UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DA MATEMÁTICA

Gabriel Almeida Quevedo

Compreensão dos conceitos de Área e Perímetro: um estudo de caso

Porto Alegre

2016

Gabriel Almeida Quevedo

Compreensão dos conceitos de Área e Perímetro: um estudo de caso

Dissertação apresentada à banca examinadora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso.

Porto Alegre

2016

Gabriel Almeida Quevedo

COMPREENSÃO DOS CONCEITOS DE ÁREA E PERÍMETRO:

UM ESTUDO DE CASO

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática

Banca examinadora

Profa. Dra. Fernanda Wanderer

Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Prof. Dr. Alvino Alves Sant'Ana

AGRADECIMENTOS

A meus pais Lia Patrícia Almeida e Wilson Walter Quevedo, pelos seus esforços incansáveis em minha educação, sem vocês este trabalho não existiria.

A toda minha família que de alguma forma sempre me apoiou.

À Camila Dallazen, minha namorada, pelo apoio e leitura dos meus textos, mostrando-se companheira em todas as horas.

Ao meu orientador Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso, pelo apoio e dedicação, professor que aprendi a admirar durante a graduação, pelo seu empenho como educador, e que me conduziu durante a construção deste trabalho.

A todos os professores que passaram por minha vida, e que, portanto, contribuíram para que esse momento fosse uma realidade.

À Magaly Barbieri, coordenadora do ensino médio da Colégio Província de São Pedro, por acreditar no meu trabalho como professor.

Aos professores da Banca Examinadora.

À direção e professores da Escola Estadual L. B., que permitiram que eu fizesse toda e qualquer pesquisa no colégio.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi identificar e analisar como os estudantes compreendem os conceitos de área e perímetro. A escolha do tema se deu durante nossa experiência docente ao observarmos a dificuldade de estudantes ao resolverem problemas em geometria. Para atingir tal objetivo trabalhou-se com uma turma do nono ano do ensino fundamental, durante nove horas-aula, uma sequência de atividades. Estes alunos participantes da pesquisa pertencem a uma escola pública da rede estadual, situada próximo ao centro de Porto Alegre, Rio Grande do Sul. Nossa principal base teórica foi a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e os estágios da aprendizagem de grandezas propostos por Plaza e Gómez. Com o auxílio desta teoria elaboramos as atividades, e procuramos entender como os estudantes compreendem as ideias de área e perímetro. Nestas atividades foram propostos problemas que discutiam o tema, os estudantes eram convidados a medir, visualizar construções geométricas, aplicar os conceitos e executarem cálculos. A partir destes dados foram feitas discussões sobre o porquê dos alunos apresentarem dificuldades e/ou êxitos nos problemas. Por analisarmos as resoluções de cada aluno, podemos afirmar que nossa metodologia foi qualitativa voltada a um estudo de caso. A partir das análises destas resoluções, embasado em Plaza e Gómez, Vergnaud e em outros autores que discutiram o tema, elaboramos uma sequência didática como uma proposta que auxilie os estudantes a compreenderem área e perímetro. Verificamos que muitos dos erros cometidos pelos estudantes estavam ligados a um mau entendimento dos conceitos envolvidos nos problemas, e que a maioria, durante a resolução das atividades, tentava aplicar as definições e fórmulas mesmo em situações que não fazia sentido aplicá-las. Verificamos, também, algumas indicações de que uma reconstrução destes conceitos, através da sequência proposta, é possível.

Palavras-chave: área, perímetro, ensino-aprendizagem de Matemática, sequência de atividades, materiais manipulativos, Educação Matemática.

ABSTRACT

The aim of this paper has been to identify and analyse how the students understand the concepts of area and perimeter. The choice of this topic happened during our teaching experience while observing the difficulty of the students in solving geometry problems. To reach this aim, we have worked with a ninth year of primary school class, during nine classes, using a sequence of activities. These students, who participated in the study, belong to a state school, located near Porto Alegre downtown, Rio Grande do Sul. Our main theoretical framework was Gérard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields and the stages of quantities of learning proposed by plaza and Gómez. With the help of this theory, we elaborated the activities and tried to comprehend how the students understand the ideas of area and perimeter. In these activities, problems that discussed the topic were proposed, in which the students were invited to measure, visualise geometric constructions, apply the concepts and execute the calculations. From this data, discussions on the reason the students have difficulties and/or success with the problems happened. As we analysed the answers of each student, we can affirm that our methodology was a qualitative study with case study approach. From the analyses of these answers, based on Vergnaud, Plaza e Gómez and other authors who have discussed the topic, we elaborated a didactic sequence with a proposal that helps the students to understand area and perimeter. It was verified that many of the mistakes made by the students were connected to a poor understanding of the concepts involved in the problems, and, most of them, during the solution of the problems, tried to apply the definitions and formulas even when it didn't make any sense. It was also verified that some indicatives of a reconstruction of these concepts, through the proposed sequence, is possible.

Keywords: area, perimeter, teaching-learning of mathematics, sequence of activities, manipulative materials, mathematical education.

.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. Introdução

1.1. Motivação para o Estudo

O ensino de matemática na escola básica brasileira vem sofrendo críticas nos últimos anos e a maioria destas críticas se destina a geometria (BACKENDORF, 2010). Estudantes e egressos das escolas, ao se depararem com algumas situações no seu cotidiano, apresentam dificuldades em trabalhar com o assunto. Segundo Sena e Dorneles (2013), uma das consequências deste contexto atual está no passado do ensino de matemática. Em sua pesquisa, os autores além de se preocuparem com o aspecto histórico, também analisaram as linhas de investigação sobre geometria que estão sendo produzidas no Brasil e constataram um descaso com o tema da geometria, assim como identificaram a falta de preparo dos professores em trabalhar com esta área da matemática.

Segundo Backendorf (2010), existe uma confusão entre os conceitos de perímetro, área e volume, mesmo para os alunos que tenham estudado estes temas em algum momento da vida escolar. A autora ressalta que muitas vezes os discentes insistem nos cálculos e nas operações sem relacioná-las com situações que envolva medidas de comprimento, massa e volume. Estaríamos dando demasiada importância ao ensino dos algoritmos das operações e nos esquecendo de trabalhar com situações-problema, que levem os alunos a pensarem e solucionar de diferentes maneiras a mesma questão? Em caso afirmativo, não estaríamos supervalorizando as fórmulas na disciplina de matemática? Nessa linha de raciocínio, o objetivo é resolver as questões, seja da maneira que for, dando grande importância ao resultado final, desvalorizando o caminho percorrido pelo estudante na compreensão do problema. Nesta concepção não se usam mecanismos que auxiliem os alunos na construção dos conceitos, gerando dificuldades no entendimento dos conteúdos. Em particular, essa dificuldade enfrentada pelos alunos na escola, vem aparecendo, de forma cada vez mais evidente, no ensino de geometria, nas resoluções de problemas, mais especificamente nos conteúdos de perímetro e área.

A escolha deste tema surgiu a partir da experiência que adquiri em sala de aula. Trabalhando com estudantes do Ensino Fundamental e, atualmente, com alunos do ensino médio, percebi que muitos apresentam dificuldade em resolver problemas de matemática. Aliado a isto, me deparei com a dificuldade apresentada por eles em compreender os conceitos de área e perímetro, além de não visualizarem as construções envolvidas em problemas que tratam desses conceitos. Nas escolas em que tive contato com o Ensino Fundamental, raras foram as exceções de professores que não apresentaram esse assunto exclusivamente com livro e caderno e sem, por exemplo, incentivar os alunos a desenharem. De uma forma geral, primeiramente se apresenta a teoria, com teoremas e fórmulas, e logo em seguida segue uma lista de exercícios em que se aplica o que foi visto. Não há um estímulo a se pensar no "problema", na construção do conceito, e muito menos em tentar visualizar a construção geométrica envolvida. Penso que essa falta de construção dos conceitos faz com que os alunos não os entendam, passando, na maioria das vezes, a não gostar destes tópicos relevantes da geometria.

Lovell (1988) salienta que as crianças não podem visualizar os resultados das ações mais simples enquanto estas não forem executadas. De modo que uma criança, segundo ele, não pode imaginar uma secção de um cilindro como círculo enquanto não o tenha cortado, digamos um cilindro de massa de modelar. Se pensarmos nos conceitos que serão discutidos neste trabalho, não acreditamos que um estudante consiga calcular o perímetro, compreendendo o que de fato está fazendo, sem ter desenhado, pelo menos uma vez, a figura envolvida. É comum ver estudantes no Ensino Médio aplicando fórmulas sem saberem o porquê desta escolha. Por exemplo, mais de uma vez, presenciamos discentes adotando $2\pi r$, sendo r o raio de uma circunferência, para o cálculo da área desta figura, outras vezes se adotou πr^2 para o cálculo do comprimento. Neste caso, parece que há uma incompreensão dos conceitos. Os alunos teriam apenas apreendido uma regra? Se você propuser uma questão para que se calcule a área de determinada figura, muitos dos alunos farão a conta através de uma fórmula e responderão: *possui x metros quadrados*. Mas se você fizer alguns questionamentos do tipo: *Por que você usou esta fórmula? Havia outra maneira* *de resolver esse problema? Por que essa figura tem esta fórmula, de onde ela vem?* Os alunos, na maioria das vezes, não saberão responder.

Conversando com professores sobre essas aulas, a maioria gostaria de abordar o tema de uma forma mais aprofundada, discutindo ideias, propondo atividades que incentivem a construção dos conceitos por parte dos alunos, inclusive usufruindo de instrumentos de medidas para isso. Porém, alegam não terem sidos preparados em suas graduações para isto. Além disso, a falta de tempo e de recursos nas escolas foram dificuldades citadas.

Esse conjunto que questões me motivou a estudar o assunto e desenvolver este trabalho.

1.2. Questão norteadora da pesquisa

A partir de análise de textos de autores que discutiram o assunto, conversas com os estudantes e através dos desempenhos destes nas atividades, nosso objetivo foi entender como se dá a compreensão e construção dos conceitos de área e perímetro pelos alunos. Procurando identificar estratégias utilizadas por eles nas resoluções de problemas em geometria, a questão que guiou esse estudo foi: *Como os estudantes do nono ano do ensino fundamental compreendem os conceitos de área e perímetro?*

Outra questão, de caráter secundário mas relacionada com a anterior e que surgiu com o andamento da pesquisa, nos obrigando, portanto, a respondê-la, é a seguinte: *como auxiliá-los a compreender os conceitos de área e perímetro?*

Conversando com um professor, ele nos descreveu algo que aconteceu em sua sala de aula. Ele apresentou um problema bastante conhecido para seus alunos: *Um feirante precisa carregar até um mercado 30 melancias dentro de caixas. Sabe-se que em cada caixa cabem 4 melancias, quantas caixas serão necessárias?* Esse docente contou que a maioria dos seus alunos efetuou a divisão de 30 por 4, encontrando como resultado 7,5. Portanto, essa maioria escreveu que o feirante precisaria de 7,5 caixas. Houve somente, segundo ele, dois meninos em sua turma que tentaram representar a situação através de um desenho. Estes estudantes apresentaram como resposta que o feirante precisaria de 8 caixas. Eles desenharam 7 caixas com 4 melancias e uma caixa com duas melancias. Consideramos importante entender os motivos pelos quais um aluno acerta um problema deste tipo, mesmo sem usar a operação de divisão. E o porquê de outro estudante, que usou os conceitos da divisão, algumas regras e algoritmos, que provavelmente foram apresentados para ele através de exercícios que focam somente cálculos e repetições, não apresentar um resultado satisfatório.

Responder a questão norteadora, trabalhar com discussões como estas apresentadas acima e a possibilidade de desenvolver um produto técnico que auxilie nas dificuldades apresentadas pelos estudantes nos estudos que envolvem perímetro e área, é o que consideramos como sustentação e justificativa para a realização deste trabalho.

1.3 A Escola e a realidade encontrada

Tomada a decisão de não fazer o estágio obrigatório do mestrado na escola em que trabalho, duas expectativas foram geradas: em qual escola iríamos trabalhar? Qual a realidade que iríamos encontrar neste ambiente?

Sou professor de uma escola da rede privada do município de Porto Alegre, essa instituição se inspira na filosofia Montessoriana de ensino. Tal método, resumidamente, se baseia na educação da vontade e da atenção, em que as crianças têm liberdade para escolher seus materiais e onde querem trabalhar com eles em sala, além de proporcionar a cooperação entre as mesmas. Como nosso trabalho não se baseia no método acima apresentado, optamos em procurar um local que oferecesse uma realidade o mais diferente possível. Também consideramos o fato de que, ao aplicar as atividades em um local desconhecido, a pesquisa tenderia a sofrer menor influência por parte do pesquisador nas resoluções dos alunos e nos resultados finais. Esperava-se também que os alunos se sentissem mais a vontade para expor suas ideias e discutir com os colegas, sem o anseio de estarem sendo avaliados. Para isso, escolhemos um colégio da rede estadual, situado próximo ao centro da cidade, que representaremos apenas com duas letras, a escola L. B.

A escola escolhida é de tamanho médio, com cerca de 500 alunos. O local oferece ensino pré-escolar e fundamental, pelos turnos da manhã e tarde. Além disso, pelos turnos da noite e tarde, é oferecido, também, o EJA: Educação de Jovens e Adultos. Devido a sua localização, próximo ao centro da cidade, o público da escola é bem variado. Grande parte de seus alunos são oriundos de uma comunidade carente situada próxima ao colégio. A diretora explicou que muitos destes estudantes possuem problemas familiares, como, pais detentos, famílias grandes sem condições financeiras de se sustentarem, adolescentes grávidas, entre outros.

O colégio também possui uma parceria com a instituição Pão dos Pobres, recebendo crianças em situação de vulnerabilidade. O Pão dos Pobres recebe muitos jovens para viver em um internato, onde em um turno estudam em uma escola profissionalizante, e em outra se dirigem até a escola L B. para cursarem o ensino regular. São crianças de todas as faixas etárias que residem na instituição Pão dos Pobres e que estudam no colégio L B. No capítulo destinado a metodologia, detalharemos a descrição da escola e o contexto no qual ela se insere.

Antes de iniciar o estágio assistimos a uma aula de matemática na turma da oitava série, ou nono ano, do Ensino Fundamental, já que seria com este grupo que iríamos trabalhar. Neste dia estava sendo realizado um teste, que fazia parte da avaliação trimestral. Notamos que se tratava de uma turma bastante agitada, mesmo realizando um teste, os alunos conversavam muito entre eles. Muitas foram as tentativas da professora em fazer cessar este tipo de comportamento, mas a maioria sem sucesso. No fim da aula, alguns alunos que já haviam terminado a atividade, queriam sair da escola antes do horário de término do período. A professora tentava argumentar que não podia liberá-los, mas era respondida pelos estudantes com palavras duras. No final da aula a docente conversou conosco, ela contou que era a terceira professora de matemática desta turma no mesmo ano. Contou, também, que ela não trabalhava fazia algum tempo em sala de aula, pois era a responsável pela biblioteca da escola, e que pela falta de professores de matemática na rede estadual, e por não terem sido direcionados novos professores para o local, ela foi, nas suas próprias palavras, "*obrigada* a assumir a turma". Este foi o contexto que se apresentou para a realização da nossa prática. Ressaltamos que continuaremos essa descrição no início do capitulo 3, o qual trata da metodologia.

1.4 Estrutura do Texto

O caminho a ser percorrido na leitura desse trabalho, pela característica de propor situações problemas aos estudantes, apresentou surpresas, alguns obstáculos que serão transpostos e outros não. Algumas ideias surgiram no meio do caminho e foram implementadas, outras não puderam ser abordadas, também ocorreram aprofundamentos de questões teóricas, práticas, de sala de aula e que envolveram compreensão de conceitos de perímetro e área.

No primeiro capítulo, introdução, como o leitor pode perceber, inicia-se com a seção 1.1, no qual apresentamos a motivação para o estudo. Essa motivação se deu principalmente pela experiência docente, observando a dificuldades dos estudantes em trabalharem problemas envolvendo perímetro e área. Na seção 1.2 apresentamos a questão norteadora de nossa pesquisa, deixamos claro neste ponto do texto que nosso objetivo com este trabalho foi entender como os estudantes constroem e compreendem os conceitos envolvidos. Também se objetivou identificar as estratégias utilizadas por estes alunos nas resoluções de problemas em geometria. A seção 1.3 apresentou o contexto do público em que ocorreram as práticas de estudo. Observa-se que a coleta dos dados ocorreu em uma escola pública da rede estadual, situada no município de Porto Alegre, no estado do Rio Grande do Sul. Também descrevemos a realidade da turma envolvida. Essa turma era de nono ano do Ensino Fundamental, composta por 18 alunos.

No segundo capítulo apresentamos a Fundamentação Teórica, discutindo como se dá o processo de aprendizagem dos conteúdos de perímetro e área. Para iniciar, na seção 2.1, traçamos, com auxílio de Fiorentini (1995), Soares (2001), Valente (1999), Sena e Dorneles (2013), uma breve linha sobre o ensino de geometria em diferentes épocas no Brasil. Já na seção 2.2 nossa discussão se deteve as medidas e perímetros. Procuramos definir cada uma dessas ideias, para isto nos apoiamos, principalmente, em Plaza e Gómez (1988), Lovell (1988) e Caraça (1952). Também nesta seção há uma pesquisa do significado da palavra Perímetro, para a qual recorremos a alguns dicionários de língua Portuguesa. Para a seção 2.3 separamos a discussão de área, procuramos também, assim como na seção anterior, verificar o significado que os dicionários apresentam para a palavra, inclusive traçando um paralelo com edições antigas e mais atuais. O principal autor que nos deu a fundamentação para a discussão de área foi Del Omo (1989). Além deste, não foram poucas as vezes que fizemos referência aos discutidos na seção anterior, já que as ideia do cálculo de *área* e *medida*s se aproximam.

Outro autor que teve grande importância para nossa dissertação, por isso reservamos uma seção somente para ele, foi Gérard Vergnaud. Suas colocações estão discutidas na seção 2.4 e contribuíram para o encaminhamento durante a análise das resoluções, nas questões matemáticas dos alunos envolvidos nesta pesquisa. Em Vergnaud (2009), nos detemos principalmente nas estruturas aditivas e multiplicativas.

Outros pesquisadores percorreram caminhos semelhantes com o nosso, possuindo experiências em trabalhos com processo de aprendizagem sobre área e perímetro. Portanto, em 2.5 são comentadas as dissertações de Facco (2003), Baldini (2004), Henriques (2011) e Backendorf (2010). Para encerrar o capítulo 2, apresentamos como alguns livros didáticos estão abordando o tema.

No capítulo 3 podemos dizer que temos o desenho e desenvolvimento do estudo empírico. É a sistematização da proposta. Nele descrevemos a metodologia adotada. Iniciamos na seção 3.1 descrevendo a teoria, principalmente consolidada em Yin (2001), que da base para nossa metodologia. Na seção seguinte, 3.2, apresentamos o planejamento de cada uma as 5 aulas previstas para a sequência de atividades. Fechando o capítulo propomos em 3.3, uma discussão sobre o produto técnico resultante dessa prática.

Para o capítulo 4 reservamos a análise dos resultados coletados durante a realização da prática. Também descrevemos como ocorreram, de fato, cada uma das atividades, já que nem sempre se desenvolveram como o planejado no capítulo anterior. Procuramos no capítulo 4, também, ressaltar aspectos que consideramos positivos e negativos durante a sequência. Por fim, no capítulo 5, explanamos nossas considerações finais.

Vale ressaltar, que nos apêndices do trabalho o leitor encontrará uma sequência de atividades, na qual, aula por aula, foram apresentados objetivos e procedimentos. Consideramos que essas atividades (continuação do produto técnico) poderão auxiliar os estudantes na construção dos conceitos de área e perímetro. Também nos apêndices, há um modelo do termo de consentimento informado assinado pelos pais para que os alunos pudessem participar desta pesquisa.

2. Fundamentação Teórica

2.1. Aspectos Históricos do Ensino de Geometria no Brasil

Segundo Sena e Dorneles (2013), a partir de 1648 a matemática, no Brasil, era ensinada somente com o intuito de formar militares. Portanto, neste contexto, a geometria ensinada era a que supria as necessidades deste público. Em 1824 houve uma tentativa de incluir a geometria no ensino primário. Foi também neste ano que o ensino primário passou a ser gratuito para a população. Porém, essa inclusão não foi exitosa. Segundo Valente (1999) não haviam professores primários capacitados e habilitados para o ensino da geometria. Além disto, Valente (1999) aponta outro fator para o desinteresse do ensino de geometria: o fato de o conteúdo não ser de caráter obrigatório para ingresso no ensino secundário. Assim, até a década de 1930 a geometria ficou reservada praticamente ao ensino secundário.

A década de 30 ficou marcada para a matemática. Sena e Dorneles (2013) afirmam que esta época foi um marco para o ensino de matemática em nosso país. Pois, segundo eles, neste período foram criadas as primeiras instituições de formação para professores do ensino secundário. Com isto, o estudo da geometria passou a ser ensinado em todo ensino secundário, tendo ênfase em desenho natural e técnico, além de um aprofundamento do estudo dedutivo da geometria.

Segundo Sena e Dorneles (2013), em 1942, uma nova lei reorganizou a estrutura do ensino estabelecendo o ginásio em quatro anos e científico com três anos. Nesse contexto, a geometria é abordada com o mesmo programa da década de 30, porém, passou a ser trabalhada de forma intuitiva nos dois primeiros anos do ginasial, e dedutivamente nos dois últimos anos. No científico ela constava de maneira permanente no currículo. No final da década de 60 e durante a década de 70, surgiu e ganhou força a tendência tecnicista de ensino. Para Fiorentini (1995), sua principal proposta era preparar o indivíduo para a sociedade. Neste período a matemática foi reduzida a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos. Não era dada ênfase para as justificativas, não era importante saber "de onde vinham as regras". Na geometria, além dos "formulismos" e técnicas, segundo o autor, algo interessante que apresentavam os livros didáticos da época, foi à preocupação em dar noções de figuras geométricas e de intersecção de figuras, porém apenas de maneira intuitiva. Valente (1999) afirma que ocorreram muitas críticas, em todo o mundo, para as propostas deste movimento da matemática na época considerada moderna. A partir da década de 1970, vários pesquisadores atacaram a exagerada ênfase à abordagem dedutiva, os excessos quanto à terminologia e ao simbolismo, o demasiado destaque conferido aos conjuntos, à adequação do estudo das estruturas aos jovens estudantes do secundário, o fechamento da matemática em si própria, que a isolava dos outros conhecimentos. Segundo Soares (2001), um abandono dos conhecimentos matemáticos mais ligados ao quotidiano.

Neste contexto e mesmo período, Fiorentini (1995) afirma que começam a surgir novas ideias de ensino voltadas ao construtivismo. A matemática no construtivismo passa a ser pensada como um saber mais prático e dinâmico. Um dos lemas deste período é que será importante aprender a aprender, portanto, o erro do estudante passa ter um valor significativo, pois ajudará os educadores a entenderem como o aluno compreendeu determinado conceito. Algumas alterações curriculares da época são consideradas desastrosas. Entre elas, destaca-se a substituição da disciplina de Desenho Geométrico por Educação Artística. Segundo Sena e Dorneles (2013), desta maneira a maioria dos estudantes deixou de aprender geometria. A maioria dos professores das séries iniciais passou a trabalhar somente aritmética e noções de conjunto. De maneira geral, os conteúdos de geometria eram deixados de lado, jogados para o final do ano letivo, e trabalhados somente se houvesse tempo.

Em 1989 ocorreu a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), nestes parâmetros a geometria é pensada diferentemente para o ensino fundamental I e fundamental II. No fundamental I, segundo os PCNs, o estudo da geometria é voltado para a percepção da geometria na arte e a representação das figuras geométricas. Além disso, deve-se trabalhar com medidas de áreas e perímetros de figuras, ainda sem o uso de fórmulas. Já no fundamental II, o aluno deve ser capaz de classificar, compor e resolver situações problemas que envolvam figuras e sólidos geométricos. Deve também, utilizar os instrumentos adequados para a medição, tanto de lados quanto de ângulos, interpretar deslocamento no plano cartesiano, reconhecer as propriedades dos triângulos e quadriláteros. É somente no fundamental II que é indicado ao aluno utilizar as fórmulas para o cálculo de área e perímetro. Ainda nesta etapa, é sugerido o início do cálculo de volume em sólidos com o uso de fórmulas, e um trabalho que envolva secção de figuras para análise. Resumidamente, são estas as diretrizes que permeiam nosso ensino atual.

2.2. Medida e Perímetro

Este trabalho propôs aos alunos atividades que envolveram perímetro e área, e tanto um conceito, quanto o outro, exigem um entendimento sobre medida e grandeza na realização de seus cálculos. Por isto, iniciaremos nossa fundamentação teórica discutindo as ideias destes dois temas.

Para Plaza e Gómez (1988), calcular a medida de uma grandeza é um ato que as crianças não podem realizar de uma forma fácil e espontânea, e por isto, é quase impossível adquirir a prática de medir antes que se esteja avançado no ensino elementar. Acreditamos que esta dificuldade se deve ao fato de que o ato de medir requer experiência na prática de manipular objetos, fazer aproximações e trabalhar com classificações. Além destes fatores, também é necessário ter a compreensão da grandeza do que se quer medir. Não é plausível, por exemplo, querermos que um estudante meça a quantidade de litros de água que cabem em um balde, se ele não tiver a compreensão sobre a grandeza volume. Assim como não é plausível solicitarmos que meçam quantos centímetros de altura têm cada estudante da sala de aula, se estes não compreendem a grandeza comprimento. É por isto, que Plaza e Gómez (1988) apresentam quatro estágios que a criança deve superar para ter conhecimento e manejo de uma grandeza dada. Os estágios são:

1º Estágio: *Percepção e reflexão de uma grandeza* como uma propriedade que se apresenta em uma coleção de objetos, independentemente se há outras propriedades que podem apresentar estes objetos.

2º Estágio: *Conservação de uma grandeza*, estágio que se considera superado quando o aluno já tiver adquirido a ideia de que, embora se troque a posição, forma, tamanho, ou alguma outra propriedade, existe algo que permanece constante. Esse algo é, precisamente, aquela grandeza a qual pretendemos que a criança tenha observado e conservado.

3º Estágio: *Ordenação de uma grandeza dada*. Somente quando o aluno seja capaz de ordenar objetos levando em conta, unicamente, a grandeza considerada em questão, se poderá dizer que ele terá superado esta etapa. Fase esta necessária para ter o domínio da grandeza.

4º Estágio: nesta última etapa a criança saberá estabelecer uma relação entre a grandeza e o número, é neste momento que será capaz de medir e *etiquetar* o objeto.

O autor não fixa idades para cada um destes estágios, pois ele entende que o desenvolvimento não pode ser uniforme para pessoas diferentes. Além disso, para que o aluno ultrapasse uma etapa, dependerá do que foi conquistado na etapa anterior. Logo, as idades dependerão do indivíduo e do seu tempo em cada um dos estágios.

Observemos a definição apresentada pelo minidicionário Aurelio, *Perímetro: sm. Geom. Linha fechada que delimita uma figura plana, ou o comprimento dessa linha. 3. Limite exterior de determinada área ou região.*

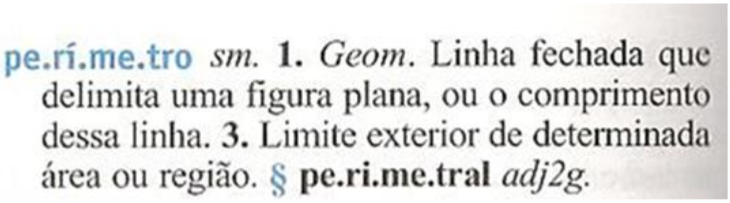

pe.rí.me.tro *sm.* **1.** *Geom.* Linha fechada que delimita uma figura plana, ou o comprimento dessa linha. **3.** Limite exterior de determinada área ou região. § **pe.ri.me.tral** *adj2g.*

Figura 1 – Definição de perímetro retirada do Mini Dicionário Aurélio. Ferreira, 2008. Pag. 624

Ao definir perímetro como a linha fechada que delimita uma área, e dando a opção do *comprimento dessa linha* para uma das definições da palavra, Aurélio (2008) nos ajuda a concluir que será necessário entender a grandeza comprimento para calcular o perímetro de uma determinada figura.

Ao observarmos a versão online do Dicionário de Língua Portuguesa Michaelis, notaremos que a palavra *linha*, presente na definição do minidicionário Aurélio, é trocada por *contorno*. Aparece, além deste termo, uma definição válida apenas para polígonos, classificada como sendo a *soma de todos os lados de um polígono.*

perímetro
pe.rí.me.tro
sm (***gr perímetron***) ***Geom*** **1** Contorno que limita uma figura plana. **2** Soma dos lados de um polígono. **3** Circunferência. **4** Campímetro. **5** Linha delimitadora de uma área ou região: ***Perímetro urbano***.

Figura 2 – Definição de perímetro.

Fonte disponível em http://michaelis.uol.com.br. Acesso em 03 de julho de 2015.

Nestas duas definições fica clara a ideia de contorno, independentemente de como seja a figura. Excluindo, assim, a concepção de que a palavra só se encaixa para polígonos. Na definição de perímetro para polígonos, de Michaelis, será necessário compreender o significado de medir comprimentos. Tendo sido classificada a definição como *soma de todos os lados de um polígono*, precisamos, primeiramente, ter que medir esses lados e, após ter encontrado estes valores, usamos a adição para o cálculo final. Nossa avaliação sobre a definição apresentada por Michaelis é de que ela deve ser melhorada. O primeiro ponto a ser considerado, é que ao classificar perímetro como a soma dos lados de um polígono pode causar aos estudantes entendimentos equivocados, como por exemplo, de que essa definição só existe para figuras com lados. Outro erro que os estudantes podem assumir como verdade, é que não precisa medir o tamanho do lado da figura. É preciso deixar claro para os discentes que se trata do tamanho do contorno da figura. Uma definição suficiente para perímetro de polígonos seria: *soma das medidas de todos os lados de polígono*.

No ano de 2010, o tema dessa dissertação já nos causava interesse, e uma das partes do nosso trabalho de conclusão de curso foi avaliar que tipo de respostas oito estudantes de, na época, sétima série apresentariam ao serem convidados a calcularem o perímetro de uma figura plana curvilínea. Segue a imagem de uma solução apresentada por uma das alunas participantes na época.

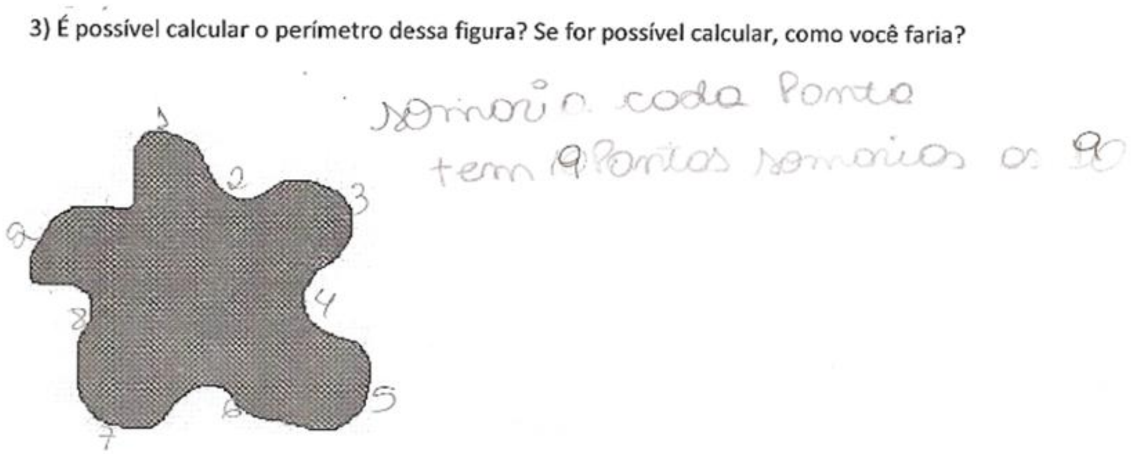


Figura 3 – Resolução da aluna B.N. Retirado de Quevedo (2010).

Essa solução foi uma das motivações para essa dissertação. Pois, a partir de respostas como essa, inclusive encontradas mais tarde durante a nossa experiência docente, começamos a nos interessar pelos motivos de os estudantes errarem tanto quando convidados a calcularem perímetro de figuras planas. Erros como este, eram apresentados também por estudantes de Ensino Médio, que possuem uma experiência maior com a Geometria. Podemos observar que provavelmente essa estudante tenha aplicado a definição para perímetros apresentada por Michaelis, procurou lados na figura, para aplicar a soma destes, mas a ideia de medida não foi considerada.

Pensando no tema da nossa discussão principal, *perímetro*, e visto que para executar o seu cálculo será necessário compreender a grandeza *comprimento,* vamos tentar adaptá-la, junto com o autor, nos quatro estágios propostos por Plaza e Gómez. Portanto, para que o aluno conheça e saiba trabalhar com a grandeza comprimento, iremos propor como condição necessária que ele supere as seguintes etapas.

1ª Etapa: O estudante deve considerar o comprimento como uma propriedade distinta das demais. Deve, também, medir o objeto ou a distância entre dois objetos, com suas próprias mãos. Fazendo isto, o aluno experimentará essa sensação diferente das que ele sentiria fazendo aproximações ou apenas executando contas no caderno.

2ª Etapa: Para Plaza e Gómez, como visto nos estágios citados anteriormente, será nesta fase que o aluno deve constatar que por mais que os objetos troquem de forma, a característica considerada não se desfaz. Por exemplo, podemos construir um quadrado e um retângulo com mesma medida de perímetro e com áreas com tamanhos de superfícies diferentes.

3ª Etapa: Segundo Plaza e Gómez, nesta fase é necessário que o aluno ordene vários objetos considerando somente uma propriedade. Por isto, ao adaptarmos para a grandeza comprimento, acreditamos que neste momento, o estudante seja capaz de fazer comentários do tipo: "*este é mais comprido que aquele",* "este *é menos comprido que aquele", "este é mais ou menos do mesmo comprimento que aquele".* Com isto o estudante terá condições de ordenar os objetos, segundo critério pedido, ou colocado por ele mesmo.

4ª Etapa: É nesta etapa que o aluno sentirá a necessidade de dizer quanto mede determinado comprimento ou distância. Isto vai gerar o desejo de atribuir um valor numérico a esta medida, como por exemplo, esse pedaço de madeira mede 2 metros. Logo, é nesta etapa que o discente terá de ter clara a ideia da unidade de medida da grandeza, no nosso caso, comprimento: metros, centímetros, milímetros e etc.

