

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

TRANSMUTAÇÃO ESTATÍSTICA EM 2+1 DIMENSÕES*

Angela Foerster

Tese realizada sob orientação do Prof. Dr. Horácio Oscar Girotti, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

* Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Brasil.

Porto Alegre

1989

Dedico a

meu marido , Pedro

e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Horácio Oscar Girotti pela sugestão do tema, pela orientação recebida e pelo constante estímulo na realização deste trabalho;

ao Prof. Dr. Adilson J. da Silva, a Marco Aurélio Pires Idiart e a Pedro Luís Grande por estimulantes discussões;

aos meus amigos e colegas de sala que de uma forma ou outra me ajudaram a concluir este trabalho.

ABSTRACT

A 2+1 dimensional theory of charged scalar particles coupled to an Abelian gauge field with the Chern-Simons term in the action is canonically quantized in the Coulomb and superaxial gauges. The gauge transformation linking these two gauges is shown to be singular. Then, the superaxial gauge excitations are found to obey fractional statistics. We demonstrate that this effect does not arise when the conventional term $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ is present in the action.

RESUMO

Uma teoria em 2+1 dimensões de partículas escalares carregadas acopladas com um campo Abeliano de gauge e com o termo de Chern-Simons na ação é canonicamente quantizada no gauge de Coulomb e no gauge super-axial. Mostra-se que a transformação que conecta estes dois gauges é singular. Então, encontra-se que as excitações do gauge super-axial obedecem uma estatística fracionária. Mostra-se que este efeito não aparece quando o termo convencional $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ está presente na ação.

INDICE

I - INTRODUÇÃO	1
II - TEORIA DE CHERN-SIMONS BOSÔNICA CLÁSSICA - TEORIA DE PARTÍCULAS CARREGADAS ACOPLADAS COM UM POTENCIAL DE GAUGE E COM UM TERMO TOPOLÓGICO	
II.1 - FORMULAÇÃO LAGRANGEANA	6
II.2 - FORMULAÇÃO HAMILTONIANA	
II.2.a-Hamiltoniano canônico, vínculos primários e momentos	7
II.2.b-Hamiltoniano total e vínculos secundários	9
II.2.c-Vínculos de 1 ^a e 2 ^a classe e Hamiltoniano estendido	12
II.2.d-Tensor energia-momento	14
III- TEORIA DE CHERN-SIMONS BOSÔNICA QUÂNTICA	
III.1- QUANTIZAÇÃO NO GAUGE DE COULOMB	
III.1.a-Comutadores a tempos iguais	16
III.1.b-Espaço de fase Γ^*	23
III.1.c-Equação de Dirac-Schwinger e geradores de Poincaré	25
III.1.d-Hamiltoniano, momento linear e momento angular	27
III.1.e-Anomalia rotacional	29
III.2- QUANTIZAÇÃO NO GAUGE SUPER-AXIAL	
III.2.a-Definição	30
III.2.b-Comutadores a tempos iguais	35
III.2.c-Espaço de fase Γ^*	40

III.2.d-Relações de comutação "graded" a tempos iguais	42
III.2.e-Hamiltoniano, momento linear e momento angular	43

IV - TEORIA DE CHERN-SIMONS BOSÔNICA EM PRESENÇA DO TERMO CINÉTICO

IV.1 - FORMULAÇÃO LAGRANGEANA	45
IV.2 - FORMULAÇÃO HAMILTONIANA	
IV.2.a-Hamiltoniano canônico, vínculos primários e momentos	46
IV.2.b-Hamiltoniano total e vínculos secundários	48
IV.2.c-Vínculos de 1 ^a e 2 ^a classe e hamiltoniano estendido	49
IV.2.d-Quantização da teoria no gauge de Coulomb	50

V - TEORIA DE CHERN-SIMONS FERMIÔNICA

V.1 - MODELO SEM O TERMO CINÉTICO	53
V.2 - MODELO COM O TERMO CINÉTICO	60

VI - CONCLUSÕES

63

APÊNDICES

A. Parênteses de Poisson entre os campos	65
B. Cálculo do tensor energia-momento simétrico	68
C. Relações de comutação no gauge super-axial	70

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

78

I - INTRODUÇÃO

A física em 2+1 dimensões nem sempre é mais simples do que a física em 3+1 dimensões. Podemos citar, por exemplo, o aparecimento do momento angular fracionário (ou spin fracionário) [1], [2] e da estatística exótica (ou "anyons") [3], [4], [5], [6]. Ambos só ocorrem em duas dimensões espaciais, e estão relacionados com certas características topológicas presentes neste espaço.

Para explicar o surgimento do momento angular fracionário, vamos considerar o grupo de rotações em duas dimensões, que são implementadas pelo operador unitário $U(\phi)$,

$$U(\phi) = e^{iJ\phi} \quad , \quad (1)$$

sendo J o momento angular do sistema (gerador de rotações) e ϕ o ângulo da rotação. Impondo a condição de que a rotação por 2π identifica o mesmo elemento do grupo, temos,

$$U(\phi) = e^{iJ\phi} = e^{iJ(\phi + 2\pi)} = U(\phi + 2\pi) \quad , \quad (2)$$

$$e^{i2\pi J} = I$$

Representando o operador acima na base dos autovalores de J , temos

$$e^{i2\pi j} = 1.$$

Assim, os autovalores de $J(j)$ devem ser inteiros.

Por outro lado, se a representação do grupo é "multivalued", a condição (2) fica,

$$U(\phi) = e^{iJ\phi} = e^{i\theta} e^{iJ(\phi + 2\pi)} = e^{i\theta} U(\phi + 2\pi) \quad , \quad (3)$$

onde θ é uma fase. De (3), temos,

$$e^{i(\theta + 2\pi J)} = I$$

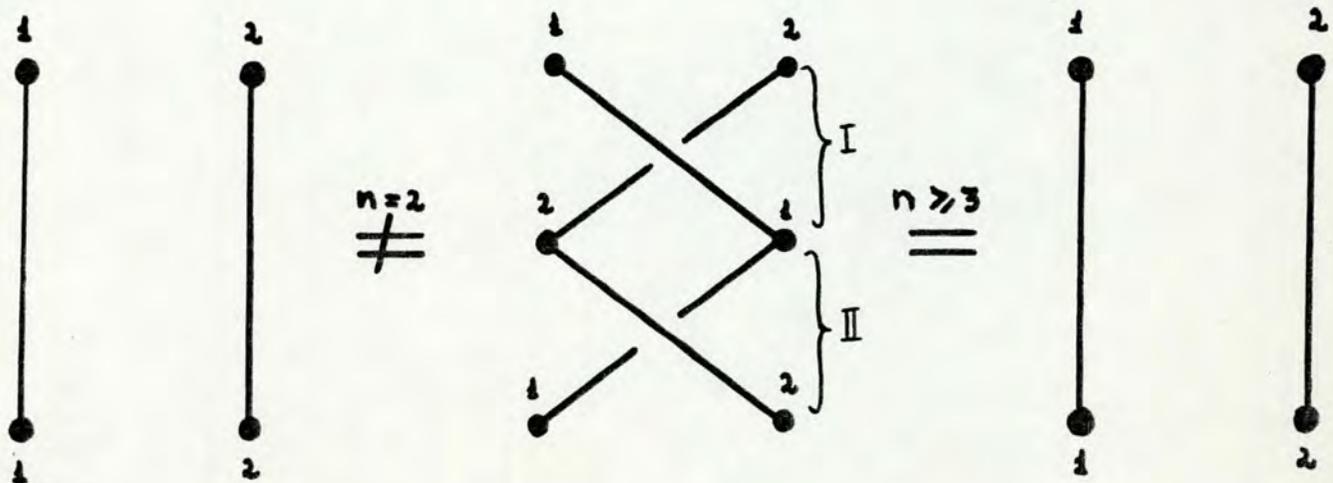
Representando o operador acima na base dos autovetores de J , temos

$$j + \frac{\theta}{2\pi} = 1 \quad , \quad (4)$$

Assim, como θ é arbitrário, existe a possibilidade de que os autovalores de J sejam fracionários. Em particular, para $\theta = 2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, os autovalores de J serão inteiros, enquanto que para $\theta = (2k+1)\pi$, $k= 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, os autovalores de J serão semi-inteiros.

O surgimento da estatística exótica pode ser qualitativamente entendido na mecânica quântica, dentro da formulação de integrais de caminho de Feynman [7]. Para isto, vamos considerar um sistema de N partículas idênticas que não podem ocupar o mesmo ponto num espaço \mathbb{R}^n . Para quantizar este sistema, deve-se atribuir uma fase para cada possível caminho. A amplitude total é a soma sobre todos os caminhos, que contribuem com quantidades iguais (mesmo peso).

Isto é válido para os caminhos que pertencem a mesma classe de homotopia (são aqueles que podem ser deformados uns nos outros). Já os caminhos em diferentes classes de homotopia contribuem com quantidades diferentes (pesos diferentes, que podem ser colocados na forma de fases) para a amplitude total. Assim, a função de onda do sistema torna-se "multivalued" em \mathbb{R}^n . Isto permite que a função de onda do sistema troque por uma fase ao se intercambiar a posição das partículas. Com isto, é então possível que existam funções de onda com uma simetria de troca estranha ou exótica. Este fenômeno só ocorre em duas dimensões espaciais, porque as propriedades estatísticas das N partículas idênticas, que não ocupam a mesma posição em \mathbb{R}^n , podem ser conectadas ao primeiro grupo de homotopia π_1 . E, para $n \geq 3$, π_1 é o grupo de permutação das N partículas, enquanto que para $n=2$, π_1 é o grupo das tranças, que possui um parâmetro contínuo θ , e ainda hoje é objeto de estudo de muitos pesquisadores [8]. Para exemplificar, vamos considerar o caso de duas partículas (1 e 2) que trocam de posição duas vezes, como indica a figura



Seja $|\psi\rangle$ o vetor de estado do sistema e P_{12} o operador que troca a posição da partícula 1 com a 2.

No caso $n \geq 3$, a operação de trocar a posição das partículas duas vezes nos leva à situação original, isto é, $(P_{12})^2 = I$.

$$I) P_{12} |\psi\rangle = \begin{cases} + |\psi\rangle \\ - |\psi\rangle \end{cases}$$

$$II) (P_{12})^2 |\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \Rightarrow (P_{12})^2 = I$$

Assim, só podem ocorrer permutações pares e ímpares, o que implica que só podem existir bósons e férmions.

No caso $n=2$, a operação de trocar a posição das partículas duas vezes não nos leva à situação original, isto é, $(P_{12})^2 \neq I$.

$$I) P_{12} |\psi\rangle = e^{i\theta} |\psi\rangle$$

$$II) (P_{12})^2 |\psi\rangle = e^{2i\theta} |\psi\rangle \quad \Rightarrow (P_{12})^2 \neq I$$

Aqui, existe um contínuo de possíveis permutações, parametrizado por θ . Podem existir bósons para $\theta = 2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, férmions para $\theta = (2k+1)\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e "anyons" para um θ qualquer. Assim, existirão bósons com spin inteiro, férmions com spin semi-inteiro e "anyons" com spin fracionário.

Neste trabalho, vamos demonstrar que os argumentos semi-qualitativos apresentados nos parágrafos anteriores são corretos e que partículas que obedecem uma estatística exótica

efetivamente emergem como resultado de quantizar uma teoria de campos com liberdade de gauge estabelecida num espaço-tempo tridimensional. A mencionada teoria é conhecida como o modelo de Chern-Simons. Começamos por quantizar o modelo de Chern-Simons no gauge de Coulomb. Depois encontramos o espaço de fase Γ^* (aquele cujas variáveis que o descrevem são desvinculadas) e as relações de comutação a tempos iguais obedecidas pelas variáveis desvinculadas (denotadas por $\{q^*\}$). São precisamente estas relações de comutação as que determinam o tipo de estatística obedecida pelas excitações resultantes de quantizar $\{q^*\}$. A seguir, o sistema é quantizado num outro gauge, o qual denominamos de gauge super-axial, cujas variáveis desvinculadas são denotadas por $\{q^{*'}\}$. Em princípio, a invariância de gauge exigiria que uma troca de gauge deveria se reduzir a uma transformação canônica em Γ^* . Assim, o resultado esperado para uma transformação de gauge regular seria o de que as variáveis desvinculadas obedecessem as mesmas relações de comutação a tempos iguais nos dois gauges. Porém, como veremos a seguir, isto não acontece: no gauge de Coulomb q^* obedece relações de comutação bosônicas, enquanto que no gauge super-axial $q^{*'}$ obedece relações de comutação "graded" (ou "anyônicas"). Fica assim demonstrado, no que diz respeito a certas teorias de campo de gauge em 2+1 dimensões, que o mecanismo de transmutação estatística nada mais é do que uma transformação de gauge singular. Finalmente, vamos mostrar que a mencionada transmutação estatística desaparece quando se inclui no Lagrangeano do modelo de Chern-Simons o termo cinético $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

II - TEORIA DE CHERN-SIMONS CLASSICA

II.1 - FORMULAÇÃO LAGRANGEANA

O sistema a ser analisado é descrito pela seguinte densidade Lagrangeana [9]

$$\mathcal{L} = \left[(\partial_\mu + iA_\mu) \phi^* \right] \left[(\partial^\mu - iA^\mu) \phi \right] + \frac{\theta}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu \partial^\nu A^\lambda, \quad (5)$$

onde os índices gregos repetidos somam de 0 até 2, $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$ é o tensor totalmente anti-simétrico com $\epsilon_{012} = \epsilon^{012} = 1$, a métrica é $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = 1$ e θ é um parâmetro adimensional. As coordenadas são o campo escalar ϕ , seu complexo conjugado ϕ^* e os campos de gauge A^μ , $\mu=0,1,2$. O primeiro termo de (5) caracteriza uma teoria de partículas carregadas acopladas com um potencial de gauge. Já o segundo termo de (5), de origem topológica, é o invariante de Hopf [10], [11] que caracteriza os diferentes mapeamentos de S^3 em S^2 . As equações de movimento Lagrangeanas são

$$\square \phi - i(\partial_\beta A^\beta) \phi - 2iA^\beta (\partial_\beta \phi) - A^\beta A_\beta \phi = 0, \quad (6)$$

$$\square \phi^* + i(\partial_\beta A^\beta) \phi^* + 2iA^\beta (\partial_\beta \phi^*) - A^\beta A_\beta \phi^* = 0, \quad (7)$$

$$-\frac{e}{2\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial^\beta A^\gamma - J_\alpha = 0 \quad (8)$$

onde J_α é a densidade de corrente, dada por

$$J_\alpha \equiv i \phi^* \left[(\partial_\alpha - iA_\alpha) \phi \right] - i \left[(\partial_\alpha + iA_\alpha) \phi^* \right] \phi \quad (9)$$

Pode-se mostrar, combinando a equação (6) e (7) que a densidade de corrente é conservada, isto é,

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \quad (10)$$

Como estamos interessados na quantização canônica da teoria, passamos para a formulação Hamiltoniana desta, segundo o método sistemático de Dirac [12].

II.2 - FORMULAÇÃO HAMILTONIANA

II.2.a - HAMILTONIANO CANÔNICO, VÍNCULOS PRIMÁRIOS E MOMENTOS

Na formulação Hamiltoniana, trabalha-se no espaço de fase Γ que é gerado pelas coordenadas canônicas $\phi, \phi^*, A^\mu, \mu=0,1,2$ e pelos correspondentes momenta canonicamente conjugados $\Pi, \Pi^*, P_\mu, \mu=0,1,2$, respectivamente. Reescrevendo (5) na forma

$$\mathcal{L} = \left[(\partial_0 + iA_0) \phi^* \right] \left[(\partial_0 - iA_0) \phi \right] + \left[(\partial_j + iA_j) \phi^* \right] \left[(\partial^j - iA^j) \phi \right] +$$

$$+\frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{1j} A^0 \partial^i A^j + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{1j} A^j \partial^0 A^i + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{1j} A^i \partial^j A^0 \quad , \quad (11)$$

Encontramos,

$$p_0 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^0)} = 0 \quad , \quad (12)$$

$$p_k \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^k)} = \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{kj} A^j \quad , \quad (13)$$

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^* + i A^0 \phi^* \quad , \quad (14)$$

$$\Pi^* \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^*)} = \partial_0 \phi - i A^0 \phi \quad . \quad (15)$$

As expressões (12) e (13) são os vínculos primários da teoria (surgem apenas da forma funcional do Lagrangeano, sem utilizar as equações de movimento), denotados por

$$P_0 \equiv p_0 \approx 0 \quad , \quad (16)$$

$$P_i \equiv p_i - \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ij} A^j \approx 0 \quad , i = 1, 2 \quad . \quad (17)$$

Os vínculos (16), (17) definem a hipersuperfície $\Sigma_{\mathbf{p}}$ ($\Sigma_{\mathbf{p}} \in \Gamma$) na qual se localizam as trajetórias do sistema. O sinal \approx , conhecido como símbolo da igualdade fraca de Dirac [12], significa que duas

quantidades fracamente iguais em Γ diferem entre si por uma combinação de vínculos.

