

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE TENSÕES DE VIGAS ATRAVÉS DA TEORIA DE VLASOV PARA TORÇÃO NÃO
UNIFORME COM EMPENAMENTO RESTRINGIDO

por

Diego Martins de Castro

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Novembro de 2016.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica

ANÁLISE DE TENSÕES DE VIGAS ATRAVÉS DA TEORIA DE VLASOV PARA TORÇÃO NÃO
UNIFORME COM EMPENAMENTO RESTRINGIDO

por

Diego Martins de Castro

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof^a.Dr^a. Letícia Fleck Fadel Miguel

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Juan Pablo Raggio Quintas

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Porto Alegre, 14 de Novembro de 2016.

Dedicado ao meu pai, Francisco Dias de Castro e minha mãe, Eva Martins de Castro, meus exemplos de ser humano. Batalhadores, honestos e sempre dispostos a ajudar nos momentos de maiores dificuldades.

AGRADECIMENTOS

À minha família, principalmente ao meu pai Francisco Castro, por todo o incentivo e suporte financeiro sem o qual não seria possível concluir meus estudos, e a minha mãe Eva Castro pelo auxílio e dedicação durante todas as etapas da minha vida.

Aos meus colegas e amigos sempre presentes nos melhores e também nos mais difíceis momentos, que proporcionaram muito desenvolvimento interpessoal e intelectual.

À professora Dr^a. Leticia Fleck Fadel Miguel que se mostrou sempre muito prestativa, não somente na orientação do trabalho, mas também ao longo do curso.

CASTRO, D. M., **ANÁLISE DE TENSÕES DE VIGAS ATRAVÉS DA TEORIA DE VLASOV PARA TORÇÃO NÃO UNIFORME COM EMPENAMENTO RESTRINGIDO**, 2016, 21 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

RESUMO

O presente trabalho visa estudar, compreender e aplicar a Teoria de Vlasov para vigas de seções abertas de paredes finas submetidas à flexo-torção com empenamento restringido. Este é um tópico extremamente importante na área de Mecânica dos Sólidos, porém, muitas vezes é estudado apenas em nível de pós-graduação, sendo pouco difundido em cursos clássicos de graduação em Engenharia. Neste sentido, este trabalho mostra a relevância de uma análise de tensões pela Teoria de Vlasov, comparando, através de dois exemplos, os resultados obtidos por esta teoria, a qual considera as tensões advindas do fato do empenamento estar restringido, com os resultados obtidos através das teorias elementares de Resistência dos Materiais comumente estudadas nos cursos de graduação. Adicionalmente, os dois exemplos também são resolvidos de forma numérica utilizando o software de elementos finitos Ansys. A análise das tensões normais e tangenciais é feita para duas vigas de seção aberta de paredes finas de perfis comerciais, tanto de forma analítica quanto numérica, submetidas à flexo-torção. Os resultados mostraram que as tensões calculadas com a Teoria de Vlasov, produzidas pelo empenamento restringido, não podem ser desprezadas, constituindo, em algumas situações, no sistema de tensões na estrutura.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de Vlasov, Análise de tensões, Vigas de paredes finas, Bimomentos.

CASTRO, D. M., **STRESS ANALYSIS OF BEAMS THROUGH VLASOV THEORY FOR NON UNIFORM TWIST WITH RESTRICTED WARPING**, 2016, 21 folhas. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

ABSTRACT

This work aims to study, understand and apply the Vlasov Theory for thin-walled beams with open sections subjected to bending-torsion with restricted warping. This is an extremely important topic in Solid Mechanics area, however, it is often studied only in post-graduation level, being not too widespread in classical graduation courses in Engineering. Thus, this work shows the importance of a stress analysis by the Vlasov Theory, comparing, through two examples, the results obtained by this theory, which considers the tensions resulting of fact of the restricted warping, with the results obtained by of elementary theories Materials Resistance commonly studied in graduation courses. Additionally, two examples are also solved numerically using finite element software ANSYS. The analysis of normal stresses and shear stresses is made for two commercial profiles of thin-walled beams with open sections, both analytically and numerically submitted to bending- torsion. The results showed that the stresses calculated with the Vlasov Theory, generated by restricted warping, cannot be neglected, providing, in some cases, the system of stresses in the structure.

KEYWORDS: Vlasov Theory, Stress analysis, Thin-walled beam, Bimoment.

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO.....	1
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	1
3.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	2
	3.1. Teoria Clássica de Euler-Bernoulli.....	3
	3.2. Teoria de Vlasov.....	4
4	METODOLOGIA.....	8
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	9
	5.1. Viga de Perfil I por Resistência dos Materiais.....	9
	5.2. Viga de Perfil I pela Teoria de Vlasov.....	10
	5.3. Viga de Perfil Z.....	13
6.	CONCLUSÕES.....	14
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	15

1. INTRODUÇÃO

O expressivo aumento populacional em áreas urbanas impulsionou o desenvolvimento vertical das cidades, tornando fundamental a análise da resistência dos materiais na área da mecânica dos sólidos no dimensionamento de estruturas tanto na Engenharia Mecânica como na Engenharia Civil. Com a análise estática, determinam-se tensões e deformações nas estruturas sob carregamento, objetivando a garantia de segurança e funcionalidade das estruturas com suas grandezas numa faixa de valores permissíveis. Portanto, é fundamental uma correta avaliação das tensões atuantes na estrutura.

Uma viga de seção aberta com paredes finas submetida a um sistema de cargas externas e com uma ou mais seções restringidas ao empenamento está submetida a uma complexa distribuição de tensões normais e tangenciais. Consequentemente, esta peça não pode ser avaliada através das teorias elementares de vigas.

Se uma ou mais seções estão restringidas com relação a deslocamentos fora do seu plano (empenamento), um sistema de tensões normais à seção deve ser desenvolvido para eliminar estes deslocamentos. Estas tensões normais geralmente variam ao longo da peça de seção para seção, uma vez que a restrição é discreta e não contínua no sentido longitudinal, portanto ela está acompanhada de uma variação nas tensões tangenciais ao longo das seções, o que, por sua vez, altera o comportamento à torção destas seções. Como resultado, o momento de torção desenvolvido em cada seção não é mais proporcional ao ângulo de torção e, conseqüentemente, as tensões tangenciais finais não podem ser obtidas pela superposição daquelas produzidas por torção e flexão sem restrições ao empenamento. A aplicação do princípio de Saint Venant para vigas de seção aberta com paredes finas e empenamento restringido pode levar a erros significativos, pois nestes casos as tensões causadas pelo empenamento restringido decaem muito lentamente a partir de seus pontos de aplicação e podem constituir-se nos principais sistemas de tensões na estrutura.