Plaza e Gómez (1988) afirmam que todos os estágios serão superados pelos estudantes conforme estes forem adquirindo uma maturidade mental e um desenvolvimento psicológico, o mesmo deve ocorrer com estas etapas. Ao fazermos a *adaptação*, o que podemos dizer sobre a grandeza comprimento é que será importante que o aluno tenha uma experiência que o coloque a frente de muitas diferentes situações, e principalmente, que seja executada por ele. Esta experiência deverá exigir dele os pré-requisitos necessários para o cumprimento de todas estas etapas e estágios. Será extremamente importante que o aluno tenha, nestas atividades, que resolver e conviver com problemas. Isso auxiliará no desenvolvimento intelectual e ajudará na compreensão dos conceitos envolvidos. Além disso, é importante que experimentem medir os objetos com suas próprias mãos. Procuramos propor, também, atividades que exigissem trabalho em grupos. Isso levou os estudantes a discutirem os conceitos, ou diferentes maneiras de medir, além de compartilharem ideias na hora de resolver uma situação com problemas. Segundo Plaza e Gómez, uma troca de ideias entre os alunos acaba por auxiliar na construção do saber, e no amadurecimento de cada estudante.

Mas afinal, o que de fato seria necessário para medir algo? Para Backendorf (2010), a medida pode ser definida como o meio conceitual pelo qual duas entidades diferentes, porém de mesma grandeza, podem ser comparadas em termos numéricos. Uma vez entendido isso, este meio proporciona uma unidade, segundo a qual pode atribuir-se um valor numérico qualquer ao objeto a ser medido. Para a pesquisadora, cada medida deve ser vista de acordo com o que se quer medir. Por exemplo, poderíamos dizer que comprimento, massa e volume são medidas por unidades diferentes, então são consideradas independentes entre si. Isso tem relação com o conceito de grandeza, já discutido anteriormente, pois uma medida tem de estar de acordo com a grandeza do que se quer medir. Mais um exemplo seria o comprimento de um objeto. Esse não pode ser medido por litros, pois o comprimento tem relação com distância. Logo, seguindo esse raciocínio, para medir teríamos que ter bem claro a noção de comparação de grandezas, depois a identificação das dimensões dos objetos, seguido pela escolha da medida.

Porém, segundo Caraça (1952), o que foi dito acima para medir (ou comparar grandezas) não basta. Para ele é necessário que haja um termo de comparação único entre todas as grandezas de mesma dimensão.

> "Para medir é necessário que se defina uma unidade única, e que se conte, então, o número de vezes que a unidade definida cabe naquilo que se queira medir". (Caraça, 1952, pág. 29-30)

Logo, para Caraça (1952), medir começa por escolher uma unidade, considerando a praticidade. Apenas mais tarde há comparação de grandezas, comparando com essa unidade o que se quer medir. Por fim, devemos alcançar a capacidade de expressar o resultado da comparação através de um número.

Segundo Vergnaud (2009), "problemas do tipo aditivo" são aqueles que a resolução é desenvolvida somente por adições e subtrações. Assim, as “estruturas aditivas” são as estruturas em que as relações são formadas exclusivamente por adições e subtrações.

É possível reunir duas medidas, uma com a outra, para obter como resultado também uma medida. Seguem dois exemplos, primeiro: *se possuo 15 canetas azuis e ganho mais sete canetas pretas, quantas canetas passo a ter no total?* Neste exemplo, pouco importa a cor das canetas, não estamos separando o problema por grupos, a unidade de medida são *canetas*. Para resolvê-lo aplicamos uma adição simples e o que nos interessa é o total de canetas, ou seja, um cardinal. Porém, se propusermos em um segundo exemplo, o seguinte problema: *no estacionamento de um shopping é preciso pintar faixas indicando onde é permitido estacionar. O local do estacionamento indicado para que qualquer cliente estacione terá cor amarela, e nele teremos disponíveis seis metros de comprimento. Já na cor vermelha, será uma vaga direcionada aos clientes idosos, com dois metros disponíveis. Quantos metros terá ao total o estacionamento?* Neste exemplo também fazemos uma adição simples para sua resolução, porém aqui, trata-se de comprimento e não propriamente um cardinal.

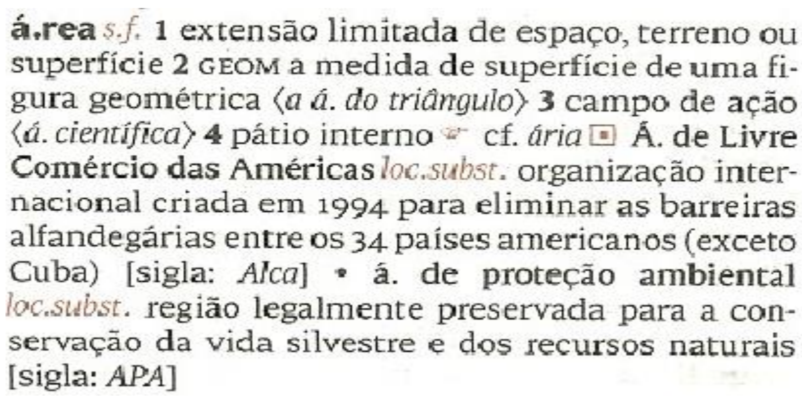
Estes exemplos nos mostram mais claramente, a assim chamada por Vergnaud, *primeira forma de relações aditivas*, nas quais dois números de mesma natureza, uma vez que ambos representam uma medida, são unidos para resultar um novo número também de mesma natureza. Nos exemplos acima, os números representaram, no primeiro caso, cardinal, e no segundo, uma medida de comprimento. Segundo o autor, são os dois principais tipos de problemas presentes nesta assim denominada por ele *primeira forma aditiva*. Para nosso estudo, estaremos focados em problemas parecidos com o segundo exemplo, por que perímetro tem relação com medir comprimentos. Nossa primeira atividade foi propor aos estudantes que explicassem o que entendiam por perímetro. Logo na sequência apresentamos um problema que sua resolução exigia que medissem a quantidade necessária de madeira para trocar os rodapés da sala de aula. Como a sala possui quatro paredes, os estudantes primeiro mediram o comprimento das paredes e depois calcularam o perímetro de uma figura plana, um retângulo. Para isto, juntaram números de mesma natureza, e obtendo, através de adições simples, um novo número também de mesma natureza. Calcular o perímetro é, portanto, um problema da primeira forma aditiva. Porém, nem sempre será assim, os estudantes podem pensar estrutura multiplicativa para calcular perímetros. Por exemplo, em um quadro de lado medindo 2 cm, um estudante, possuindo o pensamento multiplicativo, e conhecendo as propriedades e conceitos envolvidos no quadrado, poderia calcular este perímetro aplicando a multiplicação 4 x 2.

Por se tratar de uma turma do nono ano do Ensino Fundamental, achávamos que a concepção de unidade de medida já tinha sido construída durante a vida escolar dos estudantes, portanto já deveriam ter trabalhado com medidas. Por não termos certeza dessa construção, em nossa primeira atividade, os estudantes eram convidados a medir o comprimento das paredes da sala de aula, portanto teriam que saber medir. Com objetivo de verificar o desempenho dos estudantes no ato de medir, não foi colocada como auxílio na realização desta atividade nenhuma ferramenta a disposição dos alunos. Se ninguém sentisse a necessidade de uma trena ou régua, teriam que medir com o que tivessem a disposição, como por exemplo, palmo da mão, pés, capa do caderno e assim por diante. Segundo Lovell (1988), medir não é algo trivial, em geral compreender conceitos e enxergar construções também não é. Por isso, Lovell (1988) afirma que, em geometria, para compreender as construções, as crianças devem praticar, manipulando os objetos, para alcançar uma melhor compreensão. Com as medidas não será diferente, os estudantes terão que realizar o ato de medir para construírem e aprenderem a usar os conceitos de medida corretamente, estes fatores vão de encontro com as ideias que Plaza e Gómez (1988) defenderam.

2.3 Área

Para Del Omo (1989) é inconcebível existir uma educação que proponha preparar as crianças para enfrentar as necessidades cotidianas, sem que inclua nela um trabalho consistente sobre *medidas* em seu planejamento. A medida, segundo o autor, é um tópico que auxiliará os estudantes na compreensão geométrica e aritmética. Acreditamos, também, que medir ajudará a desenvolver habilidades no aluno, em resolver problemas, fazer estimações, e na hora de manipular objetos. Durante a vida, são inúmeras as vezes que pessoas sentem a necessidade de medir. Como, por exemplo, transformar unidades de comprimentos e revestir objetos. Nesta seção, nossa preocupação será em trabalhar, analisar e discutir o conceito de *área*.

Para conseguir elaborar uma proposta que envolvesse a construção do conhecimento sobre *área*, achamos importante, primeiramente, entender o significado da palavra propriamente dita. Por isto, além de estudar autores que trabalharam com grandezas e medidas de superfícies, procuramos, também, o que os dicionários trazem sobre a definição. É sabido que estes livros podem ser uma fonte de pesquisa para encontrar significados de palavras e, muitas vezes, estudantes tomam tais definições como verdades absolutas. Portanto, é importante que estes livros apresentem definições sólidas, mostrando não somente a ideia da palavra, mas também a forma correta dos conceitos. Na nossa pesquisa, daremos maior importância nas definições, apresentadas pelos autores, que se referem ao significado geométrico da palavra. Se procurarmos no dicionário Houasiss o que é *área,* encontraremos: "*Extensão limitada de espaço, terreno ou superfície. A medida de superfície de uma figura geométrica."* Veja:



á.rea *s.f.* **1** extensão limitada de espaço, terreno ou superfície **2** GEOM a medida de superfície de uma figura geométrica ⟨*a á. do triângulo*⟩ **3** campo de ação ⟨*á. científica*⟩ **4** pátio interno ~ cf. *ária* ⊡ **Á. de Livre Comércio das Américas** *loc.subst.* organização internacional criada em 1994 para eliminar as barreiras alfandegárias entre os 34 países americanos (exceto Cuba) [sigla: *Alca*] • **á. de proteção ambiental** *loc.subst.* região legalmente preservada para a conservação da vida silvestre e dos recursos naturais [sigla: *APA*]

Figura 4 – Definição de área retirada de Houasiss, Dicionário da Língua Portuguesa. 2010. Pag. 63.

Para a definição geométrica, Houasiss aborda a ideia de medida da superfície, classificando área de uma figura plana como o tamanho da superfície. Concepção parecida traz o dicionário Escolar de Língua Portuguesa da Academia Brasileira de Letras. Observe imagem abaixo:

área (á.re:a) s.f. 1. Superfície compreendida dentro de determinados limites. 2. (Geom.) Superfície de uma figura geométrica. 3. Medida dessas superfícies.

Figura 5 - Definição de área retirada de Dicionário Escolar da Língua Portuguesa, Academia Brasileira de Letras. 2008. Pag. 157

Podemos notar dois autores diferentes abordando da mesma maneira o conceito, segundo eles, área é a superfície de determinado objeto. Inclusive, ambos apresentam, através da palavra medida, a concepção de tamanho da superfície. O mesmo já trazia o dicionário Aurélio em uma de suas versões antigas, como mostra imagem abaixo:

área *sf.* **1.** A medida de uma superfície. **2.** Superfície plana, delimitada. **3.** Extensão de terreno. **4.** Esfera, domínio. **5.** *Bras.* Pátio.
areal *sm.* Terreno onde predomina a areia.

Figura 6 – Definição de área retirada do minidicionário Aurélio (1977, P. 37)

Estas definições presentes nestes dicionários estão de acordo com que Del Omo e Lovell apresentam para o conceito de área.

Para Del Omo, há uma característica presente nos objetos. Essa qualidade, geralmente é nomeada como *área* ou *superfície*. Porém, vários autores designam significados diferentes para estas palavras. Eles defendem que *superfície* seria a característica a ser estudada, e ao falarmos de *área* estaríamos nos referindo à medida desta qualidade. Nesse trabalho consideraremos a definição adotada por Del Omo. Segundo o autor, para área é preciso dar o mesmo tratamento que se dá para a grandeza *comprimento*, entendida por ele como *uma característica dos objetos que se pode medir através das medidas de comprimento. Por exemplo, centímetro, metros, quilômetros e etc*. Portanto, ao aplicarmos o mesmo raciocínio para área, poderíamos definir como: *área ou superfície é a característica dos objetos que pode ser medida através de suas unidades de medida.*

O conceito que Del Omo apresenta, está de acordo com a maneira que Lovell (1988) qualifica a palavra área. Para Lovell *área pode ser definida como* *a quantidade de superfície*. Lovell explica que ao considerar a área de um tampo de mesa, podemos espalhar determinada unidade, por exemplo, a capa de um caderno, sobre essa superfície, e assim indicamos sua extensão. Portanto, tomando a ideia de Lovell, para medir a área de qualquer coisa, primeiramente precisamos definir uma unidade de medida com tamanhos conhecidos, desde que essa unidade escolhida também seja uma superfície. Essa exigência de que a unidade seja, também, uma superfície, nos remete novamente ao conceito de grandezas. Exemplificando, podemos dizer que através da unidade litros não se pode medir a área de determinada figura, pois, na unidade, e no objeto referido, temos grandezas de natureza diferentes.

Para Piaget e Inhelder (1993), a criança da escola primária encontra muitas situações em que a quantidade de superfície de algum corpo entra em sua percepção. Ela vê tampos de mesa, assoalhos, capas de livros, chapas, moedas e paredes de tamanhos de superfície muito diferentes; de fato ela vê centenas de objetos que apresentam uma superfície. Além disso, tem a experiência de pôr uma coisa sobre a outra, e de outras ações importantes. Lentamente, ela constrói uma noção de área ou tamanho de superfície, embora, para os autores, um longo tempo se passará antes que a criança possa calcular a área de uma figura, por mais simples que essa figura possa ser. Mas sabemos que, mesmo quando atingiu uma compreensão parcial do conceito de área, ela poderá não expressar seu conhecimento com precisão, e, por exemplo, poderá dizer: “essa calçada é maior que a outra”, quando ela quiser dizer que a área é maior. Portanto, para conseguir estruturar o conceito ela terá que passar por etapas. O mesmo terá que ocorrer para que consiga medir uma superfície e associar um número a esta medida de superfície.

Do ponto de vista da matemática, cálculo de área se refere a figuras geométricas. Del Omo classifica estas figuras em *planas* e *não planas.* Dentro das planas separam-se os polígonos e as de contorno curvo. Já às não planas, podem ser desdobráveis (que poderão ser planificadas) ou não desdobráveis (que não poderão ser planificadas).

Del Omo apresenta algumas ideias de Freudenthal. São abordagens de área, as quais são consideradas necessárias para a formação do indivíduo na compreensão do conceito e de medida de superfície. Além de citá-las, vamos explicar cada uma.

a) *Repartir uniformemente.* Neste caso o autor inclue as situações em que é dada uma figura, e nela somos obrigados a reparti-la ou redistribuí-la. E isto, segundo ele, pode ser feito de três maneiras: aproveitando regularidades, estimando ou medindo. A mais usual é a terceira, ela consiste em dividir o que se quer medir em partes do mesmo tamanho, medindo-se o tamanho de cada uma das partes e contar o número dessas partes na figura.

b) Comparar e reproduzir. Aqui o autor inclue situações que tem de se comparar duas superfícies. Também é neste caso que será importante propor aos estudantes uma reprodução de uma superfície com forma diferente. Ao concluir o processo de reprodução, o estudante terá que ter comparado as superfícies, para conseguir obter uma figura diferente, mas com mesma área.

c) *Medindo.* Em muitas situações a superfície aparece ligada a um processo de medida, seja comparando ou repartindo. Para o autor este processo de medida pode ser realizado de diferentes maneiras. Vamos listar as principais e explicá-las.

1° Por preenchimento. Preenchendo a área com superfícies menores, podemos contar quantas destas superfícies couberam nesta área. Esta superfície menor pode receber o nome de unidade de medida de área. Caso a área seja irregular e não caiba mais a superfície de unidade, Del Omo explica que basta dividir a unidade e continuar o processo de superposição.

2° Dimensionando um valor superior e inferior. Podemos encontrar um valor aproximado para qualquer área. A primeira técnica é considerada também deste tipo. Podemos definir um quadrado de lado medindo 1 centímetro e contar quantas vezes este quadrado cabe na figura. A diferença desta técnica para a anterior, é que aqui aproximamos o número de vezes que cabe este quadrado; na anterior vamos sobrepondo, como se fossemos ladrilhar a superfície. Caso a figura não seja regular, e o quadrado unitário sobreponha a borda da superfície, o estudante deverá escolher a aproximação que julgar mais apropriada: ou conta os quadrados que estão sobre a borda, que ultrapassaram a superfície, ou não os considera. Caso queira uma aproximação melhor, terá que subdividir o quadrado unitário, por exemplo, em quatro quadrados cujos lados medem 0,5 centímetros e continuar o processo.

3° Por transformações, desmontando e remontado. Com este processo é que o autor orienta que se deduzam com os estudantes as fórmulas para o cálculo da área das figuras. Ressaltando que devemos sempre trabalhá-las no nível escolar. Por exemplo, para calcular a área de um triângulo retângulo podemos cortar um retângulo por uma de suas diagonais, e mostrar que a área do triângulo é a metade da figura original. Ou ainda, outro exemplo, que para calcular a área de um triângulo equilátero, podemos cortá-lo por uma de suas alturas, obtendo dois triângulos retângulos, e ao uni-los por suas hipotenusas obtemos um retângulo.

4° Por meio de relações geométricas gerais. O autor afirma que este é o procedimento mais usual para o cálculo da área. Medindo suas dimensões lineares e, por meio de fórmulas, chegar à medida da superfície. Por exemplo, para calcular o tamanho de um tapete retangular, basta medir seu comprimento e sua largura e aplicar a fórmula da área do retângulo.

Del Omo (1989) chama atenção que Freudenthal considera todas estas aproximações como didaticamente aceitáveis, porém com diferentes pesos de importância.

É preciso que uma proposta de sequência didática considere cada uma destas etapas, dando maior e menor importância, levando em consideração as faixas etárias e de compreensão que os estudantes se encontram. Estes processos nos mostram a complexidade do desenvolvimento cognitivo nos alunos para o entendimento do conceito de medida de área.

2.4 Vergnaud - Estruturas Multiplicativas e Aditivas.

A Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, estruturas aditivas e multiplicativas, nos ajuda a compreender como os estudantes constroem conhecimentos matemáticos. Segundo o próprio autor, sua importância é fundamental para o ensino de Matemática, pois permite prever formas mais eficientes de trabalhar os conteúdos. Por isso, consideramos ser relevante a relação desta teoria com a nossa prática nas atividades propostas.

Segundo Plaza e Gómez em matemática as crianças têm a necessidade de assimilar aquilo que nós professores pedimos que elas façam, portanto, defendemos que se proponham situações que façam sentido aos alunos. É preciso escolher atividades não somente pelos estudantes, mas também por nós professores, pois se vemos os alunos errarem sem entender o percurso que estão caminhando, todo nosso trabalho não faz sentido, por não conseguirmos ajudar os estudantes a superarem suas dificuldades. Vergnaud (2008) afirma que o conhecimento é uma adaptação a situações nas quais é necessário fazer algo, por isto, pensamos que se não confrontamos as crianças com situações nas quais elas precisem desenvolver conceitos, ferramentas e ideias, elas não vão aprender a buscar novos conhecimentos.

Em matemática propor atividades com objetivo de resolver problemas é fazer os estudantes pensarem, tirá-los do estágio de conforto, para que possam evoluir adquirindo conhecimentos. Essa ideia de desafiar o aluno a resolver problemas é defendida por Vergnaud (2008). Porém, o autor faz uma ressalva, de que não podemos desestabilizar demasiadamente os alunos, pois ao fazermos isso eles não aprenderão, o interesse deixará de existir. Segundo o pesquisador,

> "ensinar é gerenciar o aprendizado, saber controlar para não estabilizar e desestabilizar em excesso. Em outras palavras, o nosso desafio como professor é ampliar as dificuldades para os alunos, mas sabendo o que estamos fazendo e onde queremos chegar". (Vergnaud. 2008)[1]

São muitas as dificuldades apresentadas pelos alunos ao tentarem compreender determinado conceito. Com a experiência docente, sabemos que análise da melhor estratégia, discussão das ideias, não são fatores fáceis para os estudantes, principalmente se houver um grande número de informações a serem absorvidas. Um dos objetivos de nossa pesquisa foi observar como os estudantes compreendem as ideias de área e perímetro, propondo uma

---

[1] Trecho retirado de entrevista intitulada, Todos perdem quando a pesquisa não é colocada em prática. Gérard Vergnaud (2008). Disponível na web em 10 de novembro de 2015 no endereço: http://revistaescola.abril.com.br.

construção/reconstrução dos conceitos, não se baseando em fórmulas e regras para os cálculos, recorrendo a ideias presentes nas estruturas aditivas e multiplicativas.

Segundo Vergnaud (2009), campo conceitual é um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas nitidamente relacionados. Portanto, a criança, em varias situações da escola, ou fora dela, que utiliza determinado conceito, vai passando a ter um domínio desse conceito, e isso vai se dando mais profundamente quando essa ideia se relaciona com uma situação e outra. A aprendizagem só se tornará concreta quando um conhecimento for se relacionando com outro, criando novos conhecimentos. Assim, Vergnaud (2009) afirma que "o aluno vai aprendendo com a utilização de novos procedimentos de raciocínio, sem ficar repetindo fórmulas e modelos". Com essa relação que a criança faz com os conhecimentos, o autor, ao pensar sobre os processos de ensino e de aprendizagem, atribui para elas, e suas atividades sobre a realidade, um papel decisivo no desenvolvimento cognitivo. Porém, Vergnaud não desconsidera o papel do professor, pelo contrário, para o pesquisador, o valor do professor está justamente em sua capacidade de estimular e utilizar essa atividade da criança. O professor é tido como pesquisador, que busca identificar os conhecimentos implícitos na ação das crianças para que enxerguem com maior facilidade. Este tipo de conhecimento implícito Vergnaud nomeia de teorema-em-ação ou conceito-em-ação.

Para Vergnaud (2009) conceito é a junção de três conjuntos: o primeiro é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito, já o segundo é o conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade, e por último, o conjunto das representações linguísticas e simbólicas que permitem representar os conceitos e suas relações, e consequentemente, as situações e os esquemas que elas evocam. Os três conjuntos estão interligados. Concluímos, portanto, que um conceito será compreendido quando esses três conjuntos se relacionarem. Uma relação entre os conjuntos, aliado a uma relação entre os conceitos, proporcionará ao estudante um desenvolvimento da capacidade de confrontar situações, com a finalidade de encontrar a solução através do conceito que mais se adequar.

ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Para Backendorf (2010), em atividades de ensino voltadas para a aprendizagem com medidas, percebe-se com frequência a relação existente entre essas e as estruturas multiplicativas, como são estudadas na teoria dos Campos Conceituais. Em muitas situações da nossa vida docente percebemos o mesmo, as estruturas multiplicativas mostraram-se úteis para a solução de problemas sobre medidas. Por isso, decidimos apresentar as estruturas multiplicativas, com objetivo de usá-las nas análises das estratégias e no aprendizado dos alunos diante dos exercícios de nossa sequência didática.

Dentro das estruturas multiplicativas, estamos preocupados em entender as classes de problemas desse tipo. Para Vergnaud (2009), numerosas classes de problemas podem ser identificadas segundo a forma de relação multiplicativa, segundo o caráter discreto e contínuo das quantidades em jogo, e as propriedades dos números utilizados. Para o autor as principais classes de problemas são: isomorfismo de medidas, caso de um único espaço de medidas e produto de medidas.

ISOMORFISMO DE MEDIDAS

Segundo Vergnaud (2009) a primeira grande forma de relação multiplicativa é uma relação quaternária entre quatro quantidades: duas quantidades são medidas de certo tipo e as outras medidas, de outro tipo. Seguem alguns exemplos e esquemas (subdivisões dos principais problemas) discutidos pelo autor, que nos ajuda entender essa forma de relação multiplicativa, voltado ao nosso tema.

<u>Exemplo 1:</u>
“Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?”

<u>Exemplo 2:</u>
“Minha mãe quer comprar tecido a R$ 24,80 o metro para fazer um vestido e um casaco. Ela necessita de 3,50 metros de tecido. Quanto ela deverá gastar?”

Exemplo 3:
"Paguei R$ 12,00 por 3 garrafas de vinho. Quanto custa cada garrafa?"

Exemplo 4:
"Pedro tem R$ 12,00 e quer comprar pacotes de bala a R$ 4,00 o pacote. Quantos pacotes ele pode comprar?"

Estes problemas são de dificuldades diferentes. Mas Vergnaud afirma que todos eles podem ser representados por esquemas parecidos, e que não trazem dificuldades para as crianças, nos mostrando bem a relação existente entre as quatro quantidades. Nesses esquemas, x representa a quantidade buscada.

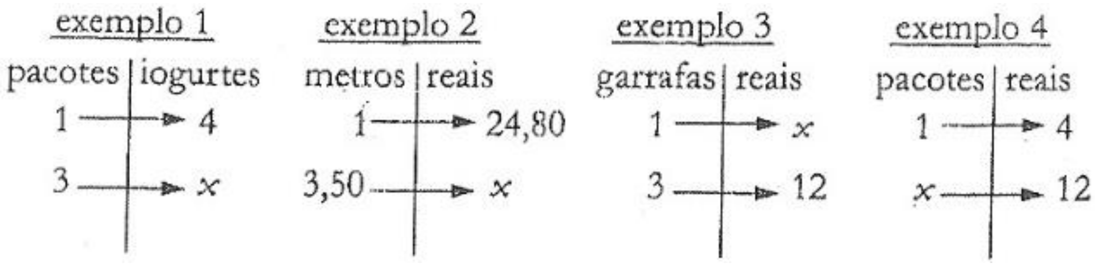


Figura 7 - Representação dos exemplos por esquemas, retirado de Vergnaud (2009). p. 240.

Esses esquemas trabalhados pelo autor em todos os casos, nada mais é do que um quadro de correspondência entre duas espécies de quantidades. Usando o exemplo 1, podemos traduzir em um quadro, mais detalhado, essa correspondência de grandezas.

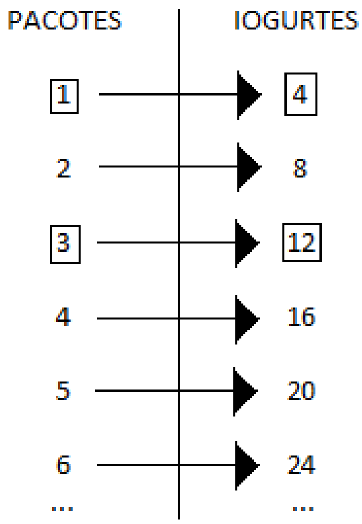


Figura 8: Esquema completo do exemplo 1**.** Fonte o autor.

Neste esquema de correspondência traduz o isomorfismo de dois tipos de medidas (número de pacotes e número de iogurtes).

Vergnaud salienta que as dificuldades dos exemplos 1 e 2, e dos exemplos 3 e 4, não são as mesmas. Procurando entender melhor, podemos dizer que nos exemplos 1 e 2 evidencia-se a distinção entre números inteiros e números decimais, entre grandezas discretas e grandezas contínuas. Autores afirmam que a introdução da multiplicação como adição reiterada ocorre com maior facilidade se feita através dos números inteiros. Entre o exemplo 3 e o exemplo 4, a distinção é de outra natureza. Observamos que no exemplo 3 é preciso encontrar o valor unitário, conhecendo-se o elo de correspondência entre duas grandezas de natureza diferentes. No exemplo 4, o valor unitário é dado e é preciso encontrar o número de unidades da primeira espécie correspondente a uma grandeza dada de outra espécie.

Analisaremos detalhadamente, o exemplo 1, considerado por Vergnaud um exemplo de problema que envolve multiplicação simples, o conjunto de relações nele presentes.

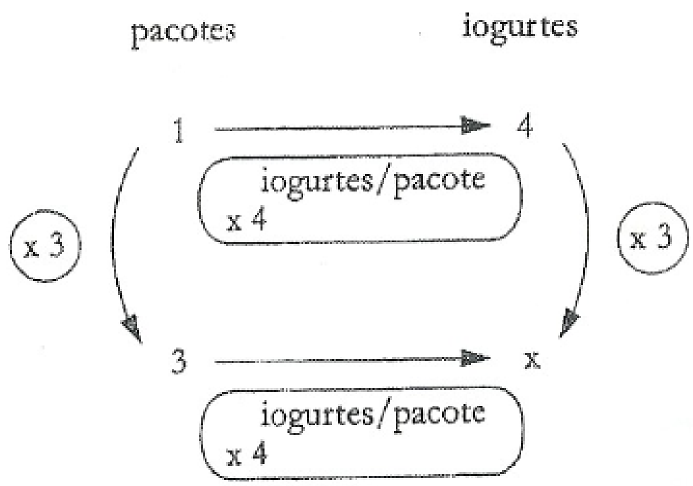


Figura 9 – Esquema exemplificando as relações. Retirado de Vergnaud (2009). Pag. 243.

Observemos que 1 e 3 são números que representam as quantidades de pacotes. Estes são as medidas. Já o 4 e x são números que representam as quantidades de iogurtes. Também são medidas, mas de outra natureza. Os operadores verticais x3 são operadores sem dimensão, ou escalares assim chamados por Vergnaud, que permitem passar de uma linha para outra na mesma categoria de medidas. Os operadores horizontais x4 representam funções e expressam a passagem de uma categoria de medidas à outra.

Vergnaud (2009) afirma que neste caso existem duas maneiras de encontrar x. A primeira consiste em aplicar o operador sem dimensão x3 na quantidade 4 iogurtes. A segunda, aplicando a função.

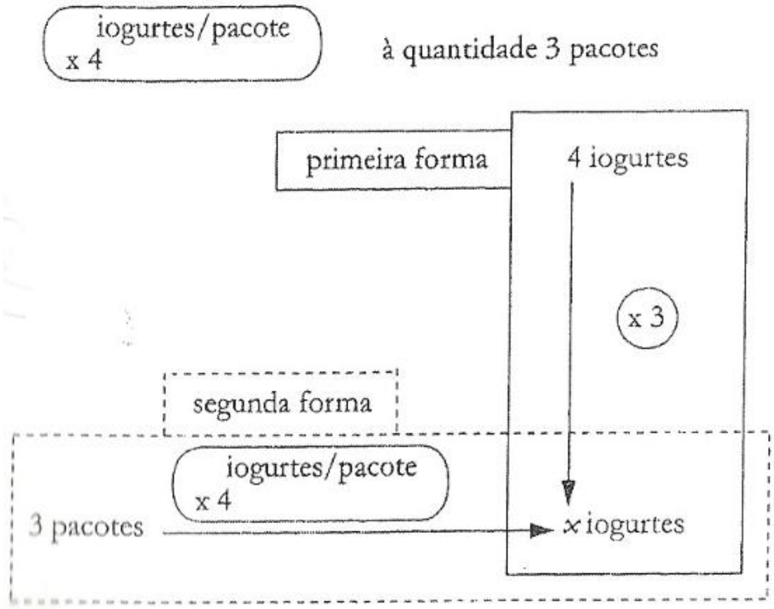


Figura 10 - Esquema retirado de relações. Vergnaud (2009). Pag. 244.

Essas duas formas são equivalentes, mas também distintas, e o exemplo dos dois tipos de divisão mostra que não se deve confundi-las. De qualquer forma, Vergnaud (2009) afirma que somente essa análise permite compreender que, efetuando-se 4 x 3 (ou 3 x 4), não se multiplica iogurtes por pacotes ou pacotes por iogurtes.

Dentro das classes de problemas do tipo multiplicativo, como falamos anteriormente, o isomorfismo de medidas coloca em jogo quatro quantidades, mas nos problemas mais simples, sabe-se que uma dessas quantidades é igual a um. Então, para Vergnaud (2009), há três grandes classes de problemas conforme seja a incógnita, a unidade ou outras das três quantidades. Com mesma ideia dos esquemas acima, nos quais x representa a incógnita, está representado genericamente essas três principais classes.

Multiplicação

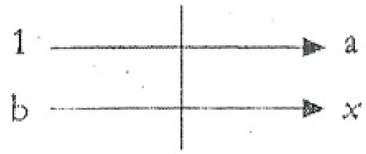


Figura 11 – Esquema da multiplicação. Retirado de Vergnaud (2009). Pag. 261.

Divisão: busca do valor unitário

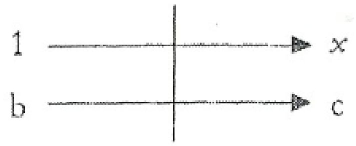


Figura 12 – Esquema do primeiro tipo de divisão. Retirado de Vergnaud (2009). Pag. 261.

Divisão: busca da quantidade de unidades

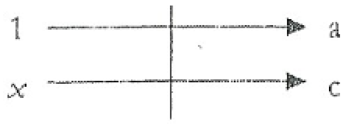


Figura 13 – Esquema do segundo tipo de divisão. Retirado de Vergnaud (2009). Pag. 261.

O autor afirma que algumas dessas classes são ainda difíceis para a maioria das crianças ao final da escola, principalmente as que possuem subclasses que envolvem números decimais, valor unitário inferior a 1 e números de unidades inferior a 1.

PRODUTO DE MEDIDAS

Para Vergnaud (2009), essa forma de relação consiste em uma relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras, ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional. Seguem alguns exemplos que nos ajudaram a entender melhor esse tipo de produto, porém, citamos apenas os que auxiliaram com o tema de nosso trabalho.

Exemplo 1
“3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis?”

Exemplo 2
“Quer-se fabricar bandeirolas com tecido de duas cores diferentes (vermelho e azul). Fabricando-se bandeirolas de três faixas, quantas bandeirolas diferentes podem ser fabricadas?”

Exemplo 3
“Uma sala retangular tem 4 m de comprimento e 3 m de largura. Qual é sua área?”

Vergnaud (2009) fala que o esquema mais natural para representar essa forma de relação é aquele da tabela cartesiana, porque é a noção do produto cartesiano de conjuntos que explica a estrutura do produto de medidas. Analisando o exemplo 1, nomearemos R = {a, b, c} o conjunto dos rapazes e M = {f, g, h, i} o conjunto das moças. O conjunto C dos casais possíveis é o produto cartesiano do conjunto de rapazes pelo conjunto de moças, C = RxM, assim como Vergnaud representou na tabela cartesiana abaixo:

		M			
		f	g	h	i
R	a	(a, f)	(a, g)	(a, h)	(a, i)
	b	(b, f)	(b, g)	(b, h)	(b, i)
	c	(c, f)	(c, g)	(c, h)	(c, i)

Figura 14 – Tabela produto cartesiano. Retirado de Vergnaud (2009), p. 254.