O Hamiltoniano canônico (H) definido sobre Σ_P é dado por

$$H \equiv \int d^2y \left\{ P_\mu (\partial^0 A^\mu) + \pi (\partial^0 \phi) + \pi^* (\partial^0 \phi^*) - \mathcal{L} \right\} \quad (18)$$

Substituindo (12), (13), (14), (15) e (5) em (18), obtemos,

$$H = \int d^2y \left\{ \pi \pi^* + \left[(\partial^j + iA^j) \phi^* \right] \left[(\partial^j - iA^j) \phi \right] - A^0 \left[\frac{e}{2\pi^2} \epsilon_{ij} \partial^i A^j + i(\phi^* \pi^* - \pi \phi) \right] \right\} \quad (19)$$

Após levarmos em conta (13), podemos reescrever H da seguinte forma

$$H = \int d^2y \left\{ \pi \pi^* + \left[(\partial^j + iA^j) \phi^* \right] \left[(\partial^j - iA^j) \phi \right] - A^0 \left[\frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ij} \partial^i A^j + \partial^i p_i + i(\phi^* \pi^* - \pi \phi) \right] \right\} \quad (20)$$

II.2.b - HAMILTONIANO TOTAL E VÍNCULOS SECUNDÁRIOS

O Hamiltoniano definido sobre Γ , conhecido como Hamiltoniano total (H_T), é obtido a partir de H da seguinte maneira

$$H_T = H + \int d^2y \left\{ u_0(\vec{y}) P_0(\vec{y}) + u_i(\vec{y}) P_i(\vec{y}) \right\}, i=1,2 \quad (21)$$

onde u_0 , u_1 e u_2 são multiplicadores de Lagrange arbitrários.

A equação de movimento de uma quantidade Ω pode ser obtida a partir de H_T da seguinte forma

$$\dot{\Omega} = \left[\Omega, H_T \right]_{PP} \quad (22)$$

sendo que o parênteses de Poisson (PP) de duas quantidades bosônicas Ω e η é definido como

$$\begin{aligned} \left[\Omega, \eta \right]_{PP} \equiv \int d^2 y \left\{ \left[\frac{\delta \Omega}{\delta A^\mu(\vec{y})} \frac{\delta \eta}{\delta p_\mu(\vec{y})} - \frac{\delta \eta}{\delta A^\mu(\vec{y})} \frac{\delta \Omega}{\delta p_\mu(\vec{y})} \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{\delta \Omega}{\delta \phi(\vec{y})} \frac{\delta \eta}{\delta \pi(\vec{y})} - \frac{\delta \eta}{\delta \phi(\vec{y})} \frac{\delta \Omega}{\delta \pi(\vec{y})} \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{\delta \Omega}{\delta \phi^*(\vec{y})} \frac{\delta \eta}{\delta \pi^*(\vec{y})} - \frac{\delta \eta}{\delta \phi^*(\vec{y})} \frac{\delta \Omega}{\delta \pi^*(\vec{y})} \right] \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Vamos agora examinar as condições de consistência de Dirac [12]. Se exigirmos a persistência no tempo dos vínculos primários, encontraremos uma condição de consistência associada a cada um destes vínculos. Assim,

$$\begin{aligned} \dot{P}_0(\vec{x}) = \partial_0 P_0(\vec{x}) = \left[P_0(\vec{x}), H_T \right]_{PP} \approx 0 \\ \implies \left[P_0(\vec{x}), H \right]_{PP} + \int d^2 y \left\{ u_0(\vec{y}) \left[P_0(\vec{x}), P_0(\vec{y}) \right]_{PP} + u_j(\vec{y}) \left[P_0(\vec{x}), P_j(\vec{y}) \right]_{PP} \right\} \approx 0 \\ \implies - \frac{\delta H}{\delta A^0(\vec{x})} \approx 0 \end{aligned}$$

→

$$i \left[\phi^* \dot{\pi}^* - \dot{\pi} \phi \right] + \partial^i p_i + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} \partial^i A^j \approx 0, \quad (24)$$

Similarmente,

$$\dot{p}_i = \partial_0 p_i = \left[p_i, H_T \right]_{PP} \approx 0$$

→

$$\left[p_i, H \right]_{PP} + \int d^2y \left\{ u_0(\vec{y}) \left[p_i, p_0 \right]_{PP} + u_j(\vec{y}) \left[p_i, p_j \right]_{PP} \right\} \approx 0$$

→

$$-\frac{\delta H}{\delta A^i(x)} - \frac{e}{2\pi^2} \epsilon^{ij} u_j \approx 0$$

→

$$u_j \approx \frac{2\pi^2}{e} \epsilon_{ij} \left(J_i - \frac{e}{2\pi^2} \epsilon_{ki} \partial_x^k A^0 \right) \quad (25)$$

A expressão (24) não envolve os multiplicadores indeterminados, u's, e também não pode ser escrita como combinação dos vínculos primários. Portanto,

$$S_0 \equiv i \left[\phi^* \dot{\pi}^* - \dot{\pi} \phi \right] + \partial^i p_i + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} \partial^i A^j \approx 0, \quad (26)$$

é um vínculo secundário da teoria (surge após utilizar as equações de movimento). Por outro lado, a persistência no tempo de P_1 e P_2 não gera novos vínculos, mas determina os multiplicadores de Lagrange u_1 e u_2 . Em continuação, deve-se exigir a persistência no tempo do vínculo secundário

$$\dot{S}_0(\vec{x}) = \partial_0 S_0(\vec{x}) = \left[S_0(\vec{x}), H_T \right]_{PP} \approx 0$$

→

$$\left[S_0(\vec{x}), H \right]_{PP} + \int d^2y \left\{ u_0(\vec{y}) \left[S_0(\vec{x}), P_0(\vec{y}) \right]_{PP} + u_j(\vec{y}) \left[S_0(\vec{x}), P_j(\vec{y}) \right]_{PP} \right\} \approx 0$$

equação que, como pode ser visto, se satisfaz identicamente ($0 \approx 0$). Com isto, esgota-se o processo de geração de vínculos. Convém observar que o multiplicador de Lagrange u_0 continua indeterminado, indicando que o sistema em questão apresenta liberdade de gauge.

II.2.c - VÍNCULOS DE 1ª E 2ª CLASSE E HAMILTONIANO ESTENDIDO

Neste ponto, vamos determinar quais vínculos são de 1ª classe e quais são de 2ª classe, lembrando que um vínculo é dito de 1ª classe se tiver parênteses de Poisson fracamente zero com todos os outros vínculos da teoria, e é dito de 2ª classe caso esta condição não for satisfeita. A importância desta classificação reside no fato de que os vínculos de 1ª classe atuam como geradores independentes de transformações de gauge [13]. Assim, um sistema que só possui vínculos de 2ª classe não apresenta liberdade de gauge, enquanto que um sistema com vínculos de 1ª classe exibe liberdade de gauge, liberdade esta que deve ser totalmente suprimida para proceder a quantização do sistema. A

eliminação da liberdade de gauge se consegue com a introdução de condições subsidiárias (condições de gauge) que, juntamente com todos os vínculos, forma um conjunto de vínculos de 2ª classe. No nosso caso, P_0 e S_0 são vínculos de 1ª classe e $P_i, i=1,2$, são vínculos de 2ª classe (ver Apêndice A). Em concordância com a conjectura de que os vínculos de 1ª classe atuam como geradores independentes de transformações que não alteram o estado do sistema (transformações de gauge), generalizamos a equação de movimento de uma quantidade Ω como segue,

$$\dot{\Omega} = \left[\Omega, H_E \right]_{PP} \quad (27)$$

Nesta equação, o Hamiltoniano estendido H_E substitui o Hamiltoniano total, H_T , a fim de permitir o movimento mais geral do sistema. Essencialmente, H_E é construído adicionando ao H_T os vínculos secundários de 1ª classe da teoria. No nosso caso, H_E é dado por

$$H_E = H_T + \int d^2y \xi(\vec{y}) S_0(\vec{y}) \quad (28)$$

onde ξ é um novo multiplicador indeterminado de Lagrange. Substituindo (21) e (20) em (28), ficamos com

$$H_E = \bar{H} + \int d^2y \left\{ u_0(\vec{y}) P_0(\vec{y}) + u_1(\vec{y}) P_1(\vec{y}) + u_2(\vec{y}) P_2(\vec{y}) + u_3(\vec{y}) S_0(\vec{y}) \right\} \quad (29)$$

onde

$$\bar{H} = \int d^2y \left\{ \Pi \Pi^* + \left[(\partial^j + iA^j)\phi^* \right] \left[(\partial^j - iA^j)\phi \right] \right\} \quad (30)$$

e

$$u_g = \xi - A^0 \quad (31)$$

É importante salientar que H_T e H_E são fisicamente equivalentes no sentido de que ambos geram a mesma evolução temporal para quantidades invariantes de gauge. Apesar disto, H_T e H_E fornecem eqs. de movimento diferentes para quantidades dependentes de gauge [13].

Completaremos a descrição clássica do modelo em análise, determinando quantidades físicas da teoria como o momento linear e o momento angular.

II. 2. d - TENSOR ENERGIA-MOMENTO

O tensor energia-momento simétrico da teoria é dado por (ver Apêndice B)

$$\Theta^{\mu\nu} = \left[(\partial^\mu \phi^*) + iA^\mu \phi^* \right] \left[(\partial^\nu \phi) - iA^\nu \phi \right] + \left[(\partial^\nu \phi^*) + iA^\nu \phi^* \right] \left[(\partial^\mu \phi) - iA^\mu \phi \right] - g^{\mu\nu} \left[(\partial_\lambda \phi^*) + iA_\lambda \phi^* \right] \left[(\partial^\lambda \phi) - iA^\lambda \phi \right] \quad (32)$$

O Hamiltoniano (\bar{H}), o momento linear (P^k) e o momento angular (J) são calculados a partir de $\Theta^{\mu\nu}$, resultando,

$$\bar{H} = \int d^2x \Theta^{00}(\vec{x}) = \int d^2x \left\{ \pi \pi^* + (\partial^j \phi^*)(\partial^j \phi) + \phi^* A^j A^j \phi + \right. \\ \left. - i(\partial^j \phi^*) A^j \phi + i \phi^* A^j (\partial^j \phi) \right\} \quad (33)$$

em concordância com a expressão (30).

$$P^k \equiv \int d^2x \Theta^{0k}(\vec{x}) = \int d^2x \left\{ \pi (\partial^k \phi) + (\partial^k \phi^*) \pi^* + i \phi^* A^k \pi^* - i \pi A^k \phi \right\} \quad (34)$$

$$J \equiv \int d^2x \epsilon^{jk} x^j \Theta^{0k}(\vec{x}) = \int d^2x \epsilon^{jk} x^j \left\{ \pi (\partial^k \phi) + (\partial^k \phi^*) \pi^* + \right. \\ \left. + i \phi^* A^k \pi^* - i \pi A^k \phi \right\} \quad (35)$$

Passamos agora para a quantização da teoria, primeiramente no gauge de Coulomb e após no gauge super-axial.

III. - TEORIA DE CHERN-SIMONS QUÂNTICA

III.1 - QUANTIZAÇÃO NO GAUGE DE COULOMB

III.1.a - COMUTADORES A TEMPOS IGUAIS

Vamos começar com a introdução das condições de gauge na teoria

$$\chi_0 = A^0 \approx 0 \quad , \quad (36)$$

$$\chi = \partial^i A^i \approx 0 \quad . \quad (37)$$

Seguindo Fradkin e Vilkovisky [14], o Hamiltoniano estendido H_E é substituído pelo Hamiltoniano completo, H_C , dado por,

$$H_C = H_E + \int d^2y \left\{ u_4(\vec{y}) \chi_0(\vec{y}) + u_5(\vec{y}) \chi(\vec{y}) \right\} \quad , \quad (38)$$

onde u_4 e u_5 são os multiplicadores de Lagrange associados a χ_0 e χ , respectivamente. Assim, a equação de movimento de uma quantidade Ω fica

$$\dot{\Omega} = \left[\Omega , H_C \right]_{PP} \quad , \quad (39)$$

ações: 1000000

R\$ 300,00

data de recebimento: 16.04.90

Exigindo a persistência no tempo das condições de gauge, temos,

$$\dot{\chi}_0(\vec{x}) = \partial_0 \chi_0(\vec{x}) = \left[\chi_0(\vec{x}), H_c \right]_{PP} \approx 0 ,$$

→

$$\begin{aligned} & \left[\chi_0(\vec{x}), \bar{H} \right]_{PP} + \int d^2y \left\{ u_0(\vec{y}) \left[\chi_0(\vec{x}), P_0(\vec{y}) \right]_{PP} + u_1(\vec{y}) \left[\chi_0(\vec{x}), P_1(\vec{y}) \right]_{PP} + \right. \\ & \quad + u_3(\vec{y}) \left[\chi_0(\vec{x}), S_0(\vec{y}) \right]_{PP} + u_4(\vec{y}) \left[\chi_0(\vec{x}), \chi_0(\vec{y}) \right]_{PP} + \\ & \quad \left. + u_5(\vec{y}) \left[\chi_0(\vec{x}), \chi(\vec{y}) \right]_{PP} \right\} \approx 0 , \end{aligned}$$

→

$$u_0 \approx 0$$

(40)

Similarmente,

$$\dot{\chi}(\vec{x}) = \partial_0 \chi(\vec{x}) = \left[\chi(\vec{x}), H_c \right]_{PP} \approx 0 ,$$

$$\begin{aligned} & \left[\chi(\vec{x}), \bar{H} \right]_{PP} + \int d^2y \left\{ u_0(\vec{y}) \left[\chi(\vec{x}), P_0(\vec{y}) \right]_{PP} + u_1(\vec{y}) \left[\chi(\vec{x}), P_1(\vec{y}) \right]_{PP} + \right. \\ & \quad \left. + u_3(\vec{y}) \left[\chi(\vec{x}), S_0(\vec{y}) \right]_{PP} + u_4(\vec{y}) \left[\chi(\vec{x}), \chi_0(\vec{y}) \right]_{PP} + u_5(\vec{y}) \left[\chi(\vec{x}), \chi(\vec{y}) \right]_{PP} \right\} \approx 0 \end{aligned}$$

→

$$\nabla_x^2 u_3(\vec{x}) = \frac{2\pi^2}{e} \epsilon_{ji} \partial_x^i \left[J_j(\vec{x}) \right] \quad (41)$$

Assim, após a introdução das condições (36) e (37) todos os multiplicadores de Lagrange podem ser determinados. Note que a persistência no tempo de P_0 e S_0 determina, respectivamente, $u_4 = 0$ e $u_5 = 0$. Isto implica que o conjunto formado pelos vínculos e pelas condições de gauge é de 2ª classe. A partir de agora, por conveniência, passaremos a adotar a seguinte notação

$$\Gamma_1 \equiv P_0, \quad \Gamma_2 \equiv P_1, \quad \Gamma_3 \equiv P_2, \quad \Gamma_4 \equiv S_0, \quad \Gamma_5 \equiv \chi_0, \quad \Gamma_6 \equiv \chi$$