Neste contexto, o presente trabalho visa estudar, compreender e aplicar a Teoria de Vlasov para vigas de seções abertas de paredes delgadas submetidas à flexo-torção com empenamento restringido. Este é um tópico extremamente importante na área de Mecânica dos Sólidos, porém, muitas vezes é estudado apenas em nível de pós-graduação. A título de ilustração, esta teoria é aplicada a duas vigas de perfis comerciais (I e Z), e os resultados obtidos por esta teoria, a qual considera as tensões advindas do fato do empenamento estar restringido, são comparados com os resultados obtidos através das teorias elementares de vigas comumente estudadas nos cursos de graduação. Adicionalmente, os dois exemplos também são resolvidos de forma numérica utilizando o software de elementos finitos Ansys. Desta forma, busca-se contribuir com a base de conhecimento dessa área, auxiliando o entendimento dos métodos e analisando suas vantagens e desvantagens.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Vlasov (1961) propôs sua teoria quando estabeleceu que a aplicação do princípio de Saint Venant gerava erros significativos a vigas de seção aberta de paredes finas com empenamento restringido porque nestas vigas as tensões causadas pelo empenamento restringido decaem muito lentamente a partir de seus pontos de aplicação e podem constituir-se nos principais sistemas de tensões na estrutura. Seu estudo baseou-se no efeito do empenamento elástico nas vigas de paredes delgadas através da teoria de flexo-torção, com a introdução de definições e análise das propriedades setoriais da seção, que em geral não são tratadas nos estudos iniciais da Mecânica Estrutural. Vlasov introduziu o bi-momento e a torção de empenamento, essas grandezas não podem ser desprezadas nos casos de perfis delgados submetidos à flexo-torção, pois as tensões produzidas pelos bi-momentos sobre a seção transversal dos perfis são significativas.

Galambos (1968) comenta que embora as equações diferenciais para vigas de paredes finas sejam válidas para geometrias, carregamentos e condições de contorno variadas, a complexidade dessas equações é tal que, somente uns poucos problemas têm sido resolvidos

usando a matemática clássica, muitas dessas soluções gerais surgem da aproximação das equações diferenciais usando a técnica das diferenças finitas.

Conforme Oden (1981), quando uma peça de parede fina tem uma ou mais seções transversais restringidas ao empenamento, e está sob a ação de um sistema de cargas externas, esta fica sujeita a uma complexa distribuição de tensões normais e tangenciais que não pode ser determinada por teorias básicas de vigas. Efeitos semelhantes ocorrem quando o momento torçor varia ao longo do elemento: seções vizinhas tendem a girar com ângulos diferentes, ou seja, tendem a ter empenamentos diferentes. A hipótese de que as seções planas permanecem planas durante a deformação não é mais válida, e aplicações do princípio de Saint Venant podem conduzir a sérios erros.

Alves et al. (2004), contribuíram ao estudo do bi-momento em estruturas de hastes de paredes delgadas, avaliando a importância do comportamento de estruturas dotadas de elementos de hastes de paredes delgadas, e o surgimento das tensões de bi-momentos nas mesmas. Foram realizadas particularizações do estudo para uma viga monoengastada, dotada de solicitações que induzem ao surgimento de empenamentos e deformações características de hastes delgadas, utilizando-se métodos analíticos. Para a análise mais abrangente do surgimento das tensões de bi-momentos, cisalhantes e do comportamento estrutural foram feitas variações nas dimensões da seção transversal dos perfis de seção aberta.

Heyliger (2016) estudou um modelo aproximado com base na teoria tridimensional de elasticidade como alternativa à Teoria de Vlasov, citando que uma característica do cálculo pela Teoria de Vlasov é a necessidade de representar a resposta sobre a seção transversal da viga, frequentemente utilizando aproximações bidimensionais de elementos finitos para calcular a rigidez eficaz que caracteriza a resposta global. Devido à natureza das aproximações utilizadas e a estrutura do problema discretizado, pode-se argumentar que os modelos baseados em elasticidade são mais fáceis de desenvolver e aplicar.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Em todas as construções, as peças componentes das estruturas devem ter tamanhos físicos definidos. Tais peças têm proporções adequadas para resistirem a forças existentes ou prováveis, impostas sobre elas. Assim, as paredes de um reservatório de pressão têm resistência apropriada para suportarem a pressão interna; os pavimentos de um prédio devem ser suficientemente fortes para suas finalidades; o eixo de uma máquina deve ter dimensão adequada para o torque a aplicar; uma asa de avião deve suportar com segurança as cargas aerodinâmicas que aparecem durante o voo ou a decolagem. Da mesma forma, as peças de uma estrutura composta devem ser suficientemente rígidas para evitar a deflexão ou flexão excessiva quando em operação com carregamentos impostos. Um piso de edifício deve ser suficientemente forte, mas pode defletir excessivamente, o que em alguns casos pode provocar desalinhamento do equipamento de produção, ou em outros casos resultar na fissura de um teto de gesso do andar inferior. Finalmente, um membro pode ser tão esbelto que, submetido a um carregamento compressivo, pode tornar-se instável. A habilidade em determinar o máximo carregamento suportável por uma coluna delgada, antes da flambagem, ou a determinação do nível seguro de vácuo que pode ser mantido por um recipiente é de grande importância prática. Em engenharia, todos os requisitos acima devem ser preenchidos com o mínimo gasto de um dado material. Além do custo, algumas vezes – como projeto de satélites – a factibilidade e o sucesso da missão podem depender do peso do conjunto. [Popov, 2009]. Desta forma, determinar da forma mais correta possível as tensões que surgem em uma peça é de extrema importância.

3.1. Teoria Clássica de Euler-Bernoulli

A análise de vigas tem sido objeto de estudo por diversos autores devido a sua importância na engenharia mecânica estrutural e no controle de estruturas. Os modelos de vigas podem ser trabalhados por meio de uma técnica analítica, relativamente simples, como é o caso do modelo de viga de Euler-Bernoulli cujos resultados são bastante satisfatórios. O modelo de viga de Euler-Bernoulli inclui a energia de deformação devido à flexão e a energia cinética devido ao deslocamento lateral. O modelo remonta ao século 18, quando Jacob Bernoulli (1654-1705) descobriu pela primeira vez que a curvatura de uma viga elástica em qualquer ponto é proporcional ao momento de flexão nesse ponto. Daniel Bernoulli (1700-1782), sobrinho de Jacob, foi a primeira pessoa que formulou a equação diferencial do movimento de vibração de uma viga. Mais tarde, a teoria de Jacob Bernoulli foi aceita por Leonhard Euler (1707-1783) em sua investigação sobre a forma de viga elástica sob várias condições de carga. Muitos avanços nas curvas elásticas foram feitos por Euler. A teoria de viga de Euler-Bernoulli, às vezes chamada de teoria clássica de vigas, é a mais comumente usada porque é simples e fornece aproximações de engenharia razoáveis para muitos problemas. O modelo de viga de Euler-Bernoulli é uma simplificação da teoria linear da elasticidade que fornece meios de calcular as características de uma viga sob um carregamento, sendo ele estático ou dinâmico, a qual é constituída por uma equação diferencial parcial linear de quarta ordem. A derivação da equação de Euler-Bernoulli envolve as seguintes hipóteses físicas:

- O formato da viga é um prisma reto, cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões;
- A viga é constituída de um material linearmente elástico;
- O Coeficiente de Poisson é negligenciável;
- A seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical, de forma que a linha neutra está contida nele;
- Planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares depois da deformação;
- O ângulo de rotação é muito pequeno;
- O efeito de momento de inércia de rotação é desprezado;
- A energia envolvida no cisalhamento é desprezada;
- A viga é constituída de material homogêneo com densidade ρ .

