii) Existe uma aplicação linear $e : A \longrightarrow M(R)$ tal que

  (1) $e(A)R \subseteq A \cdot R$;

  (2) $e(a)(b \cdot x) = a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot x)$.

(iii) Dados $a_1, ..., a_n \in A$, $x_1, ..., x_m \in R$ existe $b \in A$ tal que $a_i b = a_i = b a_i$ e $a_i \cdot x_j = a_i \cdot (b \cdot x_j)$, para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$;

(iv) Se $a \cdot x = 0$, para todo $a \in A$, então $x = 0$;

Nessas condições, a aplicação $\cdot$ é dita uma ação parcial de A em R e, dizemos que a ação parcial é **simétrica** se também satisfizer os seguintes itens:

(v) $a \cdot ((b \cdot x)y) = (a_1 b \cdot x)(a_2 \cdot y)$;

(vi) $(b \cdot x)e(a) = a_2 \cdot (S^{-1}(a_1)b \cdot x)$;

(vii) $Re(A) \subseteq A \cdot R$,

para todo $x, y \in R$ e $a, b \in A$.

Observe que, o item (i) faz sentido, pois $\Delta(a)(1 \otimes b) = a_1 \otimes a_2 b \in A \otimes A$. Já no item $(ii.\ 2)$, estamos usando o fato da aplicação S ser um anti-homomorfismo bijetivo, ou seja, existe $c \in A$ tal que $S(c) = b$ e, com isso,

$$\begin{aligned}
(\imath \otimes S)((1 \otimes c)\Delta(a)) &= (\imath \otimes S)(a_1 \otimes c a_2) \\
&= a_1 \otimes S(c a_2) \\
&= a_1 \otimes S(a_2)S(c) \\
&= a_1 \otimes S(a_2)b.
\end{aligned}$$

Note que, o item (ii) surgiu da propriedade que caracteriza uma ação global na teoria clássica de ações parciais, quando A e R possuem unidade, ou seja, uma ação parcial é global se, e somente se, $a \cdot 1_R = \varepsilon(a)1_R$, para todo $a \in A$.

Analogamente, os itens (v) e (vi) estão bem definidos. Com as notações acima, o item (iv) nos diz que a ação parcial é não degenerada.

Proposição 2.1.3. *Toda ação global é parcial.*

Demonstração. Consideramos $\cdot := \triangleright$ uma ação global, ou seja, vale os itens da Definição 1.3.7. Então,

(i) Para todo $a, b \in A$ e $x, y \in R$,

$$\begin{aligned}
a \triangleright (x(b \triangleright y)) &= (a_1 \triangleright x)(a_2 \triangleright (b \triangleright y)) \\
&= (a_1 \triangleright x)(a_2 b \triangleright y)
\end{aligned}$$

(ii) Definimos a aplicação linear

$$\begin{array}{rcl} e : A & \longrightarrow & M(R) \\ a & \longmapsto & e(a) := a \triangleright 1_{M(R)}. \end{array}$$

Nessas condições, sejam $a \in A$ e $x \in R$, logo

$$\begin{aligned} e(a)x &= (a \triangleright 1_{M(R)})x \\ &= (a \triangleright 1_{M(R)})(\sum_i c_i \triangleright y_i) \\ &= \sum_i a_1 \triangleright (S(a_2)c_i \triangleright y_i) \in A \triangleright R, \end{aligned}$$

ou seja, $e(A)R \subseteq A \cdot R$. Além do mais,

$$e(a)(b \triangleright x) = (a \triangleright 1_{M(R)})(b \triangleright x) = a_1 \triangleright (S(a_2)b \triangleright x).$$

Note que, nas igualdades acima, estamos usando a Proposição 1.3.12 e o fato da ação ser unitário.

(iii) Dados $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ e $x_1, x_2, ..., x_m \in R$, pela Observação 1.3.6, existe $b \in A$ tal que $ba_i = a_i = a_i b$, para todo $1 \leq i \leq n$ e $b \triangleright x_j = x_j$, para todo $1 \leq j \leq m$, logo,

$$a_i \triangleright x_j = a_i \triangleright b \triangleright x_j,$$

para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

(iv) Supomos $a \triangleright x = 0$, para todo $a \in A$ e, novamente pela Observação 1.3.6, existe $b \in A$ tal que $b \triangleright x = x$, logo $x = b \triangleright x = 0$.

Portanto, $\triangleright$ é uma ação parcial de A em R. □

Observação 2.1.4. Usando ideias similares, podemos mostrar que toda ação global é uma ação parcial simétrica.

Proposição 2.1.5. *Se A e R têm unidade então as Definições 2.1.2 e 2.1.1 coincidem.*

Demonstração. Primeiramente, supomos a Definição 2.1.1 e definimos a aplicação linear $e : A \longrightarrow M(R) = R$ tal que $e(a) = a \cdot 1_R$, para todo $a \in A$. Usando fortemente a propriedade de $1_A \cdot x = x$, para todo $x \in R$, os itens da Definição 2.1.2 são satisfeitos.

Reciprocamente, basta verificarmos que $1_A \cdot x = x$, para todo $x \in R$. Para tanto, consideramos $a, 1_A \in A$ e $x \in R$, pelo item (iii) da Definição 2.1.2, existe $b \in A$ tal que $ba = a = ab$, $b1_A = 1_A = 1_A b$ e $a \cdot b \cdot x = a \cdot x$. Mas, 1_A é a unidade em A, ou seja, $b = 1_A b = 1_A$, assim $a \cdot 1_A \cdot x = a \cdot x$. Repetimos esse processo para cada $a \in A$ e $x \in R$ e, com isso, $a \cdot 1_A \cdot x = a \cdot x$, para todo $a \in A$ e usando o item (iv) da Definição 2.1.2, concluímos $1_A \cdot x = x$, para todo $x \in R$. □

Proposição 2.1.6. *Seja R um A-módulo álgebra parcial. Então, R é um A-módulo álgebra se, e somente se, $e(a) = \varepsilon(a)1_{M(R)}$, para todo $a \in A$.*

Demonstração. Supomos que R é um A-módulo álgebra, então pelo item (2) da Definição 2.1.2, temos

$$\begin{aligned} e(a)(b \cdot x) &= a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot x) \\ &= a_1 S(a_2) b \cdot x \\ &= \varepsilon(a) b \cdot x \\ &= \varepsilon(a) 1_{M(R)} (b \cdot x), \end{aligned}$$

para todo $a, b \in A$ e $x \in R$. Logo, pelo fato da ação ser unitário, concluímos $e(a) = \varepsilon(a)1_{M(R)}$, para todo $a \in A$.

Reciprocamente, supomos $e(a) = \varepsilon(a)1_{M(R)}$, para todo $a \in A$ e consideramos

$c \in A$ tal que $\varepsilon(c) = 1_{\Bbbk}$ e $x \in R$, então

$$\begin{aligned}
a \cdot (b \cdot x) &= a_1 \cdot (\varepsilon(ca_2)b \cdot x) \\
&= a_1 \cdot (S(c_1a_2)c_2a_3b \in x) \\
&= a_1 \cdot (S(a_2)S(c_1)c_2a_3b \cdot x) \\
&= a_1 \cdot (S(a_2)\varepsilon(c)a_3b \cdot x) \\
&= a_1 \cdot (S(a_2)a_3b \cdot x) \\
&\overset{(2)2.1.2}{=} e(a_1)(a_2b \cdot x) \\
&= \varepsilon(a_1)1_{M(R)}(a_2b \cdot x) \\
&= ab \cdot x, \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

para todo $a, b \in A$, e

$$x = \varepsilon(c)1_{M(R)}x = e(c)x \in A \cdot R,$$

ou seja, R é um A-módulo unitário. Finalizando, escrevemos $y = \sum_i b_i \cdot y_i \in R$, logo

$$\begin{aligned}
a \cdot (xy) &= a \cdot (x(\sum_i b_i \cdot y_i)) \\
&\overset{(i)2.1.2}{=} \sum_i (a_1 \cdot x)(a_2b_i \cdot y_i) \\
&= (a_1 \cdot x)(a_2 \cdot \sum_i b_i \cdot y_i) \\
&= (a_1 \cdot x)(a_2 \cdot y),
\end{aligned}$$

para todo $a \in A$ e $x \in R$ e, portanto R é um A-módulo álgebra. $\square$

Proposição 2.1.7. *Sejam R um A-módulo álgebra e L um ideal à direita de R com unidade ($L = 1_L R$, onde 1_L é um idempotente central em R). Então, L é um A-módulo álgebra parcial simétrico via*

$$a \cdot x = 1_L(a \triangleright x),$$

para qualquer $a \in A$ e $x \in L$.

Demonstração. De fato, sejam $a, b \in A$ e $x, y \in L$, temos (i)

$$\begin{aligned}
a \cdot (x(b \cdot y)) &= 1_L(a \triangleright (x 1_L(b \triangleright y))) \\
&\overset{x \in L}{=} 1_L(a \triangleright (x(b \triangleright y))) \\
&= 1_L(a_1 \triangleright x)(a_2 b \triangleright y) \\
&= 1_L(a_1 \triangleright x) 1_L(a_2 b \triangleright y) \\
&= (a_1 \cdot x)(a_2 b \cdot y),
\end{aligned}$$

logo $a \cdot (x(b \cdot y)) = (a_1 \cdot x)(a_2 b \cdot y)$.

(ii) Consideramos a aplicação linear $e : A \longrightarrow L$ tal que $e(a) = a \cdot 1_L = 1_L(a \triangleright 1_L)$, para todo $a \in A$, e escrevemos $x = \sum_i c_i \triangleright x_i \in L \subseteq R$, assim

$$\begin{aligned}
e(a)x &= 1_L(a \triangleright 1_L)(\sum_i c_i \triangleright x_i) \\
&\overset{1.3.11}{=} \sum_i 1_L(a_1 \triangleright (1_L(S(a_2)c_i \triangleright x_i))) \\
&= \sum_i a_1 \cdot (1_L(S(a_2)c_i \triangleright x_i)) \in A \cdot L,
\end{aligned}$$

e analogamente,

$$\begin{aligned}
e(a)(b \cdot x) &= 1_L(a \triangleright 1_L) 1_L(b \triangleright x) \\
&= 1_L(a \triangleright 1_L)(b \triangleright x) \\
&\overset{1.3.11}{=} 1_L(a_1 \triangleright (1_L(S(a_2)b \triangleright x))) \\
&= a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot x),
\end{aligned}$$

ou seja, $e(a)x \in A \cdot L$ e $e(a)(b \cdot x) = a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot x)$, para todo $a, b \in A$ e $x \in R$.

(iii) Dados $a_1, ..., a_n \in A$ e $x_1, ..., x_m \in L$, pela Observação 1.3.6, existe $b \in A$ tal que $ba_i = a_i = a_i b$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $b \triangleright x_j = x_j$, para todo $j \in \{1, ..., m\}$, logo

$$a_i \cdot b \cdot x_j = 1_L(a_i \triangleright (1_L(b \triangleright x_j))$$

$$
\begin{aligned}
&= 1_L(a_i \triangleright (1_L x_j)) \\
&\overset{x_j \in L}{=} 1_L(a_i \triangleright x_j) \\
&= a_i \cdot x_j,
\end{aligned}
$$

para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

(iv) Seja $x \in L$ e supomos $a \cdot x = 0$, para todo $a \in A$. Novamente, pela Observação 1.3.6, existe $b \in A$ tal que $b \triangleright x = x$, logo

$$0 = b \cdot x = 1_L(b \triangleright x) = 1_L x = x.$$

Similarmente, mostramos os itens de simetria. Portanto, L é um A-módulo álgebra parcial simétrico. $\square$

Essa ação recebe o nome de **ação parcial induzida**.

O próximo exemplo ilustrará a proposição anterior.

Exemplo 2.1.8. Seja R o A_G-módulo álgebra definido no Exemplo 1.3.9, da seguinte forma,

$$
\begin{aligned}
\triangleright : A_G \otimes R &\longrightarrow R \\
\delta_p \otimes h &\longmapsto \delta_p \triangleright h := \delta_p(h)h,
\end{aligned}
$$

consideramos um subgrupo finito e normal N de G, $N \neq \{1_G\}$ tal que $car(\Bbbk) \nmid |N|$ e $f_N = \frac{1}{|N|} \sum\limits_{n \in N} n$ um idempotente central em R. Assim, construímos a álgebra $S = f_N R$ com unidade f_N, e pela proposição acima, S é um A_G-módulo álgebra parcial simétrico dado por

$$
\begin{aligned}
\cdot : A_G \otimes S &\longrightarrow S \\
\delta_p \otimes f_N h &\longmapsto \delta_p \cdot (f_N h) = f_N(\delta_p \triangleright (f_N h)).
\end{aligned}
$$

Note que a ação parcial induzida, não é uma ação global. Para isso, observamos que

$$\begin{aligned}
\delta_p \cdot (f_N h) &= f_N(\delta_p \triangleright (f_N h)) \\
&= f_N(\delta_p \triangleright (f_N(\delta_h \triangleright h))) \\
&\overset{(*)}{=} f_N((\delta_{ph^{-1}} \triangleright f_N)(\delta_h \triangleright h)) \\
&= f_N\left(\frac{1}{|N|}\sum_{n\in N}(\delta_{ph^{-1}} \triangleright n)h\right) \\
&= f_N\left(\frac{1}{|N|}\sum_{n\in N}\delta_{ph^{-1}}(n)nh\right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{|N|}f_N p & , ph^{-1} \in N \ (ph^{-1} = n) \\ 0 & , \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Na igualdade $(*)$ usamos a definição da comultiplicação do Exemplo 1.1.10 para obtermos a identidade

$$\Delta(\delta_p)(1 \otimes \delta_h) = \delta_{ph^{-1}} \otimes \delta_h, \tag{2.2}$$

para todo $\delta_p, \delta_h \in A_G$. Logo, escolhendo $h = e$ (neutro no grupo) e $p \in N$, mas $p \neq e$ temos

$$e(\delta_p) = \delta_p \cdot (f_N) = \tfrac{1}{|N|}f_N \quad \text{e} \quad \varepsilon(\delta_p)f_N = \delta_{p,e}f_N = 0,$$

ou seja, $e(\delta_p) \neq \varepsilon(\delta_p)f_N$ e portanto, a ação parcial não é global.

Exemplo 2.1.9. Sejam R, T A-módulos álgebras parciais, então $R\otimes T$ é um $A\otimes A$-módulo álgebra parcial via

$$(a \otimes b) \cdot (x \otimes y) = a \cdot x \otimes b \cdot y,$$

para todo $a, b \in A$, $x \in R$ e $y \in T$.

O resultado abaixo, caracteriza uma família de ações parciais e generaliza o resultado apresentado em [5].

Proposição 2.1.10. *Sejam as álgebras A, R e $\lambda : A \longrightarrow \Bbbk$ uma aplicação linear. Então,*

$$\begin{aligned} \cdot : A \otimes R &\longrightarrow R \\ a \otimes x &\longmapsto a \cdot x = \lambda(a)x \end{aligned}$$

é uma ação parcial se, e somente se,

(i) $\lambda(a)\lambda(b) = \lambda(a_1)\lambda(a_2b)$, *onde* $\Delta(a)(1 \otimes b) = a_1 \otimes a_2b$;

(ii) Dados $a_1, ..., a_n \in A$, *existe* $b \in A$ *tal que* $a_ib = a_i = ba_i$ *e* $\lambda(a_i)\lambda(b) = \lambda(a_i)$, *para todo* $1 \leq i \leq n$.

Demonstração. Consideramos uma ação parcial de A e R dada por $a \cdot x = \lambda(a)x$, para todo $a \in A$ e $x \in R$. O item (i) da Definição 2.1.2 implica $\lambda(a)\lambda(b)xy = \lambda(a_1)\lambda(a_2b)xy$, para todo $x, y \in R$, ou seja, $\lambda(a)\lambda(b) = \lambda(a_1)\lambda(a_2b)$, para todo $a, b \in A$. E, pelo item (iii), dados $a_1, ..., a_n \in A$ e $x \in R$ não nulo, existe $b \in A$ tal que $a_ib = a_i = ba_i$ e $\lambda(a_i)\lambda(b)x = \lambda(a_i)x$, para todo $1 \leq i \leq n$, logo $\lambda(a_i)\lambda(b) = \lambda(a_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Reciprocamente, se a aplicação λ satisfaz os itens (i) e (ii) acima, então $\cdot$ é uma ação parcial de A em R. De fato,

- Sejam $a, b \in A$ e $x, y \in R$,

$$a \cdot (x(b \cdot y)) = \lambda(a)\lambda(b)xy \overset{(i)}{=} \lambda(a_1)\lambda(a_2b)xy = (a_1 \cdot x)(a_2b \cdot y).$$

- Definimos a aplicação linear $e : A \longrightarrow M(R)$ tal que $e(a) = \lambda(a)1_{M(R)}$, para todo $a \in A$, logo

$$e(A)R = \lambda(A)1_{M(R)}R = \lambda(A)R = A \cdot R$$

e, dados $a, b, c \in A$ tal que $\varepsilon(c) = 1_{\Bbbk}$ e $x \in R$, temos

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot x) &= \lambda(a_1)\lambda(S(a_2)b)x \\ &\overset{(i)}{=} \lambda(a_1)\lambda(a_2S(a_3)b)x \\ &\overset{(*)}{=} \lambda(a)\lambda(b)x \\ &= e(a)(b \cdot x), \end{aligned}$$

assim $e(A)R = R$ e $e(a)(b \cdot x) = a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot x)$. Na igualdade $(*)$ estamos usando a mesma ideia de cobertura utilizada em 2.1.

• Dados $a_1, ..., a_n \in A$ e $x_1, ..., x_m \in R$,

$$a_i \cdot x_j = \lambda(a_i)x_j \overset{(ii)}{=} \lambda(a_i)\lambda(b)x_j = a_i \cdot b \cdot x_j,$$

onde $b \in A$ tal que $ba_i = a_i = a_ib$, para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

• Consideramos $x \in R$ e supomos $a \cdot x = 0$, para todo $a \in A$. Escolhendo $c \in A$ tal que $\lambda(c) = 1_{\Bbbk}$, obtemos

$$x = \lambda(c)x = c \cdot x = 0.$$

Portanto, λ define uma ação parcial de A em R. □

Observação 2.1.11. Nas condições da proposição anterior, λ define uma ação parcial simétrica se e, somente se, $\lambda(a)\lambda(b) = \lambda(a_1b)\lambda(a_2)$, para todo $a, b \in A$.

Como consequência do resultado acima, segue o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1.12. Sejam R uma álgebra com produto não degenerado, A_G a álgebra das funções com suporte finito de um grupo G em $\Bbbk$ definida no Exemplo 1.1.10 e N um subgrupo finito de G tal que $car(\Bbbk) \nmid |N|$. Definimos a aplicação linear

$$\lambda : A_G \longrightarrow \Bbbk$$

$$\delta_g \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{|N|} & , g \in N, \\ 0 & , \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, R é um A-módulo álgebra parcial com ação dada por $\delta_g \cdot x = \lambda(\delta_g)x$, para todo $\delta_g \in A_G$ e $x \in R$. De fato, vamos verificar os itens (i) e (ii) da proposição anterior.

(i) Sejam $\delta_g, \delta_h \in A_G$, então $\lambda(\delta_g)\lambda(\delta_h) = \begin{cases} \frac{1}{|N|^2} & , g, h \in N, \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$. Por outro lado, $\lambda((\delta_g)_1)\lambda((\delta_g)_2\delta_h) \overset{2.2}{=} \lambda(\delta_{gh^{-1}})\lambda(\delta_h) = \begin{cases} \frac{1}{|N|^2} & , gh^{-1} \text{ e } h \in N \Rightarrow g \in N \\ 0 & , \text{caso contrário.} \end{cases}$

Logo, $\lambda(\delta_g)\lambda(\delta_h) = \lambda(\delta_{gh^{-1}})\lambda(\delta_h)$, para todo δ_g e $\delta_h \in A_G$.

(ii) Sejam $\delta_{g_1}, ..., \delta_{g_n} \in A_G$, vamos mostrar a existência de um elemento $f \in A_G$ tal que $f\delta_{g_i} = \delta_{g_i} = \delta_{g_i}f$ e $\lambda(f) = 1_{\Bbbk}$. Para isso, consideramos o conjunto

$$\{\delta_{g_1}, ..., \delta_{g_n}\} \cup N = \{\underbrace{\delta_{h_1}, ..., \delta_{h_r}}_{N}, \delta_{h_{r+1}}, ..., \delta_{h_m}\}$$

e definimos $f = \sum_{j=1}^{m} \delta_{h_j}$, logo f é unidade local bilateral de δ_{g_i}, para todo $1 \leq i \leq n$ e,

$$\begin{aligned} \lambda(f) &= \sum_{j=1}^{m} \lambda(\delta_{h_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{r} \lambda(\delta_{h_j}) + \sum_{j=r+1}^{m} \lambda(\delta_{h_j}) \\ &= \frac{1}{|N|} r \\ &= \frac{1}{|N|}|N| = 1. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que λ define uma ação parcial de A_G em R.

Exemplo 2.1.13. Sejam as álgebras A_G e R do exemplo anterior e definimos um elemento idempotente $f \in M(A_G)$ tal que $(f \otimes 1)\Delta(f) = f \otimes f$ por

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow \Bbbk \\ g &\longmapsto \begin{cases} 1 & , g \in N, \\ 0 & , \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

onde N é um subgrupo qualquer de G (recordamos que G também é um grupo qualquer). Então,

$$\begin{aligned} \cdot : \widehat{A_G} \otimes R &\longrightarrow R \\ \varphi(\_h) \otimes x &\longmapsto \varphi(\_h) \cdot x = x\varphi(fh) \end{aligned}$$

é uma ação parcial de $\widehat{A_G}$ em R, onde φ é uma integral à esquerda em A_G. De fato, definimos a aplicação linear $\lambda : \widehat{A_G} \longrightarrow \Bbbk$ tal que $\lambda(\widehat{h}) = \varphi(fh)$, para todo $\widehat{h} = \varphi(\_h) \in \widehat{A_G}$, logo

$$\begin{aligned} \lambda(\widehat{h}_1)\lambda(\widehat{h}_2\widehat{g}) &\overset{1.10}{=} \varphi(fS^{-1}(g_1)h)\varphi(fg_2) \\ &\overset{1.2.1}{=} \varphi(f(\imath \otimes \varphi)(\Delta(fg_2)(S^{-1}(g_1)h \otimes 1))) \\ &= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes 1)\Delta(fg_2)(S^{-1}(g_1)h \otimes 1))) \\ &= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes 1)\Delta(f)\Delta(g_2)(S^{-1}(g_1)h \otimes 1))) \\ &\overset{(*)}{=} \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes f)\Delta(g_2)(S^{-1}(g_1)h \otimes 1))) \\ &= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes f)(g_2S^{-1}(g_1)h \otimes g_3))) \\ &= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes f)(h \otimes g))) \\ &= \varphi(fh)\varphi(fg) \\ &= \lambda(\widehat{h})\lambda(\widehat{g}), \end{aligned}$$

onde na igualdade $(*)$ estamos usando a propriedade $(f \otimes 1)\Delta(f) = f \otimes f$. Assim, $\lambda(\widehat{h})\lambda(\widehat{g}) = \lambda(\widehat{h}_1)\lambda(\widehat{h}_2\widehat{g})$, para todo $\widehat{h} = \varphi(\_h)$ e $\widehat{g} = \varphi(\_g) \in \widehat{A_G}$.

Para verificarmos o item (ii) da Proposição 2.1.10, consideramos $\varphi(\_a_1), ..., \varphi(\_a_n) \in \widehat{A}$ e $\varphi(f\_a_1), ..., \varphi(f\_a_n) \in \widehat{A}$, então pelo Teorema 1.1.14, existe $b \in A$ tal que

$$\varphi(\_b)\varphi(\_a_i) = \varphi(\_a_i) = \varphi(\_a_i)\varphi(\_b) \text{ e } \varphi(\_b)\varphi(f\_a_i) = \varphi(f\_a_i) = \varphi(f\_a_i)\varphi(\_b),$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Logo, escrevendo $a_i \otimes b = \Delta(b_2)(S^{-1}(b_1)a_i \otimes 1)$ e usando a Observação 1.2.16 temos

$$\varphi(f\_a_i) = \varphi(f\_a_i)\varphi(\_b) = \varphi(fS^{-1}(b_1)a_i)\varphi(\_b_2),$$

para cada $i\{1, ..., n\}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\varphi(fa_i) &= \varphi(ffa_i) \\
&= \varphi(f_a_i)(f) \\
&= (\varphi(fS^{-1}(b_1)a_i)\varphi(_b_2))(f) \\
&= \varphi(fS^{-1}(b_1)a_i)\varphi(fb_2) \\
&\overset{1.2.1}{=} \varphi(f(\imath \otimes \varphi)(\Delta(fb_2)(S^{-1}(b_1)a_i \otimes 1))) \\
&= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes 1)\Delta(fb_2)(S^{-1}(b_1)a_i \otimes 1))) \\
&= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes 1)\Delta(f)\Delta(b_2)(S^{-1}(b_1)a_i \otimes 1))) \\
&= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes f)\Delta(b_2)(S^{-1}(b_1)a_i \otimes 1))) \\
&= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes f)(b_2S^{-1}(b_1)a_i \otimes b_3))) \\
&= \varphi((\imath \otimes \varphi)((f \otimes f)(a_i \otimes b))) \\
&= \varphi(fa_i)\varphi(fb),
\end{aligned}$$

ou seja, $\lambda(\varphi(\_a_i)) = \varphi(fa_i) = \varphi(fa_i)\varphi(fb) = \lambda(\varphi(\_a_i))\lambda(\varphi(\_b))$, para todo i. Portanto, $\cdot$ é uma ação parcial parcial de A_G em R.

Para finalizar a seção, definimos o produto smash de um A-módulo álgebra parcial R, generalizando a estrutura apresentada na Definição 1.4.9.

Definição 2.1.14. Seja R um A-módulo álgebra parcial. O produto smash $R\#A$ é uma álgebra definida por $R\#A = R \otimes A$ como espaço vetorial e a multiplicação é dada por

$$(x\#a)(y\#b) = x(a_1 \cdot y)\#a_2b$$

$x, y \in R$, $a, b \in A$.

Note que, o produto smash faz sentido pois $\Delta(a)(1 \otimes b) = a_1 \otimes a_2b \in A \otimes A$, o que é imediato quando A e R possuem unidade.

Observação 2.1.15. Com as notações acima, $R\#A$ é de fato uma álgebra. De fato, sejam $a, b, c \in A$ e $x, y, z \in R$, então

$$\begin{aligned}
((x\#a)(y\#b))(z\#c) &= (x(a_1 \cdot y)\#a_2b)(z\#c) \\
&= x(a_1 \cdot y)(a_2b_1 \cdot z)\#a_3b_2c \\
&\overset{(i)2.1.2}{=} x(a_1 \cdot (y(b_1 \cdot z)))\#a_2b_2c \\
&= (x\#a)(y(b_1 \cdot z)\#b_2c) \\
&= (x\#a)((y\#b)(z\#c)).
\end{aligned}$$

Proposição 2.1.16. *Se R um A-módulo álgebra parcial, então o produto em $R\#A$ é não degenerado à esquerda.*

Demonstração. Escrevemos $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\#b_i \in R\#A$ onde $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ são linearmente independentes e assumimos $(x\#a)(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\#b_i) = 0$, para todo $x \in R$ e $a \in A$. Logo,

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} x(a_1 \cdot y_i)\#a_2b_i = 0$$

e, usando a não degenerescência de R, temos $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_1 \cdot y_i)\#a_2b_i = 0$.

Note que, $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_1 \cdot y_i)\#a_2b_i = \sum\limits_{i=1}^{n}(\Delta(a)(1 \otimes b_i)(\cdot\#\imath)(y_i \otimes 1))$, assim para qualquer $c \in A$, $\sum\limits_{i=1}^{n}((1 \otimes c)\Delta(a)(1 \otimes b_i)(\cdot\#\imath)(y_i \otimes 1)) = 0$, mas por hipótese, $(1 \otimes A)\Delta(A) = A \otimes A$, ou seja,

$$0 = \sum_{i=1}^{n}((d \otimes e)(1 \otimes b_i)(\cdot\#\imath)(y_i \otimes 1))$$

$$= \sum_i d \cdot y_i \# eb_i,$$

para todo $d, e \in A$. O produto em A também é não degenerado, então $\sum_{i=1}^{n} d \cdot y_i \# b_i = 0$ e, dessa forma, $d \cdot y_i = 0$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $d \in A$, pois $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ é linearmente independente. Logo, usando o item (iv) da Definição 2.1.2, $y_i = 0$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ e, portanto, $\sum_{i=1}^{n} y_i \# b_i = 0$. □

2.2 Extensão de uma Ação Parcial

Nesta seção, estendemos uma ação parcial simétrica de A em R para uma "ação" de A em $M(R)$, onde A é uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular e R é uma álgebra, com ou sem unidade, mas com o produto não degenerado.

No caso global, a propriedade da ação ser unitário foi fundamental para a extensão, o que não ocorre em nosso contexto. Mas, semelhante ao Lema 1.3.11, o próximo resultado intui como devemos definir essa "ação".

Proposição 2.2.1. *Seja R um A-módulo álgebra parcial simétrico, então*

(i) $(a \cdot x)(b \cdot y) = a_1 \cdot (x(S(a_2)b \cdot y))$;

(ii) $(a \cdot x)(b \cdot y) = b_2 \cdot ((S^{-1}(b_1)a \cdot x)y)$,

para todo $a, b \in A$ e $x, y \in R$.