Seguindo a metodologia de Dirac para sistemas que são de 2ª classe, vamos eliminar os vínculos e as condições de gauge da teoria. Isto é feito substituindo-se os parênteses de Poisson (PP) pelos parênteses de Dirac (D), que para duas quantidades bosônicas Ω e η é definido como

$$\left[\Omega, \eta \right]_D \equiv \left[\Omega, \eta \right]_{PP} - \sum_{l,r=1}^6 \int d^2v d^2w \left[\Omega, \Gamma_l(\vec{v}) \right]_{PP} U^{lr}(\vec{v}, \vec{w}) \left[\Gamma_r(\vec{w}), \eta \right]_{PP} \quad (42)$$

onde U é a inversa da matriz C , definida por

$$C_{lr} = \left[\Gamma_l, \Gamma_r \right]_{PP} \quad (43)$$

No caso do gauge de Coulomb, encontramos os seguintes elementos para a matriz C (ver Apêndice A)

$$C_{11}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{12}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{13}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{14}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{16}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 ,$$

$$C_{15}(\vec{x}, \vec{y}) = -\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (44. a)$$

$$C_{21}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{22}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{24}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{25}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 ,$$

$$C_{23}(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{e}{2\pi^2} \delta(\vec{x} - \vec{y}) , \quad C_{26}(\vec{x}, \vec{y}) = \partial_1^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (44. b)$$

$$C_{31}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{33}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{34}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{35}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 ,$$

$$C_{32}(\vec{x}, \vec{y}) = +\frac{e}{2\pi^2} \delta(\vec{x} - \vec{y}) , \quad C_{36}(\vec{x}, \vec{y}) = \partial_2^y \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (44. c)$$

$$C_{41}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{42}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{43}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{44}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{45}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 ,$$

$$C_{46}(\vec{x}, \vec{y}) = +\nabla_x^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (44. d)$$

$$C_{52}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{53}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{54}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{55}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{56}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 ,$$

$$C_{51}(\vec{x}, \vec{y}) = +\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (44. e)$$

$$C_{61}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{64}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{65}(\vec{x}, \vec{y}) = C_{66}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 ,$$

$$C_{62}(\vec{x}, \vec{y}) = -\partial_y^1 \delta(\vec{x} - \vec{y}) , \quad C_{63}(\vec{x}, \vec{y}) = -\partial_y^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad . \quad (44. f)$$

Os elementos da matriz U são calculados através da expressão

$$\int d^2v U^{lr}(\vec{x}, \vec{v}) C_{rs}(\vec{v}, \vec{y}) = \delta_s^l \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad , \quad (45)$$

resultando,

$$\begin{aligned}
 U^{11}(\vec{x}, \vec{y}) &= U^{12}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{13}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{14}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{16}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \\
 U^{15}(\vec{x}, \vec{y}) &= + \delta(\vec{x} - \vec{y})
 \end{aligned} \quad , \quad (46. a)$$

$$\begin{aligned}
 U^{21}(\vec{x}, \vec{y}) &= U^{22}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{25}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{26}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \\
 U^{23}(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{2\pi^2}{e} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad U^{24}(\vec{x}, \vec{y}) = - \frac{2\pi^2}{e} \partial_2^y \left[\mathcal{G}(\vec{x} - \vec{y}) \right],
 \end{aligned} \quad (46. b)$$

$$\begin{aligned}
 U^{31}(\vec{x}, \vec{y}) &= U^{33}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{35}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{36}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \\
 U^{32}(\vec{x}, \vec{y}) &= - \frac{2\pi^2}{e} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad U^{34}(\vec{x}, \vec{y}) = + \frac{2\pi^2}{e} \partial_1^y \left[\mathcal{G}(\vec{x} - \vec{y}) \right],
 \end{aligned} \quad (46. c)$$

$$\begin{aligned}
 U^{41}(\vec{x}, \vec{y}) &= U^{44}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{45}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \\
 U^{42}(\vec{x}, \vec{y}) &= - \frac{2\pi^2}{e} \partial_2^y \left[\mathcal{G}(\vec{x} - \vec{y}) \right], \quad U^{43}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{2\pi^2}{e} \partial_1^y \left[\mathcal{G}(\vec{x} - \vec{y}) \right], \\
 U^{46}(\vec{x}, \vec{y}) &= - \mathcal{G}(\vec{x} - \vec{y})
 \end{aligned} \quad , \quad (46. d)$$

$$\begin{aligned}
 U^{52}(\vec{x}, \vec{y}) &= U^{53}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{54}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{55}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{56}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \\
 U^{51}(\vec{x}, \vec{y}) &= - \delta(\vec{x} - \vec{y})
 \end{aligned} \quad , \quad (46. e)$$

$$\begin{aligned}
 U^{61}(\vec{x}, \vec{y}) &= U^{62}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{63}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{65}(\vec{x}, \vec{y}) = U^{66}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \\
 U^{64}(\vec{x}, \vec{y}) &= + \mathcal{G}(\vec{x} - \vec{y})
 \end{aligned} \quad , \quad (46. f)$$

onde $\mathcal{G}(\vec{x} - \vec{y})$ é a função de Green em duas dimensões, dada por

$$\mathcal{G}(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \ln \left[|\vec{x} - \vec{y}|^2 \right] + \text{constante} \quad , \quad (47)$$

Então, a partir dos parênteses de Dirac, obtidos através de um cálculo direto utilizando as expressões (42), (46) e (B), abstraímos os comutadores a tempos iguais (CTI's) através da seguinte regra

$$\left[\Omega, \eta \right]_D \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} \left[\Omega, \eta \right] \quad , \quad (48)$$

resultando¹,

$$\left[A^c(\vec{x}), A^\mu(\vec{y}) \right] = \left[A^o(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \right] = \left[A^o(\vec{x}), \phi^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , \quad (49. a)$$

$$\left[A^c(\vec{x}), p_\mu(\vec{y}) \right] = \left[A^o(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \right] = \left[A^o(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , \quad (49. b)$$

$$\left[p_c(\vec{x}), A^\mu(\vec{y}) \right] = \left[p_o(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \right] = \left[p_o(\vec{x}), \phi^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , \quad (49. c)$$

$$\left[p_c(\vec{x}), p_\mu(\vec{y}) \right] = \left[p_o(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \right] = \left[p_o(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , \quad (49. d)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \right] = - \frac{2\pi^2 \hbar}{e} \epsilon_{ij} \phi(\vec{y}) \partial_j^y \left[\alpha(\vec{x}-\vec{y}) \right] \quad , \quad (49. e)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), \phi^\dagger(\vec{y}) \right] = + \frac{2\pi^2 \hbar}{e} \epsilon_{ij} \phi^\dagger(\vec{y}) \partial_j^y \left[\alpha(\vec{x}-\vec{y}) \right] \quad , \quad (49. f)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \right] = + \frac{2\pi^2 \hbar}{e} \epsilon_{ij} \pi(\vec{y}) \partial_j^y \left[\alpha(\vec{x}-\vec{y}) \right] \quad , \quad (49. g)$$

¹ Para simplificar a notação, não iremos distinguir entre um operador clássico e sua contrapartida quântica.

$$\left[A^i(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y}) \right] = -\frac{2\pi^2 \hbar}{e} \epsilon_{ij} \pi^\dagger(\vec{y}) \partial_j^y \left(\delta(\vec{x}-\vec{y}) \right) \quad , (49. h)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), A^j(\vec{y}) \right] = \left[A^i(\vec{x}), p_j(\vec{y}) \right] = \left[p_i(\vec{x}), p_j(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (49. i)$$

$$\left[p_i(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \right] = +\frac{\hbar}{2} \phi(\vec{y}) \partial_i^y \left(\delta(\vec{x}-\vec{y}) \right) \quad , (49. j)$$

$$\left[p_i(\vec{x}), \phi^\dagger(\vec{y}) \right] = -\frac{\hbar}{2} \phi^\dagger(\vec{y}) \partial_i^y \left(\delta(\vec{x}-\vec{y}) \right) \quad , (49. k)$$

$$\left[p_i(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \right] = -\frac{\hbar}{2} \pi(\vec{y}) \partial_i^y \left(\delta(\vec{x}-\vec{y}) \right) \quad , (49. l)$$

$$\left[p_i(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y}) \right] = +\frac{\hbar}{2} \pi^\dagger(\vec{y}) \partial_i^y \left(\delta(\vec{x}-\vec{y}) \right) \quad , (49. m)$$

$$\left[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \right] = \left[\phi(\vec{x}), \phi^\dagger(\vec{y}) \right] = \left[\phi^\dagger(\vec{x}), \phi^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (49. n)$$

$$\left[\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \right] = \left[\pi(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y}) \right] = \left[\pi^\dagger(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (49. o)$$

$$\left[\phi(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y}) \right] = \left[\phi^\dagger(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (49. p)$$

$$\left[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \right] = \left[\phi^\dagger(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y}) \right] = i\hbar \delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad , (49. q)$$

É importante salientar que esta álgebra carrega os vínculos e as condições de gauge como identidades operatoriais fortes. Uma simples inspeção nas equações (49) revela que os setores $\langle \phi, \pi \rangle$ e $\langle \phi^\dagger, \pi^\dagger \rangle$ apresentam comutadores canônicos, o que não ocorre com o setor $\langle A^\mu, p_\mu, \mu=0,1,2 \rangle$.

III.1.b - ESPAÇO DE FASE Γ^*

As variáveis desvinculadas que servem de base em Γ^* podem ser facilmente obtidas a partir dos vínculos e das condições de gauge, isto é,

$$\Gamma_1 = 0 \quad \rightarrow \quad p_0 = 0 \quad , \quad (50)$$

$$\Gamma_i = 0, \quad i=1,2 \quad \rightarrow \quad p_i = \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ij} A^j \quad , \quad (51)$$

$$\Gamma_5 = 0 \quad \rightarrow \quad A^0 = 0 \quad , \quad (52)$$

$$\Gamma_6 = 0 \quad \rightarrow \quad A^i = \epsilon_{ij} \partial^j \psi \quad , \quad (53)$$

$$\Gamma_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \partial^i p_i + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ij} \partial^i A^j + J^0 = 0 \quad , \quad (54)$$

onde

$$J^0 = i \left[\phi^\dagger \Pi^\dagger - \Pi \phi \right] \quad , \quad (55)$$

Substituindo (51) e (53) em (54), obtemos

$$\nabla^2 \psi = \frac{2\pi^2}{e} J^0 \quad , \quad (56)$$

de forma que A^i fica

$$A^i(\vec{x}) = - \frac{2\pi^2}{e} \epsilon_{ij} \int d^2y G(\vec{x}-\vec{y}) \left[\partial_j^y J^0(\vec{y}) \right] \quad , \quad (57)$$

Assim, os campos $A^0, p_0, A^i, p_i, i=1,2$, podem ser eliminados da teoria, restando ϕ, ϕ^\dagger, Π e Π^\dagger que, de acordo com (49.n,o,p,q)

constituem uma base canônica em Γ^* que descreve excitações bosônicas.

OBSERVAÇÃO : Comparando as equações (41) e (8) podemos notar que u_3 no formalismo Hamiltoniano desempenha o mesmo papel que $-A^0$ no formalismo Lagrangeano. Para verificar isto partimos de (8),

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial^\beta A^\gamma = - \frac{2\pi^2}{e} J_\alpha \quad , \quad (8)$$

—>

$$\epsilon_{ij} \partial^0 A^i - \epsilon_{ij} \partial^i A^0 = - \frac{2\pi^2}{e} J_j$$

Multiplicando ambos os lados por ϵ_{kj} , obtemos,

$$\partial^0 A^k - \partial^k A^0 = - \frac{2\pi^2}{e} \epsilon^{kj} J_j$$

Diferenciando a expressão acima em relação a x_k , temos,

$$\partial^0 \partial^k A^k - \nabla^2 A^0 = - \frac{2\pi^2}{e} \epsilon^{kj} \partial^k J_j$$

que, no gauge de Coulomb se reduz a

$$\nabla^2 A^0 = + \frac{2\pi^2}{e} \epsilon_{kj} \partial^k J_j \quad . \quad (58)$$

Assim, a variável Lagrangeana A^0 é descrita, dentro do formalismo Hamiltoniano, pelo multiplicador de Lagrange $-u_3$ e não deve ser confundida com a variável Hamiltoniana A^0 a qual foi estabelecida igual a zero pela condição de gauge. De fato, esta conclusão independe do particular gauge que esteja sendo utilizado.

III.1.c - EQUAÇÃO DE DIRAC-SCHWINGER E GERADORES DE POINCARÉ

Iniciamos esta seção, propondo como candidatos para as componentes do tensor densidade de energia-momento quântico simétrico, $\Theta^{\mu\nu}$, os seguintes operadores hermitianos

$$\Theta^{00} = \pi \pi^\dagger + (\partial^j \phi^\dagger)(\partial^j \phi) + \phi^\dagger A^j A^j \phi - i(\partial^j \phi^\dagger) A^j \phi + i\phi^\dagger A^j (\partial^j \phi) \quad (59)$$

$$\Theta^{0k} = \pi (\partial^k \phi) + (\partial^k \phi^\dagger) \pi^\dagger + i\phi^\dagger A^k \pi^\dagger - i\pi A^k \phi \quad , \quad (60)$$

e

$$\begin{aligned} \Theta^{jk} = & (\partial^j \phi^\dagger)(\partial^k \phi) - i(\partial^j \phi^\dagger) A^k \phi + i\phi^\dagger A^j (\partial^k \phi) + \phi^\dagger A^j A^k \phi + \\ & (\partial^k \phi^\dagger)(\partial^j \phi) - i(\partial^k \phi^\dagger) A^j \phi + i\phi^\dagger A^k (\partial^j \phi) + \phi^\dagger A^k A^j \phi + \delta_{jk} \left[\pi \pi^\dagger \right. \\ & \left. - (\partial^l \phi^\dagger)(\partial^l \phi) + i(\partial^l \phi^\dagger) A^l \phi - i\phi^\dagger A^l (\partial^l \phi) - \phi^\dagger A^l A^l \phi \right] \quad . \quad (61) \end{aligned}$$

Estas expressões foram obtidas por translação direta de suas correspondentes análogas clássicas. Após um cálculo extremamente tedioso mas direto, utilizando as expressões (59), (60) e (49), verificamos que a equação fundamental de Dirac-Schwinger [15], [16] é satisfeita, ou seja,

$$\left[\Theta^{00}(\vec{x}), \Theta^{00}(\vec{y}) \right] = -i\hbar \left[\Theta^{0k}(\vec{x}) + \Theta^{0k}(\vec{y}) \right] \partial_k^x \delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad . \quad (62)$$

Portanto, os candidatos (59) e (60) são aceitáveis como densidades de Poincaré da formulação do gauge de Coulomb da teoria de Chern-Simons.

Os geradores de Poincaré são definidos em termos de Θ^{00} e Θ^{0k} da maneira usual. Em particular, os operadores Hamiltoniano (\bar{H}), momento linear (P^k) e momento angular (J) são dados pelas seguintes expressões

$$\bar{H} \equiv \int d^2x \Theta^{00}(\vec{x}) \quad , \quad (63)$$

$$P^k \equiv \int d^2x \Theta^{0k}(\vec{x}) \quad , \quad (64)$$

$$J \equiv \int d^2x \epsilon^{jk} x^j \Theta^{0k}(\vec{x}) \quad . \quad (65)$$

É importante salientar que os CTI's (49) são compatíveis com a hipótese

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &\rightarrow 0, & \phi^\dagger(\vec{x}) &\rightarrow 0, & \pi(\vec{x}) &\rightarrow 0, & \pi^\dagger(\vec{x}) &\rightarrow 0, \\ A^i(\vec{x}) &\rightarrow 0, & p_i(\vec{x}) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

quando $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Este comportamento assintótico implica em

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \Theta^{\mu\nu}(\vec{x}) \rightarrow 0 \quad , \quad (66)$$

o que assegura que todos os geradores de Poicaré sejam quantidades matemáticas bem definidas.