Neste trabalho, para o cálculo do modelo de viga de Euler-Bernoulli, serão utilizados as formulações presentes em Popov (2009) e Oden (1981), que para tensão normal utiliza a fórmula da flexão elástica. Limitando a discussão ao material elástico linear com σ_x como única tensão não nula, de acordo com a lei de Hooke, $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$. Dessa forma, para uma viga elástica, as tensões normais σ_x resultantes da flexão também devem variar linearmente com suas respectivas distâncias do eixo neutro. Em uma dada seção da viga, tanto M quanto I são constantes, a tensão normal σ_x atinge seu valor mais elevado quando o valor absoluto de y é máximo. As tensões normais devem formar um conjugado estaticamente equivalente ao momento resistente, cujo sentido é conhecido. Com base nisso:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M \cdot y}{I} \quad (3.1)$$

Sendo M o momento fletor, y a distância do eixo neutro da viga ao ponto da seção onde a tensão é desejada e I o momento de inércia. A tensão será máxima para pontos mais afastados da linha neutra, isto é, para o maior valor de y .

O cálculo da tensão tangencial é caracterizado pela equação a seguir:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t} \quad (3.2)$$

Sendo V a força cortante total, Q é o momento estático da área parcial da seção transversal de um lado do corte longitudinal em torno do eixo neutro, I é o momento de inércia e t é a espessura.

3.2. Teoria de Vlasov

Segundo Vasili Zakharovitch Vlasov, 1961, uma viga de parede fina é considerada como um sistema espacial composto de placas capazes de suportar, em cada ponto da superfície média, não só tensões axiais, normais e cisalhantes, como também momentos. A deformação da viga não é analisada sob a hipótese usual das seções planas, é usada a hipótese mais geral e natural de inextensibilidade do contorno e ausência de tensão cisalhante na superfície média. Essa hipótese constitui a base de uma nova equação de deslocamentos longitudinais na seção transversal. Vlasov denominou esta equação de Lei das Áreas Setoriais e inclui a Lei das seções Planas como caso particular, permitindo o cálculo das tensões nos casos mais gerais de flexo-torção de vigas. De acordo com Vlasov, são consideradas vigas de paredes finas as que satisfazem as seguintes relações:

- O material é homogêneo, elástico e isotrópico. O coeficiente de Poisson é pequeno e seu quadrado desprezível quando comparado com a unidade;
- Após a deformação da barra, a geometria da seção transversal projeta-se indeformada no seu plano;
- As distorções da superfície média são desprezadas;
- Cada elemento comporta-se como casca de pequena espessura, ou seja, segue a hipótese de Kirchhoff que diz que retas perpendiculares à superfície média da seção transversal, após a deformação da barra, permanecem perpendiculares à superfície média deformada;
- Somente cargas conservativas são consideradas;
- A flambagem local não é considerada;
- Como resultado do empenamento, as cargas externas longitudinais são consideradas diferentes das transversais, no seguinte sentido: na teoria clássica, ambas poderiam ser substituídas por um sistema estático equivalente, agora as primeiras não são mais substituíveis por tal sistema. Em outras palavras, o princípio de Saint Venant não se aplica para cargas longitudinais nas seções de paredes finas.

Conforme Oden (1981), sendo um elemento de parede fina, que tenha uma ou mais seções transversais restringidas ao empenamento, e está sob ação de um sistema de cargas externas, este fica sujeito a uma complexa distribuição de tensões normais e transversais que não podem ser determinadas por teorias elementares da resistência dos materiais. Efeitos semelhantes ocorrem quando o momento torçor varia ao longo do elemento, seções vizinhas tendem a girar com ângulos diferentes, ou seja, tendem a ter empenamentos diferentes. A hipótese de que as seções planas permanecem planas durante a deformação não é mais válida, e aplicações do princípio de Saint Venant podem conduzir a sérios erros.

A existência de tensões devidas às restrições ao empenamento das seções é facilmente detectada sob o ponto de vista físico ou mecânico. Uma seção aberta submetida a um momento de torção apresenta livres deslocamentos longitudinais em seus extremos quando não restringida ao empenamento das seções transversais, como ilustra a Figura 3.1.

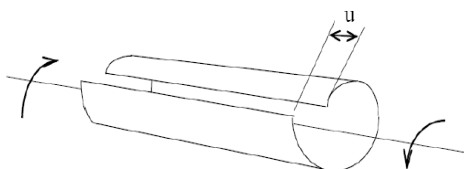


Figura 3.1 – Seção submetida à torção sem restrição ao empenamento.

Considerando uma ou mais seções restringidas com relação a deslocamentos fora do seu plano (empenamento), um sistema de tensões normais à seção deve ser desenvolvido para eliminar estes deslocamentos. Estas tensões normais geralmente variam ao longo da peça de seção para seção, uma vez que a restrição é discreta e não contínua no sentido longitudinal, portanto ela está acompanhada de uma variação nas tensões tangenciais ao longo

das seções, alterando o comportamento à torção destas seções. Como resultado, o momento de torção desenvolvido em cada seção não é mais proporcional ao ângulo de torção e, conseqüentemente, as tensões tangenciais finais não podem ser obtidas pela superposição daquelas produzidas por torção e flexão sem restrições ao empenamento. De acordo com as teorias elementares de flexão, o caso da Figura 3.2, que por simplicidade considera-se que as barras resistem somente a tensões longitudinais e a membrana somente ao corte, pode ser decomposto conforme a Figura 3.3 em que são considerados uma força normal $N_x = P$ e os momentos fletores M_z e M_y .

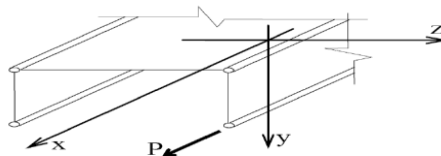


Figura 3.2 – Seção de quatro barras e membrana fina.

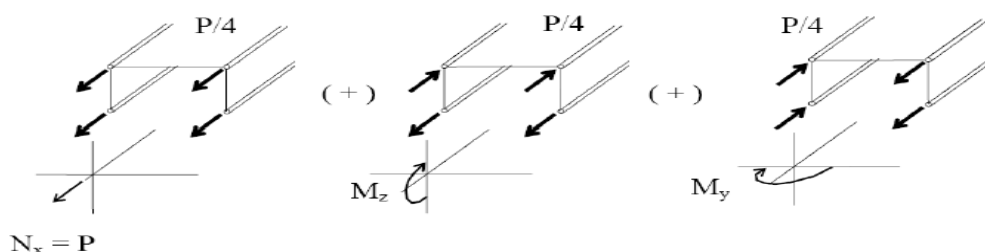


Figura 3.3 – Força Normal e Momentos Fletores.

Esta superposição de casos, entretanto é impossível. Não compõe o caso da Figura 3.2 a menos que a situação da Figura 3.4 seja adicionada.

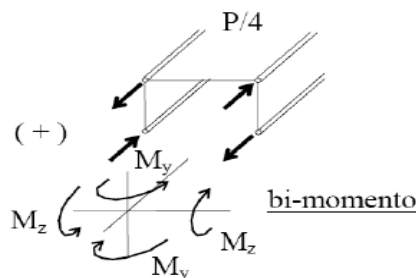


Figura 3.4 – Bi-momento.