Um casal consiste na associação de um elemento do primeiro conjunto com um elemento do segundo. O número de casais é igual ao produto do número de rapazes pelo número de moças. Em outras palavras Vergnaud fala que se pensamos em números, teremos *x* = *3*x*4*, e se pensamos nas dimensões, teremos *casais* = *rapazes x moças*. Se analisarmos o exemplo 3, que é o mais próximo do assunto que queremos discutir, área de superfície, notamos que se decompomos o retângulo em quadrados, com linhas e colunas de um metro de comprimento, mostra-se que a medida da superfície é o produto da medida da grande dimensão (comprimento) pela medida da pequena dimensão (largura). Isso ocorre tanto no plano das dimensões como no plano numérico.

Figura 15 – Retângulo representando multiplicação de medidas. Fonte o autor.

$$x \;\; metros \;\; quadrados = 3 \;\; metros \;\; \times \;\; 4 \;\; metros$$

Se pensarmos nos números teremos $x = 3 \times 4$, já se voltarmos a atenção para as dimensões: $metros \;\; quadrados = metros \;\; \times \;\; metros$. Para Vergnaud (2009), a noção de metro quadrado tem dois sentidos complementares, aquele do quadrado de um metro de lado, e aquele do produto de duas medidas de comprimento. Apenas o segundo sentido permite estender às formas, que não se deixam decompor em quadrados.

$$comprimento \times comprimento = comprimento \;\; ao \;\; quadrado$$

Segundo Vergnaud, é essa relação que dá sentindo à escrita simbólica das unidades de área, m^2, cm^2, km^2, etc.

Voltando o pensamento para os *problemas* do tipo multiplicativo, essa segunda grande forma de relação multiplicativa, *produto de medidas*, permite distinguir duas classes de problemas:

<u>Multiplicação:</u> encontrar a medida-produto, conhecendo-se as medidas elementares.

Divisão: encontrar as medidas elementares, conhecendo-se a outra, e a medida produto.

Portanto, o estudo das relações multiplicativas mostra que há diversos tipos de multiplicações e de divisões, ou melhor, várias classes de problemas cuja solução pede uma multiplicação ou uma divisão. Defendemos a ideia do pesquisador que

> "A distinção dessas diferentes classes e suas análises deve ser cuidadosamente abordada a fim de ajudar a criança a reconhecer a estrutura dos problemas e a encontrar o procedimento que levará a sua solução. Não se deve subestimar a dificuldade de certas noções como as de relação, de proporção, de fração que exigem precauções didáticas importantes bem depois do ensino elementar. Apesar disso, essas noções devem ser tratadas desde o ensino elementar". (Vergnaud, 2009 pág 265)

CASO DE UM ÚNICO ESPAÇO DE MEDIDAS

Para Vergnaud (2009) a análise em termos de operadores escalares é compreendida mais facialmente pelas crianças, mas ela implica uma distinção entre medida e escalar que pede um aprofundamento. Observemos o seguinte exemplo. "São necessários 2 metros de tecido para fazer uma saia. São necessários três vezes mais para fazer um conjunto. São necessários então 6 metros para fazer um conjunto."

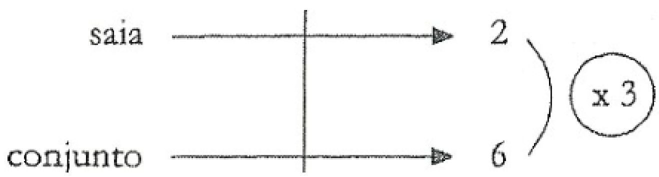


Figura 16 – Esquema representando caso de um único espaço de medidas. Retirado de Vergnaud (2009). p. 262.

Este exemplo nos mostra uma forma de relação multiplicativa e que coloca uma correspondência sem ser um isomorfismo de medidas. Pois, para

Vergnaud, neste exemplo há somente uma categoria de medidas, os metros de tecido, e a correspondência é estabelecida não entre quatro quantidades, mas entre duas quantidades, de um lado, e dois objetos saia e conjunto, de outro. O número 2 representa uma medida em metro assim como o número 6, enquanto o número 3 representa o que Vergnaud chama de operador-escalar, indicado pela palavra “vezes”.

O exemplo anterior nos ajuda discutir as três classes de problemas demostradas pelo autor, uma multiplicação e dois tipos de divisão: busca de uma medida e busca de um escalar.

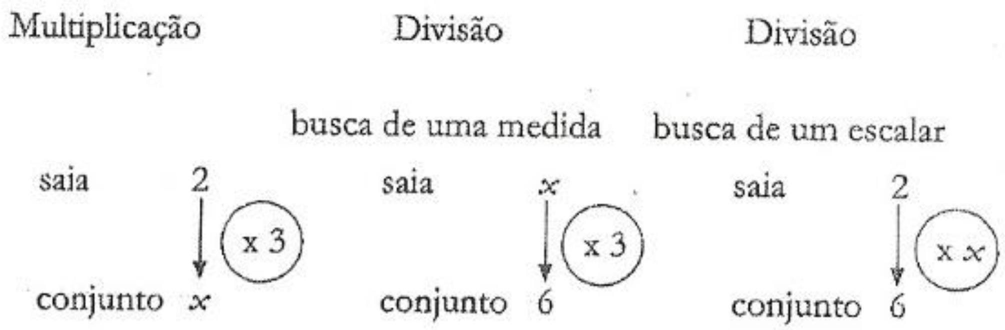


Figura 17 – Esquema representando três classes de problemas. Retirado de Vergnaud (2009). Pag. 263.

Vergnaud (2009) afirma que as formas verbais das perguntas “quanto de tecido” e “quantas vezes mais” marca a diferença entre a noção de medida e a de escalar. Para ele essas observações seriam talvez inúteis se, nas soluções de problemas, as crianças fossem frequentemente levadas a descobrir e a explicar os operadores e não apenas as medidas.

Sabemos da importância do trabalho do professor, isto é um fato. Porém, um dos aspectos mais relevantes na teoria de Vergnaud, sendo decisivo para que a escolhêssemos para auxiliar na fundamentação de nossa pesquisa, foi o valor que ele atribui às características específicas do conceito a ser construído pela criança, tanto em seu processo de construção, como em seu desenvolvimento cognitivo. É nesse sentindo que levamos nossa pesquisa, propondo problemas em que os estudantes são convidados a pensarem no caminho a ser seguido, usando para isso seu conhecimento matemático e construindo/reconstruindo conceitos, para chegarem à melhor solução. Pois interpretando as ideias desta teoria, concluímos que é através destas situações, que um conceito passa a ter sentido para o aluno.

2.5 Trabalhos Correlatos

O Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul foi criado em 2004. Neste programa a principal atividade é o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, mantido desde 2005. Segundo os fundadores do curso, o mestrado é voltado para a melhoria do ensino, pela ação direta em sala de aula dos mestrandos e dos egressos, pela investigação sobre o ensino e a aprendizagem e pela proposição de alternativas[2].

A linha de pesquisa do nosso trabalho, dentro do Programa, é o *Ensino de tópicos específicos de Matemática e abordagens alternativas.* Os Projetos desta linha tratam das questões de ensino e de aprendizagem de Matemática com o principal objetivo de ampliar e consolidar o conhecimento matemático do professor, à medida que ele participa da elaboração e experimentação de propostas de ensino ou de recursos didáticos que priorizam a construção dos conceitos, a indagação e o questionamento, além da busca de relações entre conteúdos que em geral não são conectados.

Atualmente existem programas de Pós-Graduação em Ensino de Matemática em muitas outras universidades, como, por exemplo, na UFRJ, UEL, PUCSP, UFJF, USP, UFF, UFRN, entre outras. Para nossa dissertação pesquisamos bancos de trabalhos e artigos de alguns destes programas. Os quatro que seguem são os que consideramos mais próximos ao nosso tema e com ideias relacionadas com as nossas, sendo que muitas passagens nos inspiraram na nossa construção. Segue quadro com o título, autor, resumo e principal fundamentação teórica de cada um destes trabalhos.

[2] Fonte: http://www.mat.ufrgs.br/~ppgem/. Acesso em: 12 outubro de 2015.

Quadro 1. Síntese de trabalhos envolvendo ensino de área ou perímetro.

Título/ Autor	Resumo	Fundamentação Teórica	Instituição
Conceito de Área: uma proposta de ensino aprendizagem Sonia Regina Facco	O objetivo deste trabalho foi o estudo dos fenômenos que interferem no ensino-aprendizagem do conceito de área no Ensino Fundamental. Além disso, apresentou uma proposta de ensino do conceito de área e uma reflexão sobre a aprendizagem desse conteúdo por meio de uma sequência didática envolvendo a composição e decomposição de figuras planas. A pesquisa envolveu professores e alunos de quinta a oitava série.	Dialética ferramenta-objeto Régine Douady Teoria de registros de representação simiótica Raymond Duval	PUC-SP
Um estudo sobre a produção de significados de estudantes do Ensino Fundamental para Área e Perímetro Marcílio Dias Henriques	O autor apresentou uma investigação que teve como objetivo levantar possíveis dificuldades de aprendizagem, por parte de alunos do 9° ano do ensino fundamental, das noções de área e perímetro de figuras geométricas planas. Para atender a esta finalidade, o autor utilizou uma abordagem qualitativa de pesquisa. Também elaborou e aplicou um conjunto de tarefas que possibilitaram identificar essa produção de significados.	Modelo dos Campos Semânticos Romulo Campos Lins	UFJF
Construção do Conceito de Área e Perímetro: uma sequência didática com auxílio de software de Geometria Dinâmica Loreni Aparecida Ferreira Baldini	O estudo propôs uma engenharia didática, em ambiente de geometria dinâmica, com o objetivo de verificar se o software Cabri-Géomètre II contribui para a construção de conceitos de geometria. O autor apresentou um panorama sobre o ensino de Geometria nos últimos anos e alguns aspectos da informática relacionados ao ensino. Foram, também, aplicadas atividades, que compõem uma sequência didática, em alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Apucarana no Paraná. Somente o grupo que obteve um baixo desempenho no pré-teste participou da pesquisa.	Teoria das Situações Didáticas Guy Brousseau	UEL
Uma sequência didática de medidas de comprimento e superfície no 5°ano do Ensino Fundamental: um estudo de caso Viviane Raquel Backendorf	A autora recorreu a estudos que tratam do ato de medir, da construção de conceitos e do desenvolvimento cognitivo da criança para compreender, analisar as estratégias e métodos utilizados pelos alunos envolvidos na pesquisa ao resolverem determinadas situações propostas em uma sequência didática.	Teoria dos Campos Conceituais Gérard Vergnaud	UFRGS

Fonte: autor dessa dissertação

Na sequência apresentaremos uma síntese de cada um destes trabalhos, com análise e discussão dos pontos mais próximos com o tema da nossa dissertação.

2.5.1 Análise e discussões do trabalho de Facco (2003)

A pesquisa de Facco (2003) teve por objetivo apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem, através de uma sequência de atividades voltada ao conceito de área enquanto grandeza, a fim de facilitar ao professor o ensino desse conteúdo ao aluno. Para isto, a pesquisadora teve de observar o que estudantes entendiam sobre área através de uma sequência de atividades que, também, propôs auxiliar na construção desta ideia. Outro objetivo de seu trabalho foi entender a confusão que os estudantes fazem entre as ideias de área e perímetro. Uma das diferenças do trabalho de Facco (2003) para o nosso, é que a pesquisadora da PUC-SP abordou suas atividades com uma turma da, na época assim nomeada, quinta-série do Ensino Fundamental, enquanto a nossa pesquisa foi feita com um público mais velho, nono ano do Ensino Fundamental. Portanto, o público da pesquisa do estado de São Paulo estava tendo os primeiros contatos com área. Isto fez com que o objetivo da proposta didática fosse o de auxiliar nesta primeira construção do conceito, tornando um suporte para os docentes. A nossa pesquisa teve por objetivo principal observar como os alunos entendem o conceito de área. Porém, por ter envolvido um público mais velho, que, portanto, o conceito já havia sido apresentado aos estudantes, também propomos auxiliar através de uma sequência de atividades na reconstrução destas ideias. Entender o processo de aprendizagem proposto por Facco nos ajudou a compreender como os estudantes constroem os conceitos em geometria, principalmente o de área, servindo de base para nossas atividades.

A sequência de Facco (2003) foi composta de sete atividades, que tinham por objetivo:

a) Diferenciar contorno e superfície;

b) Observar por meio de sobreposição, recorte-colagem a quantidade de papel em cada uma delas;
c) Identificar formas das figuras planas;
d) Explicitar o processo decomposição e composição da forma de figuras utilizando malhas;
e) Utilizar unidades de medidas variadas para determinar a área de um objeto dado;
f) Determinar o perímetro de um polígono;
g) Diferenciar o perímetro e a medida da área das figuras por meio da composição e decomposição de figuras planas;
h) Introduzir o cálculo da medida de área por meio de aproximação de medida de área;
i) Identificar a área como grandeza utilizando traços que permitam a decomposição e composição de figuras planas.

A sequência foi aplicada pelo próprio docente da turma, que não era o autor da pesquisa.

Uma das propostas da autora inspirou consideravelmente nossa pesquisa, a discussão dos conceitos de área e perímetro em problemas que continham figuras curvilíneas. Segundo a pesquisadora, a maioria dos discentes afirmou nunca ter trabalhado estes conceitos em figuras deste tipo. Por isto trabalharam com entusiasmo nestas atividades, visto que se sentiram desafiados em resolver o problema de calcular, por exemplo, a área de uma figura não poligonal. Cerca de 90% dos estudantes participantes, apresentaram a decomposição das figuras, indicando por setas ou preenchimentos as *compensações* para chegarem à solução do cálculo da área. Apenas 22,5% contaram o número de quadradinhos que compunham a figura, levando em consideração as subdivisões.

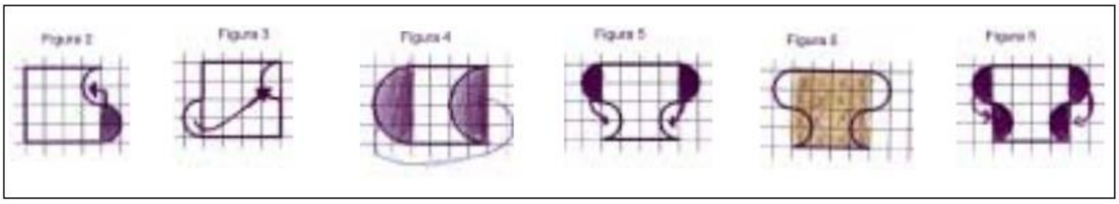


Figura 18 – Resolução por preenchimento apresentada por um aluno na pesquisa de Facco (2003).

Facco (2003) concluiu que a ideia de área em figuras curvilíneas, após a sequência de atividades, foi compreendida pelos alunos. Visto que, seja aplicando subdivisões, ou fazendo preenchimentos, quase a totalidade do grupo apresentou aproximações aceitáveis para as soluções das figuras, levando em consideração uma superfície como unidade de medida.

Outro fator que aproxima esta pesquisa com a nossa, é que em ambas propomos que se consolide a ideia de superfície para área. Para calcular a área de determinada figura, os dois trabalhos afirmam que é necessário construir a unidade de medida, e a partir desta, fazer uma aproximação por ladrilhamento do resultado. O objetivo é mostrar aos estudantes que sempre será possível calcular o tamanho da área de uma figura, mesmo que este resultado seja aproximado. Os autores afirmam que somente depois de consolidadas as ideias anteriores é que os estudantes devem passar para as generalizações.

2.5.2 Síntese, Análise e Discussões sobre o trabalho de Henriques (2011)

O trabalho de Henriques (2011) é uma investigação que teve como objetivo levantar possíveis dificuldades de aprendizagem das noções de área e perímetro em figuras geométricas planas. Para atender a esta finalidade, o autor elaborou um conjunto de tarefas que possibilitou identificar a produção de significados de estudantes do Ensino Fundamental para perímetro e área.

Henriques (2011) sugere que o ensino de medidas de área de figuras planas não deva começar com a utilização de réguas. Citando Nunes, Light e Mason (1993), ele explica que estes autores mostraram em sua pesquisa algumas crianças, que durante a coleta dos dados, quando utilizaram réguas, não conseguiram resolver problemas de área. Porém, quando lhe ofereceram oportunidades de cobrir superfícies com unidades quadradas, foram capazes de criar soluções multiplicativas, passando mais tarde a usufruir destes instrumentos para o cálculo da superfície. Um dos exemplos apresentados pelos estudantes foi através das medidas lineares, percebeu-se, neste caso, o uso da estrutura multiplicativa. Este fato defendido por estes autores, assim como foi discutido por Facco (2003), contribuiu como importante base para nossa hipótese, de que o ensino sobre medida deve iniciar sem o uso de instrumentos de medida de comprimento. No caso da área, acreditamos que ao definir uma unidade, e propor que os estudantes contem quantas vezes esta *cabe* dentro da figura a ser medida, contribuirá para a compreensão do estudante de que calcular a área de um objeto é calcular o tamanho da superfície desta figura.

Henriques (2011) possui o mesmo pensamento. O autor defende que para o desenvolvimento dos processos de aprendizagem de áreas, o professor não deve focar os procedimentos de cálculo, mas sim, os significados que tais processos trazem para os alunos. Para ele, é um exagero o argumento de que as crianças devem aprender antes a conservar comprimentos para que possam produzir sentido para os sistemas de medições, como as réguas ou outras ferramentas. O autor afirma que a ideia de área, unidades de medidas bidimensionais, deve ser constituída através de duas medidas lineares, porém considera isso algo não trivial de se fazer. Por isto, defende que as primeiras experiências discentes com área também deveriam incluir a partição de uma região com unidades bidimensionais escolhidas e, nesse processo, discutir questões como os espaços que restaram, a sobreposição de unidades e a precisão de medidas. Segundo ele, as discussões destas ideias podem orientar os alunos para fazerem mentalmente a partição de uma região em sub-regiões enumeráveis.

Sobre as ferramentas de medida, o autor defende a perspectiva Vygotskiana, na qual as réguas, por exemplo, são vistas como instrumentos culturais, dos quais as crianças podem se apropriar. Ou seja, os alunos podem usar as réguas, apropriarem-se delas e assim construírem novas ferramentas mentais.

Nestas perspectivas apresentadas anteriormente, o pesquisador trabalhou sua sequência de atividades com alunos do 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública federal e de uma escola publica estadual. O estudo de campo se deu com apenas dois sujeitos, um de cada escola, mesmo assim, podemos observar após leitura do trabalho de Henriques, que os dados apresentaram uma riqueza de informações. Isso ocorreu através das discussões travadas, das dúvidas e dificuldades, e na diversidade da produção dos significados. Os exercícios trabalharam com os conceitos de área e perímetro. Todas as atividades aproximaram-se com as do nosso trabalho, já que os dois pretendem compreender o processo de aprendizagem de área e perímetro. Foram propostos nas duas pesquisas situações-problema, onde os alunos conseguiam discutir e apresentar suas soluções. Consideramos que no trabalho de Henriques, por envolver somente dois sujeitos no publico pesquisado, a coleta de dados foi mais detalhada que no nosso. Por outro lado, com apenas dois alunos, um de cada escola, de instituições bem específicas, as conclusões ficam mais limitadas. A nossa pesquisa contou com 18 alunos, o que fez com que a coleta dos dados não fosse tão detalhada, contudo, com este número conseguimos uma diversidade maior nas soluções.

Na primeira atividade, Henriques objetivava obter dois modos de apresentar uma figura para gerar possíveis dualidades, ou para permitir enunciações dos alunos que exibiram diferentes modos de operar com área e com perímetro.

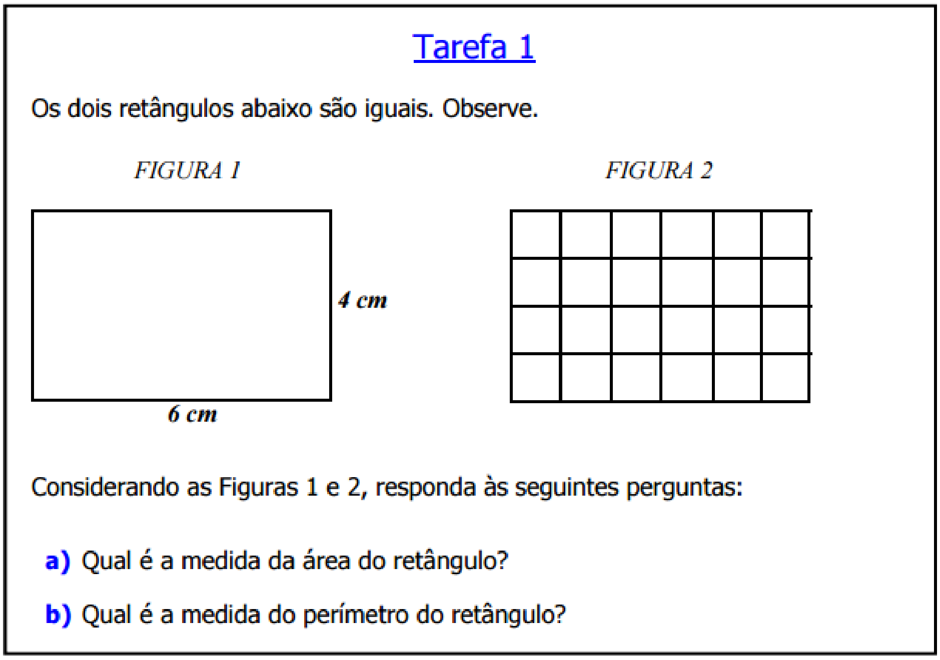
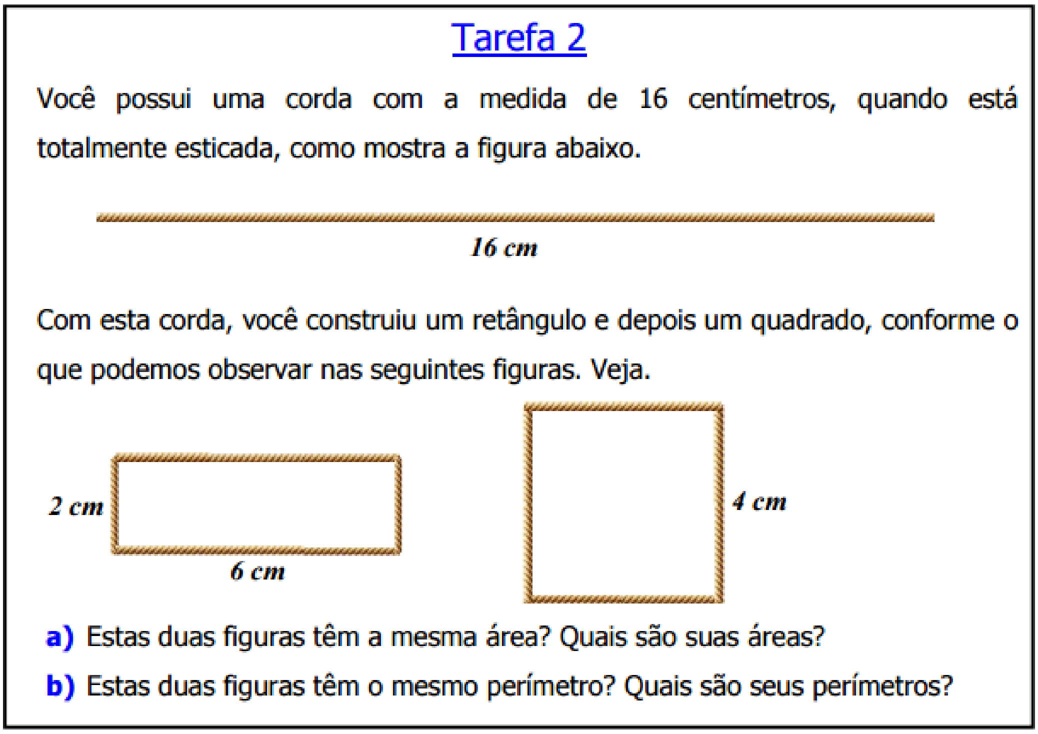


Figura 19 – Primeira atividade de Henriques (2011). p. 76

O interessante nesta primeira atividade, com a figura 2, é uma aparente indução praticada pelo pesquisador, de que o estudante conte o número de quadrados para obter a área desta superfície. Porém, lendo os resultados da pesquisa, notamos que, em um primeiro momento, os estudantes tentaram calcular o tamanho da superfície a partir da figura 1, aplicando a multiplicação dos valores das dimensões apresentadas. Quando o autor questiona os alunos sobre o conceito *unidade de medida de área,* estes respondem não saber o significado. O mesmo tipo de resposta que motivou nosso estudo, já que durante a nossa experiência docente, não foram raras as vezes que escutamos isto dos nossos estudantes para a mesma indagação. Notamos que durante a execução desta tarefa Henriques discute com os estudantes o conceito de unidade de medida da superfície, assim como fizemos em uma de nossas aulas.

Na tarefa 2 o objetivo foi primeiro buscar uma aproximação da relação área-perímetro, segundo promover possíveis significados produzidos pelos estudantes. Ao propor uma discussão sobre a possibilidade de se obter medidas diferentes de área para uma mesma medida de perímetro, percebemos a intenção do autor em gerar nos alunos uma inquietação, contrariando a noção da linearidade da variação destas grandezas.



Tarefa 2

Você possui uma corda com a medida de 16 centímetros, quando está totalmente esticada, como mostra a figura abaixo.

Com esta corda, você construiu um retângulo e depois um quadrado, conforme o que podemos observar nas seguintes figuras. Veja.

a) Estas duas figuras têm a mesma área? Quais são suas áreas?

b) Estas duas figuras têm o mesmo perímetro? Quais são seus perímetros?

Figura 20 – Segunda atividade de Henriques (2011). p. 77

Na terceira atividade o autor relatou que procurou obter um modo de explicitar as possíveis dificuldades dos alunos em operarem com a ideia da contagem das unidades de área para obter o tamanho da superfície de uma figura. Mais tarde nas análises do trabalho, ficou claro que os alunos, em sua maioria, buscaram uma aproximação com a utilização de sobreposição e ladrilhamento na resolução, e que a dificuldade esperada não se confirmou. Com esta atividade, Henriques inicia lentamente a fala sobre algumas possíveis regras, como por exemplo, separação da figura amarela em duas, utilizando os quadrados vermelhos como unidades e utilizar o processo de multiplicação para calcular o tamanho da superfície. Neste ponto do trabalho o autor poderia ter tentado um aprofundamento maior com os alunos, e feito uso das estruturas multiplicativas para explicar algumas das soluções apresentadas por eles.

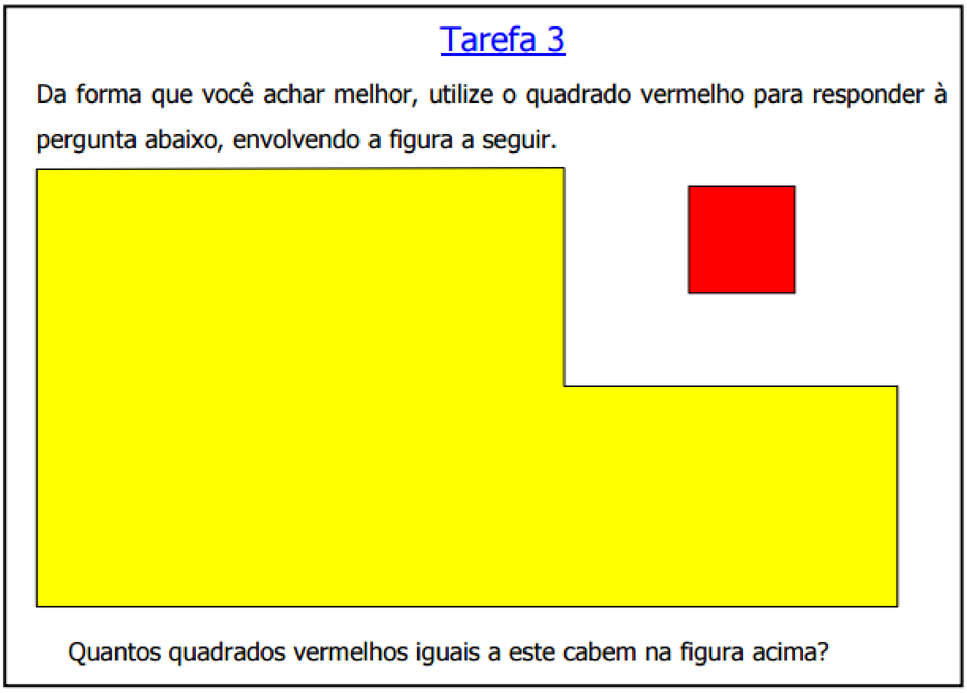


Figura 21 – Terceira atividade de Henriques (2011) p. 78

Ainda nesta atividade três, o autor trabalhou com a confusão que os estudantes faziam entre área e perímetro. Propôs uma aproximação da relação área-perímetro, através de questionamentos adicionais do tipo: essa figura tem área e perímetros iguais? É possível reorganizar a figura para que essas medidas sejam iguais? Para estas discussões foram utilizadas a sobreposição e ladrilhamento, também, a medição de dimensões das figuras dadas. Esta confusão foi constatada por ele em um pré-teste e durante a sua experiência docente, fazendo com que decidisse discuti-la. Vale ressaltar, que nesta terceira atividade, o quadrado em vermelho foi distribuído separadamente da figura em amarelo, para que os discentes conseguissem sobrepô-lo na figura.

Algo semelhante ao que propusemos em nossa pesquisa, já que em uma das nossas atividades os estudantes tiveram que calcular a área do piso da sala de aula com as unidades que dispunham, como capa de caderno, palmos, pés e etc. Também, em outra atividade do nosso trabalho, eram convidados a calcularem área de figuras no papel, tendo como uma das possibilidades de escolha para auxílio, uma malha quadrangular transparente. Nestas duas atividades nosso objetivo foi, através do ladrilhamento, além de verificar se os conceitos estavam consolidados para os estudantes, objetivamos também observar se as estruturas aditivas e multiplicativas eram consistentes para eles.

A quarta atividade do trabalho de Henriques (2003) foi muito parecida com a anterior, tinha os mesmos objetivos, além do método semelhante. Foi novamente proposto à ideia de sobreposição, porém agora, a unidade de medida era um triângulo equilátero. Os estudantes eram convidados a contar quantos destes triângulos sobrepunham um hexágono regular para fazer a aproximação da área. Tanto na terceira, quanto na quarta atividade, o autor se preocupou em trabalhar com superfícies em que a unidade de medida coubesse um número inteiro de vezes sobre a figura a ser medida. Facilitando a discussão da unidade de medida de área, e indo ao encontro da ideia de que o conceito não deva iniciar apresentando as regras de cálculo.

Na quinta atividade, o objetivo do autor foi aproximar a ideia geométrica dos conceitos com a álgebra. Aproximação que também propomos em nossa última atividade, já que nesta, através da geometria, com o auxílio do geoplano, os alunos tentaram construir maneiras rápidas do cálculo de área usando a álgebra para isto. Observando a análise dos resultados da pesquisa de Henriques (2011), constatamos que os dois estudantes fizeram o uso do recurso da álgebra para responder o problema proposto, logo, pode se dizer que houve sucesso na proposta do pesquisador neste exercício. Segue imagem do problema.

Tarefa 5

Um *outdoor* de uma propaganda publicitária foi construído com a forma de um retângulo com área de 104 m^2 e com um dos lados sendo 5 metros maior do que o outro. A agência de publicidade responsável pela propaganda decidiu colocar um revestimento de alumínio para contornar todo *outdoor*, o que lhe dá um melhor acabamento. Imagine que você trabalhe nesta agência e precisa calcular quantos metros de alumínio serão necessários para cobrir toda a borda do *outdoor*. Então, faça agora este cálculo.

Figura 22 – Quinta atividade de Henriques (2011) p. 80.

Outro fato relevante levantado pela pesquisa foi a tentativa de, com este problema da atividade cinco, obter um modo de explicitar as possíveis dificuldades relacionadas à mudança de grandezas. Segundo o autor, depois dos resultados, possivelmente essa dificuldade seja um dos fatores geradores da confusão entre perímetro e área.

Na atividade seis nota-se que o objetivo da pesquisa foi buscar uma forma de fazer com que os sujeitos se deparassem com situações nada usuais envolvendo medidas de área e de perímetro, e com a necessidade de comparar suas variações e estabelecer relações entre suas medidas. Fatos que consideramos significativos, trazidos pelo autor neste exercício, são primeiramente a relação entre os perímetros do círculo e do semi-círculo, e também a área da coroa circular. Essa confusão que os estudantes fazem de não aproximarem as ideias de comprimento da circunferência e perímetro, foi uma das inquietações que nos ajudaram na escolha do tema do nosso trabalho. Agora, não eram mais as figuras com retas em que os estudantes estavam acostumados a trabalhar. Vale ressaltar que estas relações trazidas pelo pesquisador, sempre dependiam dos significados produzidos pelos sujeitos.

Figura 23 – Primeira parte da sexta atividade de Henriques (2011) p. 81

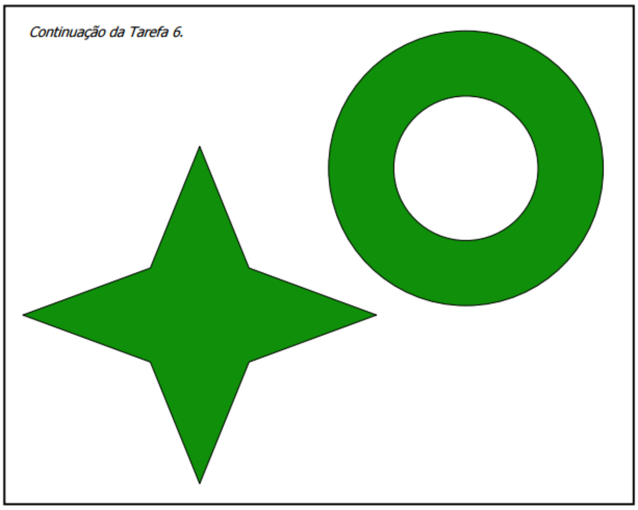


Figura 24 – Segunda parte da sexta atividade de Henriques (2011) p. 81

A primeira e sexta tarefa do trabalho de Henriques foram as que consideramos mais próximas do nosso propósito, por isso, segue algumas resoluções e colocações de alunos para estas atividades.

Analisando o trabalho, para a tarefa 1, ocorreram fatos que consideramos importantes. Um deles foi que ao trazer uma possibilidade de comparação entre duas figuras idênticas, embora apresentadas de forma diferente, ofereceu-se oportunidade para que os alunos escolhessem entre um ou outro modo de produzir significados para os elementos daquelas figuras, em função de tal diferença entre a apresentação de cada figura, como a medida de um de seus lados ou a equivalência e decomposição de sua superfície. As demais tarefas, lendo as análises de Henriques (2011), parecem-nos não terem proporcionado tal oportunidade.

Uma aluna apresentou uma dificuldade interessante, ao produzir significados para área e perímetro do círculo. Ela não conseguiu distinguir qual unidade métrica de área utilizar, para cada uma destas grandezas, e acabou escolhendo o centímetro para medir comprimento na hora de expressar perímetros. Mas também, a mesma unidade, para mensurar e expressar áreas. Nitidamente, a relação unidades de medidas como grandezas não era algo concreto para essa aluna, tão pouco a relação multiplicação de medidas com a medida ao quadrado.