III.1.d - HAMILTONIANO, MOMENTO LINEAR E MOMENTO ANGULAR

Todos os geradores de Poincaré podem ser escritos em termos dos campos independentes ϕ , ϕ^\dagger , π e π^\dagger . É simples mostrar que, no caso do gauge de Coulomb, a eliminação das variáveis $A^j, j=1,2$ em termos de ϕ , ϕ^\dagger, π e π^\dagger (veja as eqs. (57)) conduz a

$$\begin{aligned} \bar{H} = & \int d^2x \left\{ \pi(\vec{x}) \pi^\dagger(\vec{x}) + (\partial_x^i \phi^\dagger)(\partial_x^i \phi) \right\} + \frac{\pi^2}{e^2} \int d^2x \int d^2u \int d^2v \frac{1}{|\vec{x} - \vec{u}|^2} \\ & \left\{ \phi^\dagger(\vec{x}) J^0(\vec{u}) J^0(\vec{v}) \phi(\vec{x}) + \frac{i\pi}{e} \epsilon^{jl} \int d^2x \int d^2u \frac{(x^l - u^l)}{|\vec{x} - \vec{u}|^2} \left\{ \right. \right. \\ & \left. \left. (\partial_x^j \phi) J^0(\vec{u}) \phi(\vec{x}) - \phi^\dagger(\vec{x}) J^0(\vec{u}) (\partial_x^j \phi) \right\} \right\} \quad (67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^k = & \int d^2x \left\{ (\partial_x^k \phi^\dagger) \pi^\dagger(\vec{x}) + \pi(\vec{x}) (\partial_x^k \phi) \right\} - \frac{\pi}{e} \epsilon^{kj} \int d^2x \int d^2u \frac{(x^j - u^j)}{|\vec{x} - \vec{u}|^2} \\ & \left\{ J^0(\vec{x}) J^0(\vec{u}) + \frac{\hbar\pi}{e} \epsilon^{kj} \int d^2x \int d^2u \frac{(x^j - u^j)}{|\vec{x} - \vec{u}|^2} J^0(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{u}) \right\} \quad (68) \end{aligned}$$

$$J = \int d^2x \epsilon^{jk} x^j \left\{ (\partial_x^k \phi^\dagger) \pi^\dagger(\vec{x}) + \pi(\vec{x}) (\partial_x^k \phi) \right\} + \frac{\pi}{2e} Q^2 - \frac{\hbar\pi}{2e} Q \quad (69)$$

onde

$$Q \equiv \int d^2x J^0(\vec{x}) \quad (70)$$

Vamos agora mostrar que os dois últimos termos da expressão (68), que chamaremos de P_{an}^k , são nulos. Para isto, basta trocar \vec{x} por \vec{u}

$$\begin{aligned}
 P_{an}^k = & - \frac{\pi}{2\theta} \epsilon^{kj} \int d^2x \, d^2u \frac{(x^j - u^j)}{|\vec{x} - \vec{u}|^2} J^0(\vec{x}) J^0(\vec{u}) - \\
 & - \frac{\pi}{2\theta} \epsilon^{kj} \int d^2u \, d^2x \frac{(u^j - x^j)}{|\vec{u} - \vec{x}|^2} J^0(\vec{u}) J^0(\vec{x}) + \\
 & + \frac{\hbar\pi}{2\theta} \epsilon^{kj} \int d^2x \, d^2u \frac{(x^j - u^j)}{|\vec{x} - \vec{u}|^2} J^0(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{u}) + \\
 & + \frac{\hbar\pi}{2\theta} \epsilon^{kj} \int d^2u \, d^2x \frac{(u^j - x^j)}{|\vec{u} - \vec{x}|^2} J^0(\vec{u}) \delta(\vec{u} - \vec{x}) \quad (71)
 \end{aligned}$$

e usar o fato de que $J^0(\vec{x})$ e $J^0(\vec{u})$ comutam, isto é,

$$\left[J^0(\vec{x}), J^0(\vec{u}) \right] = 0 \quad (72)$$

$$\begin{aligned}
 P_{an}^k = & - \frac{\pi}{2\theta} \epsilon^{kj} \int d^2x \, d^2u \frac{(x^j - u^j)}{|\vec{x} - \vec{u}|^2} J^0(\vec{x}) J^0(\vec{u}) + \\
 & + \frac{\pi}{2\theta} \epsilon^{kj} \int d^2x \, d^2u \frac{(x^j - u^j)}{|\vec{x} - \vec{u}|^2} J^0(\vec{x}) J^0(\vec{u}) + \\
 & + \frac{\hbar\pi}{2\theta} \epsilon^{kj} \int d^2x \, d^2u \frac{(x^j - u^j)}{|\vec{x} - \vec{u}|^2} J^0(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{u}) + \\
 & - \frac{\hbar\pi}{2\theta} \epsilon^{kj} \int d^2x \, d^2u \frac{(x^j - u^j)}{|\vec{x} - \vec{u}|^2} J^0(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{u}) = 0 \quad (73)
 \end{aligned}$$

III.1.e - ANOMALIA ROTACIONAL

Nesta teoria, observa-se um fato bastante curioso, conhecido na literatura como "anomalia rotacional" [17]. O que ocorre é que ao estudarmos as propriedades de rotação do campo ϕ , surge um termo anômalo (não canônico) como vemos a seguir

$$\frac{1}{i\hbar} \left[\phi(\vec{x}), J \right] = - \epsilon^{jk} x^j (\partial_k^x \phi) - \frac{i\pi}{e} Q \phi(\vec{x}) \quad . \quad (74)$$

A expressão acima é obtida através de um cálculo utilizando-se as equações (69) e (49.n,p,q). É importante salientar que o aparecimento desta anomalia não altera o fato de que o campo ϕ obedece uma estatística bosônica [17].

Passamos agora para a quantização da teoria no gauge super-axial.

III.2 - QUANTIZAÇÃO NO GAUGE SUPER-AXIAL

III.2.a - DEFINIÇÃO

O gauge super-axial é definido pelas seguintes condições [18]

$$A_s^2(x^0, x^1, x^2) = 0 \quad , \quad (75.a)$$

$$A_s^1(x^0, x^1, x_{(0)}^2) = 0 \quad , \quad (75.b)$$

$$A_s^0(x^0, x_{(0)}^1, x_{(0)}^2) = A^0(x^0, x_{(0)}^1, x_{(0)}^2) \quad . \quad (75.c)$$

Aqui, $\vec{x}_{(0)} \equiv (x_{(0)}^1, x_{(0)}^2)$ é um ponto arbitrário fixo. O índice "s" identifica as variáveis de campo que pertencem ao gauge super-axial; já as variáveis de campo do gauge de Coulomb permanecem sem identificação. É importante lembrar que no tratamento de Fadkin-Vilkovisky para sistemas vinculados [14], a forma padrão em que as condições de gauge são introduzidas é $\chi^a(x) \approx 0$, valendo para todos os pontos do espaço-tempo, o que não ocorre no caso do gauge super-axial. Em particular, para a eletrodinâmica e para o campo de Yang-Mills, condições de gauge deste tipo podem ser levadas à forma padrão através do formalismo de primeira ordem [18], [19]. Entretanto, para o modelo de Chern-Simons, não parece possível implementar o formalismo de primeira ordem. Então, a nossa estratégia consiste em observar que o gauge super-axial pode ser obtido a partir do gauge de Coulomb através das seguintes transformações de gauge operatoriais [18]

$$A_s^\mu(\vec{x}) = A^\mu(\vec{x}) + \partial^\mu \Lambda(\vec{x}) \quad , \quad (76. a)$$

$$\phi_s(\vec{x}) = \exp \left[i \Lambda(\vec{x}) \right] \phi(\vec{x}) \quad , \quad (76. b)$$

$$\pi_s(\vec{x}) = \pi(\vec{x}) \exp \left[-i \Lambda(\vec{x}) \right] \quad , \quad (76. c)$$

$$\phi_s^\dagger(\vec{x}) = \phi^\dagger(\vec{x}) \exp \left[-i \Lambda(\vec{x}) \right] \quad , \quad (76. d)$$

$$\pi_s^\dagger(\vec{x}) = \exp \left[i \Lambda(\vec{x}) \right] \pi^\dagger(\vec{x}) \quad , \quad (76. e)$$

onde

$$\Lambda(\vec{x}) = \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 A^2(x'^1, x'^2) + \int_{x_{(0)}^1}^{x^1} dx'^1 A^1(x'^1, x_{(0)}^2) \quad , \quad (77)$$

ou, de forma mais simétrica,

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{x}) = & \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x^1 - x'^1) A^2(x'^1, x'^2) + \\ & \int_{x_{(0)}^1}^{x^1} dx'^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^2 \delta(x'^2 - x_{(0)}^2) A^1(x'^1, x'^2) \quad . \quad (78) \end{aligned}$$

A ordem dos fatores em (76) é fixa. Em particular, esta ordem mantém quantidades físicas como o Hamiltoniano, o momento linear, o momento angular e a corrente invariáveis frente a esta transformação de gauge.

$\Lambda(\vec{x})$ pode ser escrita apenas em termos das variáveis que descrevem Γ^* . De fato, utilizando a expressão (57), obtemos,

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{x}) &= \frac{2\pi^2}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} dz^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz^2 \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x^1 - x'^1) G(\vec{x}, -\vec{z}) \partial_1^z J^0(\vec{z}) \\ &- \frac{2\pi^2}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} dz^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz^2 \int_{x_{(0)}^1}^{x^1} dx'^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^2 \delta(x^2 - x'^2) G(\vec{x}, -\vec{z}) \partial_2^z J^0(\vec{z}), \end{aligned}$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{x}) &= \frac{2\pi^2}{e} \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz^2 G(x^1 - z^1, x'^2 - z^2) J^0(z^1, z^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \\ &- \frac{2\pi^2}{e} \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz^2 J^0(z^1, z^2) \partial_1^z [G(x^1 - z^1, x'^2 - z^2)] \\ &- \frac{2\pi^2}{e} \int_{x_{(0)}^1}^{x^1} dx'^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz^1 G(x^1 - z^1, x_{(0)}^2 - z^2) J^0(z^1, z^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \\ &+ \frac{2\pi^2}{e} \int_{x_{(0)}^1}^{x^1} dx'^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dz^2 J^0(z^1, z^2) \partial_2^z [G(x^1 - z^1, x_{(0)}^2 - z^2)]. \end{aligned}$$

Como por hipótese não existe corrente no infinito, o primeiro e o terceiro termo da expressão acima se anulam, resultando,

$$\Lambda(\vec{x}) = \frac{\pi}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2z \, F(\vec{x}, \vec{z}) \, J^0(\vec{z}) \quad (79)$$

onde

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, \vec{z}) &= 2\pi \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \, \partial_1^x \left[G(x^1 - z^1, x'^2 - z^2) \right] - \\ &- 2\pi \int_{x_{(0)}^1}^{x^1} dx'^1 \, \partial_{x_{(0)}^2} \left[G(x'^1 - z^1, x_{(0)}^2 - z^2) \right] \end{aligned} \quad (80)$$

Substituindo a forma explícita da função de Green em duas dimensões (47) em (80), obtemos,

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, \vec{z}) &= \frac{1}{2\ell} \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \, \frac{2(x^1 - z^1)}{(x^1 - z^1)^2 + (x'^2 - z^2)^2} - \\ &- \frac{1}{2\ell} \int_{x_{(0)}^1}^{x^1} dx'^1 \, \frac{2(x_{(0)}^2 - z^2)}{(x'^1 - z^1)^2 + (x_{(0)}^2 - z^2)^2} \end{aligned} \quad (81)$$

Fazendo a mudança de variável $w \equiv (x'^2 - z^2)$, $w \equiv (x'^1 - z^1)$ no primeiro e no segundo termo de (81), respectivamente, ficamos com

$$\begin{aligned}
 F(\vec{x}, \vec{z}) &= (x^1 - z^1) \int_{x_{(0)}^2 - z^2}^{x^2 - z^2} dw \frac{1}{w^2 + (x^1 - z^1)^2} - \\
 &- (x_{(0)}^2 - z^2) \int_{x_{(0)}^1 - z^1}^{x^1 - z^1} dw \frac{1}{w^2 + (x_{(0)}^2 - z^2)^2} \quad (82)
 \end{aligned}$$

No Gelfand e Shilov [20] encontramos

$$\int dw \frac{1}{(w^2 + a^2)} = \frac{1}{|a|} \operatorname{arc} \tan \frac{w}{|a|} \quad (83)$$

Assim, resulta que

$$\begin{aligned}
 F(\vec{x}, \vec{z}) &= \varepsilon(x^1 - z^1) \left\{ \operatorname{arc} \tan \left\{ \frac{x^2 - z^2}{|x^1 - z^1|} \right\} - \operatorname{arc} \tan \left\{ \frac{x_{(0)}^2 - z^2}{|x^1 - z^1|} \right\} \right\} \\
 &- \varepsilon(x_{(0)}^2 - z^2) \left\{ \operatorname{arc} \tan \left\{ \frac{x^1 - z^1}{|x_{(0)}^2 - z^2|} \right\} - \operatorname{arc} \tan \left\{ \frac{x_{(0)}^1 - z^1}{|x_{(0)}^2 - z^2|} \right\} \right\} \quad (84)
 \end{aligned}$$

onde $\varepsilon(x-z)$ é a função sinal.

III.2.b - COMUTADORES A TEMPOS IGUAIS

Vamos escrever as variáveis do gauge super-axial em termos das variáveis do gauge de Coulomb. Assim, os comutadores a tempos iguais no gauge super-axial serão dados em termos de combinações de comutadores a tempos iguais no gauge de Coulomb, que já são conhecidos. (eqs.(49)). Iniciamos este procedimento escrevendo as variáveis $A_s^2(x)$ e $A_s^1(x)$ em termos das variáveis de Coulomb através das equações (75.a,b). De (75.a) temos diretamente que,

$$A_s^2(x^0, x^1, x^2) = 0 \quad . \quad (75.a)$$

De (76.a) temos,

$$A_s^1(x^0, x^1, x^2) = \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 F_s^{12}(x^0, x^1, x'^2) \quad . \quad (85)$$

ou, de forma mais simétrica,

$$A_s^1(x^0, x^1, x^2) = \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) F_s^{12}(x^0, x'^1, x'^2). \quad (86)$$

A expressão acima obviamente verifica (75.b). Usando o fato de que F^{ij} é anti-simétrico, obtemos,

$$A_s^1(x^0, x^1, x^2) = \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) F_s^{ij}(x^0, x'^1, x'^2).$$

Como F^{ij} é um invariante de gauge, podemos usar F^{ij} no gauge de Coulomb,

$$A_s^i(x^0, x^1, x^2) = \epsilon^{ij} \int_{x^2(0)}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \partial_{x'^1} A^j(x^0, x'^1, x'^2). \quad (87)$$

Concluimos então (veja também (17) e (76)), que as variáveis do gauge super-axial são dadas em termos das variáveis do gauge de Coulomb através das seguintes relações,

$$A_s^i(\vec{x}) = \epsilon^{ij} \int_{x^2(0)}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \partial_{x'^1} A^j(\vec{x}'), \quad (88.a)$$

$$A_s^2(\vec{x}) = 0 \quad (88.b)$$

$$\phi_s(\vec{x}) = \exp \left[i\Lambda(\vec{x}) \right] \phi(\vec{x}) \quad (88.c)$$

$$\phi_s^\dagger(\vec{x}) = \phi^\dagger(\vec{x}) \exp \left[-i\Lambda(\vec{x}) \right] \quad (88.d)$$

$$p_s^1(\vec{x}) = \frac{e}{4\pi^2} A_s^2(\vec{x}) = 0 \quad (88.e)$$

$$p_s^2(\vec{x}) = -\frac{e}{4\pi^2} A_s^1(\vec{x}) = -\frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} \int_{x^2(0)}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \partial_{x'^1} A^j(\vec{x}'), \quad (88.f)$$

$$\pi_e(\vec{x}) = \pi(\vec{x}) \exp \left[-i\Lambda(\vec{x}) \right] \quad , \quad (88. g)$$

$$\pi_e^\dagger(\vec{x}) = \exp \left[i\Lambda(\vec{x}) \right] \pi^\dagger(\vec{x}) \quad , \quad (88. h)$$