O sistema de forças da Figura 3.4 equivale a dois pares iguais e opostos de momentos, aplicados em planos paralelos em torno dos eixos y e z . Estes pares são estaticamente equilibrados, estaticamente nulos e auto equilibrados e denomina-se Bi-momento ($B\omega$), responsável pelo empenamento nas seções de forma similar ao produzido pela torção. Se um momento de torção é aplicado a um extremo livre da peça, na seção restringida ao empenamento surgirá um sistema tal de tensões cuja resultante é um bi-momento. De acordo com o princípio de Saint Venant, para seções fechadas, o efeito deste sistema de tensões estaticamente equilibrado deve decair rapidamente a partir do seu ponto de aplicação, mas para seções abertas a aplicação deste princípio pode levar a erros significativos porque as tensões causadas pelo empenamento restringido decaem muito lentamente a partir de seus pontos de aplicação e podem constituir-se nos principais sistemas de tensões na estrutura.

A tensão normal σ_x em seções abertas com empenamento restringido é dada pela equação 3.3, sendo que os primeiros termos representam variações lineares desenvolvidas pela atuação de solicitações como esforço normal e momentos fletores, e o último termo representa o efeito do empenamento restringido.

$$\sigma_x = -E \left(y \frac{d^2v}{dx^2} + z \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{du_0}{dx} + 2\omega \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) \quad (3.3)$$

Substituindo a equação (3.3) no conjunto de equações a seguir,

$$\begin{aligned} M_z &= \int \sigma_x \cdot y \cdot dA \\ M_y &= \int \sigma_x \cdot z \cdot dA \\ N_x &= \int \sigma_x \cdot dA \end{aligned} \quad (3.4)$$

e notando que $\int y \cdot dA = \int z \cdot dA = 0$, já que y e z passam pelo centróide, e lembrando que:

$$\begin{aligned} A &= \int dA \\ I_y &= \int z^2 \cdot dA \\ I_z &= \int y^2 \cdot dA \\ I_{yz} &= \int yz \cdot dA \end{aligned} \quad (3.5)$$

e definindo como momento setorial de primeira ordem:

$$S_\omega = \int 2\omega \cdot dA \quad (3.6)$$

o qual depende do ponto de origem da coordenada s, e como produtos setoriais de inércia:

$$\int 2\omega z dA = -2I_{\omega y} \quad \text{e} \quad \int 2\omega y dA = -2I_{\omega z} \quad (3.7)$$

Obtém-se:

$$\begin{aligned} N_x &= EA \frac{du_0}{dx} - ES_\omega \frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ M_y &= -EI_{yz} \frac{d^2v}{dx^2} - EI_y \frac{d^2w}{dx^2} + 2EI_{\omega y} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ M_z &= -EI_z \frac{d^2v}{dx^2} - EI_{yz} \frac{d^2w}{dx^2} + 2EI_{\omega z} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

E das equações (3.8) pode-se observar a existência de esforços axiais e de flexão oriundos da torção devido às restrições ao empenamento. Com o objetivo de simplificar o desenvolvimento das equações, toma-se o polo coincidente com o centro de corte da seção e os produtos setoriais de inércia se anulam, obtendo o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dx} &= \frac{N_x}{EA} + \frac{S_\omega}{A} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \\ \frac{d^2w}{dx^2} &= \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tomando a origem para a coordenada s em um extremo livre do contorno da seção, ω_0 representa a área setorial entre este ponto e um centróide setorial, portanto:

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{N_x}{EA} + 2\omega_0 \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad (3.10)$$

Substituindo as equações na equação (3.3), a tensão normal pode ser expressa em função das solicitações, logo:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{(I_y I_z - I_{yz}^2)} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{(I_y I_z - I_{yz}^2)} z + 2E(\omega_0 - \omega) \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad (3.11)$$

Sendo que ω_0 representa a área setorial medida entre a origem da coordenada s em um extremo livre e um centróide setorial, e ω a área setorial medida até o ponto no qual se calcula a tensão normal σ_x , e também como o polo está tomado coincidentemente com o centro de corte, os produtos setoriais de inércia se anulam. Como o último termo representa as tensões normais causadas pelo empenamento, ou pelo já definido Bi-momento (B_ω), que pode ser definido como:

$$B_\omega = \int 2\sigma_x (\omega_0 - \omega) \cdot dA \quad (3.12)$$

Substituindo σ_x pela parte final da equação 3.11, obtém-se:

$$B_\omega = E \frac{d^2\varphi}{dx^2} \int 4(\omega_0 - \omega)^2 \cdot dA \quad (3.13)$$

Sendo a constante de empenamento definida como Γ e, $E\Gamma$ como a rigidez ao empenamento, tem-se:

$$B_\omega = E\Gamma \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad (3.14)$$

$$\Gamma = \int 4(\omega_0 - \omega)^2 \cdot dA \quad (3.15)$$

O bi-momento é conhecido como a sétima resultante da tensão (N , V_y , V_z , M_y , M_z , M_T e B_ω) e conduz a um estado de tensões normais auto equilibradas, que é independente de N , M_y e M_z e pode ser gerado por torção.

Finalmente, substituindo a equação 3.14 em 3.11, chega-se que a tensão normal é expressa como:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{(I_y I_z - I_{yz}^2)} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{(I_y I_z - I_{yz}^2)} z + 2 \frac{B_\omega}{\Gamma} (\omega_0 - \omega) \quad (3.16)$$

A força axial e os momentos fletores podem ser simplesmente obtidos pela estática ou hiperestática, dependendo da vinculação. Entretanto, o Bi-momento é uma quantidade estaticamente indeterminada, auto equilibrada, e deve ser obtida anteriormente à σ_x .

Para a determinação da tensão tangencial, considere a Figura 3.5 que representa um segmento de comprimento Δx de uma peça de seção aberta submetida a um momento torçor m_t por unidade de comprimento e a carregamentos nas direções x , y e z .

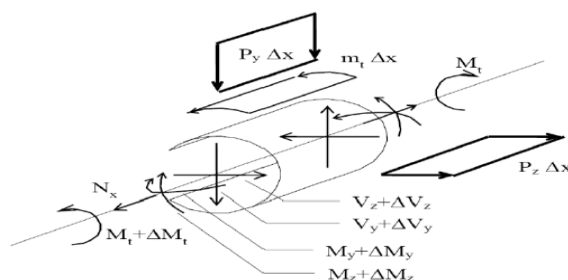


Figura 3.5 – Segmento de seção aberta.

Considerando a Figura 3.6 um elemento de dimensão ds obtido da peça da Figura 3.5:

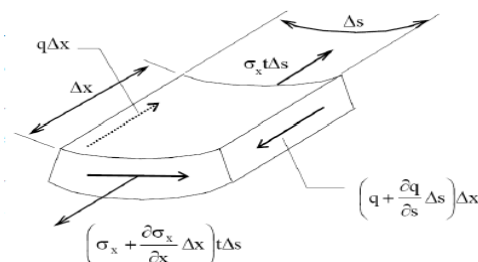


Figura 3.6 – Elemento de dimensão ds .