Outro fator que consideramos positivo como resultado da pesquisa de Henriques, e que nos motivou em tentar obter objetivo parecido, foi que para todas as tarefas propostas na pesquisa, com exceção da Tarefa 6, tanto pela transcrição quanto pelos registros escritos relatados no trabalho, pareceu-nos que os estudantes não mais confundiam as noções de perímetro e de área, mostrando um indicativo que sua sequência de atividades auxiliou os estudantes na compreensão dos conceitos. Neste caso o autor entendeu a dificuldade de confundir ideias como um obstáculo epistemológico, discutido no seu referencial teórico, e que foi superada.

2.5.3 Síntese, Análise e Discussões sobre o trabalho de Baldini (2004)

O estudo de Baldini (2004) propôs uma engenharia didática, em ambiente de geometria dinâmica, com o objetivo de verificar se o software Cabri-Géomètre II contribuiu para a construção de conceitos em geometria. O estudo foi fundamentado na Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida na escola francesa por Guy Brousseau. O que nos interessou em seu estudo, por estar relacionado ao nosso trabalho, é que os conceitos propostos para uma construção do conhecimento geométrico foram os de área e perímetro. Portanto, mesmo com metodologias diferentes, já que seu trabalho apoiou-se em um software de geometria para a sequência didática, a discussão realizada pelo autor de como ocorre o processo de aprendizagem de área e perímetro auxiliou na construção da nossa proposta.

Baldini (2004) afirma que a preocupação com a geometria vem sendo manifestada em pesquisas e trabalhos realizados há vários anos. Baldini ressalta que o mesmo afirma Pavanelo (1993) destacando, na época, um abandono do ensino de geometria, salientando ainda que essa ausência deveria prejudicar a formação das futuras gerações de alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos. Em cima desses acontecimentos, o pesquisador ainda ressalta algumas experiências de realizações de projetos relacionados à formação de professores nos anos anteriores, cujo objetivo visava à melhoria do ensino aprendizagem de geometria. Mais recentemente Baldini (2004) destaca que existe uma omissão geométrica e que são vários os fatores que levam a essa omissão. Ele aponta duas causas que atuam forte e diretamente dentro das salas de aulas. A primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas. Ele salienta que

> "Se o professor não conhece a geometria, também não conhece o poder e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão" (p.12).

Concluímos que dessa forma, ou eles ensinam geometria sem conhecê-la, ou então, não ensinam. A segunda causa, segundo Baldini, deve-se à exagerada importância que é dispensada ao livro didático. Muitos deles pouca geometria apresentam, ou então, reduzem a geometria a um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, não relacionando com a realidade, nem com outros campos da matemática.

Trabalhando com a ideia de Bellemain & Lima (2000), Baldini argumenta que o conceito de área, e o processo de medir área do ponto de vista da estrutura matemática, tem como ponto de partida a definição de uma função (f), dita função área, num conjunto de superfícies, assumindo valores no conjunto dos números reais não negativos.

Em cima destes autores, o pesquisador relata ainda que existem três propriedades julgadas essenciais para caracterizar a grandeza área, que são:

1°) Positividade: uma figura que possua interior não vazio tem área positiva;

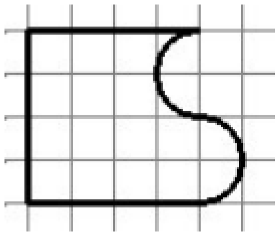


Figura 25 – Exemplo representando positividade de área de Baldini (2004) p. 17

2°) Aditividade: se duas figuras A e B têm em comuns pontos de suas fronteiras, então a área da figura AUB (união de A com B) é a soma da área de A com a área de B;

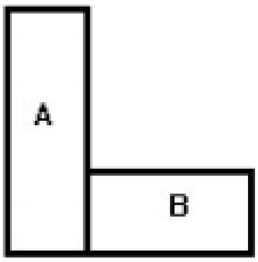


Figura 26 – Exemplo representando aditividade de área de Baldini (2004) p.18

3°) Invariância por isometrias: se uma figura plana A é transformada em outra, B, de modo que a distância entre dois pontos quaisquer de A fica inalterada em B, então A e B têm a mesma área.

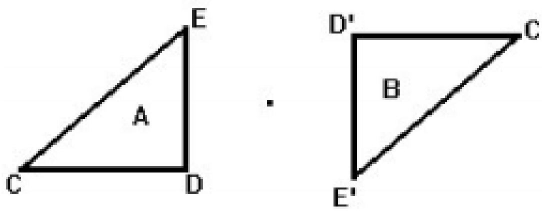


Figura 27 – Desenho representando invariância por isometrias. Retirado de Baldini (2004) p.18

Segundo o próprio Baldini, considerando essas três propriedades, é necessária a caracterização do domínio da função (f), ou seja, uma verificação de quais superfícies são mensuráveis pela função área, sendo necessário limitar uma região do plano, ou seja, a parte do plano ocupada por uma figura plana. O autor também afirma que para abordar o conceito de área, faz-se necessário pressupor conhecimentos referentes ao conceito de comprimento e, também, assumir outra superfície que será tomada como unidade de área para comparar com a superfície da qual se deseja saber a área. A ideia do autor sobre medir área, vem ao encontro com o que discutimos em nossa fundamentação teórica sobre o assunto. Baldini fala que: “medir é comparar. Medir a área de uma superfície é compará-la à área de outra superfície” (p.18). Segundo o próprio autor, o resultado dessa comparação será um número, que deverá exprimir quantas vezes a figura, que está sendo medida, contém a unidade de área.

Suas atividades, apesar de fazerem uso do software Cabri-Géomètre II, discutem o conceito de área e perímetro de maneira parecida as dos outros autores apresentados nesta seção, porém com uma vantagem, a rapidez de resposta que a tecnologia pode conceder. Por exemplo, um aluno, além de construir um triângulo, ele pode desconstruir esta figura se perceber que não se tratava da que objetivava. Pode, também, logo na sequência, montar outro triângulo rapidamente, tornando o processo de reflexão das ideias mais dinâmico.

Participaram da parte experimental desta pesquisa 8 alunos do 1º ano do Ensino Médio. As atividades foram desenvolvidas em turno inverso da aula regular. O pesquisador iniciou, em primeiro momento, uma apresentação do software, e nas demais aulas trabalhou, com auxílio desta ferramenta, atividades que objetivavam a construção das ideias de área e perímetro. No primeiro encontro, o qual ele chamou de seção I, foram discutidos alguns conceitos de geometria, como reta, semirreta, polígonos e polígonos regulares. A constatação do autor é de que os estudantes apresentaram dificuldades em trabalhar com esses conceitos, muitos nem lembravam o que estes nomes significavam. Os discentes afirmaram nunca terem tido aulas no laboratório de informática, mesmo assim, um ponto positivo levantado pelo autor, foi de que a maioria apresentou destreza com o computador e o software.

Na seção II, Baldini propôs aos estudantes que fizessem algumas construções geométricas, como por exemplo, retângulos, quadrados, retas paralelas e etc. Estas construções deveriam ser feitas sem o uso das ferramentas do software que fazem isso prontamente. O Objetivo do pesquisador era fazer com que os estudantes pensassem e discutissem com os colegas como construir apenas usando os instrumentos régua e compasso.

Novamente os alunos apresentaram algumas dificuldades, quando se deparavam com palavras como “vértice” e “diagonal”, perguntavam o que significavam esses termos, demonstrando a falta de familiarização com o vocabulário utilizado na geometria. As dificuldades em registrar as respostas para os questionamentos feitos nas atividades persistiram desde as primeiras atividades. De todos os participantes, o pesquisador percebeu que dois deles não liam as indicações das atividades e sempre perguntavam: *como é que se faz?*. Eles não queriam ler, mas queriam trabalhar com o software.

Na sessão III, os alunos ainda tiveram algumas dificuldades em relação aos termos utilizados na geometria. Foi também nesta sessão que o pesquisador iniciou a discussão de área e perímetro. Isso se deu através de uma atividade que objetivou a construção do conceito de perímetro do triângulo. A partir dessa construção, a maioria dos alunos efetuou a soma da medida dos lados do triângulo. Portanto, quando questionados o que significava ser essa soma, seis dos estudantes participantes responderam ser o *perímetro,* e apenas dois afirmaram ser a *área*. Estas respostas apresentadas neste questionamento foram muito parecidas com as que encontramos em nossa pesquisa. No nosso trabalho, quando solicitamos aos alunos que definissem perímetro e área, poucos confundiram os dois conceitos. Todas as outras atividades desta seção, do trabalho de Baldini, tiveram como objetivo construir com os estudantes ideias de área e perímetro, desfazendo possíveis confusões entre elas.

Na última seção, com o auxílio de algumas ferramentas do software, Baldini faz uso de uma estratégia discutida na fundamentação teórica e que, tanto na nossa pesquisa, como nas dos outros autores discutidos neste capítulo, recorreu-se a este recurso, sobreposição de figuras. Assim, o pesquisador conseguiu discutir com os estudantes a ideia de unidade de medida de área. Também foram propostas atividades que tiveram o objetivo de relacionar área com a multiplicação das medidas lineares das figuras.

2.5.4 Síntese, Análise e Discussões sobre o trabalho de Backendorf (2010).

O objetivo do trabalho de Backendorf foi: elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que abordou o tema das medidas de comprimento e área. A pesquisa se deu com uma turma do quinto ano do Ensino Fundamental, de uma escola do município de Travesseiro, localizado no estado do Rio Grande do Sul. Segundo a autora, a opção de desenvolver essa pesquisa ocorreu devido as dificuldades apresentadas por egressos das escolas com o tema das grandezas e medidas. A hipótese da pesquisadora é de que as incompreensões dos conceitos estão relacionadas a um ensino baseado na utilização e memorização de regras, processos e fórmulas. Ela ainda afirma que há uma supervalorização, por parte dos professores, de alguns conteúdos enquanto muitas questões práticas da vida das pessoas estão sendo esquecidas. Sabemos que muitas vezes os docentes insistem nos cálculos e nas operações ao invés de utilizá-las com situações-problema. A pesquisa foi desenvolvida como um estudo de caso, e no final, Backendorf (2010) constatou que a sequência auxiliou na construção dos conceitos para as primeiras séries do Ensino Fundamental.

Na fundamentação teórica, para definir e compreender o processo de aprendizado sobre medida, a autora se baseou, entre outros autores, em Caraça (1952) e Plaza e Belmont (1994). Citando Plaza e Belmonte, Backendorf afirma que medir depende de uma partição generalizada, dando-se, assim, a escolha da unidade. Quando a grandeza a ser medida é dividida em partes iguais, definindo-se um padrão e deslocando-o segundo uma ordem, cujas marcações levam à utilização de uma medida comum, encontra-se a unidade. Atingindo essa etapa, a então unidade é dividida em partes menores, e ocorre a percepção de que as unidades são múltiplos das unidades menores, nas quais a grandeza foi novamente dividida. Assim, a pesquisadora afirma que a grandeza poderá ser dividida em partes que podem ser divididas sucessivamente e o comprimento do todo continuará o mesmo, pois o comprimento se conserva.

Para construir a proposta de ensino-aprendizagem com medidas, Backendorf optou por um trabalho voltado para a construção do conceito de medida. Para isto, a autora tomou como base para o desenvolvimento da proposta, estudos realizados por Gérard Vergnaud em torno dos Campos Conceituais. A proposta teve por um dos objetivos, desenvolver o aprendizado da conversão das unidades de medidas sem que os alunos tivessem que decorar ou memorizar regras e fórmulas, mas sim, fazendo-o de forma lógica e recorrendo à proporcionalidade presente nas estruturas multiplicativas. Logo, as análises de construção e compreensão dos conceitos por parte dos alunos basearam-se na teoria dos Campos Conceituais, avançando para o estudo das estruturas multiplicativas.

Pode-se afirmar que Backendorf separa em quatro grandes blocos as atividades no trabalho de campo. As que auxiliavam na construção das unidades de medida para comprimento, os exercícios para conversão dessas medidas, as atividades que abordavam o conceito de perímetro e, por último, problemas que envolviam a ideia de área. Para a pesquisadora o aluno não precisa frequentar uma Escola para aprender os conteúdos e saberes do cotidiano. A Escola deve levá-lo a agregar informações para construir o conhecimento. Essa foi à justificativa apresentada pela autora para elaborar atividades que levaram o aluno a pesquisar e se informar sobre outras medidas, inclusive sobre o Sistema Internacional de Medidas.

Segundo Plaza e Belmonte (1994) a prática de medir não é algo fácil, portanto, as crianças devem praticar e realizar o ato de medir. Inspirados nestes autores, Backendorf lista estágios que a criança deve percorrer para construir seus conhecimentos sobre medidas e utilizá-los corretamente. Esses estágios são definidos por Plaza e Belmonte (1994), e são os mesmos abordados em nosso trabalho.

A proposta foi implementada em 13 encontros. Nas primeiras aulas a autora propôs atividades em que os estudantes utilizaram o corpo como unidade, ou até mesmo como instrumento de medida. Backendorf argumenta que a utilização do corpo para medir o que lhes fora proposto teve como objetivo incentivar os alunos a criarem sua unidade de medida, não os fixando nas unidades do Sistema Métrico Decimal, nem nos instrumentos de medida que utilizamos com frequência para medir. Nestas atividades apresentaram-se informações de que o homem da antiguidade utilizou-se de padrões de medidas ligados ao próprio corpo. Por exemplo, para medir comprimentos utilizou o pé, a polegada, a jarda, o palmo, a braça e o cúbico. Na descrição dos encontros do trabalho, parece-nos que o contexto histórico contribuiu para a motivação dos discentes. A pesquisadora dividiu a turma em grupos, sendo que cada grupo teve a possibilidade de escolher a sua unidade. Apareceram muitas unidades e uma discussão se impôs: com a mesma grandeza sendo comparada por estas diferentes unidades não foi possível a comparação direta dos resultados encontrados. Por exemplo, para um grupo sua unidade poderia “caber” um número inteiro de vezes dentro do que se quer medir, enquanto para outro grupo “não”. Isso, e a simples necessidade de comparação direta entre as unidades, fizeram com que os próprios estudantes chamassem a atenção para a importância de se definir uma unidade como padrão. Durante esse processo ocorreu à necessidade da utilização das partes dessa unidade, já que agora, mais frequentemente a unidade padrão não cabia um número exato de vezes dentro da grandeza a ser medida. Esse foi o leque usado por Backendorf para iniciar a discussão do segundo bloco de atividades, as transformações de unidades de medidas.

Além de propor atividades em que os alunos devessem pesquisar sobre o Sistema Métrico Decimal, nesse segundo bloco, também tiveram problemas em que surgia a necessidade da transformação das unidades de medida em suas resoluções. Algo interessante que ocorreu foi que os estudantes sentiram a necessidade de converter para centímetros, metros, milímetros, as unidades criadas por eles nas atividades anteriores. Cada uma das atividades propostas objetivou que os estudantes compreendessem a existência das várias unidades de medidas de comprimento e conseguisse relacioná-las entre si, fazendo as conversões que lhe fossem mais convenientes, sucesso que fora atingido, segundo a autora. Backendorf concluiu que os alunos empregaram as estruturas multiplicativas, principalmente a proporcionalidade, para realizar as conversões. Lendo as análises do texto, observamos que relacionadas ao tema das grandezas e medidas, a conversão de unidades passou a ocorrer de tal forma que não representava um empecilho para resolver uma situação.

No terceiro bloco as atividades foram elaboradas para construir o conceito de perímetro, partindo da ideia de contorno. Todos os problemas envolviam o dia-a-dia do aluno. Por exemplo, Backendorf propôs calcular a quantidade de arame necessário para cercar a horta da escola. Atividade esta que, em nossa pesquisa, nos inspirou em propor, para construção do mesmo conceito, que nossos alunos medissem a quantidade necessária de madeira para trocar o rodapé da sala de aula. Backendorf também aborda exercícios sobre perímetro em polígonos. Com a utilização das propriedades da adição e multiplicação no cálculo do perímetro de várias figuras geométricas, a autora discutiu com os estudantes que o perímetro pode ser calculado de forma diferente dependendo do polígono em questão, e que polígonos diferentes podem ter mesmo perímetro. Por exemplo, o perímetro de um quadrado pode ser dado de várias formas, envolvendo somente soma ou, multiplicação e soma. A pesquisadora constatou que houve problemas, próximos aos que encontramos, mais tarde, ao propomos em nosso trabalho atividades que discutiram a compreensão do tema, por parte do aluno, em regiões não poligonais. O objetivo através dessa discussão foi mostrar que existe perímetro para estas figuras, e que será possível conhecer, de alguma forma, utilizando-se de um procedimento, não necessariamente de cálculo, para encontrar essa medida.

No último e quarto bloco, a autora montou uma série de atividades que auxiliaram na construção e interpretação do conceito de área. Dentro desta sequência, Backendorf deu grande importância para a construção da unidade em todas as etapas da construção do conceito de medida. Da mesma forma que ocorreu na ideia de comprimento, as atividades propostas para desenvolver este conteúdo partiam do que podia ser a ideia inicial de área. Backendorf explica que comprimento envolve apenas uma dimensão, enquanto área envolve duas dimensões, portanto ela planejou atividades que auxiliavam na generalização da área de um quadrado ou de um retângulo como produto da medida do comprimento pela largura. Também propôs exercícios para a construção do metro quadrado. Segundo ela, muitos estudantes faziam uma grande confusão entre metro e metro quadrado, a partir desta atividade seu objetivo foi fazer com que os estudantes compreendessem que o metro quadrado é medida de superfície e não de comprimento.

Uma de suas atividades para discutir o assunto, fez uso de uma ferramenta que também colocamos a disposição de nossos alunos, a malha quadriculada. Com esse instrumento os discentes sobrepuseram figuras para executar o cálculo de área, até mesmo em figuras não poligonais, observando que podiam chegar em valores aproximados para a medida de uma superfície. Backendorf observou que seus alunos estavam confundindo os conceitos de área e perímetro, portanto, no fim, propôs algumas atividades que trabalharam a diferenciação dos temas. Também fez questionamentos para seu grupo do tipo: figuras com perímetros iguais podem ter áreas diferentes, e vice-versa?

O objetivo desta sequência proposta por Backendorf foi que os estudantes tivessem a compreensão e construção dos conceitos de: grandezas e medidas, unidades de medida, perímetro e área. A autora concluiu que de modo geral as atividades foram proveitosas e oportunizaram uma ampla discussão sobre cada um dos conceitos que desejava contemplar. Visivelmente as atividades foram voltadas para o dia-a-dia do aluno como ela planejara no início do trabalho, e envolveram situações do cotidiano. Fato interessante é que em todas as atividades propostas existia a possibilidade de se medir e conferir as medidas. A pesquisadora considera que assim promoveu o conflito e despertou a curiosidade, deixando de lado a mera aplicação de exercícios e regras. Sabemos que estes exercícios muitas vezes estão distantes da realidade dos estudantes, não auxiliando, portanto, para a compreensão das ideias.

Muitas das atividades de Backendorf exigiam uma solução dos alunos sem que um caminho para a resolução fosse dado, nem mesmo dicas de como começar. Nesses problemas sempre apareceram mais de uma solução, maneiras interessantes de resolver, o que nitidamente proporcionou a discussão entre os alunos, os quais argumentavam em torno das várias estratégias e soluções. Os estudantes comentavam não somente os acertos, mas também os erros. Lendo os resultados do trabelho, verificamos que as atividades práticas em que os alunos compararam, mediram paredes utilizando uma unidade por eles criada, construíram o metro quadrado, mediram a altura de cada degrau da escada, estimaram e aproximaram área de regiões não regulares e mapas, inclusive do próprio município em que residiam, nitidamente foram as que deram mais sentido ao trabalho, pois estavam relacionadas com suas vidas. Foi de grande interesse dos estudantes se localizarem e calcularem área das regiões conhecidas por eles no cotidiano, agora observadas no mapa. Para a pesquisadora as atividades contribuíram para facilitar a construção das medidas.

Observamos que na maioria das atividades Backendorf inspirou-se nas três fases estabelecidas por Caraça (1952) para medir: primeiro a escolha da unidade, a comparação do que se quer medir com a unidade e, por último, a expressão do resultado dessa comparação por um número. Essas fases também foram levadas em consideração por nós para construir as atividades deste trabalho.

Outro fato importante que ocorreu no bloco de atividades sobre medidas, é que foi atingido o objetivo imposto pela autora para que o estudante percebesse à importância de se criar uma unidade padrão entre eles para medir comprimentos. Pois, segundo ela, percebia-se a angústia dos estudantes depois de terem criado suas unidades, na primeira atividade, e as unidades da turma, num momento seguinte. Essa angústia se deu através de um problema que surgiu: *para que outras pessoas entendessem as unidades de medida que eles estavam utilizando, foi necessária uma padronização.* Observando que este problema fora enfrentado pela pesquisadora, já levantamos essa discussão em nossa sequência de atividades, perguntando para nossos estudantes como a diretora explicaria para o atendente da loja a quantidade certa de madeira necessária para fazer o rodapé da sala de aula.

Sobre as conclusões das atividades que tratavam de perímetro, a pesquisadora considerou satisfatória a maioria das resoluções. Nota-se isto em relação ao perímetro do quadrado e do retângulo. Observar-se que os estudantes realizaram o cálculo de várias maneiras após terem conhecido as medidas dos lados. No caso do quadrado, por exemplo, teve soluções que foram somando cada medida, ou seja, somaram-se quatro parcelas de mesmo valor. Também tiveram estudantes que pegaram este valor e multiplicaram por quatro. O mesmo ocorreu nos exercícios que a figura envolvida era um retângulo. Por fim, a autora ressalta que a soma envolvida na definição do perímetro, foi realizada, com muita espontaneidade por parte dos alunos, através de um arranjo de números e operações, em que os discentes utilizaram adição, multiplicação e suas propriedades, como a comutatividade, associatividade e distributividade. Porém, houve temas em que a autora não considerou o objetivo atingido, por exemplo, no caso da discussão do perímetro do círculo. Os alunos nitidamente não evoluíram na interpretação da ideia. Consideraram o problema como sendo de extrema dificuldade de resolução. Uma crítica da pesquisadora, a ela mesma, buscando o motivo de os discentes não terem atingindo o sucesso nessa parte da pesquisa, Acredita que a maneira de como conduziu as atividades pode ter levado a ideia de perímetro como resultado de um cálculo. Pois ela teria falado muito em lados de figuras e a partir deles escrever o cálculo do perímetro. Mas ao passarem para as figuras curvilíneas naturalmente os estudantes tentaram executar cálculo para resolver o problema, fazendo com que não conseguissem prosseguir na ideia. Segundo a autora, demorou muito, e somente com um auxílio seu, os alunos retomaram a ideia de contorno para tratar deste problema. Esta parte do trabalho de Backendorf nos inspirou a tratar do mesmo tema (perímetro de figuras sem retas) em nosso trabalho, a qual acabou se mostrando uma das partes mais ricas da nossa pesquisa.

2.6 Como o tema é tratado nos Livros Didáticos

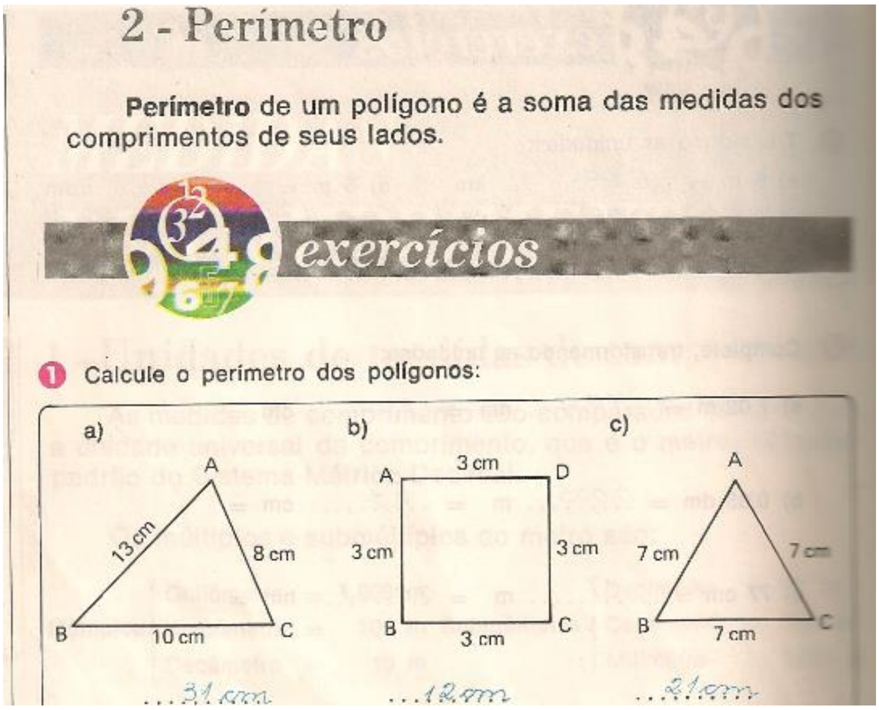
Uma das nossas preocupações sobre perímetro é a tentativa dos estudantes de tentar aplicar, em qualquer situação, a definição que vale apenas para polígonos: *perímetro é a soma de todos os lados de uma figura.* Tanto no Ensino Fundamental, quanto no Médio, os alunos quando se deparavam com figuras curvilíneas tentavam aplicar tal definição. Esse fato nos chamou a atenção surgindo uma indagação: *afinal, por que essa definição de perímetro estaria tão enraizada na cabeça dos estudantes, a ponto de não diferenciarem quando ela é aplicável e quando não é?* Para tentar responder a essa questão, pesquisamos algumas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental, já que uma das nossas hipóteses é que estes textos poderiam estar ajudando nesta confusão. Essa pesquisa também nos ajudaria a ver como alguns autores estão abordando o tema, propondo um caminho de como ensinar área e perímetro.

Segundo Fischer (2011), em sua pesquisa sobre como os livros didáticos abordam área e perímetro, o pesquisador afirma que a maioria dos livros trata o tema de forma mais intuitiva, experimental e o mais concreta possível. Analisando Lezzi; Dolce; Machado (2005), observa-se que o conteúdo é apresentado nos primeiros capítulos, diferentemente dos exemplares mais antigos, onde o assunto era tratado somente no final do livro. Segundo o próprio Fischer, essa inversão na maioria das coleções foi um ponto importante e positivo para o ensino de Geometria, pois ficando para o final, muitos professores, ao não vencerem todos os conteúdos do ano, acabavam não abordando o assunto.

Para Fischer (2011), os autores não costumam fazer referência ao conceito de perímetro. As questões propostas estimulam basicamente o cálculo de área e perímetro, não dando oportunidade de o aluno ter contato com situações problemas que possam ser significativas para a aprendizagem.

Nas coleções do Ensino Fundamental, o assunto sempre inicia no volume referente ao sexto ano. Nas edições mais antigas, primeiro se definia perímetro como a soma das medidas dos lados de uma figura, dentro do capitulo intitulado: "polígonos". Essa definição aplicada neste capítulo é valida, pois o assunto tratado, polígonos, é englobado por este conceito. Porém, essa definição não engloba todos os casos, e será importante que o professor, mesmo adotando um livro que permeie tal confusão, consiga tecer comentários com seus alunos, chamando atenção que para algumas figuras esta definição pode ter problemas.

Veja a imagem de um desses livros antigos.


2 - Perímetro

Perímetro de um polígono é a soma das medidas dos comprimentos de seus lados.

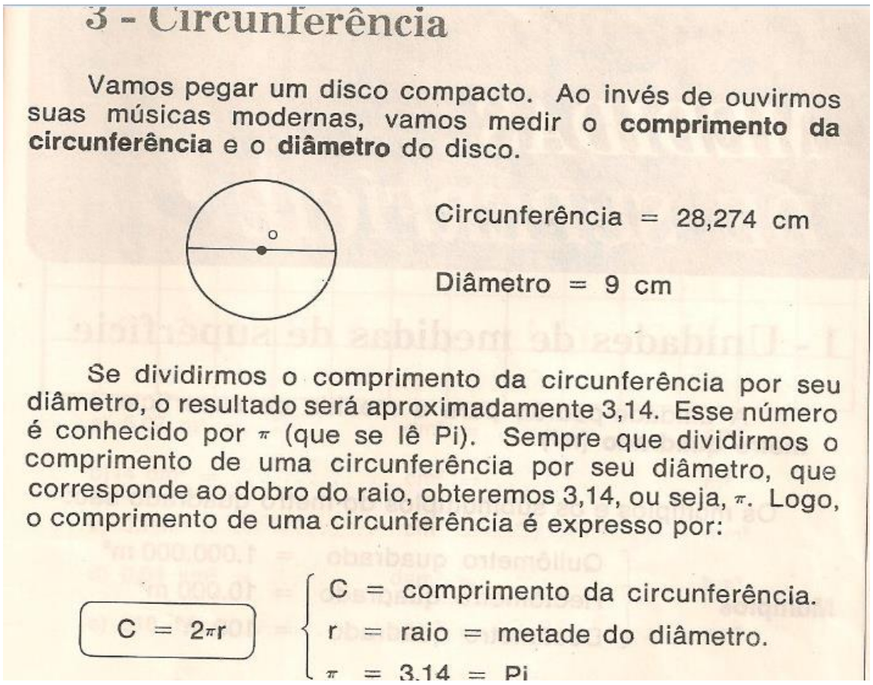
exercícios

1 Calcule o perímetro dos polígonos:

Figura 28 – Abordagem de perímetro no livro Matemática Moderna Domênico, p. 160.

Ao observarmos a imagem anterior, notamos uma esquematização muito presente nos demais autores antigos: primeiro se apresenta a definição, depois seguem exemplos resolvidos aplicando o que foi apresentado e, por último, é proposta uma sequência de exercícios. Este esquema para se ensinar geometria foi e continua sendo muito usado por professores. Desta maneira, não há um incentivo a problematização do tema. Vale ressaltar que foram poucos os autores que deram destaque para a diferença entre área e perímetro. Como muitos trabalham o tema com fórmulas e cálculos diretos, talvez venha daí a confusão que muitos alunos ainda têm entre os dois conceitos.

Já nos volumes referentes à antiga sétima série, atual oitavo ano, no capítulo sobre circunferência, este mesmo exemplar mostra o cálculo do comprimento da medida do contorno, mas em nenhum momento é lembrado o fato de se tratar do mesmo conceito das séries anteriores. A única diferença é que uma circunferência não possui lados, mas possui uma “borda”. Essa diferença dos termos, *perímetro* para polígonos e *comprimento* para circunferências, em nossa opinião, confunde os alunos. Segue a imagem da mesma coleção do livro acima no capítulo sobre circunferências.



3 - Circunferência

Vamos pegar um disco compacto. Ao invés de ouvirmos suas músicas modernas, vamos medir o **comprimento da circunferência** e o **diâmetro** do disco.

Circunferência = 28,274 cm

Diâmetro = 9 cm

Se dividirmos o comprimento da circunferência por seu diâmetro, o resultado será aproximadamente 3,14. Esse número é conhecido por π (que se lê Pi). Sempre que dividirmos o comprimento de uma circunferência por seu diâmetro, que corresponde ao dobro do raio, obteremos 3,14, ou seja, π. Logo, o comprimento de uma circunferência é expresso por:

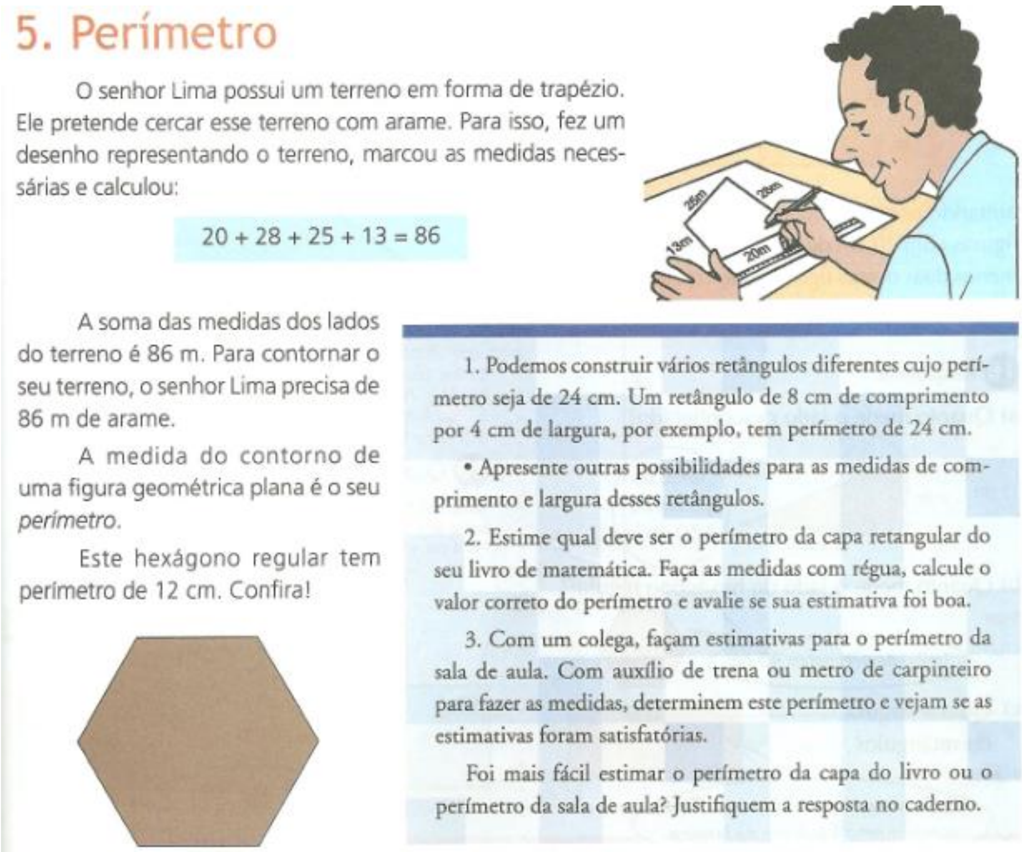
$$\boxed{C = 2\pi r} \quad \begin{cases} C = \text{comprimento da circunferência.} \\ r = \text{raio} = \text{metade do diâmetro.} \\ \pi = 3{,}14 = \text{Pi} \end{cases}$$

Figura 29 – Abordagem de circunferência no livro Matemática Moderna Domênico, p. 161

Essa confusão pode estar relacionada ao fato de que na maioria das vezes, não é o aluno quem constrói o conceito. A ele é apresentada uma definição. O conhecimento parte da definição e o estudante a toma como verdade absoluta, tal e qual eram apresentados os assuntos nos livros antigos. Observemos também que o autor comete um equívoco, pois escreve que $\pi = 3{,}14$. O que sabemos estar errado, já que $\pi \cong 3{,}14$.