Demonstração. Sejam $a, b \in A$ e $x, y \in R$, então

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (x(S(a_2)b \cdot y)) &\overset{(i)2.1.2}{=} (a_1 \cdot x)(a_2 S(a_3)b \cdot y) \\ &\overset{2.1}{=} (a \cdot x)(b \cdot y). \end{aligned}$$

e,

$$b_2 \cdot ((S^{-1}(b_1)a \cdot x)y) \overset{(iv)2.1.2}{=} (b_2 S^{-1}(b_1)a \cdot x)(b_3 \cdot y)$$

$$\stackrel{2.1}{=} \quad (a \cdot x)(b \cdot y).$$

Portanto, seguem os itens (i) e (ii). $\square$

Dada uma ação parcial simétrica de A em R, a ideia então é estender essa ação em $M(R)$, mas não como um par em $M(R)$ e sim como um par em $M(A \cdot R)$. Para isso, assumimos que $A \cdot R$ possui produto não denegerado. Dessa forma, para $m \in M(R)$ e $a \in A$ definimos $a \cdot m \in M(A \cdot R)$ por

$$\begin{aligned} (a \cdot m)(b \cdot x) &= a_1 \cdot (m(S(a_2)b \cdot x)) \\ (b \cdot x)(a \cdot m) &= a_2 \cdot ((S^{-1}(a_1)b \cdot x)m), \end{aligned} \tag{2.3}$$

para todo $b \in A$ e $x \in R$. Note que,

$$\begin{aligned} (b \cdot x)((a \cdot m)(c \cdot y)) &\stackrel{(i)2.1.2}{=} (b \cdot x)(a_1 \cdot (m(S(a_2)c \cdot y))) \\ &\stackrel{(iv)2.1.2}{=} a_2 \cdot ((S^{-1}(a_1)b \cdot x)(m(S(a_3)c \cdot y))) \\ &\stackrel{m \in M(R)}{=} a_2 \cdot (((S^{-1}(a_1)b \cdot x)m)(S(a_3)c \cdot y)) \\ &\stackrel{(i)2.1.2}{=} (a_2 \cdot ((S^{-1}(a_1)b \cdot x)m))(a_3S(a_4)c \cdot y) \\ &= (a_2 \cdot ((S^{-1}(a_1)b \cdot x)m))(c \cdot y) \\ &= ((b \cdot x)(a \cdot m))(c \cdot y), \end{aligned}$$

para todo $a, b, c \in A$ e $x, y \in R$, logo pela igualdade (1.1), $a \cdot m \in M(A \cdot R)$.

A não degenerescência do produto em $A \cdot R$ nos permite ver $(a \cdot x)(b \cdot y)$, para todo $a, b \in A$ e $x, y \in R$, como um produto em $M(A \cdot R)$ e não apenas em R.

Exemplo 2.2.2. As proposições 2.1.7 e 2.1.10 geram exemplos onde $A \cdot R$ possui produto não degenerado.

Muitas propriedades seguem da definição da extensão acima, mas antes de listá-las recordamos, pela igualdade (1.1), que elementos em uma álgebra de multiplicadores são unicamente determinados, assim quando precisamos mostrar que dois pares são iguais, basta apenas mostrarmos a igualdade para um multiplicador.

Proposição 2.2.3. *Seja R um A-módulo álgebra parcial simétrico tal que $A \cdot R$ possui produto não degenerado. Então,*

(i) $a \cdot (m(b \cdot n)) = (a_1 \cdot m)(a_2 b \cdot n)$;

(ii) $a \cdot ((b \cdot m)n) = (a_1 b \cdot m)(a_2 \cdot n)$,

para todo $a, b \in A$ e $m, n \in M(R)$.

Demonstração. (i) Aplicando a definição de extensão temos

$$\begin{aligned} (a \cdot (m(b \cdot n)))(c \cdot x) &= a_1 \cdot (m(b \cdot n)(S(a_2)c \cdot x)) \\ &= a_1 \cdot (m((b \cdot n)(S(a_2)c \cdot x))) \\ &= a_1 \cdot (m(b_1 \cdot (n(S(b_2)S(a_2)c \cdot x)))). \end{aligned}$$

E, por outro lado,

$$\begin{aligned} (a_1 \cdot m)(a_2 b \cdot n)(c \cdot x) &= (a_1 \cdot m)(a_2 b_1 \cdot (n(S(a_3 b_2)c \cdot x))) \\ &= a_1 \cdot (m(S(a_2)a_3 b_1 \cdot (n(S(b_2)S(a_4)c \cdot x)))) \\ &= a_1 \cdot (m(b_1 \cdot (n(S(b_2)S(a_2)c \cdot x)))), \end{aligned}$$

para todo $c \in A$ e $x \in R$, logo $(a \cdot (m(b \cdot n))) = (a_1 \cdot m)(a_2 b \cdot n)$, para qualquer $a, b \in A$ e $m, n \in M(R)$. Similarmente, mostramos (ii). $\square$

Observação 2.2.4. Nas condições anteriores,

$$\begin{aligned} (a \cdot 1_{M(R)})(b \cdot x) &= a_1 \cdot (1_{M(R)}(S(a_2)b \cdot x)) \\ &= a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot x) \\ &\overset{(ii)2.1.2}{=} e(a)(b \cdot x), \end{aligned}$$

e analogamente $(b \cdot x)(a \cdot 1_{M(R)}) \overset{(ii)2.1.2}{=} (b \cdot x)e(a)$, para todo $a, b \in A$ e $x \in R$. Portanto, $e(a)|_{A \cdot R} = a \cdot 1_{M(R)}$, para todo $a \in A$.

Segue abaixo, uma consequência imediata da observação acima.

Proposição 2.2.5. *Seja R um A-módulo álgebra parcial simétrico tal que $A \cdot R$ possui produto não degenerado. Então,*

(i) $A \cdot R = e(A)R$;

(ii) $A \cdot R = Re(A)$.

Demonstração. Pela definição de ação parcial simétrica, mostramos apenas a inclusão $\subseteq$ dos itens acima. De fato, seja $a \cdot x \in A \cdot R$, então por (iii) da Definição 2.1.2, existe $b \in A$, unidade local bilateral de $a \in A$ tal que $a \cdot x = a \cdot b \cdot x$. Logo, pela extensão temos

$$\begin{aligned} a \cdot x &= a \cdot (b \cdot x) \\ &\overset{(i)2.2.3}{=} (a_1 \cdot 1_{(R)})(a_2 b \cdot x) \\ &\overset{2.2.4}{=} e(a_1)(a_2 b \cdot x) \in e(A)R. \end{aligned}$$

Similarmente, mostramos

$$\begin{aligned} a \cdot x &= a \cdot b \cdot x \\ &\overset{(ii)2.2.3}{=} (a_1 b \cdot x)(a_2 \cdot 1_{M(R)}) \\ &\overset{2.2.4}{=} (a_1 b \cdot x)e(a_2) \in Re(A). \end{aligned}$$

Portanto, $e(A)R = A \cdot R = Re(A)$. $\square$

Observação 2.2.6. Se $m \in M(R)$, então $m|_{A \cdot R} = (\overline{m}, \overline{\overline{m}}) \in M(A \cdot R)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \overline{m} : A \cdot R &\longrightarrow A \cdot R & \quad \text{e} \quad \overline{\overline{m}} : A \cdot R &\longrightarrow A \cdot R \\ xe(a) &\longmapsto mxe(a) & e(a)x &\longmapsto e(a)xm, \end{aligned}$$

onde a boa definição das aplicações acima segue da Proposição 2.2.5.

Essa observação é importante, em nosso contexto, para construirmos a subálgebras dos invariantes.

Definição 2.2.7. Seja R um A-módulo álgebra parcial simétrico tal que $A \cdot R$ possui produto não degenerado. Definimos o conjunto dos elementos *invariantes* de uma ação parcial da seguinte forma

$$R^{\underline{A}} = \{m \in M(R);\ a \cdot m = m|_{A \cdot R}(a \cdot 1_{M(R)})\ e\ a \cdot m = (a \cdot 1_{M(R)})m|_{A \cdot R}, \forall a \in A\}.$$

Observação 2.2.8. $R^{\underline{A}}$ é uma subálgebra de $M(R)$ e $1_{M(R)} \in R^{\underline{A}}$. De fato, sejam $m, n \in R^{\underline{A}}$, $x \in R$, $a, b \in A$ e escrevemos $a_1 \otimes S(a_2)b = \sum_i a_i \otimes b_i$, logo

$$\begin{aligned}
(a \cdot mn)(b \cdot x) &\overset{2.3}{=} a_1 \cdot (mn(S(a_2)b \cdot x)) \\
&= \sum_i a_i \cdot (mn(b_i \cdot x)) \\
&\overset{(ii)2.2.5}{=} \sum_i a_i \cdot (mn(\sum_j y_{ij} e(c_{ij}))) \\
&= \sum_i a_i \cdot (m(\sum_j n(y_{ij} e(c_{ij})))) \\
&= \sum_i a_i \cdot (m(\sum_j (n y_{ij}) e(c_{ij}))) \\
&\overset{(ii)2.2.5}{=} \sum_i a_i \cdot (m(\sum_l d_{il} \cdot z_{il})) \\
&\overset{(i)2.2.3}{=} \sum_i ((a_i)_1 \cdot m)(\sum_l (a_i)_2 d_{il} \cdot z_{il}) \\
&\overset{2.2.7}{=} m|_{A \cdot R} \sum_i ((a_i)_1 \cdot 1_{M(R)})(\sum_l (a_i)_2 d_{il} \cdot z_{il}) \\
&\overset{(i)2.2.3}{=} m|_{A \cdot R} \sum_i (a_i \cdot (\sum_l d_{il} \cdot z_{il})) \\
&= m|_{A \cdot R} \sum_i (a_i \cdot (\sum_j (n y_{ij}) e(c_{ij}))) \\
&= m|_{A \cdot R} \sum_i (a_i \cdot (n(\sum_j y_{ij} e(c_{ij})))) \\
&= m|_{A \cdot R} \sum_i (a_i \cdot (n(b_i \cdot n)))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad m|_{A\cdot R}(a_1 \cdot (n(S(a_2)b \cdot x))) \\
&\overset{(i)2.2.3}{=} \quad m|_{A\cdot R}(a_1 \cdot n)(a_2 S(a_3)b \cdot x) \\
&\overset{2.2.7}{=} \quad m|_{A\cdot R} n|_{A\cdot R}(a \cdot 1_{M(R)})(b \cdot x) \\
&= \quad (mn)|_{A\cdot R}(a \cdot 1_{M(R)})(b \cdot x),
\end{aligned}
$$

ou seja, $(a \cdot mn) = (mn)|_{A\cdot R}(a \cdot 1_{M(R)})$. Analogamente, mostramos $(a \cdot mn) = (a \cdot 1_{M(R)})(mn)|_{A\cdot R}$ e, concluímos assim que $mn \in R^{\underline{A}}$. Além do mais,

$$
\begin{aligned}
(a \cdot 1_{M(R)})(b \cdot x) &= a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot x) \\
&= 1_{M(R)}(a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot x)) \\
&= 1_{M(R)}(a \cdot 1_{M(R)})(b \cdot x),
\end{aligned}
$$

para todo $a, b \in A$ e $x \in R$, logo $1_{M(R)} \in R^{\underline{A}}$.

O próximo resultado será fundamental no Capítulo 4 deste trabalho.

Proposição 2.2.9. *Se R um A-módulo álgebra parcial simétrico tal que $A \cdot R$ possui produto não degenerado, então*

(i) $\{m \in M(R);\ a \cdot (xm) = (a \cdot x)m \text{ e } a \cdot (mx) = m(a \cdot x),\ \forall\, a \in A \text{ e } x \in R\} \subseteq R^{\underline{A}}$

(ii) $R^{\underline{A}} \subseteq \{m \in M(R); a \cdot (m(c \cdot x)) = m(a \cdot x),\ \text{para cada } a \in A \text{ e } x \in R\}$*, onde $c \in A$ é a unidade local de a dada no item (iii) da Definição 2.1.2.*

Demonstração. Sejam $m \in M(R)$, $a, b \in A$ e $x \in R$, vamos verificar o item (i), logo

$$
\begin{aligned}
(a \cdot m)(b \cdot x) &\overset{2.3}{=} a_1 \cdot (m(S(a_2)b \cdot x)) \\
&\overset{(*)}{=} m(a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot x)) \\
&= m|_{A\cdot R}(a_1 \cdot (S(a_2)b \cdot x)) \\
&\overset{2.3}{=} m|_{A\cdot R}(a \cdot 1_{M(R)})(b \cdot x),
\end{aligned}
$$

e, também

$$\begin{aligned}(b\cdot x)(a\cdot m) &\overset{2.3}{=} a_2\cdot((S^{-1}(a_1)b\cdot x)m)\\ &\overset{(*)}{=} a_2\cdot((S^{-1}(a_1)b\cdot x))m\\ &= (a_2\cdot(S^{-1}(a_1)b\cdot x))m|_{A\cdot R}\\ &\overset{2.3}{=} (b\cdot x)(a\cdot 1_{M(R)})m|_{A\cdot R},\end{aligned}$$

para todo $b\in A$ e $x\in R$, ou seja, $(a\cdot m)=m|_{A\cdot R}(a\cdot 1_{M(R)})$ e $a\cdot m=(a\cdot 1_{M(R)})m|_{A\cdot R}$, para todo $a\in A$. Note que, nas igualdades $(*)$ estamos usando o fato de $m\in\{m\in M(R);\ a\cdot(xm)=(a\cdot x)m\ e\ a\cdot(mx)=m(a\cdot x),\ \forall\ a\in A$ e $x\in R\}$, e dessa forma, $m\in R^{\underline{A}}$.

(ii) Sejam $a\in A$, $x\in R$ e $m\in R^{\underline{A}}$, então

$$\begin{aligned}m(a\cdot x) &\overset{(iii)2.1.2}{=} m(a\cdot c\cdot x)\\ &= m|_{A\cdot R}(a\cdot c\cdot x)\\ &\overset{2.2.3}{=} m|_{A\cdot R}(a_1\cdot 1_{M(R)})(a_2c\cdot x)\\ &\overset{2.2.7}{=} (a_1\cdot m)(a_2c\cdot x)\\ &\overset{2.2.3}{=} a\cdot(m(c\cdot x)).\end{aligned}$$

Portanto, $m\in\{m\in M(R); a\cdot(m(c\cdot x))=m(a\cdot x)$ tal que, para cada $a\in A$ e $x\in R, c\in A$ é a unidade local de a dada no item (iii) da Definição 2.1.2$\}$. $\square$

2.3 Uma Álgebra Dual

Consideramos (A,Δ) uma álgebra de Hopf de multiplicadores e R uma álgebra com produto não degenerado. Não existe uma estrutura de álgebra natural em $Hom(A,R)$ dada pelo produto

$$(fg)(a)=\mu_R[(f\otimes g)\Delta(a)], \tag{2.4}$$

pois nem sempre o lado direito da igualdade faz sentido, já que não existe garantia de $\Delta(a)$ estar coberto. Nesse caso, a ideia é considerar um subespaço de $Hom(A, R)$ no qual podemos induzir uma estrutura de álgebra semelhante a (2.4), mas que faça sentido. Para tanto, definimos

$$Hom^r(A, R) = \{\sum_i f_i(\_a_i); a_i \in A, f_i \in Hom(A, R)\}.$$

Pelo fato de A possuir unidades locais (bilaterais), qualquer combinação linear de elementos $f_i(\_a_i)$ é da forma $f(\_e)$, para alguma $f \in Hom(A, R)$ e $e \in A$. De fato, considerando

$$f = \sum_i^n f_i(\_a_i) \in Hom(A, R),$$

e, $e \in A$ tal que $ea_i = a_i = a_i e$, para cada $i\{1, ..., n\}$, temos

$$\begin{aligned} f(\_e)(b) &= f(be) \\ &= \sum_i^n f_i(\_a_i)(be) \\ &= \sum_i^n f_i(bea_i) \\ &= \sum_i^n f_i(ba_i) \\ &= \sum_i^n f_i(\_a_i)(b), \end{aligned}$$

para todo $b \in A$, ou seja, $\sum_i^n f_i(\_a_i) = f(\_e)$.

Teorema 2.3.1. *Nessas condições acima, $Hom^r(A, R)$ é uma álgebra com multiplicação dada por,*

$$(fg)(a) = \mu_R[(f \otimes g)\Delta(a)],$$

para todo $a \in A$ e $f, g \in Hom^r(A, R)$.

Demonstração. Consideramos $f(\_a)$, $g(\_b) \in Hom^r(A, R)$ e escrevemos

$$a \otimes b = \sum_i^n \Delta(p_i)(1 \otimes q_i).$$

Então, para todo $c \in A$

$$\begin{aligned}
(f(_a)g(_b))(c) &= \mu_R[(f(_a) \otimes g(_b))\Delta(c)] \\
&= \mu_R[(f \otimes g)(\Delta(c)(a \otimes b))] \\
&= \mu_R[(f \otimes g)(\Delta(c)\sum_i^n(\Delta(p_i)(1 \otimes q_i)))] \\
&= \mu_R[\sum_i^n(f \otimes g)(\Delta(cp_i)(1 \otimes q_i))] \\
&= \sum_i^n \mu_R[f(c_1p_{i1}) \otimes g(c_2p_{i2}q_i)] \\
&= \sum_i^n f(c_1p_{i1})g(c_2p_{i2}q_i).
\end{aligned}$$

Assim, definimos o funcional h_i por

$$h_i(x) = \mu_R[(f \otimes g)(\Delta(x)(1 \otimes q_i))],$$

para todo $x \in R$ e para cada i, então

$$\sum_i^n h_i(\_p_i) = (f(\_a)g(\_b)). \tag{2.5}$$

De fato, para todo $c \in A$,

$$\begin{aligned}
\sum_i^n h(cp_i) &= \sum_i^n \mu_R[(f \otimes g)(\Delta(cp_i)(1 \otimes q_i))] \\
&= \sum_i \mu_R[f(c_1p_{i1}) \otimes g(c_2p_{i2}q_i)] \\
&= (f(_a)g(_b))(c),
\end{aligned}$$

e, portanto $f(\_a)g(\_b) \in Hom^r(A, R)$.

Nosso próximo passo será mostrar a associatividade de $Hom^r(A, R)$. Para isso, sejam $f(\_a), g(\_b)$ e $h(\_c) \in Hom^r(A, R)$, então

$$\begin{aligned}
(f(_a)(g(_b)h(_c)))(d) &= \mu_R[(f(_a) \otimes (g(_b)h(_c)))\Delta(d)] \\
&= \mu_R[f(d_1 a) \otimes (g(_b)h(_c))(d_2)] \\
&= \mu_R[f(d_1 a) \otimes (\mu_R((g(_b) \otimes h(_c))\Delta(d_2)))] \\
&= \mu_R[f(d_1 a) \otimes g(d_2 b)h(d_3 c)] \\
. &= f(d_1 a)(g(d_2 b)h(d_3 c)) \\
&= (f(d_1 a)g(d_2 b))h(d_3 c) \\
&= \mu_R[\mu_R((f(_a) \otimes g(_b))\Delta(d_1)) \otimes h(d_2 c)] \\
&= \mu_R[(f(_a)g(_b))(d_1) \otimes h(d_2 c)] \\
&= \mu_R[((f(_a)g(_b)) \otimes h(_c))\Delta(d)] \\
&= ((f(_a)g(_b))h(_c))(d),
\end{aligned}$$

para todo $d \in A$, ou seja, $f(\_a)(g(\_b)h(\_c)) = (f(\_a)g(\_b))h(\_c)$. $\square$

Analogamente, definimos a álgebra $Hom^l(A, R) = \{\sum_i f_i(a_{i\_}\ ); a_i \in A, f_i \in Hom(A, R)\}$ e denotamos por $*^r$ o produto na álgebra $Hom^r(A, R)$ e por $*_l$ o produto em $Hom^l(A, R)$.

Inspirado na teoria clássica de álgebras de Hopf e no artigo [10], relacionamos a aplicação $S : A \longrightarrow M(A)$ como uma inversa convolutiva da seguinte forma.

Definição 2.3.2. Sejam $f, g \in Hom(A, M(A))$. Dizemos que f é uma *inversa convolutiva de* g, se para cada $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $S(b)a = a = aS(b)$ e os seguintes itens são satisfeitos:

(i) $f(\_b) *^r g(\_a) = u_a \circ \varepsilon$;

(ii) $g(a\_) *^l f(b\_) = u_a \circ \varepsilon$,

onde $u_a : \mathbb{k} \longrightarrow A$ tal que $u_a(1_{\mathbb{k}}) = a$.

Proposição 2.3.3. *Seja A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular. Se a aplicação linear $S \in Hom(A, A)$ é a antípoda da álgebra A, então S é uma inversa convolutiva da aplicação identidade de A, denotada por $\imath$.*

Demonstração. Dado $a \in A$, consideramos $b \in A$ tal que $S(b)a = a = aS(b)$, então

$$\begin{aligned}
(S(_b) *^r \imath(_a))(d) &= S(d_1b)\imath(d_2a) \\
&= S(b)S(d_1)d_2a \\
&= S(b)\varepsilon(d)1_{M(A)}a \\
&= \varepsilon(d)S(b)a \\
&= \varepsilon(d)a \\
&= (u_a \circ \varepsilon)(d)
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
(\imath(a_) *^l S(b_))(d) &= \imath(ad_1)S(bd_2) \\
&= ad_1S(d_2)S(b) \\
&= aS(b)\varepsilon(d) \\
&= a\varepsilon(d) \\
&= (u_a \circ \varepsilon)(d),
\end{aligned}$$

para todo $d \in A$. Portanto, S é uma inversa convolutiva da aplicação $\imath$. □

Reciprocamente, segue o seguinte resultado.

Proposição 2.3.4. *Sejam A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular, $S \in Hom(A, A)$ um anti-homomorfismo e uma inversa convolutiva da aplicação $\imath$ (identidade de A). Se para cada $a \in A$, a unidade local bilateral existente na Definição 2.3.2 é central em A, então S é a antípoda de A.*

Demonstração. Vamos mostrar que $m(S\otimes\imath)(\Delta(c)(1\otimes a)) = \varepsilon(c)a$, para todo $a, c \in A$. De fato, para cada $a \in A$, temos por hipótese $S(\_b) * \imath(\_a) = u_a \circ \varepsilon$, com $S(b)$ central em A, logo

$$\begin{aligned}
\varepsilon(c)a &= (u_a \circ \varepsilon)(c) \\
&= (S(_b) * \imath(_a))(c) \\
&= S(c_1 b)c_2 a \\
&= S(b)S(c_1)c_2 a \\
&= S(c_1)c_2 a S(b) \\
&= S(c_1)c_2 a \\
&= m(S\otimes\imath)(\Delta(c)(1\otimes a)),
\end{aligned}$$

para todo $c \in A$ e, analogamente, $m(\imath\otimes S)((a\otimes 1)\Delta(c)) = a\varepsilon(c)$, para todo $a, c \in A$. Portanto, a aplicação S é a antípoda da álgebra A. $\square$

Finalizando a seção, apresentamos um outro exemplo de módulo álgebra, não trivial e após mostramos que mesmo induzindo este exemplo a ação continua sendo global.

Exemplo 2.3.5. Sejam A_G a álgebra das funções com suporte finito de G em $\Bbbk$ definida no Exemplo 1.1.10 e $R = Hom^r(A_G, M(A_G))$. Então, R é um A_G-módulo álgebra dado por

$$\begin{aligned}
\triangleright : A_G \otimes R &\longrightarrow R \\
a \otimes f(_b) &\longmapsto a \triangleright f(_b) := f(_ab).
\end{aligned}$$

- Sejam $f(\_a) \in R$ e $e' \in A$ tal que $e'a = a$, logo $f(\_a) = f(\_e'a) = e' \triangleright f(\_a) \in A_G \triangleright R$, ou seja, $A_G \triangleright R = R$.

- Dados $a, b \in A_G$ e $f(\_c) \in R$, temos

$$a \triangleright (b \triangleright f(\_c)) = a \triangleright f(\_bc) = f(\_abc) = ab \triangleright f(\_c),$$

e, portanto, R é um A_G-módulo unitário.

• Consideramos $a \in A_G$, $f(\_b), g(\_c) \in R$, $e' \in A$ tal que $e'c = c$ e escrevemos $b \otimes c = \sum_i \Delta(p_i)(1 \otimes q_i)$, então

$$\begin{aligned}
(a \triangleright (f(_b)g(_c)))(d) &\overset{2.5}{=} (a \triangleright \mu_R(\sum_i (f \otimes g)(\Delta(_\, p_i)(1 \otimes q_i))))(d) \\
&= \mu_R(\sum_i (f \otimes g)(\Delta(_ap_i)(1 \otimes q_i)))(d) \\
&= \mu_R(\sum_i (f \otimes g)(\Delta(dap_i)(1 \otimes q_i))) \\
&= \mu_R((f \otimes g)(\Delta(da)(\sum_i \Delta(p_i)(1 \otimes q_i)))) \\
&= f(d_1 a_1 b) g(d_2 a_2 c) \\
&= (f(_a_1 b) *^r g(_a_2 c))(d) \\
&= (f(_a_1 b) *^r g(_a_2 e' c))(d) \\
&= ((a_1 \triangleright f(_b)) *^r (a_2 e' \triangleright g(_c)))(d) \\
&= ((a_1 \triangleright f(_b)) *^r (a_2 \triangleright e' \triangleright g(_c)))(d) \\
&= ((a_1 \triangleright f(_b)) * (a_2 \triangleright g(_c)))(d),
\end{aligned}$$

para todo $d \in A_G$. Assim, $a \triangleright (f(\_b)g(\_c)) = (a_1 \triangleright f(\_b)) * (a_2 \triangleright g(\_c))$, ou seja, R é um A_G-módulo álgebra.

Agora, definimos a aplicação

$$\begin{aligned}
\theta : A_G &\longrightarrow M(A_G) \\
\delta_p &\longmapsto \theta(\delta_p) : G \longrightarrow \Bbbk \\
&\qquad\qquad q \longmapsto \theta(\delta_p)(q) := \begin{cases} 0 & , p = q \\ 1 & , \text{caso contrário,} \end{cases}
\end{aligned}$$

então $\theta(\_\delta_e)$ é um idempotente central em $R = Hom^r(A_G, M(A_G))$, pois o produto é pontual. Logo, pela Proposição 2.1.7, $T = \theta(\_\delta_e)R$ é um A_G-módulo álgebra parcial, onde $e : A_G \longrightarrow M(R)$ tal que $e(a) = \theta(\_\delta_e)(a \triangleright \theta(\_\delta_e))$, para todo $a \in A_G$.

Mas, nesse caso, $e(a) = \varepsilon(a)\theta(\_\ \delta_e)$, para qualquer $a \in A_G$, ou seja, a ação induzida é global. De fato, sejam $a = \sum_r \alpha_r\delta_r \in A_G$, $\delta_p \in A_G$ e $q \in G$, então

$$\begin{aligned} e(a)(\delta_p)(q) &= (\theta(\_\delta_e)\theta(\_a\delta_e))(\delta_p)(q) \\ &= (\theta(\delta_p\delta_e))(q)(\theta(\delta_p a\delta_e))(q) \\ &= \begin{cases} 0 & , p \neq e \\ 0 & , p = e,\ \delta_e \notin a \\ 0 & , p = e,\ \delta_e \in a,\ q = e \\ \alpha_e & p = e,\ \delta_e \in a,\ q \neq e. \end{cases} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \varepsilon(a)\theta(\_\ \delta_e)(\delta_p)(q) &= \sum_r \delta_r(e)\theta(\delta_p\delta_e)(q) \\ &= \begin{cases} 0 & , p \neq e \\ 0 & , p = e,\ \delta_e \notin a \\ 0 & , p = e,\ \delta_e \in a,\ q = e \\ \alpha_e & p = e,\ \delta_e \in a,\ q \neq e, \end{cases} \end{aligned}$$

e, portanto, T continua sendo um A_G-módulo álgebra.

Capítulo 3

Coações Parciais da Álgebra de Hopf de Multiplicadores

Neste capítulo, introduzimos a noção de coação parcial de uma álgebra de Hopf de multiplicadores e, além disso mencionamos sob quais condições existe uma dualidade entre os conceitos de módulo parcial e comódulo parcial.

3.1 Coação Parcial da Álgebra de Hopf de Multiplicadores

Nesta seção, consideramos A uma álgebra de Hopf de multiplicadores e R uma álgebra com produto não degenerado. Para não sobrecarregar a notação, denotamos por $\imath$ a aplicação identidade de A e a aplicação identidade de R, ficando claro no texto a quem estamos nos referindo e, no que segue, as coações serão todas à direita. O conceito à esquerda é similar.

Inicialmente, mencionamos a definição de uma coação parcial, quando A e R possuem unidade.

Definição 3.1.1. [1] Uma álgebra R é um A-*comódulo álgebra parcial* se existe uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \rho : R &\longrightarrow R \otimes A \\ x &\longmapsto x^0 \otimes x^1 \end{aligned}$$

tal que para todo $x, y \in R$,

(i) $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$;

(ii) $(\imath \otimes \varepsilon)\rho(x) = x$;

(iii) $(\rho \otimes \imath)\rho(x) = (\rho(1_R) \otimes 1_A)(\imath \otimes \Delta)\rho(x)$.

A coação ρ é dita *simétrica* se também satisfizer $(\rho \otimes \imath)\rho(x) = (\imath \otimes \Delta)\rho(x)(\rho(1_R) \otimes 1_A)$, para todo $x \in R$.

Estendendo esse conceito, para o nosso contexto, temos a seguinte definição.

Definição 3.1.2. Dizemos que R é um A-**comódulo álgebra parcial** se existe um homomorfismo de álgebras injetor $\rho : R \longrightarrow M(R \otimes A)$ e um idempotente $E \in M(R \otimes A)$ tal que $(1 \otimes A)E$ e $E(1 \otimes A) \subseteq M(R) \otimes A$ satisfazendo

(i) $\rho(R)(1 \otimes A) \subseteq E(R \otimes A)$ e $(1 \otimes A)\rho(R) \subseteq (R \otimes A)E$;

(ii) $(\rho \otimes \imath)(\rho(x)) = (E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))$,

para todo $x \in R$., nesse caso ρ é chamada de uma coação parcial de A em R. Dizemos que a coação é **simétrica** se além dos itens acima ρ satisfizer

(iii) $(\rho \otimes \imath)(\rho(x)) = (\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(E \otimes 1)$, para todo $x \in R$.

Observação 3.1.3. Pelo fato de Δ ser um homomorfismo não degenerado, o lado direito das igualdades (ii) e (iii) fazem sentido, pois podemos pensar na extensão da aplicação $(\imath \otimes \Delta)$, o que não ocorre com o lado esquerdo. Logo utilizando o item (i), damos um sentido a esses itens, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(\rho\otimes\imath)(\rho(x)(1\otimes b)) &= (E\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(1\otimes 1\otimes b) && (3.1)\\
(\rho\otimes\imath)((1\otimes b)\rho(x)) &= (1\otimes 1\otimes b)(E\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x)) && (3.2)\\
(\rho\otimes\imath)(\rho(x)(1\otimes b)) &= (\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(E\otimes 1)(1\otimes 1\otimes b) && (3.3)\\
(\rho\otimes\imath)((1\otimes b)\rho(x)) &= (1\otimes 1\otimes b)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(E\otimes 1). && (3.4)
\end{aligned}$$

Observação 3.1.4. Todo comódulo álgebra é um comódulo álgebra parcial,considerando o idempotente $E = 1_{M(R)} \otimes 1_{M(A)}$.

Para verificarmos que as Definições 3.1.1 e 3.1.2 coincidem, no caso das álgebras A e R possuírem unidade, precisamos de alguns resultados adicionais.

Lema 3.1.5. *Seja (R, ρ, E) um comódulo álgebra parcial, então*

$$E\rho(x) = \rho(x) \quad e \quad \rho(x)E = \rho(x), \tag{3.5}$$

para todo $x \in R$.

Demonstração. Por hipótese, $\rho(R)(R\otimes A) = \rho(R)(1\otimes A)(R\otimes 1) \subseteq E(R\otimes A)$, logo

$$\begin{aligned}
\rho(x)(y\otimes a) &= E(\sum_i z_i\otimes b_i)\\
&\overset{(*)}{=} EE(\sum_i z_i\otimes b_i)\\
&= E\rho(x)(y\otimes a),
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in R$ e $a \in A$. Portanto, $\rho(x) = E\rho(x)$, para todo $x \in R$. De forma análoga, $(R\otimes A)\rho(R) \subseteq (R\otimes A)E$, assim

$$(y\otimes a)\rho(x) = (\sum_i z_i\otimes b_i)E$$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{(*)}{=} (\sum_i z_i \otimes b_i)EE \\
&= (y \otimes a)\rho(x)E,
\end{aligned}
$$

para todo $x, y \in R$ e $a \in A$, ou seja, $\rho(x) = \rho(x)E$. Nas igualdades $(*)$ acima, usamos a idempotência do elemento $E \in M(R \otimes A)$. $\square$

A seguir, usando o lema anterior, mostramos dois resultados fundamentais para o restante do trabalho.

Proposição 3.1.6. *Seja (R, ρ, E) um A-comódulo álgebra parcial. Então, R é um A-comódulo álgebra via ρ se, e somente se, $E = 1_{M(R)} \otimes 1_{M(A)}$.*

Demonstração. Por um lado, supomos R um A-comódulo álgebra, logo

$$
\begin{aligned}
R \otimes A = \rho(R)(1 \otimes A) \subseteq E(R \otimes A) \subseteq R \otimes A \\
R \otimes A = (1 \otimes A)\rho(R) \subseteq (R \otimes A)E \subseteq R \otimes A.
\end{aligned}
$$

Assim, para qualquer $x \in R$ e $a \in A$,

$$
\begin{aligned}
x \otimes a &= E(\sum_i y_i \otimes b_i) \\
&= EE(\sum_i y_i \otimes b_i) \\
&= E(x \otimes a).
\end{aligned}
$$

Similarmente, $x \otimes a = (x \otimes a)E$ e, portanto $E = 1_{M(R)} \otimes 1_{M(A)}$. Reciprocamente, se $E = 1_{M(R)} \otimes 1_{M(A)}$ temos naturalmente as hipóteses da Definição 1.3.15. $\square$

Proposição 3.1.7. *Se R é um A-comódulo álgebra parcial, então $(i \otimes \varepsilon)(\rho(x)) = x$, para todo $x \in R$.*

Demonstração. Consideramos $b \in A$ tal que $\varepsilon(b) = 1_{\Bbbk}$, logo

$$
\rho((\imath \otimes \varepsilon)(\rho(x)(1 \otimes b))) = \rho(\sum_i x_i \varepsilon(b_i))
$$

$$\begin{aligned}
&= (\imath \otimes \imath \otimes \varepsilon)(\sum_i \rho(x_i) \otimes b_i) \\
&= (\imath \otimes \imath \otimes \varepsilon)((\rho \otimes \imath)(\sum_i x_i \otimes b_i)) \\
&= (\imath \otimes \imath \otimes \varepsilon)((\rho \otimes \imath)(\rho(x)(1 \otimes b))) \\
&\overset{3.1}{=} (\imath \otimes \imath \otimes \varepsilon)((E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(1 \otimes 1 \otimes b)) \\
&= E\varepsilon(1_{M(A)})(\imath \otimes (\imath \otimes \varepsilon)\Delta)(\rho(x))\varepsilon(b) \\
&= E\rho(x)\varepsilon(b) \\
&\overset{3.5}{=} \rho(x),
\end{aligned}$$

para todo $x \in R$. Assim, pelo fato de ρ ser injetiva,

$$\begin{aligned}
x &= (\imath \otimes \varepsilon)(\rho(x)(1 \otimes b)) \\
&= ((\imath \otimes \varepsilon)\rho(x))\varepsilon(b) \\
&= (\imath \otimes \varepsilon)\rho(x).
\end{aligned}$$

ou seja, $(\imath \otimes \varepsilon)\rho(x) = x$, para todo $x \in R$. □

O Lema 3.1.5 também implica no seguinte resultado.

Proposição 3.1.8. *Seja R um A-comódulo álgebra parcial. Então,*

$$(\rho \otimes \imath)((y \otimes 1)\rho(x)(1 \otimes b)) = (\rho(y) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(1 \otimes 1 \otimes b),$$

para todo $b \in A$ e $x, y \in R$. Similarmente, se a coação parcial é simétrica, então

$$(\rho \otimes \imath)((1 \otimes b)\rho(x)(y \otimes 1)) = (1 \otimes 1 \otimes b)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(\rho(y) \otimes 1),$$

para todo $b \in A$ e $x, y \in R$.

Demonstração. Vamos verificar apenas a primeira igualdade pois a segunda segue de modo similar. Escrevendo $\rho(x)(1 \otimes b) = \sum_i x_i \otimes a_i$, temos

$$(\rho \otimes \imath)((y \otimes 1)\rho(x)(1 \otimes b)) = \sum_i \rho(yx_i) \otimes a_i$$

$$
\begin{aligned}
&= (\rho(y)\otimes 1)(\rho\otimes\imath)(\rho(x)(1\otimes b))\\
&= (\rho(y)\otimes 1)(E\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(1\otimes 1\otimes b)\\
&= (\rho(y)E\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(1\otimes 1\otimes b)\\
&\overset{3.5}{=} (\rho(y)\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(1\otimes 1\otimes b),
\end{aligned}
$$

para todo $b \in A$ e $x, y \in R$, ou seja, $(\rho\otimes\imath)((y\otimes 1)\rho(x)(1\otimes b)) = (\rho(y)\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(1\otimes 1\otimes b)$. □

Analogamente, ao caso global, podemos usar a notação Sigma (sem somatório) para coação parcial.

Observação 3.1.9. O item (i) da Definição 3.1.2 e as igualdades da Observação 3.1.3 podem ser reescritas da seguinte forma: Dados, $x \in R$ e $a, b \in A$,

(i) $\rho(x)(1\otimes a) = x^0\otimes x^1 a$ e $(1\otimes a)\rho(x) = x^0\otimes ax^1 \in R\otimes A$;

(ii) $x^{00}\otimes x^{01}a\otimes x^1 b = \sum_i E(x^0\otimes(x^1a_i)_1)\otimes(x^1a_i)_2 b_i$, onde $a\otimes b = \sum_i \Delta(a_i)(1\otimes b_i)$;

(iii) $x^{00}\otimes ax^{01}\otimes bx^1 = \sum_{i,j} m_i x^0\otimes(a_{ij}x^1)_1\otimes b_j(a_{ij}x^1)_2$, onde $(1\otimes a)E = \sum_i m_i\otimes a_i$ e para cada i, $a_i\otimes b = \sum_j (1\otimes b_j)\Delta(a_{ij})$;

(iv) $x^{00}\otimes x^{01}a\otimes x^1 b = \sum_{i,j} x^0 m_i\otimes(x^1a_{ij})_1\otimes(x^1a_{ij})_2 b_j$, onde $E(1\otimes a) = \sum_i m_i\otimes a_i$ e para cada i, $a_i\otimes b = \sum_j \Delta(a_{ij})(1\otimes b_j)$;

(v) $x^{00}\otimes ax^{01}\otimes bx^1 = \sum_i (x^0\otimes(a_ix^1)_1)E\otimes b_i(a_ix^1)_2$, onde $a\otimes b = \sum_i (1\otimes b_i)\Delta(a_i)$.

Vamos justificar o item (ii) pois o restante segue de maneira similar. Dados $x \in R$ e $a, b \in A$, temos

$$
\begin{aligned}
x^{00}\otimes x^{01}a\otimes x^1 b &= (\rho\otimes\imath)(x^0\otimes x^1 b)(1\otimes a\otimes 1)\\
&= (\rho\otimes\imath)(\rho(x)(1\otimes b))(1\otimes a\otimes 1)\\
&\overset{3.1.3}{=} (E\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(1\otimes a\otimes b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{1.4}{=} && (E\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(1\otimes\sum_i \Delta(a_i)(1\otimes b_i))\\
&= && (E\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x))\sum_i(\imath\otimes\Delta)(1\otimes a_i)(1\otimes 1\otimes b_i)\\
&\overset{1.3.12}{=} && \sum_i(E\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x)(1\otimes a_i))(1\otimes 1\otimes b_i)\\
&= && \sum_i(E\otimes 1)(x^0\otimes\Delta(x^1a_i)(1\otimes b_i))\\
&= && \sum_i E(x^0\otimes(x^1a_i)_1)\otimes(x^1a_i)_2b_i.
\end{aligned}
$$

Ao contrário da notação de Sweedler, na notação Sigma acima não estamos usando as unidades locais bilaterais da álgebra de Hopf de multiplicadores A, logo na escrita $x^0\otimes x^1a\in R\otimes A$, não podemos afirmar que $x^1\in A$ mas, somente todo termo $x^1a\in A$. O não uso das unidades locais, ficará mais claro na seção que trataremos de coações parciais reduzidas.

A partir de agora, consideramos A uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular, pois em muitos resultados precisamos fortemente o fato da aplicação S ser bijetiva.

Proposição 3.1.10. *Seja R um A-comódulo álgebra parcial, então $\rho(R)(1\otimes A)=E(R\otimes A)$.*

Demonstração. Precisamos somente verificar a inclusão $E(R\otimes A)\subseteq\rho(R)(1\otimes A)$. De fato, sejam $x\in R$ e $a,b\in A$, logo

$$
\begin{aligned}
&(1\otimes a)\rho(x^0)(1\otimes S(S^{-1}(b)x^1)) =\\
&\quad = \quad x^{00}\otimes ax^{01}S(S^{-1}(b)x^1)\\
&\quad = \quad (\imath\otimes m)(\imath\otimes\imath\otimes S)(x^{00}\otimes ax^{01}\otimes S^{-1}(b)x^1)\\
&\quad = \quad (\imath\otimes m)(\imath\otimes\imath\otimes S)((1\otimes a)\rho(x^0)\otimes S^{-1}(b)x^1)\\
&\quad = \quad (\imath\otimes m)(\imath\otimes\imath\otimes S)((1\otimes a\otimes 1)(\rho\otimes\imath)((1\otimes S^{-1}(b))\rho(x)))\\
&\quad \overset{3.1.3}{=} \quad (\imath\otimes m)(\imath\otimes\imath\otimes S)((1\otimes a\otimes S^{-1}(b))(E\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(x)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\imath\otimes m)(\imath\otimes\imath\otimes S)(((1\otimes a)E\otimes S^{-1}(b))(\imath\otimes\Delta)(\rho(x)))\\
&= (\imath\otimes m)(\imath\otimes\imath\otimes S)((\sum_i m_i\otimes a_i\otimes S^{-1}(b))(\imath\otimes\Delta)(\rho(x)))\\
&= (\imath\otimes m(\imath\otimes S))((\sum_i m_i\otimes(a_iS(S^{-1}(b)_1)\otimes 1)\Delta(S^{-1}(b)_2))(\imath\otimes\Delta)(\rho(x)))\\
&= (\imath\otimes m(\imath\otimes S))((\sum_i m_i\otimes a_iS(S^{-1}(b)_1)\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)((1\otimes S^{-1}(b)_2)\rho(x)))\\
&= (\imath\otimes m(\imath\otimes S)((\sum_i m_i\otimes a_iS(S^{-1}(b)_1)\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(x^0\otimes S^{-1}(b)_2x^1))\\
&= (\imath\otimes m(\imath\otimes S)(\sum_i m_ix^0\otimes(a_iS(S^{-1}(b)_1)\otimes 1)\Delta(S^{-1}(b)_2x^1))\\
&= \sum_i m_ix^0\otimes m(\imath\otimes S)((a_iS(S^{-1}(b)_1)\otimes 1)\Delta(S^{-1}(b)_2x^1))\\
&= \sum_i m_ix^0\otimes a_iS(S^{-1}(b)_1)\varepsilon(S^{-1}(b)_2x^1)\\
&\overset{(*)}{=} \sum_i m_ix^0\otimes a_iS(S^{-1}(b)_1)\varepsilon(S^{-1}(b)_2x^1)\varepsilon(d)\\
&= \sum_i m_i(\imath\otimes\varepsilon)((1\otimes S^{-1}(b)_2)\rho(x)(1\otimes d))\otimes a_iS(S^{-1}(b)_1)\\
&= \sum_i m_ix^0\varepsilon(S^{-1}(b)_2(x^1d))\otimes a_iS(S^{-1}(b)_1)\\
&= \sum_i m_ix^0\varepsilon(x^1d)\otimes a_iS(S^{-1}(b)_1)\varepsilon(S^{-1}(b)_2)\\
&= \sum_i m_ix^0\varepsilon(x^1d)\otimes a_iS(S^{-1}(b))\\
&= (\sum_i m_i\otimes a_i)((\imath\otimes\varepsilon)(\rho(x)(1\otimes d))\otimes b)\\
&= (1\otimes a)E((\imath\otimes\varepsilon)(\rho(x))\varepsilon(d)\otimes b)\\
&= (1\otimes a)E(x\otimes b),
\end{aligned}
$$

para todo $x\in R$, $a,b\in A$, onde na igualdade $(*)$ estamos considerando $d\in A$ tal que $\varepsilon(d)=1_{\Bbbk}$. Logo,

$$(1\otimes a)(\rho(x^0)(1\otimes S(S^{-1}(b)x^1)))=(1\otimes a)E(x\otimes b),$$

para todo $a\in A$. Portanto, $E(x\otimes b)=\rho(x^0)(1\otimes S(S^{-1}(b)x^1))$, para todo $x\in R$ e $b\in A$. □

Proposição 3.1.11. *Se A e R possuem unidade, então as duas definições de comódulo álgebra parcial coincidem.*

Demonstração. Se supomos a Definição 3.1.1, basta considerarmos $E = \rho(1_R)$ e observar que o item (ii) equivale a injetividade da coação ρ. Reciprocamente,

$$\begin{aligned}
\rho(1_R)(x \otimes a) &\overset{3.5}{=} \rho(1_R)E(x \otimes a) \\
&\overset{3.1.10}{=} \rho(1_R)\sum_i \rho(x_i)(1 \otimes a_i) \\
&= \sum_i \rho(1_R x_i)(1 \otimes a_i) \\
&= E(x \otimes a),
\end{aligned}$$

para todo $x \in R$ e $a \in A$, portanto $\rho(1_R) = E$, mostrando assim os itens da Definição 3.1.1. □

Proposição 3.1.12. *Sejam (R, ρ) um A-comódulo álgebra e S um ideal à direita de R com unidade 1_S. Então,*

$$\begin{aligned}
\beta : S &\longrightarrow M(S \otimes A) \\
s &\longmapsto \beta(s) := (1_S \otimes 1_{M(A)})\rho(s) = (1_S \otimes 1)\rho(s)
\end{aligned}$$

é uma coação parcial de A em S. Nesse caso, β é dita uma coação parcial induzida.

Demonstração. Inicialmente, verificamos a boa definição da aplicação β, logo

$$\begin{aligned}
\beta(s)(t \otimes a) &= (1_S \otimes 1)\rho(s)(t \otimes a) \\
&= (1_S \otimes 1)(\sum_i r_i \otimes a_i) \\
&= \sum_i 1_S r_i \otimes a_i \in S \otimes A,
\end{aligned}$$

para todo $s, t \in S$ e $a \in A$, ou seja, $\beta(s) \in M(S \otimes A)$, para todo $s \in S$. Agora, definimos $E = (1_S \otimes 1)\rho(1_S) \in M(S \otimes A)$ e mostramos as hipóteses de coação parcial.

• E é idempotente. De fato,

$$
\begin{aligned}
EE(s\otimes a) &= (1_S\otimes 1)\rho(1_S)(1_S\otimes 1)\rho(1_S)(s\otimes a)\\
&= (1_S\otimes 1)\rho(1_S)(1_S\otimes 1)(\sum_i r_i\otimes a_i)\\
&= (1_S\otimes 1)\sum_i \rho(1_S)(1_S r_i\otimes a_i)\\
&= (1_S\otimes 1)\sum_i \rho(1_S)(1\otimes a_i)(1_S r_i\otimes 1)\\
&= (1_S\otimes 1)\sum_i\sum_j (t_{ij}\otimes c_{ij})(1_S r_i\otimes 1)\\
&= \sum_i\sum_j (1_S t_{ij} 1_S r_i\otimes c_{ij})\\
&= \sum_i\sum_j (1_S t_{ij} r_i\otimes c_{ij})\\
&= (1_S\otimes 1)\sum_i\sum_j (t_{ij}\otimes c_{ij})(r_i\otimes 1)\\
&= (1_S\otimes 1)\sum_i \rho(1_S)(1\otimes a_i)(r_i\otimes 1)\\
&= (1_S\otimes 1)\sum_i \rho(1_S)(r_i\otimes a_i)\\
&= (1_S\otimes 1)\rho(1_S)\rho(1_S)(s\otimes a)\\
&= (1_S\otimes 1)\rho(1_S)(s\otimes a)\\
&= E(s\otimes a),
\end{aligned}
$$

para todo $s\in S$ e $a\in A$, então $E^2=E$.

• $(1\otimes A)E=(1\otimes A)(1_S\otimes 1)\rho(1_S)=(1_S\otimes 1)(1\otimes A)\rho(1_S)\in S\otimes A$. Analogamente, $E(1\otimes A)\in S\otimes A$.

• $\beta(S)(1\otimes A)\subseteq E(S\otimes A)$ e $(1\otimes A)\beta(S)\subseteq (S\otimes A)E$. Mostramos apenas a primeira inclusão, pois a segunda segue de modo similar. De fato,

$$
\begin{aligned}
\beta(S)(1\otimes A) &= (1_S\otimes 1)\rho(S)(1\otimes A)\\
&= (1_S\otimes 1)\rho(1_S)\rho(S)(1\otimes A)\\
&= E\rho(S)(1\otimes A)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= EE\rho(S)(1 \otimes A) \\
&= E(1_S \otimes 1)\rho(1_S)\rho(S)(1 \otimes A) \\
&= E(1_S \otimes 1)\rho(S)(1 \otimes A) \\
&= E(1_S \otimes 1)(R \otimes A) \\
&= E(1_S R \otimes A) \in E(S \otimes A).
\end{aligned}
$$

- A aplicação β é um homomorfismo. Sejam $s, s' \in S$,

$$
\begin{aligned}
\beta(s)\beta(s')(t \otimes a) &= (1_S \otimes 1)\rho(s)(1_S \otimes 1)\rho(s')(t \otimes a) \\
&= (1_S \otimes 1)\rho(s)(1_S \otimes 1)(\sum_i t_i \otimes a_i) \\
&= (1_S \otimes 1)\sum_i \rho(s)(1 \otimes a_i)(1_S t_i \otimes 1) \\
&= \sum_i \sum_j (1_S s_{ij} 1_S t_i \otimes a_{ij}) \\
&= \sum_i \sum_j (1_S s_{ij} t_i \otimes a_{ij}) \\
&= (1_S \otimes 1)\sum_i \rho(s)(1 \otimes a_i)(t_i \otimes 1) \\
&= (1_S \otimes 1)\rho(ss')(t \otimes a) \\
&= \beta(ss')(t \otimes a),
\end{aligned}
$$

para todo $t \in S$ e $a \in A$. Portanto, $\beta(s)\beta(s') = \beta(ss')$, para todo $s, s' \in S$.

- β é injetiva. Seja $s \in S$ tal que $\beta(s) = 0$, então

$$
\begin{aligned}
s &= 1_S s \\
&\overset{3.1.7}{=} 1_S(\imath \otimes \varepsilon)(\rho(s)) \\
&= (\imath \otimes \varepsilon)((1_S \otimes 1)\rho(s)) \\
&= (\imath \otimes \varepsilon)(\beta(s)) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

ou seja, $s = 0$.

- Finalmente, vamos verificar o item (ii) da Definição 3.1.2. Assim,

$$
\begin{aligned}
&(\beta \otimes \imath)(\beta(s)(1_S \otimes b))(1_S \otimes a \otimes 1) = \\
&\quad = (\beta \otimes \imath)((1_S \otimes 1)\rho(s)(1_S \otimes b))(1_S \otimes a \otimes 1) \\
&\quad = (\beta \otimes \imath)((1_S \otimes 1)\rho(s)(1_{M(R)} \otimes b)(1_S \otimes 1))(1_S \otimes a \otimes 1) \\
&\quad = \sum_i (\beta \otimes \imath)(1_S s_i 1_S \otimes b_i)(1_S \otimes a \otimes 1) \\
&\quad = (\sum_i \beta(1_S s_i) \otimes b_i)(1_S \otimes a \otimes 1) \\
&\quad = ((1_S \otimes 1)\rho(1_S) \sum_i \rho(s_i) \otimes b_i)(1_S \otimes a \otimes 1) \\
&\quad = (E \otimes 1)(\rho \otimes \imath)(\rho(s)(1_{M(R)} \otimes b))(1_S \otimes a \otimes 1) \\
&\quad \overset{3.1.1}{=} (E \otimes 1)(E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(s))(1_{M(R)} \otimes 1 \otimes b)(1_S \otimes a \otimes 1) \\
&\quad = (E^2 \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(s))(1_S \otimes a \otimes b) \\
&\quad = (E \otimes 1)(1_S \otimes 1 \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(s))(1_S \otimes a \otimes b) \\
&\quad = (E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(1_S \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(s))(1_S \otimes a \otimes b) \\
&\quad = (E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)((1_S \otimes 1)\rho(s))(1_S \otimes a \otimes b) \\
&\quad = (E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\beta(s))(1_S \otimes a \otimes b),
\end{aligned}
$$

para todo $s \in S$ e $a, b \in A$. Então, $(\beta \otimes \imath)(\beta(s)(1_S \otimes b)) = (E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\beta(s))(1_S \otimes 1 \otimes b)$, para todo $s \in S$ e $b \in A$, concluindo a parcialidade da coação ρ. $\square$

Observação 3.1.13. Utilizando ideias semelhantes as da demonstração acima verificamos que a coação parcial induzida é simétrica.

Exemplo 3.1.14. Seja A_G o A_G-comódulo álgebra via Δ, dado no Exemplo 1.3.17, onde A_G é a álgebra das funções com suporte finito de G em $\Bbbk$. Assim, considerando N um subgrupo finito de G, $f_N = \sum_{n \in N} \delta_n$ um idempotente central em A_G e $S = f_N A_G$, pela proposição acima, S é um A_G-módulo álgebra parcial simétrico via

$$\beta : S \longrightarrow M(S \otimes A)$$

$$f_N\delta_p \longmapsto (f_N \otimes 1)\Delta(f_N\delta_p),$$

onde $E = (f_N \otimes 1)\Delta(f_N)$. Verificamos que a coação parcial β não é global, ou seja, $E \neq 1_S \otimes 1 = (f_N \otimes 1)$. De fato,

$$\begin{aligned} E &= (f_N \otimes 1)\Delta(f_N) \\ &= (\sum_{m\in N} \delta_m \otimes 1)(\Delta(\sum_{n\in N} \delta_n)) \\ &= \sum_{m,n\in N} (\delta_m \otimes 1)\Delta(\delta_n), \end{aligned}$$

logo, dados $h \in N$ e $p \in G$

$$\begin{aligned} E(h \otimes p) &= \sum_{m,n\in N} ((\delta_m \otimes 1)\Delta(\delta_n))(h \otimes p) \\ &= \sum_{m,n\in N} \delta_m(h)\delta_n(hp) \\ &\overset{p\notin N}{=} 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $p \notin N$, $(\sum_{n\in N} \delta_n \otimes 1)(h \otimes p) = \sum_{n\in N} \delta_n(h) = 1$, ou seja, $E \neq (f_N \otimes 1)$, e dessa forma, pela Proposição 3.1.6, β não é uma coação global.

Proposição 3.1.15. *Seja $\rho : R \longmapsto M(R \otimes A)$ uma aplicação linear definida por $\rho(x) = x \otimes m$, onde $m \in M(A)$, $m \neq 0$. Então, ρ é uma coação parcial de A em R se, e somente se, m satisfaz:*

(i) $m^2 = m$;

(ii) $m \otimes m = (m \otimes 1)\Delta(m)$.

Demonstração. Sejam ρ uma coação parcial e $x, y \in R$ tal que $xy \neq 0$ (esses elementos existem, pois R possui produto não degenerado), logo

$$\begin{aligned} xy \otimes m &= \rho(xy) \\ &= \rho(x)\rho(y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x \otimes m)(y \otimes m) \\
&= xy \otimes m^2,
\end{aligned}
$$

ou seja, $m = m^2$. Agora, para verificarmos o segundo item, precisamos primeiro mostrar que $E = 1 \otimes m$. De fato, pelo Lema 3.1.5, temos

$$
(x \otimes m) = \rho(x) = \rho(x)E = (x \otimes m)E,
$$

para qualquer $x \in R$, logo $(1 \otimes m) = (1 \otimes m)E$. Assim,

$$
\begin{aligned}
(1 \otimes m)(x \otimes a) &= (1 \otimes m)E(x \otimes a) \\
&\overset{3.1.10}{=} (1 \otimes m)\rho(x^0)(1 \otimes S(S^{-1}(a)x^1)) \\
&\overset{(*)}{=} (1 \otimes m)(x \otimes mS(m)a) \\
&= x \otimes m^2 S(m)a \\
&= x \otimes mS(m)a \\
&= E(x \otimes a),
\end{aligned}
$$

para todo $x \in R$ e $a \in A$, ou seja, $E = 1 \otimes m$. Note que, na igualdade $(*)$, estamos usando que $\rho(x) = x \otimes m$, para todo $x \in R$.

Logo, pela coassociatividade da coação parcial ρ, $(\rho \otimes \imath)(\rho(x)) = (E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))$, ou seja, $x \otimes m \otimes m = x \otimes (m \otimes 1)\Delta(m)$, para todo $x \in R$ e, portanto $m \otimes m = (m \otimes 1)\Delta(m)$. Reciprocamente, supomos os itens (i) e (ii) da proposição acima e definimos $E = 1 \otimes m$, logo R é um A-comódulo álgebra parcial via a aplicação $\rho : R \longrightarrow M(R \otimes A)$ tal que $\rho(x) = x \otimes m$. De fato,

- ρ é homomorfismo.

$$
\begin{aligned}
\rho(xy) &= xy \otimes m \\
&\overset{(i)}{=} xy \otimes m^2 \\
&= (x \otimes m)(y \otimes m)
\end{aligned}
$$

$$= \rho(x)\rho(y),$$

então, $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$, para todo $x, y \in R$.

• Consideramos $x \in R$ tal que $\rho(x) = 0$, ou seja, $0 = x \otimes m$ onde $m \neq 0$, portanto $x = 0$, mostrando a injetividade da aplicação ρ.

• $\rho(R)(1 \otimes A) = (R \otimes m)(1 \otimes A) = (1 \otimes m)(R \otimes A) = E(R \otimes A)$

$(1 \otimes A)\rho(R) = (1 \otimes A)(R \otimes m) = (R \otimes A)(1 \otimes m) = (R \otimes A)E.$

• Finalizando,

$$\begin{aligned}
(\rho \otimes \imath)(\rho(x)) &= x \otimes m \otimes m \\
&\overset{(ii)}{=} x \otimes (m \otimes 1)\Delta(m) \\
&= (1 \otimes m \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(x \otimes m) \\
&= (E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x)),
\end{aligned}$$

para todo $x \in R$. Portanto, ρ é uma coação parcial de A em R. $\square$

A proposição acima, generaliza o resultado apresentado em [5].

Observação 3.1.16. Nas hipóteses da proposição acima, ρ é simétrica se, e somente se, $m \otimes m = \Delta(m)(m \otimes 1)$.