Somando as forças na direção x quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta s \rightarrow 0$, obtém-se:

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (3.17)$$

Sendo escolhida a coordenada s com origem em um extremo livre, considerando $q_0 = 0$, o fluxo em $s=0$ e $dA=t ds$, tem-se:

$$q = - \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dA \quad (3.18)$$

Substituindo na equação anterior a derivada da tensão σ_x em relação à x, sendo Q_y e Q_z os momentos de área com respeito à y e z. O termo $Q\omega$ é o momento setorial da primeira ordem com relação à origem de s, que não é zero, pois é integrado até s e não em toda a seção, e $V\omega$ é o cortante de empenamento.

$$Q\omega = \int 2(\omega_0 - \omega) \cdot dA \quad (3.19)$$

$$V\omega = \frac{dB\omega}{dx} \quad (3.20)$$

Conhecido o fluxo q, pode-se obter a tensão tangencial total dada pela equação 3.21:

$$\tau_{xs} = \frac{tM_t}{J} - \frac{Q_z I_y - Q_y I_{yz}}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} V_y - \frac{Q_y I_z - Q_z I_{yz}}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} V_z - \frac{Q\omega}{t\Gamma} V_\omega \quad (3.21)$$

A determinação quantitativa das tensões devidas ao empenamento somente pode ser efetivada uma vez conhecida a função que representa o ângulo de torção Φ em termos da coordenada x, $\Phi(x)$.

A Tabela 3.1 apresenta uma analogia entre a Teoria Clássica de Resistência dos Materiais e a Teoria de Vlasov.

Tabela 3.1 – Analogia entre teorias.

Propriedade	Resistência dos Materiais	Teoria de Vlasov
Momento fletor x Bi-momento	$M_x = -EI_x \frac{d^2 v}{dx^2}$	$B_\omega = EI \frac{d^2 \phi}{dx^2}$
Cortante x Cortante de empenamento	$V_y = \frac{dM_x}{dx} = -EI_x \frac{d^3 v}{dx^3}$	$V_\omega = \frac{dB_\omega}{dx} = -M_{t\omega} = EI \frac{d^3 \phi}{dx^3}$
Tensão normal	$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x} y$	$\sigma_x = \frac{B_\omega}{\Gamma} 2(\omega_0 - \omega)$
Tensão tangencial	$\tau_{xy} = \frac{Q_z}{tI_x} V_y$	$\tau_{xs} = \frac{Q_\omega}{t\Gamma} V_\omega$

4. METODOLOGIA

A fim de ilustrar a Teoria de Vlasov, nesta etapa são comparados os resultados das tensões normais e tangenciais obtidos para duas vigas de perfis comerciais (I e Z) através de três metodologias: a) analiticamente pelas teorias clássicas de resistência dos materiais, b) analiticamente pela teoria de Vlasov e c) numericamente utilizando o software de elementos finitos Ansys.

Primeiramente é analisada uma viga bi-apoiada de perfil I (Figura 4.1) que suporta uma carga concentrada aplicada no centro do vão e fora do centro de corte. Posteriormente é realizado o mesmo processo com uma viga de perfil Z (Figura 4.2) engastada e com uma carga aplicada na extremidade livre, também fora de seu centro de corte. Ou seja, em ambos os casos tem-se um problema de flexo-torção com empenamento restringido em perfis de paredes finas com seção aberta.

A viga de perfil I é bi apoiada, suporta uma carga de corte Q de 38,5 kN a uma distância $e=90\text{mm}$ do centro de corte, $L=6000\text{mm}$, $d=300\text{mm}$, $b=200\text{mm}$, $t=w=12\text{mm}$, $E/G= 2,6$ e a constante de empenamento $\Gamma = th^2/24$, em que $h=d-t$. É calculada a tensão normal no centro do vão e a tensão tangencial no centro e no apoio esquerdo.

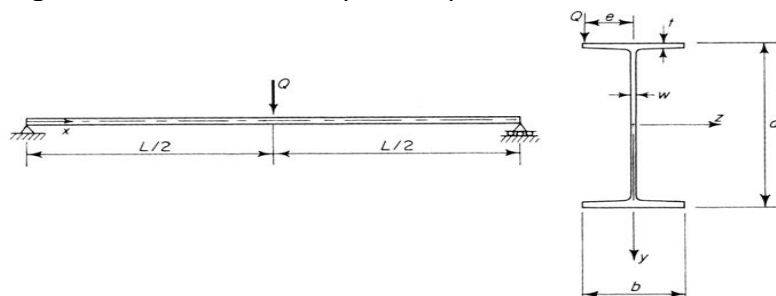


Figura 4.1 – Viga de perfil I.

A viga de perfil Z é uma viga em balanço com uma carga P de 38,5 kN, $a=200\text{mm}$, $t=25$ e $L=2000\text{mm}$ e é calculada a tensão normal e a tensão cisalhante.

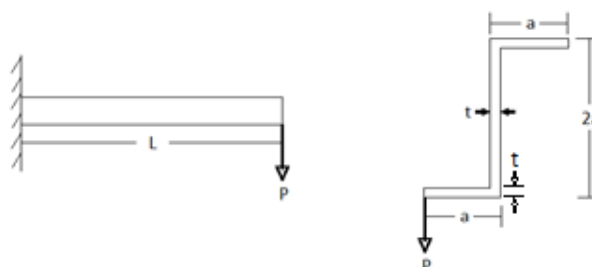


Figura 4.2 – Viga de perfil Z.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos através das soluções analíticas para as duas teorias apresentadas anteriormente e também será apresentado o resultado adquirido através da modelagem pelo software Ansys. Por fim, será feita uma comparação e discussão sobre os resultados.

5.1. Viga de Perfil I por Resistência dos Materiais

Primeiramente, para a viga de perfil I, com as equações apresentadas na Seção 3.1, para a tensão normal, tem-se:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} + 2 \left(\frac{bh^3}{12} + A \cdot d^2 \right) = \frac{12 \cdot 276^3}{12} + 2 \left(\frac{20 \cdot 12^3}{12} + 200 \cdot 12 \cdot 144^2 \right) = 120,615 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (5.1)$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_z \cdot y}{I_z} = \frac{Q \cdot L}{4} \cdot \frac{y}{I_z} = \frac{38500 \cdot 6000 \cdot 150}{4 \cdot 120,615 \cdot 10^6} = 71,82 \text{ MPa} \quad (5.2)$$

E para a tensão tangencial tem-se:

- Para a alma:

$$Q_{zal} = \frac{hbt}{4} + \frac{hbt}{4} + \int_0^s \left(\frac{h}{2} - s \right) ds = \frac{hbt}{2} + \frac{h^2t}{8} \quad (5.3)$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_y Q_{zal}}{I_z t} = \frac{(38500/2) \cdot (288 \cdot 200 \cdot 12/2 + 288^2 \cdot 12/8)}{120,615 \cdot 10^6 \cdot 12} = 6,25 \text{ MPa} \quad (5.4)$$

- Para as mesas:

$$Q_{zm} = t \int_0^s \left(\frac{h}{2}\right) ds = \frac{hbt}{4} \quad (5.5)$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V_y Q_{zm}}{I_z t} = \frac{(38500/2) \cdot (288 \cdot 200 \cdot 12/4)}{120,615 \cdot 10^6 \cdot 12} = 2,29 \text{ MPa} \quad (5.6)$$