Mesmo que os livros didáticos sejam usualmente considerados como um apoio para as aulas, é necessário que os autores comecem a levar em consideração esses problemas. Isso confunde o estudante, criando falsas ideias, que às vezes são carregadas como verdades para o resto de sua vida.

Pesquisando sobre como os livros didáticos mais atuais estão abordando o assunto, nos deparamos com uma coleção em que o autor trabalha diferente dos exemplares mais antigos. Pois, a abordagem do tema inicia com um problema, veja a imagem do capítulo.



5. Perímetro

O senhor Lima possui um terreno em forma de trapézio. Ele pretende cercar esse terreno com arame. Para isso, fez um desenho representando o terreno, marcou as medidas necessárias e calculou:

$20 + 28 + 25 + 13 = 86$

A soma das medidas dos lados do terreno é 86 m. Para contornar o seu terreno, o senhor Lima precisa de 86 m de arame.

A medida do contorno de uma figura geométrica plana é o seu *perímetro*.

Este hexágono regular tem perímetro de 12 cm. Confira!

1. Podemos construir vários retângulos diferentes cujo perímetro seja de 24 cm. Um retângulo de 8 cm de comprimento por 4 cm de largura, por exemplo, tem perímetro de 24 cm.

• Apresente outras possibilidades para as medidas de comprimento e largura desses retângulos.

2. Estime qual deve ser o perímetro da capa retangular do seu livro de matemática. Faça as medidas com régua, calcule o valor correto do perímetro e avalie se sua estimativa foi boa.

3. Com um colega, façam estimativas para o perímetro da sala de aula. Com auxílio de trena ou metro de carpinteiro para fazer as medidas, determinem este perímetro e vejam se as estimativas foram satisfatórias.

Foi mais fácil estimar o perímetro da capa do livro ou o perímetro da sala de aula? Justifiquem a resposta no caderno.

Figura 30 – Abordagem de perímetro no livro Praticando Matemática. Andrini e Vasconcellos, 2006, vol. 5 p.155

Podemos observar que é a partir de um problema que Andrini e Vasconcellos (2006) propõem que se inicie a discussão sobre perímetro. Neste problema o aluno é convidado a calcular qual quantidade de arame é necessário para cercar um terreno. Os autores tratam a atividade como um problema aditivo, pois já são dadas aos estudantes as medidas dos lados deste terreno em forma de trapézio. Em nenhum momento é proposto ao aluno que ele meça algum objeto, o que em nossa opinião seria de extrema importância para que o entendimento de perímetro seja completo. Porém, um fator positivo deste tipo de abordagem é que problematizando o tema, a definição não é mostrada pronta para os alunos. Trata-se de uma tentativa do autor, bastante válida, de que ao resolverem o problema o próprio aluno construa a definição. Problematizar e fazer com que o aluno construa o conhecimento é o método que consideramos mais eficaz para que se dê a compreensão de um determinado conceito.

Desde a elaboração até a análise final, baseamo-nos nos referenciais teóricos, que como o leitor pode observar, foram descritos neste capítulo 2. Este capítulo foi importante para que as atividades fossem construídas de acordo com as necessidades definidas, e para que compreendêssemos as soluções e argumentos produzidos pelos estudantes. No próximo capítulo, abordaremos o percurso metodológico da pesquisa. Iniciaremos discutindo o método de pesquisa escolhido, qualitativa e no estudo de caso. Para desenvolver nossa estratégia, nos baseamos em autores como Yin (2001), Lüdke e André (1986), Romão (1998), entre outros. Na sequência descreveremos encontro por encontro as atividades planejadas. Para encerrar o capítulo discutiremos no produto técnico, cuja sequência detalhada se encontra no final do trabalho em apêndice 1.

3. Percurso metodológico

3.1 Local da experimentação, sujeitos e caracterização da pesquisa

A escola onde realizamos a pesquisa está localizada na zona central da cidade de Porto Alegre, mais precisamente na Rua João Alfredo, próximo ao Parque Farroupilha, Teatro de Câmara Túlio Piva e Museu de Porto Alegre.

Segundo a direção, a Instituição conta atualmente com cerca de 500 alunos, divididos em 12 salas de aula. Pelo turno da manhã as turmas são de Ensino Fundamental, sendo 08 dessas reservadas para anos finais, de 6° a 9° anos. À tarde essas mesmas salas são usadas no EJA, Educação de Jovens e Adultos. O EJA é um curso voltado para alunos com idade a partir dos 15 anos, também frequentadores do Ensino Fundamental anos finais. A distribuição dos nomes das turmas do Ensino Fundamental é da seguinte forma: T3 (6ºano), T4 (7ºano), T5 (8ºano), T6 (9ºano). Pela manhã são turmas regulares e pela tarde, com os mesmos nomes, as turmas do EJA. Os anos iniciais utilizam as outras 04 salas, Jardim B, 1ºano, 5ºano, na manhã e, à tarde, 2ºano, 3ºano e 4ºano.

A Escola disponibiliza de um espaço para uso da Sala de Recurso Multifuncional, com profissionais especializados em atender os seus alunos da instituição e, também, outros oriundos de escolas indicadas pela 1ªCRE[3]. Essas profissionais são pedagogas, e fazem um trabalho de inclusão. A escola conta com outros espaços como: Biblioteca, Laboratório de Informática, Sala de Vídeo, Refeitório, Ginásio de Esportes, uma quadra aberta e uma praça infantil. São oferecidos, no turno inverso, também, alguns projetos para os alunos, são estes:

● Reforço de aprendizagem especializado voltado apenas para alunos da escola, encaminhados pelo SOE[4].

[3] 1ª Coordenadoria Regional de Educação, órgão ligado a Secretária de Educação responsável em coordenar as escolas da rede estadual no município de Porto Alegre.
[4] SOE – Serviço de orientação estudantil.

● Cultura Afro, projeto coordenado por um professor da escola. Tem por objetivo difundir a cultura africana entre os estudantes. Dentro deste projeto os alunos participam de oficinas: teatro, esporte, dança e história.

● Projeto Acorda Criança, trabalho voluntário e coordenação de Risomá, músico da OSPA[5]. Esse projeto existe há mais de 6 anos, o qual, inclusive, gerou um CD gravado pelos alunos da escola. Segundo seu coordenador, trata-se de uma oficina de música para crianças e jovens, na qual estes apreendem a tocar instrumentos e fazem aula de canto.

Conversando com a Diretora da escola, ela explicou que os estudantes da instituição são formados por basicamente quatro grupos. A menor quantidade vem do bairro da escola, filhos de comerciantes e trabalhadores de empresas, residem próximos à instituição. Devido sua localização central, muitos pais que trabalham no centro da cidade, no caminho da escola, trazem seus filhos para estudarem no L. B. Portanto, estes residem distante da escola, é o segundo grupo.

Existem duas comunidades próximas ao colégio, a Areal da Baronesa, localizada na Avenida Luiz Guaranha, e a vila Lupicínio Rodrigues, destas, a escola L. B. recebe a maioria de seus estudantes. A direção explicou que são duas comunidades carentes, com muitos pais que trabalham o dia todo, e que os projetos de turno inverso são essenciais para que as crianças não fiquem sozinhas ou nas ruas. Este é o terceiro grupo.

A escola possui uma parceria com uma instituição localizada próximo, a fundação *O Pão dos Pobres*. Essa fundação atende, no momento, 1200 crianças e adolescentes, de zero a 24 anos, em projetos socioeducativos. Segundo a diretora, o Pão dos Pobres afirma que a maioria desses jovens está em situação de vulnerabilidade. Muitos deles são internos na fundação, ou seja, residem neste local. Professores explicavam que através de cursos profissionalizantes e oficinas, o Pão dos Pobres objetiva formar cidadãos, colocando-os, ou recolocando-os na sociedade, ajudando-os a se desenvolverem. Muitos destes jovens e crianças internos estudam na escola L.

[5] OSPA – Orquestra Sinfônica de Porto Alegre.

B. em um turno, e em outro fazem os cursos profissionalizantes da fundação. Alguns exemplos de formação destes cursos são: padeiro, marceneiro, técnico em informática. Este é o quarto grande grupo de alunos que a escola atende.

O trabalho de campo ocorreu na Escola Estadual de Ensino Fundamental Professora L. B. no período de 23 de outubro de 2014 a 11 de novembro de 2014. No nosso planejamento pretendíamos contar com dez horas aulas, mas, devido a imprevistos, foram trabalhadas nove horas aulas com uma turma do nono ano do Ensino Fundamental. Esta turma era composta por 18 alunos de idades próximas.

A proposta, primeiramente, foi estudar o que alunos do 9° ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública da rede estadual do município de Porto Alegre, compreendem sobre os conceitos de área e perímetro. Este estudo também se propôs verificar quais são as dificuldades apresentadas pelos alunos ao se depararem com problemas que exijam o cálculo de área e perímetro. A estratégia para o estudo foi verificar e analisar dificuldades dos alunos em compreender as ideias de perímetro e área, reconstruindo/construindo nestes estudantes possíveis conceitos equivocados. O meio para gerar os dados necessários que nos permitiu fazer tal análise é uma sequência de atividades sobre o tema.

Optamos por uma abordagem de pesquisa qualitativa, pois esse método busca entender detalhadamente por que um indivíduo, em um problema, escolhe determinado caminho ou executa determinada ação. Essa busca de tentar encontrar respostas para algumas situações reforçou a nossa escolha de trabalhar apenas com uma turma na execução da prática. Isso viabilizou uma análise detalhada de cada solução apresentada por cada aluno. De fato, tornou possível o estudo de caso. De acordo com Romão (1998),

> A pesquisa qualitativa revela áreas de consenso (positivos ou negativos) nos padrões de respostas. Ela determina quais ideias geram uma forte reação emocional. Além disso, é útil em situações que envolvam o desenvolvimento e aperfeiçoamento de novas ideias. (Romão,C. 1998)[6].

[6] Trecho retirado do artigo intitulado Abordagens Qualitativas de Pesquisa. César Romão (1998). Disponível na web em 07 de outubro de 2015 no endereço: http://www.cesarromao.com.br/redator/item24132.html

Como buscava verificar possíveis dificuldades e possibilidades de reconstrução dos conceitos, toda a sequência didática foi pensada para que os estudantes produzissem soluções para os problemas. Para encontrar estas soluções, os alunos deveriam medir, manipular objetos, pensar caminhos e traçar estratégias, tornando assim, nossa pesquisa um *estudo de caso*. Este tipo de pesquisa, para Lüdke e André (1986), “busca o contado direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, através de um trabalho intensivo de campo”. Em nossa pesquisa, procuramos esse contato com aluno, dialogamos com ele, buscamos entender seus pensamentos, dando a devida relevância para cada uma de suas observações.

Com o andamento do trabalho, como se prevê em um estudo de caso, surgiram novos elementos que não esperávamos no início. Na maioria das vezes essas descobertas surgiam através de manifestações de alunos, na resolução de um determinado exercício, manipulando objetos de medida, ou em diálogos e indicações físicas. Todas essas manifestações sempre foram tratadas como algo relevante. Pois, em um estudo de caso qualquer destas ações pode conter um pensamento significativo do aluno sobre determinado conceito, portanto, é fundamental para a pesquisa, fazendo-nos refletir sobre as ações do sujeito. Visando análise posterior, essas situações foram sempre registradas por avaliação escrita, fotos e gravações (vídeo e áudio).

Segundo Yin (2001), um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa ou um grupo de pessoas. Portanto, podemos concluir que seu objetivo é compreender profundamente os “como” e os “porquês” desse elemento em foco. Este tipo de estudo evidencia suas características próprias, deixando claros os aspectos que nos interessam como pesquisadores. Para o próprio Yin (2001), será importante definirmos qual a melhor estratégia a ser seguida em uma pesquisa, por isto o autor classificou cinco possibilidades de escolha: experimento, levantamento, análise de arquivos, pesquisa histórica e estudo de caso. Precisávamos optar por uma metodologia de pesquisa. Para isto nos baseamos em tudo que foi citado anteriormente, e também levamos em consideração aspectos levantados por Yin (2001). Dentre estes aspectos, seguem três condições importantes para determinar qual estratégia deve ser adotada:

1° O tipo de questão de pesquisa proposto;

2° Extensão de controle que o pesquisador tem sobre eventos comportamentais efetivos;

3° No grau de enfoque em acontecimentos históricos em oposição a acontecimentos contemporâneos.

Para conseguir decidir, analisando estes três pilares, qual estratégia é a melhor escolha para nossa pesquisa, é interessante também analisarmos o quadro a seguir. Neste quadro é possível identificar a melhor estratégia. Essa decisão deve se basear em nossas expectativas na forma de questão da pesquisa, e que tipo de contato nós pesquisadores teremos com o experimento e os sujeitos envolvidos.

Quadro 2. Situações relevantes para diferentes estratégias de pesquisa.

Estratégia	**Forma da questão de pesquisa**	**Exige controle sobre eventos comportamentais?**	**Focaliza acontecimentos contemporâneos?**
Experimento	como, por que	Sim	Sim
Levantamento	quem, o que, onde, quantos, quanto	Não	Sim
análise de arquivos	quem, o que, onde, quantos, quanto	Não	sim/não
pesquisa histórica	como, por que	Não	Não
estudo de caso	como, por que	Não	Sim

Fonte: Yin (2001), pág. 24.

A questão norteadora de nossa pesquisa, *como os estudantes do nono ano do Ensino Fundamental compreendem os conceitos de área e perímetro?* Reforça nosso entendimento de que nosso trabalho é um estudo de caso. Aliado a isto, o fato de que em nossas atividades propostas serão identificadas situações que uma estratégia específica possui uma vantagem única distinta das demais. No estudo de caso isso ocorre quando temos uma pergunta do tipo “como” e “por que” sobre um conjunto contemporâneo de acontecimentos, sobre o qual o pesquisador tem pouco ou nenhum controle. O estudo de caso é uma estratégia diferente, que possui seus próprios projetos de pesquisa. O projeto de pesquisa é a sequência lógica que conecta os dados empíricos as questões de pesquisa iniciais de estudo e, em última análise, às suas conclusões.

Um projeto de pesquisa é um plano de ação para se sair de um ponto inicial e se chegar a um ponto final, o início pode ser definido como o conjunto de questões a serem respondidas, e o final o conjunto de respostas sobre essas questões. Neste caminho pode-se encontrar um grande número de etapas, incluindo a coleta e análise de dados relevantes. Por isto, consideramos que um estudo de caso permitirá uma sobreposição de estratégias, já que nestes caminhos poderão aparecer outras questões que não necessariamente estavam previstas no início da pesquisa. Questões do tipo "o que?", por exemplo. Uma questão deste tipo e que estamos discutindo em nossa pesquisa é: o que podemos fazer para melhorar o entendimento dos alunos sobre os conceitos de área e perímetro? Com questões deste tipo desenvolvemos hipóteses e ideias que nos propomos a respondê-las. Essa parte da pesquisa será de caráter exploratório, pois estas respostas foram construídas após e/ou simultaneamente com a execução das atividades e resoluções de problemas apresentados pelos estudantes durante os encontros. Logo, será focalizada em acontecimentos contemporâneos, mas obviamente, com um embasamento teórico anterior.

Segundo Yin (2001), os critérios para desenvolver bons casos para o ensino são bem diferentes dos critérios para se desenvolver pesquisa. Os estudos de caso que se destinam ao ensino, não precisam se preocupar com a apresentação justa e rigorosa dos dados empíricos; os que se destinam à pesquisa precisam fazer exatamente isso.

Sobre o estudo de caso, Lüdke e André (1986) complementam:

> O estudo de caso é o estudo de um caso, seja ele simples e específico. O caso é sempre bem delimitado, devendo ter seus contornos claramente definidos no desenrolar do estudo. O caso pode ser similar a outros, mas é ao mesmo tempo distinto, pois tem um interesse próprio, singular. (Ludke e André, 1986, p. 17).

Na sequência deste capítulo, apresentaremos nosso planejamento para cada encontro com a turma, justificando a escolha das atividades que compõem este roteiro.

3.2. Sequência de Atividades

Nesta seção apresentaremos o planejamento da sequência de atividades para cada um dos encontros. Como estamos abordando nesse capítulo a metodologia, ressaltamos que esta seção não se trata de uma descrição dos encontros, mas sim o nosso planejamento para estes. Veremos no próximo capítulo, intitulado *análise dos dados*, uma descrição detalhada de cada uma das aulas, além de uma análise das resoluções apresentadas pelos discentes. Portanto, o que descrevemos nesta seção não significa que tenha ocorrido exatamente dessa maneira, isso ocorrerá no capítulo 4. Nossa pesquisa possui uma característica que consideramos interessante, de não conseguir prever com exatidão a reação dos estudantes envolvidos diante das tarefas. Muitas das vezes, ao aplicarmos nosso plano, os estudantes tiveram ações diferentes do que esperávamos, seja na resolução das atividades, optando por caminhos diferentes, ou no próprio diálogo e atitudes. Isso nos forçou a adaptarmos conforme andava a pesquisa, modificando alguns exercícios.

Boa parte dessas atividades, com algumas modificações que consideramos importantes, decisão tomada após análise dos encontros, é o que consiste no produto técnico. O passo a passo dessas atividades presentes em nossa proposta para a construção/reconstrução dos conceitos de área e perímetro, o produto técnico, se encontra no apêndice 1.

3.2.1. Primeira Aula

3.2.1.1. Planejamento do Primeiro Encontro

A primeira aula foi planejada para ocorrer no dia, 23 de outubro de 2014, com duração de duas horas/aula.

Para este dia planejamos dar início aos trabalhos. Com objetivo de descobrir o que os alunos entendem sobre perímetro, os convidaremos a responderem a seguinte questão: *Uma pessoa precisa calcular o perímetro de um terreno, mas não sabe o que isto significa, como você ajudaria esta pessoa? Você saberia dizer o que é e como calcular o perímetro?*

Estas respostas serão escritas pelos alunos em folhas e entregues a nós, para análise posterior.

Em seguida vamos propor para que os estudantes resolvam o seguinte problema: *A diretora da escola precisa trocar os rodapés da nossa sala de aula, a fim de que não sobre e nem falte madeira, qual a quantidade de rodapés que ela precisará comprar?*

Nesta atividade, em um primeiro momento, nosso plano é que os alunos não recebam nenhum objeto para auxiliar nas medidas. A proposta tem como objetivo avaliar se a concepção de medir é consistente para os estudantes. O planejado é dividir a turma em trios. Cada grupo será convidado a apresentar sua resposta, usando a unidade que considerem a mais conveniente: palmo, pés, braços e etc. Caso um dos grupos solicite alguma ferramenta, como, por exemplo, uma trena, nós vamos disponibilizar. Porém levaremos essas ferramentas dentro de uma mochila, para entregar apenas quando solicitadas. Com isto esperamos colocar diante dos estudantes uma situação-problema onde, em trios, eles devem executar a tarefa. Em grupo os estudantes serão obrigados a trocar ideias, argumentar e, acima de tudo, respeitar o pensamento do colega. Este pensamento vai ao encontro das ideias de Plaza e Gómez, segundo os pesquisadores este tipo de atividade sempre colaborará com o amadurecimento intelectual do indivíduo.

Após compararmos as medidas encontradas por cada grupo em uma tabela, vamos propor a seguinte pergunta: *A diretora não vai conseguir ir até a loja. Por telefone, como ela pode explicar o que precisa, e como pediria a* *quantidade necessária de rodapé?* O objetivo com esta pergunta será de chamar a atenção dos alunos para a importância de uma palavra que defina o tamanho do contorno de uma determinada figura plana. Além disso, é necessário que entendam a necessidade de haver uma unidade de medida. Todas estas perguntas também serão respondidas em folhas, a fim de possibilitar uma análise posterior para a pesquisa.

Para fechar o encontro, pretendemos distribuir uma fita métrica para cada grupo. Eles, então, vão medir o tamanho real do contorno da sala de aula. Veremos no capítulo 4 que os estudantes acabaram solicitando antes do esperado, no meio do encontro, o que fez com que entregássemos o instrumento antes do previsto. Além disso, vamos discutir com os alunos qual grupo encontrou a medida mais próxima do tamanho real. Trabalhando com a fita métrica os estudantes deverão entrar em contato com a ferramenta, proporcionando a eles um ambiente diferente dos que estão mais acostumados, de somente executar contas no caderno.

3.2.2. Segunda Aula

3.2.2. 1. Planejamento do Segundo Encontro

No início deste segundo encontro nosso plano é fazer uma pesquisa com os discentes. No laboratório de informática usando a internet, livros didáticos e dicionários da escola, os estudantes deverão pesquisar o significado da palavra perímetro. Na sequência, sobre a mesa do professor, vamos colocar alguns objetos que possam auxiliar os discentes no cálculo do perímetro: réguas, barbantes, compassos, transferidores, malhas quadriculadas transparentes e não transparentes. Os alunos receberão a informação de que essas ferramentas vão ficar a disposição para que executem a tarefa. Em seguida vamos propor um exercício que convide os estudantes a calcularem o perímetro de figuras. Segue abaixo a série destas figuras.

1) É possível calcular o perímetro de cada figura abaixo? Quando for possível, calcule e explique como você fez.

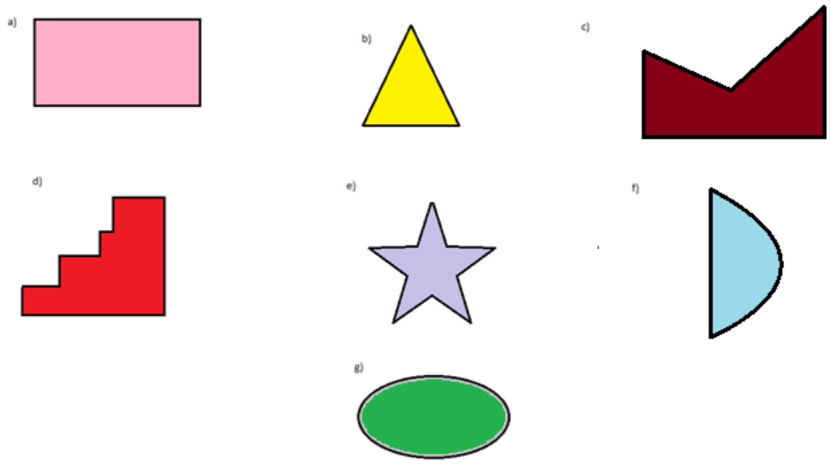


Figura 31 - Atividade sobre perímetro para o 2° encontro. Fonte: O autor

Quando os alunos escolherem alguma ferramenta, serão convidados a justificarem o porquê da escolha e explicar como usaram.

Um dos nossos objetivos de fazer com que os estudantes pesquisem o significado da palavra perímetro é propor uma comparação das respostas de cada grupo: aquelas apresentadas por eles e as resultantes de suas pesquisas. Também pretendemos levantar algumas questões, por exemplo: esta definição foi suficiente para o cálculo do perímetro nas figuras da atividade anterior? Atendeu todas as necessidades? O que você melhoraria nesta definição? Por fim, tentar chegar a um consenso daquela que será assim considerada pelos alunos a melhor definição.

3.2.3. Terceira Aula

3.2.3.1. Planejamento do Terceiro Encontro

Neste encontro, nosso objetivo será o de lançar aos grupos problemas que discutam o conceito de área. Para verificarmos o que os estudantes entendem por área, começaremos com a seguinte questão: *Aquela mesma pessoa precisa calcular a área do terreno, mas não sabe o que isto significa e nem como calculá-lo, como você ajudaria esta pessoa?*

Em seguida iriemos propor uma pesquisa com os discentes. No laboratório de informática usando a internet, livros didáticos e dicionários da escola, eles devem pesquisar o significado da palavra área. Todas as respostas deste dia devem ser registradas através da escrita de cada aluno, com o objetivo de uma análise posterior.

Na sequência deste encontro, apresentaremos a ferramenta Geoplano aos alunos. Para isto partiríamos de uma atividade:

1) Com ajuda de elásticos, reproduza as figuras da imagem abaixo no seu Geoplano. Em seguida, tomando como unidade de medida um quadradinho formado por quatro pregos, calcule a área de cada uma destas figuras explicando como você resolveu.

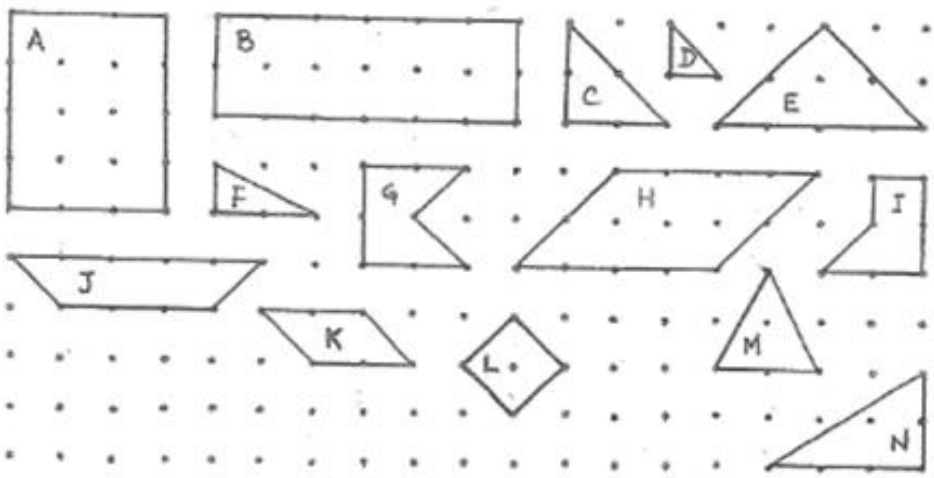


Figura 32 - Primeira atividade sobre área do terceiro encontro. Fonte - Disponível em http://mdmat.mat.ufrgs.br. Acesso em 15 de novembro de 2015.

Com esta atividade nosso objetivo é que os alunos se deem conta que para calcular a área de algumas figuras, nem sempre precisaremos usar uma fórmula. Através da observação podemos concluir as “nossas próprias regras”, se bem compreendido o significado de área. Como, por exemplo, para calcular a área de um triângulo retângulo, é muito comum ver os estudantes aplicarem a seguinte fórmula: $A = \frac{B \cdot h}{2}$, com B significando medida da base e h a medida altura do triângulo. Porém, com auxílio da visualização em uma malha quadriculada, podemos concluir que um triângulo retângulo pode se tratar da metade de um retângulo, portanto, bastaria calcular a área deste retângulo e dividir posteriormente por 2, obtendo mesmo assim a área deste triângulo.

Novamente, em todos os itens, nas resoluções, explicações e nas justificativas do uso das ferramentas, o registro escrito será feito pelos estudantes para auxiliar na análise posterior.

3.2.4 Quarta Aula

3.2.4.1. Planejamento do Quarto Encontro

No nosso planejamento, para esta aula, iniciaremos convidando os estudantes a trabalharem na seguinte atividade: *A diretora precisa trocar o piso da nossa sala de aula, como podemos ajudá-la a fazer o pedido da quantidade para a loja? Para que não haja desperdício, qual a quantidade de piso necessária?*

Novamente, pretendemos fazer uma tabela com as respostas obtidas pelos grupos. Como na discussão de perímetro, não disponibilizaremos ferramentas para os cálculos. A ideia é que os alunos usem o que tenham a disposição, como capa de livro, caderno, folhas e etc. Se algum grupo solicitar alguma ferramenta, disponibilizemos o pedido. Ao final, serão comparados os resultados encontrados por cada grupo.

Após a realização da primeira parte do encontro, caso nenhum dos grupos fale sobre unidades de medida na atividade anterior, ou nem mesmo solicite fita métrica, devemos propor que se retome o problema do pedido de material da diretora para a loja. O contexto será de que, novamente, este pedido se dará através do telefone, e, portanto, é necessário que o atendente entenda que quantidade de piso a diretora precisa. Se os alunos medirem, por exemplo, pela superfície da capa do caderno, iremos perguntar: *Não existe uma maneira mais rápida para realizar este cálculo?*

Com esta pergunta queremos verificar se os estudantes irão apresentar ideias que facilitem o cálculo da área, deixando o processo mais rápido. Por exemplo, para obter o tamanho de sua superfície, será mais fácil multiplicar a medida do comprimento dos dois lados da sala de aula com base retangular. Além disto, queremos ajudá-los a concluir que, para responder este problema da diretora, será necessário fazer a conversão para alguma unidade conhecida pelo atendente.

Discutiremos com os alunos os significados e definições encontradas por eles na pesquisa da aula anterior. Como no encontro que tratou de perímetro, o objetivo é que os alunos cheguem a um consenso sobre a melhor *definição* de área. Perguntaremos se as definições deles, ou as encontradas na pesquisa, serão suficientes para o cálculo das áreas das figuras do exercício da aula passada, e para resolver o problema do piso. Se estas definições não os satisfizerem, iremos propor que eles as melhorem ou criem uma nova. Ao fim, esperamos que eles cheguem a um acordo.

3.2.5. Quinta Aula

3.2.5.1. Planejamento do Quinto Encontro

De acordo com nosso planejamento, para este encontro, pretendemos contar com duas horas/aula. Neste dia iremos medir o tamanho real da área do piso da sala de aula, e pretendermos concluir qual dos grupos irá melhor se aproximar do resultado. Em seguida, também neste quinto encontro, colocaremos a disposição dos alunos as mesmas ferramentas da atividade sobre perímetro, para que escolham o que achem mais conveniente ao trabalharem a seguinte questão:

É possível calcular a área de cada figura abaixo? Quando for possível calcule e explique como você fez. Por que escolheu este instrumento?

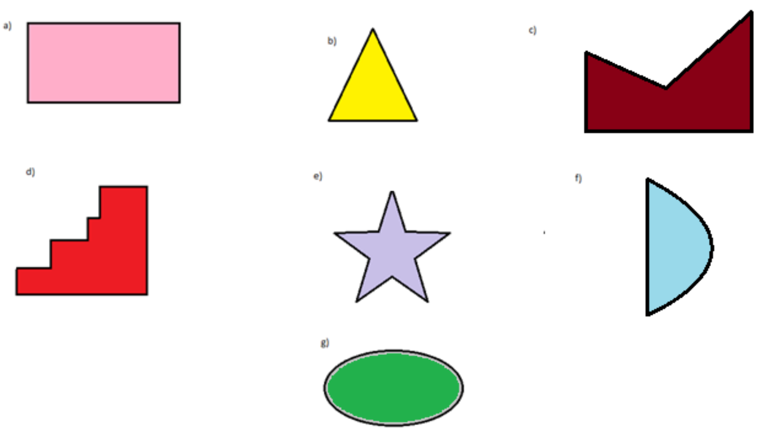


Figura 33 - Atividade sobre área prevista para o 5° encontro. Fonte o autor.

Nota-se que nesta atividade também estamos preocupados em saber o que leva o aluno a escolher determinado instrumento, e também descobrir como eles o usariam.

Vamos propor também uma atividade que tem como objetivo construir, com os alunos, raciocínios que facilitem o cálculo de área, deduzindo fórmulas e processos. Mostrando que quando não tiverem malhas quadriculadas ao alcance, mas se souberem algumas medidas, será possível calcular de maneira rápida a área de algumas figuras. Para isto, iremos contar com o auxílio do Geoplano e alguns elásticos. Através desta ferramenta construiremos com os alunos algumas ideias além das desenvolvidas na aula anterior, como por exemplo, que para calcular a área de um trapézio basta notar que podemos construí-la a partir de um retângulo.

Consideramos que dois períodos de aula serão mais que suficientes neste último dia. Planejamos uma sobra de tempo, caso ocorra algum imprevisto.

Vale ressaltar que depois de cada aula faremos uma análise e, para os próximos encontros o planejamento poderá sofrer modificações. Pois, segundo a proposta desta pesquisa, a sequência das atividades estará diretamente relacionada com o que os alunos irão produzir nos encontros. O que foi construído nos planejamentos apenas se baseou em suposições, e nas nossas experiências docentes, das possíveis respostas que os alunos poderão apresentar dos conceitos de área e perímetro.

Neste capítulo 3 apresentamos nossa metodologia, tanto a teoria que nos deu a base necessária na hora de montar as estratégias nas atividades, como a descrição detalhada do nosso planejamento para cada encontro com os estudantes. No próximo capítulo, o quarto, apresentaremos a descrição de como ocorreu cada uma das atividades, fazendo, com o auxílio do referencial teórico, a análise dos resultados obtidos. Discutiremos as resoluções e explicações apresentadas pelos alunos nos exercícios.

4. Análise dos dados

A escolha deste tema surgiu a partir da nossa experiência em sala de aula. Trabalhado com estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, percebemos que muitos estudantes possuem dificuldade em resolver problemas de matemática. Principalmente em relação à visualização e compreensão dos conceitos. É comum ver estudantes no Ensino Médio aplicando fórmulas sem saberem o porquê desta escolha. Por exemplo, mais de uma vez, presenciamos discentes adotando $2\pi r$, chamando de r a medida do raio de uma circunferência, para o cálculo da área desta figura, outras vezes se adotou πr^2 para o cálculo do comprimento de uma circunferência. Este é um exemplo que um conceito não compreendido pode favorecer o insucesso do aluno na resolução de problemas. Muitas vezes, os alunos podem apenas ter apreendido uma regra na época que foram convidados a trabalharem com estas ideias, mas não entenderam o significado delas.

A escolha do 9° ano do Ensino Fundamental para o desenvolvimento da nossa prática foi feita pelo fato de nesta etapa, costumeiramente, se abordar o assunto Geometria em seu currículo. Também se soma o fato de que neste ciclo os alunos já trabalharam, em anos anteriores, com os conceitos de perímetro e área, pois este assunto é, geralmente, tratado no sétimo ano do Ensino Fundamental. Com isto, a chance de que os estudantes já tivessem tido contato com os conceitos foi maior, o que se tornou relevante para nossa pesquisa, já que um dos objetivos da sequência didática é de auxiliar na reconstrução/construção destes conceitos. Além disto, o fato de este contato com o tema já ter ocorrido, nos auxiliou nas análises dos resultados, verificando a forma de compreensão dos alunos sobre as ideias de área e perímetro.

Com base no referencial teórico e na análise dos registros de trabalhos dos estudantes, nosso objetivo foi observar qual a compreensão sobre estes conceitos, além de identificar e analisar as estratégias utilizadas por eles nas atividades sobre área e perímetro. Vale ressaltar, que em todos os encontros foram feitas gravações de áudio e vídeo das situações de sala de aula, além da obtenção dos registros escritos produzidos pelos discentes nas atividades. Isso auxiliou nas análises dos resultados e a entender de que forma os estudantes compreendiam os conceitos apresentados.