Observação 3.1.17. Se $m \in M(A)$ tal que $m \otimes m = (m \otimes 1)\Delta(m)$ então, $m^2 = m$ se, e somente se, $\epsilon(m) = 1_{\Bbbk}$.

Exemplo 3.1.18. Consideramos A_G a álgebra das funções com suporte finito de um grupo G em $\Bbbk$, definida no Exemplo 1.1.10 e R uma álgebra qualquer com produto não degenerado. A aplicação $\rho : R \longrightarrow M(R \otimes A)$ definida por $\rho(x) = x \otimes m$, com $m \in M(A_G)$ é uma coação parcial simétrica se, e somente se,

$$m : G \longrightarrow \Bbbk$$

$$g \longmapsto \begin{cases} 1 & , g \in N, \\ 0 & , \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde N é um subgrupo qualquer de G.

Exemplo 3.1.19. Nas mesmas condições acima, R é um A_G-comódulo álgebra parcial simétrico via

$$\begin{aligned} \rho : R &\longrightarrow R \otimes A_G \\ x &\longmapsto x \otimes \delta_e, \end{aligned}$$

onde e é o elemento neutro do grupo G.

Exemplo 3.1.20. Seja A a álgebra de Hopf de multiplicadores definida no Exemplo 1.1.11 e R uma álgebra com produto não degenerado. Note que $e_0 \in A$ satisfaz os itens (i) e (ii) da Proposição 3.1.15, pois claramente $e_0 e_0 = e_0$ e

$$\begin{aligned} (e_0 \otimes 1)\Delta(e_0) &= (e_0 \otimes 1)(\sum_{r \in \mathbb{Z}} e_r \otimes e_{0-r}) \\ &= (\sum_{r \in \mathbb{Z}} e_0 e_r \otimes e_{-r}) \\ &\overset{r=0}{=} e_0 \otimes e_0, \end{aligned}$$

e $\Delta(e_0)(e_0 \otimes 1) = (e_0 \otimes e_0)$. Portanto, R é um A-comódulo álgebra parcial simétrico se consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} \rho : R &\longrightarrow R \otimes A \\ x &\longmapsto x \otimes e_0 \end{aligned}$$

3.2 Extensão de uma Coação Parcial

Seguindo as mesmas ideias usadas no caso de ação parcial, nosso objetivo nesta seção será estender uma coação parcial de A em R para uma aplicação

$\rho : M(R) \longrightarrow M(R \otimes A)$. Para tanto, A será uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular, R continuará sendo uma álgebra com produto não degenerado e $\imath$ a aplicação identidade de A e de R.

A ideia da extensão foi baseada no seguinte Teorema:

Teorema 3.2.1 ([18]). *Sejam A e B álgebras com produto não degenerado e $\gamma : A \longrightarrow M(B)$ um homomorfismo. Se existe um elemento idempotente $f \in M(B)$ tal que*

$$\gamma(A)B = fB \quad e \quad B\gamma(A) = Bf,$$

então existe um único homomorfismo $\gamma : M(A) \longrightarrow M(B)$ estendendo γ tal que $\gamma(1) = f$.

Considerando (R, ρ, E) um A-comódulo álgebra parcial, a aplicação ρ é um homomorfismo por hipótese e o elemento $E \in M(R \otimes A)$ um idempotente. Também, pela Proposição 3.1.10, $\rho(R)(1 \otimes A) = E(R \otimes A)$, mas além disso, precisamos da igualdade $(1 \otimes A)\rho(R) = (R \otimes A)E$.

Nessas condições, para o que segue vamos considerar a hipótese de simetria na coação parcial, com isso obtemos o próximo resultado.

Proposição 3.2.2. *Seja R um A-comódulo álgebra parcial simétrico. Então,*

$$(1 \otimes A)\rho(R) = (R \otimes A)E.$$

Demonstração. Inicialmente, dados $x \in R$ e $a \in A$, temos

$$x^{00} \otimes S(x^{01}b)x^1 S(a) = (1 \otimes S(b))(\imath \otimes S)((x \otimes a)E),$$

para todo $b \in A$. De fato,

$$x^{00} \otimes S(x^{01}b)x^1 S(a) =$$

$$
\begin{aligned}
&= (\imath\otimes m(S\otimes\imath))(x^{00}\otimes x^{01}b\otimes x^1S(a))\\
&= (\imath\otimes m(S\otimes\imath))(\rho(x^0)(1\otimes b)\otimes x^1S(a))\\
&= (\imath\otimes m(S\otimes\imath))((\rho\otimes\imath)(\rho(x)(1\otimes S(a)))(1\otimes b\otimes 1))\\
&\overset{3.3}{=} (\imath\otimes m(S\otimes\imath))((\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(E\otimes 1)(1\otimes b\otimes S(a)))\\
&= (\imath\otimes m(S\otimes\imath))((\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(E(1\otimes b)\otimes S(a)))\\
&= (\imath\otimes m(S\otimes\imath))((\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(\sum_i m_i\otimes b_i\otimes S(a)))\\
&\overset{1.4}{=} (\imath\otimes m(S\otimes\imath))((\imath\otimes\Delta)(\rho(x))(\sum_i m_i\otimes\Delta((b_i)_1)(1\otimes S((b_i)_2)S(a))))\\
&\overset{1.1.3}{=} \sum_i(\imath\otimes m(S\otimes\imath))((\imath\otimes\Delta)(\rho(x)(1\otimes(b_i)_1))(m_i\otimes 1\otimes S((b_i)_2)S(a)))\\
&= \sum_i x^0m_i\otimes m(S\otimes\imath)(\Delta(x^1(b_i)_1)(1\otimes S((b_i)_2)S(a)))\\
&\overset{1.1.7}{=} \sum_i x^0m_i\otimes\varepsilon(x^1(b_i)_1)S((b_i)_2)S(a)\\
&= \sum_i(\imath\otimes\varepsilon)(\rho(x)(1\otimes(b_i)_1))m_i\otimes S((b_i)_2)S(a)\\
&\overset{3.1.7}{=} \sum_i xm_i\otimes\varepsilon((b_i)_1)S((b_i)_2)S(a)\\
&= \sum_i xm_i\otimes S(b_i)S(a)\\
&= (\imath\otimes S)((x\otimes 1)(\sum_i m_i\otimes b_i))(1\otimes S(a))\\
&= (\imath\otimes S)((x\otimes a)E(1\otimes b)).
\end{aligned}
$$

Aplicando $\imath\otimes S^{-1}$ na igualdade acima, temos

$$x^{00}\otimes S^{-1}(x^1S(a))x^{01}b = (x\otimes a)E(1\otimes b),$$

logo $(1\otimes S^{-1}(x^1S(a)))\rho(x^0)(1\otimes b) = (x\otimes a)E(1\otimes b)$, para todo $b\in A$. Portanto,

$$(1\otimes S^{-1}(x^1S(a)))\rho(x^0) = (x\otimes a)E,$$

assim $(R\otimes A)E\subseteq(1\otimes A)\rho(R)$, ou seja, $(R\otimes A)E = (1\otimes A)\rho(R)$. □

Note que tomando $B = R\otimes A$ estamos praticamente nas hipóteses do Teorema

3.2.1, faltando apenas a idempotência da álgebra R. Apesar dessa hipótese ser necessária no próximo capítulo, conseguimos o resultado abaixo apenas supondo a simetria da coação parcial.

Proposição 3.2.3. *Se (R, ρ, E) é um A-comódulo álgebra parcial simétrico então existe um único homomorfismo $\rho : M(R) \longrightarrow M(R \otimes A)$ tal que $\rho(1_{M(R)}) = E$.*

Demonstração. Usando as Proposições 3.1.10 e 3.2.2 temos $E(R \otimes A) = \rho(R)(1 \otimes A)$ e $(R \otimes A)E = (1 \otimes A)\rho(R)$. Logo podemos definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \rho : M(R) &\longrightarrow M(R \otimes A) \\ m &\longmapsto \rho(m) = (\overline{\rho(m)}, \overline{\overline{\rho(m)}}), \end{aligned}$$

tal que $\overline{\rho(m)}(x \otimes a) = \sum_i \rho(my_i)(1 \otimes b_i)$, onde $E(x \otimes a) = \sum_i \rho(y_i)(1 \otimes b_i)$ e $\overline{\overline{\rho(m)}}(x \otimes a) = \sum_j (1 \otimes c_j)\rho(z_j m)$, onde $(x \otimes a)E = \sum_j (1 \otimes c_j)\rho(z_j)$, para todo $x \in R$ e $a \in A$.

Iniciamos verificando a boa definição de multiplicadores $\overline{\rho(m)}$ e $\overline{\overline{\rho(m)}}$. De fato, supomos $\sum_k x_k \otimes a_k = 0$, assim $E(\sum_k x_k \otimes a_k) = \sum_i \rho(x'_i)(1 \otimes a'_i) = 0$, logo

$$\begin{aligned} (z \otimes b)\overline{\rho(m)}(\sum_k x_k \otimes a_k) &= (z \otimes b)\sum_i \rho(mx'_i)(1 \otimes a'_i) \\ &\overset{3.5}{=} (z \otimes b)\sum_i E\rho(mx'_i)(1 \otimes a'_i) \\ &= (z \otimes b)E\sum_i \rho(mx'_i)(1 \otimes a'_i) \\ &\overset{3.2.2}{=} \sum_{j,i}(1 \otimes b_j)\rho(z_j)\rho(mx'_i)(1 \otimes a'_i) \\ &= \sum_{j,i}(1 \otimes b_j)\rho(z_j m x'_i)(1 \otimes a'_i) \\ &= \sum_j (1 \otimes b_j)\rho(z_j m)\sum_i \rho(x'_i)(1 \otimes a'_i) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in R$ e $b \in A$ e, portanto, $\sum_i \rho(mx'_i)(1 \otimes a'_i) = 0$. De forma análoga mostramos a boa definição da aplicação $\overline{\overline{\rho(m)}}$.

Num segundo momento, mostramos que $\rho(m) \in M(R \otimes A)$. Para isso, escrevemos $E(x \otimes a) = \sum_i \rho(x_i)(1 \otimes a_i)$ e $(y \otimes b)E = \sum_j (1 \otimes b_j)\rho(y_j)$, para todo $x, y \in R$ e $a, b \in A$. Então,

$$\begin{aligned}
(y \otimes b)(\rho(m)(x \otimes a)) &= (y \otimes b)(\sum_i \rho(mx_i)(1 \otimes a_i)) \\
&\overset{3.5}{=} (y \otimes b)(\sum_i E\rho(mx_i)(1 \otimes a_i)) \\
&= (y \otimes b)E(\sum_i \rho(mx_i)(1 \otimes a_i)) \\
&= (\sum_j (1 \otimes b_j)\rho(y_j))(\sum_i \rho(mx_i)(1 \otimes a_i))) \\
&= \sum_{i,j} (1 \otimes b_j)\rho(y_j(mx_i))(1 \otimes a_i) \\
&= \sum_{i,j} (1 \otimes b_j)\rho((y_j m)x_i)(1 \otimes a_i) \\
&= (\sum_j (1 \otimes b_j)\rho(y_j m))(\sum_i \rho(x_i)(1 \otimes a_i)) \\
&= (\sum_j (1 \otimes b_j)\rho(y_j m))E(x \otimes a) \\
&= (\sum_j (1 \otimes b_j)\rho(y_j m)E)(x \otimes a) \\
&\overset{3.5}{=} (\sum_j (1 \otimes b_j)\rho(y_j m))(x \otimes a) \\
&= ((y \otimes b)\rho(m))(x \otimes a).
\end{aligned}$$

Portanto, a aplicação $\rho : M(R) \longrightarrow M(R \otimes A)$ está bem definida e trivialmente estende a coação parcial $\rho : R \longrightarrow M(R \otimes A)$. A seguir, mostramos que a extensão ρ também é um homomorfismo. De fato,

$$\begin{aligned}
(\rho(m)\rho(n))(x \otimes a) &= \rho(m)(\rho(n)(x \otimes a)) \\
&= \rho(m)(\sum_i \rho(nx_i)(1 \otimes a_i)) \\
&= \sum_i \rho(m(nx_i))(1 \otimes a_i) \\
&= \sum_i \rho((mn)x_i)(1 \otimes a_i)
\end{aligned}$$

$$= \quad \rho(mn)(x \otimes a),$$

onde $E(x \otimes a) = \sum_i \rho(x_i)(1 \otimes a_i)$, para todo $x \in R$ e $a \in A$, concluindo que $\rho(mn) = \rho(m)\rho(n)$, para todo $m, n \in M(R)$. Note que,

$$\rho(1_{M(R)})(x \otimes a) = \sum_i \rho(x_i)(1 \otimes a_i) = E(x \otimes a),$$

para todo $x \in R$ e $a \in A$, ou seja, $E = \rho(1_{M(R)})$.

Finalizando, supomos que exista uma outra aplicação $\rho' : M(R) \longrightarrow M(R \otimes A)$ que estende a coação parcial ρ tal que $E = \rho'(1_{M(R)})$, logo

$$\begin{aligned}
\rho(m)(x \otimes a) &= \sum_i \rho(mx_i)(1 \otimes a_i) \\
&= \sum_i \rho'(mx_i)(1 \otimes a_i) \\
&= \rho'(m) \sum_i \rho(x_i)(1 \otimes a_i) \\
&= \rho'(m) E(x \otimes a) \\
&= \rho'(m)\rho'(1_{M(R)})(x \otimes a) \\
&= \rho'(m)(x \otimes a),
\end{aligned}$$

para qualquer $x \in R$ e $a \in A$, onde $E(x \otimes a) = \sum_i \rho(x_i)(1 \otimes a_i)$. Portanto, $\rho(m) = \rho'(m)$, para todo $m \in M(R)$, concluindo a unicidade da extensão. □

Corolário 3.2.4. *Nas condições anteriores, a aplicação $\rho : M(R) \longrightarrow M(R \otimes A)$ é injetiva.*

Demonstração. Seja $m \in M(R)$ tal que $\rho(m) = 0$, logo para qualquer $x \in R$,

$$0 = \rho(m) = \rho(m)\rho(x) = \rho(mx).$$

Mas, a aplicação $\rho : R \longrightarrow M(R \otimes A)$ é injetiva por hipótese e $mx \in R$, então $mx = 0$, para todo $x \in R$, assim $m = 0$. □

Outra consequência importante da extensão de uma coação parcial é a noção de elemento coinvariante.

Definição 3.2.5. Seja R um A-comódulo álgebra parcial simétrico. Definimos o conjunto dos **coinvariantes** de uma coação parcial da seguinte forma

$$R^{\underline{coA}} = \{m \in M(R); \rho(m) = (m \otimes 1)E \ e \ \rho(m) = E(m \otimes 1)\}. \tag{3.6}$$

Observação 3.2.6. $R^{\underline{coA}}$ é uma subálgebra de $M(R)$ e $1_{M(R)} \in R^{\underline{coA}}$. De fato, sejam $m, n \in R^{\underline{coA}}$

$$\begin{aligned} \rho(mn) &= \rho(m)\rho(n) \\ &= (m \otimes 1)E\rho(n) \\ &\overset{3.2.3}{=} (m \otimes 1)\rho(1_{M(R)})\rho(n) \\ &= (m \otimes 1)\rho(n) \\ &= (m \otimes 1)(n \otimes 1)E \\ &= (mn \otimes 1)E. \end{aligned}$$

Analogamente, $\rho(mn) = E(mn \otimes 1)$, para todo $m, n \in R^{\underline{coA}}$. E, $(1_{M(R)} \otimes 1)E = E(1_{M(R)} \otimes 1) = E = \rho(1_{M(R)})$, ou seja, $\rho(1_{M(R)}) \in R^{\underline{coA}}$.

3.3 Dualização

Nesta seção, estabelecemos a dualidade entre ações parciais e coações parciais para um grupo quântico algébrico. Com essa finalidade, para o que segue, A é um grupo quântico algébrico, R continuará sendo uma álgebra com produto não degenerado e, fixamos φ uma integral à esquerda em A e ψ uma integral à direita em A. Denotamos por $\imath$ a aplicação identidade de A e a aplicação identidade de R.

Nessas condições $\hat{A} = \{\varphi(\_a); a \in A\}$ é a álgebra de Hopf de multiplicadores dual de A, construída na Seção 1.2.

Proposição 3.3.1. *Se (R, ρ, E) é um A-comódulo álgebra parcial (à direita), então R é um $\widehat{A}$-módulo álgebra parcial (à esquerda) dado por*

$$\begin{aligned} \cdot : \widehat{A} \otimes R &\longrightarrow R \\ \varphi(\_a) \otimes x &\longmapsto \varphi(\_a) \cdot x := (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes a)) \end{aligned}$$

Demonstração. Note que, usando a notação Sigma, $\varphi(\_a) \cdot x = (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes a)) = x^0 \varphi(x^1 a)$, para todo $x \in R$ e $a \in A$, onde $x^1 a \in A$.

(i) Sejam $w = \varphi(\_a), u = \varphi(\_b) \in \widehat{A}$ e $x, y \in R$. Por um lado,

$$\begin{aligned} w \cdot (x(u \cdot y)) &= w \cdot (xy^0)\varphi(y^1 b) \\ &= (xy^0)^0 \varphi((xy^0)^1 a)\varphi(y^1 b) \\ &= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((xy^0)^0 \otimes (xy^0)^1 a \otimes y^1 b) \\ &= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho \otimes \imath)(xy^0 \otimes y^1 b)(1 \otimes a \otimes 1)) \\ &= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho \otimes \imath)((x \otimes 1)\rho(y)(1 \otimes b))(1 \otimes a \otimes 1)) \\ &= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho(x) \otimes 1)(\rho \otimes \imath)(\rho(y)(1 \otimes b))(1 \otimes a \otimes 1)) \\ &\overset{3.1}{=} (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho(x) \otimes 1)(E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y))(1 \otimes a \otimes b)) \\ &= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho(x)E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y))(1 \otimes a \otimes b)) \\ &\overset{3.5}{=} (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho(x) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y))(1 \otimes a \otimes b)). \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Observação 1.10, $\Delta(w)(1 \otimes u) = \varphi(\_\, S^{-1}(b_1)a) \otimes \varphi(\_\, b_2)$, logo

$$\begin{aligned} (w_1 \cdot x)(w_2 u \cdot y) &= (\varphi(\_\, S^{-1}(b_1)a) \cdot x)(\varphi(\_\, b_2) \cdot y) \\ &= x^0 y^0 \varphi(x^1 S^{-1}(b_1)a)\varphi(y^1 b_2) \\ &= (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes S^{-1}(b_1)a)(y^0 \otimes 1))\varphi(y^1 b_2) \\ &= (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(y^0 \otimes \varphi(y^1 b_2)S^{-1}(b_1)a)) \\ &\overset{1.2.1}{=} (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(y^0 \otimes (y^1 b_2)_1 S^{-1}(b_1)a))\varphi((y^1 b_2)_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho(x) \otimes 1)(y^0 \otimes (y^1 b_2)_1 S^{-1}(b_1) a \otimes (y^1 b_2)_2)) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho(x) \otimes 1)(y^0 \otimes \Delta(y^1 b_2)(S^{-1}(b_1) a \otimes 1))) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho(x) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(y^0 \otimes y^1 b_2)(1 \otimes S^{-1}(b_1) a \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho(x) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y)(1 \otimes b_2))(1 \otimes S^{-1}(b_1) a \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho(x) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y))(1 \otimes \Delta(b_2))(1 \otimes S^{-1}(b_1) a \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho(x) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y))(1 \otimes \Delta(b_2)(S^{-1}(b_1) a \otimes 1))) \\
&\overset{1.4}{=} (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho(x) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y))(1 \otimes a \otimes b)),
\end{aligned}
$$

portanto $w \cdot (x(u \cdot y)) = (w_1 \cdot x)(w_2 u \cdot y)$.

(ii) Definimos $e(w) \in M(R)$ da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
e(w)x &= (\imath \otimes \varphi)(E(x \otimes a)), \text{onde } w = \varphi(\_\, a) \\
xe(w) &= (\imath \otimes \varphi)((x \otimes b)E), \text{onde } w = \varphi(b\, \_).
\end{aligned}
$$

Note que, poderíamos ter definido $e(w)x = (\imath \otimes \varphi)((1 \otimes b)E(x \otimes 1))$, se $w = \varphi(b\, \_) = \varphi(\_ a)$. De fato, considerando $f \in A$ tal que $fa = a = af$ e $fc_i = c_i = c_i f$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, onde $(1 \otimes b)E = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes c_i \in M(R) \otimes A$, temos

$$
\begin{aligned}
e(w)x &= (\imath \otimes \varphi)(E(x \otimes a)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(E(1 \otimes f)(x \otimes a)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)((\sum_{j=1}^{k} n_j \otimes d_j)(x \otimes a)) \\
&= \sum_{j=1}^{k} n_j x \varphi(d_j a) \\
&= \sum_{j=1}^{k} n_j x \varphi(b d_j) \\
&= (\imath \otimes \varphi)((1 \otimes b)(\sum_{j=1}^{k} n_j \otimes d_j)(x \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)((1 \otimes b)(E(1 \otimes f))(x \otimes 1))
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= (\imath \otimes \varphi)((1 \otimes b)E(1 \otimes f)(x \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)((\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes c_i)(1 \otimes f)(x \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)((\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes c_i f)(x \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)((\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes c_i)(x \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)((1 \otimes b)E(x \otimes 1)).
\end{aligned}$$

Analogamente, $xe(w) = (\imath \otimes \varphi)((x \otimes 1)E(1 \otimes a))$ se $w = \varphi(\_\, a)$. Após essas observações, verificamos que $e(w) \in M(R)$, para qualquer $w = \varphi(b\, \_) \in \widehat{A}$,

$$\begin{aligned}
x(e(w)y) &= x(\imath \otimes \varphi)((1 \otimes b)E(y \otimes 1)) \\
&= x(\imath \otimes \varphi)((\sum_i m_i \otimes c_i)(y \otimes 1)) \\
&= \sum_i x m_i y \varphi(c_i) \\
&= (\sum_i x m_i \varphi(c_i))y \\
&= (\imath \otimes \varphi)((x \otimes 1)(1 \otimes b)E)y \\
&= (\imath \otimes \varphi)((x \otimes b)E)y \\
&= (xe(w))y,
\end{aligned}$$

para qualquer $x, y \in R$.

Após a boa definição da aplicação $e : \widehat{A} \longrightarrow M(R)$, sejam $w = \varphi(\_\, a) \in \widehat{A}$ e $x \in R$, então $e(w)x = (\imath \otimes \varphi)(E(x \otimes a)) \overset{3.1.10}{=} (\imath \otimes \varphi)(\sum_i \rho(y_i)(1 \otimes c_i)) = \sum_i \varphi(\_\, c_i) \cdot y_i \in \widehat{A} \cdot R$, ou seja, $e(A)R \subseteq \widehat{A} \cdot R$.

Para finalizar o item, vamos mostrar que $e(w)(u \cdot x) = w_1 \cdot (\widehat{S}(w_2)u \cdot x)$, para todo $w, u \in \widehat{A}$ e $x \in R$. Na seção 2.1, já justificamos a cobertura do lado direito da igualdade, ou seja, $w_1 \otimes \widehat{S}(w_2)u = (\imath \otimes \widehat{S})((1 \otimes \widehat{S^{-1}}(u))\widehat{\Delta}(w))$. Nessas condições, vamos verificar primeiramente que

$$(\imath \otimes \widehat{S})((1 \otimes \widehat{S^{-1}}(u))\widehat{\Delta}(w)) = \varphi(\_\, b_1 a) \otimes \varphi(\_\, b_2),$$

onde $w = \varphi(\_\, a)$ e $u = \varphi(\_\, b)$.

$$
\begin{aligned}
(\imath \otimes \widehat{S})((1 \otimes \widehat{S^{-1}}(u))\widehat{\Delta}(w))(c \otimes d) = & \\
\overset{1.9}{=} \quad & ((1 \otimes \widehat{S^{-1}}(u))\widehat{\Delta}(w))(c \otimes S(d)) \\
\overset{1.8}{=} \quad & (\widehat{S^{-1}}(u) \otimes w)((1 \otimes c)\Delta(S(d))) \\
= \quad & (\widehat{S^{-1}}(u) \otimes w)(S(d_2) \otimes cS(d_1)) \\
\overset{1.9}{=} \quad & \varphi(S^{-1}(S(d_2))b)\varphi(cS(d_1)a) \\
= \quad & \varphi(d_2 b)\varphi(cS(d_1)a) \\
= \quad & \varphi(cS(d_1)\varphi(d_2 b)a) \\
\overset{1.2.1}{=} \quad & \varphi(cS(d_1)(d_2 b)_1 a)\varphi((d_2 b)_2) \\
= \quad & (\varphi \otimes \varphi)((cS(d_1) \otimes 1)\Delta(d_2 b)(a \otimes 1)) \\
= \quad & (\varphi \otimes \varphi)((cS(d_1) \otimes 1)\Delta(d_2)\Delta(b)(a \otimes 1)) \\
= \quad & (\varphi \otimes \varphi)((c \otimes d)\Delta(b)(a \otimes 1)) \\
= \quad & \varphi(cb_1 a)\varphi(db_2) \\
= \quad & (\varphi(\_\, b_1 a) \otimes \varphi(\_\, b_2))(c \otimes d),
\end{aligned}
$$

para todo $c, d \in A$. Portanto, $(\imath \otimes \widehat{S})((1 \otimes \widehat{S^{-1}}(u))\widehat{\Delta}(w)) = (\varphi(\_\, b_1 a) \otimes \varphi(\_\, b_2))$, ou seja,

$$
w_1 \otimes \widehat{S}(w_2)u = \varphi(\_\, b_1 a) \otimes \varphi(\_\, b_2). \tag{3.7}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
e(w)(u \cdot x) \quad &= \quad e(w)(\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes b)) \\
&= \quad e(w)x^0\varphi(x^1 b) \\
&= \quad (\imath \otimes \varphi)(E(x^0 \otimes a))\varphi(x^1 b) \\
&= \quad (\imath \otimes \varphi)(E(x^0 \otimes \varphi(x^1 b)a)) \\
&\overset{1.2.1}{=} \quad (\imath \otimes \varphi)(E(x^0 \otimes (x^1 b)_1 a)\varphi((x^1 b)_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(x^0 \otimes (x^1 b)_1 a \otimes (x^1 b)_2)) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(x^0 \otimes \Delta(x^1 b)(a \otimes 1))) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x)(1 \otimes b))(1 \otimes a \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(1 \otimes \Delta(b))(1 \otimes a \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(1 \otimes \Delta(b)(a \otimes 1))) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(1 \otimes b_1 a \otimes b_2))) \\
&\overset{3.1}{=} (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho \otimes \imath)(\rho(x)(1 \otimes b_2))(1 \otimes b_1 a \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)(\rho(x^0)(1 \otimes b_1 a) \otimes x^1 b_2) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho(x^0)(1 \otimes b_1 a))\varphi(x^1 b_2) \\
&= (\varphi(\_\, b_1 a) \cdot x^0)\varphi(x^1 b_2) \\
&= \varphi(\_\, b_1 a) \cdot (x^0 \varphi(x^1 b_2)) \\
&= \varphi(\_\, b_1 a) \cdot (\varphi(\_\, b_2) \cdot x) \\
&\overset{3.7}{=} w_1 \cdot (\widehat{S}(w_2) u \cdot x),
\end{aligned}
$$

concluíndo $e(w)(u \cdot x) = w_1 \cdot (\widehat{S}(w_2) u \cdot x)$.

(iii) Sejam $\varphi(\_a_1), ..., \varphi(\_a_n) \in \widehat{A}$ e $\varphi(c_i\_) = \varphi(\_a_i)$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Por hipótese, $(1 \otimes c_i)E = \sum_{j=1}^{k} m_{ij} \otimes d_{ij} \in M(R) \otimes A$ e, assim, consideramos $\varphi(\_b) \in \widehat{A}$ tal que $\varphi(\_b)\varphi(\_a_i) = \varphi(\_a_i) = \varphi(\_a_i)\varphi(\_b)$ e $\varphi(\_b)\varphi(d_{ij}\_) = \varphi(d_{ij}\_) = \varphi(d_{ij}\_)\varphi(\_b)$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $j \in \{1, ..., k\}$.

Nas notações acima, $a_i \otimes b = \sum_{l=1}^{t} \Delta(e_{il})(e'_{il} \otimes 1) \in A \otimes A$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, então existe $f \in A$ tal que $f a_i = a_i = a_i f$ e $f e_{il} = e_{il} = e_{il} f$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $l \in \{1, ..., t\}$. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
\varphi(\_a_i) \cdot (\varphi(\_b) \cdot x) &= (\varphi(\_a_i) \cdot x^0)\varphi(x^1 b) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho(x^0)(1 \otimes a_i))\varphi(x^1 b) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\rho \otimes \imath)(\rho(x)(1 \otimes b))(1 \otimes a_i \otimes 1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{3.1.2}{=} && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(1 \otimes a_i \otimes b)) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(1 \otimes \sum_{l=1}^{t} \Delta(e_{il})(e'_{il} \otimes 1))) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(1 \otimes \sum_{l=1}^{t} \Delta(fe_{il})(e'_{il} \otimes 1))) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(1 \otimes \Delta(f) \sum_{l=1}^{t} \Delta(e_{il})(e'_{il} \otimes 1))) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(1 \otimes \Delta(f)(a_i \otimes b))) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(x)(1 \otimes f))(1 \otimes a_i \otimes b)) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(x^0 \otimes \Delta(x^1 f)(a_i \otimes b))) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((E \otimes 1)(x^0 \otimes \Delta(x^1 f)(1 \otimes b))(1 \otimes a_i \otimes 1)) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\sum_p y_p \otimes a'_p \otimes a''_p)(1 \otimes a_i \otimes 1)) \\
&= && \sum_p y_p \varphi(a'_p a_i)\varphi(a''_p) \\
&= && \sum_p y_p \varphi(c_i a'_p)\varphi(a''_p) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((1 \otimes c_i \otimes 1)(\sum_p y_p \otimes a'_p \otimes a''_p)) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((1 \otimes c_i \otimes 1)(E \otimes 1)(x^0 \otimes \Delta(x^1 f)(1 \otimes b))) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)(((1 \otimes c_i)E \otimes 1)(x^0 \otimes \Delta(x^1 f)(1 \otimes b))) \\
&= && (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)((\sum_{j=1}^{k} m_{ij} \otimes d_{ij} \otimes 1)(x^0 \otimes (x^1 f)_1 \otimes (x^1 f)_2 b)) \\
&= && \sum_{j=1}^{k} m_{ij} x^0 \varphi(d_{ij}(x^1 f)_1)\varphi((x^1 f)_2 b) \\
&= && \sum_{j=1}^{k} m_{ij} x^0 (\varphi(d_{ij}\_)\varphi(\_b))(x^1 f) \\
&= && \sum_{j=1}^{k} m_{ij} x^0 (\varphi(d_{ij}\_))(x^1 f) \\
&= && \sum_{j=1}^{k} m_{ij} x^0 \varphi(d_{ij} x^1 f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\imath \otimes \varphi)(\sum_{j=1}^{k} m_{ij}x^0 \otimes d_{ij}x^1 f) \\
&= (\imath \otimes \varphi)((\sum_{j=1}^{k} m_{ij} \otimes d_{ij})(x^0 \otimes x^1 f)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)((1 \otimes c_i)E\rho(x)(1 \otimes f)) \\
&\overset{3.5}{=} (\imath \otimes \varphi)((1 \otimes c_i)\rho(x)(1 \otimes f)) \\
&= x^0\varphi(c_i(x^1 f)) \\
&= x^0\varphi((x^1 f)a_i) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes f)(1 \otimes a_i)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes fa_i)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes a_i)) \\
&= \varphi(\_a_i) \cdot x,
\end{aligned}
$$

ou seja, $\varphi(\_a_i) \cdot (\varphi(\_b) \cdot x) = \varphi(\_a_i) \cdot x$, para todo $x \in R$ e $i\{1, ..., \}$.

(iv) Seja $w \cdot x = 0$, para qualquer $w \in \widehat{A}$, vamos mostrar que $x = 0$. Para isso, note que dados $a, b \in A$, $\varphi(a\_b) \in \widehat{A}$, pois

$$
\begin{aligned}
\varphi(a\_b)(c) &= \varphi(acb) \\
&= \varphi((ac)b) \\
&\overset{1.2.12}{=} \varphi(d(ac)) \\
&= \varphi((da)c) \\
&= \varphi(da\_)(c),
\end{aligned}
$$

para todo $c \in A$. Nessas condições, para qualquer $a, b \in A$, escrevemos $\rho(x)(1 \otimes b) = \sum_i y_i \otimes b_i$, onde $\{y_i\}$ é um conjunto linearmente independente, logo

$$
\begin{aligned}
0 &= \varphi(a\_b) \cdot x \\
&= (\imath \otimes \varphi)((1 \otimes a)\rho(x)(1 \otimes b))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\imath \otimes \varphi)((1 \otimes a)(\sum_i y_i \otimes b_i)) \\
&= \sum_i y_i \varphi(ab_i),
\end{aligned}
$$

ou seja, pela independência linear de $\{y_i\}$, temos $\varphi(ab_i) = 0$, para todo i e $a \in A$. Logo, pela Proposição 1.2.5, $a_i = 0$ para cada i, concluíndo assim, $\sum_i y_i \otimes b_i = \rho(x)(1 \otimes b) = 0$, para todo $b \in A$. Portanto, $\rho(x) = 0$ e pela injetividade da aplicação ρ, $x = 0$. $\square$

Proposição 3.3.2. *Se R um A-comódulo álgebra parcial simétrico, então*

$$R^{\underline{coA}} = \{m \in M(R);\ w \cdot (mx) = m(w \cdot x) \text{ } e \text{ } w \cdot (xm) = (w \cdot x)m, x \in R \text{ } e \text{ } w \in \hat{A}\}$$

Demonstração. Supomos $m \in R^{\underline{coA}}$, logo

$$
\begin{aligned}
(w \cdot x)m &= (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes a))m \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\sum_i x_i \otimes a_i)m \\
&= \sum_i x_i m \varphi(a_i) \\
&= (\imath \otimes \varphi)((\sum_i x_i \otimes a_i)(m \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes a)(m \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(m \otimes 1)(1 \otimes a)) \\
&\overset{3.5}{=} (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)E(m \otimes 1)(1 \otimes a)) \\
&\overset{3.6}{=} (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)\rho(m)(1 \otimes a)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho(xm)(1 \otimes a)) \\
&= w \cdot (xm),
\end{aligned}
$$

ou seja, $(w \cdot x)m = w \cdot (xm)$, para todo $w = \varphi(\_a) \in \widehat{A}$ e $x \in R$. De maneira similar, mostramos $w \cdot (mx) = m(w \cdot x)$.

Para mostrarmos a inclusão contrária primeiro observamos que dado $\varphi(\_c) \in \widehat{A}$ e $\sum_i x_i \otimes b_i \in R \otimes A$, onde $\{x_i\}$ é um conjunto linearmente independente de R, tal que $(\imath \otimes \varphi(\_c))(\sum_i x_i \otimes b_i) = 0$, então $\sum_i x_i \otimes b_i = 0$. De fato,

$$0 = (\imath \otimes \varphi(\_c))(\sum_i x_i \otimes b_i) = \sum_i x_i \varphi(b_i c),$$

então $\varphi(b_i c) = 0$, para cada i e todo elemento $c \in A$. Assim, pela Proposição 1.2.5, $b_i = 0$, para cada i, ou seja, $\sum_i x_i \otimes b_i = 0$.

Nessas condições, dado $c \in A$,

$$\begin{aligned}
(\imath \otimes \varphi(_c))((m \otimes 1)E(x \otimes a)) &= (\imath \otimes \varphi(_c))((m \otimes 1)(\sum_j x_j \otimes a_j)) \\
&= \sum_j m x_j \varphi(a_j c) \\
&= m(\imath \otimes \varphi)(E(x \otimes a)(1 \otimes c)) \\
&\overset{3.1.10}{=} m(\imath \otimes \varphi)(\sum_k \rho(y_k)(1 \otimes b_k)(1 \otimes c)) \\
&= \sum_k m((\imath \otimes \varphi)(\rho(y_k)(1 \otimes b_k c))) \\
&= \sum_k m(\varphi(_b_k c) \cdot y_k) \\
&= \sum_k (\varphi(_b_k c) \cdot (m y_k)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho(m y_k)(1 \otimes b_k c)) \\
&= (\imath \otimes \varphi(_c))(\rho(m)\rho(y_k)(1 \otimes b_k c)) \\
&= (\imath \otimes \varphi(_c))(\rho(m)E(x \otimes a)) \\
&\overset{3.5}{=} (\imath \otimes \varphi(_c))(\rho(m)(x \otimes a)),
\end{aligned}$$

para todo $c \in A$. Portanto, $(m \otimes 1)E(x \otimes a) = \rho(m)(x \otimes a)$, para todo $x \in R$ e $a \in A$, ou seja, $(m \otimes 1)E = \rho(m)$. Similarmente, verificamos $E(m \otimes 1) = \rho(m)$, concluindo assim que $m \in R^{\underline{coA}}$. $\square$

Para uma recíproca do resultado anterior, vamos precisar assumir algumas condições adicionais. Assim temos o próximo resultado.

Proposição 3.3.3. *Seja R um A-módulo álgebra parcial simétrico tal que $A \cdot R$ possui produto não degenerado. Se a aplicação $e : A \longrightarrow M(R)$ pertence à álgebra $Hom^r(A, M(R))$, ou seja, $e = f(\_b)$, para algum $b \in A$ e $f : A \longrightarrow M(R)$, satisfaz:*

(i) $e(a_1)e(a_2) = e(a)$;

(ii) $e(k) = 1_{M(A \cdot R)}$,

onde $kb = b = bk$, *então* $A \cdot R$ *é um* $\widehat{A}$*-comódulo álgebra parcial simétrico.*

Demonstração. Definimos a aplicação $\rho : A \cdot R \longrightarrow M((A \cdot R) \otimes \widehat{A})$ por

$$\begin{aligned} \rho(a \cdot x)(1 \otimes \varphi(\_b)) &= e(S^{-1}(b_2))(S^{-1}(b_1)a \cdot x) \otimes \varphi(\_b_3) \\ (1 \otimes \psi(\_b))\rho(a \cdot x) &= (S(b_3)a \cdot x)e(S(b_2)) \otimes \psi(\_b_1), \end{aligned}$$

para todo $\varphi(\_b)$ e $\psi(\_b) \in \widehat{A}$. E, consideramos $E \in M((A \cdot R) \otimes \widehat{A})$ tal que $E(1 \otimes \varphi(\_c)) = e(S^{-1}(c_1))|_{A \cdot R} \otimes \varphi(\_c_2)$ e $(1 \otimes \psi(\_c))E = e(S(c_2))|_{A \cdot R} \otimes \psi(\_c_1)$, para todo $\varphi(\_c)$ e $\psi(\_c) \in \widehat{A}$.

• Iniciamos verificando que $E \in M((A \cdot R) \otimes \widehat{A})$. De fato, sejam $a \cdot x, b \cdot y \in A \cdot R$, $\psi(\_c), \varphi(\_d) \in \widehat{A}$, logo

$$\begin{aligned} &((a \cdot x \otimes \psi(\_c))(E(b \cdot y \otimes \varphi(\_d))))(1 \otimes g) = \\ &= ((a \cdot x \otimes \psi(\_c))(e(S^{-1}(d_1))(b \cdot y) \otimes \varphi(\_d_2))(1 \otimes g)) \\ &= ((a \cdot x)e(S^{-1}(d_1))(b \cdot y) \otimes \psi(\_c)\varphi(\_d_2))(1 \otimes g) \\ &= (a \cdot x)e(S^{-1}(d_1))(b \cdot y)\psi(g_1 c)\varphi(g_2 d_2) \\ &\overset{1.2.1}{=} (a \cdot x)e(\varphi(g_3 d_3)g_2 d_2 S^{-1}(d_1))(b \cdot y)\psi(g_1 c) \\ &= (a \cdot x)e(g_2)(b \cdot y)\varphi(g_3 d)\psi(g_1 c). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &(((a \cdot x \otimes \psi(\_c))E)(b \cdot y \otimes \varphi(\_d)))(1 \otimes g) = \\ &= ((a \cdot x)e(S(c_2))(b \cdot y) \otimes \psi(\_c_1)\varphi(\_d))(1 \otimes g) \\ &= (a \cdot x)e(S(c_2))(b \cdot y)\psi(g_1 c_1)\varphi(g_2 d) \\ &= (a \cdot x)e(\psi(g_1 c_1)g_2 c_2 S(c_3))(b \cdot y)\varphi(g_2 d) \end{aligned}$$

$$= \quad (a\cdot x)e(g_2)(b\cdot y)\varphi(g_3 d)\psi(g_1 c),$$

para todo $g \in A$, portanto $((a\cdot x\otimes\psi(\_c))E)(b\cdot y\otimes\varphi(\_d)) = (a\cdot x\otimes\psi(\_c))(E(b\cdot y\otimes\varphi(\_d)))$, ou seja, $E \in M((A\cdot R)\otimes\widehat{A})$.

- $E^2 = E$.

$$\begin{aligned}
E(E(a\cdot x\otimes\varphi(_b))) &= E(e(S^{-1}(b_1))(a\cdot x)\otimes\varphi(_b_2)) \\
&= e(S^{-1}(b_2))e(S^{-1}(b_1))(a\cdot x)\otimes\varphi(_b_3) \\
&\overset{(ii)}{=} e(S^{-1}(b_1))(a\cdot x)\otimes\varphi(_b_2) \\
&= E(a\cdot x\otimes\varphi(_b)).
\end{aligned}$$

Analogamente, $((a\cdot x\otimes\varphi(\_b))E)E = (a\cdot x\otimes\varphi(\_b))E$, para todo $a\cdot x \in A\cdot R$ e $\varphi(\_b)\in\widehat{A}$, então $E^2 = E$.

- $\rho(x) \in M((A\cdot R)\otimes\widehat{A})$. Por um lado,

$$\begin{aligned}
((1\otimes\psi(_c))(\rho(a\cdot x)(1\otimes\psi(_b))))(1\otimes d) &= (e(S^{-1}(b_2))(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\otimes\psi(_c)\varphi(_b_3))(1\otimes d) \\
&= e(S^{-1}(b_2))(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\psi(d_1c)\varphi(d_2b_3) \\
&\overset{1.2.1}{=} e(\varphi(d_3b_4)d_2b_3S^{-1}(b_2))(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\psi(d_1c) \\
&= e(d_2)\varphi(d_3b_2)(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\psi(d_1c) \\
&= e(d_2)(\varphi(d_4b_3)d_3b_2S^{-1}(b_1)a\cdot x)\psi(d_1c) \\
&= e(d_2)(d_3a\cdot x)\varphi(d_4b)\psi(d_1c).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(((1\otimes\psi(_c))\rho(a\cdot x))(1\otimes\varphi(_b))(1\otimes d) &= ((S(c_3)a\cdot x)e(S(c_2))\otimes\psi(_c_1)\varphi(_b))(1\otimes d) \\
&= (S(c_3)a\cdot x)e(S(c_2))\psi(d_1c_1)\varphi(d_2b) \\
&= (S(c_4)a\cdot x)e(\psi(d_1c_1)d_2c_2S(c_3))\varphi(d_3b) \\
&= (S(c_2)a\cdot x)e(d_2)\psi(d_1c_1)\varphi(d_3b) \\
&= (\psi(d_1c_1)d_2c_2S(c_3)a\cdot x)e(d_3)\varphi(d_4b)
\end{aligned}$$

$$= \quad (d_2c \cdot x)e(d_3)\psi(d_1c)\varphi(d_4b).$$

Logo, falta verificarmos que $e(d_2)(d_3a \cdot x) = (d_2a \cdot x)e(d_3)$,

$$\begin{aligned} e(d_2)(d_3a \cdot x) &= (d_2 \cdot 1_{M(R)})(d_3a \cdot x) \\ &= d_2 \cdot (a \cdot x) \\ &\overset{(*)}{=} (d_2a \cdot x)(d_3 \cdot 1_{M(R)}) \\ &= (d_2a \cdot x)e(d_3), \end{aligned}$$

onde na igualdade $(*)$ estamos usando o fato da ação ser simétrica. Portanto, $\rho(x) \in M((A \cdot R) \otimes \widehat{A})$.

- $(\rho \otimes \imath)(\rho(a \cdot x)(1 \otimes \varphi(\_b)))(1 \otimes \varphi(\_c) \otimes 1) = (E \otimes 1)(\imath \otimes \widehat{\Delta})(\rho(a \cdot x))(1 \otimes \varphi(\_c) \otimes \varphi(\_b))$,

para todo $a \cdot x \in \widehat{A} \cdot R$ e $\varphi(\_b), \varphi(\_c) \in \widehat{A}$.

$$\begin{aligned} &((\rho \otimes \imath)(\rho(a \cdot x)(1 \otimes \varphi(\_b)))(1 \otimes \varphi(\_c) \otimes 1))(1 \otimes d \otimes g) = \\ &= ((\rho \otimes \imath)(e(S^{-1}(b_2))(S^{-1}(b_1)a \cdot x) \otimes \varphi(\_b_3))(1 \otimes \varphi(\_c) \otimes 1))(1 \otimes d \otimes g) = \\ &= (\rho(e(S^{-1}(b_2))(S^{-1}(b_1)a \cdot x))(1 \otimes \varphi(\_c)) \otimes \varphi(\_b_3))(1 \otimes d \otimes g) = \\ &= (\rho(e(S^{-1}(b_2)k)(S^{-1}(b_1)a \cdot x))(1 \otimes \varphi(\_c)) \otimes \varphi(\_b_3))(1 \otimes d \otimes g) = \\ &= (\rho(S^{-1}(b_3)k_1 \cdot (S(S^{-1}(b_2)k_2)S^{-1}(b_1)a \cdot x))(1 \otimes \varphi(\_c)) \otimes \varphi(\_b_4))(1 \otimes d \otimes g) = \\ &= (\rho(S^{-1}(b_3)k_1 \cdot (S(k_2)b_2S^{-1}(b_1)a \cdot x))(1 \otimes \varphi(\_c)) \otimes \varphi(\_b_4))(1 \otimes d \otimes g) = \\ &= (\rho(S^{-1}(b_1)k_1 \cdot (S(k_2)a \cdot x))(1 \otimes \varphi(\_c)) \otimes \varphi(\_b_2))(1 \otimes d \otimes g) = \\ &= (e(S^{-1}(c_2))(S^{-1}(c_1)S^{-1}(b_1)k_1 \cdot (S(k_2)a \cdot x)) \otimes \varphi(\_c_3) \otimes \varphi(\_b_2))(1 \otimes d \otimes g) = \\ &= (e(S^{-1}(c_3))e(S^{-1}(c_2)S^{-1}(b_2)k_1)(S^{-1}(c_1)S^{-1}(b_1)k_2S(k_3)a \cdot x) \otimes \varphi(\_c_4) \otimes \varphi(\_b_3))(1 \otimes d \otimes g) \\ &= (e(S^{-1}(c_3))e(S^{-1}(c_2)S^{-1}(b_2)k)(S^{-1}(c_1)S^{-1}(b_1)a \cdot x) \otimes \varphi(\_c_4) \otimes \varphi(\_b_3))(1 \otimes d \otimes g) \\ &= e(S^{-1}(c_3))e(S^{-1}(c_2)S^{-1}(b_2))(S^{-1}(c_1)S^{-1}(b_1)a \cdot x)\varphi(dc_4)\varphi(gb_3) \\ &= e(\varphi(d_2c_5)d_1c_4S^{-1}(c_3))e(S^{-1}(c_2)\varphi(g_2b_4)g_1b_3S^{-1}(b_2))(S^{-1}(c_1)S^{-1}(b_1)a \cdot x) \\ &= e(d_1)\varphi(d_2c_3)e(S^{-1}(c_2)g_1)\varphi(g_2b_2)(S^{-1}(c_1)S^{-1}(b_1)a \cdot x) \\ &= e(d_1)e(\varphi(d_3c_4)d_2c_3S^{-1}(c_2)g_1)(S^{-1}(c_1)\varphi(g_3b_3)g_2b_2S^{-1}(b_1)a \cdot x) \\ &= e(d_1)e(d_2g_1)\varphi(d_3c_2)(S^{-1}(c_1)g_2a \cdot x)\varphi(g_3b) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e(d_1)e(d_2g_1)(\varphi(d_4c_3)d_3c_2S^{-1}(c_1)g_2a\cdot x)\varphi(g_3b)\\
&= e(d_1)e(d_2g_1)(d_3g_2a\cdot x)\varphi(d_4c)\varphi(g_3b).
\end{aligned}
$$

Antes de iniciarmos o outro lado, observamos, para todo $\varphi(\_c), \varphi(\_b) \in \widehat{A}$,

$$
1\otimes\varphi(\_c)\otimes\varphi(\_b) = (\imath\otimes\widehat{\Delta})(1\otimes\varphi(\_b_1c))(1\otimes 1\otimes\varphi(\_b_2)) \tag{3.8}
$$

De fato, para qualquer $d, g \in A$

$$
\begin{aligned}
(1\otimes\varphi(\_c)\otimes\varphi(\_b))(1\otimes d\otimes g) &= 1\varphi(dc)\varphi(gb)\\
&\overset{1.2.1}{=} 1\varphi(dg_1b_1c)\varphi(g_2b_2)\\
&= (1\otimes\varphi(\_b_1c)\otimes\varphi(\_b_1))(1\otimes(d\otimes 1)\Delta(g))\\
&\overset{1.8}{=} (\imath\otimes\widehat{\Delta}(\varphi(\_b_1c))(1\otimes\varphi(\_b_2)))(1\otimes d\otimes g)\\
&= ((\imath\otimes\widehat{\Delta})(1\otimes\varphi(\_b_1c))(1\otimes 1\otimes\varphi(\_b_2)))(1\otimes d\otimes g).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&((E\otimes 1)(\imath\otimes\widehat{\Delta})(\rho(a\cdot x))(1\otimes\varphi(\_c)\otimes\varphi(\_b)))(1\otimes d\otimes g) =\\
\overset{3.8}{=}\ &((E\otimes 1)(\imath\otimes\widehat{\Delta})(\rho(a\cdot x))(\imath\otimes\widehat{\Delta})(1\otimes\varphi(\_b_1c))(1\otimes 1\otimes\varphi(\_b_2)))(1\otimes d\otimes g)\\
=\ &((E\otimes 1)(\imath\otimes\widehat{\Delta})(\rho(a\cdot x)(1\otimes\varphi(\_b_1c)))(1\otimes 1\otimes\varphi(\_b_2)))(1\otimes d\otimes g)\\
=\ &((E\otimes 1)(\imath\otimes\widehat{\Delta})(e(S^{-1}(b_2c_2))(S^{-1}(b_1c_1)a\cdot x)\otimes\varphi(\_b_3c_3))(1\otimes 1\otimes\varphi(\_b_4)))(1\otimes d\otimes g)\\
=\ &((E\otimes 1)(e(S^{-1}(b_2c_2))(S^{-1}(b_1c_1)a\cdot x)\otimes\widehat{\Delta}(\varphi(\_b_3c_3))(1\otimes\varphi(\_b_4))))(1\otimes d\otimes g)\\
\overset{3.7}{=}\ &((E\otimes 1)(e(S^{-1}(b_2c_2))(S^{-1}(b_1c_1)a\cdot x)\otimes\varphi(\_c_3)\otimes\varphi(\_b_3)))(1\otimes d\otimes g)\\
=\ &(E(1\otimes\varphi(\_c_3))(e(S^{-1}(b_2c_2))(S^{-1}(b_1c_1)a\cdot x)\otimes 1\otimes\varphi(\_b_3)))(1\otimes d\otimes g)\\
=\ &(e(S^{-1}(c_3))e(S^{-1}(b_2c_2))(S^{-1}(b_1c_1)a\cdot x)\otimes\varphi(\_c_4)\otimes\varphi(\_b_3))(1\otimes d\otimes g)\\
=\ &e(S^{-1}(c_3))e(S^{-1}(b_2c_2))(S^{-1}(b_1c_1)a\cdot x)\varphi(dc_4)\varphi(gb_3)\\
=\ &e(\varphi(d_2c_5)d_1c_4S^{-1}(c_3))e(S^{-1}(c_2)\varphi(g_2b_4)g_1b_3S^{-1}(b_2))(S^{-1}(b_1c_1)a\cdot x)\\
=\ &e(d_1)\varphi(d_2c_3)e(S^{-1}(c_2)g_1)\varphi(g_2b_2)(S^{-1}(c_1)S^{-1}(b_1)a\cdot x)\\
=\ &e(d_1)e(\varphi(d_3c_4)d_2c_3S^{-1}(c_2)g_1)(S^{-1}(c_1)\varphi(g_3b_3)g_2b_2S^{-1}(b_1)a\cdot x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e(d_1)e(d_2g_1)\varphi(d_3c_2)(S^{-1}(c_1)g_2a\cdot x)\varphi(g_3b)\\
&= e(d_1)e(d_2g_1)(\varphi(d_4c_3)d_3c_2S^{-1}(c_1)g_2a\cdot x)\varphi(g_3b)\\
&= e(d_1)e(d_2g_1)(d_3g_2a\cdot x)\varphi(d_4c)\varphi(g_3b).
\end{aligned}
$$

Logo, verificamos a coassociatividade da coação parcial ρ. Similarmente, mostramos o item de simetria.

- ρ é homomorfismo. Sejam $a\cdot x, b\cdot y \in A\cdot R$,

$$
\begin{aligned}
&(\rho((a\cdot x)(b\cdot y))(1\otimes\varphi(\_c)))(1\otimes d) =\\
&= (\rho(a_1\cdot(x(S(a_2)b\cdot y)))(1\otimes\varphi(\_c)))(1\otimes d)\\
&= (e(S^{-1}(c_2))(S^{-1}(c_1)a_1\cdot(x(S(a_2)b\cdot y)))\otimes\varphi(\_c_3))(1\otimes d)\\
&= (e(S^{-1}(c_3))(S^{-1}(c_2)a_1\cdot x)(S^{-1}(c_1)a_2S(a_3)b\cdot y)\otimes\varphi(\_c_4))(1\otimes d)\\
&= e(S^{-1}(c_3))(S^{-1}(c_2)a\cdot x)(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\varphi(dc_4)\\
&= e(\varphi(d_2c_5)d_1c_4S^{-1}(c_3))(S^{-1}(c_2)a\cdot x)(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)\varphi(d_2c_3)(S^{-1}(c_2)a\cdot x)(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)(\varphi(d_3c_4)d_2c_3S^{-1}(c_2)a\cdot x)(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)(d_2a\cdot x)\varphi(d_3c_2)(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)(d_2a\cdot x)(\varphi(d_4c_3)d_3c_2S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)(d_2a\cdot x)(d_3b\cdot y)\varphi(d_4c).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&(\rho(a\cdot x)(\rho(b\cdot y)(1\otimes\varphi(\_c))))(1\otimes d) =\\
&= (\rho(a\cdot x)(e(S^{-1}(c_2))(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\otimes\varphi(\_c_3)))(1\otimes d)\\
&= ((\rho(a\cdot x)(1\otimes\otimes\varphi(\_c_3)))(e(S^{-1}(c_2))(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\otimes 1))(1\otimes d)\\
&= (e(S^{-1}(c_4))(S^{-1}(c_3)a\cdot x)e(S^{-1}(c_2))(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\otimes\varphi(\_c_5))(1\otimes d)\\
&= e(S^{-1}(c_4))(S^{-1}(c_3)a\cdot x)e(S^{-1}(c_2))(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\varphi(dc_5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e(\varphi(d_2c_6)d_1c_5S^{-1}(c_4))(S^{-1}(c_3)a\cdot x)e(S^{-1}(c_2))(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)\varphi(d_2c_4)(S^{-1}(c_3)a\cdot x)e(S^{-1}(c_2))(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)(\varphi(d_3c_5)d_2c_4S^{-1}(c_3)a\cdot x)e(S^{-1}(c_2))(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)(d_2a\cdot x)\varphi(d_3c_3)e(S^{-1}(c_2))(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)(d_2a\cdot x)e(\varphi(d_4c_4)d_3c_3S^{-1}(c_2))(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)(d_2a\cdot x)e(d_3)\varphi(d_4c_2)(S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)(d_2a\cdot x)e(d_3)(\varphi(d_5c_3)d_4c_2S^{-1}(c_1)b\cdot y)\\
&= e(d_1)(d_2a\cdot x)e(d_3)(d_4b\cdot y)\varphi(d_5c),
\end{aligned}
$$

para todo $d \in A$ e $\varphi(\_c) \in \widehat{A}$, ou seja, $\rho((a\cdot x)(b\cdot y)) = \rho(a\cdot x)\rho(b\cdot y)$.

- ρ é injetiva, ou seja, basta verificarmos que $(\imath\otimes\widehat{\varepsilon})(\rho(a\cdot x)) = a\cdot x$, onde $\widehat{\varepsilon}(\varphi(\_a)) = \varphi(a)$, para qualquer $a \in A$. Consideramos $\varphi(\_b) \in \widehat{A}$ tal que $\widehat{\varepsilon}(\varphi(\_b))$, logo

$$
\begin{aligned}
(\imath\otimes\widehat{\varepsilon})(\rho(a\cdot x)) &= (\imath\otimes\widehat{\varepsilon})(\rho(a\cdot x))\widehat{\varepsilon}(\varphi(\_b))\\
&= (\imath\otimes\widehat{\varepsilon})(\rho(a\cdot x)(1\otimes\varphi(\_b)))\\
&= (\imath\otimes\widehat{\varepsilon})(e(S^{-1}(b_2))(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\otimes\varphi(\_b_3))\\
&= e(S^{-1}(b_2))(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\widehat{\varepsilon}(\varphi(\_b_3))\\
&= e(S^{-1}(b_2))(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\varphi(b_3)\\
&= e(S^{-1}(b_2)k)(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\varphi(b_3)\\
&= e(S^{-1}(b_2)S^{-1}(S(k)))(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\varphi(b_3)\\
&= e(S^{-1}(S(k)b_2))(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\varphi(b_3)\\
&= e(S^{-1}(S(k)b_2\varphi(b_3)))(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\\
&\overset{1.2.1}{=} e(S^{-1}(S(k)))(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\varphi(b_2)\\
&= e(k)(S^{-1}(b_1)a\cdot x)\varphi(b_2)\\
&= (S^{-1}(b_1)S^{-1}(S(a))\cdot x)\varphi(b_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (S^{-1}(S(a)b_1\varphi(b_2)) \cdot x) \\
&= (S^{-1}(S(a)) \cdot x)\varphi(b) \\
&= a \cdot x,
\end{aligned}
$$

ou seja, $(\imath \otimes \widehat{\varepsilon})(\rho(a \cdot x)) = a \cdot x$. Portanto, $A \cdot R$ é um $\widehat{A}$-comódulo álgebra parcial simétrico. $\square$

Capítulo 4

Contexto de Morita

Neste capítulo apresentamos a existência de um contexto de Morita relacionando a álgebra dos coinvariantes de um A-comódulo álgebra parcial R e uma determinada subálgebra do produto smash $R\#\widehat{A}$. Para essa finalidade, introduzimos o conceito de uma coação parcial reduzida juntamente com algumas propriedades. Na sequência, usando o contexto obtido, apresentamos uma caracterização para uma coação de Galois.

4.1 Coação Parcial Reduzida

Nesta seção, definimos uma nova classe de coações parciais de uma álgebra de Hopf de multiplicadores regular A sobre uma álgebra R com produto não degenerado. Para não sobrecarregar a notação, denotamos por $\imath$ a aplicação identidade de A e a aplicação identidade de R.

Definição 4.1.1. Seja (R, ρ, E) um A-comódulo álgebra parcial. A coação parcial

ρ é dita *reduzida* se também satisfizer $(R \otimes 1)\rho(R) \subseteq (R \otimes A)E$.

Observação 4.1.2. Note que, no caso de coações parciais reduzidas, a inclusão acima, nos permite continuar usando a notação Sigma (sem somatório), pois $(y \otimes 1)\rho(x) \in (R \otimes A)E$, para qualquer $x, y \in R$ e assim, podemos escrever $(y \otimes 1)\rho(x) = yx^0 \otimes x^1$. Lembramos que nessa notação, não podemos afirmar que x^0 pertence a álgebra R, mas sim, todo termo $yx^0 \in R$.

Logo, para continuar usando a notação Sigma em coações parciais reduzidas, não foi possível justificá-la no Capítulo 2, usando as unidades locais bilaterais de A, semelhante ao que foi feito com a notação de Sweedler, pois no nosso caso, R não precisa ter unidades locais bilaterais.

Para o que segue, precisamos ter atenção redobrada ao usar a notação Sigma, pois devemos ter cuidado se a cobertura partiu da álgebra R ou da álgebra A.

Proposição 4.1.3. *Se (R, ρ, E) é uma coação parcial reduzida, então $\rho(R)(R \otimes 1) \subseteq E(R \otimes A)$.*

Demonstração. De fato, sejam $x, y \in R$ e $a, b \in A$,

$$
\begin{aligned}
&(1 \otimes a)\rho(xy^0)(1 \otimes S(y^1))(1 \otimes S(b)) = \\
&\quad = ((xy^0)^0 \otimes a(xy^0)^1)(1 \otimes S(by^1)) \\
&\quad = (xy^0)^0 \otimes a(xy^0)^1 S(by^1) \\
&\quad = (\imath \otimes m(\imath \otimes S))((xy^0)^0 \otimes a(xy^0)^1 \otimes by^1) \\
&\quad = (\imath \otimes m(\imath \otimes S))((1 \otimes a)\rho(xy^0) \otimes by^1) \\
&\quad = (\imath \otimes m(\imath \otimes S))((1 \otimes a \otimes 1)(\rho \otimes \imath)((1 \otimes b)(xy^0 \otimes y^1))) \\
&\quad = (\imath \otimes m(\imath \otimes S))((1 \otimes a \otimes 1)(\rho \otimes \imath)((1 \otimes b)(x \otimes 1)\rho(y))) \\
&\quad = (\imath \otimes m(\imath \otimes S))((1 \otimes a \otimes 1)(\rho \otimes \imath)((x \otimes 1)(1 \otimes b)\rho(y))) \\
&\quad = (\imath \otimes m(\imath \otimes S))((1 \otimes a \otimes 1)(\rho(x) \otimes 1)(\rho \otimes \imath)((1 \otimes b)\rho(y)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{3.2}{=} && (\imath\otimes m(\imath\otimes S))(((1\otimes a)\rho(x)\otimes 1)(E\otimes b)(\imath\otimes\Delta)(\rho(y)))\\
&= && (\imath\otimes m(\imath\otimes S))(((1\otimes a)\rho(x)E\otimes b)(\imath\otimes\Delta)(\rho(y)))\\
&\overset{3.5}{=} && (\imath\otimes m(\imath\otimes S))(((1\otimes a)\rho(x)\otimes b)(\imath\otimes\Delta)(\rho(y)))\\
&= && (\imath\otimes m(\imath\otimes S))((\sum_i x_i\otimes a_i\otimes b)(\imath\otimes\Delta)(\rho(y)))\\
&= && (\imath\otimes m(\imath\otimes S))((\sum_i x_i\otimes(a_iS(b_1)\otimes 1)\Delta(b_2))(\imath\otimes\Delta)(\rho(y)))\\
&= && (\imath\otimes m(\imath\otimes S))(\sum_i(x_i\otimes a_iS(b_1)\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(1\otimes b_2)(\imath\otimes\Delta)(\rho(y)))\\
&= && (\imath\otimes m(\imath\otimes S))(\sum_i(x_i\otimes a_iS(b_1)\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)((1\otimes b_2)\rho(y)))\\
&= && (\imath\otimes m(\imath\otimes S))(\sum_i(x_i\otimes a_iS(b_1)\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(y^0\otimes b_2y^1))\\
&= && (\imath\otimes m(\imath\otimes S))(\sum_i x_iy^0\otimes(a_iS(b_1)\otimes 1)\Delta(b_2y^1))\\
&= && \sum_i x_iy^0\otimes m(\imath\otimes S)((a_iS(b_1)\otimes 1)\Delta(b_2y^1))\\
&= && \sum_i x_iy^0\otimes a_iS(b_1)\varepsilon(b_2y^1)\\
&= && \sum_i x_i(\imath\otimes\varepsilon)((1\otimes b_2)\rho(y))\otimes a_iS(b_1)\\
&= && \sum_i x_i(\imath\otimes\varepsilon)(\rho(y))\otimes a_iS(b_1)\varepsilon(b_2)\\
&\overset{3.1.7}{=} && \sum_i x_iy\otimes a_iS(b)\\
&= && (\sum_i x_i\otimes a_i)(y\otimes S(b))\\
&= && (1\otimes a)\rho(x)(y\otimes 1)(1\otimes S(b)),
\end{aligned}
$$

para todo $a, b \in A$, então $\rho(x)(y\otimes 1) = \rho(xy^0)(1\otimes S(y^1)) \in E(R\otimes A)$, pela definição de coação parcial. $\square$

Adicionando a hipótese de simetria temos a seguinte aplicação.

Observação 4.1.4. Se R é um A-comódulo álgebra parcial simétrico reduzido, então definimos a seguinte aplicação linear

$$\begin{aligned} \beta : R \otimes_{\underline{R^{coA}}} R &\longrightarrow (R \otimes A)E \\ x \otimes y &\longmapsto (x \otimes 1)\rho(y). \end{aligned}$$

Note que, para mostrar a boa definição da aplicação β, precisamos apenas verificar se β é $\underline{R^{coA}}$-balanceada, porque devido à coação parcial ser simétrica temos $(x \otimes 1)\rho(y) \in (R \otimes A)E$. De fato, consideramos R um $\underline{R^{coA}}$-módulo à esquerda e à direita de maneira natural, logo

$$\begin{aligned} \beta(x \triangleleft m, y) &= (x \triangleleft m \otimes 1)\rho(y) \\ &= (xm \otimes 1)\rho(y) \\ &\overset{3.5}{=} (x \otimes 1)(m \otimes 1)E\rho(y) \\ &\overset{m \in \underline{R^{coA}}}{=} (x \otimes 1)\rho(m)\rho(y) \\ &= (x \otimes 1)\rho(my) \\ &= \beta(x, my) \\ &= \beta(x, m \triangleright y), \end{aligned}$$

para todo $x, y \in R$ e $m \in \underline{R^{coA}}$, portanto $\beta(x \triangleleft m, y) = \beta(x, m \triangleright y)$.

Exemplo 4.1.5. Se R um A-comódulo álgebra reduzido e f um idempotente central em R, então pela Proposição 3.1.12, $S = fR$ é um A-comódulo álgebra parcial reduzido.

Exemplo 4.1.6. Consideramos a Proposição 3.1.15. Se $m \in A$, então R é um A-comódulo álgebra parcial reduzido .

Exemplo 4.1.7. Seja R o comódulo álgebra parcial construído no Exemplo 3.1.20, então R é um A-comódulo álgebra parcial reduzido.

Abaixo, segue alguns resultados que serão úteis na próxima seção.

Lema 4.1.8. *Seja (R, ρ, E) um A-comódulo álgebra parcial simétrico reduzido. Então,*

$$(\rho \otimes \imath)(\rho(x)(y \otimes 1))(1 \otimes a \otimes 1) = \sum_j (\imath \otimes \Delta)(\rho(x)(z_j \otimes 1))(1 \otimes b_j \otimes 1),$$

onde $\rho(y)(1 \otimes a) = \sum_j z_j \otimes b_j$, para todo $x, y \in R$ e $a \in A$.

Demonstração. Sejam $x, y \in R$ e $a \in A$, logo

$$\begin{aligned}
(\rho \otimes \imath)(\rho(x)(y \otimes 1))(1 \otimes a \otimes c) &= \rho(x^0 y)(1 \otimes a) \otimes x^1 c \\
&= (\rho \otimes \imath)(\rho(x)(y \otimes 1)(1 \otimes c))(1 \otimes a \otimes 1) \\
&= (\rho \otimes \imath)(\rho(x)(1 \otimes c)(y \otimes 1))(1 \otimes a \otimes 1) \\
&= (\rho \otimes \imath)(\rho(x)(1 \otimes c))(\rho(y) \otimes 1)(1 \otimes a \otimes 1) \\
&= (\rho \otimes \imath)(\rho(x)(1 \otimes c))(\rho(y)(1 \otimes a) \otimes 1) \\
&\overset{3.2}{=} (\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(E \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes c)(\rho(y)(1 \otimes a) \otimes 1) \\
&= (\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(E\rho(y)(1 \otimes a) \otimes c) \\
&\overset{3.5}{=} (\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(\rho(y)(1 \otimes a) \otimes c) \\
&= (\imath \otimes \Delta)(\rho(x))(\sum_j r_j \otimes b_j \otimes c) \\
&= \sum_j (\imath \otimes \Delta)(\rho(x)(r_j \otimes 1))(1 \otimes b_j \otimes c),
\end{aligned}$$

para todo $c \in A$, logo $(\rho \otimes \imath)(\rho(x)(y \otimes 1))(1 \otimes a \otimes 1) = \sum_j (\imath \otimes \Delta)(\rho(x)(r_j \otimes 1))(1 \otimes b_j \otimes 1)$, onde $\rho(y)(1 \otimes a) = \sum_j r_j \otimes b_j$. □

Lema 4.1.9. *Se (R, ρ, E) um A-comódulo álgebra parcial simétrico reduzido, então*

$$(\rho \otimes \imath)((x \otimes 1)\rho(y)) = (\rho(x) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y)),$$

para todo $x, y \in R$.

Demonstração. Sejam $x, y \in R$ e $a \in A$,

$$(\rho \otimes \imath)((x \otimes 1)\rho(y))(1 \otimes 1 \otimes a) = \rho(x y^0) \otimes y^1 a$$

$$
\begin{aligned}
&= (\rho \otimes \imath)((x \otimes 1)\rho(y)(1 \otimes a)) \\
&\overset{(*)}{=} (\rho(x) \otimes 1)(\rho \otimes \imath)(\rho(y)(1 \otimes a)) \\
&\overset{3.1}{=} (\rho(x) \otimes 1)(E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y))(1 \otimes 1 \otimes a) \\
&= (\rho(x)E \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y))(1 \otimes 1 \otimes a) \\
&\overset{3.5}{=} (\rho(x) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y))(1 \otimes 1 \otimes a),
\end{aligned}
$$

para todo $a \in A$, ou seja, $(\rho \otimes \imath)((x \otimes 1)\rho(y)) = (\rho(x) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y))$. Na igualdade $(*)$, estamos usando o fato da aplicação ρ ser um homomorfismo. □

4.2 Contexto de Morita

Nesta seção consideramos $\rho : R \longrightarrow M(R \otimes A)$ uma coação parcial simétrica reduzida de um grupo quântico algébrico A em uma álgebra idempotente R com produto não degenerado.

Fixamos φ uma integral à esquerda em A e denotamos por $\widehat{A}$ a sua álgebra dual. A Proposição 1.2.9 nos mostra a existência de um único elemento invertível $\delta \in M(A)$ tal que

$$(\varphi \otimes \imath)\Delta(a) = \varphi(a)\delta,$$

para todo $a \in A$, cuja inversa é dada por $S(\delta)$. Além disso, quando olhamos para a extensão da aplicação Δ, temos $\Delta(\delta) = \delta \otimes \delta$.

Observação 4.2.1. Note que, pela equação 1.15, o elemento δ induz um automorfismo de álgebras via

$$
\begin{aligned}
\phi : \widehat{A} &\longrightarrow \widehat{A} \\
\varphi(\_\, a) &\longmapsto \phi(\varphi(\_\, a)) := \varphi(\_\, \delta a),
\end{aligned}
$$

dessa maneira, se $\widehat{a} = \varphi(\_a)$ e $\widehat{b} = \varphi(\_b) \in \widehat{A}$, denotamos $\widehat{a}^\delta = \varphi(\_\delta a)$ e, então $\widehat{a}^\delta \widehat{b}^\delta = (\widehat{ab})^\delta$.

Definição 4.2.2. Sejam (R, ρ, E) um A-comódulo álgebra parcial e $\Omega = \{(i \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes a)); x \in R, a \in A\} \subseteq R$. Dizemos que ρ é uma coação parcial *restrita* se é reduzida e se existe $a \in A$ tal que

$$(i \otimes \varphi)(E(1 \otimes a)) = 1_{M(R)}|_\Omega$$

.

Exemplo 4.2.3. Seja a coação parcial dada no Exemplo 3.1.14 e consideremos $a = \delta_q \in A_G$, para $q \in N$. Então, S é um A_G-comódulo álgebra parcial simétrico restrito.

Exemplo 4.2.4. Seja a coação parcial dada no Exemplo 3.1.18 e consideremos $a = \delta_q \in A_G$, para $q \in N$. Então, R é um A_G-comódulo álgebra parcial simétrico restrito.

Exemplo 4.2.5. Seja a coação parcial dada no Exemplo 3.1.20 e consideremos $a = e_0 \in A_G$. Então, R é um A_G-comódulo álgebra parcial simétrico restrito.

Observação 4.2.6. Note que, se (R, ρ, E) é um A-comódulo álgebra parcial simétrico restrito, então R é um $\hat{A}$-módulo álgebra parcial simétrico onde, pela Proposição 3.3.1, a ação é dada por

$$\begin{aligned} \cdot : \widehat{A} \otimes R &\longrightarrow R \\ \varphi(\_a) \otimes x &\longmapsto \varphi(\_a) \cdot x := (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(1 \otimes a)). \end{aligned}$$

A hipótese de restrição implica que o produto em $\hat{A} \cdot R$ é não degenerado, pois se dado $\widehat{b} \cdot y \in \widehat{A} \cdot R$ tal que $(\widehat{a} \cdot x)(\widehat{b} \cdot y) = 0$, para qualquer $\widehat{a} \cdot x$, então pela Proposição 2.2.5, $ze(\widehat{c})(\widehat{b} \cdot y) = 0$, para todo $z \in R$ e $\widehat{c} \in \widehat{A}$, logo $e(\widehat{c})(\widehat{b} \cdot y) = 0$, para qualquer

$\widehat{c} \in \widehat{A}$. Pela hipótese de restrição, existe um $a' \in A$ tal que $(i \otimes \varphi)(E(1 \otimes a')) = 1_{M(R)}|_{\Omega}$, assim

$$\begin{aligned} e(\widehat{a'})(\widehat{b} \cdot y) &= (\imath \otimes \varphi)(E(1 \otimes a'))(\imath \otimes \varphi)(\rho(y)(1 \otimes b)) \\ &= 1_{M(R)}|_{\Omega}(\imath \otimes \varphi)(\rho(y)(1 \otimes b)) \\ &= (\imath \otimes \varphi)(\rho(y)(1 \otimes b)) \\ &= \widehat{b} \cdot y. \end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{b} \cdot y = 0$. De maneira similar, mostramos que se $(\widehat{b} \cdot y)(\widehat{a} \cdot x) = 0$, para qualquer $\widehat{a} \cdot x \in \widehat{A} \cdot R$, então $\widehat{b} \cdot y = 0$.

Nessas condições, a ação parcial simétrica de $\widehat{A}$ em R pode ser estendida para uma "ação" de $\widehat{A}$ em $M(R)$.

A extensão da ação parcial de $\widehat{A}$ em $M(R)$ é fundamental para a construção de duas álgebras.

Proposição 4.2.7. *Se (R, ρ, E) é um A-comódulo álgebra parcial simétrico restrito, então:*

(i) $(\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}$ *é uma subálgebra de* $R\#\widehat{A}$*;*

(ii) $R^{\underline{coA}} \subseteq R^{\underline{\hat{A}}}$.

Demonstração. (i) Pela Proposição 2.2.5, segue que $e(\widehat{A})R = \widehat{A} \cdot R = Re(\widehat{A})$ é uma subálgebra de R e assim, $\widehat{A} \cdot R$ é um $\widehat{A}$-submódulo álgebra parcial de R, pois

$$\varphi(\_a) \cdot (\varphi(\_b) \cdot x) \overset{2.2.3}{=} e(\varphi(\_a)_1)(\varphi(\_a)_2 \varphi(\_b) \cdot x) \in e(\widehat{A})R = \widehat{A} \cdot R,$$

para todo $\varphi(\_a), \varphi(\_b) \in \widehat{A}$ e $x \in R$. Portanto, $(\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}$ é uma subálgebra de $R\#\widehat{A}$.

(ii) O resultado segue das Proposições 3.3.2 e 2.2.9. $\square$

Abaixo, seguem alguns resultados úteis para a construção do contexto de Morita.

Lema 4.2.8. *$\hat{A} \cdot R$ é um $((\hat{A} \cdot R)\#\hat{A}, R^{\underline{coA}})$-bimódulo unitário com as seguintes estruturas:*

$$\begin{aligned} (x\#\hat{a}) \triangleright y &= x(\hat{a} \cdot y) \\ x \triangleleft m &= xm \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \hat{A} \cdot R$, $\hat{a} \in \hat{A}$ e $m \in R^{\underline{coA}}$.

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em três etapas.

• $\widehat{A} \cdot R$ é um $(\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}$-módulo à esquerda unitário. De fato, sejam $x, y, z \in \widehat{A} \cdot R$ e $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{A}$,

$$\begin{aligned} (x\#\widehat{a}) \triangleright ((y\#\widehat{b}) \triangleright z) &= (x\#\widehat{a}) \triangleright (y(\widehat{b} \cdot z)) \\ &= x(\widehat{a} \cdot (y(\widehat{b} \cdot z))) \\ &= x(\widehat{a}_1 \cdot y)(\widehat{a}_2\widehat{b} \cdot z) \\ &= (x(\widehat{a}_1 \cdot y)\#\widehat{a}_2\widehat{b}) \triangleright z \\ &= ((x\#\widehat{a})(y\#\widehat{b})) \triangleright z, \end{aligned}$$

ou seja, $(x\#\widehat{a}) \triangleright ((y\#\widehat{b}) \triangleright z) = ((x\#\widehat{a})(y\#\widehat{b})) \triangleright z$. Para verificarmos que o módulo é unitário, vamos fazer um abuso de notação, ao utilizarmos as seguintes igualdades $R^2 = R$ e $e(\widehat{A})R = \widehat{A} \cdot R = Re(\widehat{A})$, pois as aplicaçõs lineares envolvidas são todas $\Bbbk$-lineares, logo

$$\begin{aligned} \widehat{a} \cdot x &= ye(\widehat{b}) \\ &= rse(\widehat{b}) \\ &= r(\widehat{c} \cdot t) \\ &\overset{(iii)2.1.2}{=} r(\widehat{c} \cdot \widehat{d} \cdot t) \\ &\overset{2.2.3}{=} r(\sum_i e(\widehat{c}_i)(\widehat{d}_i \cdot t)) \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{cl}
\stackrel{(iii)2.1.2}{=} & \sum_i re(\widehat{c_i})(\widehat{d_i} \cdot \widehat{e} \cdot t) \\
= & (\sum_i re(\widehat{c_i})\#\widehat{d_i}) \triangleright (\widehat{e} \cdot t) \in ((\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}) \triangleright (\widehat{A} \cdot R),
\end{array}
$$

onde $\Delta(\widehat{c})(1 \otimes \widehat{d}) = \sum_i \widehat{c_i} \otimes \widehat{d_i}$ e, portanto $((\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}) \triangleright (\widehat{A} \cdot R) = \widehat{A} \cdot R$.

• $\widehat{A} \cdot R$ é um $R^{\underline{coA}}$-módulo à direita unitário. Consideramos $m, n \in R^{\underline{coA}}$ e $\widehat{a} \cdot x \in \widehat{A} \cdot R$, logo

$$
\begin{array}{rcl}
((\widehat{a} \cdot x) \triangleleft m) \triangleleft n & = & ((\widehat{a} \cdot x)m) \triangleleft n \\
& = & ((\widehat{a} \cdot x)m)n \\
& \stackrel{3.3.2}{=} & (\widehat{a} \cdot xm)n \\
& \stackrel{3.3.2}{=} & (\widehat{a} \cdot (xm)n) \\
& = & (\widehat{a} \cdot x(mn)) \\
& \stackrel{3.3.2}{=} & (\widehat{a} \cdot x)(mn) \\
& = & (\widehat{a} \cdot x) \triangleleft (mn),
\end{array}
$$

então $((\widehat{a} \cdot x) \triangleleft m) \triangleleft n = (\widehat{a} \cdot x) \triangleleft (mn)$. E, pelo fato, de $1_{M(R)} \in R^{\underline{coA}}$, segue que o módulo de $R^{\underline{coA}}$ sobre $\widehat{A} \cdot R$ é unitário.

• Para finalizar, verificamos a compatibilidade entre as ações $\triangleright$ e $\triangleleft$. De fato, sejam $z\#\widehat{a} \in (\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}$, $\widehat{b} \cdot x \in \widehat{A} \cdot R$ e $m \in R^{\underline{coA}}$,

$$
\begin{array}{rcl}
(z\#\widehat{a}) \triangleright ((\widehat{b} \cdot x) \triangleleft m) & = & (z\#\widehat{a}) \triangleright ((\widehat{b} \cdot x)m) \\
& = & z(\widehat{a} \cdot ((\widehat{b} \cdot x)m)) \\
& \stackrel{3.3.2}{=} & z((\widehat{a} \cdot (\widehat{b} \cdot x))m) \\
& = & (z(\widehat{a} \cdot (\widehat{b} \cdot x)))m \\
& = & (z(\widehat{a} \cdot (\widehat{b} \cdot x))) \triangleleft m \\
& = & ((z\#\widehat{a}) \triangleright (\widehat{b} \cdot x)) \triangleleft m,
\end{array}
$$

logo $(z\#\widehat{a}) \triangleright ((\widehat{b} \cdot x) \triangleleft m) = ((z\#\widehat{a}) \triangleright (\widehat{b} \cdot x)) \triangleleft m$.

Portanto, $\hat{A} \cdot R$ é um $((\hat{A} \cdot R)\#\hat{A}, R^{\underline{coA}})$-bimódulo unitário. $\square$

Lema 4.2.9. *$\widehat{A} \cdot R$ é um $(R^{\underline{coA}}, (\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A})$-bimódulo unitário com as seguintes estruturas:*

$$\begin{aligned} x \triangleleft (y\#\widehat{a}) &= S^{-1}(\widehat{a}^{\delta}) \cdot (xy) \\ m \triangleright x &= mx \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \widehat{A} \cdot R$, $\widehat{a} \in \widehat{A}$ e $m \in R^{\underline{coA}}$.

Demonstração. A prova também será feita em três partes.

- $\widehat{A} \cdot R$ é um $(\widehat{A} \cdot R)\#\hat{A}$-módulo à direita unitário. Sejam $x \in \widehat{A} \cdot R$ e $y\#\widehat{a}, z\#\widehat{b} \in (\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}$,

$$\begin{aligned} (x \triangleleft (y\#\widehat{a})) \triangleleft (z\#\widehat{b}) &= (S^{-1}(\widehat{a}^{\delta}) \cdot (xy)) \triangleleft (z\#\widehat{b}) \\ &= S^{-1}(\widehat{b}^{\delta}) \cdot (S^{-1}(\widehat{a}^{\delta}) \cdot (xy)) \\ &\overset{(v)2.1.2}{=} (S^{-1}((\widehat{b}^{\delta})_2)S^{-1}(\widehat{a}^{\delta}) \cdot (xy))(S^{-1}((\widehat{b}^{\delta})_1) \cdot z) \\ &= (S^{-1}(\widehat{a}^{\delta}(\widehat{b}^{\delta})_2) \cdot (xy))(S^{-1}((\widehat{b}^{\delta})_1) \cdot z) \\ &= (S^{-1}((\widehat{a}^{\delta})_3(\widehat{b}^{\delta})_2) \cdot (xy))(S^{-1}((\widehat{b}^{\delta})_1)S^{-1}((\widehat{a}^{\delta})_2)(\widehat{a}^{\delta})_1 \cdot z) \\ &= (S^{-1}((\widehat{a}^{\delta})_3(\widehat{b}^{\delta})_2) \cdot (xy))(S^{-1}((\widehat{a}^{\delta})_2(\widehat{b}^{\delta})_1)(\widehat{a}^{\delta})_1 \cdot z) \\ &= (S^{-1}((((\widehat{a}^{\delta})_2\widehat{b}^{\delta})_2) \cdot (xy))(S^{-1}(((\widehat{a}^{\delta})_2\widehat{b}^{\delta})_1)(\widehat{a}^{\delta})_1 \cdot z) \\ &\overset{(i)2.1.2}{=} S^{-1}((\widehat{a}^{\delta})_2\widehat{b}^{\delta}) \cdot ((xy)((\widehat{a}^{\delta})_1 \cdot z)) \\ &\overset{(*)}{=} S^{-1}((\widehat{a}_2\widehat{b})^{\delta}) \cdot ((xy)(\widehat{a}_1 \cdot z)) \\ &= S^{-1}((\widehat{a}_2\widehat{b})^{\delta}) \cdot (x(y(\widehat{a}_1 \cdot z))) \\ &= x \triangleleft (y(\widehat{a}_1 \cdot z)\#\widehat{a}_2\widehat{b}) \\ &= x \triangleleft ((y\#\widehat{a})(z\#\widehat{b})), \end{aligned}$$

então $(x \triangleleft (y\#\widehat{a})) \triangleleft (z\#\widehat{b}) = x \triangleleft ((y\#\widehat{a})(z\#\widehat{b}))$. Na igualdade $(*)$ usamos

$$\Delta(\widehat{a}^{\lambda})(1 \otimes \widehat{b}^{\lambda}) = \widehat{a}_1 \otimes (\widehat{a}_2\widehat{b})^{\lambda},$$

para todo $\widehat{a}$ e $\widehat{b} \in \widehat{A}$. De fato,

$$\begin{aligned}
(\Delta(\widehat{a}^\lambda)(1 \otimes \widehat{b}^\lambda))(c \otimes d) &\overset{1.7}{=} (\widehat{a}^\lambda \otimes \widehat{b}^\lambda)((c \otimes 1)\Delta(d)) \\
&= (\varphi(_\delta a) \otimes \varphi(_\delta b))((c \otimes 1)\Delta(d)) \\
&= \varphi(cd_1\delta a)\varphi(d_2\delta b) \\
&= (\varphi(_a) \otimes \varphi(_b))((c \otimes 1)\Delta(d)(\delta \otimes \delta)) \\
&= (\varphi(_a) \otimes \varphi(_b))((c \otimes 1)\Delta(d)\Delta(\delta)) \\
&= (\varphi(_a) \otimes \varphi(_b))((c \otimes 1)\Delta(d\delta)) \\
&\overset{1.7}{=} (\Delta(\widehat{a})(1 \otimes \widehat{b}))(c \otimes d\delta) \\
&= (\widehat{a}_1 \otimes \widehat{a}_2\widehat{b})(c \otimes d\delta) \\
&= (\widehat{a}_1 \otimes (\widehat{a}_2\widehat{b})^\lambda)(c \otimes d),
\end{aligned}$$

para qualquer $c, d \in A$, concluindo o que queríamos. Agora, para verificarmos que o módulo é unitário, analogamente ao lema anterior, vamos fazer um abuso nas notações, logo

$$\begin{aligned}
\widehat{a} \cdot x &\overset{(iii)2.1.2}{=} \widehat{a} \cdot (\widehat{b} \cdot x) \\
&\overset{(*)}{=} S^{-1}(\widehat{c}^\delta) \cdot (\widehat{b} \cdot x) \\
&= S^{-1}(\widehat{c}^\delta) \cdot (ye(\widehat{d})) \\
&= S^{-1}(\widehat{c}^\delta) \cdot (rse(\widehat{d})) \\
&= S^{-1}(\widehat{c}^\delta) \cdot (r(\widehat{f} \cdot t)) \\
&\overset{(iii)2.1.2}{=} S^{-1}(\widehat{c}^\delta) \cdot (r(\widehat{f} \cdot (\widehat{g} \cdot t))) \\
&\overset{2.2.3}{=} S^{-1}(\widehat{c}^\delta) \cdot \sum_i (re(\widehat{f}_i)(\widehat{g}_i \cdot t)) \\
&= S^{-1}(\widehat{c}^\delta) \cdot (\sum_{i,j} (\widehat{h_{ij}} \cdot u_{ij})(\widehat{g}_i \cdot t)) \\
&= \sum_{i,j} (\widehat{h_{ij}} \cdot u_{ij}) \triangleleft ((\widehat{g}_i \cdot t)\#\widehat{c}) \in (\widehat{A} \cdot R) \triangleleft ((\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}),
\end{aligned}$$

onde na igualdade $(*)$, usamos a bijetividade da aplicação S juntamente com a propriedade $\delta S(\delta) = 1_{M(A)}$, e portanto $\widehat{A} \cdot R = (\widehat{A} \cdot R) \triangleleft ((\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A})$.

• $\widehat{A} \cdot R$ é um $R^{\underline{coA}}$-módulo à esquerda unitário. Consideramos $m, n \in R^{\underline{coA}}$ e $\widehat{a} \cdot x \in \widehat{A} \cdot R$,

$$\begin{aligned}
m \triangleright (n \triangleright (\widehat{a} \cdot x)) &= m \triangleright (n(\widehat{a} \cdot x)) \\
&= m(n(\widehat{a} \cdot x)) \\
&= mn(\widehat{a} \cdot x) \\
&= mn \triangleright (\widehat{a} \cdot x),
\end{aligned}$$

logo $m \triangleright (n \triangleright (\widehat{a} \cdot x)) = mn \triangleright (\widehat{a} \cdot x)$. Portanto, pelo fato de $R^{\underline{coA}}$ possuir unidade, $\widehat{A} \cdot R$ é um $R^{\underline{coA}}$-módulo à esquerda unitário.

• Vamos verificar a compatibilidade entre as ações $\triangleright$ e $\triangleleft$,

$$\begin{aligned}
(m \triangleright (\widehat{a} \cdot x)) \triangleleft ((\widehat{b} \cdot y)\#\widehat{c}) &= (m(\widehat{a} \cdot x)) \triangleleft ((\widehat{b} \cdot y)\#\widehat{c}) \\
&= S^{-1}(\widehat{c}^{\delta}) \cdot (m(\widehat{a} \cdot x)(\widehat{b} \cdot y)) \\
&= S^{-1}(\widehat{c}^{\delta}) \cdot (m(\sum_i \widehat{d}_i \cdot z_i)) \\
&\overset{2.2.3}{=} (S^{-1}((\widehat{c}^{\delta})_2) \cdot m)(\sum_i S^{-1}((\widehat{c}^{\delta})_1)\widehat{d}_i \cdot z_i) \\
&\overset{3.3.2}{=} m|_{\widehat{A} \cdot R}(S^{-1}((\widehat{c}^{\delta})_2) \cdot 1_{M(R)})(\sum_i S^{-1}((\widehat{c}^{\delta})_1)\widehat{d}_i \cdot z_i) \\
&\overset{2.2.3}{=} m|_{\widehat{A} \cdot R}(S^{-1}(\widehat{c}^{\delta}) \cdot \sum_i \widehat{d}_i \cdot z_i) \\
&= m(S^{-1}(\widehat{c}^{\delta}) \cdot ((\widehat{a} \cdot x)(\widehat{b} \cdot y))) \\
&= m \triangleright (S^{-1}(\widehat{c}^{\delta}) \cdot ((\widehat{a} \cdot x)(\widehat{b} \cdot y))) \\
&= m \triangleright ((\widehat{a} \cdot x) \triangleleft ((\widehat{b} \cdot y)\#\widehat{c})),
\end{aligned}$$

ou seja, $(m \triangleright (\widehat{a} \cdot x)) \triangleleft ((\widehat{b} \cdot y)\#\widehat{c}) = m \triangleright ((\widehat{a} \cdot x) \triangleleft ((\widehat{b} \cdot y)\#\widehat{c}))$, para todo $m \in R^{\underline{coA}}$, $\widehat{a} \cdot x, \widehat{b} \cdot y \in \widehat{A} \cdot R$ e $\widehat{c} \in \widehat{A}$.

Portanto, $\widehat{A} \cdot R$ é um $(R^{\underline{coA}}, (\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A})$-bimódulo unitário. $\square$

No que segue, definimos duas aplicações $(\ ,\ )$ e $[\ ,\ ]$ utilizando os lemas acima.

Lema 4.2.10. *Seja (R, ρ, E) uma coação parcial simétrica restrita, então a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} (\ ,\ ) : (\widehat{A} \cdot R) \otimes_{(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}} (\widehat{A} \cdot R) & \longrightarrow & \underline{R^{coA}} \\ x \otimes\ y & \longmapsto & (x, y) = (id \otimes \varphi)\rho(xy) \end{array}$$

é $\underline{R^{coA}}$-bilinear satisfazendo $(x \triangleleft (y\#\widehat{a}), z) = (x, (y\#\widehat{a}) \triangleright z)$, para todo $x, y, z \in \widehat{A} \cdot R$, $\widehat{a} \in \widehat{A}$.

Demonstração. Dividimos a demonstração em etapas, para facilitar o entendimento.

- $(id \otimes \varphi)\rho(x) \in M(R)$, para todo $x \in \widehat{A} \cdot R$. De fato, para qualquer $y \in R$, definimos

$$\begin{aligned} ((\imath \otimes \varphi)\rho(x))y &= (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(y \otimes 1)) \\ y((\imath \otimes \varphi)\rho(x)) &= (\imath \otimes \varphi)((y \otimes 1)\rho(x)), \end{aligned}$$

assim, abaixo verificamos a compatibilidade entre esses multiplicadores,

$$\begin{aligned} y(((\imath \otimes \varphi)\rho(x))z) &= y((\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(z \otimes 1))) \\ &= y(\imath \otimes \varphi)(\sum_i z_i \otimes a_i) \\ &= \sum_i y z_i \varphi(b_i) \\ &= (\imath \otimes \varphi)((y \otimes 1)(\sum_i z_i \otimes a_i)) \\ &= (\imath \otimes \varphi)((y \otimes 1)\rho(x)(z \otimes 1)) \\ &= (\imath \otimes \varphi)((\sum_j y_j \otimes b_j)(z \otimes 1)) \\ &= \sum_j y_j z \varphi(b_j) \\ &= ((\imath \otimes \varphi)(\sum_j y_j \otimes b_j))z \\ &= ((\imath \otimes \varphi)((y \otimes 1)\rho(x)))z \\ &= (y((\imath \otimes \varphi)\rho(x)))z \end{aligned}$$

ou seja, $y(((\imath\otimes\varphi)\rho(x))z) = (y((\imath\otimes\varphi)\rho(x)))z$, para todo $y, z \in R$, logo $(\imath\otimes\varphi)\rho(x) \in M(R)$, para todo $x \in \widehat{A} \cdot R$.

- $(\imath \otimes \varphi)\rho(x) \in R^{\underline{coA}}$, para qualquer $x \in \widehat{A} \cdot R$. Seja $z \otimes a \in R \otimes A$, e pela Proposição 3.1.10 escrevemos $E(z \otimes a) = \sum_i \rho(z_i)(1 \otimes a_i) = \sum_{i,j} r_{ij} \otimes b_{ij}$, logo

$$\begin{aligned}
\rho((\imath \otimes \varphi)\rho(x))(z \otimes a) &= \rho((\imath \otimes \varphi)\rho(x)) \sum_i \rho(z_i)(1 \otimes a_i) \\
&\overset{3.2.3}{=} \sum_i \rho(((\imath \otimes \varphi)\rho(x))z_i)(1 \otimes a_i) \\
&= \sum_i \rho((\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(z_i \otimes 1)))(1 \otimes a_i) \\
&= \sum_i \rho(x^0 z_i)(1 \otimes a_i)\varphi(x^1) \\
&= \sum_i (\imath \otimes \imath \otimes \varphi)(\rho(x^0 z_i)(1 \otimes a_i) \otimes x^1) \\
&= (\imath \otimes \imath \otimes \varphi)(\sum_i (\rho \otimes \imath)(x^0 z_i \otimes x^1)(1 \otimes a_i \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \imath \otimes \varphi)(\sum_i (\rho \otimes \imath)(\rho(x)(z_i \otimes 1))(1 \otimes a_i \otimes 1)) \\
&\overset{4.1.8}{=} (\imath \otimes \imath \otimes \varphi)(\sum_{i,j} (\imath \otimes \Delta)(\rho(x)(r_{ij} \otimes 1))(1 \otimes b_{ij} \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \imath \otimes \varphi)(\sum_{i,j} x^0 r_{ij} \otimes \Delta(x^1)(b_{ij} \otimes 1)) \\
&= \sum_{i,j} x^0 r_{ij} \otimes (\imath \otimes \varphi)(\Delta(x^1)(b_{ij} \otimes 1)) \\
&\overset{1.2.1}{=} \sum_{i,j} x^0 r_{ij} \otimes b_{ij}\varphi(x^1) \\
&= \sum_{i,j} (\imath \otimes \varphi)(\rho(x)(r_{ij} \otimes 1)) \otimes b_{ij} \\
&= \sum_{i,j} (((\imath \otimes \varphi)\rho(x))r_{ij}) \otimes b_{ij} \\
&= ((\imath \otimes \varphi)\rho(x) \otimes 1)(\sum_{i,j} r_{ij} \otimes b_{ij}) \\
&= ((\imath \otimes \varphi)\rho(x) \otimes 1)(\sum_i \rho(z_i)(1 \otimes a_i)) \\
&= ((\imath \otimes \varphi)\rho(x) \otimes 1)E(z \otimes a),
\end{aligned}$$

para todo $z \otimes a \in R \otimes A$, logo $\rho((\imath \otimes \varphi)\rho(x)) = ((\imath \otimes \varphi)\rho(x) \otimes 1)E$. De modo similar, mostramos $\rho((\imath\otimes\varphi)\rho(x)) = E((\imath\otimes\varphi)\rho(x)\otimes 1)$, ou seja, $(\imath\otimes\varphi)\rho(x)\in R^{\underline{coA}}$, concluindo que a aplicação $(\ ,\ )$ está bem definida.

• $(\ ,\ )$ é $(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}$-balanceada. Sejam $x, y, z \in \widehat{A}\cdot R$, $\widehat{a}\in\widehat{A}$ e escrevemos $\widehat{a}^{\delta} = \varphi(\_\delta a) \overset{1.2.12}{=} \varphi(c\ \_)$, logo $S^{-1}(\widehat{a}^{\delta}) = \varphi\circ S^{-1}(\_\ S(c))$ e então

$$
\begin{aligned}
&(y\triangleleft(x\#\widehat{a}), z)(r) = \\
&\quad = (S^{-1}(\widehat{a}^{\delta})\cdot(yx), z)(r) \\
&\quad = ((\imath\otimes\varphi\circ S^{-1})(\rho(yx)(1\otimes S(c))), z)(r) \\
&\quad = ((yx)^0, z)(r)\varphi\circ S^{-1}((yx)^1 S(c)) \\
&\quad = ((\imath\otimes\varphi)\rho((xy)^0 z))r\varphi\circ S^{-1}((yx)^1 S(c)) \\
&\quad = (\imath\otimes\varphi)(\rho((xy)^0 z)(r\otimes 1))\varphi\circ S^{-1}((yx)^1 S(c)) \\
&\quad = (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi\circ S^{-1})(\rho((xy)^0 z)(r\otimes 1)\otimes(yx)^1 S(c)) \\
&\quad = (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi\circ S^{-1})((\rho\otimes\imath)((xy)^0 z\otimes(yx)^1 S(c))(r\otimes 1\otimes 1)) \\
&\quad = (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi\circ S^{-1})((\rho\otimes\imath)(\rho(yx)(1\otimes S(c))(z\otimes 1))(r\otimes 1\otimes 1)) \\
&\quad = (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi\circ S^{-1})((\rho\otimes\imath)(\rho(yx)(1\otimes S(c)))(\rho(z)(r\otimes 1)\otimes 1)) \\
&\quad \overset{3.3}{=} (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi\circ S^{-1})((\imath\otimes\Delta)(\rho(yx))(E\otimes 1)(\rho(z)(r\otimes 1)\otimes S(c))) \\
&\quad = (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi\circ S^{-1})((\imath\otimes\Delta)(\rho(yx))(E\rho(z)(r\otimes 1)\otimes S(c))) \\
&\quad \overset{3.5}{=} (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi\circ S^{-1})((\imath\otimes\Delta)(\rho(yx))(\rho(z)(r\otimes 1)\otimes S(c))) \\
&\quad = (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi\circ S^{-1})((\imath\otimes\Delta)(\rho(yx))(\sum_i r_i\otimes d_i\otimes S(c))) \\
&\quad = (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi\circ S^{-1})(\sum_i(\imath\otimes\Delta)(\rho(yx)(r_i\otimes 1))(1\otimes d_i\otimes S(c))) \\
&\quad = (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi\circ S^{-1})(\sum_i(yx)^0 r_i\otimes\Delta((yx)^1)(d_i\otimes S(c))) \\
&\quad = \sum_i (yx)^0 r_i\varphi(((yx)^1)_1 d_i)\varphi\circ S^{-1}(((yx)^1)_2 S(c)) \\
&\quad = \sum_i (yx)^0 r_i\varphi(((yx)^1)_1 d_i)\varphi(cS^{-1}(((yx)^1)_2)) \\
&\quad = \sum_i (yx)^0 r_i\varphi(((yx)^1)_1 d_i)\varphi(S^{-1}(((yx)^1)_2)\delta a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i (yx)^0 r_i \varphi(S^{-1}(((yx)^1)_2)\varphi(((yx)^1)_1 d_i)\delta a) \\
&\overset{1.2.9}{=} \sum_i (yx)^0 r_i \varphi(S^{-1}(((yx)^1)_2)((\varphi\otimes\imath)\Delta(((yx)^1)_1 d_i))a) \\
&= \sum_i (yx)^0 r_i \varphi(S^{-1}(((yx)^1)_2)(\varphi\otimes\imath)(\Delta(((yx)^1)_1 d_i)(1\otimes a)) \\
&= \sum_i (yx)^0 r_i \varphi(((yx)^1)_1 (d_i)_1)\varphi(S^{-1}(((yx)^1)_3)((yx)^1)_2 (d_i)_2 a) \\
&= \sum_i (yx)^0 r_i \varphi((yx)^1 (d_i)_1)\varphi((d_i)_2 a) \\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)(\sum_i (yx)^0 r_i \otimes (yx)^1 (d_i)_1 \otimes (d_i)_2 a) \\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)(\sum_i (yx)^0 r_i \otimes ((yx)^1\otimes 1)\Delta(d_i)(1\otimes a)) \\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)(\sum_i (\rho(yx)(r_i\otimes 1)\otimes 1)(1\otimes\Delta(d_i)(1\otimes a)) \\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((\rho(yx)\otimes 1)(\sum_i r_i\otimes\Delta(d_i)(1\otimes a)) \\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((\rho(yx)\otimes 1)((\imath\otimes\Delta)(\sum_i r_i\otimes d_i)(1\otimes 1\otimes a))) \\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((\rho(yx)\otimes 1)((\imath\otimes\Delta)(\rho(z)(r\otimes 1))(1\otimes 1\otimes a))) \\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((\rho(yx)\otimes 1)((\imath\otimes\Delta)(\rho(z))(r\otimes 1\otimes a))) \\
&\overset{3.5}{=} (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((\rho(yx)\otimes 1)(E\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(z))(r\otimes 1\otimes a)) \\
&\overset{3.1}{=} (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((\rho(yx)\otimes 1)(\rho\otimes\imath)(\rho(z)(1\otimes a))(r\otimes 1\otimes 1)) \\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((\rho(yx)\otimes 1)(\rho\otimes\imath)(z^0\otimes z^1 a)(r\otimes 1\otimes 1)) \\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((\rho(yx)\rho(z^0)\otimes z^1 a)(r\otimes 1\otimes 1)) \\
&= (\imath\otimes\varphi)(\rho(yxz^0)(r\otimes 1))\varphi(z^1 a) \\
&= (\imath\otimes\varphi)(\rho(yx(\widehat{a}\cdot z))(r\otimes 1)) \\
&= ((\imath\otimes\varphi)(\rho(yx(\widehat{a}\cdot z))))(r) \\
&= (y, (x\#\widehat{a})\triangleright z)(r),
\end{aligned}
$$

para qualquer $r\in R$, logo $(y\triangleleft(x\#\widehat{a}), z) = (y, (x\#\widehat{a})\triangleright z)$, ou seja, $(\ ,\ )$ é $(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}$-balanceada.

• $(\ ,\ )$ é $\underline{R^{coA}}$-bilinear. De fato, sejam $x, y \in \widehat{A} \cdot R$ e $m \in \underline{R^{coA}}$, então

$$\begin{aligned}
(m \triangleright x, y)(r) &= (mx, y)(r) \\
&= ((\imath \otimes \varphi)\rho((mx)y))r \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho((mx)y)(r \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho(m(xy))(r \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)(\rho(m)\rho(xy)(r \otimes 1)) \\
&\overset{3.6}{=} (\imath \otimes \varphi)((m \otimes 1)E\rho(xy)(r \otimes 1)) \\
&\overset{3.5}{=} (\imath \otimes \varphi)((m \otimes 1)\rho(xy)(r \otimes 1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi)((m \otimes 1)((xy)^0 r \otimes (xy)^1)) \\
&= m((xy)^0 r)\varphi((xy)^1) \\
&= m(\imath \otimes \varphi)(\rho(xy)(r \otimes 1)) \\
&= m(((\imath \otimes \varphi)(\rho(xy)))r) \\
&= (m((\imath \otimes \varphi)(\rho(xy)))r \\
&= (m(x, y))(r),
\end{aligned}$$

para todo $r \in R$, logo $(m \triangleright x, y) = m(x, y)$. Analogamente, $(x, y \triangleleft m) = (x, y)m$, para todo $x, y \in \widehat{A} \cdot R$ e $m \in \underline{R^{coA}}$, ou seja, $(\ ,\ )$ é $\underline{R^{coA}}$-bilinear. □

Lema 4.2.11. *Seja (R, ρ, E) uma coação parcial simétrica restrita, então a aplicação*

$$\begin{aligned}
\theta : (\widehat{A} \cdot R) \otimes_{\underline{R^{coA}}} (\widehat{A} \cdot R) &\longrightarrow (\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A} \\
x \otimes y &\longmapsto \theta(x \otimes y) := xy^0 \# \varphi(y^1{}_-)
\end{aligned}$$

é $\underline{R^{coA}}$-balanceada e $\theta(x \otimes y)(z \otimes a) = \theta(x \otimes y)(E(z \otimes a))$, para $x, y, z \in \widehat{A} \cdot R$ e $a \in A$.

Demonstração. A aplicação θ está bem definida, pois escrevendo $x = \sum_i e(\widehat{b_i})x_i$, temos

$$xy^0 \otimes y^1 = (x \otimes 1)\rho(y)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sum_i e(\widehat{b_i})x_i \otimes 1)\rho(y)\\
&= \sum_i (e(\widehat{b_i}) \otimes 1)(x_i \otimes 1)\rho(y),
\end{aligned}
$$

logo $xy^0\#\varphi(y^1\_) = \sum_i e(\widehat{b_i})x_i y^0\#\varphi(y^1\_) \in e(\widehat{A})R\#\widehat{A} = (\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}$, para qualquer $x, y \in \hat{A}\cdot R$.

Nosso próximo passo será verificar que θ é $R^{\underline{coA}}$-balanceada. De fato, consideramos $x, y \in \widehat{A}\cdot R$ e $m \in R^{\underline{coA}}$, logo

$$
\begin{aligned}
\theta(x \triangleleft m, y) &= \theta(xm, y)\\
&= (xm)y^0\#\varphi(y^1\_)\\
&= (\imath \otimes \varphi)((xm \otimes 1)\rho(y)(1 \otimes \_))\\
&\overset{3.5}{=} (\imath \otimes \varphi)((x \otimes 1)(m \otimes 1)E\rho(y)(1 \otimes \_))\\
&\overset{3.6}{=} (\imath \otimes \varphi)((x \otimes 1)\rho(m)\rho(y)(1 \otimes \_))\\
&= (\imath \otimes \varphi)((x \otimes 1)\rho(my)(1 \otimes \_))\\
&= x(my)^0\#\varphi((my)^1\_)\\
&= \theta(x, my)\\
&= \theta(x, m \triangleright y),
\end{aligned}
$$

ou seja, $\theta(x \triangleleft m, y) = \theta(x, m \triangleright y)$.

Para finalizar, mostramos que $\theta(x\otimes y)(z\otimes a) = \theta(x\otimes y)(E(z\otimes a))$, para qualquer $x, y, z \in \hat{A}\cdot R$ e $a \in A$. De fato, escrevendo $y = \sum_i \widehat{b_i}\cdot y_i \in \widehat{A}\cdot R$, temos

$$
\begin{aligned}
\theta(x \otimes y)(z \otimes a) &= \theta(x \otimes \sum_i \widehat{b_i}\cdot y_i)(z \otimes a)\\
&= \sum_i \theta(x \otimes (y_i)^0)\varphi((y_i)^1 b_i)(z \otimes a)\\
&= \sum_i (x(y_i)^{00}\#\varphi((y_i)^{01}\_)\varphi((y_i)^1 b_i))(z \otimes a)\\
&= \sum_i x(y_i)^{00} z\varphi((y_i)^{01}a)\varphi((y_i)^1 b_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)(\sum_i x(y_i)^{00} z \otimes (y_i)^{01} a \otimes (y_i)^1 b_i) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)(\sum_i (x \otimes 1)\rho((y_i)^0)(z \otimes a) \otimes (y_i)^1 b_i) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)(\sum_i (x \otimes 1 \otimes 1)(\rho \otimes \imath)((y_i)^0 \otimes (y_i)^1 b_i)(z \otimes a \otimes 1) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)(\sum_i (x \otimes 1 \otimes 1)(\rho \otimes \imath)(\rho(y_i)(1 \otimes b_i))(z \otimes a \otimes 1) \\
&\overset{3.3}{=} (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)(\sum_i (x \otimes 1 \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y_i))(E \otimes 1)(z \otimes a \otimes b_i)) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)(\sum_i (x \otimes 1 \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y_i))(E(z \otimes a) \otimes b_i)).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, repetindo o processo acima, temos

$$
\begin{aligned}
\theta(x \otimes y)(E(z \otimes a)) &= \theta(x \otimes \sum_i \widehat{b_i} \cdot y_i)(E(z \otimes a)) \\
&= \theta(x \otimes \sum_i \widehat{b_i} \cdot y_i)(\sum_j z_j \otimes c_j) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)(\sum_i (x \otimes 1 \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y_i))(E(\sum_j z_j \otimes c_j) \otimes b_i)) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)(\sum_i (x \otimes 1 \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y_i))(E(E(z \otimes a)) \otimes b_i)) \\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \varphi)(\sum_i (x \otimes 1 \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(y_i))(E(z \otimes a) \otimes b_i)),
\end{aligned}
$$

portanto, $\theta(x \otimes y)(z \otimes a) = \theta(x \otimes y)(E(z \otimes a))$, para qualquer $x, y, z \in \widehat{A} \cdot R$ e $a \in A$, concluindo a demonstração. $\square$

Observação 4.2.12. Nessas condições, o lema acima nos sugere definir a seguinte álgebra

$$B := (\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}|_{E((\widehat{A}\cdot R)\otimes A)}$$

com produto dado por

$$(x\#\widehat{a})|_{E((\widehat{A}\cdot R)\otimes A)}(y\#\widehat{b})|_{E((\widehat{A}\cdot R)\otimes A)} = [(x\#\widehat{a})(y\#\widehat{b})]|_{E((\widehat{A}\cdot R)\otimes A)},$$

para todo $x, y \in \widehat{A} \cdot R$ e $\widehat{a}, \widehat{b} \in \widehat{A}$. Em outras palavras, B é o espaço vetorial $(\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}$ com domínio restrito ao conjunto $E((\widehat{A} \cdot R) \otimes A)$ e estrutura de álgebra similar à $(\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}$.

Portanto, é importante observar que os Lemas 4.2.8, 4.2.9 e 4.2.10 continuam válidos para a álgebra B, logo para o que segue, a vamos escrever essa álgebra B apenas como $(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}$, afim da notação não ficar sobrecarregada.

Com as notações acima, obtemos o próximo resultado.

Lema 4.2.13. *Seja (R,ρ,E) uma coação parcial simétrica restrita, então a aplicação*

$$\begin{aligned}[\ ,\ ]:(\widehat{A}\cdot R)\otimes_{R^{\underline{coA}}}(\widehat{A}\cdot R) &\longrightarrow (\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}\\ x\otimes y &\longmapsto [x,y]=xy^0\#\varphi(y^1{}_-)\end{aligned}$$

é $(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}$-bilinear tal que $[x\triangleleft m,y]=[x,m\triangleright y]$, para todo $x,y\in\widehat{A}\cdot R$, $m\in R^{\underline{coA}}$.

Demonstração. A boa definição da aplicação $[\ ,\ ]$ e a propriedade $[x\triangleleft m,y]=[x,m\triangleright y]$, para todo $x,y\in\widehat{A}\cdot R$, $m\in R^{\underline{coA}}$ seguem diretamente do Lema 4.2.11, faltando apenas verificar que a aplicação $[\ ,\ ]$ é $(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}$-bilinear.

- Sejam $\widehat{a}\in\widehat{A}$ e $x,y,z\in\widehat{A}\cdot R$,

$$\begin{aligned}
&((x\#\widehat{a})[y,z])(w\otimes b)=\\
&\quad= ((x\#\widehat{a})(yz^0\#\varphi(z^1{}_-)))(w\otimes b)\\
&\quad= (x(\widehat{a}_1\cdot yz^0)\#\widehat{a}_2\varphi(z^1{}_-))(w\otimes b)\\
&\quad\overset{(*)}{=} (\sum_i x(\varphi(_-c_i)\cdot yz^0)\#\varphi(_-d_i))(w\otimes b)\\
&\quad= \sum_i x(\varphi(_-c_i)\cdot yz^0)w\varphi(bd_i)\\
&\quad= \sum_i x(yz^0)^0w\varphi((yz^0)^1c_i)\varphi(bd_i)\\
&\quad= \sum_i(\imath\otimes\varphi)(x(yz^0)^0w\otimes(yz^0)^1c_i)\varphi(bd_i)\\
&\quad= \sum_i(\imath\otimes\varphi)((x\otimes 1)(\rho(xy^0)(1\otimes c_i))(w\otimes 1))\varphi(bd_i)\\
&\quad= \sum_i(\imath\otimes\varphi)((x\otimes 1)\rho(xy^0)(w\otimes 1)(1\otimes c_i))\varphi(bd_i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i (\imath\otimes\varphi)((x\otimes 1)((yz^0)^0 w\otimes (yz^0)^1)(1\otimes c_i))\varphi(bd_i)\\
&= \sum_i x((yz^0)^0 w)\varphi((yz^0)^1 c_i)\varphi(bd_i)\\
&= x((yz^0)^0 w)(\sum_i \varphi(\_c_i)\otimes\varphi(\_d_i))((yz^0)^1\otimes b)\\
&= x((yz^0)^0 w)(\widehat{\Delta}(\widehat{a})(1\otimes\varphi(z^1\_)))((yz^0)^1\otimes b)\\
&\overset{1.7}{=} x((yz^0)^0 w)(\widehat{a}\otimes\varphi(z^1\_))(((yz^0)^1\otimes 1)\Delta(b))\\
&= x((yz^0)^0 w)\varphi((yz^0)^1 b_1 a)\varphi(z^1 b_2)\\
&= x((yz^0)^0 w)(\varphi\otimes\varphi(z^1\_))(((yz^0)^1\otimes 1)\Delta(b)(a\otimes 1))\\
&= x((yz^0)^0 w)(\varphi\otimes\varphi(z^1\_))(((yz^0)^1\otimes 1)(b_1 a\otimes b_2))\\
&= x((yz^0)^0 w)\varphi((yz^0)^1(b_1 a))\varphi(z^1 b_2)\\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)(x((yz^0)^0 w)\otimes (yz^0)^1(b_1 a)\otimes z^1 b_2)\\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((x\otimes 1\otimes 1)(\rho(yz^0)(w\otimes 1)\otimes z^1)(1\otimes b_1 a\otimes b_2))\\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((x\otimes 1\otimes 1)(\rho\otimes\imath)(yz^0\otimes z^1)(w\otimes 1\otimes 1)(1\otimes b_1 a\otimes b_2))\\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((x\otimes 1\otimes 1)(\rho\otimes\imath)((y\otimes 1)\rho(z))(w\otimes b_1 a\otimes b_2))\\
&\overset{4.1.9}{=} (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((x\otimes 1\otimes 1)(\rho(y)\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(z))(w\otimes\Delta(b)(a\otimes 1)))\\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((x\otimes 1)\rho(y)\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(z))(\imath\otimes\Delta)(1\otimes b)(w\otimes a\otimes 1))\\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((x\otimes 1)\rho(y)\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(z)(1\otimes b))(w\otimes a\otimes 1))\\
&= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((xy^0\otimes y^1\otimes 1)(z^0 w\otimes\Delta(z^1 b)(a\otimes 1)))\\
&= (xy^0)z^0 w\varphi(y^1(z^1 b)_1 a)\varphi((z^1 b)_2)\\
&\overset{1.2.1}{=} (xy^0)z^0 w\varphi(y^1 a)\varphi(z^1 b)\\
&= (\imath\otimes\varphi)(xy^0\otimes y^1 a)z^0 w\varphi(z^1 b)\\
&= (\imath\otimes\varphi)((x\otimes 1)\rho(y)(1\otimes a))z^0 w\varphi(z^1 b)\\
&= (\imath\otimes\varphi)(xy^0\otimes (y^1 a)))z^0 w\varphi(z^1 b)\\
&= xy^0\varphi(y^1 a)z^0 w\varphi(z^1 b)\\
&= x(\widehat{a}\cdot y)z^0 w\varphi(z^1 b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\imath \otimes \varphi)(x(\widehat{a} \cdot y)\rho(z)(1 \otimes b))w \\
&= (\imath \otimes \varphi)((x(\widehat{a} \cdot y)z^0 \otimes z^1)(1 \otimes b))w \\
&= (\imath \otimes \varphi)(x(\widehat{a} \cdot y)z^0 \otimes z^1 b)w \\
&= (x(\widehat{a} \cdot y)z^0 \otimes \varphi(z^1{}_{-}))(w \otimes b) \\
&= [x(\widehat{a} \cdot y), z](w \otimes b) \\
&= [(x\#\widehat{a}) \triangleright y, z](w \otimes b),
\end{aligned}
$$

para todo $w \otimes b \in E((\widehat{A} \cdot R) \otimes A)$, ou seja, $(x\#\widehat{a})[y, z] = [(x\#\widehat{a}) \triangleright y, z]$. Na igualdade $(*)$ usamos a escrita $\widehat{\Delta}(\widehat{a})(1 \otimes \varphi(z^1{}_{-})) = \sum_i \varphi({}_{-}c_i) \otimes \varphi({}_{-}d_i)$, assim $[\ ,\ ]$ é $(\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}$-linear à esquerda.

• Sejam $x, y, z \in \widehat{A} \cdot R$ e $\widehat{a} \in \widehat{A}$, vamos verificar que $[\ ,\ ]$ é $(\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}$-linear à direita.

$$
\begin{aligned}
&([y, z](x\#\widehat{a}))(w \otimes b) = \\
&\quad= ((yz^0\#\varphi(z^1{}_{-}))(x\#\widehat{a}))(w \otimes b) \\
&\quad= ((yz^0)(\varphi(z^1{}_{-})_1 \cdot x)\#\varphi(z^1{}_{-})_2\widehat{a})(w \otimes b) \\
&\quad\overset{(*)}{=} (\sum_i (yz^0)(\varphi({}_{-}c_i) \cdot x)\#\varphi({}_{-}d_i))(w \otimes b) \\
&\quad= \sum_i (yz^0)(\varphi({}_{-}c_i) \cdot x)w\varphi(bd_i) \\
&\quad= \sum_i (yz^0)x^0\varphi(x^1 c_i)w\varphi(bd_i) \\
&\quad= \sum_i (\imath \otimes \varphi)((yz^0 \otimes 1)\rho(x)(1 \otimes c_i))w\varphi(bd_i) \\
&\quad= \sum_i (\imath \otimes \varphi)(((yz^0)x^0 \otimes x^1)(1 \otimes c_i))w\varphi(bd_i) \\
&\quad= \sum_i (yz^0)x^0\varphi(x^1 c_i)w\varphi(bd_i) \\
&\quad= (yz^0)x^0 w(\sum_i \varphi({}_{-}c_i) \otimes \varphi({}_{-}d_i))(x^1 \otimes b) \\
&\quad= (yz^0)x^0 w(\widehat{\Delta}(\varphi(z^1{}_{-}))(1 \otimes \widehat{a}))(x^1 \otimes b) \\
&\quad\overset{1.7}{=} (yz^0)x^0 w(\varphi(z^1{}_{-}) \otimes \widehat{a})((x^1 \otimes 1)\Delta(b))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (yz^0)x^0w\varphi(z^1x^1b_1)\widehat{a}(b_2)\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \widehat{a})((yz^0)x^0w \otimes z^1x^1b_1 \otimes b_2)\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \widehat{a})((yz^0)x^0w \otimes (z^1 \otimes 1)(x^1 \otimes 1)\Delta(b))\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \widehat{a})((1 \otimes z^1 \otimes 1)((yz^0)x^0w \otimes x^1 \otimes 1)(1 \otimes \Delta(b)))\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \widehat{a})((1 \otimes z^1 \otimes 1)(((yz^0) \otimes 1)\rho(x)(w \otimes 1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(b)))\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \widehat{a})(((yz^0 \otimes z^1)\rho(x)(w \otimes 1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(b)))\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \widehat{a})(((y \otimes 1)\rho(z)\rho(x)(w \otimes 1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(b)))\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \widehat{a})(((y \otimes 1)\rho(zx)(w \otimes 1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(b)))\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \widehat{a})(((y(zx)^0 \otimes (zx)^1)(w \otimes 1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(b)))\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes \widehat{a})((y(zx)^0)w \otimes ((zx)^1 \otimes 1)\Delta(b))\\
&= (y(zx)^0)w\varphi((zx)^1b_1)\widehat{a}(b_2)\\
&\overset{1.2.9}{=} (y(zx)^0)w\varphi((zx)^1b_1)\widehat{a}(b_2S^{-1}(\delta)\delta)\\
&= (y(zx)^0)w\varphi((zx)^1b_1)\widehat{a}^\delta(b_2S^{-1}(\delta))\\
&= (y(zx)^0)w\varphi((zx)^1b_1)\widehat{a}^\delta(S^{-1}(\delta S(b_2)))\\
&= (y(zx)^0)w\varphi((zx)^1b_1)S^{-1}(\widehat{a}^\delta)(\delta S(b_2))\\
&= (y(zx)^0)wS^{-1}(\widehat{a}^\delta)(\varphi((zx)^1b_1)\delta S(b_2))\\
&\overset{1.2.9}{=} (y(zx)^0)wS^{-1}(\widehat{a}^\delta)(((\varphi \otimes \imath)\Delta((zx)^1b_1))S(b_2))\\
&= (y(zx)^0)wS^{-1}(\widehat{a}^\delta)((\varphi \otimes \imath)(\Delta((zx)^1b_1)(1 \otimes S(b_2))))\\
&= (y(zx)^0)wS^{-1}(\widehat{a}^\delta)(\varphi(((zx)^1)_1b_1)((zx)^1)_2b_2S(b_3))\\
&= (y(zx)^0)wS^{-1}(\widehat{a}^\delta)(((zx)^1)_2)\varphi(((zx)^1)_1b)\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes S^{-1}(\widehat{a}^\delta))((y(zx)^0)w \otimes ((zx)^1)_1b \otimes ((zx)^1)_2)\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes S^{-1}(\widehat{a}^\delta))((y(zx)^0)w \otimes \Delta((zx)^1)(b \otimes 1))\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes S^{-1}(\widehat{a}^\delta))((\imath \otimes \Delta)((y(zx)^0) \otimes (zx)^1)(w \otimes b \otimes 1))\\
&= (\imath \otimes \varphi \otimes S^{-1}(\widehat{a}^\delta))((\imath \otimes \Delta)((y \otimes 1)\rho(zx))(w \otimes b \otimes 1)),
\end{aligned}
$$

onde na igualdade $(*)$ usamos a escrita $\widehat{\Delta}(\varphi(z^1\_))(1\otimes\widehat{a})=\sum_i\varphi(\_c_i)\otimes\varphi(\_d_i)$.

Por outro lado, escrevendo $S^{-1}(\widehat{a}^\delta)=\varphi(\_c)$,

$$
\begin{aligned}
&[y, z\triangleleft(x\#\widehat{a})](w\otimes b)=\\
&\quad= [y, S^{-1}(\widehat{a}^\delta)\cdot(zx)](w\otimes b)\\
&\quad= [y, \varphi(\_c)\cdot(zx)](w\otimes b)\\
&\quad= [y,(zx)^0]\varphi((zx)^1c)(w\otimes b)\\
&\quad= (y((zx)^0)^0\#\varphi(((zx)^0)^1\_))\varphi((zx)^1c)(w\otimes b)\\
&\quad= y((zx)^0)^0w\varphi(((zx)^0)^1b)\varphi((zx)^1c)\\
&\quad= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)(y((zx)^0)^0w\otimes((zx)^0)^1b\otimes(zx)^1c)\\
&\quad= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((y\otimes 1)\rho((zx)^0)(w\otimes b)\otimes(zx)^1c)\\
&\quad= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((y\otimes 1\otimes 1)(\rho\otimes\imath)((zx)^0\otimes(zx)^1c)(w\otimes b\otimes 1))\\
&\quad= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((y\otimes 1\otimes 1)(\rho\otimes\imath)(\rho(zx)(1\otimes c))(w\otimes b\otimes 1))\\
&\quad\overset{3.3}{=} (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((y\otimes 1\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(zx))(E\otimes 1)(w\otimes b\otimes c))\\
&\quad= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((y\otimes 1\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(zx))(E(w\otimes b)\otimes c))\\
&\quad\overset{(*)}{=} (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((y\otimes 1\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(zx))(w\otimes b\otimes c))\\
&\quad= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)((\imath\otimes\Delta)((y\otimes 1)\rho(zx))(w\otimes b\otimes c))\\
&\quad= (\imath\otimes\varphi\otimes\varphi)(y(zx)^0w\otimes\Delta((zx)^1)(b\otimes c))\\
&\quad= y(zx)^0w\varphi(((zx)^1)_1b)\varphi(((zx)^1)_2c)\\
&\quad= y(zx)^0w\varphi(((zx)^1)_1b)S^{-1}(\widehat{a}^\delta)(((zx)^1)_2)\\
&\quad= (\imath\otimes\varphi\otimes S^{-1}(\widehat{a}^\delta))((\imath\otimes\Delta)((y\otimes 1)\rho(zx))(w\otimes b\otimes 1)),
\end{aligned}
$$

para todo $w\otimes b\in E((\widehat{A}\cdot R)\otimes A)$, ou seja, $[y,z](x\#\widehat{a})=[y,z\triangleleft(x\#\widehat{a})]$. Note que na igualdade $(*)$ estamos usando o fato de $w\otimes b\in E(\widehat{A}\cdot R\otimes A)$.

Portanto, a aplicação $[\ ,\ ]$ é $(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}$-bilinear. $\square$

Com isso, reunindo os lemas acima temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2.14. *Seja R um A comódulo álgebra parcial simétrico restrito, então*

$$((\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}, \underline{R^{coA}}, {}_{(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}}(\widehat{A}\cdot R)_{\underline{R^{coA}}}, {}_{\underline{R^{coA}}}(\widehat{A}\cdot R)_{(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}}, [\ ,\ ], (\ ,\ ))$$

é um contexto de Morita.

Demonstração. Pelos Lemas 4.2.8, 4.2.9, 4.2.10 e 4.2.13, precisamos somente verificar as compatibilidades

$$[x,y]\triangleright z = x\triangleleft(y,z) \tag{4.1}$$

$$(x,y)\triangleright z = x\triangleleft[y,z], \tag{4.2}$$

para todo x,y e $z\in\widehat{A}\cdot R$.

- Sejam x,y e $z\in\widehat{A}\cdot R$,

$$\begin{aligned}
[x,y]\triangleright z &= (xy^0\#\varphi(y^1{}_-))\triangleright z\\
&= xy^0(\varphi(y^1{}_-)\cdot z)\\
&= (xy^0)z^0\varphi(y^1z^1)\\
&= (\imath\otimes\varphi)((xy^0\otimes 1)(1\otimes y^1)\rho(z))\\
&= (\imath\otimes\varphi)((xy^0\otimes y^1)\rho(z))\\
&= (\imath\otimes\varphi)((x\otimes 1)\rho(y)\rho(z))\\
&= (\imath\otimes\varphi)((x\otimes 1)\rho(yz))\\
&= x((\imath\otimes\varphi)\rho(yz))\\
&= x\triangleleft((\imath\otimes\varphi)\rho(yz))\\
&= x\triangleleft(y,z),
\end{aligned}$$

ou seja, $[x,y]\triangleright z = x\triangleleft(y,z)$.

- Sejam $x,y,z\in\widehat{A}\cdot R$ e escrevemos $(y\otimes 1)\rho(z)=\sum_i y_i\otimes a_i$, logo

$r(x\triangleleft[y,z]) =$

$$
\begin{aligned}
&= r(x \triangleleft (yz^0 \# \varphi(z^1 \_))) \\
&= r(x \triangleleft (\sum_i y_i \# \varphi(a_i \_))) \\
&\overset{1.2.12}{=} \sum_i r(x \triangleleft (y_i \# \varphi(\_b_i))) \\
&= \sum_i r(S^{-1}(\widehat{b_i}^{\delta}) \cdot (xy_i)) \\
&= \sum_i r(\varphi(\_c_i) \cdot (xy_i)) \\
&= \sum_i r(xy_i)^0 \varphi((xy_i)c_i) \\
&= \sum_i (\imath \otimes \varphi)((r \otimes 1)\rho(xy_i)(1 \otimes c_i)) \\
&= \sum_i (\imath \otimes \varphi)((r(xy_i)^0 \otimes (xy_i)^1)(1 \otimes c_i)) \\
&= \sum_i r(xy_i)^0 \varphi((xy_i)^1 c_i) \\
&= \sum_i r(xy_i)^0 S^{-1}(\widehat{b_i}^{\delta})((xy_i)^1) \\
&= \sum_i r(xy_i)^0 \varphi(S^{-1}((xy_i)^1)\delta b_i) \\
&\overset{1.2.12}{=} \sum_i r(xy_i)^0 \varphi(a_i S^{-1}((xy_i)^1)\delta) \\
&= (\imath \otimes \varphi(\_\delta))(\sum_i r(xy_i)^0 \otimes a_i S^{-1}((xy_i)^1)) \\
&= (\imath \otimes \varphi(\_\delta))(\imath \otimes m \circ \tau)(\sum_i r(xy_i)^0 \otimes S^{-1}((xy_i)^1) \otimes a_i) \\
&= (\imath \otimes \varphi(\_\delta))(\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))(\sum_i r(xy_i)^0 \otimes (xy_i)^1 \otimes a_i) \\
&= (\imath \otimes \varphi(\_\delta))(\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))(\sum_i r(xy_i)^0 \otimes (xy_i)^1 \otimes a_i) \\
&= (\imath \otimes \varphi(\_\delta))(\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))(\sum_i (r \otimes 1 \otimes 1)(\rho(xy_i) \otimes a_i)) \\
&= (\imath \otimes \varphi(\_\delta))(\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))(\sum_i (r \otimes 1 \otimes 1)(\rho(x) \otimes 1)(\rho(y_i) \otimes a_i)) \\
&= (\imath \otimes \varphi(\_\delta))(\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))((r \otimes 1 \otimes 1)(\rho(x) \otimes 1)(\rho \otimes \imath)(\sum_i y_i \otimes a_i)) \\
&= (\imath \otimes \varphi(\_\delta))(\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))((r \otimes 1 \otimes 1)(\rho(x) \otimes 1)(\rho \otimes \imath)((y \otimes 1)\rho(z)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{4.1.9}{=} && (\imath \otimes \varphi(\_\delta))(\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))((r \otimes 1 \otimes 1)(\rho(x)\rho(y) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(z))) \\
&= && (\imath \otimes \varphi(\_\delta))(\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))(((r \otimes 1)\rho(xy) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(z))) \\
&\overset{(*)}{=} && r(xy)^0\varphi(S^{-1}((xy)^1)\delta)z \\
&= && (\imath \otimes S^{-1}(\varphi(\_\delta)))((r \otimes 1)\rho(xy)(z \otimes 1)) \\
&= && r((xy)^0 z)\varphi(S^{-1}((xy)^1)\delta) \\
&\overset{1.2.11}{=} && r(((xy)^0 z)\varphi(S(S^{-1}((xy)^1))) \\
&= && r(((xy)^0 z)\varphi((xy)^1)) \\
&= && r((\imath \otimes \varphi)(\rho(xy)(z \otimes 1))) \\
&= && r(((\imath \otimes \varphi)\rho(xy))z) \\
&= && r((\imath \otimes \varphi)\rho(xy) \triangleright z) \\
&= && r((x, y) \triangleright z),
\end{aligned}
$$

para todo $r \in R$, logo $x \triangleleft [y, z] = (x, y) \triangleright z$. Abaixo, verificamos a igualdade $(*)$,

$$
\begin{aligned}
&(\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))(((r \otimes 1)\rho(xy) \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(z))) = \\
&\quad = \quad (\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))((\sum_i r_i \otimes a_i \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(\rho(z))) \\
&\quad = \quad (\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))(\sum_i (1 \otimes a_i \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)((r_i \otimes 1)\rho(z))) \\
&\quad = \quad (\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))(\sum_i (1 \otimes a_i \otimes 1)(\imath \otimes \Delta)(r_i z^0 \otimes z^1)) \\
&\quad = \quad (\imath \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath))(\sum_i r_i z^0 \otimes (a_i \otimes 1)\Delta(z^1)) \\
&\quad = \quad \sum_i r_i z^0 \otimes m \circ \tau \circ (S^{-1} \otimes \imath)(a_i (z^1)_1 \otimes (z^1)_2) \\
&\quad = \quad \sum_i r_i z^0 \otimes (z^1)_2 S^{-1}((z^1)_1) S^{-1}(a_i) \\
&\quad = \quad \sum_i r_i z^0 \otimes S^{-1}(c_i)\varepsilon(z^1) \\
&\quad = \quad (\imath \otimes \varepsilon)(\sum_i r_i z^0 \otimes z^1) \otimes S^{-1}(a_i) \\
&\quad = \quad (\imath \otimes \varepsilon)(\sum_i (r_i \otimes 1)\rho(z)) \otimes S^{-1}(a_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad (\sum_i r_i \otimes S^{-1}(a_i))(\imath \otimes \varepsilon)(\rho(z)) \\
&\overset{3.1.7}{=} \quad (\imath \otimes S^{-1})((r \otimes 1)\rho(xy))z,
\end{aligned}
$$

logo $(\imath\otimes m\circ\tau\circ(S^{-1}\otimes\imath))(((r\otimes 1)\rho(xy)\otimes 1)(\imath\otimes\Delta)(\rho(z))) = (\imath\otimes S^{-1})((r\otimes 1)\rho(xy))z$.

Portanto, a sêxtupla acima é um contexto de Morita. □

Proposição 4.2.15. *Se o contexto de Morita definido acima é estrito, então*

(i) $[\ ,\ ]$ *é injetivo;*

(ii) $(\ ,\ )$ *é injetivo.*

Demonstração. A hipótese do contexto de Morita ser escrito, significa que as aplicações $[\ ,\ ]$ e $(\ ,\ )$ são sobrejetivas. Logo,

(i) Para mostrar a injetividade da aplicação $[\ ,\ ]$, iniciamos usando a ação de $(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}$ em $\widehat{A}\cdot R$ à direita, definida no Lema 4.2.9, para construir a seguinte aplicação

$$
\begin{aligned}
\blacktriangleleft : ((\widehat{A}\cdot R)\otimes_{\underline{R^{coA}}}(\widehat{A}\cdot R))\otimes((\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}) &\longrightarrow (\widehat{A}\cdot R)\otimes_{\underline{R^{coA}}}(\widehat{A}\cdot R) \\
(x\otimes y)\otimes(z\#\widehat{a}) &\longmapsto x\otimes(y\triangleleft(z\#\widehat{a})) \\
&= \quad x\otimes(S^{-1}(\widehat{a}^{\delta})\cdot(yz)),
\end{aligned}
$$

logo $\blacktriangleleft$ é um módulo à direita unitário de maneira natural e não degenerado, essa última propriedade, segue diretamente do fato a ação parcial $\cdot$ também ser não degenerada.

Agora, consideramos $\sum_i x_i\otimes y_i \in ker[\ ,\ ]$, ou seja, $\sum_i [x_i, y_i] = 0$, e usamos a sobrejetividade da aplicação $[\ ,\ ]$ para escrever $\sum_j z_j\#\widehat{a_j} = \sum_k [r_k, s_k] \in (\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}$, assim

$$
(\sum_i x_i\otimes y_i)\blacktriangleleft(\sum_j z_j\#\widehat{a_j}) \quad = \quad \sum_i x_i\otimes(y_i\triangleleft\sum_j z_j\#\widehat{a_j})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i x_i \otimes y_i \triangleleft \sum_k [r_k, s_k] \\
&\overset{4.2}{=} \sum_i x_i \otimes \sum_k (y_i, r_k) \triangleright s_k \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i,k} x_i \triangleleft (y_i, r_k) \otimes s_k \\
&\overset{4.1}{=} \sum_{i,k} [x_i, y_i] \triangleright r_k \otimes s_k \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

logo $(\sum_i x_i \otimes y_i) \blacktriangleleft (\sum_j z_j \# \widehat{a_j}) = 0$, para todo $\sum_j z_j \# \widehat{a_j} \in (\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A}$. Note que, na igualdade $(*)$ usamos a propriedade da aplicação $[\ ,\ ]$ ser $R^{\underline{coA}}$-balanceada, portanto pelo fato da ação $\blacktriangleleft$ ser não degenerada, concluímos que $\sum_i x_i \otimes y_i = 0$, ou seja, $[\ ,\ ]$ é injetiva.

De maneira similar, mostramos a injetividade da aplicação $(\ ,\ )$. $\square$

Note que, se R é um A-módulo álgebra parcial simétrico, onde R tem unidade e A possui dimensão finita, então o contexto de Morita acima coincide com o contexto conhecido no caso clássico, dado por

$$
(\underline{R\#A}, R^{\underline{A}}, {}_{\underline{R\#A}}R_{R^{\underline{A}}}, {}_{R^{\underline{A}}}R_{\underline{R\#A}}, [\ ,\ ], (\ ,\ ))
$$

onde

(i) $(\underline{x\#a}) \triangleright y = x(a \cdot y)$;

(ii) $x \triangleleft (\underline{y\#a}) = \alpha(a_2)S^{-1}(a_1) \cdot (xy)$;

(iii) $[x, y] = (\underline{x\#t})(\underline{y\#1_A})$;

(iv) $(x, y) = t \cdot xy$.

para todo $x, y \in R$, $a \in A$, $t \in \int_l^A$ e $\alpha \in Alg(A, \Bbbk)$, onde $th = \alpha(h)t$, $h \in A$.

Portanto, o contexto $((\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}, R^{\underline{coA}}, {}_{(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}}(\widehat{A}\cdot R)_{R^{\underline{coA}}}, {}_{R^{\underline{coA}}}(\widehat{A}\cdot R)_{(\widehat{A}\cdot R)\#\widehat{A}}, [\ ,\ ], (\ ,\ ))$ para coações parciais de um grupos quântico algébrico, estende o contexto descrito por M. Alves e E. Batista em [1] para ações parciais de álgebras de Hopf.

4.3 Coação de Galois

Para finalizar este trabalho, nosso objetivo é relacionar o contexto de Morita construído na seção anterior com a teoria de Galois. No que segue, A será um grupo quântico algébrico e (R, ρ, E) um A-comódulo álgebra parcial simétrico.

Definição 4.3.1. Dizemos que ρ é uma *coação de Galois parcial* se ρ é restrita e a aplicação

$$\begin{aligned} \beta : (\widehat{A}\cdot R) \otimes_{R^{\underline{coA}}} (\widehat{A}\cdot R) &\longrightarrow ((\widehat{A}\cdot R)\otimes A)E \\ x\otimes y &\longmapsto (x\otimes 1)\rho(y) \end{aligned}$$

é bijetiva.

Note que, a boa definição da aplicação β segue diretamente da Observação 4.1.4. Com as notações acima, no próximo resultado, caracterizamos uma coação de Galois parcial.

Teorema 4.3.2. *Seja o contexto de Morita definido no Teorema 4.2.14, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) ρ *é uma coação de Galois parcial;*

(ii) β *é sobrejetora;*

(iii) $[\ ,\ ]$ *é sobrejetora.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Segue imediatamente da definição de coação de Galois parcial.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Consideramos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : ((\widehat{A} \cdot R) \otimes A)E &\longrightarrow ((\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A})|_{E((\widehat{A} \cdot R)\otimes A)} \\ (x \otimes a)E &\longmapsto x\#\varphi(a_{-}), \end{aligned}$$

então α é bijetiva. De fato, para facilitar o entendimento, dividimos a demonstração em três etapas.

• Iniciamos verificando a boa definição de α, para essa finalidade supomos $(x \otimes a)E = 0$ e escrevemos $E(y \otimes b) = \sum_i y_i \otimes b_i \in E((\widehat{A} \cdot R) \otimes A)$, logo

$$\begin{aligned} \alpha((x \otimes a)E)(E(y \otimes b)) &= (x\#\varphi(a_{-}))(\sum_i y_i \otimes b_i) \\ &= \sum_i xy_i\varphi(ab_i) \\ &= (\imath \otimes \varphi)((x \otimes a)(\sum_i y_i \otimes b_i)) \\ &= (\imath \otimes \varphi)((x \otimes a)E(y \otimes b)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $E(y \otimes b) =\in E((\widehat{A} \cdot R) \otimes A)$, ou seja, $\alpha((x \otimes a)E) = 0$.

• Seja $x\#\varphi(a_{-}) \in ((\widehat{A} \cdot R)\#\widehat{A})|_{E((\widehat{A} \cdot R)\otimes A)}$, então $\alpha((x\#\varphi(a_{-}))E) = x\#\varphi(a_{-})$, concluindo a sobrejetividade da aplicação α.

• Consideramos $(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes a_i)E \in Ker(\alpha)$, onde o conjunto $\{x_i\}_{i=1}^n$ é linearmente independente, logo

$$0 = \alpha((\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes a_i)E) = \sum_{i=1}^{n} x_i\#\varphi(a_{i\,-}),$$

ou seja, para todo $b \in A$, temos $\sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(a_ib) = 0$. Então, pela independência linear do conjunto $\{x_i\}_{i=1}^n$ segue que $\varphi(a_ib) = 0$, para todo $b \in A$ e $i \in \{1, ..., n\}$.

Assim, pela Proposição 1.2.5, $a_i = 0$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, concluindo que $(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes a_i)E = 0$.

Portanto, a aplicação α é bijetiva. Note que, a aplicação $[\ ,\ ]$ é a composição das seguintes aplicações

$$\begin{array}{rcl} [\ ,\ ] : (\widehat{A} \cdot R) \otimes_{R^{\underline{coA}}} (\widehat{A} \cdot R) & \xrightarrow{\beta} & ((\widehat{A} \cdot R) \otimes A)E \xrightarrow{\alpha} ((\widehat{A} \cdot R) \# \widehat{A})|_{E((\widehat{A} \cdot R) \otimes A)} \\ x \otimes y & \longmapsto & (x \otimes 1)\rho(y) \longmapsto xy^0 \# \varphi(y^1{}_-), \end{array}$$

onde $(x \otimes 1)\rho(y) = (x \otimes 1)\rho(y)E = (xy_0 \otimes y^1)E$. Portanto, pela sobrejetividade da aplicação β e a bijetividade da aplicação α segue que, $[\ ,\ ]$ é sobrejetiva.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Supomos que a aplicação $[\ ,\ ]$ é sobrejetiva, logo pela Proposição 4.2.15, $[\ ,\ ]$ é bijetiva. Portanto, $\beta = \alpha^{-1} \circ [\ ,\ ]$ é bijetiva, onde α é a aplicação definida acima, em outras palavras, ρ é uma coação de Galois parcial. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] M. Alves and E. Batista, *Partial Hopf actions, partial invariants and a Morita context*, Algebra and Discrete Mathematics, v.3 (2009) 1-19 .

[2] M. Alves and E. Batista, *Globalization theorems for partial Hopf (co)actions and some of their applications*, Groups, Algebra and applications, Contemp. Math., vol 537, Amer Math. Soc.,Providence, RI, (2011) 13-30.

[3] E. Batista and J. Vercruysse, *Dual Constructions for Partial Actions of Hopf Algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra 220 (2016), 518-559.

[4] S. Caenepeel, K. Janssen, *Partial (Co)Actions of Hopf Algebras and Partial Hopf-Galois Theory*, Communications in Algebra 36 (2008), no. 8, 2923-2946.

[5] F. Castro, A. Paques, G. Quadros and A. Sant'Ana, *Partial Actions of Weak Hopf algebras: Smash Products, globalization and Morita Theory*, Journal of Pure and Applied Algebra 219 (2015), 5511-5538.

[6] F. Castro and G. Quadros. *Globalizations for partial (co) actions on coalgebras*, arXiv:1510.01388 (2015).

[7] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), no.5, 1931-1952.

[8] B. Drabant, A. Van Daele and Y. Zang, *Actions of multiplier Hopf algebra*, Commun. Algebra 27, (1999) 4117-4172.

[9] H. Kurose, A. Van Daele and Y. H. Zhang, *Corepresentation theory of multiplier Hopf algebras II*, Int. J. Math., 11 (2000), 233-278.

[10] K. Janssen and J. Vercruysse, *Multiplier Bi- and Hopf algebras*, Journal of Algebra and Its Applications, 09 (2010), 275-303.

[11] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 82, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI (1993).

[12] R. Exel, *Partial actions of groups ans actions of semigroups*, Proc. AMS 126 (1998), 3481-3494.

[13] A. Van Daele, *Multiplier Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 342 (1994), 917-932.

[14] A. Van Daele, *Multiplier Hopf algebras and duality*, Quantum Groups and Quantum Spaces, vol. 40, Warsaw, (1997), 51-58.

[15] A. Van Daele *An Algebraic framework for group duality*, Advances in Mathematics 140, (1998), 323-366.

[16] A. Van Daele, *Tools for working with multiplier Hopf algebras*, ASJE (The Arabian Journal for Science and Engineering) C - Theme-Issue 33 (2008), 505-528.

[17] A. Van Daele, *A note on the Sweedler notation for (weak) multiplier Hopf algebras*, Preprint University of Leuven (2016). In preparation.

[18] A. Van Daele and S. Wang, *Weak multiplier Hopf algebras. Preliminares, motivation and basic examples*. Operator Algebras ans Quantum Groups. Banach Center Publications 98 (2012), 367-415.

[19] A. Van Daele and S. Wang, *Weak multiplier Hopf algebras I. The main theory*. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) 705 (2015), 155-209.

[20] A. Van Daele and Y. Zhang, *Multiplier Hopf algebras of discrete type*, J. Algebra 214 (1999), 400-417.

[21] A. Van Daele and Y. H. Zhang, *Corepresentation theory of multiplier Hopf algebras I*, Int. J. Math., 10 (1999), 503-539.

[22] A. Van Daele and Y. H. Zhang, *Galois theory for multiplier Hopf algebras with integrals*, Algebr. Represent. Theory, 2 (1), (1999) 83-106.

[23] A. Van Daele and Y. Zang, *A survey on multiplier Hopf algebras*. in: S. Caenepeel, F. Van Oystaeyen (Eds.), Proceedings of the Conference in Brussels on Hopf Algebras. Hopf Algebras and Quantum Groups, Marcel Dekker, New York (2000), 269-309.