5.2. Viga de Perfil I pela Teoria de Vlasov

Para iniciar o cálculo analítico da mesma viga de perfil I através da Teoria de Vlasov começa-se definindo a constante de empenamento Γ que é apresentada por Oden para algumas seções de paredes finas mais comuns, assim como a constante c :

$$\Gamma = \frac{th^2b^3}{24} = \frac{12 \cdot 288^2 \cdot 200^3}{24} = 33,1776 \cdot 10^{10} \text{ mm}^6 \quad (5.7)$$

$$c = \sqrt{\frac{GJ}{E\Gamma}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 389,376 \cdot 10^3}{2,6 \cdot 33,1776 \cdot 10^{10}}} = 6,71855 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1} \quad (5.8)$$

Conforme a equação 3.11, tem-se o valor da soma dos três primeiros termos da equação, restando apenas calcular o último termo, que é a equação a seguir:

$$\sigma_x = 2E(\omega_0 - \omega) \frac{d^2\varphi}{dx^2} \quad (5.9)$$

Sendo:

$$\varphi(x) = \frac{M_t x}{2GJ} + c_0 + c_1 \cosh(cx) + c_2 \sinh(cx) \quad (5.10)$$

A constante de torção J é calculada como:

$$J = \frac{1}{3} \sum b \cdot t^3 = \frac{1}{3} (200 \cdot 12^3 + 200 \cdot 12^3 + 12^3 \cdot 276) = 389376 \text{ mm}^4 \quad (5.11)$$

Para $0 \leq X \leq L/2$, as condições de contorno são:

$\varphi(0) = 0 \rightarrow$ não pode torcer no apoio;

$\varphi'(L/2) = 0 \rightarrow$ não há empenamento no meio do vão;

$\varphi''(0) = 0 \rightarrow$ não há tensão normal no apoio.

Então:

$$\varphi(x) = \frac{M_t}{2GJ} \left(x - \frac{\sinh(cx)}{c \cdot \cosh\left(\frac{cL}{2}\right)} \right) \quad (5.12)$$

$$\varphi'(x) = \frac{M_t}{2GJ} \left(1 - \frac{\cosh(cx)}{\cosh\left(\frac{cL}{2}\right)} \right) \quad (5.13)$$

$$\varphi''(x) = -\frac{M_t c}{2GJ} \left(\frac{\sinh(cx)}{\cosh\left(\frac{cL}{2}\right)} \right) \quad (5.14)$$

$$\varphi'''(x) = -\frac{M_t c^2}{2GJ} \left(\frac{\cosh(cx)}{\cosh\left(\frac{cL}{2}\right)} \right) \quad (5.15)$$

A tensão é máxima em $L/2$ e $2(\omega_0 - \omega) = bh/4 = 14400 \text{ mm}^2$, logo pelas equações 3.11 e 5.14:

$$\sigma_x = -14400 \cdot 2,6 \cdot \frac{Q \cdot 90 \cdot 6,718555 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 389376} \left(\tanh \frac{4,03113}{2} \right) = -108,02 \text{ MPa} \quad (5.16)$$

Portanto, as tensões normais totais devido à flexão, que é a soma da calculada anteriormente com as equações básicas, com o termo devido ao empenamento:

$$\sigma_{x1} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{(I_y I_z - I_{yz}^2)} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{(I_y I_z - I_{yz}^2)} z + 2E(\omega_0 - \omega) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 71,82 + 108,02 = 179,84 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x2} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{(I_y I_z - I_{yz}^2)} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{(I_y I_z - I_{yz}^2)} z + 2E(\omega_0 - \omega) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 71,82 - 108,02 = -36,20 \text{ MPa}$$

Portanto, a distribuição final das tensões normais pode ser vista na Figura 5.1:

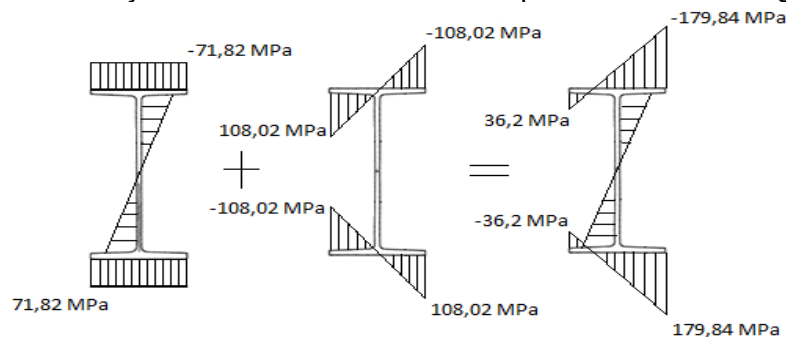


Figura 5.1 – Tensões normais totais pela Teoria de Vlasov.

As tensões normais são comparadas na tabela a seguir:

Tabela 5.1 – Tensões normais para viga de perfil I

Tensões Normais	
Resistência dos Materiais	Teoria de Vlasov
$\sigma = 71,82 \text{ MPa}$	$\sigma_1 = 179,84 \text{ MPa}$
	$\sigma_2 = 36,2 \text{ MPa}$

Resolvendo a mesma viga de forma numérica utilizando o software Ansys, chega-se a resultados muito próximos aos obtidos pela Teoria de Vlasov, como pode ser visto na Figura 5.2.

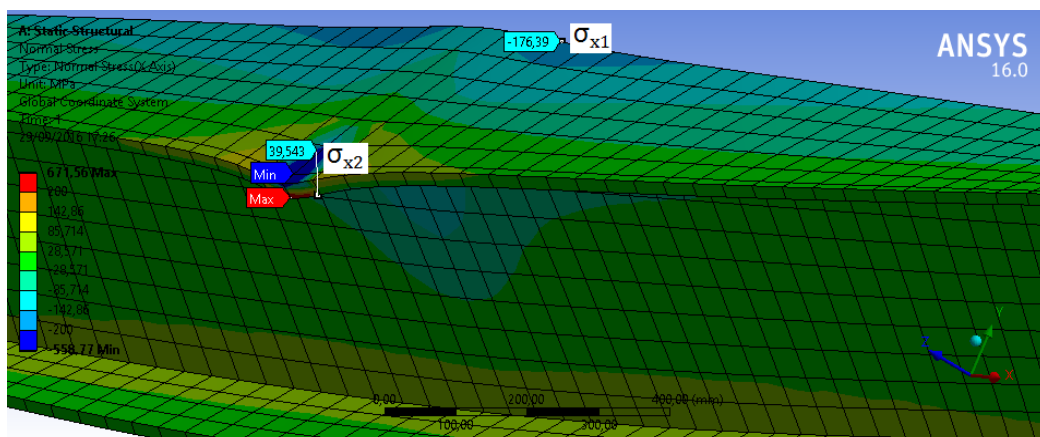


Figura 5.2 – Tensões normais pelo Ansys para o perfil I.