4.1. Primeira Aula

4.1.1. Relatos, Observações e Conclusões da Primeira Aula.

Em nosso planejamento, no primeiro encontro, para depois de executada a medição, havíamos abordado um problema. No texto, afirmávamos que quem compraria a madeira do rodapé seria a diretora da escola, e esta precisava encomendar o material por telefone. A preocupação era como faria para pedir a quantidade exata de material para o vendedor. Queríamos chamar atenção para a importância de uma unidade de medida universal, de conhecimento de todos, e realçar que de fato medir corretamente é essencial. Durante nossa prática, para alguns estudantes esse raciocínio definido por Caraça (1952), de que o primeiro passo para medir é escolher uma unidade considerando a sua praticidade, já era algo concreto. Pois, logo no início da primeira atividade, um dos alunos comentou: *"se eu tivesse uma trena mediria isso bem certinho".* Este aluno, juntamente com os demais, questionou se não disponibilizaríamos uma trena. Como havia sido previsto no planejamento que se fosse solicitado alguma ferramenta entregaríamos uma para cada um, assim o fizemos. A unidade centímetro foi usada naturalmente pela turma durante a realização das atividades.

Ao iniciar os trabalhos, propondo a primeira atividade do roteiro, esperávamos enfrentar desconfiança e uma oposição por parte dos alunos em participar da tarefa. Essa expectativa negativa se deveu as nossas impressões ao observar previamente a turma. Não tivemos impressões positivas, e essa recusa por parte dos alunos de fato aconteceu. No início os alunos pareciam não estarem interessados em participar, procuravam argumentos para se justificar, iam se opondo as nossas propostas. Aos poucos fomos convencendo-os do contrário e, principalmente, quando começaram as atividades de medir com auxílio de ferramentas, pareceram, finalmente, estarem mais motivados.

Começamos a primeira aula perguntando se sabiam o significado de perímetro, ou se já tinham ouvido falar nesta palavra. Logo em seguida entregamos uma folha com um exercício de seguinte enunciado: *Uma pessoa precisa calcular o perímetro de um terreno, mas não sabe o que isto significa. Como você ajudaria esta pessoa? Você saberia dizer o que é e como calcular o perímetro?*

Muitos alunos disseram que não saberiam responder, pois já não lembravam mais o que isto significava. Já outros, nem sabiam se tinham de fato aprendido este conceito. Explicamos que seria importante que tentassem escrever o que lembrassem, ou o que eles achavam que significaria esta palavra. Todos os presentes na aula entregaram a folha solicitada com algum tipo de resposta. Seguem imagens com exemplos de respostas produzidas pelos estudantes. Para preservá-los, estudantes serão identificados apenas pelas letras iniciais de seus nomes.

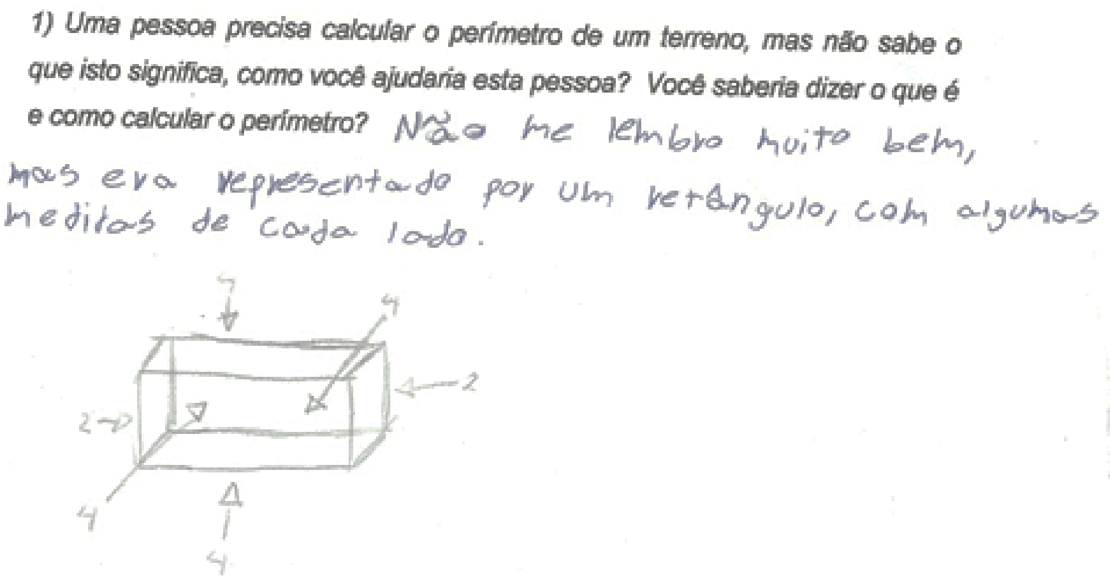

1) Uma pessoa precisa calcular o perímetro de um terreno, mas não sabe o que isto significa, como você ajudaria esta pessoa? Você saberia dizer o que é e como calcular o perímetro? Não me lembro muito bem, mas era representado por um retângulo, com algumas medidas de cada lado.

Figura 34 - Solução produzida pelo aluno B.S na 1°atividade do 1° encontro. Acervo do autor.

Nesta resposta ocorreram dois fatos importantes. Primeiro, para B.S, perímetro só faz sentido em figuras retilíneas; segundo, houve uma confusão entre figuras planas e tridimensionais, já que ao se referir em retângulo acabou desenhando um paralelepípedo. Pelo menos, para ele, a ideia de contorno está presente, B.S. nos mostra isto ao referir que a palavra se tratava de algo como *um retângulo com medidas nos lados*. Apesar de desenhar um paralelepípedo, ele mantém seu argumento, de *lados de uma figura,* ao apontar para os segmentos de retas. Observando a solução, poderíamos concluir que o estudante está pensando na definição válida para polígonos, mas em nenhum momento encontramos em sua resposta uma referência que associe perímetro a um problema do tipo aditivo ou multiplicativo. Logo concluímos que, em parte, para B.S., o conceito não foi bem construído.

Segue imagem da definição apresentada pelo aluno C.O.

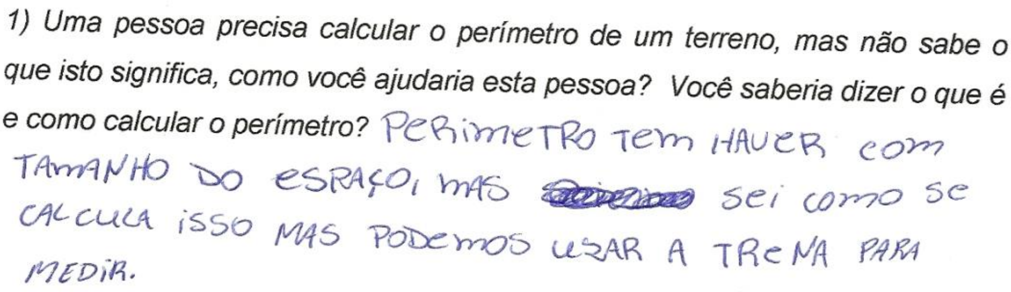

1) Uma pessoa precisa calcular o perímetro de um terreno, mas não sabe o que isto significa, como você ajudaria esta pessoa? Você saberia dizer o que é e como calcular o perímetro? PERIMETRO TEM HAVER COM TAMANHO DO ESPAÇO, MAS SEI COMO SE CALCULA ISSO MAS PODEMOS USAR A TRENA PARA MEDIR.

Figura 35 - Solução produzida pelo aluno C.O na 1°atividade do 1° encontro. Acervo do autor

Este estudante afirmou que sabia como calcular, e dá a dica de usarmos uma trena como instrumento para medir. Porém, para ele, perímetro teria relação com tamanho do espaço, o que contradiz sua afirmação já que esta palavra se aproxima ao conceito de área. Para este aluno, igualmente ao anterior, o conceito e compreensão dos significados não estão bem solidificados. Se voltarmos o olhar para os quatro estágios que a criança deve superar para ter conhecimento e manejo de uma grandeza dada, definidos por Plaza e Gómez (1988), veremos que B. S. não apresenta dificuldades para a primeira etapa. Ele consegue ter a percepção de uma grandeza no objeto em que cita de exemplo, notamos isto quando fala em medidas dos lados. Já o aluno C.O ainda não superou o primeiro estágio. Ele não consegue identificar a grandeza para a propriedade perímetro, tenta associar este conceito ao tamanho do espaço. O significado e a grandeza envolvida em espaço não têm nenhuma relação com perímetro, então concluímos que ele está fazendo uma confusão entre os conceitos.

Em um universo de 18 alunos que compareceram a este primeiro encontro, apenas dois estudantes apresentaram uma resposta que consideramos consistente sobre os conceitos.

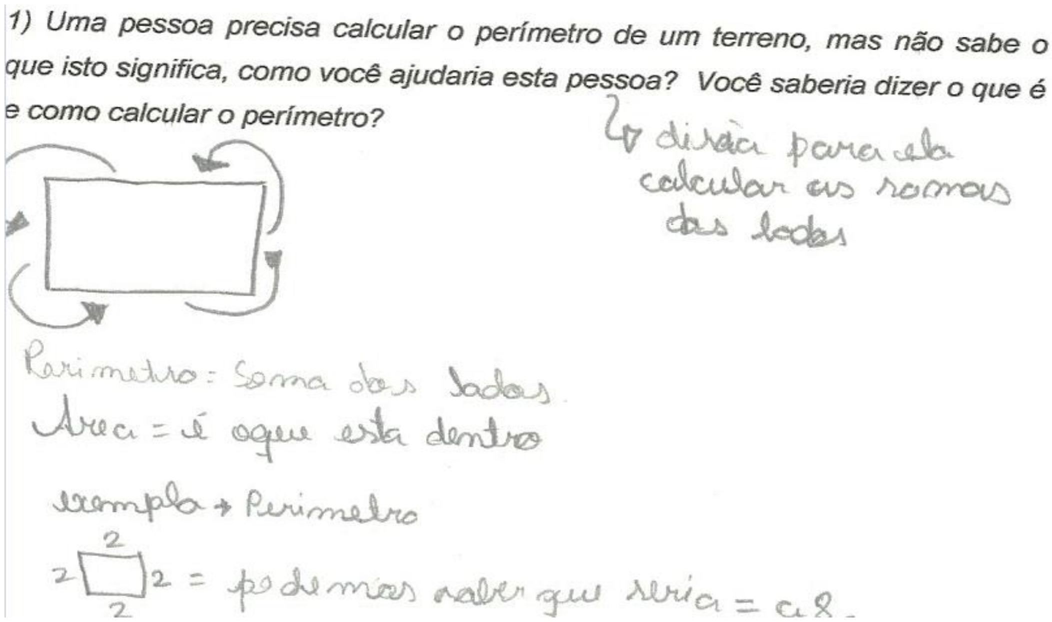


Figura 36 - Solução produzida pelo aluno G.G na 1°atividade do 1° encontro. Acervo do autor.

Para calcular o perímetro G.G. apresenta desenhos e explicações, inclusive com exemplos numéricos e esquemas. Além disso, mostra uma definição para a palavra. A resposta de G.G, para o significado de perímetro, é o que encontramos com mais frequência em livros e dicionários, porém, discutiremos mais tarde se esta é a melhor definição. No caso do aluno G.G. foi uma boa explicação, pois seu desenho é um polígono, e a definição apresentada por ele preenche os requisitos para perímetro destas figuras.

Podemos dizer que o pensamento deste aluno atingiu a quarta etapa ou quarto estágio de Plaza e Gómez (1988). Ele sentiu a necessidade de dizer, no exemplo, quanto mede o comprimento dos lados. Talvez inconscientemente, tratou o perímetro como um problema do tipo aditivo ou multiplicativo, já que não sabemos o que ele pensou, se somou 2 + 2 + 2 + 2, ou simplesmente se deu conta do processo multiplicativo e efetuou a multiplicação 4 x 2. Pois sua resolução se deteve em apresentar o comprimento de cada lado do quadrado, afirmando que perímetro é a soma dos lados, e mostrando um resultado numérico para esta operação. Podemos concluir que a necessidade de expressar a medida com um valor numérico, característica da quarta etapa, que, portanto, também foi atingida.

Em seguida, neste mesmo encontro, nossa sequência didática fez um convite para os estudantes resolverem o seguinte problema: *A diretora da escola precisa trocar o rodapé da nossa sala de aula, a fim de que não sobre e nem falte madeira, qual a quantidade de rodapé que ela precisará comprar?*

Para a realização da atividade dividimos a turma em grupos de três estudantes cada. Não foi colocada a disposição deles, em um primeiro momento, nenhuma ferramenta para medir a quantidade correta de rodapés. Nossa intenção era chamar atenção para a importância da unidade de medida em problemas deste tipo. Porém, após ter decorrido um curto tempo do início da atividade, onde neste intervalo os alunos usavam pés e palmos para medir, um deles falou o seguinte: *se tivesse uma fita métrica eu mediria isto rapidinho. Professor, tu não tem uma para me emprestar?*

Nosso planejamento para a discussão da unidade de medida estava sucumbindo, pois como era de se esperar, quando este estudante fez o pedido da fita, todos os outros também assim o fizeram. Havíamos planejado que se algum estudante solicitasse alguma ferramenta entregaríamos o objeto, então alcançamos uma para cada grupo. Todos os grupos então iniciaram o processo de medir os rodapés com o auxílio das fitas métricas.

Uma das dificuldades apresentadas pelos estudantes durante a prática de medir, foi a dúvida de *se iniciar pelo centímetro 0 ou 1* na trena. A questão gerou discussões na turma toda, e através de exemplos, usando o quadro negro e régua, tentamos mostrar que não fazia diferença por onde íamos começar. Perguntamos: *quantos centímetros de comprimento terão se iniciarmos a medida no traço do centímetro um e formos até o décimo centímetro?* Quase todos responderam em voz alta nove centímetros. E logo na sequência perguntamos: *E se andarmos do zero até o décimo centímetro, quantos centímetros andaremos?* A maioria novamente respondeu corretamente, dez centímetros. Fizemos, então, a mesma pergunta, só que agora iniciando pelo zero e indo até o quinto centímetro. Novamente a maioria respondeu cinco centímetros. Depois de algumas discussões e comentários por parte dos alunos durante estas atividades, um deles falou: *"Então tanto faz? É só percorrer a distância?".* Nossa resposta foi que sim.

Tivemos a certeza que ao dispor uma trena para cada aluno, contribuímos para que a visualização dos exemplos discutidos ocorresse de maneira mais eficaz. Enquanto realizávamos a atividade, os estudantes iam acompanhando o processo na sua trena, esta visualização, como defende Lovell (1989), foi fundamental para o entendimento. Soma-se a isto, como contribuição, o fato deles todos, em algum momento da aula, terem tentado medir o comprimento dos rodapés manipulando os objetos envolvidos. Por fim, os estudantes parecem ter entendido, através de seus comentários, de que não fazia diferença de onde começarmos a medir, desde que não se olhe para o final da régua, e sim o quanto foi percorrido. Nesta atividade tivemos o comentário de cada aluno em um papel, pois iam respondendo e participando do grande diálogo que se deu na sala de aula. Porém, observando as imagens das filmagens quando fomos construir esta parte do texto, concluímos que quase todos os estudantes compreenderam as ideias.

No final da aula foi construída uma tabela na lousa com as medidas encontradas por cada grupo, sendo que um representante deveria anotar o valor e explicar onde se localizavam na sala essas medidas.

Figura 37 - Estudante medindo o rodapé da sala de aula.

Figura 38 - Alunos medindo rodapés da sala de aula.

Depois disto feito, abrimos discussão para nossa segunda questão: *A diretora não vai conseguir ir até a loja. Por telefone, como ela pode explicar o que precisa, e como pediria a quantidade necessária de rodapés?* Um aluno respondeu,

- Ora, é só pedir 27,42 metros de madeira

E eu respondi,

- Mas será que apenas com esta informação o atendente saberá o que a diretora precisa?

Esta conversa foi se desenrolando até que uma estudante comenta,

- não seria o contorno da sala?

Respondemos que sim, isto ajudaria muito, deixava mais claro o que a diretora necessitava. Outro aluno falou,

- Isso não tem haver com o perímetro professor?

E novamente respondemos que sim, era justamente isto que o perímetro nos ajudava a definir, porém não nos aprofundamos na discussão, pois, faríamos isto na segunda aula com a pesquisa dos significados.

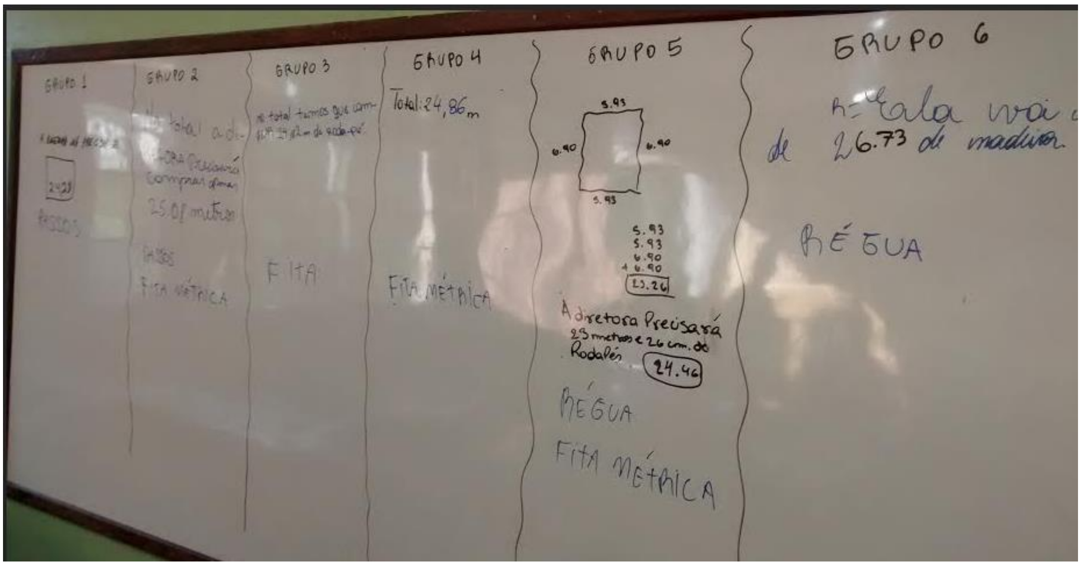


Figura 39 - Tabela produzida pelos alunos com os valores de rodapés encontrados por cada grupo. Acervo do autor.

Outro fato interessante que ocorreu durante o encontro foi que os estudantes começaram a se perguntar qual dos grupos teria encontrado o resultado “correto” para medida do contorno da sala de aula. Esse tema foi trazido por eles após a construção da tabela, já que nela se apresentaram valores próximos e outros distantes entre si. Aproveitei este momento para propor algumas reflexões: como vocês mediram os rodapés? Mediram de maneira correta? Existe uma maneira correta?

Afirmamos que todos estavam errados, e eles questionaram como podíamos dizer isto, queriam saber se nós havíamos medido ou não o valor real. Lembramos de que nenhum dos grupos havia levado em consideração a porta, todos então trataram de medir e descontar este valor. Isso tudo depois de muita discussão entre eles e de chegarem a um acordo de que o marco da porta não fazia parte do rodapé. Na sequência, as medidas da quantidade de rodapés foram retomadas. Os grupos refizeram as contas e apresentaram os novos valores.

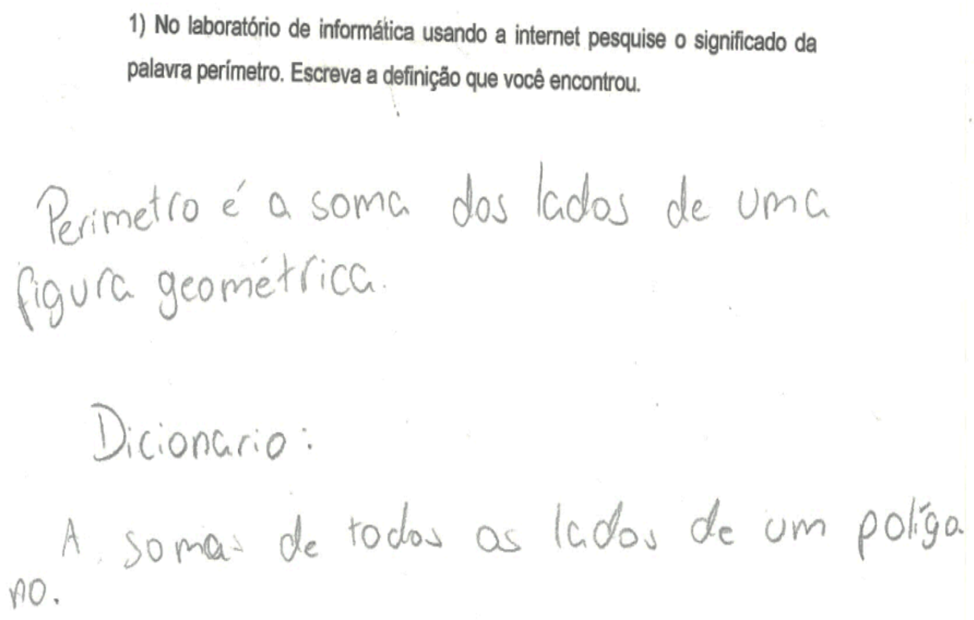
4.2. Segunda Aula

4.2.1. Relatos, Observações e Conclusões da Segunda Aula.

O segundo encontro ocorreu no dia 27 de outubro de 2014. Diferentemente do planejamento que previa duas horas/aula para as atividades, neste dia dispomos de apenas uma hora/aula, pois a turma estava em uma atividade fora da escola e os alunos demoraram a retornar. Vale ressaltar que não fomos comunicados previamente desta saída dos estudantes.

Após o término da primeira aula fomos até o laboratório de informática verificar se os computadores e a internet estavam funcionando, e constatamos que tudo funcionava. No início do segundo encontro, como estava previsto no planejamento, os estudantes deveriam pesquisar no laboratório significados e definições para *perímetro.* Esta pesquisa seria feita com o auxílio da internet. No dia deste encontro, antes de começar a aula, nos encaminhamos até o laboratório para preparar os computadores, ligamos todos, e constatamos que não havia internet. Tentamos solucionar o problema com a coordenação da escola e fomos informados que todos os computadores da instituição, naquele dia, estavam sem sinal. Informaram, também, que um técnico de uma empresa já havia sido contatado para solucionar o problema, porém não havia um prazo para que isto acontecesse.

Devido ao imprevisto, e sabendo que a professora titular da turma também era a pessoa responsável pelo espaço, conduzimos os alunos até a biblioteca. Nela os estudantes realizaram a pesquisa em livros didáticos e dicionários. Para essa atividade dividimos a turma em grupos de dois e três alunos. Cada grupo entregou uma folha com os significados encontrados para perímetro. Discutiram entre eles e elegeram assim uma definição. Acredito que por não termos tido acesso a web, não houve uma diversidade nas respostas apresentadas pelos estudantes. A biblioteca não possuía uma grande variedade de dicionários e livros que tratavam do assunto. Dos sete grupos, cinco apresentaram como resposta que perímetro *é a soma dos lados de uma figura geométrica*. Segue imagens com exemplos de respostas apresentadas.


1) No laboratório de informática usando a internet pesquise o significado da palavra perímetro. Escreva a definição que você encontrou.

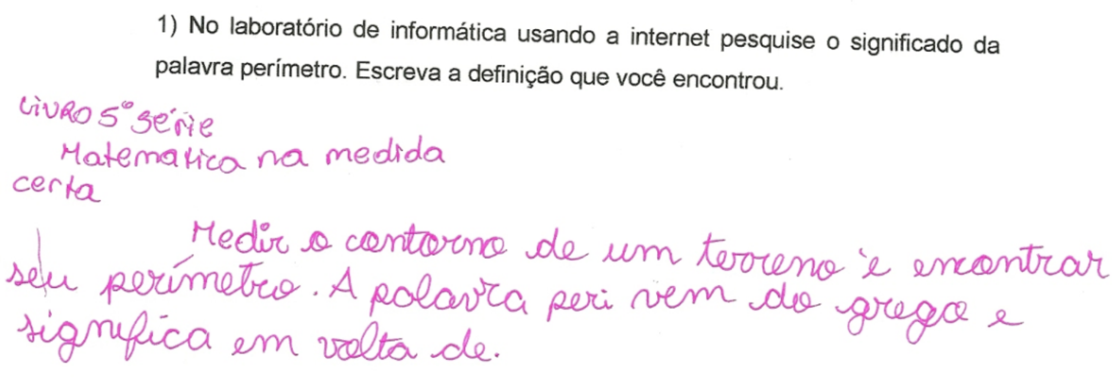
Perimetro é a soma dos lados de uma figura geométrica.

Dicionario:

A somas de todos os lados de um poligono.

Figura 40 - Resposta apresentada por um dos grupos após pesquisa realizada no segundo encontro.

Esta é a definição em que mais nos deparamos durante a experiência docente. Porém, ela apenas soluciona o problema dos polígonos, deixando em aberto os casos onde não temos figuras retilíneas, como já discutido neste trabalho na seção 2.2.

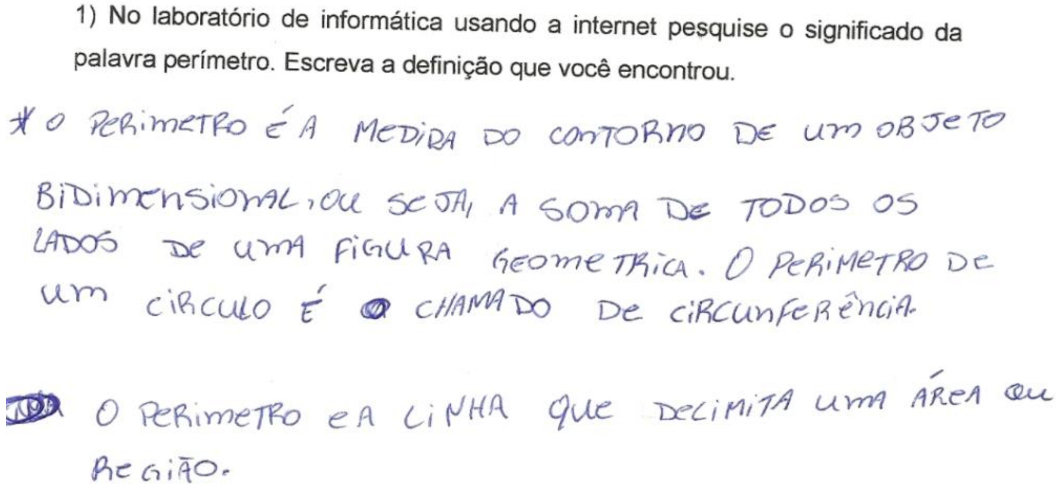

1) No laboratório de informática usando a internet pesquise o significado da palavra perímetro. Escreva a definição que você encontrou.

Livro 5° série
Matematica na medida certa

Medir o contorno de um terreno é encontrar seu perímetro. A palavra peri vem do grego e significa em volta de.

Figura 41 - Resposta apresentada por um dos grupos após pesquisa realizada no segundo encontro. Acervo do autor.

Esta definição traz a ideia de contorno para perímetro. Ou seja, diferentemente do autor anterior, na qual se faz uma restrição de caso, nesta há uma tentativa de se abordar todos os casos. Mesmo sabendo que os estudantes copiariam as definições, abordamos esta atividade. Nosso objetivo era fazer com que pesquisassem, anotassem, trocassem ideias, buscassem o maior número de definições possíveis; acreditamos que quando um aluno busca um conhecimento sua chance de fixar os conceitos envolvidos será muito maior de quando o professor simplesmente o apresenta.


1) No laboratório de informática usando a internet pesquise o significado da palavra perímetro. Escreva a definição que você encontrou.

O PERIMETRO É A MEDIDA DO CONTORNO DE UM OBJETO BIDIMENSIONAL, OU SEJA, A SOMA DE TODOS OS LADOS DE UMA FIGURA GEOMETRICA. O PERIMETRO DE UM CIRCULO É CHAMADO DE CIRCUNFERÊNCIA

O PERIMETRO E A LINHA QUE DELIMITA UMA ÁREA OU REGIÃO.

Figura 42 - Resposta apresentada por um dos grupos após pesquisa realizada no segundo encontro. Acervo do autor.

Nesta resposta trazida por um dos grupos, algo interessante ocorre, é que novamente fala-se em contorno tentando ampliar os casos, mas logo em seguida vem uma distinção para figuras bidimensionais, abrindo dois leques: a circunferência e as demais figuras geométricas. Essa distinção, em nossa opinião, apenas confunde o aluno, *porque não chamar o comprimento da circunferência de perímetro*? Já que tanto uma quanto a outra definição se referem à mesma ideia de medida do comprimento da borda (contorno) de uma figura plana.

Na linha de baixo, o grupo traz a definição de outro livro didático. Esta definição foi a que consideramos ser mais adequada, pois qualifica o perímetro como a linha que delimita uma área ou região.

Imaginávamos que teríamos dois períodos para desenvolver este encontro, quando na verdade tivemos apenas um. Soma-se a isto, o imprevisto ocorrido. Por estes fatores é que acreditamos não ter sido possível realizar outras atividades que estavam no planejamento, ficando estas, para a próxima aula. Durante o encontro notamos que alguns dicionários da língua portuguesa não dão importância para os conceitos de matemática. Constatamos que um destes dicionários, o *minidicionário escolar da Língua Portuguesa*, de Dermival Ribeiro Rios, com muitos exemplares disponíveis na biblioteca da escola, não traz no seu conteúdo a palavra perímetro. Porém, no *dicionário escolar Luft da Língua Portuguesa*, da editora Ática, edição de 2005, os alunos encontraram um significado para a palavra perímetro. Puderam, então, confrontá-la com a definição encontrada nos livros didáticos.

4.3. Terceira Aula

4.3.1. Relatos, Observações e Conclusões da Terceira Aula.

A terceira aula ocorreu no dia 29 de outubro de 2014 e teve duração de duas horas/aula.

Devido ao fato de nos planejarmos para dois períodos no encontro anterior, quando na realidade dispúnhamos somente de um, algumas das atividades previstas para a segunda aula foram transferidas para este encontro. O primeiro trabalho deste dia foi uma atividade em que os estudantes eram convidados a calcularem o perímetro de cada uma das figuras dadas, explicando como fizeram e que ferramentas usaram. Quando, para eles, não fosse possível calcular o perímetro, deveriam explicar o porquê. Segue imagem do exercício.

É possível calcular o perímetro de cada figura abaixo? Quando for possível, calcule e explique como você fez.

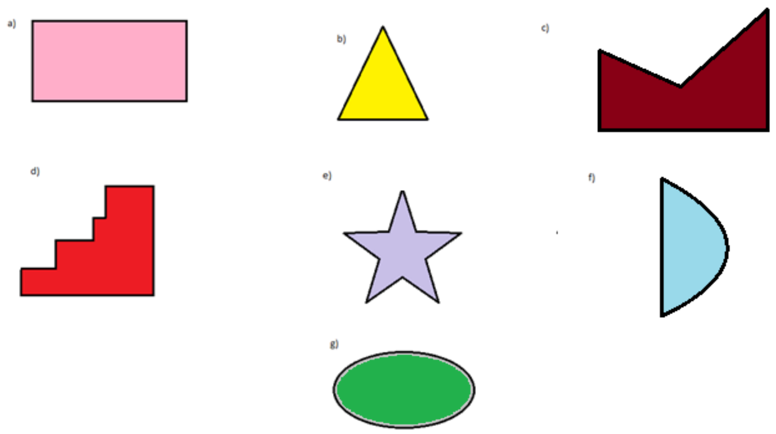


Figura 43 - Atividade sobre área do 3° encontro. Acervo do autor

Logo no início colocamos ferramentas em cima da mesa do professor, havia réguas, barbante, trenas, malhas quadriculadas transparentes e não transparentes. Distribuímos o exercício aos estudantes e explicamos o que era pedido. Logo de início todos foram para a mesa do professor escolher suas ferramentas. A maioria escolheu réguas, não deram importância para os demais materiais. Procuramos não exercer influência sobre os discentes, deixamos que fizessem a atividade por conta própria, e respondemos o mínimo necessário das suas dúvidas. Na sequência, listamos na lousa as definições e significados apresentados por eles na aula passada, e em cima destes, propusemos uma discussão relacionando-os com a atividade deste encontro. Levantamos alguns questionamentos para a turma, do tipo: *vocês consideram essas definições corretas? Elas foram suficientes para resolver o cálculo do perímetro de todas as figuras da atividade*?

A maioria optou apenas pelo uso da régua. Talvez isto explique que dos dezoito alunos da turma, onze calcularam, corretamente ou errando, o perímetro apenas para as figuras poligonais, e nas figuras curvilíneas não apresentaram nenhuma medida. Seis desses estudantes afirmaram de alguma maneira, não ser possível calcular o perímetro de figuras não poligonais. Portanto, para este tipo de figura, diretamente ou indiretamente, a maioria afirmou não ser possível aplicar o conceito.

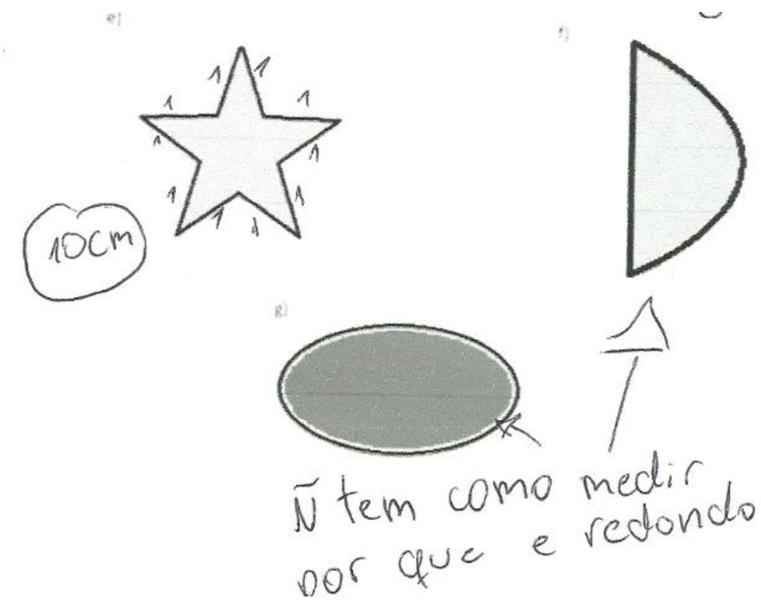


Figura 44 - Resposta apresentada pelo estudante C.E. para os três últimos itens da atividade. Acervo do autor.

Observando a resolução acima, podemos concluir que este aluno aplica, na figura do item *e,* que representa uma estrela, a qual possui lados, uma definição de perímetro para polígonos. Inclusive executa a operação de soma. Seu pensamento sobre medida atinge as etapas propostas por Plaza. Também trata o perímetro como um problema do tipo aditivo, primeiramente aplica o conceito da palavra, e na sequência executa a adição das medidas dos lados desta figura. Conversando com o estudante, indagamos como ele havia chegado ao resultado de 10 cm para o perímetro. Segue trecho do nosso diálogo.

Perguntamos,

- Como você encontrou o resultado? Como fez para calcular?