É importante salientar que Λ não comuta com os campos ϕ , ϕ^\dagger , π e π^\dagger e comuta com os campos A^i e p_j . Isto ocorre porque A^i não comuta com ϕ , ϕ^\dagger , π e π^\dagger (ver eqs.(49.e,f,g,h)) mas comuta com A^j e p_j (ver eqs.(49.i)). Um cálculo direto, combinando as expressões (79), (88) e (49) mostra que,

$$\left[\Lambda(\vec{x}), A^j(\vec{y}) \right] = 0 \quad , \quad (89. a)$$

$$\left[\Lambda(\vec{x}), p_j(\vec{y}) \right] = 0 \quad , \quad (89. b)$$

$$\left[\Lambda(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \right] = -\frac{\pi\hbar}{e} F(\vec{x}, \vec{y}) \phi(\vec{y}) \quad , \quad (89. c)$$

$$\left[\Lambda(\vec{x}), \phi^\dagger(\vec{y}) \right] = +\frac{\pi\hbar}{e} F(\vec{x}, \vec{y}) \phi^\dagger(\vec{y}) \quad , \quad (89. d)$$

$$\left[\Lambda(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \right] = +\frac{\pi\hbar}{e} F(\vec{x}, \vec{y}) \pi(\vec{y}) \quad , \quad (89. e)$$

$$\left[\Lambda(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y}) \right] = -\frac{\pi\hbar}{e} F(\vec{x}, \vec{y}) \pi^\dagger(\vec{y}) \quad , \quad (89. f)$$

$$\left[\Lambda(\vec{x}), \Lambda(\vec{y}) \right] = 0 \quad , \quad (89. g)$$

Então, a partir dos comutadores a tempos iguais no gauge de Coulomb, encontramos os comutadores a tempos iguais no gauge super-axial (ver Apêndice C), dados por,

$$\left[A_s^1(\vec{x}), A_s^1(\vec{y}) \right] = \left[A_s^1(\vec{x}), A_s^2(\vec{y}) \right] = \left[A_s^2(\vec{x}), A_s^2(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (90. a)$$

$$\left[A_s^1(\vec{x}), \phi_s(\vec{y}) \right] = + \frac{2\pi^2 \hbar}{e} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(x^2, x_{(0)}^2; y^2) \phi_s(\vec{y}) \quad , (90. b)$$

$$\left[A_s^1(\vec{x}), \phi_s^\dagger(\vec{y}) \right] = - \frac{2\pi^2 \hbar}{e} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(x^2, x_{(0)}^2; y^2) \phi_s^\dagger(\vec{y}) \quad , (90. c)$$

$$\left[A_s^1(\vec{x}), p_{1s}(\vec{y}) \right] = \left[A_s^1(\vec{x}), p_{2s}(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (90. d)$$

$$\left[A_s^1(\vec{x}), \pi_s(\vec{y}) \right] = - \frac{2\pi^2 \hbar}{e} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(x^2, x_{(0)}^2; y^2) \pi_s(\vec{y}) \quad , (90. e)$$

$$\left[A_s^1(\vec{x}), \pi_s^\dagger(\vec{y}) \right] = + \frac{2\pi^2 \hbar}{e} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(x^2, x_{(0)}^2; y^2) \pi_s^\dagger(\vec{y}) \quad , (90. f)$$

$$\left[A_s^2(\vec{x}), \phi_s(\vec{y}) \right] = \left[A_s^2(\vec{x}), \phi_s^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (90. g)$$

$$\left[A_s^2(\vec{x}), \pi_s(\vec{y}) \right] = \left[A_s^2(\vec{x}), \pi_s^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (90. h)$$

$$\left[A_s^2(\vec{x}), p_{1s}(\vec{y}) \right] = \left[A_s^2(\vec{x}), p_{2s}(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (90. i)$$

$$\left[\phi_s(\vec{x}), \phi_s(\vec{y}) \right] = \left\{ \exp \left[+ \frac{i \Delta(\vec{x}, \vec{y})}{e} \right] - 1 \right\} \phi_s(\vec{y}) \phi_s(\vec{x}) \quad , (90. j)$$

$$\left[\phi_s(\vec{x}), \phi_s^\dagger(\vec{y}) \right] = \left\{ \exp \left[- \frac{i \Delta(\vec{x}, \vec{y})}{e} \right] - 1 \right\} \phi_s^\dagger(\vec{y}) \phi_s(\vec{x}) \quad , (90. k)$$

$$\left[\phi_s(\vec{x}), \pi_s(\vec{y}) \right] = \left\{ \exp \left[- \frac{i \Delta(\vec{x}, \vec{y})}{e} \right] - 1 \right\} \pi_s(\vec{y}) \phi_s(\vec{x}) + \\ + i \hbar \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad , (90. l)$$

$$\left[\phi_s(\vec{x}), \pi_s^\dagger(\vec{y}) \right] = \left\{ \exp \left[+ \frac{i \Delta(\vec{x}, \vec{y})}{\theta} \right] - 1 \right\} \pi_s^\dagger(\vec{y}) \phi_s(\vec{x}) \quad , (90. m)$$

$$\left[\pi_s(\vec{x}), \pi_s(\vec{y}) \right] = \left\{ \exp \left[+ \frac{i \Delta(\vec{x}, \vec{y})}{\theta} \right] - 1 \right\} \pi_s(\vec{y}) \pi_s(\vec{x}) \quad , (90. n)$$

$$\left[\pi_s(\vec{x}), \pi_s^\dagger(\vec{y}) \right] = \left\{ \exp \left[- \frac{i \Delta(\vec{x}, \vec{y})}{\theta} \right] - 1 \right\} \pi_s^\dagger(\vec{y}) \pi_s(\vec{x}) \quad , (90. o)$$

$$\left[\phi_s(\vec{x}), p_{1s}(\vec{y}) \right] = \left[\phi_s^\dagger(\vec{x}), p_{1s}(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (90. p)$$

$$\left[\pi_s(\vec{x}), p_{1s}(\vec{y}) \right] = \left[\pi_s^\dagger(\vec{x}), p_{1s}(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (90. q)$$

$$\left[\phi_s(\vec{x}), p_{2s}(\vec{y}) \right] = + \frac{\hbar}{2} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(y^2, x_{(0)}^2; x^2) \phi_s(\vec{x}) \quad , (90. r)$$

$$\left[\phi_s^\dagger(\vec{x}), p_{2s}(\vec{y}) \right] = - \frac{\hbar}{2} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(y^2, x_{(0)}^2; x^2) \phi_s^\dagger(\vec{x}) \quad , (90. s)$$

$$\left[\pi_s(\vec{x}), p_{2s}(\vec{y}) \right] = - \frac{\hbar}{2} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(y^2, x_{(0)}^2; x^2) \pi_s(\vec{x}) \quad , (90. t)$$

$$\left[\pi_s^\dagger(\vec{x}), p_{2s}(\vec{y}) \right] = + \frac{\hbar}{2} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(y^2, x_{(0)}^2; x^2) \pi_s^\dagger(\vec{x}) \quad , (90. u)$$

$$\left[p_{1s}(\vec{x}), p_{1s}(\vec{y}) \right] = \left[p_{1s}(\vec{x}), p_{2s}(\vec{y}) \right] = \left[p_{2s}(\vec{x}), p_{2s}(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (90. v)$$

onde

$$\mathcal{D}(x, y, z) \equiv \int_y^x du \delta(u - z) = H(z - y) - H(z - x) \quad , (91)$$

$H(x - y)$ é a função Heaviside e

$$\begin{aligned}
\Delta(\vec{x}, \vec{y}) &= - \hbar \pi \left\{ F(\vec{x}, \vec{y}) - F(\vec{y}, \vec{x}) \right\} = \\
&= \hbar \pi \varepsilon(x^1 - y^1) \left\{ \arctan \left\{ \frac{x_{(0)}^2 - y^2}{|x^1 - y^1|} \right\} + \arctan \left\{ \frac{x_{(0)}^2 - x^2}{|x^1 - y^1|} \right\} \right\} - \\
&\hbar \pi \varepsilon(x_{(0)}^2 - y^2) \left\{ \arctan \left\{ \frac{x_{(0)}^1 - y^1}{|x_{(0)}^2 - y^2|} \right\} - \arctan \left\{ \frac{x^1 - y^1}{|x_{(0)}^2 - y^2|} \right\} \right\} + \\
&\hbar \pi \varepsilon(x_{(0)}^2 - x^2) \left\{ \arctan \left\{ \frac{x^1 - y^1}{|x_{(0)}^2 - x^2|} \right\} - \arctan \left\{ \frac{x_{(0)}^1 - x^1}{|x_{(0)}^2 - x^2|} \right\} \right\}
\end{aligned}
\tag{92}$$

Pode-se mostrar que a álgebra (90) carrega os vínculos e as condições de gauge como identidades operatoriais fortes.

III.2.c - ESPAÇO DE FASE Γ^*

Assim como ocorre no gauge de Coulomb, os setores (A^1, p_1) e (A^2, p_2) podem ser eliminados da teoria. A equação (51) nos permite escrever p_{1s} e p_{2s} em termos de A_s^1 e A_s^2 . A equação (88.b) elimina A_s^2 . E, para eliminar A_s^1 , partimos da eq. (88.a),

$$A_s^1(\vec{x}) = \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \varepsilon^{ij} \partial_{x'}^i A^j(\vec{x}') \tag{88.a}$$

Da eq. (53), temos que,

$$A^j = \epsilon^{jk} \partial^k \psi \quad , \quad (53)$$

de forma que,

$$\epsilon^{ij} \partial^i A^j = - \nabla^2 \psi = - \frac{2\pi^2}{e} J^0 \quad , \quad (53)$$

onde utilizamos a expressão (56). Então,

$$A_s^1(\vec{x}) = - \frac{2\pi^2}{e} \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) J^0(\vec{x}') \quad , \quad (54)$$

Assim, as variáveis desvinculadas que formam o espaço de fase Γ^* são $\phi_s, \phi_s^\dagger, \pi_s$ e π_s^\dagger que, de acordo com (90.j,k,l,m,n,o) não descrevem excitações bosônicas. Se compararmos as equações (49.n,o,p,q) com as eqs. (90.j,k,l,m,n,o), veremos que a estrutura dos comutadores a tempos iguais que envolve apenas as variáveis desvinculadas não é preservada frente a transformação (76). Dizemos então que esta transformação é singular (não canônica).

III.2.d - RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO "GRADED" A TEMPOS IGUAIS

Os comutadores a tempos iguais (91.j.k.l.m.n.o) podem ser colocados facilmente na forma de relações de comutação "graded" a tempos iguais [9], resultando,

$$\phi_s(\vec{x})\phi_s(\vec{y}) - \exp\left[+ \frac{i\Delta(\vec{x},\vec{y})}{e} \right] \phi_s(\vec{y})\phi_s(\vec{x}) = 0 \quad , \quad (95.a)$$

$$\phi_s(\vec{x})\phi_s^\dagger(\vec{y}) - \exp\left[- \frac{i\Delta(\vec{x},\vec{y})}{e} \right] \phi_s^\dagger(\vec{y})\phi_s(\vec{x}) = 0 \quad , \quad (95.b)$$

$$\phi_s(\vec{x})\pi_s(\vec{y}) - \exp\left[- \frac{i\Delta(\vec{x},\vec{y})}{e} \right] \pi_s(\vec{y})\phi_s(\vec{x}) = i\hbar \delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \quad (95.c)$$

$$\phi_s(\vec{x})\pi_s^\dagger(\vec{y}) - \exp\left[+ \frac{i\Delta(\vec{x},\vec{y})}{e} \right] \pi_s^\dagger(\vec{y})\phi_s(\vec{x}) = 0 \quad , \quad (95.d)$$

$$\pi_s(\vec{x})\pi_s(\vec{y}) - \exp\left[+ \frac{i\Delta(\vec{x},\vec{y})}{e} \right] \pi_s(\vec{y})\pi_s(\vec{x}) = 0 \quad , \quad (95.e)$$

$$\pi_s(\vec{x})\pi_s^\dagger(\vec{y}) - \exp\left[- \frac{i\Delta(\vec{x},\vec{y})}{e} \right] \pi_s^\dagger(\vec{y})\pi_s(\vec{x}) = 0 \quad , \quad (95.f)$$

As excitações descritas pelo campo ϕ_s obedecem estatística fracionária. É muito importante salientar que a causa deste efeito

é a falta de comutatividade de Λ com ϕ e π , ou seja, a falta de comutatividade de A^j com ϕ e π .

Podemos observar que $\Delta(\vec{x}, \vec{y})$ é uma função de \vec{x} e \vec{y} complicada para $\vec{x}_{(0)}$ arbitrário (ver eq.(92)). Entretanto, para algumas escolhas particulares de $\vec{x}_{(0)}$, $\Delta(\vec{x}, \vec{y})$ adquire uma forma bem simples. Por exemplo, se escolhermos $x_{(0)}^2 = +\infty$ e $\theta = \frac{\hbar}{2}$, obteremos $\Delta(\vec{x}, \vec{y}) = \hbar\pi \varepsilon(x^1 - y^1) [\pi + 2k\pi]$, onde k é um inteiro. Neste caso, o campo ϕ_s descreverá excitações fermiônicas.

III.2.e - HAMILTONIANO, MOMENTO LINEAR E MOMENTO ANGULAR

Também no gauge super-axial os operadores Hamiltoniano (\bar{H}), momento linear (P^k) e momento angular (J) podem ser escritos em termos dos campos independentes ϕ_s , ϕ_s^\dagger , π_s e π_s^\dagger , resultando,

$$\bar{H} = \int d^2x \left\{ \pi_s(\vec{x}) \pi_s^\dagger(\vec{x}) + (\partial_x^i \phi_s^\dagger)(\partial_x^i \phi_s) \right\} - \frac{4\pi^2}{\theta^2} \int d^2x \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} du \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dv \phi_s^\dagger(\vec{x})$$

$$J^0(x^1, u) J^0(x^1, v) \phi_s(\vec{x}) + \frac{i2\pi^2}{\theta} \int d^2x \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} du \left\{ (\partial_x^i \phi_s^\dagger(x)) J^0(x^1, u) \right.$$

$$\left. \phi_s(\vec{x}) - \phi_s^\dagger(\vec{x}) J^0(x^1, u) (\partial_x^i \phi_s(\vec{x})) \right\} \quad , \quad (96)$$

$$P^k = \int d^2x \left\{ \pi_s(\vec{x}) (\partial_x^k \phi_s) + (\partial_x^k \phi_s^\dagger) \pi_s^\dagger(x) \right\} - \delta^{k1} \frac{12\pi^2}{e} \int d^2x \int_{x(0)}^{x^2} du \left\{ \phi_s^\dagger(\vec{x}) \right.$$

$$\left. J^0(x^1, u) \pi_s^\dagger(\vec{x}) - \pi_s(\vec{x}) J^0(x^1, u) \phi_s(\vec{x}) \right\} \quad (97)$$

$$J = \int d^2x \epsilon^{ij} x^i \left\{ \pi_s(\vec{x}) (\partial_x^j \phi_s) + (\partial_x^j \phi_s^\dagger) \pi_s^\dagger(\vec{x}) \right\} - \frac{12\pi^2}{e} \int d^2x \int_{x(0)}^{x^2} du x^2$$

$$\left\{ \pi_s(\vec{x}) J^0(x^1, u) \phi_s(\vec{x}) - \phi_s^\dagger(\vec{x}) J^0(x^1, u) \pi_s^\dagger(\vec{x}) \right\} \quad (98)$$

Estas expressões podem ser obtidas de duas maneiras. A primeira seria por translação direta das expressões clássicas (33), (34) e (35), substituindo logo os campos A_s^i e p_{is} , $i=1,2$, em termos de $\phi_s, \phi_s^\dagger, \pi_s$ e π_s^\dagger através das eqs. (51), (75.a) e (94). A segunda consiste em reexpressar as variáveis do gauge de Coulomb em termos das variáveis do gauge super-axial (eqs. (88)) nas expressões de \bar{H} , P^k e J escritas em termos de variáveis do gauge de Coulomb (veja (67), (68) e (69)).

Para finalizar, vamos estudar as modificações que ocorrem quando o termo cinético $-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ é adicionado ao Lagrangeano.

IV - TEORIA DE CHERN-SIMONS EM PRESENÇA DO TERMO CINÉTICO

IV.1 - FORMULAÇÃO LAGRANGEANA

Se adicionarmos o termo cinético $-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, a nossa densidade Lagrangeana fica

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \left[(\partial_\mu + ieA_\mu) \phi^* \right] \left[(\partial^\mu - ieA^\mu) \phi \right] + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu \partial^\nu A^\lambda, \quad (99)$$

onde se introduziu uma constante de acoplamento dimensional e . Além disso, e torna-se um parâmetro com dimensões. As coordenadas são o campo escalar ϕ , ϕ^* e A^μ , $\mu=0,1,2$, que obedecem as seguintes equações de movimento Lagrangeanas

$$\square \phi - ie(\partial_\beta A^\beta) \phi - 2ieA^\beta (\partial_\beta \phi) - e^2 A^\beta A_\beta \phi = 0, \quad (100)$$

$$\square \phi^* + ie(\partial_\beta A^\beta) \phi^* + 2ieA^\beta (\partial_\beta \phi^*) - e^2 A^\beta A_\beta \phi^* = 0, \quad (101)$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{e}{2\pi^2} \epsilon_{\beta\alpha\mu} \partial^\alpha A^\mu + J^\beta = 0, \quad (102)$$

onde J^β é a densidade de corrente,

$$J^\beta \equiv ie \phi^* \left[(\partial^\beta - ieA^\beta) \phi \right] - ie \left[(\partial^\beta + ieA^\beta) \phi^* \right] \phi, \quad (103)$$

Também neste caso, pode-se mostrar que a densidade de corrente é conservada, isto é,

$$\partial_{\beta} J^{\beta} = 0 \quad (104)$$

IV.2 - FORMULAÇÃO HAMILTONIANA

IV.2.a - HAMILTONIANO CANÔNICO, VÍNCULOS PRIMÁRIOS E MOMENTOS

Para calcularmos os momenta Π , Π^* e p_{μ} , $\mu=0,1,2$ (canonicamente conjugados aos campos ϕ , ϕ^* e A^{μ} , $\mu=0,1,2$, respectivamente), é conveniente reescrever (99) na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial^0 A^i)(\partial^0 A^i) - (\partial^0 A^i)(\partial^i A^0) + \frac{1}{2} (\partial^i A^0)(\partial^i A^0) - \frac{1}{4} F^{ij}F_{ij} + \\ & + [(\partial^0 + ieA^0)\phi^*][(\partial^0 - ieA^0)\phi] - [(\partial^j + ieA^j)\phi^*][(\partial^j - ieA^j)\phi] + \\ & + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ij} A^0 \partial^i A^j + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ij} A^j \partial^0 A^i + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ij} A^i \partial^j A^0 \quad (105) \end{aligned}$$

Encontramos,

$$p_0 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^0)} = 0 \quad (106)$$

$$P_k \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^k)} = F^{0k} + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{kj} A^j \quad , (107)$$

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^* + ieA^0 \phi^* \quad , (108)$$

$$\Pi^* \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^*)} = \partial_0 \phi - ieA^0 \phi \quad , (109)$$

A expressão (106) constitui um vínculo primário da teoria, denotado por

$$P_0 \equiv p_0 \approx 0 \quad , (110)$$

O Hamiltoniano canônico é dado por

$$H \equiv \int d^2y \left\{ p_\mu (\partial^0 A^\mu) + \Pi (\partial_0 \phi) + \Pi^* (\partial_0 \phi^*) - \mathcal{L} \right\} \quad , (111)$$

Substituindo (106), (107), (108), e (109) em (111), obtemos,

$$H = \int d^2y \left\{ \frac{1}{2} p_j p_j - \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} p_i A^j + \frac{1}{4} F^{ij} F^{ij} + \frac{e^2}{32\pi^4} A^j A^j + \Pi^* \Pi + \right. \\ \left. \left[(\partial^j + ieA^j) \phi^* \right] \left[(\partial^j - ieA^j) \phi \right] - A^c \left[\frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} \partial^i A^j + \partial^i p_i + \right. \right. \\ \left. \left. ie (\phi^* \Pi^* - \Pi \phi) \right] \right\} \quad , (112)$$

IV.2.b - HAMILTONIANO TOTAL E VÍNCULOS SECUNDÁRIOS

O Hamiltoniano total do sistema é

$$H_T = H + \int d^2y \ u_0(\vec{y}) P_0(\vec{y}) \quad , (113)$$

onde u_0 é um multiplicador de Lagrange.

Seguindo o algoritmo de de Dirac, se exigirmos a persistência no tempo do vínculo primário, encontraremos o seguinte vínculo secundário,

$$S_0 \equiv ie (\phi^* \pi^* - \pi \phi) + \partial^i p_i + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ij} \partial^i A^j \approx 0 \quad . (114)$$

Em continuação, se exigirmos a persistência no tempo do vínculo secundário, obteremos $0 \approx 0$. Com isto, esgota-se o processo de geração de vínculos.

Podemos notar que os vínculos primários (17) não estão presentes na teoria, e, como conseqüência, a conexão direta entre os p's e os A's, estabelecida por estes vínculos desaparece.

Pode-se mostrar facilmente que

$$\left[P_0(\vec{x}), P_0(\vec{y}) \right]_{PP} = \left[P_0(\vec{x}), S_0(\vec{y}) \right]_{PP} = \left[S_0(\vec{x}), S_0(\vec{y}) \right]_{PP} = 0, \quad (115)$$

de forma que tanto P_0 quanto S_0 são vínculos de primeira classe. Assim, o Hamiltoniano estendido do problema fica,

$$H_E = H_T + \int d^2y \xi(\vec{y}) S_0(\vec{y}) \quad , \quad (116)$$

sendo ξ um coeficiente arbitrário. Substituindo (113) e (112) em (116), temos

$$H_E = \bar{H} + \int d^2y \left\{ u_0(\vec{y}) P_0(\vec{y}) + u_1(\vec{y}) S_0(\vec{y}) \right\} \quad , \quad (117)$$

onde agora

$$\begin{aligned} \bar{H} = \int d^2y \left\{ \frac{1}{2} P_j P_j - \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} P_i A^j + \frac{1}{4} F^{ij} F^{ij} + \frac{e}{32\pi^4} A^j A^j + \pi^* \pi + \right. \\ \left. + \left[(\partial^j + ieA^j) \phi^* \right] \left[(\partial^j - ieA^j) \phi \right] \right\} \quad , \quad (118) \end{aligned}$$

e

$$u_1 = \xi - A^0 \quad . \quad (119)$$

IV.2.d - QUANTIZAÇÃO DA TEORIA NO GAUGE DE COULOMB

Para quantizar o sistema, vamos utilizar as seguintes condições de gauge,

$$\chi_0 = A^0 \approx 0 \quad , \quad (120)$$

$$\chi = \partial^i A^i \approx 0 \quad , \quad (121)$$

e construir o Hamiltoniano completo

$$H_c = H_E + \int d^2y \left\{ u_2(\vec{y}) \chi_0(\vec{y}) + u_3(\vec{y}) \chi(\vec{y}) \right\} \quad , \quad (122)$$

onde u_2 e u_3 são os multiplicadores de Lagrange associados a χ_0 e χ , respectivamente.

Seguindo o algoritmo de Fadkin-Vilkovisky, vamos exigir a persistência no tempo das condições de gauge. Com isto, iremos determinar os multiplicadores de Lagrange u_0 e u_1

$$\dot{\chi}_0(\vec{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = 0 \quad , \quad (123)$$

$$\dot{\chi}(\vec{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_{x^1}^2 u_1 = -J^0(\vec{x}) - \frac{e}{2\pi^2} \epsilon^{ij} \partial^i A^j \quad , \quad (124)$$

Segue então que o papel da variável Lagrangeana A^0 é desempenhado pelo multiplicador $-u_1$ (compare as eqs. (124) e (102)). Agora, o conjunto formado pelos vínculos e pelas condições de gauge é de

segunda classe, e podemos introduzir os parênteses de Dirac da maneira usual. A partir dos parênteses de Dirac abstraímos os comutadores a tempos iguais que, essencialmente, diferem do caso anterior, porque as expressões (49.e,f,g,h,i) são substituídas por

$$\left[A^i(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (125. a)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), \phi^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (125. b)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (125. c)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (125. d)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), p_j(\vec{y}) \right] = i\hbar \delta_{ij} \delta(\vec{x}-\vec{y}) - i\hbar \partial_x^i \partial_x^j \left[G(\vec{x}-\vec{y}) \right] \quad , (125. e)$$

$$\left[p_i(\vec{x}), p_j(\vec{y}) \right] = \frac{i\hbar e}{4\pi^2} \epsilon^{ki} \partial_x^k \partial_x^j \left[G(\vec{x}-\vec{y}) \right] - \frac{i\hbar e}{4\pi^2} \epsilon^{kj} \partial_x^k \partial_x^i \left[G(\vec{x}-\vec{y}) \right] \quad (125. f)$$

Podemos observar, neste caso, que A^j comuta com ϕ , ϕ^\dagger , π e π^\dagger e, como consequência, o operador Λ , que faz a transição do gauge de Coulomb para o gauge super-axial, também comuta com ϕ , ϕ^\dagger , π e π^\dagger , isto é,

$$\left[\Lambda(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \right] = \left[\Lambda(\vec{x}), \phi^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (126. a)$$

$$\left[\Lambda(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \right] = \left[\Lambda(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y}) \right] = 0 \quad , (126. b)$$

Assim, a função $F(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ (ver eqs. (89.c,d,e,f)) e os campos ϕ , ϕ^\dagger , ϕ_g e ϕ_g^\dagger descrevem excitações bosônicas. Com isto, mostramos que a introdução de um termo cinético faz com que não surjam mais "anyons".

V - TEORIA DE CHERN-SIMONS FERMIÔNICA

V.1 - MODELO SEM O TERMO CINÉTICO

A teoria de Chern-Simons para férmions é descrita pela seguinte densidade Lagrangeana [11]

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu \partial^\nu A^\lambda, \quad (127)$$

onde γ^μ , $\mu=0,1,2$, são as matrizes que satisfazem a álgebra de Clifford. As coordenadas são o spinor ψ , seu complexo conjugado $\bar{\psi}$ e os campos de gauge A^μ .

Passamos agora para a formulação Hamiltoniana, onde vamos proceder de forma análoga às seções anteriores. Por isto, omitiremos os detalhes de cálculo, listando apenas os principais resultados, lembrando que, pelo fato de estarmos trabalhando com campos bosônicos e fermiônicos, o conceito de parênteses de Poisson (PP) deve ser generalizado para parênteses de Bose-Fermi (PBF) que, para dois campos $f(\vec{x})$ e $g(\vec{y})$, é definido como

$$\left[f(\vec{x}), g(\vec{y}) \right]_{\text{PBF}} \equiv \int d^2z \left\{ \left[\frac{\delta f(\vec{x})}{\delta A^\mu(\vec{z})} \frac{\delta g(\vec{y})}{\delta p_\mu(\vec{z})} - (-1)^{n_f n_g} \frac{\delta g(\vec{y})}{\delta A^\mu(\vec{z})} \frac{\delta f(\vec{x})}{\delta p_\mu(\vec{z})} \right] + \left[\frac{\delta f(\vec{x})}{\delta \psi(\vec{z})} \Big|_R \frac{\delta g(\vec{y})}{\delta \pi_\psi(\vec{z})} \Big|_L - (-1)^{n_f n_g} \frac{\delta g(\vec{y})}{\delta \psi(\vec{z})} \Big|_R \frac{\delta f(\vec{x})}{\delta \pi_\psi(\vec{z})} \Big|_L \right] \right\}, \quad (128)$$

onde n_f é a paridade de Grassmann do campo f , e pode valer 0 ou 1, dependendo de f ser um campo bosônico ou fermiônico, respectivamente. Podemos observar na definição acima que existem dois tipos de derivadas: derivada à esquerda (L) e derivada à direita (R), que se relacionam através de

$$\frac{\delta f}{\delta \psi} \Big|_L = (-1)^{n_f+1} \frac{\delta f}{\delta \psi} \Big|_R, \quad (129)$$

e possuem as seguintes propriedades,

$$\frac{\delta(fg)}{\delta \psi} \Big|_L = \frac{\delta f}{\delta \psi} \Big|_L g + (-1)^{n_f} f \frac{\delta g}{\delta \psi} \Big|_L, \quad (130.a)$$

$$\frac{\delta(fg)}{\delta \psi} \Big|_R = (-1)^{n_g} \frac{\delta f}{\delta \psi} \Big|_R g + f \frac{\delta g}{\delta \psi} \Big|_R, \quad (130.b)$$

Durante os cálculos, utilizamos também as seguintes propriedades

$$fg = (-1)^{n_f n_g} gf, \quad (131.a)$$

$$\left[f, g \right]_{\text{PBF}} = -(-1)^{n_f n_g} \left[g, f \right]_{\text{PBF}}, \quad (131.b)$$

$$\left[fg, h \right]_{\text{PBF}} = f \left[g, h \right]_{\text{PBF}} + (-1)^{n_g n_h} \left[f, h \right]_{\text{PBF}} g \quad , \quad (131.c)$$

$$\left[f, gh \right]_{\text{PBF}} = (-1)^{n_f n_g} g \left[f, h \right]_{\text{PBF}} + \left[f, g \right]_{\text{PBF}} h \quad . \quad (131.d)$$

O Hamiltoniano do sistema é

$$H = \int d^2y \left\{ - \Pi_\psi \gamma^0 \gamma^j (\partial_j \psi) - ie \Pi_\psi \gamma^0 \gamma^j \psi A^j - A^0 \left[- ie \Pi_\psi \psi + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} (\partial^i A^j) + (\partial^j p_j) \right] \right\} \quad , \quad (132)$$

sendo Π_ψ , $\Pi_{\bar{\psi}}$ e p_μ os momentos canonicamente conjugados a ψ , $\bar{\psi}$ e A^μ , dados por,

$$\Pi_\psi = i \bar{\psi} \gamma^0 \quad , \quad (133)$$

$$\Pi_{\bar{\psi}} = 0 \quad , \quad (134)$$

$$p_0 = 0 \quad , \quad (135)$$

$$p_i = \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} A^j \quad . \quad (136)$$

É importante salientar a ausência de $\bar{\psi}$ e $\Pi_{\bar{\psi}}$ em (132). Na verdade, este setor foi eliminado da teoria através das expressões (133) e (134), isto é,

$$\bar{\psi} = -i \Pi_{\psi} \gamma^0$$

$$\Pi_{\bar{\psi}} = 0$$

O sistema em questão é degenerado, e apresenta o seguinte conjunto de vínculos

$$P_0 \equiv p_0 \approx 0 \quad , \quad (137)$$

$$P_i \equiv p_i - \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} A^j \approx 0 \quad , \quad (138)$$

$$S_0 \equiv -ie \Pi_{\psi} \psi + \partial^i p_i + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} \partial^i A^j \approx 0 \quad . \quad (139)$$

P_0 é um vínculo primário de 1ª classe, P_i , $i=1,2$ são vínculos primários de 2ª classe e S_0 é um vínculo secundário de 1ª classe. Como este sistema possui vínculos de 1ª classe, ele apresenta liberdade de gauge, e, para ser quantizado, precisa de condições subsidiárias (ou de gauge).

Inicialmente, vamos quantizar o sistema no gauge de Coulomb ,

$$\chi_0 = A^0 \approx 0 \quad , \quad (140)$$

$$\chi = \partial^i A^i \approx 0 \quad , \quad (141)$$

O conjunto formado pelos vínculos e pelas condições de gauge é de 2ª classe, de forma que podemos calcular os parênteses de Dirac,

que neste caso podem ser simétricos ou anti-simétricos, e, a partir deles, abstrair os anti-comutadores (+) ou comutadores (-) a tempos iguais [21], respectivamente, obtendo,

$$\left[A^\mu(\vec{x}), A^\nu(\vec{y}) \right]_- = \left[A^\mu(\vec{x}), p_\nu(\vec{y}) \right]_- = \left[p_\mu(\vec{x}), p_\nu(\vec{y}) \right]_- = 0, \quad (142. a)$$

$$\left[A^0(\vec{x}), \psi^a(\vec{y}) \right]_- = \left[A^0(\vec{x}), \pi_\psi^a(\vec{y}) \right]_- = 0 \quad (142. b)$$

$$\left[p_0(\vec{x}), \psi^a(\vec{y}) \right]_- = \left[p_0(\vec{x}), \pi_\psi^a(\vec{y}) \right]_- = 0 \quad (142. c)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), \psi^a(\vec{y}) \right]_- = - e\hbar \frac{2\pi^2}{e} \epsilon_{ij} \partial_j^y \left[G(\vec{x}-\vec{y}) \right] \psi^a(\vec{y}) \quad (142. d)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), \pi_\psi^a(\vec{y}) \right]_- = + e\hbar \frac{2\pi^2}{e} \epsilon_{ij} \partial_j^y \left[G(\vec{x}-\vec{y}) \right] \pi_\psi^a(\vec{y}) \quad (142. e)$$

$$\left[p_i(\vec{x}), \psi^a(\vec{y}) \right]_- = + \frac{e\hbar}{2} \partial_i^y \left[G(\vec{x}-\vec{y}) \right] \psi^a(\vec{y}) \quad (142. f)$$

$$\left[p_i(\vec{x}), \pi_\psi^a(\vec{y}) \right]_- = - \frac{e\hbar}{2} \partial_i^y \left[G(\vec{x}-\vec{y}) \right] \pi_\psi^a(\vec{y}) \quad (142. g)$$

$$\left[\psi^a(\vec{x}), \psi^b(\vec{y}) \right]_+ = 0 \quad (142. h)$$

$$\left[\pi_\psi^a(\vec{x}), \pi_\psi^b(\vec{y}) \right]_+ = 0 \quad (142. i)$$

$$\left[\psi^a(\vec{x}), \pi_\psi^b(\vec{y}) \right]_+ = i\hbar \delta_{ab} \delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad (142. j)$$

Pode-se verificar facilmente que esta álgebra carrega os vínculos e as condições de gauge como identidades operatoriais fortes. Além disto, os vínculos e as condições de gauge nos permitem eliminar

A^μ e $p_{i,\mu}$, $\mu=0,1,2$, da teoria, de forma que o espaço de fase Γ^* passa a ser formado pelos campos ψ^a e Π_ψ^a , $a=1,2$, que, de acordo com (142.h,i,j), obedecem relações de anticomutação canônicas. Assim, no gauge de Coulomb, ψ^a descreve excitações fermiônicas.

Passamos agora para a quantização da teoria no gauge super-axial. Como no caso anterior, vamos transferir todos os resultados do gauge de Coulomb para o gauge super-axial, através de uma transformação que conecta os dois gauges,

$$A_s^\mu(\vec{x}) = A^\mu(\vec{x}) + \partial^\mu \Lambda(\vec{x}) \quad , (143.a)$$

$$\psi_s^a(\vec{x}) = \exp \left[i \Lambda(\vec{x}) \right] \psi^a(\vec{x}) \quad , (143.b)$$

$$\Pi_{\psi_s^a}(\vec{x}) = \Pi_{\psi^a}(\vec{x}) \exp \left[-i \Lambda(\vec{x}) \right] \quad , (143.c)$$

onde

$$\Lambda(\vec{x}) = \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x^1 - x'^1) A^2(x'^1, x'^2) + \int_{x_{(0)}^1}^{x^1} dx'^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^2 \delta(x'^2 - x_{(0)}^2) A^1(x'^1, x'^2) \quad . (144)$$

O operador $\Lambda(\vec{x})$ também pode ser escrito da seguinte forma,

$$\Lambda(\vec{x}) = \frac{\pi}{\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2z F(\vec{x}, \vec{z}) J^0(\vec{z}) \quad , (145)$$

com $F(\vec{x}, \vec{z})$ dada por (84), e

$$J^0(\vec{z}) = -ie \Pi_{\psi}(\vec{z}) \psi(\vec{z}) \quad (146)$$

É importante salientar que A não comuta com ψ^a e Π_{ψ}^a , já que A^i não comuta ψ^a e Π_{ψ}^a (142.d,e). Um cálculo direto mostra que

$$\left[A(\vec{x}), \psi^a(\vec{y}) \right]_- = -\frac{\pi \hbar e}{e} F(\vec{x}, \vec{y}) \psi^a(\vec{y}) \quad (147.a)$$

$$\left[A(\vec{x}), \Pi_{\psi}^a(\vec{y}) \right]_- = +\frac{\pi \hbar e}{e} F(\vec{x}, \vec{y}) \Pi_{\psi}^a(\vec{y}) \quad (147.b)$$

A partir dos comutadores e anti-comutadores a tempos iguais no gauge de Coulomb, obtemos os comutadores e anti-comutadores a tempos iguais no gauge super-axial. Também neste gauge podemos eliminar A^{μ} e p_{μ} , $\mu=0,1,2$, de forma que as variáveis desvinculadas da teoria são ψ_s^a e $\Pi_{\psi_s}^a, a=1,2$, que obedecem a seguinte álgebra "graded",

$$\psi_s^a(\vec{x}) \psi_s^b(\vec{y}) + \exp \left[\frac{i \Delta(\vec{x}, \vec{y})}{e} \right] \psi_s^b(\vec{y}) \psi_s^a(\vec{x}) = 0 \quad (148.a)$$

$$\Pi_{\psi_s}^a(\vec{x}) \Pi_{\psi_s}^b(\vec{y}) + \exp \left[-\frac{i \Delta(\vec{x}, \vec{y})}{e} \right] \Pi_{\psi_s}^b(\vec{y}) \Pi_{\psi_s}^a(\vec{x}) = 0 \quad (148.b)$$

$$\psi_s^a(\vec{x}) \Pi_{\psi_s}^b(\vec{y}) + \exp \left[-\frac{i \Delta(\vec{x}, \vec{y})}{e} \right] \Pi_{\psi_s}^b(\vec{y}) \psi_s^a(\vec{x}) = i \hbar \delta_{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (148.c)$$

sendo

$$\Delta(\vec{x}, \vec{y}) = -\pi\hbar e \left\{ F(\vec{x}, \vec{y}) - F(\vec{y}, \vec{x}) \right\} \quad (149)$$

As expressões (148.a,b,c) nos indicam que , no gauge super-axial, ψ_a^c descreve excitações "anyônicas". E, neste caso, a transformação de gauge é singular. É importante salientar que se escolhermos $x_{(0)}^2 = +\omega$ e $\theta = \frac{\hbar}{2e}$, obteremos $\Delta(\vec{x}, \vec{y}) = \hbar\pi e \varepsilon(x^1 - y^1)$ [$\pi + 2k\pi$], onde k é um inteiro. Neste limite, ψ_a^c descreverá excitações bosônicas.

V.2 - MODELO COM O TERMO CINÉTICO

Se adicionarmos o termo cinético $-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ à teoria, o Lagrangeano do sistema fica,

$$L = \int d^2y \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu \partial^\nu A^\lambda \right\}, \quad (150)$$

e o Hamiltoniano do sistema torna-se

$$H = \int d^2y \left\{ \frac{1}{2} p_j p_j + \frac{1}{4} F^{ij} F^{ij} + \Pi_\psi \gamma^0 \gamma^j (\partial^j \psi) - ie \Pi_\psi \gamma^0 \gamma^j \psi A^j - \right. \\ \left. - \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} A^j p_i + \frac{e^2}{32\pi^4} A^i A^i - A^0 \left[-ie \Pi_\psi \psi + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} (\partial^i A^j) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\partial^j p_j) \right] \right\} \quad (151)$$

onde Π_ψ , $\Pi_{\bar{\psi}}$ e p_μ são os momentos canonicamente conjugados aos campos ψ , $\bar{\psi}$ e A^μ , dados por,

$$\Pi_\psi = i\bar{\psi}\gamma^0 \quad , \quad (152)$$

$$\Pi_{\bar{\psi}} = 0 \quad , \quad (153)$$

$$p_0 = 0 \quad , \quad (154)$$

$$p_i = F^{0i} + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} A^j \quad . \quad (155)$$

Neste caso, também elimina-se o setor $\bar{\psi}$ e $\Pi_{\bar{\psi}}$ através das relações (152) e (153). Este sistema é degenerado e apresenta a seguinte estrutura de vínculos,

$$P_0 \equiv p_0 \approx 0 \quad , \quad (156)$$

$$S_0 \equiv -ie\Pi_\psi\psi + \partial^i p_i + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon^{ij} \partial^i A^j \approx 0 \quad . \quad (157)$$

P_0 é um vínculo primário de 1ª classe e S_0 é um vínculo secundário de 1ª classe. Quantizamos o sistema no gauge de Coulomb, calculamos os parênteses de Dirac e abstraímos os comutadores (-) e anti-comutadores a tempos iguais, que diferem do caso anterior porque as expressões (142.a,d,e) são substituídas por,

$$\left[A^i(\vec{x}), p_j(\vec{y}) \right]_- = i\hbar \delta_{ij} \delta(\vec{x}-\vec{y}) - i\hbar \partial_i^x \partial_j^x \left(G(\vec{x}-\vec{y}) \right) \quad , (158. a)$$

$$\left[p_i(\vec{x}), p_j(\vec{y}) \right]_- = \frac{i\hbar e}{4\pi^2} \epsilon^{ki} \partial_k^x \partial_j^x \left(G(\vec{x}-\vec{y}) \right) - \frac{i\hbar e}{4\pi^2} \epsilon^{kj} \partial_k^x \partial_i^x \left(G(\vec{x}-\vec{y}) \right) \quad (158. b)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), \psi^a(\vec{y}) \right]_- = 0 \quad , (158. c)$$

$$\left[A^i(\vec{x}), \Pi_\psi^a(\vec{y}) \right]_- = 0 \quad , (158. d)$$

As expressões (158. c) e (158. d) nos mostram que A^i comuta com ψ^a e Π_ψ^a e, como conseqüência, Λ comuta com ψ^a e Π_ψ^a , o que faz com que $F(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ (eqs. (147. a), (147. b)). Ou seja, também neste caso, a introdução de um termo cinético destrói a transmutação estatística.

VI. CONCLUSÕES

Podemos resumir o nosso trabalho da seguinte forma :

Inicialmente, quantizamos o modelo de Chern-Simons no gauge de Coulomb, encontramos as variáveis desvinculadas ϕ , ϕ^\dagger , π e π^\dagger , e obtivemos as relações de comutação a tempos iguais. Neste gauge, verificamos que as variáveis desvinculadas obedecem relações de comutação bosônicas, de modo que ϕ e ϕ^\dagger são campos bosônicos. Depois quantizamos o sistema no gauge super-axial, usando o fato de que os dois gauges estão conectados através de um operador Λ que realiza a transformação de gauge. Encontramos Γ^* no novo gauge, $\langle \phi_s, \phi_s^\dagger, \pi_s, \pi_s^\dagger \rangle$, e obtivemos as relações de comutação a tempos iguais. Verificamos, no gauge super-axial, que as variáveis desvinculadas obedecem relações de comutação "graded", de forma que ϕ_s e ϕ_s^\dagger podem ser considerados campos "anyônicos". Assim, a nossa primeira conclusão é a de que numa teoria Abeliãna, estabelecida num espaço-tempo de 2+1 dimensões, os "anyons" emergem como resultado de uma transformação de gauge singular. Além do mais, mostramos que num determinado limite, os "anyons" tornam-se férmions, indicando que um dos possíveis efeitos da transformação de gauge é transmutar bósons em férmions.

Fizemos o mesmo tratamento para o modelo de Chern-Simons fermiônico. Verificamos que, no gauge de Coulomb, as variáveis desvinculadas $\langle \psi, \pi_\psi \rangle$ obedecem relações de anti-comutação a tempos iguais, isto é, ψ é um campo fermiônico. Já no gauge

super-axial, as variáveis desvinculadas $(\psi_\varepsilon, \Pi_{\psi_\varepsilon})$ obedecem relações de anti-comutação "graded", ou seja, ψ_ε pode ser considerado um campo "anyônico". Verificamos também que existe um limite em que os "anyons" tornam-se bósons, indicando que um dos possíveis efeitos da transformação de gauge é transmutar férmions em bósons. É interessante salientar que o limite em que os bósons tornam-se férmions é o mesmo limite em que os férmions tornam-se bósons.

Finalmente, mostramos que, tanto no modelo bosônico quanto no modelo fermiônico, a adição de um termo cinético elimina o fenômeno da transmutação estatística.

APPENDICE A

$$1) \left[P_0(\vec{x}), P_0(\vec{y}) \right]_{PP} = 0 \quad , \quad (A.1)$$

$$2) \left[P_0(\vec{x}), P_i(\vec{y}) \right]_{PP} = 0 \quad , \quad (A.2)$$

$$3) \left[P_0(\vec{x}), S_0(\vec{y}) \right]_{PP} = 0 \quad , \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} 4) \left[P_i(\vec{x}), P_j(\vec{y}) \right]_{PP} &= -\frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{jl} \left[P_i(\vec{x}), A^l(\vec{y}) \right]_{PP} - \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ik} \left[A^k(\vec{x}), P_j(\vec{y}) \right]_{PP} \\ &= -\frac{e}{2\pi^2} \epsilon_{ij} \delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \quad (A.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \left[P_i(\vec{x}), S_0(\vec{y}) \right]_{PP} &= \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{kl} \partial_y^k \left[P_i(\vec{x}), A^l(\vec{y}) \right]_{PP} - \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ij} \partial_y^l \left[A^j(\vec{x}), P_l(\vec{y}) \right]_{PP} \\ &= -\frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ki} \partial_y^k \delta(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ij} \partial_y^j \delta(\vec{x}-\vec{y}) = 0 \quad , \quad (A.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \left[S_0(\vec{x}), S_0(\vec{y}) \right]_{PP} &= - \left[\phi^*(\vec{x}) \pi^*(\vec{x}), \phi^*(\vec{y}) \pi^*(\vec{y}) \right]_{PP} - \left[\pi(\vec{x}) \phi(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \phi(\vec{y}) \right]_{PP} \\
&+ \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{kl} \partial_x^i \partial_y^k \left[P_i(\vec{x}), A^l(\vec{y}) \right]_{PP} + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ij} \partial_x^i \partial_y^k \left[A^j(\vec{x}), P_k(\vec{y}) \right]_{PP} = \\
&- \phi^*(\vec{x}) \left[\pi^*(\vec{x}), \phi^*(\vec{y}) \right]_{PP} \pi^*(\vec{y}) - \phi^*(\vec{y}) \left[\phi^*(\vec{x}), \pi^*(\vec{y}) \right]_{PP} \pi^*(\vec{x}) - \\
&- \pi(\vec{x}) \left[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y}) \right]_{PP} \phi(\vec{y}) - \pi(\vec{y}) \left[\pi(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \right]_{PP} \phi(\vec{x}) - \\
&- \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{kl} \partial_x^i \partial_y^k \left[\delta(\vec{x}-\vec{y}) \right] + \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{ik} \partial_x^i \partial_y^k \left[\delta(\vec{x}-\vec{y}) \right] = 0, \quad (A.6)
\end{aligned}$$

$$7) \left[\chi_0(\vec{x}), P_0(\vec{y}) \right]_{PP} = 0, \quad (A.7)$$

$$8) \left[\chi_0(\vec{x}), P_i(\vec{y}) \right]_{PP} = 0, \quad (A.8)$$

$$9) \left[\chi_0(\vec{x}), S_0(\vec{y}) \right]_{PP} = 0, \quad (A.9)$$

$$10) \left[\chi_0(\vec{x}), \chi_0(\vec{y}) \right]_{PP} = 0, \quad (A.10)$$

$$11) \left[\chi_0(\vec{x}), \chi(\vec{y}) \right]_{PP} = 0 \quad , \quad (A.11)$$

$$12) \left[\chi(\vec{x}), P_0(\vec{y}) \right]_{PP} = 0 \quad , \quad (A.12)$$

$$13) \left[\chi(\vec{x}), P_i(\vec{y}) \right]_{PP} = \partial_x^j \left[A^j(\vec{x}), p_i(\vec{y}) \right]_{PP} = \partial_x^i \delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \quad (A.13)$$

$$14) \left[\chi(\vec{x}), S_0(\vec{y}) \right]_{PP} = \partial_x^j \partial_y^i \left[A^j(\vec{x}), p_i(\vec{y}) \right]_{PP} = -\nabla_x^2 \delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \quad (A.14)$$

$$15) \left[\chi(\vec{x}), \chi(\vec{y}) \right]_{PP} = 0 \quad . \quad (A.15)$$

APÊNDICE B

O tensor energia-momento simétrico ($\Theta_{\mu\nu}$) é dado em termos do tensor energia-momento ($T_{\mu\nu}$) e do superpotencial ($\psi_{\lambda\mu\nu}$) por [22]

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} + \partial^\lambda \psi_{\lambda\mu\nu} \quad , \quad (B.1)$$

onde,

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\rho)} \partial_\nu A^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^*)} \partial_\nu \phi^* - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad , \quad (B.2)$$

$$\psi_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ S_{\lambda\mu\nu} + S_{\nu\mu\lambda} + S_{\lambda\nu\mu} \right\} \quad , \quad (B.3)$$

sendo $S_{\lambda\mu\nu}$ o termo de spin do tensor momento angular,

$$S_{\lambda\mu\nu} \equiv - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \phi)} B_{\lambda\mu}^{(\phi)} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \phi^*)} B_{\lambda\mu}^{(\phi^*)} \phi^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A_\rho)} B_{\rho\lambda\mu}^{(A)} \xi_{A\xi} \quad , \quad (B.4)$$

com $B_{\lambda\mu} = 0$ para campos escalares, isto é,

$$B_{\lambda\mu}^{(\phi)} = B_{\lambda\mu}^{(\phi^*)} = 0 \quad , \quad (B.5)$$

e, para campos vetoriais,

$$B_{\rho\lambda\mu}^{\tau} = g_{\rho\lambda} \delta_{\mu}^{\tau} - g_{\rho\mu} \delta_{\lambda}^{\tau} \quad . \quad (B.6)$$

Um cálculo direto, utilizando as expressões (5), (B.2), (B.5), (B.6), (B.4) e (B.3) nos leva a

$$T_{\mu\nu} = \frac{e}{4\pi} A^{\sigma} \epsilon_{\sigma\mu\rho} \partial_{\nu} A^{\rho} + (\partial_{\mu} \phi^{*} + i A_{\mu} \phi^{*}) (\partial_{\nu} \phi) + (\partial_{\nu} \phi^{*}) (\partial_{\mu} \phi - i A_{\mu} \phi) - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad , \quad (B.7)$$

$$\psi_{\lambda\mu\nu} = - \frac{e}{4\pi^2} \epsilon_{\rho\mu\lambda} A^{\rho} A_{\nu} \quad . \quad (B.8)$$

Substituindo (B.7) e (B.8) em (B.1), obtemos,

$$\Theta_{\mu\nu} = (\partial_{\mu} \phi^{*} + i A_{\mu} \phi^{*}) (\partial_{\nu} \phi - i A_{\nu} \phi) + (\partial_{\nu} \phi^{*} + i A_{\nu} \phi^{*}) (\partial_{\mu} \phi - i A_{\mu} \phi) - g_{\mu\nu} (\partial_{\lambda} \phi^{*} + i A_{\lambda} \phi^{*}) (\partial^{\lambda} \phi - i A^{\lambda} \phi) \quad . \quad (B.9)$$

APÊNDICE C

Neste apêndice, vamos provar algumas relações de comutação a tempos iguais no gauge super-axial.

$$1) \left[A_s^1(\vec{x}), A_s^1(\vec{y}) \right] = 0 \quad , \quad (C.1)$$

Prova:

$$\left[A_s^1(\vec{x}), A_s^1(\vec{y}) \right] \stackrel{(88)}{=} \epsilon^{ij} \epsilon^{kl} \int_{x_2}^{x_2^2} dx'^2 \int_{y_2}^{y_2^2} dy'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \int_{-\infty}^{+\infty} dy'^1 \delta(x'^1 - y'^1)$$

$$\delta(y'^1 - y'^1) \partial_{x'}^i \partial_{y'}^k \left[A^j(\vec{x}'), A^k(\vec{y}') \right] \stackrel{(49)}{=} 0$$

$$2) \left[A_s^1(\vec{x}), \phi_s(\vec{y}) \right] = \frac{2\pi^2 \hbar}{e} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(x^2, x_{(0)}^2; y^2) \phi_s(\vec{y}) \quad , \quad (C.2)$$

Prova:

$$\left[A_s^1(\vec{x}), \phi_s(\vec{y}) \right] \stackrel{(88)}{=} \epsilon^{ij} \int_{x_2}^{x_2^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \partial_{x'}^i \left[A^j(\vec{x}'), e^{i\Lambda(\vec{y})} \phi(\vec{y}) \right]$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(88)}{=} e^{ij} \int_{x^2_{(0)}}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \partial_x^i \left\{ e^{i\Lambda(\vec{y})} \left[A^j(\vec{x}'), \phi(\vec{y}) \right] \right\} \quad (49) \\
&= -\frac{2\pi^2 \hbar}{e} \epsilon^{ij} \epsilon^{jk} e^{i\Lambda(\vec{y})} \phi(\vec{y}) \int_{x^2_{(0)}}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \partial_x^i \partial_j^y \left[\delta(\vec{x} - \vec{y}) \right] = \\
&= \frac{2\pi^2 \hbar}{e} \phi_s(\vec{y}) \int_{x^2_{(0)}}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \delta(x'^1 - y^1) \delta(x'^2 - y^2) = \\
&= \frac{2\pi^2 \hbar}{e} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(x^2, x^2_{(0)}; y^2) \phi_s(\vec{y})
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{D}(x^2, x^2_{(0)}; y^2) \equiv \int_{x^2_{(0)}}^{x^2} dx'^2 \delta(x'^2 - y^2)$$

$$\exists \left[A_s^1(\vec{x}), p_{2s}(\vec{y}) \right] = 0 \quad , \quad (C.3)$$

Prova:

$$\left[A_s^1(\vec{x}), p_{2s}(\vec{y}) \right] \stackrel{(88)}{=} -\frac{e}{4\pi^2} \left[A_s^1(\vec{x}), A_s^1(\vec{y}) \right] = 0$$

$$4) \left[A_s^1(\vec{x}), \Pi_s(\vec{y}) \right] = - \frac{2\pi^2 \hbar}{\epsilon} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(x^2, x_{(0)}^2; y^2) \Pi_s(\vec{y}) \quad (C.4)$$

Prova:

$$\left[A_s^1(\vec{x}), \Pi_s(\vec{y}) \right] \stackrel{(B9)}{=} \epsilon^{ij} \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \partial_x^i \left[A^j(\vec{x}', \vec{y}) e^{-i\Lambda(\vec{y})} \right]$$

$$\stackrel{(B9)}{=} \epsilon^{ij} \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \partial_x^i \left\{ \left[A^j(\vec{x}', \vec{y}) \right] e^{-i\Lambda(\vec{y})} \right\} \stackrel{(49)}{=}$$

$$= + \frac{2\pi^2 \hbar}{\epsilon} \epsilon^{ij} \epsilon^{jk} \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \partial_x^i \partial_j^y \left(\mathcal{G}(\vec{x} - \vec{y}) \right) \Pi_s(\vec{y}) e^{-i\Lambda(\vec{y})}$$

$$= - \frac{2\pi^2 \hbar}{\epsilon} \int_{x_{(0)}^2}^{x^2} dx'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx'^1 \delta(x'^1 - x^1) \delta(x'^1 - y^1) \delta(x'^2 - y^2) \Pi_s(\vec{y}) =$$

$$= - \frac{2\pi^2 \hbar}{\epsilon} \delta(x^1 - y^1) \mathcal{D}(x^2, x_{(0)}^2; y^2) \Pi_s(\vec{y})$$

$$5) \left[\phi_s(\vec{x}), \phi_s(\vec{y}) \right] = \left\{ \exp \left[\frac{i\Delta(\vec{x}, \vec{y})}{\epsilon} \right] - 1 \right\} \phi_s(\vec{y}) \phi_s(\vec{x}) \quad (C.5)$$

Prova:

$$\left[\phi_s(\vec{x}), \phi_s(\vec{y}) \right] = \phi_s(\vec{x}) \phi_s(\vec{y}) - \phi_s(\vec{y}) \phi_s(\vec{x})$$

$$\text{Mas : } \phi_s(\vec{x})\phi_s(\vec{y}) - \exp\left[\frac{i\Delta(\vec{x},\vec{y})}{\epsilon}\right] \cdot \phi_s(\vec{y})\phi_s(\vec{x}) = 0, \quad (\text{C.5.1})$$

de forma que (C.5) é obtida trivialmente.

Prova de (C.5.1) :

$$\phi_s(\vec{x})\phi_s(\vec{y}) = e^{i\Lambda(\vec{x})} \underset{\uparrow}{\phi(\vec{x})} e^{i\Lambda(\vec{x})} \phi(\vec{y})$$

$$I = e^{i\Lambda(\vec{y})} e^{-i\Lambda(\vec{y})}$$

$$\phi_s(\vec{x})\phi_s(\vec{y}) = e^{i\Lambda(\vec{x})} e^{i\Lambda(\vec{y})} \underbrace{e^{-i\Lambda(\vec{y})} \phi(\vec{x}) e^{i\Lambda(\vec{y})}}_a \phi(\vec{y})$$

$$\text{Mas } a = \exp\left\{\frac{i\pi\hbar}{\epsilon} F(\vec{y}, \vec{x})\right\} \phi(\vec{x}) \quad (\text{cálculo no final do apêndice})$$

$$\phi_s(\vec{x})\phi_s(\vec{y}) = \exp\left\{\frac{i\pi\hbar}{\epsilon} F(\vec{y}, \vec{x})\right\} e^{i\Lambda(\vec{x})} e^{i\Lambda(\vec{y})} \phi(\vec{x})\phi(\vec{y})$$

$$\phi_s(\vec{x})\phi_s(\vec{y}) = \exp\left\{\frac{i\pi\hbar}{\epsilon} F(\vec{y}, \vec{x})\right\} e^{i\Lambda(\vec{y})} e^{i\Lambda(\vec{x})} \phi(\vec{y}) \underset{\uparrow}{\phi(\vec{x})}$$

$$I = e^{-i\Lambda(\vec{x})} e^{i\Lambda(\vec{x})}$$

$$\phi_s(\vec{x})\phi_s(\vec{y}) = \exp\left\{\frac{i\pi\hbar}{\epsilon} F(\vec{y}, \vec{x})\right\} e^{i\Lambda(\vec{y})} \underbrace{e^{+i\Lambda(\vec{x})} \phi(\vec{y}) e^{-i\Lambda(\vec{x})}}_b e^{i\Lambda(\vec{x})} \phi(\vec{x})$$

Mas $\underline{b} = \exp \left\{ -\frac{i\pi\hbar}{\Theta} F(\vec{x}, \vec{y}) \right\} \phi(\vec{y})$ (cálculo no final do apêndice)

$$\phi_s(\vec{x}) \phi_s(\vec{y}) = \exp \left\{ -\frac{i\pi\hbar}{\Theta} \left[F(\vec{x}, \vec{y}) - F(\vec{y}, \vec{x}) \right] \right\} e^{i\Lambda(\vec{y})} \phi(\vec{y}) e^{i\Lambda(\vec{x})} \phi(\vec{x})$$

$$\phi_s(\vec{x}) \phi_s(\vec{y}) - \exp \left[\frac{i\Delta(\vec{x}, \vec{y})}{\Theta} \right] \phi_s(\vec{y}) \phi_s(\vec{x}) = 0,$$

onde

$$\Delta(\vec{x}, \vec{y}) \equiv -\pi\hbar \left\{ F(\vec{x}, \vec{y}) - F(\vec{y}, \vec{x}) \right\}$$

$$\begin{aligned} \Theta \left[\phi_s(\vec{x}), \pi_s(\vec{y}) \right] &= \left\{ \exp \left[-\frac{i\Delta(\vec{x}, \vec{y})}{\Theta} \right] - 1 \right\} \pi_s(\vec{y}) \phi_s(\vec{x}) + \\ &\quad + i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{C. 6})$$

Prova:

$$\left[\phi_s(\vec{x}), \pi_s(\vec{y}) \right] = \phi_s(\vec{x}) \pi_s(\vec{y}) - \pi_s(\vec{y}) \phi_s(\vec{x})$$

$$\text{Mas : } \phi_s(\vec{x}) \pi_s(\vec{y}) - \exp \left[-\frac{i\Delta(\vec{x}, \vec{y})}{\Theta} \right] \pi_s(\vec{y}) \phi_s(\vec{x}) = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{C. 6.1})$$

de forma que (C. 6) é obtida trivialmente.

Prova de C.6.1 :

$$\phi_s(\vec{x}) \Pi_s(\vec{y}) = e^{i\Lambda(\vec{x})} \phi(\vec{x}) \Pi(\vec{y}) e^{-i\Lambda(\vec{y})}$$

$$\begin{aligned} \phi_s(\vec{x}) \Pi_s(\vec{y}) &= e^{i\Lambda(\vec{x})} \Pi(\vec{y}) \phi(\vec{x}) e^{-i\Lambda(\vec{y})} + i\hbar \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ &\quad \underset{I=e^{-i\Lambda(\vec{x})} e^{i\Lambda(\vec{x})} e^{-i\Lambda(\vec{y})} e^{i\Lambda(\vec{y})}}{\uparrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_s(\vec{x}) \Pi_s(\vec{y}) &= \underbrace{e^{i\Lambda(\vec{x})} \Pi(\vec{y}) e^{-i\Lambda(\vec{x})} e^{i\Lambda(\vec{x})} e^{-i\Lambda(\vec{y})} e^{i\Lambda(\vec{y})}}_{\underline{c}} \phi(\vec{x}) e^{-i\Lambda(\vec{y})} + \\ &\quad + i\hbar \delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad \underline{d} \end{aligned}$$

$$\text{Mas } \underline{c} = \exp \left\{ \frac{i\pi\hbar}{e} F(\vec{x}, \vec{y}) \right\} \Pi(\vec{y}), \quad \underline{d} = \exp \left\{ -\frac{i\pi\hbar}{e} F(\vec{y}, \vec{x}) \right\} \phi(\vec{x})$$

(os cálculos estão no final deste apêndice)

$$\begin{aligned} \phi_s(\vec{x}) \Pi_s(\vec{y}) &= \exp \left\{ \frac{i\pi\hbar}{e} [F(\vec{x}, \vec{y}) - F(\vec{y}, \vec{x})] \right\} \Pi(\vec{y}) e^{-i\Lambda(\vec{y})} e^{i\Lambda(\vec{x})} \phi(\vec{x}) + \\ &\quad + i\hbar \delta(\vec{x}-\vec{y}) \end{aligned}$$

$$\phi_s(\vec{x}) \Pi_s(\vec{y}) - \exp \left[-\frac{i\Delta(\vec{x}, \vec{y})}{e} \right] \Pi_s(\vec{y}) \phi_s(\vec{x}) = i\hbar \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

onde

$$\Delta(\vec{x}, \vec{y}) \equiv -\pi\hbar \left\{ F(\vec{x}, \vec{y}) - F(\vec{y}, \vec{x}) \right\}$$

Para provarmos a, b, c e d utilizaremos a seguinte propriedade [23]

"Se A e B são dois operadores que não comutam, então,

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots "$$

Prova de $\underline{a} = e^{-i\Lambda(\vec{y})} \phi(\vec{x}) e^{i\Lambda(\vec{y})}$

$$\begin{cases} A \rightarrow -i\Lambda(\vec{y}) \\ B \rightarrow \phi(\vec{x}) \end{cases}$$

$$\underline{a} = e^{-i\Lambda(\vec{y})} \phi(\vec{x}) e^{i\Lambda(\vec{y})} = \phi(\vec{x}) + (-i) [\Lambda(\vec{y}), \phi(\vec{x})] + \frac{1}{2!} (-i)^2$$

$$[\Lambda(\vec{y}), [\Lambda(\vec{y}), \phi(\vec{x})]] + \frac{1}{3!} (-i)^3 [\Lambda(\vec{y}), [\Lambda(\vec{y}), [\Lambda(\vec{y}), \phi(\vec{x})]]] + \dots$$

$$\text{Mas } [\Lambda(\vec{y}), \phi(\vec{x})] = -\frac{\pi\hbar}{e} F(\vec{y}, \vec{x}) \phi(\vec{x})$$

$$\underline{a} = \phi(\vec{x}) + \left[\frac{i\pi\hbar}{e} F(\vec{y}, \vec{x}) \right] \phi(\vec{x}) + \frac{1}{2!} \left[\frac{i\pi\hbar}{e} F(\vec{y}, \vec{x}) \right]^2 \phi(\vec{x}) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left[\frac{i\pi\hbar}{e} F(\vec{y}, \vec{x}) \right]^3 \phi(\vec{x}) + \dots$$

$$\underline{a} = \left\{ 1 + \left[\frac{i\pi\hbar}{e} F(\vec{y}, \vec{x}) \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{i\pi\hbar}{e} F(\vec{y}, \vec{x}) \right]^2 + \frac{1}{3!} \left[\frac{i\pi\hbar}{e} F(\vec{y}, \vec{x}) \right]^3 + \dots \right\} \phi(\vec{x})$$

$$\underline{a} = \exp \left\{ \frac{i\pi\hbar}{e} F(\vec{y}, \vec{x}) \right\} \phi(\vec{x})$$

As provas de b, c e d são análogas.

REFERÊNCIAS

- [1] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 1144
- [2] F. Wilczek e A. Zee, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 2250
- [3] J. Leinaas e J. Myrheim, Nuovo Cimento B37 (1977) 1
- [4] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 957
- [5] R. Mackenzie e F. Wilczek, Int. J. Mod. Phys. A3 (1988) 2827
- [6] A. Foerster e H. O. Girotti, a ser publicado no Phys. Lett B
- [7] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", Mc Graw-Hill Inc., New York, 1965
- [8] Y. Wu, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 2103
- [9] G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 517
- [10] J. G. Williams, J. Math. Phys. 11 (1970) 2611
- [11] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, Ann. Phys. 140 (1982) 372
- [12] P. A. M. Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics", Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964

- [13] M. Costa, H. O. Girotti e T. J. Simões, Phys. Rev. D 32 (1985) 405
- [14] E. S. Fradkin e G. A. Vilkovisky, CERN preprint TH2332 (1977)
(não publicado)
- [15] J. Schwinger, Phys. Rev. 127 (1962) 324
- [16] J. Schwinger, Phys. Rev. 130 (1963) 406
- [17] C. R. Hagen, Phys. Rev. D 31 (1985) 2135
- [18] H. O. Girotti e H. J. Rothe, Phys. Lett. 115B (1982) 257
- [19] T. J. Simões e H. O. Girotti, Ann. of Phys. (N. Y.) 169 (1986) 1
- [20] J. M. Gelfand e G. E. Shilov, "Generalized Functions", Academy
of Sciences, U. S. S. R., vol I (1964) 35
- [21] K. Sundermeyer, "Constrained Dynamics", Heidelberg, 1982
- [22] C. Itzykson e J. B. Zuber, "Quantum Field Theory", Mc
Graw-Hill Inc., New York, 1980
- [23] C. Cohen-Tannoudji, "Quantum Mechanics", John Wiley, New
York, 1977