Para o cálculo das tensões tangenciais, utiliza-se a equação 3.21 e de acordo com a Tabela 3.1, sabe-se que:

$$V\omega = E\Gamma \frac{d^3\varphi}{dx^3} \quad (5.17)$$

Então:

$$\tau_{xs} = \frac{tM_t}{J} - \frac{Q_z I_y - Q_y I_{yz}}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} V_y - \frac{Q_y I_z - Q_z I_{yz}}{t(I_y I_z - I_{yz}^2)} V_z - \frac{Q_\omega}{t} E\varphi'''(x) \quad (5.18)$$

Logo, para a tensão tangencial relativa à torção, tem-se:

$$\tau_{xsT} = \frac{tM_t}{J} = tG\varphi' = \frac{tM_t}{2J} \left(1 - \frac{\cosh(cx)}{\cosh\left(\frac{cL}{2}\right)} \right) = \frac{tQe}{2J} \left(1 - \frac{\cosh(cx)}{\cosh\left(\frac{cL}{2}\right)} \right) \quad (5.19)$$

Com isso obtém-se:

$$\begin{aligned} \tau_{xsT1} &= 39,41 \text{ MPa, para } X = 0 \\ \tau_{xsT2} &= 0 \text{ MPa, para } X = L/2 \end{aligned}$$

E para o cálculo da tensão tangencial referente à flexão, têm-se os mesmos valores para $x=0$ e $x=L/2$, obtidos pela teoria básica de resistência dos materiais apresentada anteriormente, para a alma e para as mesas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \tau_{xsF1} &= \frac{V_y Q_{zal}}{I_z t} = 6,25 \text{ MPa} \\ \tau_{xsFm} &= \frac{V_y Q_{zm}}{I_z t} = 2,29 \text{ MPa} \end{aligned}$$

E considerando as tensões tangenciais advindas do fato do empenamento estar restringido tem-se:

Em $x = 0$:

$$\tau_{xsE1} = \frac{Q_\omega}{t} E\varphi'''(0) = \frac{86,4 \cdot 10^5}{12} \frac{38500,90}{2,33,1776 \cdot 10^{10}} \frac{1}{\cosh\frac{4,03113}{2}} = 0,9845 \text{ MPa} \quad (5.20)$$

Em $x = L/2$:

$$\tau_{xsE2} = \frac{Q_\omega}{t} E\varphi'''\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{86,4 \cdot 10^5}{12} \frac{38500,90}{2,33,1776 \cdot 10^{10}} = 3,76 \text{ MPa} \quad (5.21)$$

Resumindo então as tensões tangenciais, tem-se a distribuição apresentada na Figura 5.3:

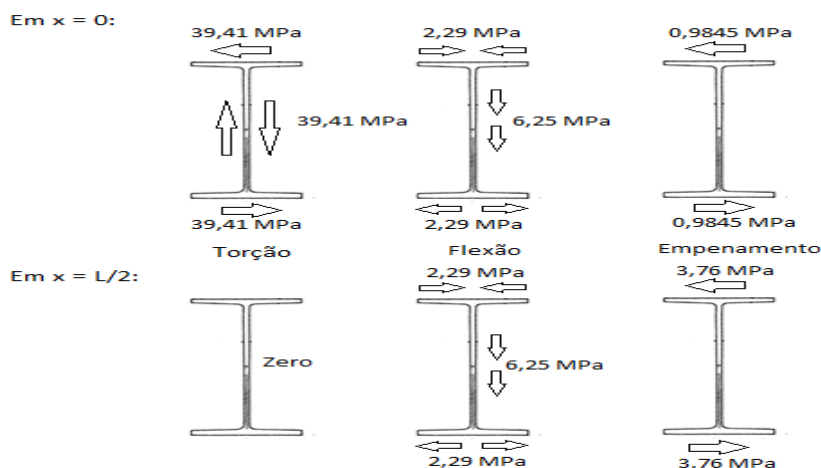


Figura 5.3 – Tensões tangenciais pela Teoria de Vlasov.

Tabela 5.2 – Tensões tangenciais para viga de perfil I

Tensões Tangenciais	
Resistência dos Materiais	Teoria de Vlasov
$\tau_{alm} = 6,25 \text{ MPa}$	$\tau_{xsT1} = 39,41 \text{ MPa}$
	$\tau_{xsT2} = 0 \text{ MPa}$
	$\tau_{xsFal} = 6,25 \text{ MPa}$
$\tau_{mes} = 2,29 \text{ MPa}$	$\tau_{xsFm} = 2,29 \text{ MPa}$
	$\tau_{xsE1} = 0,9845 \text{ MPa}$
	$\tau_{xsE1} = 3,76 \text{ MPa}$

A Figura 5.4 mostra os resultados das tensões tangenciais obtidas pelo software Ansys. Como se observa, os resultados estão muito próximos aos obtidos pela Teoria de Vlasov.

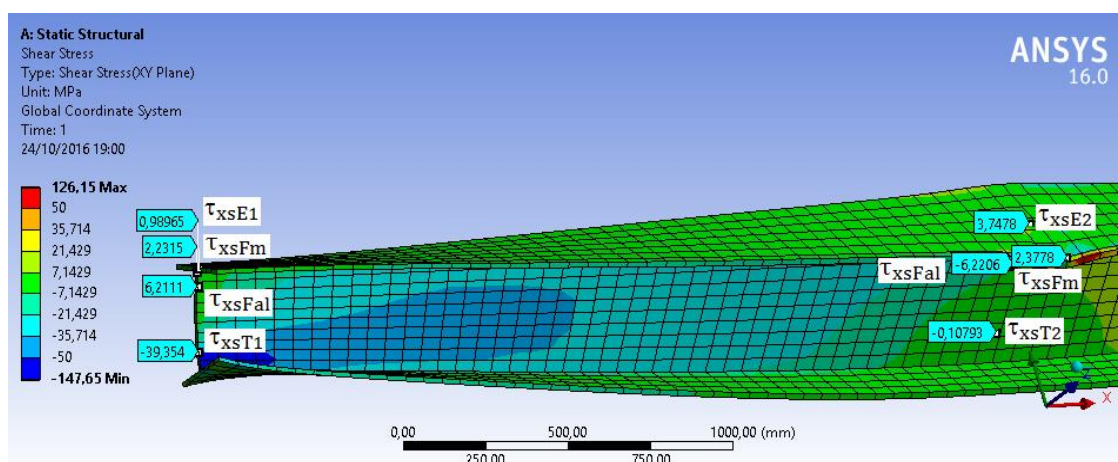


Figura 5.4 – Tensões tangenciais pelo Ansys para o perfil I.

5.3. Viga de Perfil Z pela Teoria de Vlasov

Como comentado anteriormente, a Teoria de Vlasov complementa a teoria básica de resistência dos materiais, adicionando o termo relacionado ao fato do empenamento estar restringido. Devido a isso, é realizado o mesmo cálculo analítico e comparado com os resultados obtidos na modelagem do Ansys. Como cálculos iniciais, tem-se:

$$\Gamma = \frac{5ta^5}{12} = 3,33 \cdot 10^{12} \text{ mm}^6 \quad (5.22)$$

$$c = \sqrt{\frac{GJ}{E\Gamma}} = 7,07 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1} \quad (5.23)$$

$$J = \frac{4at^3}{3} = 4166667 \text{ mm}^4 \quad (5.24)$$

Seguindo o mesmo procedimento da viga de perfil I, chegam-se às Tensões Normais em $x=0$ (no engaste) conforme Tabela 5.1.

Tabela 5.3 – Tensões normais para viga de perfil Z.