Aluno C.E,

- Peguei a régua e fui medindo, quando medi pareceu que era 1 cm.

Nós,

- Por quê pareceu, não deu exato?

Aluno C.E

- Não, mas quase bateu em cima.

Nós,

- Mas o valor de 10 cm, como você encontrou?

Aluno C.E

- *Como perímetro é soma de todos os lados da figura, eu fui somando aqui ó, um mais um, mais um, e assim fui indo.*

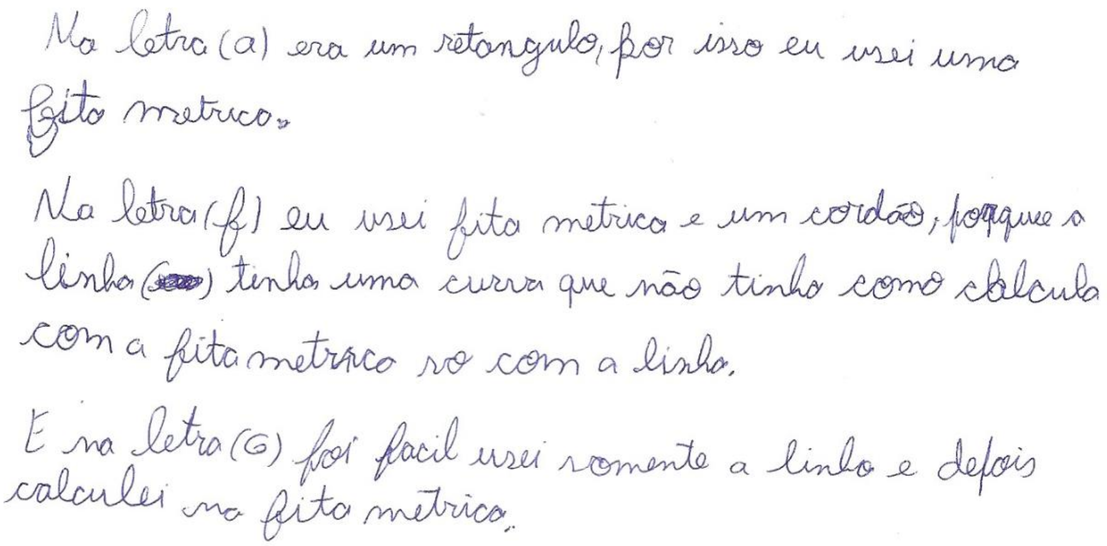
Antes deste diálogo com o docente estávamos em dúvida se o raciocínio dele envolvido para resolver o problema foi aditivo ou multiplicativo, já que o aluno não apresentou contas. Podemos observar pelo diálogo e, no momento do fato ocorrido, pelos seus gestos, que o aluno somou lado por lado, caracterizando como estrutura aditiva. Para resolver, juntou números de mesma natureza, e obteve um novo número também de mesma natureza.

Portanto, ao calcular o perímetro, trabalhou com um problema da primeira forma aditiva.

Quando observamos a solução para figuras não poligonais, o mesmo aluno afirma não ser possível calcular o perímetro, nitidamente para ele o conceito faz sentido apenas para figuras com lados. Portanto, o entendimento de contorno para perímetro deste aluno não é completo.

Após os alunos terem executado a tarefa, recolhemos às folhas com as resoluções da turma. Perguntamos como haviam feito na primeira figura para calcular o perímetro. A maioria respondeu que usou a régua e somou as medidas dos lados. O mesmo ocorreu para a segunda, terceira, quarta e quinta imagem. Porém, na sexta imagem os alunos discordaram, alguns disseram que não havia como calculá-la, enquanto os outros afirmavam ser possível.

Veja uma explicação apontada por um dos estudantes que afirmou ser possível executar a medida.


Na letra (a) era um retangulo, por isso eu usei uma fita metrico.

Na letra (f) eu usei fita metrica e um cordão, porque a linha ( ) tinha uma curva que não tinho como calcula com a fita metrica so com a linha.

E na letra (G) foi facil usei somente a linha e depois calculei na fita metrica.

Figura 45 - Resposta apresentada pelo estudante J.B. para as figuras a, f e g da atividade. Acervo do autor.

Foi neste instante que trouxemos para discussão às definições encontradas e apresentadas por eles no encontro anterior. Escrevemos na lousa e apontamos para a primeira definição encontrada pelos estudantes, que afirmava: *perímetro é a soma de todos os lados de uma figura geométrica.* Perguntamos: *esta definição é suficiente para calcularmos o perímetro da figura do item g?* Ocorreu um diálogo que envolveu a maioria da turma:

A aluna J.B. respondeu,

- *não professor, esta figura não tem lados*.

G. F. comentou,

- *não tem lado, mas deve ter um jeito de calcular isto*.

Então intervimos,

- por que vocês escolheram a régua para as primeiras figuras?

Aluno G.G,

- porque medimos os comprimentos na figura, e a régua é reta, dá para calcular.

Aluna M.L,

- *é reta que nem o rodapé.*

Eu,

-será que algumas daquelas outras ferramentas podem nos ajudar a calcular o perímetro?

J.B,

- só a trena eu acho;

Aluno C.E,

- Acho que igual, só na reta vai dar.

Aluna M.L.

- Na curva não daria,

Aluno C.E,

- não vai dar certo, na curva não fica boa,

Perguntamos,

- *Então em uma figura sem retas não conseguimos medir o perímetro?*

Aluno J.B.

-Talvez com o barbante que é mole, mas não sei se pode, eu calculei assim,

Repassei a pergunta,

- o que vocês acham?

Aluna L.A,

- é só usar o barbante fazendo as curvas, marcar, depois medir.

Perguntei,

- Medir com o que?

Aluna L.A,

- com a régua, ora!

Aparentemente todos que afirmaram na atividade não ser possível medir, concordaram com sua colega que agora era possível. Porém não podemos ter a certeza disto, pois alguns estudantes assistiram a discussão sem reações, não participando do diálogo. Devolvemos a folha e todos foram calcular novamente os itens f e g.

Figura 46: Estudante calculando novamente o perímetro da figura, agora utilizando o barbante. Acervo do autor.

No final retomamos a discussão para chegar a um consenso de qual seria uma boa definição para o conceito. Os alunos escolheram duas definições, ambas encontradas por eles na pesquisa da aula anterior:

Medir o contorno de um terreno é encontrar seu perímetro.

e

Perímetro é uma linha que delimita uma área ou região.

Para os alunos, estas duas foram as melhores definições encontradas sobre o conceito. Porém, como a proposta era escolher, criar ou melhorar apenas uma, na hora decidimos qual das duas deveríamos optar. Após uma longa discussão todos entraram em acordo que uma linha nem sempre será uma reta, por isto a primeira definição encontrada na pesquisa da segunda aula representava melhor a ideia de perímetro. Portanto, para os estudantes *perímetro é uma linha que delimita uma área ou região.*

Algumas resoluções foram parecidas da que segue abaixo, podemos observar que este estudante procura medir o contorno das figuras, mesmo nas curvilíneas trabalhando com aproximações, mas na figura que possui uma estrela desenhada este afirma não ser possível. Mesmo que esta figura seja um polígono.

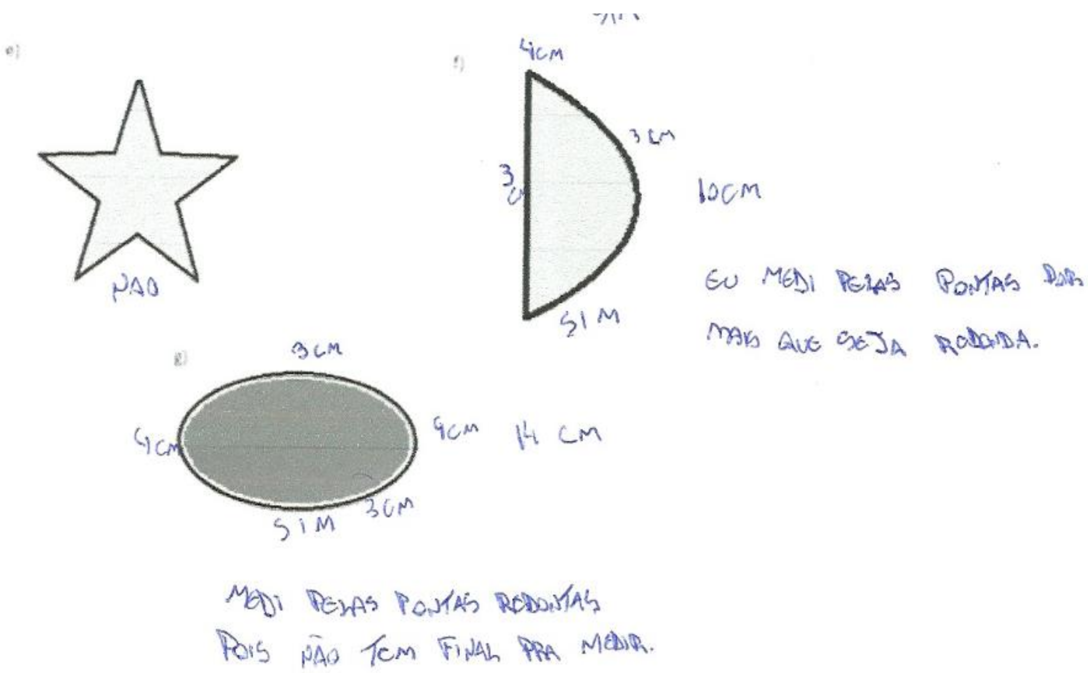


Figura 47 - Resolução do estudante sobre as atividades de perímetro. Acervo do autor.

Em um primeiro momento os estudantes tentaram calcular o perímetro das figuras poligonais envolvidas na primeira atividade da terceira aula com régua ou fita métrica. Com o passar do tempo, ao se depararem com figuras curvilíneas nitidamente eles sentiram-se incomodados. Dos 18 alunos da turma 11 deles acreditaram não ser possível calcular o perímetro das figuras deste tipo. Dos 11 alunos, 7 afirmaram que não dava pois as figuras não possuíam lados. Os outros 4 não apresentaram justificativa de o porque não ser possível calcular o perímetro. Os outros 7 estudantes que afirmaram ser possível executar o cálculo, 3 deles tentaram usar a fita métrica. Este instrumento é maleável, pontando os alunos iam "dobrando" a fita, tentando contornar a figura e ver a marca para aproximar o valor da medida. Apenas 2 destes estudantes afirmaram ser possível executar o cálculo, mas não mostrou como fazer. Os outros dois alunos usaram o barbante, sobrepondo sobre a borda da figura, na sequência o esticaram e mediam com a régua o seu tamanho.

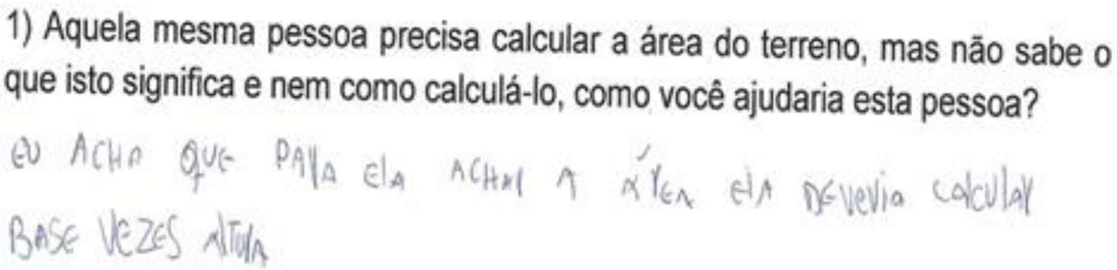
4.4. Quarta Aula

4.4.1. Relatos, Observações e Conclusões da Quarta Aula.

O quarto encontro ocorreu no dia 30 de outubro de 2014 com duração de duas horas/aula.

Devido ao atraso da segunda aula, foi somente nesta que iniciamos a discussão sobre o conceito de área. No planejamento, esta atividade estava prevista para o encontro anterior, devido ao atraso foi possível abordá-la somente neste dia. Iniciamos, então, distribuindo aos discentes uma folha com a seguinte pergunta: *Aquela mesma pessoa precisa calcular a área do terreno, mas não sabe o que isto significa e nem como calculá-lo, como você a ajudaria?*

Nosso objetivo era descobrir o que os alunos compreendiam como área. Nesta atividade, da mesma forma que ocorreu na que tratava de perímetro, muitos ficaram receosos em participar. Argumentavam que não saberiam o que escrever como resposta. Alguns alunos falaram que haviam esquecido o significado, outros diziam que não tinham apreendido este conteúdo. Porém, observando o que a maioria escreveu, ficou claro que os discentes já haviam estudado o tema, associavam o cálculo da área de figuras ao uso de fórmulas. Um exemplo está na resposta apresentada pelo aluno G.G: *Para calcular ela deveria fazer base vezes altura.* Ou ainda, como a resposta de L.C, a qual segue imagem da resposta.

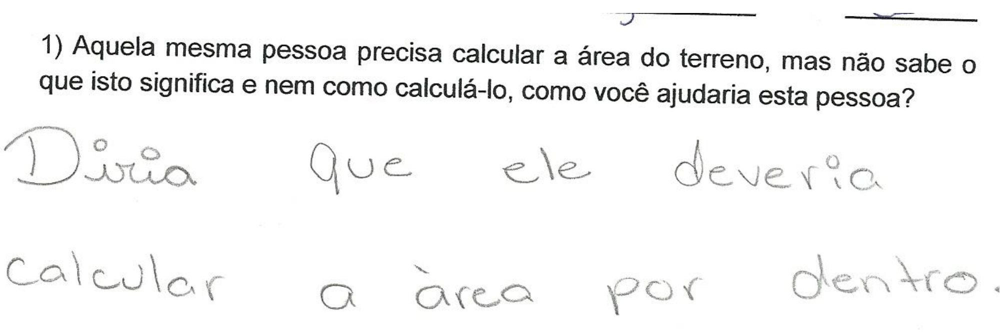

1) Aquela mesma pessoa precisa calcular a área do terreno, mas não sabe o que isto significa e nem como calculá-lo, como você ajudaria esta pessoa?

EU ACHO QUE PARA ELA ACHAR A ÁREA ELA DEVERIA CALCULAR BASE VEZES ALTURA

Figura 48 - Resposta apresentada pelo aluno L.C na primeira atividade da quarta aula. Acervo do autor.

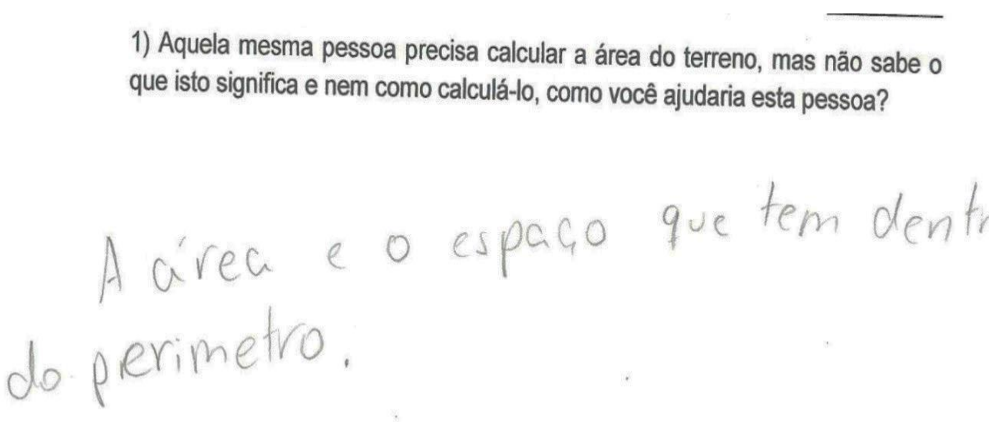
Com esta resposta podemos concluir que o estudante já estudou como se calcula a área de um retângulo. O que não sabemos é se ele costumava aplicar essa fórmula para calcular a área de qualquer figura. Caso ele acredite que serve para qualquer figura, o conceito não está bem compreendido. Porém, ele pode ter escrito somente o que lembrou no momento sobre área, citando, portanto, apenas um exemplo. Ao analisarmos a resposta do aluno, não sabemos o nível de compreensão dele sobre o conceito, pois ao citar a fórmula ele não necessariamente está se referindo ao processo multiplicativo que envolve o cálculo de área por esta regra. Será que pensou no processo de *contar quantas unidades cabem na base, contar quantas cabem na altura e, multiplicar um resultado pelo outro para saber quantas unidades cabem em toda a superfície? Como se pensasse na soma das unidades contidas nas fileiras?* Este foi um erro de nosso trabalho, pois deveríamos ter entrevistado a aluna para entender como estava a sua compreensão do conceito de área.

Outros dois alunos apresentaram definições que se colocam mais próximas da ideia de área, tratando-a como medida de superfície. A aluna E.F. escreveu: “*Diria que ele deveria calcular a área por dentro.*” Já a aluna L.D. afirma que: “*A área é o espaço que tem dentro do perímetro.*” Para esta segunda estudante, aparentemente, a diferenciação de área e perímetro está clara, já que, para ela, a área é um espaço (superfície) interno. A primeira aluna, apesar de não ter conseguido expressar-se corretamente, mas ela parece ter ideia do conceito, classificando-o como tamanho de superfície. Seguem imagens destas respostas.


1) Aquela mesma pessoa precisa calcular a área do terreno, mas não sabe o que isto significa e nem como calculá-lo, como você ajudaria esta pessoa?

Diria que ele deveria calcular a àrea por dentro.

Figura 49 - Resposta apresentada pelo aluno E.F na primeira atividade da quarta aula. Acervo do autor.


1) Aquela mesma pessoa precisa calcular a área do terreno, mas não sabe o que isto significa e nem como calculá-lo, como você ajudaria esta pessoa?

A área e o espaço que tem dentr do perimetro.

Figura 50 - Resposta apresentada pelo aluno L.D na primeira atividade da quarta aula. Acervo do autor.

Dos 18 estudantes da turma, 5 fizeram referência a alguma fórmula da geometria plana para se referirem ao conceito de área. Quatro deles relacionaram a ideia de área ser parte de dentro de alguma figura. Dos outros 9 alunos, 5 afirmaram não saber ou não lembrar do que se trata a área, já os outros 4, afirmaram saber o que significa mas não saberiam explicar.

Na sequência deste encontro colocamos a disposição dos alunos livros didáticos e dicionários. Como na aula sobre perímetro, o acesso à internet do laboratório de informática da escola estava impossibilitado. Porém, diferentemente daquele encontro, neste optamos em levar os volumes até a sala de aula, já que naquele foram os estudantes que foram à biblioteca. Tanto os exemplares de dicionários, quanto os de livros didáticos, pertenciam a biblioteca da escola. Foi proposta aos estudantes uma pesquisa nesses exemplares. Eles procuraram significados e definições para a palavra área. Segue abaixo alguns significados encontrados pelos estudantes:

Superfície delimitada.

Medida de uma superfície.

Ao discutirem, os estudantes consideraram que *Superfície delimitada era* uma boa definição. Um deles chegou a apresentar o tampo da mesa como um exemplo de superfície delimitada. Quando questionamos como faríamos para calcular a superfície do tampo da mesa, a maioria argumentou que mediriam o tamanho dos lados para depois fazerem a multiplicação destas medidas. Não tentaram aplicar a ideia de Lovell, de se escolher uma superfície menor como unidade, e contarem quantas destas cabem no tampo, partiram diretamente para o uso da fórmula.

Propusemos que fosse escolhida uma definição considerada ideal pelos estudantes e que, caso nenhuma das duas fosse suficiente, segundo os próprios alunos, poderíamos melhorá-las ou criar uma nova. Ao perceber que muitos não apresentavam clareza quanto ao conceito de área, ficando inertes à estas discussões sobre o tema, propusemos um problema para o grupo todo: *como calcular a quantidade necessária de papel para revestir a lousa*.

Logo de início um dos alunos propôs que multiplicássemos a base pela altura da lousa. Novamente não tínhamos certeza se os estudantes tinham compreensão da ideia ou estavam apenas tentando aplicar, de qualquer modo, uma fórmula que associavam a área. Propusemos então: *caso não pudéssemos multiplicar os comprimentos da base e altura da lousa, ou ainda, caso não tivéssemos uma régua ou trena para medir os comprimentos, qual seria uma boa solução?*

Depois de muitos exemplos, questionamentos e ideias, pareceram-nos que a maioria compreendeu melhor o significado do conceito. Percebemos isto quando um dos alunos falou: *“professor, se tivéssemos uma cartolina, podíamos contar quantas cartolinas cabem na parte branca do quadro”*. Através desta ideia a turma entrou em acordo de que *tamanho de uma superfície delimitada* era a melhor definição. Porém, explicamos que *medida da superfície* também era uma definição suficiente para área, já que a ideia de medida remete a certa quantidade ou tamanho.

A estudante M.L, perto do término do encontro, chamou atenção de todos para um fato:

- *Professor, se eu conto o número de cartolinas da base, e conto o número de cartolinas da altura, eu sei o tamanho das minhas linhas e o tamanho das minhas alturas, o senhor me entende?*

Antes que respondêssemos outro estudante, L.D falou:
- *Mas daí para chegar na área eu preciso saber quantas alturas eu tenho, e eu não sei isso.*

Aluno J.B,
- *Mas aí tu já contou quantos tem cada altura e cada linha, aí é só multiplicar.*

Aluna L.D,
- Há, então é por isso que multiplica sor?

Respondemos,
- *Sim.*

Neste momento da aula tivemos a certeza que para a maioria, ou pelo menos para os estudantes que participaram da discussão, a estrutura multiplicativa, produto de medidas, é consistente. Visto que, segundo Vergnaud (2009), para área de superfície, ao decompormos o retângulo em quadrados, com linhas e colunas de um metro de comprimento, mostra-se que a medida da superfície é o produto da medida da grande dimensão (comprimento) pela medida da pequena dimensão (largura). Isso ocorre tanto no plano das dimensões como no plano numérico.

$$x \ \ metros \ \ quadrados = y \ \ metros \ \times \ z \ \ metros$$

Ao medirmos quantas cartolinas cabem em linha reta rente a base da lousa, encontramos 7 cartolinas. Na altura foram 4 cartolinas. Então, se pensarmos nos números teremos $x = 7 \times 4$, já se voltarmos a atenção para as dimensões, imaginando que as dimensões da cartolina fossem metros, teríamos: $metros \ \ quadrados = \ \ metros \ \times \ \ metros$. Já vimos que para Vergnaud (2009) a noção de metro quadrado tem dois sentidos complementares, aquele do quadrado de um metro de lado, e aquele do produto de duas medidas de comprimento. No caso descrito anteriormente, os estudantes fizeram uso do primeiro. Já o segundo sentido permite estender às formas, que não se deixam decompor em quadrados.

4.5. Quinta Aula

4.5.1. Relatos, Observações e Conclusões da Quinta Aula.

No planejamento esperávamos contar com duas horas/aula para a realização desta aula, porém, devido uma atividade extracurricular da turma, tivemos a disposição apenas uma hora/aula. Neste planejamento esta aula deveria iniciar com atividades que calculariam a área diretamente, no entanto, devido aos imprevistos ocorridos, iniciou-se com a atividade planejada para o encontro anterior.

O encontro ocorreu no dia 03 de novembro de 2014. Para começar apresentamos a ferramenta *Geoplano* aos alunos, propondo na sequência a seguinte atividade:

1) *Com a ajuda dos elásticos, reproduza as figuras da imagem abaixo no seu Geoplano. Em seguida, tomando como unidade de medida um quadradinho formado por quatro pregos, calcule a área de cada uma destas figuras, explicando como você resolveu.*

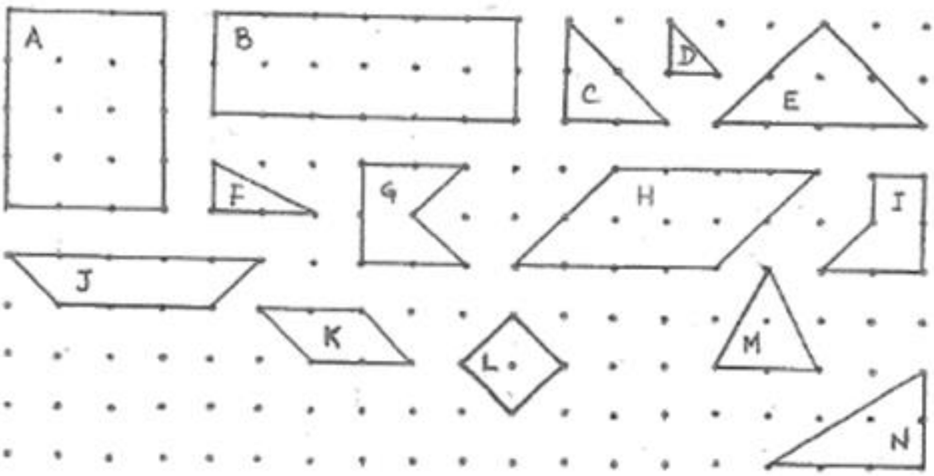


Figura 51 - Atividade sobre área executada na 5ª aula. Acervo do autor.[7]

É importante ressaltar que durante esta atividade a motivação da maioria dos estudantes com o Geoplano foi visível. Notadamente sentiram-se desafiados em reproduzir as figuras do desenho. A atividade de calcular a área destas figuras também foi feita com afinco por eles. Parece que a ferramenta por si só trouxe um interesse, quase como um *brinquedo* traria.

Para iniciar a atividade relembramos a aula anterior, na qual tivemos uma atividade que convidávamos os alunos a calcularem o revestimento do quadro negro. A ideia de usar uma cartolina para contar quantas dela cabia sobre a superfície da lousa, foi retomada para rediscutirmos a ideia de unidade de medida. Explicamos que naquela atividade a unidade de medida era a cartolina, pois contávamos quantas dela precisávamos para revestir todo o quadro. Agora, nossa unidade era os quadradinhos formados por quatro pregos alinhados dois a dois. Portanto, bastava contar quantos destes quadrados cabiam em cada figura. Esta contagem foi o que confundiu os estudantes, pois algumas eram, por exemplo, metades de quadrados cortados pela diagonal, e muitos demoravam em enxergar tal solução.

Vale ressaltar, que logo que entregamos a atividade, alguns estudantes tentaram calcular as áreas usando fórmulas para isto. O interessante que entre

[7] Imagem retirada de atividade da disciplina Laboratório Ensino Aprendizagem da UFRGS.

estes, mais precisamente 2 alunos, fizeram a tentativa de uso de $A = \frac{base \times altura}{2}$ para quadrados e retângulos. Outro, 1 estudante, tentou aplicar $A = base \times altura$ para triângulos. Isto reforçou o que já havíamos observado nas aulas sobre perímetro: estes estudantes tinham decorado fórmulas sem saberem o motivo de usá-las. Porém, acreditávamos que, depois da aula anterior, quando discutimos com os discentes a ideia do processo multiplicativo para obter o tamanho da superfície, todos os estudantes estivessem com entendimento da estrutura. Observamos não ter se confirmado com estes 3 alunos. Outros 4 alunos usaram as fórmulas de maneira correta, sempre multiplicando a medida de uma dimensão pela medida da outra. Quando esta fórmula não foi o suficiente, devido ao formato da figura, estes estudantes usaram a ideia de preenchimento, separando a figura em retângulos e triângulos, portando, sempre que foi necessário dividindo o valor da área por 2 para compor a figura.

A imagem abaixo referente à resolução construída por um aluno, dos 8 que optaram em resolver o problema através da contagem de quadrados unitários, fazendo a sobreposição e composição quando necessário. Vale ressaltar que não fizeram uso da multiplicação, pois em suas explicações afirmam terem contado um a um dos quadrados. De maneira geral, este aluno nos mostra o que a maioria tentou fazer: contar os quadrados que cabiam em cada figura.

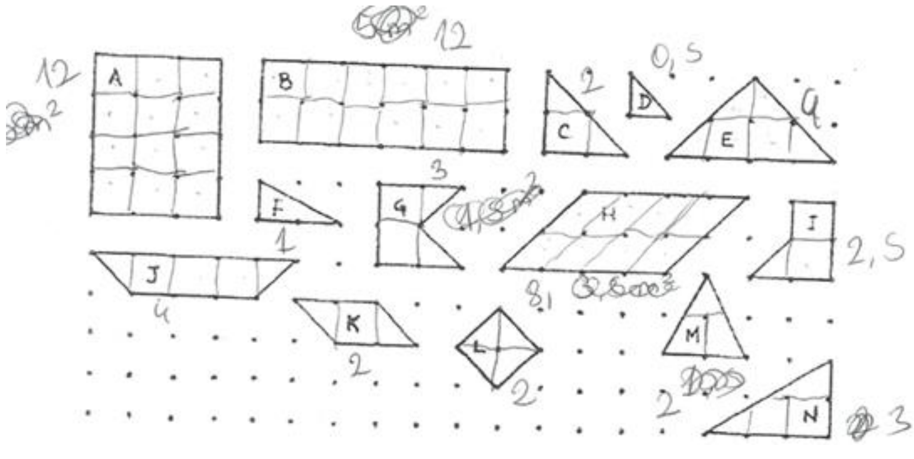


Figura 52 - Resposta apresentada pela aluna L.T na primeira atividade da quinta aula. Acervo do autor.

Um dos itens desta atividade era que os estudantes explicassem como resolveram o cálculo das áreas das figuras, isso deveria estar escrito em uma folha que foi anexada a atividade. A maioria não apresentou explicação detalhada de como executou a tarefa. Três apresentaram apenas esquemas para as respostas, colocando uma lista de figuras, e para cada uma a quantidade de quadrados que nela cabiam. Como já observado antes, neste grupo, um dos pontos interessantes da atividade foi ver estes discentes calculando áreas de triângulos e trapézios. Conversando com o colega ao lado, escolhendo qual seria a melhor opção para contar os quadradinhos, os discentes usavam a ideia de dividir quadrados ou retângulos pelas suas diagonais. Ao final, observamos que 3 alunos não apresentaram nenhum tipo de explicação para as resoluções.

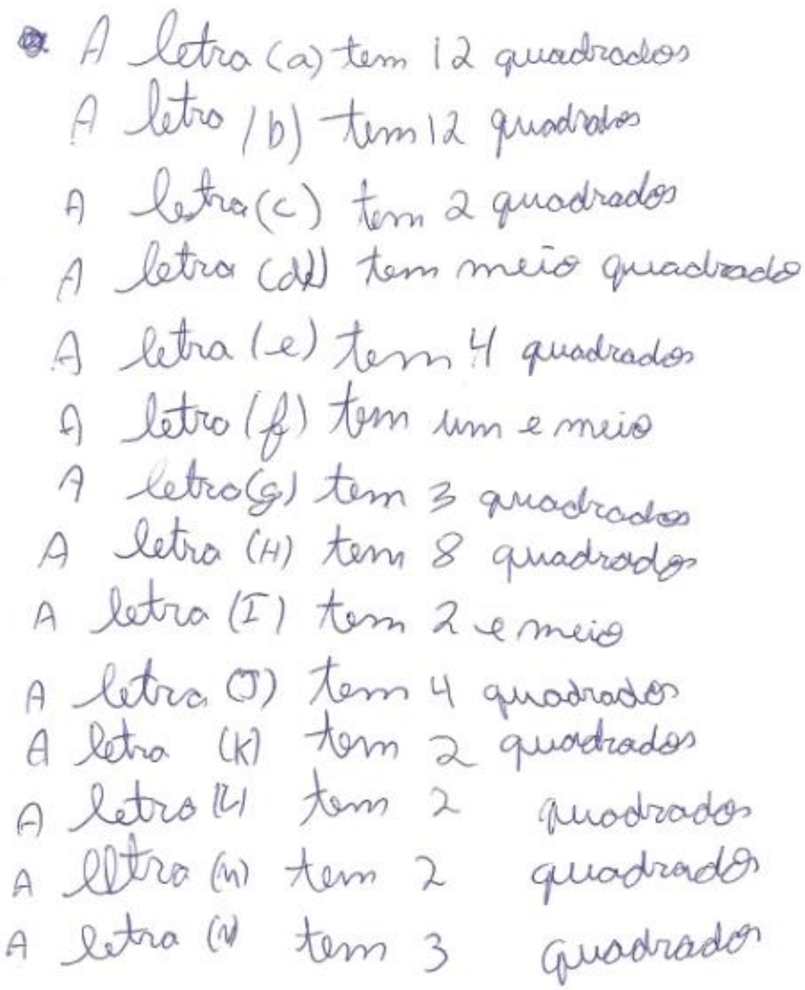

A letra (a) tem 12 quadrados
A letro (b) tem 12 quadrados
A letra (c) tem 2 quadrados
A letra (d) tem meio quadrado
A letra (e) tem 4 quadrados
A letro (f) tem um e meio
A letro (g) tem 3 quadrados
A letra (H) tem 8 quadrados
A letra (I) tem 2 e meio
A letra (J) tem 4 quadrados
A letra (K) tem 2 quadrados
A letro (L) tem 2 quadrados
A letro (M) tem 2 quadrados
A letra (N) tem 3 quadrados

Figura 53 - Explicação apresentada pelo aluno E.R na primeira atividade da quinta aula. Acervo do autor.

A aluna J.G apresentou uma explicação diferente. Ela fala que também contou quantos quadrados cabiam dentro, e para as figuras que não cabia ela pensou em triângulos, juntando-os para transformar em quadrados. Segue imagem de sua explicação.

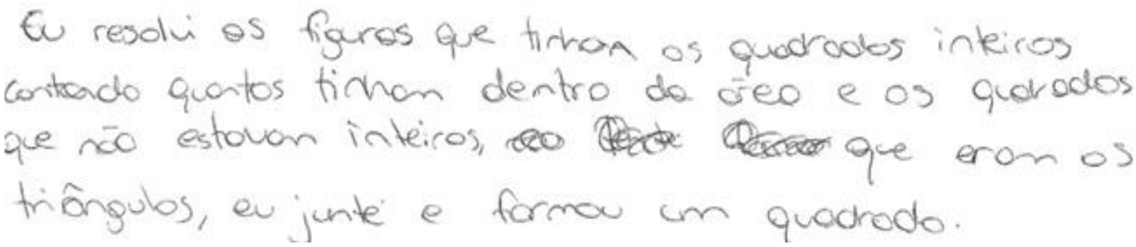

Eu resolvi os figuras que tinham os quadrados inteiros contando quantos tinham dentro da área e os quadrados que não estavam inteiros, que eram os triângulos, eu junte e formou um quadrado.

Figura 54 - Explicação apresentada pela aluna J.G na primeira atividade da quinta aula. Acervo do autor.

Da maneira deles, a maioria dos discentes que somente apresentaram a resolução, sem escreverem um texto, também de alguma forma explicaram o que pensaram na hora do exercício. Pois, ao dizer, por exemplo, que em uma figura cabem dois quadrados e meio, isso é o resultado do tamanho da superfície, sendo uma explicação plausível. Outros desenharam quadrados nas “pontas” dos trapézios isósceles, por exemplo.