Tensões Normais no Engaste	
Resistência dos Materiais	Teoria de Vlasov (tensões totais)
$\sigma_1 = 33,00$ MPa	$\sigma_1 = 120,07$ MPa
$\sigma_2 = -66,00$ MPa	$\sigma_2 = -95,02$ MPa
$\sigma_3 = 0$ MPa	$\sigma_3 = -29,02$ MPa
$\sigma_4 = 66,00$ MPa	$\sigma_4 = 36,98$ MPa
$\sigma_5 = -33,00$ MPa	$\sigma_5 = 54,07$ MPa

Como pode ser visto na Figura 5.5, os resultados da Teoria de Vlasov são bem próximos aos obtidos numericamente pelo software Ansys.

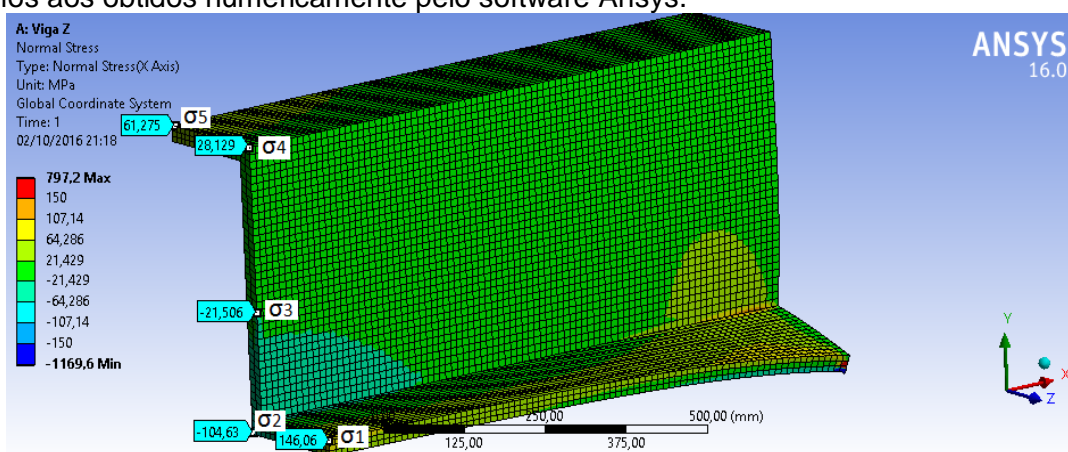


Figura 5.5 – Tensões normais pelo Ansys para o perfil Z.

E para as Tensões Tangenciais Totais em $x=0$ (Tabela 5.2), tem-se:

Tabela 5.4 – Tensões tangenciais para a viga de perfil Z.

Tensões Tangenciais no Engaste	
Resistência dos Materiais	Teoria de Vlasov (tensões totais)
$\tau_1 = 0$ MPa	$\tau_1 = 0$ MPa
$\tau_2 = -1,65$ MPa	$\tau_2 = 2,97$ MPa
$\tau_3 = -4,95$ MPa	$\tau_3 = -4,95$ MPa
$\tau_4 = -1,65$ MPa	$\tau_4 = -6,27$ MPa
$\tau_5 = 0$ MPa	$\tau_5 = 0$ MPa

Novamente, como pode ser visto na Figura 5.6, os resultados da Teoria de Vlasov são bem próximos aos obtidos numericamente pelo software Ansys.

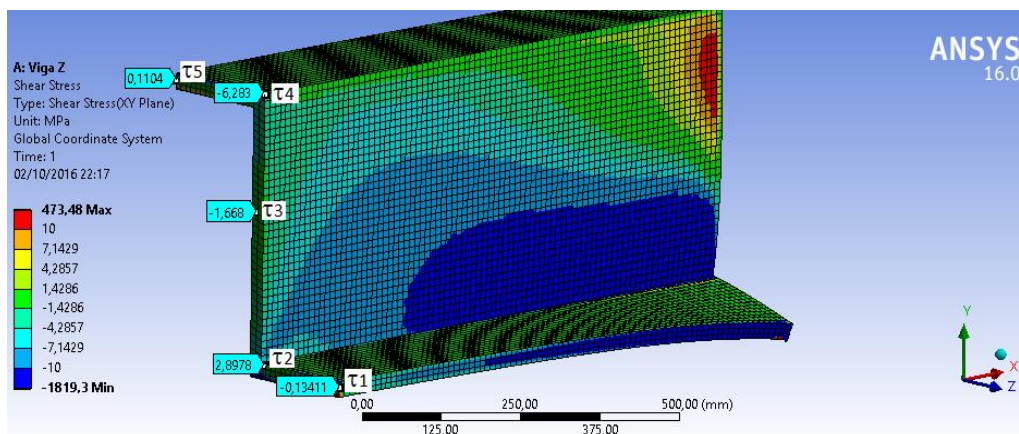


Figura 5.6 – Tensões tangenciais pelo Ansys para o perfil Z.

6. CONCLUSÕES

O trabalho visou estudar, compreender e aplicar a Teoria de Vlasov para vigas de seções abertas de paredes finas submetidas à flexo-torção com empenamento restringido. Neste sentido, é possível concluir que o trabalho obteve êxito.

Foram apresentados dois procedimentos analíticos de cálculo para se obter as tensões nas vigas estudadas, através da teoria básica de resistência dos materiais e através da Teoria de Vlasov. Como foi comentado ao longo do trabalho, a Teoria de Vlasov considera um termo a mais, que corresponde às tensões advindas do fato do empenamento estar restringido, sendo, portanto, uma estimativa mais real das tensões.

A comparação dos resultados analíticos por Vlasov com os numéricos apresentou uma boa concordância, mostrando que o software não subestima os valores reais de tensão quando a peça é submetida à flexo-torção com empenamento restringido, sendo seu uso interessante do ponto de vista prático dentro das empresas.

Os resultados mostraram que as tensões calculadas com a Teoria de Vlasov, produzidas pelo empenamento restringido, não podem ser desprezadas, constituindo, em algumas situações, no sistema primário de tensões nas vigas. E até mesmo podem, por exemplo, trocar uma tensão que seria de tração se fosse calculada pela teoria básica por uma de compressão quando calculada pela teoria de Vlasov e vice-versa.

Finalmente, cabe ressaltar que este é um tema contribuiu de forma significativa para a ampliação do conhecimento do aluno por ser tratar de uma teoria de pós-graduação.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves, V. et al; **“Contribuição ao estudo do Bimomento em estruturas de hastes de paredes delgadas”**, Engevista, v.6, n. 2, p.59-69, agosto, 2004.

Galambos, T. V.; **“Structural members and frames”**, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1968.

Heyliger, P. R.; **“Elasticity alternatives to generalized Vlasov and Timoshenko models for composite beams”**, Composite Structures, Colorado State University, 2016.

Oden, J.T, Ripperger, E. A.; **“Mechanics of Elastic Structures”**, Hemisphere Publishing Corporation, 2^o edition, 1981.

Popov, E. P.; **“Introdução à Mecânica dos Sólidos”**, Edgard Blucher, 1978.

Vlasov, V. Z.; **“Thin-Walled Elastic Beams”**, Israel Program for Scientific Translations Ltd, 1^o edition, 1961.