Figura 55: Estudantes fazendo a atividade com o Geoplano. Acervo do autor.

A partir desse momento o objetivo foi discutir com os alunos algumas fórmulas de área. Começamos trabalhando com a área de um triângulo retângulo a partir do retângulo. Como calcular a área do retângulo já havia sido discutido na aula anterior. Explicamos que um trapézio é a metade de um retângulo com dois lados opostos. Onde cada um desses lados com medida formada pela base maior adicionado da base menor do trapézio. Multiplicando este lado pela altura e dividindo o resultado por dois, obtemos um trapézio, e uma expressão igual à fórmula da área conhecida para esta figura. Durante estas últimas explicações não houve muitas participações dos estudantes. Exceto algumas exceções, a maioria se conformou em apenas ouvir os processor. Diálogos curtos e não aprofundados. Com certeza, as outras atividades deste dia trouxeram um interesse maior para os alunos.

4.6. Sexta Aula

4.6.1. Relatos, Observações e Conclusões da Sexta Aula.

Como ocorreram atrasos que não estavam no planejamento, para encerrar as atividades, foi necessário usar mais uma hora/aula no dia 05 de novembro de 2014. Para encerramento dos trabalhos foi proposto aos alunos a seguinte atividade: *É possível calcular a área de cada figura abaixo? Quando for possível calcule, explique como você fez e porque escolheu este instrumento.*

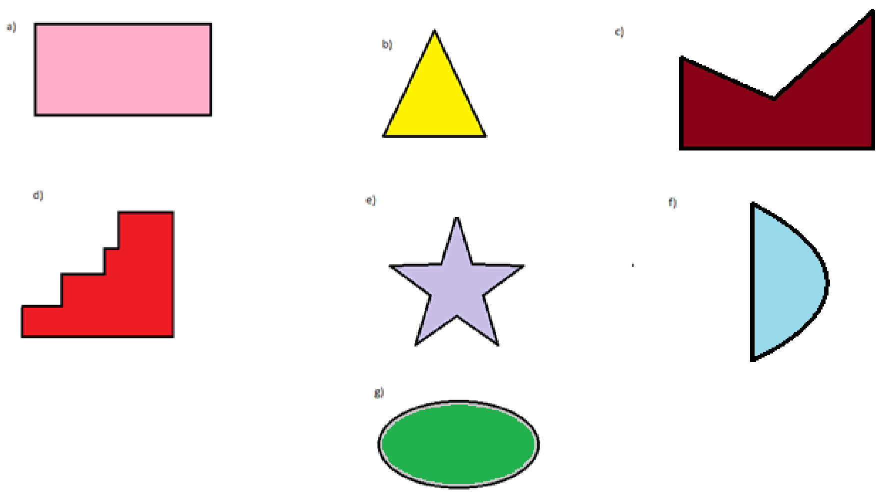


Figura 56 - Atividade sobre área trabalhada na 6ª aula. Acervo do autor.

O objetivo foi verificar qual a compreensão dos estudantes sobre o conceito de área, mais especificamente durante a resolução de atividades. Novamente foram colocadas a disposição dos alunos aquelas ferramentas da atividade sobre perímetro: réguas, transferidores, compassos, barbantes e malhas quadrangulares. Nas primeiras figuras os estudantes em sua maioria procuraram usar réguas e fitas métricas, mediam os lados e multiplicavam, como no caso dos retângulos por exemplo. Dos 18 alunos, apenas 2 não apresentaram resposta para a área destas figuras dos itens *a* e *b*.

Quando a figura não propiciava isto, nos itens *c*, *d* e *e,* a maioria tentou separá-la em outras figuras conhecidas como triângulo, calculando pelas fórmulas, o tamanho da superfície. Sete alunos fizeram uso de fórmulas, fazendo o processo de partição da figura para isto. Dois alunos não apresentaram solução. Os outros 9 alunos fizeram uso da contagem de quadradinhos com auxílio na malha quadriculada. Quando o quadrado unitário não dava conta do formato da figura, estes estudantes usavam a ideia de sobreposição e separação de figuras, como por exemplo, no caso da aluna A.S, que em um dos itens afirmou que dois triângulos retângulos isósceles formam um quadrado unitário.

Nas figuras com linhas não retas, itens *f* e *g,* os alunos demoraram um pouco, mas se deram conta de usar malhas quadriculadas para calcular as áreas. Após alguns minutos de questionamentos dos estudantes dirigidos para nós pesquisadores, como, por exemplo, de como calcular estas áreas, e de a maioria, tentando usar a régua para tal objetivo, neste instante, um dos discentes levantou de sua cadeira e foi até a mesa do professor buscar uma malha quadriculada transparente, e logo todos fizeram o mesmo. Este aluno G.G se deu conta que bastaria contar quantos quadrados da malha cabiam sobre as figuras curvilíneas, e os outros, ao observarem ele trabalhar, tentaram o mesmo.

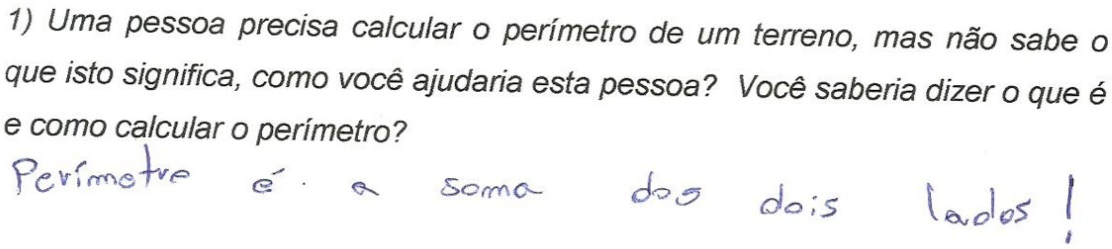
As atividades teriam de ser encerradas com o cálculo da área do piso da sala de aula, porém não houve tempo para que todos entregassem a atividade concluída. Ocorreu um fato que não estava no planejamento, um ensaio para um evento extracurricular, gincana da escola, o que acabou reduzindo ainda mais o tempo produtivo deste período.

5. Considerações Finais

Baseado no desempenho dos estudantes em uma sequência de atividades, o objetivo desta pesquisa foi um estudo de como os alunos estariam compreendendo os conceitos de área e perímetro no nono ano do Ensino Fundamental. Para que pudéssemos obter sucesso neste estudo, procuramos nos apoiar em autores que trabalharam com o tema, e que executaram práticas com propósitos parecidos.

No início da aplicação da sequência, percebemos que houve uma contrariedade da turma em participar das atividades. Acreditamos que isto ocorreu pelo tipo de abordagem. Segundo a própria professora titular da turma, os estudantes não estavam acostumados em trabalhar com situações problemas, executando medidas e manipulando objetos. Aos poucos os discentes foram entendo a proposta e adaptaram-se a metodologia. Notamos que a turma trabalhou bem em grupos, pois discutiam entre si e entre grupos os exercícios, trocavam ideias para encontrarem a *solução.* Contudo, na maioria das vezes que deveriam escrever suas conclusões e justificativas, não se sentiam à vontade, ocorrendo assim, alguns exercícios incompletos, em branco, ou apenas apresentando os cálculos sem a justificativa teórica exigida. Durante as resoluções, muitas vezes os alunos ficavam à espera de nós (pesquisadores) para receberem orientações quanto aos procedimentos a serem adotados ou aguardando uma explicação sobre dúvidas no decorrer dos exercícios. Entretanto, notamos que vários alunos desenvolveram com autonomia as atividades, procurando resolverem sozinhos os problemas expostos e discutirem com o grupo as soluções elaboradas.

Respondendo a questão norteadora de nossa pesquisa "*Como os estudantes do nono ano do Ensino Fundamental compreendem os conceitos de área e perímetro?", a*o observarmos as respostas e colocações dos alunos, verificou-se que, até o momento das atividades, a maioria associava área e perímetro ao uso de fórmulas. Por exemplo, quando propomos que escrevessem o que consideravam ser perímetro, muitos dos estudantes afirmaram se tratar da soma dos lados de uma figura. Não faziam diferenciação entre figuras poligonais e não poligonais. Ao se depararem com a palavra perímetro, invariavelmente, tentavam somar os lados da figura, mesmo quando a figura não possuía lado. Segue uma resolução de um dos estudantes, da primeira aula, em que eram convidados a apresentarem uma definição de perímetro, além de explicar como executar o seu cálculo.


1) Uma pessoa precisa calcular o perímetro de um terreno, mas não sabe o que isto significa, como você ajudaria esta pessoa? Você saberia dizer o que é e como calcular o perímetro?

Perímetro é a soma dos dois lados!

Figura 57 - Resposta apresentada pelo aluno A.S na primeira atividade da primeira aula. Acervo do autor.

A definição de A.S. não diferenciou quando que a soma dos lados se aplica. O estudante, também, criou uma confusão. Ele não conseguiu expressar o conceito que ele mesmo acredita ser verdadeiro em todos os casos. Acreditamos também que não atingiu o segundo e terceiro estágios de compreensão de conceito estabelecido por Plaza e Gómez (1988). Para que superasse o 2º estágio, era necessário que houvesse na sua mente a *conservação da ideia*. Trocou-se a figura, em uma que possui dois lados, e nitidamente para ele a definição contínua sendo aplicável da mesma forma. Verificamos isto quando o aluno afirma que para calcular o perímetro bastariam *somar os dois lados*. Sabemos que não existe polígono com somente dois lados, logo a escrita do estudante não faz sentido. Dos 18 alunos que responderam a esta primeira questão que pedia a definição de perímetro, apenas dois deles responderam de uma maneira que consideramos satisfatória. Mais da metade respondeu que perímetro se tratava da *soma de todos os lados*. Vale ressaltar que alguns fizeram uso da palavra figura na resolução apresentada, e outros não. Apenas um usou a expressão *figura plana*.

Outro fato que ocorreu com certa frequência, nas resoluções, foi uma confusão que a maioria dos alunos fez entre os conceitos de área e perímetro. Muitos, quando solicitados para definirem perímetro e área, confundiam os conceitos, tentavam usar a mesma regra para problemas que trabalhavam as duas ideias.

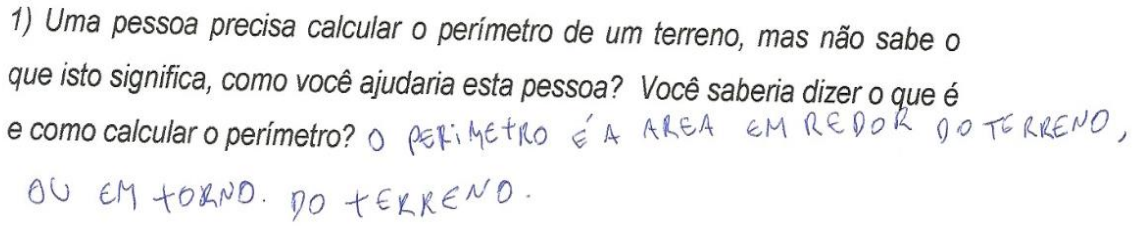

1) Uma pessoa precisa calcular o perímetro de um terreno, mas não sabe o que isto significa, como você ajudaria esta pessoa? Você saberia dizer o que é e como calcular o perímetro? O PERIMETRO É A AREA EM REDOR DO TERRENO, OU EM TORNO. DO TERRENO.

Figura 58 - Resposta apresentada pelo aluno M.S na primeira atividade da primeira aula. Acervo do autor.

Nesta resolução, o estudante afirma que perímetro seria a área ao redor do terreno, ou M.S está confundindo os conceitos, ou ele não soube se expressar. O fato é que a ideia de que existe *o redor / o entorno* é algo consistente para ele. Essa definição de que o perímetro é a soma dos lados de uma figura está muito presente nos estudantes, na terceira aula foram abordadas figuras sem retas, e este pensamento fez com que a maioria dos alunos afirmasse não ser possível calcular o perímetro destas figuras.

A tentativa de aplicar uma fórmula, não questionando se realmente esta se enquadra no problema a resolver, é algo que notamos também nas atividades sobre área. Quando pedimos que escrevessem o que consideravam ser área, muitos estudantes tentaram fazer está relação do conceito com a fórmula.

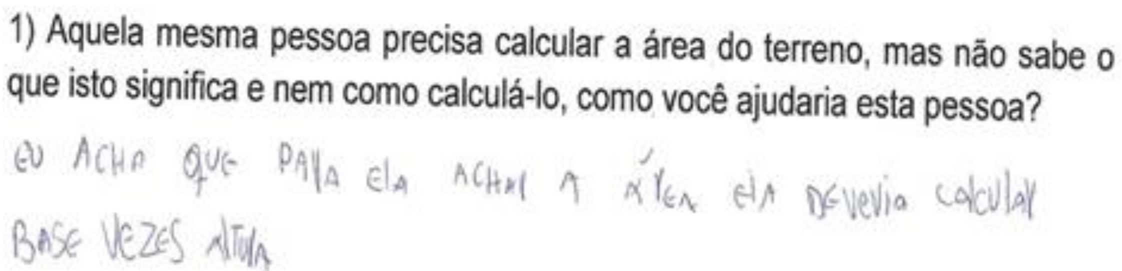

1) Aquela mesma pessoa precisa calcular a área do terreno, mas não sabe o que isto significa e nem como calculá-lo, como você ajudaria esta pessoa?
EU ACHO QUE PARA ELA ACHAR A ÁREA ELA DEVERIA CALCULAR BASE VEZES ALTURA

Figura 59 - Resposta apresentada pelo aluno L.C na primeira atividade da quarta aula. Acervo do autor.

Acreditamos que essa ideia de tentar definir conceitos através de fórmulas, está ligada ao que costumamos fazer em sala de aula. Costumamos “jogar” o conceito e pedir que os estudantes o apliquem (calculem) em uma série de figuras. E quando os discentes se deparam com situações diferentes das que eles trabalharam nos exercícios, não conseguem aplicar o conceito, muito menos refletir sobre o problema. Se ao invés de abordarmos o assunto através desta lógica descrita, construíssemos as ideias com os alunos, não obteríamos resultados diferentes? Acreditamos que sim. Como Lovell (1988), acreditamos que se o estudante for um dos agentes do conhecimento, manipulando as ferramentas, ele enxergará e compreenderá com mais facilidade as ideias envolvidas.

Percebemos com o andamento das aulas que a parte sobre *perímetros* foi mais bem aceita pelos alunos. Com isso, nos pareceu que os objetivos foram mais bem alcançados. Notamos este fato quando os estudantes insistiam em associar perímetro como a soma de todos os lados de uma figura, passaram a afirmar que se tratava do *tamanho do contorno de uma figura*. Não podemos afirmar se daqui em diante estes alunos irão sempre continuar fazendo tal afirmação. Já que quando os discentes fizeram tais afirmações, os conceitos ainda estavam claros, pois recém haviam sidos trabalhados nas atividades. Talvez se essas questões forem retomadas mais tarde, o sucesso não será o mesmo. Mas o fato é que, pelo menos em um primeiro momento, os discentes parecem ter compreendido a ideia de contorno.

Por fim, gostaríamos de salientar que este trabalho reforçou a nossa concepção de que uma proposta de aula bem sucedida é aquela que se planeja detalhadamente antes de executá-la. Esse planejamento consiste em analisar as dificuldades e características de nossos alunos, traçar os objetivos a serem alcançados e definir a metodologia que será usada. Tudo isso são aspectos cruciais para o sucesso das aulas. Além disso, devemos observar que em geometria, como é o caso deste trabalho, e como afirma Lovell, a participação dos alunos na construção do conhecimento, medindo, manipulando objetos, é algo de fundamental importância para a visualização e a compreensão das ideias.

6. Referências

ACADEMIA BRASILEIRA DE LETRAS. **Dicionário Escolar da Língua Portuguesa.** 1ª edição. São Paulo: Companhia Editora Nacional. 2008.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Novo Praticando Matemática.** Volume 4. 1ª edição. São Paulo: Editora do Brasil, 2006.

BACKENDORF, Viviane. R. **Uma sequência didática de medidas de comprimento e superfície no 5° ano do ensino fundamental:** um estudo de caso**.** 2010. 187f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

BALDINI, Loreni. A. F. **Construção do Conceito de Área e Perímetro**: Uma sequência didática com auxílio de software de Geometria Dinâmica. 2004. 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Física e Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

CARAÇA, Bento. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, 1952.

DEL OLMO, M.A. **Superficie y volumen** ¿algo más que el trabajo con fórmulas?. Madrid: Editorial Síntesis, 1989.

DOMÊNICO, Luiz Carlos de; LAGO, Samuel Ramos; ENS, Waldemar. **Matemática moderna**: 5º série. São Paulo: IBEP.

FACCO, Sônia. R. **Conceito de Área**: uma proposta de ensino-aprendizagem. 2003. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2003.

FERREIRA, Aurélio B. de Hollanda. Aurélio: **Minidicionário da língua portuguesa**. 1ª edição. Curitiba: Nova Fronteira. 1977.

FERREIRA, Aurélio B. de Hollanda. Aurélio: **Minidicionário da língua portuguesa**. 7ª edição. Curitiba: Editora Positivo. 2008.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de conceber o ensino da Matemática no Brasil**. In Zetetiké, n. 4, v, Ano 3. 1995.

FISCHER, D. S.O. **A riqueza da geometria**: conceitos de área e perímetro. 2011. 82f. Monografia (Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Sapiranga, 2011.

HENRIQUES, Marcílio. D. **Um Estudo a Produção de Significados de Estudantes do Ensino Fundamental para Área e Perímetro**. 2011. 218f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

HOUAISS, A. Houaiss: **Minidicionário da Língua Portuguesa.** 4ª edição. Rio de Janeiro: Objetiva. 2010.

LEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e realidade:** 5ª série. 5ª edição. São Paulo: Atual, 2005.

LOVELL, Kurt. **O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança.** Tradução de Auriphebo Berrance Simões. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ Marli E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas**.** São Paulo: EPU, 1986.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **A representação do espaço na criança.** Tradução de Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PLAZA, Mª Del Carmem Chamorro; GÓMEZ, Juan Miguel Belmonte. **El problema de la medida**. **Didáctica de las magnitudes lineales**. Madrid: Editorial Sintesis, 1988.

QUEVEDO, Gabriel Almeida. **Compreendendo conceitos em Geometria:** área e perímetro. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

RIOS, Dermival Ribeiro. **Minidicionário Escolar Língua Portuguesa:** com divisão silábica. São Paulo: DCL. 2009.

SENA**,** R.; DORNELES, B.V. **Ensino de geometria**: rumos da pesquisa (1991-2011). Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 8, p. 138-155, 2013.

SOARES, Flávia. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: avanço ou retrocesso? Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica, 2001. 203f (Dissertação, Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2001.

VALENTE, V. R. **Uma história da Matemática escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: FAPESP, 1999.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

VERGNAUD, Gérard. **Todos perdem quando a pesquisa não é colocada em prática.** depoimento. [abr. 2008]. Entrevistador: Gabriel Pillar Grossi. São Paulo: Nova Escola. Entrevista concedida a Revista Nova Escola. Disponível na web em 10 de novembro de 2015 no endereço: http://revistaescola.abril.com.br/.

YIN, K. Robert. **Estudo de caso:** planejamento e método. Tradução de Daniel Grassi. Porto Alegre: Bookman, 2001.

7. Apêndices

APÊNDICE 1: Produto Técnico

INTRODUÇÃO

Em nossa pesquisa propomos atividades que trabalharam com as ideias de perímetro e área, as quais objetivaram entender como os estudantes compreendem estes conceitos. Também, ao produzir este conjunto de tarefas, pretendemos que estas possam ser aplicadas em nossas, ou em outras salas de aulas, com outros professores e alunos, e que consigam auxiliar na compreensão dos docentes nas dificuldades de aprendizagem. Esse auxílio deve se estender na compreensão dos conceitos, como por exemplo, na confusão que os estudantes fazem entre área e perímetro. Essas dificuldades devem ser superadas, com a negociação em sala de aula.

A apresentação da nossa sequência didática neste capítulo, e nas análises dos encontros no capítulo anterior, mostrando e comentando como ocorreram cada um dos encontros, são o conjunto de atividades que formam nosso produto técnico. Acreditamos que esta sequência não deve ser seguida ao extremo por outros professores, pois sabemos que cada público tem suas características próprias, portanto o docente deve adaptar-se a sua realidade. Pretendemos que as atividades descritas sirvam de modelo ou inspiração para que outros professores sintam segurança em criar suas próprias tarefas, conhecer maneiras diferentes de olhar para os processos de aprendizagem em geometria. Pretendemos que através dessa inspiração, estudantes e professores discutam suas dificuldades e que os alunos produzam significados para suas indagações.

É possível notar que os conteúdos geométricos foram orientados por objetivos previamente estabelecidos, e não o contrário. Isto é, centrado em conteúdos, focado nos objetivos do trabalho docente, que sugere a possibilidade de transmissão de conhecimento, como forçar os estudantes a decorarem fórmulas sem saber como aplicá-las, não entendendo seus conceitos, pensamento o qual somos contrários.

Constatações como estas acima nos permitem avaliar que o nosso trabalho, as nossas tarefas, devem ser entendidas como uma inspiração para outras elaborações, outras pesquisas. Sobretudo para ser utilizado pelos professores em suas salas de aula, mas direcionando o seu trabalho. A noção de ser apenas uma inspiração, não se aproxima nem um pouco com a noção de modelo acabado, pronto, mas acreditamos ser uma nova ideia que pode gerar novas ideias, ou ainda, como citado anteriormente, de tarefas que podem ser modificadas e adaptadas a outras situações, níveis de escolaridade, culturas, enfim, adaptar-se a realidade e necessidades dos alunos.

O produto técnico-educacional de nosso trabalho são as atividades apresentadas no capítulo da metodologia na parte do planejamento, listando todas as atividades que havíamos imaginado para a prática. Também faz parte do nosso produto as atividades que apresentamos no capítulo 4, das análises, pois algumas ocorreram um pouco diferente do planejamento. Por fim, nesse apêndice 1, colocamos detalhadamente as atividades, explicitando alguns dos objetivos e procedimentos pensados por nós quando elaborávamos os problemas.

Sequência de atividades planejada para prática da pesquisa.

AULA 1

OBJETIVOS:

● Descobrir o que os alunos entendem sobre perímetro;

● Avaliar se a concepção de medir é consistente para os estudantes;

● Que os estudantes utilizem sua criatividade para medir comprimentos sem utilizar instrumento conhecido;

● Os estudantes percebam a importância de criar uma unidade padrão para medir comprimentos, inclusive apresentando as unidades do sistema métrico internacional;

● Os alunos consigam expressar, no papel, os resultados numericamente, inclusive quando a unidade tiver que ser representada com *todo* e *parte*;

● Que os estudantes consigam trabalhar em grupos a fim de trocarem ideias a partir de problemas e situações recebidas;

● Chamar a atenção dos alunos para a importância de uma palavra que defina o tamanho do contorno de uma determinada figura plana;

● No final, distribuir uma fita métrica para cada grupo com objetivo que os estudantes entrem em contato com a ferramenta, proporcionando a eles um ambiente diferente do que são mais acostumados.

PROCEDIMENTO E AS ATIVIDADES:

1 - Propor a seguinte situação-problema aos alunos, para ser entregue ao professor: *Uma pessoa precisa calcular o perímetro de um terreno, mas não sabe o que isto significa, como você ajudaria esta pessoa? Você saberia dizer o que é e como calcular o perímetro?*

2 - Por meio de sorteio dividir a turma em grupos de 3 alunos cada;

3 - Convidar os estudantes a resolverem outro problema: *A diretora da escola precisa trocar os rodapés da nossa sala de aula, a fim de que não sobre e nem falte madeira, qual a quantidade de rodapés que ela precisará comprar?*

4 - Comparar, com objetivo de promover discussões, as medidas encontradas por cada grupo;

5 - Propor o seguinte problema para os grupos: *A diretora não vai conseguir ir até a loja. Por telefone, como ela pode explicar o que precisa, e como pediria a quantidade necessária de rodapés?*

6 - Distribuindo uma fita métrica para cada grupo, propor que os alunos meçam o tamanho real do contorno da sala de aula. Além disso, discutir com os alunos qual grupo encontrou a medida mais próxima do tamanho real.

AULA 2

OBJETIVOS:

● Promover o interesse nos estudantes pelo conhecimento através de uma pesquisa;

● Promover o pensamento crítico nos alunos durante a discussão sobre as definições de perímetro encontradas na pesquisa;

● Que os estudantes reflitam sobre calcular o perímetro de uma figura poligonal e uma não poligonal;

● Que os estudantes percebam a necessidade encontrar uma definição que contemple os múltiplos casos;

● Proporcionar a experiência de os alunos manipularem os instrumentos de medir comprimentos;

● Que os estudantes consigam distinguir quais instrumentos são úteis para calcular o perímetro de uma determinada figura;

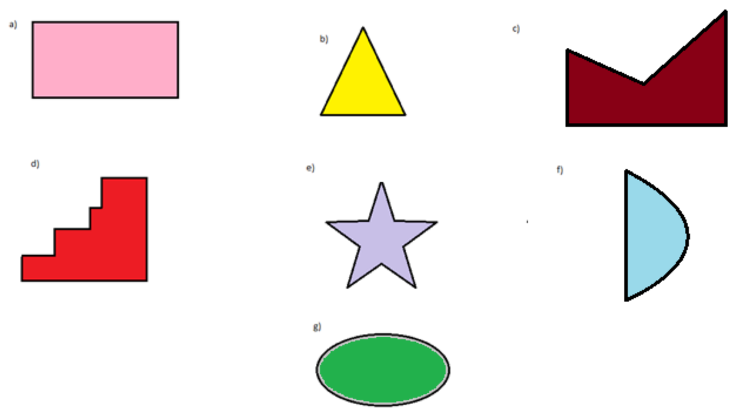
● Analisar as resoluções, e através delas, se as estruturas aditivas e multiplicativas são consistentes para os estudantes.

PROCEDIMENTO E AS ATIVIDADES:

1 - Propor uma pesquisa, usando a internet, livros didáticos e dicionários, sobre o significado da palavra perímetro;

2 - Sobre a mesa do professor, colocar alguns objetos que possam auxiliar os alunos no cálculo do perímetro: réguas, barbantes, compassos, transferidores, malhas quadriculadas transparentes e não transparentes;

3 - Propor o seguinte exercício aos alunos: *É possível calcular o perímetro de cada figura abaixo? Quando for possível, calcule e explique como você fez.*



4 - Propor uma discussão aos estudantes: comparar os significados da palavra perímetro encontrados na pesquisa desta aula, com os significados apresentados por eles na aula anterior;

5 – Em uma discussão com a turma toda, propor algumas questões, por exemplo:

Esta definição foi suficiente para o cálculo do perímetro nas figuras da atividade anterior? Atendeu todas as necessidades?

O que você melhoraria nesta definição?

6 – Abrir discussão para que todos cheguem a um consenso de qual é a melhor definição.

AULA 3

OBJETIVOS:

● Apresentar aos grupos problemas que discutam o conceito de área;

● Verificar o que os estudantes entendem por área;

● Promover o interesse pela pesquisa nos estudantes;

● Discutir o conceito de área com os alunos;

● Apresentar a ferramenta GeoPlano aos estudantes, fazendo com que eles manipulem objetos facilitando a visualização das propriedades envolvidas;

● Que os discentes trabalhem cooperativamente com os colegas, a fim de, trocando ideias, conseguirem resolver situações-problemas propostas;

● Construa a unidade de medida de superfície;

● Os alunos percebam que é possível calcular a área de uma figura plana, mesmo que aproximada;

● Os estudantes percebam o significado de algumas “fórmulas prontas” conhecidas por eles para o cálculo de área.

PROCEDIMENTO E AS ATIVIDADES:

1 - Propor a seguinte questão para os estudantes: a seguinte questão: *Aquela mesma pessoa precisa calcular a área do terreno, mas não sabe o que isto significa e nem como calculá-lo, como você ajudaria esta pessoa?*

2 - Propor uma pesquisa para os alunos, no laboratório de informática usando a internet, livros didáticos e dicionários da escola, eles devem pesquisar o significado da palavra área.

3 - Pedir que os estudantes resolvam a seguinte atividade:

Com ajuda de elásticos, reproduza as figuras da imagem abaixo no seu Geoplano. Em seguida, tomando como unidade de medida um quadradinho formado por quatro pregos, calcule a área de cada uma destas figuras, explicando como você resolveu.

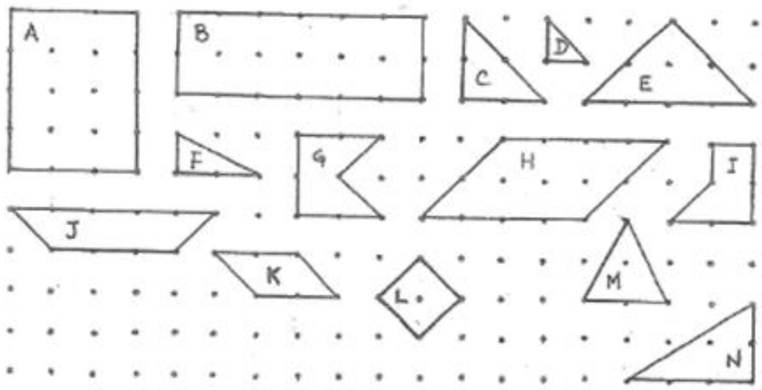


Figura - Atividade sobre área do terceiro encontro - Fonte - Disponível em http://mdmat.mat.ufrgs.br. Acesso em 15 de novembro de 2015.

4 - Discutir com os grupos as soluções apresentadas e questionar se não há processos mais rápidos de cálculo da área das figuras do exercício anterior. Pedir que os grupos apresentem para os demais estas soluções.

AULA 4

OBJETIVOS:

● Os estudantes consigam calcular a área de uma determinada figura;

● Que os discentes trabalhem cooperativamente com os colegas, a fim de, trocando ideias, resolvam situações-problemas propostas;

● Aplicar os processos rápidos do cálculo de área para resolver situações-problemas;

● Os estudantes exercitem sua capacidade de expressarem os resultados obtidos para os colegas;

● Usem a criatividade para aproximarem a área de uma superfície, usando ferramentas não habituais, como capa de caderno, palmo, tampo de mesa e etc.;

● Que os estudantes percebam a necessidade de uma unidade de medida de área universal.

● Chamar atenção para o significado das unidades, como por exemplo: m^2, cm^2 e km^2 . Discutir, inclusive, sobre sistema internacional de medidas, agora voltado a ideia de área;

● Discutir o conceito de área;

● Analisar nas resoluções se as estruturas multiplicativas são consistentes para os estudantes;

● Que os estudantes proponham uma definição para área.

PROCEDIMENTO E AS ATIVIDADES:

1 - Propor a seguinte situação problema aos estudantes: *A diretora precisa trocar o piso da nossa sala de aula, como podemos ajudá-la a fazer o pedido da quantidade para a loja? Para que não haja desperdício, qual a quantidade de piso necessária?*

2 - Comparar os resultados encontrados por cada grupo na atividade anterior;

3 - Retomar o problema do pedido de material da diretora para a loja do primeiro encontro. O contexto agora é que, novamente, este pedido se dará através do telefone, e, portanto, é necessário que o atendente entenda que quantidade de piso a diretora precisa.

4 - Propor o seguinte problema: *Não existe uma maneira mais rápida para realizar este cálculo?*

5 - Perguntar se as definições apresentadas pelos estudantes, ou as encontradas nas pesquisas, são suficientes para o cálculo das áreas das figuras do exercício da aula passada, e para resolver o problema do piso. Se estas definições não os satisfazem, propor que as melhorem ou criarem uma nova.

AULA 5

OBJETIVOS:

● Motivar nos estudantes argumentação, organização e exposição dos resultados das medidas de área encontradas;

● Discutir com os estudantes a ideia de aproximar medidas;

● Trabalhar com os alunos áreas de figuras não poligonais;

● Fazer com que os estudantes encontrem mecanismos mais rápidos para o cálculo da área de algumas figuras.

PROCEDIMENTO E AS ATIVIDADES:

1 - Calcular o tamanho real do piso sala de aula, e fazer uma comparação dos valores encontrados pelos grupos;

2 - Colocando a disposição dos estudantes réguas, barbantes, compassos, transferidores, malhas quadriculadas transparentes e não transparentes, propor o seguinte problema: *É possível calcular a área de cada figura abaixo? Quando for possível calcule e explique como você fez. Por que escolheu este instrumento?*

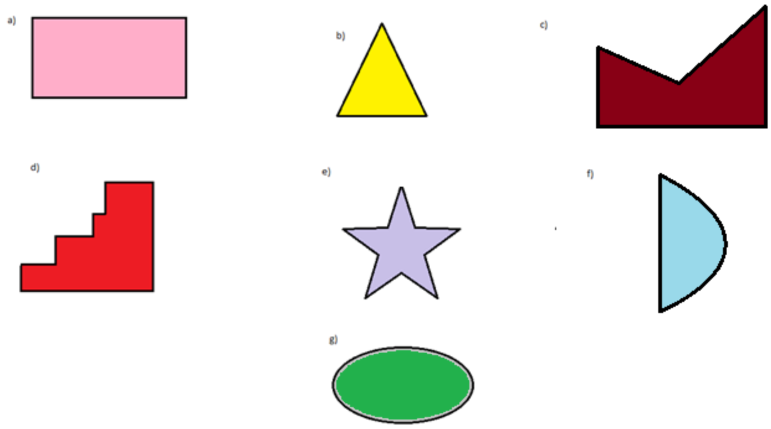


Figura - Atividade sobre área prevista para o 5° encontro.

3 - Com o auxílio do GeoPlano, incentivar que os estudantes encontrem mecanismos mais rápidos para o cálculo da área de algumas figuras.

APÊNDICE 2: Termo de consentimento informado para autorização dos responsáveis para participação dos alunos.

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. _______________, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma __________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada "*Como auxiliar estudantes a compreenderem os conceitos de área e perímetro?*", desenvolvida pelo pesquisador Gabriel Almeida Quevedo. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pelo Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone ______ ou e-mail___________.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo. Seguem abaixo, em linhas gerais, os principais objetivos:

O objetivo da pesquisa será, primeiramente, identificar o que alunos do 9° ano do Ensino Fundamental compreendem sobre os conceitos de área e perímetro. Este estudo também pretende verificar quais são as dificuldades apresentadas pelos alunos ao se depararem com problemas que exijam o cálculo de área e perímetro. Depois disto, será proposto uma sequencia didática com objetivo de reconstruir/construir conceitos dos estudantes. A pesquisa será desenvolvida com alunos da Escola Estadual de Ensino Fundamental Professora L. B.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado. Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço: *Av. Bento Gonçalves 9500, prédio 43111, Campus do Vale, Bairro Agronomia, Porto Alegre-RS /telefone __________/e-mail______________.*

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, ____________ de Outubro de 2014.

Assinatura do Responsável: Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: