

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FELIPE DIEGO BULLA

MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA REALIDADE AUMENTADA:
POSSIBILIDADES À FORMAÇÃO DE PROFESSORES

PORTO ALEGRE

2016

Felipe Diego Bulla

MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA REALIDADE AUMENTADA:
POSSIBILIDADES À FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Trabalho de Conclusão apresentado à Banca Examinadora do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Rio Grande do Sul, como requisito parcial e obrigatório para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Rosa

PORTO ALEGRE

1º SEMESTRE

2016

MODELAGEM MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA REALIDADE AUMENTADA:
POSSIBILIDADES À FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Trabalho de Conclusão apresentado à Banca Examinadora do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Rio Grande do Sul, como requisito parcial e obrigatório para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Rosa

Porto Alegre, 06 de julho de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Maurício Rosa – Orientador

Prof. Dra. Leandra Anversa Fioreze – Banca Examinadora

Prof. Dra. Marilaine de Fraga Sant’ana – Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, pela vida e pela saúde que me deste.

Aos meus pais Loreto e Celoisa, pelos ensinamentos, pelo carinho e por toda dedicação ao longo da minha vida.

A minha avó Jenny e tia avó Cely, por todo carinho, atenção e momentos felizes que compartilhamos juntos.

Ao meu avô Adenilo Leuck e a minha avó Delésia Riboldi Bulla, em especial, os quais admiro muito e, infelizmente, não estão mais presentes neste plano.

Ao meu irmão Tiago, pelo incentivo, pela orientação e pela inspiração na trajetória de meus estudos.

A minha amada Andressa, pelo companheirismo, pelo afeto e por todo apoio dedicado ao longo da minha trajetória acadêmica.

Ao meu professor orientador Dr. Maurício Rosa, por toda motivação, orientação e atenção na produção da pesquisa envolvida no presente trabalho de conclusão.

Aos meus colegas do grupo de pesquisa, Bruno e Eva, pelo apoio durante a pesquisa desse trabalho e pelas contribuições para revisão das atividades.

Às professoras Marilaine e Leandra pela composição de minha banca examinadora, eu agradeço pelos seus comentários e pelas suas sugestões para aprimoramento do meu trabalho.

A todos meus familiares e meus amigos presentes na minha jornada, pelos momentos felizes e de descontração nas situações mais difíceis.

RESUMO

A presente pesquisa buscou investigar como a Realidade Aumentada pode potencializar/transformar o *design* de tarefas em termos da Modelagem Matemática no estudo de funções de duas variáveis reais. Diante disso, investigamos como o processo de Design Instrucional se constrói ao desenvolvermos essas tarefas. As superfícies e os objetos virtuais das atividades foram desenvolvidos no programa Blender, assistido pelo aplicativo AndAR para reprodução desses elementos virtuais em um ambiente de Realidade Aumentada. Assim, a pesquisa se constituiu de momentos distintos, ora pelo pesquisador pensando em como construir o *design* para suas tarefas em termos da Modelagem Matemática, ora pelas contribuições e discussões com o orientador e com o grupo de pesquisa no que diz respeito a suas práticas matemático-pedagógico-tecnológicas. Os dados da pesquisa foram analisados sob a interpretação de Modelagem Matemática entendida por Dalla Vecchia (2012); do ser-pensar-fazer-com-Tecnologias Digitais (ROSA, 2008), da Percepção entendida por Seidel e Rosa (2011) e do Design Instrucional (CAMPOS et al, 1998). A partir dessa pesquisa, entendemos que o desenvolvimento de atividades com o programa Blender em conjunto com o aplicativo AndAR, pode potencializar/transformar o *design* de tarefas em termos de Modelagem Matemática no estudo de funções de duas variáveis reais. Vislumbramos que a partir da Percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) do licenciando/pesquisador, o processo de construção do *design* de atividades com Realidade Aumentada, na perspectiva da Modelagem Matemática, potencializou/transformou o estudo de funções de duas variáveis reais. Além disso, o licenciando/pesquisador analisou como a Heterogeneidade do Ambiente de Realidade Aumentada pode potencializar/transformar o *design* de tarefas, em termos de Modelagem Matemática, no estudo de funções de duas variáveis reais. Essas características nos sugerem, também, possibilidades para desenvolvimento de futuras pesquisas que contribuam para formação de professores de matemática, especialmente no quesito de uma Ciberformação (ROSA, 2015), uma vez que buscamos apresentar como as Tecnologias Digitais de Realidade Aumentada podem ampliar e modificar as práticas pedagógicas no âmbito da Educação Matemática.

ABSTRACT

This research sought to investigate how Augmented Reality can leverage/transform the activities' design in terms of Mathematical Modeling in the study of two real variables functions. Therefore, we investigated how the process of Instructional Design is built to develop these tasks. Surfaces and virtual objects of the activities were developed in Blender program, assisted by AndAR application to play these virtual elements in an Augmented Reality environment. Thus, the research consisted of different times, sometimes by the researcher thinking about how to build the design for his tasks in terms of Mathematical Modeling or even by the contributions and discussions with the supervisor and the research group with regard to his technology-pedagogical-mathematical practices. The survey data were analyzed from the interpretation of Mathematical Modeling understood by Dalla Vecchia (2012); the be-think-do-with-Digital Technologies (ROSA, 2008), the perception understood by Seidel and Rosa (2011) and Instructional Design (Campos et al, 1998). From this research, we believe that the development of activities with Blender program in conjunction with the AndAR application can leverage/transform the activities' design in terms of Mathematical Modeling in the study of two real variables functions. We see that from the Perception (SEIDEL; ROSA, 2011) of the licensing/researcher, the construction process of the activities' design with Augmented Reality, from the perspective of Mathematical Modeling, potentiated/transformed the study of two real variables functions. In addition, the licensing/researcher examined how the Heterogeneity of the Augmented Reality Environment can leverage/transform the activities' design, in terms of Mathematical Modeling, in the study of two real variables functions. These characteristics also suggested us possibilities for future research to contribute for the formation of mathematics teachers, especially in the question of a Cyberformation (ROSA, 2015), as we seek to present how Augmented Reality Digital technologies can extend and modify the teaching practices in the context of Mathematics Education.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de neuro-cirurgias JHU/KRDL <i>Skullbase Surgery Simulator</i>	26
Figura 2 – Gráfico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$	34
Figura 3 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(y)$	34
Figura 4 – Gráfico da função $f(x, y) = e^x \cdot \text{sen}(y)$	35
Figura 5 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(xy)$	35
Figura 6 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(xy)$ com intervalos $x, y \in [-1, 1]$	35
Figura 7 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(xy)$ com intervalos $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	35
Figura 8 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(xy)$ com intervalos $x, y \in [-\pi, \pi]$	35
Figura 9 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(xy)$ com intervalos $x, y \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$	35
Figura 10 – Exemplo de imagem utilizada como <i>marker</i> pelo aplicativo AndAR.	40
Figura 11 – Imagem capturada da tela do <i>smartphone</i> ao projetar o modelo de um super-homem sobre o <i>marker</i> utilizado pelo AndAR com a câmera do aparelho.....	40
Figura 12 – Caminho para acessar o recurso <i>Z Math Function</i> do programa Blender, necessário para construir funções de duas variáveis.	42
Figura 13 – Exemplo de preenchimento dos campos <i>Z Equation: $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$, Subdivisões X: 16 vértices, Subdivisões Y: 16 vértices, X Size: $C_x = 2$ e Y Size: $C_y = 2$ ($I_x e y = [-1, 1]$)</i>	43
Figura 14 – Exportando o gráfico da função $f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$ no formato <i>wavefront</i> .	44
Figura 15 – Conferindo as predefinições de exportação do arquivo no formato <i>wavefront</i> ...	44
Figura 16 – Gráficos descritos pelas funções $f(x, y) = \cos(x) \cdot \cos(y)$; $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (à esquerda) e $g(x, y) = -\frac{x^4}{5} - \frac{y^2}{5} + \frac{17}{5}$; $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-4, 4]$ (à direita).....	51
Figura 17 – Superfície descrita pela função: $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y) + 1$; $x, y \in [-\pi, \pi]$ vista a partir do plano <i>yz</i> com o eixo <i>x</i> no sentido negativo.....	60
Figura 18 – Superfície descrita pela função: $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y) + 1$; $x, y \in [-\pi, \pi]$ vista a partir do plano <i>yz</i> com o eixo <i>x</i> no sentido positivo.....	60
Figura 19 – Imagem capturada em um <i>smartphone</i> , com os recursos do aplicativo AndAR, a qual é expressa pelo gráfico da função da Atividade 1: $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$; $x, y \in [-\pi, \pi]$	61

Figura 20 – Imagem capturada em um <i>smartphone</i> , com os recursos do aplicativo AndAR, a qual é expressa pelo gráfico da função da Atividade 2: $g(x, y) = \cos(x) \cdot \cos(y)$; $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	61
Figura 21 – Gráfico descrito pela função $f(x, y) = \cos(x) \cdot \text{sen}(y)$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $y \in [0, 2\pi]$	62
Figura 22 – Superfície construída com o programa Blender, descrita pela função: $f(x, y) = -x^2 + x - y + 1$; $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e $y \in [-1, 1]$	65
Figura 23 – Imagem capturada em um <i>smartphone</i> , com os recursos do aplicativo AndAR, a qual é expressa pelo gráfico da função da Atividade 3: $f(x, y) = -\frac{x^4}{5} - \frac{y^4}{5} + \frac{17}{5}$; $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-4, 4]$	66
Figura 24 – Superfície descrita pela função $f(x, y) = -\frac{x}{2} - \frac{y}{2}$; $x, y \in [-1, 1]$, visualizada em um ambiente de RA (Atividade 4 – Superfície 4)	66
Figura 25 – Superfície descrita pela função $f(x, y) = -\frac{x^3}{2} - \frac{y^3}{2}$; $x, y \in [-1, 1]$, visualizada em um ambiente de RA (Atividade 4 – Superfície 5)	67
Figura 26 – Objeto virtual da Atividade 5, visualizado em RA.....	68
Figura 27 – Objeto virtual da Atividade 6, visualizado em RA.....	68
Figura 28 – Objeto virtual da Atividade 7, visualizado em RA.....	69
Figura 29 – Objeto virtual da Atividade 8, visualizado em RA.....	69
Figura 30 – Forma de alumínio para confecção de ovo de Páscoa	69
Figura 31 – Cestos de palha em três tamanhos distintos.....	69
Figura 32 – Anel com pedra de ametista (réplica)	70
Figura 33 – Brinquedos Playmobil.....	70
Figura 34 – Exemplo A do objeto virtual criado com o programa Blender semelhante ao objeto virtual visualizado em RA na Atividade 7.....	71
Figura 35 – Exemplo B do objeto virtual criado com o programa Blender semelhante ao objeto virtual visualizado em RA na Atividade 7.....	71
Figura 36 – Exemplo C do objeto virtual criado com o programa Blender semelhante ao objeto virtual visualizado em RA na Atividade 7.....	71
Figura 37 – Exemplo D do objeto virtual criado com o programa Blender semelhante ao objeto virtual visualizado em RA na Atividade 7.....	71

Figura 38 – Construção do objeto virtual da Atividade 5 obtida pelo colega A: $f(x, y) = 4 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right)$ e $g(x, y) = -2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right)$ ambas com intervalos $x, y \in [-3, 3]$... 72

Figura 39 – Construção do objeto virtual da Atividade 6 obtida pelo colega A: $f(x, y) = -2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right)$; $x, y \in [-3, 3]$ e $g(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + 3$; $x \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ e $y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 72

Figura 40 – Construção do objeto virtual da Atividade 7 obtida pelo colega A: $f(x, y) = x^8 + y^8$ e $g(x, y) = -(x^8 + y^8) + 2$ ambas com intervalos em $x, y \in [-1, 1]$ 73

Figura 41 – Construção do objeto virtual da Atividade 8 obtida pelo colega A 73

Figura 42 – Estimando os valores nos eixos desenhados na borda centimetrada do *marker* para tentar identificar o domínio da superfície do objeto virtual (Atividade 6), visualizada na tela do *smartphone* 85

Figura 43 – Rascunho utilizado pelo licenciando/pesquisador para registrar pontos de coordenadas (x, y, z) pertencentes à imagem do objeto virtual visualizado na Figura 42..... 86

Figura 44 – Gráfico obtido pelo programa *LAB Fit* ao plotar os pontos registrados pelo licenciando/pesquisador com a lei de formação dada por: $A \cdot \cos\left(\frac{x_1}{B}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_2}{B}\right) + C$ 87

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	11
1. REFERENCIAL TEÓRICO	18
1.1 Uma Instância Pedagógica para se referenciar à Realidade Mundana	18
1.2 Tecnologias Digitais como partícipes do processo educativo	23
1.3 Um olhar “enriquecido” para a Realidade Mundana	25
1.4 O Design Instrucional	28
1.5 Percepção	32
1.6 Funções de Duas Variáveis Reais – o que representam, para que servem?.....	33
2. METODOLOGIA	38
2.1 Tipo de Pesquisa	38
2.2 Sujeitos da Pesquisa.....	38
2.3 Recursos da Pesquisa	39
2.4 Desenvolvimento das Atividades.....	45
3. TRANSCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA	47
3.1 Apresentação dos Dados	48
3.2 Percepção distinta à Realidade Mundana	49
3.3 Heterogeneidade do Ambiente de RA (virtual mais mundano).....	76
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
REFERÊNCIAS	92
APÊNDICE A – ATIVIDADE FINAL.....	95
APÊNDICE B – TABELAS PARA REGISTO DE PONTOS	101
APÊNDICE C – <i>MARKER</i> COM BORDA CENTIMETRADA	102

INTRODUÇÃO

Em minha¹ trajetória acadêmica tive a oportunidade de experimentar e conhecer alguns programas computacionais direcionados para o ensino e para a aprendizagem da matemática. Dentre eles, posso destacar principalmente o programa GeoGebra², pois o considero como um dos programas de ensino e de aprendizagem de matemática completo, dinâmico e interativo para o livre uso de professores e de alunos. Completo, no sentido de conter as mais variadas funções para se trabalhar com os conceitos matemáticos, percorrendo as noções fundamentais de geometria euclidiana e analítica assim como os fundamentos de funções reais em coordenadas cartesianas xy ou xyz . Dinâmico e interativo, pois o programa é concebido como um software de Geometria Dinâmica Interativa (GDI) pelo seu próprio criador, Markus Hohenwarter, termos os quais podem ser entendidos como:

[...] “Dinâmico” do nome pode ser mais bem entendido como oposição à estrutura “estática” das construções da geometria tradicional. E o termo “Interativo” é que após o aluno realizar uma construção, ele pode alterar as posições dos objetos iniciais e o programa redesenha a construção, preservando as propriedades originais (NASCIMENTO, 2012, p. 129).

A partir deste programa, fui capaz de vislumbrar novas possibilidades didáticas para a produção do conhecimento matemático dos alunos os quais tive a oportunidade de ser professor durante as disciplinas de Laboratório de Prática de Ensino e Aprendizagem em Matemática III (LAB III) e de Estágio em Educação Matemática III do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Apropriei-me dos recursos de GDI do programa para dirigir o estudo de funções trigonométricas e geometria espacial ao ministrar as aulas sobre os conteúdos citados. A capacidade do programa em modificar os objetos e as informações expressas pela tela do computador de forma imediata proporcionou momentos de reflexão e de discussão sobre os conceitos matemáticos de cada situação em sala de aula. Observar como muitos dos alunos se engajavam ao uso desta tecnologia gerou em minha compreensão a respeito do ensino de matemática alguns questionamentos sobre o tema. Como as Tecnologias Digitais (TD) podem potencializar a produção do conhecimento matemático

¹ Descrevemos a trajetória do autor na primeira pessoa do singular, uma vez que entendemos suas experiências como algo único as quais estão descritas em razão de suas crenças, seus princípios e sua visão de mundo.

² GeoGebra é um programa de computador o qual permite a reprodução de objetos geométricos em duas e três dimensões a partir de fundamentos de geometria analítica e euclidiana. Além disso, o programa disponibiliza uma série de recursos para construção de funções polinomiais, logarítmicas, exponenciais, trigonométricas e etc.

dos alunos? Como essa potencialização pode ou não ocorrer ao se trabalhar com diferentes conteúdos matemáticos?

Da mesma forma, durante a disciplina de LAB III, me familiarizei com as ideias de Skovsmose (2000) ao tratar dos cenários de investigação. Skovsmose (2000) argumenta sobre o modo como o professor de matemática pode convidar seus alunos a investigar o *design* de atividades, desenvolvidas pelo próprio professor. Essas ideias me proporcionaram muitas reflexões a respeito do ensino de matemática e me inquietaram na preparação dos meus planejamentos de aula. Busquei me questionar quanto à relevância das minhas propostas didáticas e procurei planejar minhas aulas nas disciplinas de LAB III e dos estágios de modo a convidar os alunos a refletirem e a pensarem na matemática envolvida nos problemas propostos em sala de aula. De fato, ao longo de toda a disciplina de Estágio em Educação Matemática III minhas aulas foram conduzidas, na maior parte do tempo, por convites ao pensamento matemático a partir de problemas extraídos das provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) dos últimos cinco anos e reelaborados para a proposta didática desenvolvida. Minha convicção era de que poderia criar junto aos alunos momentos de reflexão e interpretação da matemática abrangida por cada um dos problemas selecionados.

Também, com meu primeiro contato significativo com a corrente pedagógica da Modelagem Matemática (MM) se manifestaram uma série de questionamentos acerca das possibilidades didáticas para o ensino e para a aprendizagem da matemática. Durante a disciplina de Estágio em Educação Matemática III, tive contato com as ideias de Dalla Vecchia (2012) por orientação do professor Dr. Maurício Rosa.

Dalla Vecchia (2012) constrói em sua tese um novo olhar sobre a MM. O autor acredita que a MM não necessita de um modelo estritamente proveniente da realidade mundana para conduzirmos uma proposta didática de MM no ensino de matemática. Ele defende que é possível, por meio dos próprios recursos tecnológicos, gerarmos uma situação de MM ao produzirmos, com esses recursos, um jogo eletrônico, por exemplo. Nas discussões realizadas pelo autor, me chamaram a atenção, igualmente, os princípios de construção do pensamento defendidos por Papert (1985, 1994). Nesse sentido, Dalla Vecchia (2012, p. 63) ainda afirma que “Uma das ideias fortes do Construcionismo é a negação de que para uma melhor aprendizagem deve haver um aperfeiçoamento da instrução”. Esse trecho da tese do autor me chamou muito a atenção, pois, me fez refletir

sobre o modo de como preparava e ministrava minhas aulas. Compreendi que não bastava dominar de maneira impecável os conceitos matemáticos, se eu não conseguisse permitir que os meus alunos discutissem as ideias matemáticas, de maneira relevante e significativa, para cada um dos conteúdos estudados em sala de aula. Ou seja, acreditava que quanto mais me aproximasse de uma linguagem matemática precisa e rigorosa, mais me aproximaria de uma melhor aprendizagem dos meus alunos sobre as ideias matemáticas envolvidas em cada um dos conteúdos estudados.

Agregando as convicções dos autores Skovsmose (2000) e Dalla Vecchia (2012) fui capaz de compreender minhas inquietações, geradas a partir das minhas observações da sala de aula. Ao longo das disciplinas de LAB III e dos estágios, então, evidenciei a desconexão que alguns alunos manifestavam em relação às aulas de matemática, ao tratar os fundamentos de álgebra, trigonometria e geometria espacial. Notei que para alguns alunos não havia sentido estudar os conceitos desses conteúdos. Apesar de acreditar no potencial da corrente pedagógica de Modelagem Matemática (MM) aliada a recursos tecnológicos para ensino da matemática, ainda assim tinha a sensação de ausência de sentidos matemáticos nos processos de ensino e de aprendizagem dos alunos. Posteriormente, ao assimilar as ideias de Skovsmose (2000) e Dalla Vecchia (2012) compreendi que possivelmente eu, enquanto professor, estava impregnando ao ensino de matemática dos alunos muitas definições e conceitos matemáticos abstratos, sem me preocupar com o processo de construção do pensamento matemático e oferecer um convite mais apropriado, a meu ver, à reflexão e à discussão do raciocínio matemático envolvido nas atividades propostas na sala de aula. Como consequência dessas minhas experiências, despontaram perguntas como: de que modo seria possível ensinar os conteúdos matemáticos desprendendo-se das suas definições e dos seus conceitos rígidos? Além disso, como empregar a MM associada às TD nessa perspectiva, propiciando o ensino e a aprendizagem matemática?

Envolto a esses questionamentos, meu professor orientador Dr. Maurício Rosa me apresentou seu projeto de pesquisa. Em suma, o projeto do professor consiste em pesquisar o estudo de funções de duas variáveis reais no olhar da Realidade Aumentada (RA). O termo RA tem sido muito difundido por autores como Kirner (2007) e Azuma (1997), tendo sua origem conhecida por volta da década de 90. A RA pode ser entendida, a partir de uma das definições mencionadas por Kirner e Siscoutto (2007), como um ambiente real enriquecido com objetos virtuais, criados a partir do uso de algum dispositivo tecnológico, operando em tempo real. Dessa forma, os objetos virtuais de RA podem ser criados a partir de um

smartphone ou de um *tablet* instalados com um aplicativo específico. Sendo assim, após discutir sobre o projeto de pesquisa do professor, vislumbramos a possibilidade de elaborar uma pesquisa direcionada às minhas inquietações, previamente indicadas na minha trajetória acadêmica. Passo, então, a destacar as ações que juntos, orientador, grupo de pesquisa e eu, vislumbramos para esse estudo.

Igualmente, realizamos³ uma breve consulta em referenciais teóricos de RA e percebemos a insuficiência de trabalhos desenvolvidos nessa temática no ensino e na aprendizagem de matemática. Em consequência disso, reforçamos a justificativa de pesquisa, a qual concerne averiguar como a MM combinada ao uso de TD se apresenta no ensino e na aprendizagem de matemática. Nesse ínterim, embora o programa GeoGebra ofereça características interessantes, conforme já mencionadas, para desenvolver uma pesquisa nesta temática, essas não são suficientes para que se trabalhe com Realidade Aumentada, o que nos fez buscar outros softwares além da GDI, não específicos para o ensino e para a aprendizagem de matemática. Com efeito, selecionamos o programa Blender⁴ e o aplicativo AndAR⁵, para construirmos e visualizarmos, respectivamente, objetos de RA. Ambos os softwares atendem às necessidades da pesquisa desse trabalho e esses estão disponíveis para uso livre em *smartphones* ou *tablets* (com sistema operacional Android⁶) e computadores. Assim, destacamos a escolha do programa Blender, pois, por meio deste software são construídos e modelados diversos objetos virtuais em três dimensões, destinados para as mais diversas áreas como, por exemplo, a arquitetura, o design, a engenharia etc. Ressaltamos a função de modelagem do programa, em virtude dos interesses em aliar os recursos computacionais do Blender com a MM. Diferentemente da perspectiva de modelo matemático defendida por outros autores, assumiremos modelo matemático, nesse estudo, a partir do que defende Dalla Vecchia (2012, p.116 – grifo do autor), ou seja, “[...] como sendo o **exemplar de uma situação que se mostra por meio de uma linguagem estruturada por ideias matemáticas**”. Isso, então, nos permitirá sustentar

³ A partir desse momento, nos referimos a primeira pessoa do plural na escrita desse trabalho, posto que as argumentações e explicações foram desenvolvidas pelo autor em consonância com o grupo de pesquisa.

⁴ Blender é um programa de computador que permite, por exemplo, a modelagem de objetos virtuais 3-D, a edição de suas superfícies, a iluminação do ambiente no qual o objeto está inserido, a animação articulada do objeto, a programação de *scripts* para, inclusive, a montagem de um filme ou um desenho.

⁵ AndAR é um aplicativo para dispositivos como *smartphones* ou *tablets*, capaz de reproduzir objetos virtuais 3-D (criados, por exemplo, no programa Blender) em um ambiente real, ou seja, no ambiente capturado pela própria câmera do *smartphone* ou *tablet*. A imagem do objeto virtual 3-D é vista na tela do *smartphone* ou *tablet* conforme sua localização no ambiente real, capturada pelas câmeras dos aparelhos mencionados.

⁶ O sistema operacional Android funciona semelhantemente como o sistema operacional Windows em computadores; porém, notamos sua utilização, de maneira geral, em *smartphones* e *tablets*. Importante ressaltar que nem todos os aparelhos *smartphones* e *tablets* possuem este sistema operacional instalado.

a ideia de modelagem, assim como fez Dalla Vecchia (2012), ao nosso estudo com RA, de forma a entendê-la como “[...] **um processo dinâmico e pedagógico de construção de modelos sustentados por ideias matemáticas que se referem e visam encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade**” (DALLA VECCHIA, 2012, p. 123 – grifo do autor), inclusive a Realidade Aumentada.

Observamos, também, a insuficiência de trabalhos no campo da educação matemática os quais mencionam ou utilizam o programa Blender para abordar o ensino e a aprendizagem matemática. Somado a essas circunstâncias, encontra-se o propósito em lidar com o programa Blender para explorar os conceitos matemáticos, desvelando, possivelmente, diferentes sentidos para as definições matemáticas rígidas e, além disso, por acreditar na possibilidade do programa em potencializar/transformar o ensino e a aprendizagem no que tange o estudo de funções a duas variáveis reais. Outrossim, consonante a esse objetivo, desejamos investigar o uso articulado do programa Blender e do aplicativo AndAR para a formação de professores nas diferentes dimensões dessa. Aliás, articulamos esses dois softwares justamente pelo fato do programa Blender gerar extensões de arquivos compatíveis com o aplicativo AndAR, permitindo a visualização dos objetos virtuais 3D sob o olhar da RA.

Desse modo, conduzimos a pesquisa realizada nesse trabalho, de forma a desvelar o trabalho com a MM em consonância com as TD, em termos de pensamento crítico-refletivo, possivelmente, favorecido por tarefas que venham a desencadear isso. Ou seja, a partir da análise do desenvolvimento de tarefas de MM com RA realizadas pelo próprio licenciando/pesquisador seguimos a metodologia utilizada por Nunes (2011) de autoanálise, autoinvestigação, na qual no decorrer da sua investigação, o próprio pesquisador é sujeito de si mesmo. Nesse caso, o estudo torna-se favorecido e dificultado ao mesmo tempo. Favorecido, pelo fato do principal sujeito ser o próprio pesquisador/*designer* e dificultado pelo fato de ter de antemão a certeza de que o rigor metodológico precisa ser ainda mais evidenciado.

Em conjunto à busca pela inovação metodológica, existe nossa vontade em trilhar novas possibilidades didáticas associadas à prática de TD específicas para produção de objetos em RA. Visto a escassez de trabalhos elaborados nessa temática, entendemos que estudar TD capazes de representar objetos em RA seja um fator proeminente para investigação dessa pesquisa. Almejamos, do mesmo modo, propor práticas pedagógicas, *em*

refinamento, por meio do *design* de tarefas com TD, relacionando as ideias de Rosa (2008) a autores como Campos, Rocha e Campos (1998) bem como Filatro e Piconez (2004), desejando assim que isso se torne consequência da própria pesquisa. Essas tarefas envolverão objetos virtuais 3D, os quais serão modelados com as TD especificadas anteriormente e “*em refinamento*”, pois, nossa ambição é investigar, posteriormente, suas possibilidades para o ensino e para aprendizagem de matemática em suas linhas de estudo. Assim, concebemos a pergunta diretriz dessa pesquisa da seguinte forma:

Como a Realidade Aumentada potencializa/transforma o design de tarefas em termos da Modelagem Matemática, no que tange o estudo de funções de duas variáveis reais?

Em sinergia com nossa pergunta diretriz, encontra-se nosso objetivo de **investigar a Realidade Aumentada em consonância com a Modelagem Matemática no processo de elaboração de tarefas pedagógico-matemáticas a fim de vislumbrar possibilidades para formação de professores em matemática**. Nessa perspectiva, entendemos que durante o “[...] **processo dinâmico e pedagógico de construção de modelos sustentados por ideias matemáticas que se referem e visam encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade**” (DALLA VECCHIA, 2012, p. 123 – grifo do autor) possamos desvelar episódios que contribuam para formação do licenciando/pesquisador como exemplo de formação suscetível de possibilidades.

Assim sendo, o presente trabalho está disposto para que o leitor possa acompanhar o caminho percorrido pela investigação dessa pesquisa. Em virtude das experiências e inquietações previamente citadas do autor, relacionadas às experiências da disciplina de LAB III e dos estágios, bem como ao projeto de pesquisa do professor orientador, relatamos a motivação, a justificativa, a pergunta diretriz e o objetivo da pesquisa na introdução desse trabalho. Por conseguinte, dividimos o trabalho em capítulos para orientar a compreensão do leitor nessa investigação.

No primeiro capítulo, discorremos acerca do referencial teórico consultado para condução da pesquisa. Entre os referenciais consultados estão a MM, as TD, a RA, o Design Instrucional, Percepção e as Funções de Duas Variáveis. Esse capítulo está dividido em sessões destinadas especificamente para cada um dos assuntos mencionados.

No segundo capítulo, descrevemos sobre a metodologia utilizada para pesquisa, justificando o tipo de pesquisa adotada para investigação e para análise da produção de dados. Do mesmo modo, explicamos a escolha do programa Blender e do aplicativo AndAR para o *design* de tarefas propostas para o ensino e a aprendizagem de matemática. Ainda nesse capítulo, nos debruçamos sobre os dois momentos nos quais está organizada a produção de dados da pesquisa.

No terceiro capítulo, discutimos sobre a transcrição dos dados produzidos a partir do *design* de tarefas com os softwares selecionados, ao mesmo tempo em que analisamos suas potencialidades no ambiente de RA. Justificamos nossas considerações a partir de *insights* do pesquisador. Investigamos o processo de desenvolvimento das atividades as quais nos assistiram para tentar responder a pergunta diretriz dessa pesquisa. Também, transcrevemos as sugestões e os resultados dos colegas do grupo de pesquisa, explicando como esses contribuíram para investigação do trabalho.

No quarto e último capítulo, trazemos nossas considerações finais a respeito do trabalho desenvolvido, comentando como o processo investigativo contribuiu para a formação docente do pesquisador. Além disso, destacamos como essa pesquisa poderá favorecer, em nosso entendimento, o desencadeamento de demais pesquisas nos campos da Educação Matemática. Por fim, nos questionamos sobre como ainda poderíamos ter aprofundado nossa investigação.

1. REFERENCIAL TEÓRICO

O portal para condução do processo investigativo da presente obra se originou a partir dos resultados, em especial, obtidos pelas investigações dos autores consultados, constituindo o Referencial Teórico desse trabalho. Por intermédio desses sujeitos, sustentamos nossas ponderações e reorganizamos nossa maneira de pensar, desdobrando caminhos para o desenvolvimento da nossa pesquisa. Do mesmo modo, encontramos teorias que confluíram com nosso entendimento, consolidando nossas ideias e proporcionando uma evolução em nossa investigação. Em virtude dos autores consultados, ampliamos nosso pensamento e reforçamos nosso ponto de vista para tentar responder a pergunta diretriz de nossa investigação, mencionada, anteriormente, na introdução desse trabalho. Assim sendo, apresentamos, a seguir, as seis seções elegidas para organização desse capítulo, expondo as considerações dos autores consultados bem como nossa compreensão sobre suas ponderações e argumentações.

1.1 Uma Instância Pedagógica para se referenciar à Realidade Mundana

No contexto da Educação Matemática, a MM é um exemplo de abordagem pedagógica a qual vem sendo defendida por uma série de trabalhos acadêmicos conforme destacado por Barbosa (2001). Entre esses trabalhos, o significado do termo modelo é explorado por Barbosa (2009), o qual afirma que o termo é empregado, na qualidade da MM, na representação de alguma coisa. Barbosa (2009, p. 70) ainda argumenta que o sentido de “[...] modelo praticamente caminha junto com a trajetória das ciências”. O autor explica, a partir dessa afirmação, que entre as diversas ciências da modernidade podemos observar a presença de modelos matemáticos incorporados em suas teorias e seus modelos científicos. Outrossim, ele afirma que com o desenvolvimento das TD se impulsionou o uso de modelos matemáticos nos mais diversos campos científicos. Com efeito, Barbosa (2009, p. 71) assegura que o estudo de modelos matemáticos através das TD resultou “[...] uma ‘euforia exacerbada’ sobre o papel da matemática na “descrição” dos fenômenos”. Desse modo, o autor descreve como se manifestou a estreita relação entre a realidade (entendida por nós como realidade mundana) e a matemática por intermédio da MM. Barbosa (2009) também ressalta que na visão dos pesquisadores Borba e Skovsmose (1997) assim como Skovsmose (1994, 2001), por exemplo, a matemática é parte da realidade e os modelos matemáticos são necessariamente enviesados.

Borba e Skovsmose (1997) tratam a cerca da Ideologia da Certeza a qual concerne sobre o poder da matemática em garantir a certeza de muitas argumentações, envolvendo aspectos políticos, tecnológicos e administrativos. Os autores defendem que a matemática deve ser interpretada conforme o seu contexto e não apenas a sua teoria. Entendemos, dessa forma, como Borba e Skovsmose (1997) se referem à matemática como parte da realidade. Ou seja, não é suficiente estabelecer um modelo matemático apenas nas definições e nas teorias da matemática, sem antes analisar cuidadosamente seu contexto real. Particularmente, concordamos com o entendimento desses autores, pois, acreditamos na ideia de que a matemática, em termos educativos, deve ser pensada com, e moldada ao, nosso cotidiano. Dessa forma, nosso foco com essa pesquisa é, justamente, tentar analisar como a RA potencializa/transforma o *design* de tarefas, em termos de uma prática pedagógica de MM, no que tange o estudo de funções de duas variáveis como modo de avançar os estudos em Educação Matemática. Nesse sentido, pretendemos destacar elementos que permitam associar a matemática com a realidade mundana e procuramos mostrar o modo como estes elementos são identificados nas atividades planejadas com a inserção da Realidade Aumentada.

Skovsmose (1994) discorre sobre a Educação Matemática Crítica (EMC), de modo a revelar que a matemática deveria ser desenvolvida como uma competência de importância na educação crítica, então, esta necessita integrar conhecimentos matemáticos, tecnológicos bem como reflexivos. Em particular, Skovsmose (1994) associa saberes tecnológicos à possibilidade de construção de modelos matemáticos e, por outro lado, o autor associa processos reflexivos à possibilidade de avaliar as aplicações da matemática. O autor ainda defende que por “tecnologia” podemos fazer referência a megaestruturas tecnológicas da sociedade. Skovsmose (1994, p. 36) afirma que a matemática é vista como um princípio básico para o *design* da tecnologia. Entretanto, Skovsmose (1994) explica que atualmente a matemática está implicitamente prescrita em ações tecnológicas, formatando, de certa forma, o poder. Assim, compreendemos que Skovsmose (1994) busca enfatizar como a matemática está incorporada na sociedade, principalmente, por meio de recursos tecnológicos; contudo, o autor destaca como é fácil não analisarmos a proporção da sociedade atingida por esses recursos. Em outras palavras, entendemos que Skovsmose (1994) pretende elucidar como a matemática exerce certo poder sobre o desenvolvimento de nossa sociedade. Dessa forma, relacionamos as ponderações de Skovsmose (1994) com a MM, pois, acreditamos na prática pedagógica da MM para ressaltar o possível impacto da matemática na reflexão e na

interpretação crítica de nossa realidade mundana. Cremos que o ensino da matemática, em um viés da corrente pedagógica da MM, possa propiciar sentidos relevantes para as dimensões matemática, tecnológica e pedagógica da formação de professores, conforme enunciado por Dalla Vecchia (2012). Nesse sentido, consideramos que a produção do conhecimento matemático pode ocorrer com práticas pedagógicas de MM aliadas a recursos tecnológicos que venham a favorecer o pensamento crítico e reflexivo do conhecimento matemático.

Não obstante, Skovsmose (2001) aborda sobre a Educação Matemática (EM) e a Educação Crítica (EC) sugerindo a inexistência de integração da EM (subdividida em três tendências: estruturalismo, pragmatismo e orientação-ao-processo) com a EC. Em especial, percebemos que Skovsmose (2001) cita situações de práticas pedagógicas relacionadas ao pragmatismo e à orientação-ao-processo similares às características de uma abordagem pedagógica pela MM. Nas palavras do autor:

De acordo com a tendência *pragmática* em EM, a essência da matemática encontra-se em suas aplicações e, portanto, de um certo modo, fora da matemática. No processo de educação, é, então, extremamente importante ilustrar as várias maneiras de a matemática ser útil. Essa tendência pode ser entendida em sentido amplo, e muitos argumentos foram apresentados em apoio a uma EM dirigida a aplicações (SKOVSMOSE, 2001, p. 21).

A tendência pragmática, no ponto de vista de Skovsmose (2001), resume-se a relacionar a matemática a suas aplicações. Com efeito, estas ponderações nos remetem às noções trazidas por Barbosa (2009) ao discorrer sobre como os modelos matemáticos provocaram uma “euforia exacerbada” sobre a descrição de fenômenos. Nesse sentido, compreendo que os modelos matemáticos são utilizados para demonstrar as aplicações do conhecimento matemático. Entretanto, Skovsmose (2001) argumenta sobre um aspecto muito mais específico para interpretação da tendência pragmática. Skovsmose (2001) explica esta distinta interpretação com as ponderações de Ormell (1972) ao enfatizar a “filosofia prática da matemática”:

[...] a contribuição original da matemática para a sociedade opera não via sua relevância para o que já é, mas via sua relevância para o que é ainda apenas potencial: via luz lançada sobre implicações escondidas ou semi-escondidas das inovações apresentadas, hipóteses, propostas, programas e projetos de todos os tipos. **A relevância da matemática não está em um utilitarismo simplista, mas nas possibilidades de novos padrões de explicação da ciência e novos modelos de organização nos assuntos sociais e técnicos** (SKOVSMOSE, 2001, p. 22 – grifo nosso).

A partir do que afirma Ormell (1972), Skovsmose (2001) identifica a matemática além das suas aplicações. Ele afirma a relevância da matemática para produção de novos

modelos. Assim, ele não considera a matemática apenas como uma ferramenta necessária para aplicação em determinados contextos da sociedade e isso nos faz concordar com a visão do autor, pois, analogamente, entendemos que uma prática pedagógica de MM possibilite novos conhecimentos matemáticos assim como novas interpretações matemáticas, proporcionando, possivelmente, sentidos relevantes para o pensamento matemático de professores e alunos.

Também, Skovsmose (2001) descreve a tendência orientação-ao-processo, mencionando os termos “matematizar” e “concretizar”. Matematizar, nas palavras de Skovsmose (2001, p. 26), significa “[...] em princípio, formular, criticar e desenvolver maneiras de entender [...] a matematização deve ter um papel importante no processo educacional: ambos, estudantes e professor, devem estar envolvidos no controle desse processo”. Ele ainda ressalta a intenção da tendência orientação-ao-processo em concretizar os conceitos matemáticos abstratos em favor da matematização. Desse modo, observamos que a tendência orientação-ao-processo torna-se um trabalho em conjunto de professor e alunos para construir o conhecimento matemático. Nesse sentido, interpretamos uma atividade de MM similarmente à alternativa de orientação-ao-processo, pois, entendemos que esta prática pedagógica possa conduzir o professor (junto de seus alunos) a formular e a criar modelos matemáticos assim como construir sentidos matemáticos concretos para o ensino e para a aprendizagem de matemática.

Além disso, notamos que Skovsmose (2001) defende a integração da EM e da EC, partindo do pressuposto que a EM necessite de um papel ativo paralelo ao de outras forças sociais críticas. Dessa forma, Skovsmose (2001) está se referindo às ideias trazidas anteriormente, pelas quais ele argumenta como a matemática se materializa em nossa realidade mundana através da tecnologia; contudo, o autor (SKOVSMOSE, 2001) salienta como não adotamos uma postura proveniente da EC para analisarmos a dimensão do conhecimento matemático disseminado na sociedade. Assim, acreditamos, com base nas considerações realizadas nessa seção que essa pesquisa possa orientar a EC de professores e de alunos, tomando como vetor a prática pedagógica de *design* de atividade de MM com TD.

Assimilando as ideias de Borba e Skovsmose (1997) e Skovsmose (1994, 2001), retomamos a MM defendida por Dalla Vecchia (2012, p. 123 – grifo do autor) a qual diz respeito a “[...] **um processo dinâmico e pedagógico de construção de modelos**

sustentados por ideias matemáticas que se referem e visam encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade". Salientamos que, em nossa concepção, a realidade, mencionada anteriormente pelo autor (DALLA VECCHIA, 2012), nos remete à Realidade Mundana (BICUDO; ROSA, 2010), ou seja, tudo aquilo que pertence ao nosso mundo vida, nesse caso, os objetos, os seres humanos, os animais, as plantas etc. Fundamentados na visão de Dalla Vecchia (2012, p. 123), nos indagamos, pela pergunta diretriz, se durante o processo de investigação de nossa pesquisa, a construção do *design* de tarefas no ambiente de Realidade Aumentada pode potencializar/transformar o estudo de funções de duas variáveis reais a partir de uma prática pedagógica de MM. Com efeito, esperamos que esse processo contribua para formação docente do pesquisador ao pensar em atividades em termos da MM. Inicialmente, a inspiração para construção dessas atividades estavam relacionadas, intrinsecamente, com elementos do mundo cibernético conforme abordado na tese de Dalla Vecchia (2012). Entretanto, no processo de *design* das atividades, compreendemos que a produção de sentidos para os saberes matemáticos, ao empregarmos o uso de modelos virtuais (guiados por modelos da Realidade Mundana), possam emergir a partir da percepção desses modelos virtuais em um ambiente de RA. Desse modo, presumimos que o "[...] poder da linguagem matemática" (BORBA; SKOVSMOSE, 1997), os princípios da EMC (SKOSMOSE, 1994) e a integração da EM e da EC (SKOVSMOSE, 2001) também sejam analisados durante o processo de construção do *design* de atividades no viés de uma prática pedagógica da MM. Não obstante, concordamos com as ponderações de Dalla Vecchia (2012, p. 123 – grifo do autor) ao interpretar que a MM visa "**encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade**", pois pretendemos conduzir a resolução das tarefas propostas nessa pesquisa em um ambiente de RA. Nesse sentido, entendemos que a RA pode potencializar/transformar o ensino e a aprendizagem de matemática, começando pelo próprio *design* de tarefas vinculadas à MM. Conhecer como o processo de ensino e de aprendizagem matemática pode ser potencializado/transformado nesse espaço nos interessa e nos instiga. Pretendemos usar o mundo cibernético (DALLA VECCHIA, 2012) para o ensino e a aprendizagem de matemática para tomá-lo, igualmente, como uma dimensão abrangida pela Realidade Mundana (BICUDO; ROSA, 2010).

A seguir, exibiremos e discutiremos as considerações dos autores consultados acerca das Tecnologias Digitais (TD). Já notamos, em nosso entendimento, a amplitude desse tema em virtude dele estar presente no discurso e nas argumentações dos autores Borba e Skovsmose (1997), Skovsmose (1994, 2001) e Dalla Vecchia (2012). Portanto,

convidamos o leitor a acompanhar nosso raciocínio para investigação da nossa pesquisa na próxima seção.

1.2 Tecnologias Digitais como partícipes do processo educativo

As tecnologias são tão antigas quanto à existência da espécie humana conforme Kenski (2007, p. 15) evidencia. A autora (KENSKI, 2007, p. 15 – grifo nosso) ainda infere que devido ao uso do raciocínio, o ser humano é capaz de promover um processo contínuo e crescente de inovações, pois, “Os conhecimentos daí derivados, quando colocados em prática, dão origem a diferentes equipamentos, instrumentos, recursos, produtos, processos, ferramentas, enfim, a tecnologias. **Tecnologia é poder**”.

As ponderações realizadas por Kenski (2007) nos remetem, analogamente, ao entendimento de Borba e Skovsmose (1997, p. 17), sobre como a matemática pode ser vista como uma “linguagem de poder”. Nesse sentido, comparamos as ideias de Kenski (2007) ao tratar sobre como as tecnologias se desenvolveram ao longo da história com o entendimento de Borba e Skovsmose (1997) ao abordarem sobre a influência da matemática em assuntos políticos e administrativos. Kenski (2007) discorre sobre como, ao longo da história, as tecnologias foram utilizadas como um instrumento de guerra e de supremacia pelos estados. A autora (KENSKI, 2007) ainda comenta como se desenvolveram certos tipos de recursos tecnológicos, em áreas como a saúde e o esporte, durante o avanço tecnológico na produção de equipamentos espaciais. Por outro lado, Borba e Skovsmose (1997) apresentam como a matemática se faz presente nos meios políticos e administrativos, garantindo a certeza de fatores sociais e econômicos os quais favoreçam o controle dos poderes político e administrativo. Assim, percebemos que a matemática e a tecnologia estão conectadas pela relação de poder que ambas exercem sobre nossa sociedade.

Com isso, compreendemos que seja proveitoso, fundamentados nos autores Borba e Skovsmose (1997) assim como Kenski (2007), pensar em uma EM-com-TD (ROSA, 2008), pois, entendemos como a matemática e a tecnologia estão presentes em nossa sociedade e como elas possuem um papel impactante, tanto no sentido político quanto no sentido profissional ou social, em nossas vidas. Integrar a aplicação das TD para o ensino e para a aprendizagem de matemática nos parece uma condição para prática pedagógica relevante em termos cognitivos, de modo que possamos refletir a respeito da nossa Realidade Mundana.

Diante disso, acreditamos que as TD podem ser um meio para transformar a produção do conhecimento matemático, pois, sustentados pelas concepções defendidas por

Rosa (2008) ao tratar das relações do ser-com, pensar-com-TD e saber-fazer-com-TD, o processo cognitivo matemático pode ser potencializado pelas tecnologias, se a intencionalidade do processo se desvelar no sentido de que as TD precisam se tornar partícipes desse processo. Ou seja, o movimento do ser-aí-no-mundo-com, hifenizado, é concebido como um movimento intencional de lançar-se ao mundo com as tecnologias, de forma que essas não somente auxiliam, mas, participem da produção do conhecimento matemático. Assim, a hifenização dos termos ser-pensar-fazer-com-tecnologias, no caso, em especial, com o ciberespaço, é descrita da seguinte maneira pelo autor:

Sou um “ser” que só existe porque há o ciberespaço. Sou ser-com, pois estou com o mundo cibernético, com as ferramentas computacionais (chat, fórum, email) e com as narrativas ou avatares que me materializam, por meio dos bits da rede. Sou um “ser-com”, pois, entre outras coisas, penso-com-o-ciberespaço e aprendo-a-fazer-com-ele, uma vez que, construo o conhecimento em com-junto com o mesmo. Ou seja, sou imerso nesse ambiente e executo minhas ações nele, pois estas constituem os modos como me apresento. O ser, então, também é pensar, também é saber fazer (ROSA, 2008, p. 81).

Nesse sentido, Rosa (2015) avança e explicita sua fundamentação quando revela que essa se embasa na perspectiva heideggeriana do *ser-aí* e *ser-aí-no-mundo-com* (HEIDEGGER, 1988) a qual sustenta as relações estabelecidas pelo autor entre o ser e as TD. Isto é, o mundo cibernético é entendido por Bicudo e Rosa (2010) como o mundo-vida estabelecido pela conexão homem-máquina. Assim, o ciberespaço pode ser compreendido como o ambiente virtual sustentado materialmente por obra das TD e dos seres humanos no qual as ações, as informações e as ideias são executadas, desenvolvidas ou construídas. Rosa (2008), nesse sentido, também entende que em consequência a esta imersão dos seres humanos no ciberespaço provém a Ciberformação. Nesse caso, a Ciberformação vem a ser uma formação-com-TD, as quais estão em constante transformação e inovação (ROSA, 2015). Portanto, compreendemos que as TD são reorganizadas ou reestruturadas de acordo com as novas necessidades e os pensamentos do ser humano e, reciprocamente, o modo de pensar desse indivíduo é inovado ou interferido a partir do próprio uso das TD. Isso, então, é considerado um processo de *formação* (BICUDO, 2003b), plasticamente uma ação que dá forma e se modela na própria ação, contínua e infundável. Logo, em virtude dessa concepção de formação, acreditamos, assim como Rosa (2008), na possibilidade de explorar as TD para desenvolver práticas pedagógicas que possibilitem a transformação/potencialização da produção do conhecimento matemático e consequentemente da própria formação docente.

Ou seja, na medida em que professores e alunos interagem com as TD, novos caminhos para o ensino e para a aprendizagem de matemática podem ser trilhados, possivelmente não vistos ou analisados em planos didáticos que não fizeram o uso das TD, ou mesmo que fizeram sem tomar por base a concepção de Ciberformação.

Não obstante, Dalla Vecchia (2012) argumenta, igualmente, que na atual conjectura social, as TD produzem modificações e estruturações na cultura, dando origem a cibercultura. Nesse ponto de vista, entendemos a relevância de trabalhar com TD nesta pesquisa, visto que, em nosso mundo contemporâneo, a sociedade tende a acompanhar o desenvolvimento das TD, modificando-se e reorganizando-se conforme a evolução tecnológica. Mais que isso, é a própria sociedade que ao mesmo tempo faz com que as TD evoluam, há uma reciprocidade evolutiva e, nesse sentido, a educação precisa avançar frente a essa reciprocidade, não esperando que as tecnologias evoluam para que o processo educacional venha a evoluir, mas, pensando de forma contemporânea e buscando, frente ao pensamento dos discentes, contribuir para essa evolução. Todavia, então, as ponderações de Rosa (2008, 2015) passam a ter significado segundo o ser-com-TD, pensar-com-TD e saber-fazer-com-TD. Rosa (2004), já acrescentava a relevância do discente para que:

[...] consiga atribuir significado ao que está construindo, da mesma forma que possibilite a descoberta de novas conjecturas e não apenas trabalhe com formalismos e signos que o levem a uma abstração, que não possui nexos com sua realidade (ROSA, 2004, p. 47).

Assim, fundamentados nas proposições de Rosa (2004, 2008), entendemos que as TD fazem parte da Realidade Mundana (BICUDO; ROSA, 2010) dos professores e dos alunos e, do mesmo modo, acreditamos que as TD possuem potencial para modificar a maneira de pensarmos matematicamente. Em razão dessas circunstâncias, procuramos desenvolver atividades-com-TD, ou seja, nos empenhamos para produzir tarefas as quais a participação das TD viabilizem a exploração do conhecimento matemático. Nessa perspectiva, cremos que as TD de Realidade Aumentada possam favorecer o processo de ensino e de aprendizagem matemática, baseados no referencial teórico consultado, especificado na próxima seção.

1.3 Um olhar “enriquecido” para a Realidade Mundana

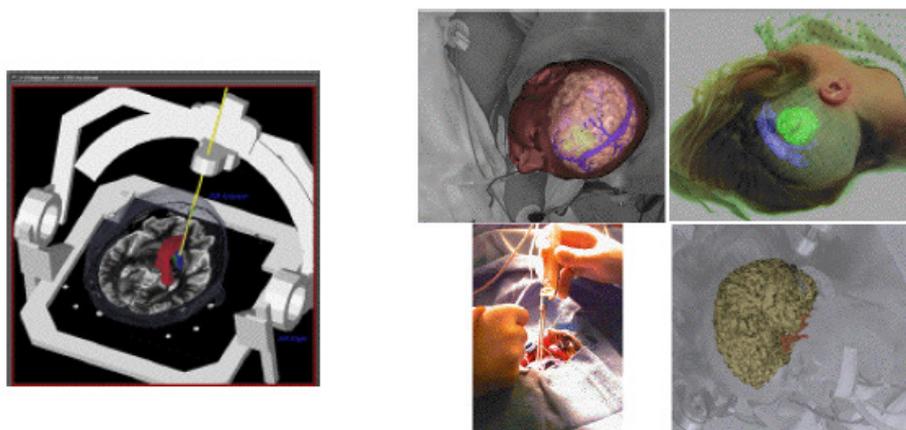
Segundo Kirner e Siscoutto (2007) a tecnologia foi se adequando às necessidades de seus usuários. Graças aos avanços tecnológicos, os autores comentam que pesquisadores

da área conseguiram implementar interfaces de voz, interfaces tangíveis, interfaces hápticas⁷ etc. aos inventos tecnológicos (computadores, *smartphones* e *tablets*, por exemplo). Em meio a essa evolução tecnológica, começaram a surgir recursos tecnológicos de RA, citam os autores Kirner e Siscoutto (2007). Eles argumentam que na década de 90, o aparecimento da RA permitiu a sobreposição de objetos ou ambientes virtuais com o ambiente físico, a partir de um dispositivo tecnológico.

Essas aplicações ficaram mais acessíveis somente no início dos anos 2000, com a convergência de técnicas de visão computacional, software e dispositivos com melhor índice de custo-benefício. Além disso, o fato dos objetos virtuais serem trazidos para o espaço físico do usuário (por sobreposição) permitiu interações tangíveis mais fáceis e naturais, sem o uso de equipamentos especiais. Por isso, a realidade aumentada vem sendo considerada uma possibilidade concreta de vir a ser a próxima geração de interface popular, a ser usada nas mais variadas aplicações em espaços internos e externos (KIRNER; SISCOOTTO, 2007, p. 5).

Kirner e Siscoutto (2007) acreditam ainda que a convergência tecnológica e o desenvolvimento de interfaces estão apontando para interfaces computacionais baseadas em RA. De fato, o potencial dessa tecnologia pode ser observado nas mais variadas áreas. Entre elas, podemos destacar a medicina, pois, conforme Cardoso e Lamounier (2009) há um tipo de sistema utilizado para neurocirurgias conhecido como JHU/KRDL *Skullbase Surgery Simulator* (ilustrado na Figura 1). Por meio desse sistema, “[...] os cirurgiões podem planejar, treinar e simular toda a cirurgia, antes de efetivamente executá-la sobre o paciente” (CARDOSO; LAMOUNIER JR., 2009, p. 57).

Figura 1 – Sistema de neuro-cirurgias JHU/KRDL *Skullbase Surgery Simulator*.



Fonte: Cezar e Puntel (2012, p. 5).

⁷ “As interfaces que produzem sinais mecânicos responsáveis por estímulos cinestésicos e de tato são denominadas ‘interfaces hápticas’. [...] O termo háptico deriva do grego (ἅπτω) com o sentido original de ‘tocar’ ou ‘agarrar’” (PALACIOS; CUNHA, 2012, p. 669).

Também notamos recursos de RA na indústria de entretenimento. Cezar e Puntel (2012) comentam a respeito do tema:

[...] no setor de entretenimento pode ser elucidada pelo exemplo de Thomas [2008], o *Wearable Lab* da Universidade do Sul da Austrália desenvolveu a versão em RA do popular *game Quake*. O usuário munido de *Head Mounted Display* (*display* montado na cabeça – “capacete” para Realidade Virtual), um computador portátil e GPS (*Global Positioning System* - Localizador via satélite) passa a jogar ao ar livre enfrentando adversários digitais no mundo real (CEZAR; PUNTEL, 2012, p. 6).

Na situação exposta à cima, entendemos que é interessante verificar como a RA possibilita a imersão do usuário, no ambiente gerado, a partir dessa tecnologia, de maneira natural. Por meio da RA o usuário possui uma liberdade para interagir tanto com a realidade mundana quanto com a realidade cibernética. A RA nos proporciona uma experiência qualitativamente diferente de uma decorrida na tela de um computador, em virtude dos objetos estarem “presos” ou “amarrados” apenas à realidade cibernética. Apoiado nessa observação está o propósito desse trabalho. Buscamos investigar como a experiência com RA transforma/potencializa a produção do conhecimento matemático em termos de Modelagem Matemática com TD.

Cezar e Puntel (2012) também destacam como uma possibilidade para viabilizar a utilização de RA, sobre a plataforma Android, a tecnologia do aplicativo AndAR, software escolhido para a produção de dados dessa pesquisa. Assim, do mesmo modo que Kirner e Siscoutto (2007), Roberto et. al (2011) defendem o uso de recursos de RA nas mais diversas áreas. Os autores comentam:

RA tem se mostrado muito promissora por ser capaz de tornar a interação com o usuário mais natural. Assim, ao invés de olhar apenas para um monitor e usar um ou dois dispositivos para manipular as informações desejadas, o usuário pode interagir com o ambiente inteiro ao seu redor através de gestos naturais em suas atividades cotidianas. Graças a esta enorme aplicabilidade, ela vem sendo bastante estudada, tanto no meio acadêmico como em laboratórios de pesquisa e por isso já existem algumas subáreas e linhas de atuação importantes [...] (ROBERTO et. al., 2011, p. 104).

Os autores destacam o uso de gestos naturais em atividades cotidianas ao se manipular objetos em um ambiente de RA. Nesse sentido, desejamos elaborar materiais didáticos que, possivelmente, transformem/potencializem a produção do conhecimento matemático, vinculada a sua forma de exploração, com gestos naturais e cotidianos como, por exemplo, manusear uma câmera de celular para tirar uma foto ou ampliar/reduzir uma imagem vista na tela de um *smartphone*.

Santin et. al. (2004 apud SOUZA-CONCILLIO et. al., 2014, p. 159), semelhantemente, apontam aspectos interessantes da RA:

A RA pode estabelecer uma comunicação entre o indivíduo e o ambiente ao seu redor de forma multissensorial, inteligente e informativa [...] sem que o indivíduo precise se desconectar do real para ter acesso ao conteúdo digital e a informação torna-se uma extensão do ambiente em que se encontra. A Realidade Aumentada permite a interação com o ambiente misturado [...], pois pode eliminar o uso de dispositivos tecnológicos, possibilitando que o usuário interaja com os elementos virtuais utilizando as mãos (SOUZA-CONCILLIO et. al., 2014, p. 159).

Dessa forma, baseado nas ponderações dos autores mencionados, a RA se mostra uma opção para exploração de novas didáticas no campo da Educação Matemática. Os autores recorrem, com frequência, ao termo interação natural, denotando o sentido de facilidade para manusear tecnologias de RA. Destacamos esse fato, pois, acreditamos que a naturalidade para operar dispositivos tecnológicos de RA possa favorecer ainda mais o enriquecimento do ensino e da aprendizagem em diferentes campos conforme Roberto et. al. (2014) revelam. Igualmente, nos intriga a inexistência de pesquisas na esfera da Educação Matemática a respeito dessa tecnologia, uma vez que recursos de RA já estão inseridos em outros contextos conforme relatados previamente.

Nesse ambiente de RA, desejamos observar como o processo de planejamento didático para ensino e para a aprendizagem de matemática se desenvolve. Pretendemos identificar em diferentes momentos de uma trajetória de pesquisa que se inicia com esse trabalho, formas que permitam, possivelmente, trabalharmos com o conhecimento matemático nesse viés da RA, bem como contribuir com o processo de formação do professor de matemática. Com esse propósito, consultamos o referencial teórico do *design* instrucional que é um processo condizente com a prática do professor, exposto na próxima seção, para conduzirmos a investigação e a produção de dados dessa pesquisa.

1.4 O Design Instrucional

A evolução tecnológica impactou, igualmente, sobre as práticas pedagógicas segundo Campos et. al. (1998). Da mesma forma, Rein (1995) assegura que as tecnologias provocaram uma mudança qualitativa nos modos de ensino e de aprendizagem. Sob esse escopo, Campos et. al. (1998) discutem como as tecnologias modificaram a educação, possibilitando a criação de técnicas e produtos educacionais que venham a quebrar barreiras e “customizar” a instrução. De fato, Campos et. al. (1998, p. 2), fundamentadas em Klemm e Snell (1996), afirmam que as modernas tecnologias necessitam de “[...] um ambiente que

suporte a forma construtivista de trabalhar com o aluno e a aprendizagem colaborativa”. Consequentemente, essas ponderações nos remetem, conforme defendido pelas autoras, a um *Design Instrucional*, descrito da seguinte maneira:

[...] o *design* instrucional é compreendido como o planejamento do [...] [ensino e da aprendizagem], incluindo atividades, estratégias, sistemas de avaliação, métodos e materiais instrucionais. Tradicionalmente, tem sido vinculado à produção de materiais didáticos, mais especificamente à produção de materiais analógicos (FILATRO; PICONEZ, 2004, p. 2).

Nessa perspectiva, caminha a nossa pesquisa, pois, através da questão diretriz, formada para esse fim, encontra-se o interesse em analisar o planejamento de atividades para o ensino e para a aprendizagem de matemática, produzidas com materiais digitais. Filatro (2008) ainda afirma:

O design instrucional também resulta em um produto final, uma solução educacional, virtual ou não, que apresenta forma e funcionalidade, e propósitos e intenções bem definidos. Tanto é que, bem antes do emprego da tecnologia computacional na educação [...] o design instrucional vem-se ocupando de projetar, implementar e avaliar soluções instrucionais na forma de impressos, filmes, vídeos, áudios etc. (FILATRO, 2008, p. 97).

Entendemos, então, que o Design Instrucional seja uma prática pedagógica organizada e direcionada a contribuir para a produção de conhecimento matemático de forma natural, pois, conforme Filatro (2008) soluções instrucionais estão sendo vinculadas aos meios de comunicação e de entretenimento antes mesmo dos avanços tecnológicos. Com efeito, destacamos a criação de materiais didáticos digitais manipuláveis, os quais possam contribuir para a produção do conhecimento matemático.

Além disso, notamos como Campos e Campos. (1997), sustentadas por Romiszowski (1981), relacionam alguns tipos de aprendizagem ao uso de determinada(s) TD a partir do quadro abaixo:

Quadro 1 – Alguns tipos de aprendizagem relacionados ao uso de determinada(s) TD.

Tipo de Aprendizagem	Descrição	Uso de novas tecnologias
Descoberta imprevista	Aprendizagem não planejada, nenhuma instrução é envolvida diretamente.	Busca livre na internet.
Descoberta por livre exploração	Abordagem de Bruner. Os macro objetivos são fixados, e os alunos ficam livres para explorar métodos, sub-objetivos, etc.	Busca em programas de hipermídia ou rede com tema definido.
Descoberta guiada	Abordagem de Gagné. Os objetivos de cada passo de	Hipermídias adaptativas que privilegiam os

	aprendizagem são fixados. O aprendiz é livre para explorar métodos, mas com guia e ajuda em cada estágio.	interesses dos alunos.
Descoberta adaptativa	Abordagem cibernética, guia e reforço corretivos com estrutura de diagnóstico.	Hipermídias adaptativas baseadas nos estereótipos dos alunos e definição de nós a serem visitados.
Descoberta linear/intrínseca	Direcionada rigidamente, guia e reforço são pré-programados, baseados no estudante típico.	Sistemas hipermídias com excursão definida.
Exposição indutiva	O aluno recebe o argumento, não tem que descobrir a regra. Pode ser programado.	Multimídia.
Exposição dedutiva	A compreensão do problema é mostrada pela habilidade de aplicá-lo a exemplos. Pode ser programado. Abordagem baseada em Ausubel.	Multimídia adaptativa.
Aprendizagem de recepção direcionada (exercício e prática)	Aprendizagem de fatos, sentenças e operações sem entender os conceitos envolvidos. Pode ser programado. Memorização.	Apresentação multimídia.
Aprendizagem de recepção imprevista	Fatos e observações, originalmente não planejados, fornecidas por professores, outras fontes e estudantes.	Ferramentas de trabalho cooperativo.

Fonte: Campos e Campos (1997, p. 11-12).

Entendemos que as autoras sugerem, conforme o conteúdo exposto no Quadro 1, uma prática pedagógica através do Design Instrucional de cada um dos tipos de aprendizagem apresentados, nesse mesmo quadro, para a(s) respectiva(s) TD associada(s). Desse modo, relacionamos o programa Blender assim como o aplicativo AndAR às hipermídias, isto é, ambos são softwares que disponibilizam as informações de forma não linear e interativa (CAMPOS et. al., 1998). De fato, conforme havíamos explicado na seção introdutória desse trabalho (em uma nota de rodapé), os softwares Blender e AndAR oferecem uma série de recursos gráficos e visuais em termos de Realidade Virtual ou de RA. Por consequência, essas TD permitem que o usuário explore os seus mecanismos livremente, em conformidade aos seus respectivos ambientes de atuação (ambiente virtual ou ambiente de RA). Nesse ínterim, associamos os softwares Blender e AndAR aos tipos de

aprendizagem (conforme o Quadro 1) que estão associados a alguma forma de “descoberta”. Essa característica de “descoberta” que nos chama a atenção, pois pretendemos construir um *design* de atividades pelas quais gostaríamos de produzir o conhecimento matemático, tentando identificar significados matemáticos em cada uma das atividades desenvolvidas. Assim, entendemos que podemos relacionar o *design* das atividades a uma característica de “descoberta”, utilizando as TD (programa Blender e aplicativo AndAR) para identificar significados matemáticos tanto no processo de construção das atividades como no processo de resolução das mesmas.

Campos et. al. (1998) ainda discutem sobre as teorias de cada autor, correspondentes aos tipos de aprendizagem do Quadro 1, argumentando que também é interessante avaliar o modo como os alunos podem compreender e produzir os saberes durante o processo de aprendizagem. As autoras (CAMPOS et. al., 1998) entendem que para estudo do processo de aprendizagem, é importante conhecermos a maneira como os alunos podem construir os significados a partir das atividades e das situações propostas em sala de aula. Assim, verificamos a importância do professor em organizar e planejar o *design* de suas próprias atividades, refletindo sobre como os alunos poderão (ou não) construir, cognitivamente, caminhos para os saberes matemáticos ao utilizarem os recursos de RA. Nesse sentido, observamos que a aprendizagem dos alunos está, de fato, ligada ao desafio do professor construir, estruturar, implementar e avaliar atividades/materiais digitais e, sobretudo, considerar como seus alunos poderão compreender e relacionar o conhecimento matemático através de suas atividades e de seus materiais digitais. Outrossim, compreendemos que o professor, ao lançar-se no desafio mencionado anteriormente, percorrerá uma trajetória que poderá contribuir para sua própria formação docente. Um exemplo disso é o trabalho de Nunes (2011) no qual o autor trabalha com o Design Instrucional de atividades elaboradas com uma calculadora HP 50G. O autor autoavalia o processo de elaboração de suas próprias atividades e examina algumas dificuldades para implementá-las com a calculadora. Contudo, Nunes (2011) descreve sua evolução ao longo do trabalho, detalhando seu raciocínio como um professor determinado a construir atividades que fizessem sentido aos seus alunos, trabalhando com desenhos, descritos na calculadora HP 50G, para estudar o comportamento de funções trigonométricas. Nesse sentido, descrevemos as experiências e dificuldades com a construção de atividades, em um Design Instrucional, hipoteticamente favorável à aprendizagem de matemática. Nossa intenção é, igualmente, pormenorizar o processo nas fases de desenvolvimento,

implementação e avaliação das atividades, ressaltando como a preparação dos materiais pode contribuir para a formação de um professor de matemática.

Na próxima seção, discutiremos a respeito do tema Percepção, expondo a noção defendida por alguns autores sobre esse tema assim como pretendemos destacar nossas próprias considerações sobre esse assunto.

1.5 Percepção

A percepção, com base nas considerações de Seidel e Rosa (2011, p. 4 – grifo nosso), é entendida como “[...] sendo o ‘fundo’ no qual **as ações são desencadeadas**, e isso implica considerarmos que o **‘algo’ perceptivo está sempre no meio de outra coisa**, isto é, ele precisa fazer parte de um ‘campo’ para que seja dada à percepção”. Entendemos que os autores (SEIDEL; ROSA, 2011) tratam o significado do termo percepção como uma interpretação de “algo” que, para ser dada, depende do campo ou do ambiente no qual esse “algo” é perceptivo. Ao mesmo tempo, a interpretação desse “algo” acarreta uma série de ações.

Seidel e Rosa (2011) ainda sustentam a ideia de revelação a partir do significado de percepção (mencionado anteriormente), conforme Bicudo e Rosa (2010, p. 41), como “[...] um **ato em movimento** que vai desnudando o que é visto em termos de figura e fundo, ou seja, do contexto em que isso se mostra [...]”. Desse modo, compreendemos a ideia de percepção como uma ação dinâmica, em movimento, que se mostra e se desenvolve conforme o seu contexto. Assim, Seidel e Rosa (2011) discutem sobre como o ciberespaço se constitui de uma diversidade de indivíduos que agem, pensam e compreendem diferentemente a matemática, estabelecendo relações, produzindo ideias e concepções a partir de suas próprias percepções. Associamos essas considerações à cibercultura (discutida anteriormente, na seção *Tecnologias Digitais como partícipes do processo educativo*) conforme a noção abordada por Dalla Vecchia (2012), pois entendemos que a sociedade tende a acompanhar a evolução tecnológica a qual modifica e reorganiza a própria cultura da sociedade.

Observamos, também, que para Seidel e Rosa (2011) a percepção do outro deve ser vista como consciência e não como um objeto. Isto é, os autores (SEIDEL; ROSA, 2011, p. 5) defendem que o outro “[...] para ser percebido, deve ser distinguido de mim como essa espécie de ser sem eu, aquele que pensa e é pensado [...]” e, ainda, como “[...] um sujeito que possui certa ‘visão’ de mundo, que escorrega com a minha visão e ambas são recolhidas

formando um único todo, o verso e o reverso em um só mundo no qual participamos como sujeitos da percepção”. Refletindo sobre as considerações dos autores (SEIDEL; ROSA, 2011), entendemos que a percepção do outro pode ser entendida diferente da nossa, mesmo que sejamos sujeitos de um mesmo todo, de um mesmo mundo, pois a percepção é revelação (SEIDEL; ROSA, 2011) a qual depende do contexto e, além disso, ela se desenvolve em virtude da visão de mundo do outro, conforme os autores (SEIDEL; ROSA, 2011) nos sugerem.

Fundamentados nas ponderações de Seidel e Rosa (2011), notamos que compreender a ideia de percepção se mostra importante para nossa pesquisa, visto que nossa investigação pretende estudar os recursos de RA. Vimos que essa TD envolve a visualização de objetos virtuais inseridos em um ambiente mundano conforme a seção destinada para esse tema. Conseqüentemente, presumimos que o *design* de atividades, em termos da MM, nessa temática da RA, possa envolver aspectos da percepção entendida por Seidel e Rosa (2011). Tanto no sentido de percepção em razão de contexto (ambiente de RA) em que algo (objeto virtual) é percebido como no sentido em que o outro percebe, diferentemente de nós, esse mesmo algo, em razão da sua visão de mundo.

Na próxima seção, definiremos tópicos das Funções de Duas Variáveis estudados, analisando algumas de suas aplicações no campo da matemática bem como descrevendo algumas experiências do autor com esse tema, durante seu processo de formação acadêmica.

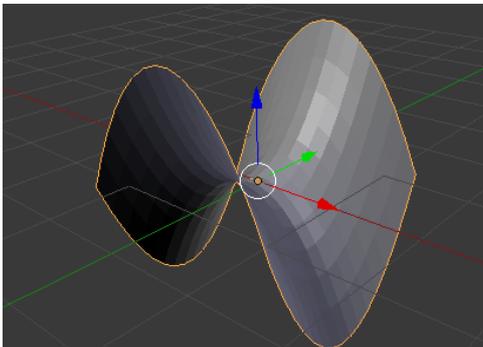
1.6 Funções de Duas Variáveis Reais – o que representam, para que servem?

Uma função f de duas variáveis é definida (ANTON, 2000, p. 313) como: “[...] uma regra que associa um único número real $f(x,y)$ para cada ponto (x,y) de algum conjunto D no plano xy ”. O conjunto D ao qual Anton (2000) se refere é o próprio domínio da função f , ou seja, ele é o conjunto que restringe as variáveis x e y da função f . Com efeito, Anton (2000) cita exemplos de funções de duas variáveis como a fórmula para calcular a área de um retângulo, dada por $A_{\text{retângulo}} = b \times h$, tal que b representa a base do retângulo e h representa a altura do retângulo. Nessa situação, $A_{\text{retângulo}}$ representa a função $f(b,h)$ na qual b,h são as suas variáveis independentes. Outrossim, ele (ANTON, 2000) argumenta que podemos pensar em uma função de duas variáveis como sendo um programa de computador o qual recebe duas entradas, executa uma operação e, em seguida, produz uma saída.

Distintamente, para Chen (2008), funções multivariáveis são definidas da seguinte forma: Seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m: x \mapsto f(x)$ [1], onde o domínio $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto no espaço euclidiano n -dimensional e o contradomínio \mathbb{R}^m é um espaço euclidiano m -dimensional tal que $n, m \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in A$, podemos escrever: $x = (x_1, \dots, x_n)$, onde $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, pensamos na função [1] como uma função de n variáveis reais x_1, \dots, x_n . Se $n > 1$, então dizemos que a função [1] é uma função de várias variáveis reais. Por outro lado, podemos escrever $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, onde $f_1(x), \dots, f_m(x) \in \mathbb{R}$. Assim, dizemos que a função [1] é uma função vetorial. Se $m = 1$, então dizemos que a função [1] é uma função real. Chen (2008) ainda exemplifica que nos casos cujos valores de n e m assumem, respectivamente, os valores 2 e 1, dizemos, então, que a função é uma função real de duas variáveis reais.

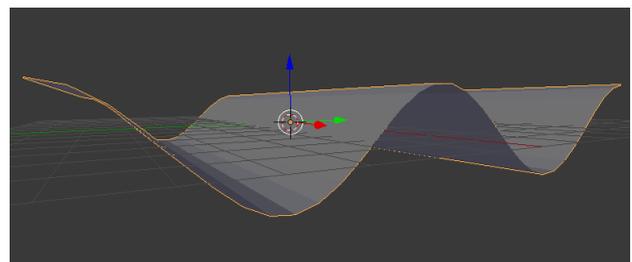
Anton (2000, p. 314) ainda comenta que analogamente às funções de uma variável: “[...] definimos o **gráfico** de $f(x, y)$ no espaço xyz como sendo o gráfico da equação $z = f(x, y)$. Em geral, tal gráfico será uma superfície no espaço 3-D”. A seguir, exemplificamos os gráficos (ANTON, 2000, p. 316 e 320) de algumas superfícies originadas por funções de duas variáveis:

Figura 2 – Gráfico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$.



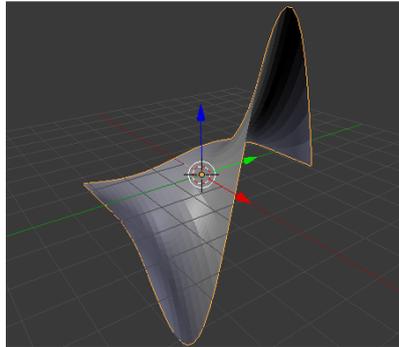
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(y)$.



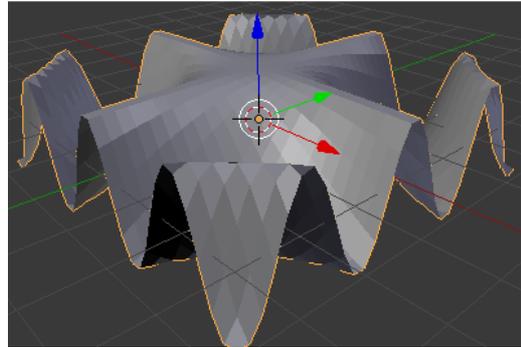
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4 – Gráfico da função $f(x, y) = e^x \cdot \text{sen}(y)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

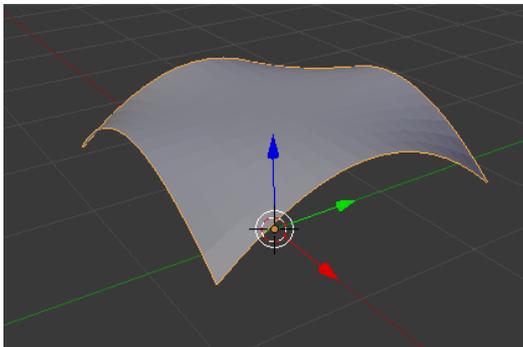
Figura 5 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(xy)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

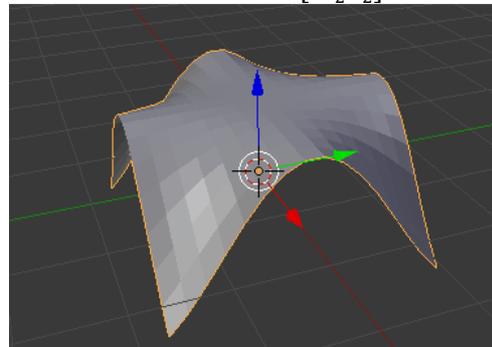
Cabe salientar que as Figuras 2 até 5 possuem domínios distintos, fato que não é discutido cuidadosamente, em nossa opinião, pelo autor (ANTON, 2000). Nesse caso, investigamos os domínios dessas funções para representar semelhantemente os gráficos desenhados na própria bibliografia utilizada (ANTON, 2000). Esse aspecto atrai nossa atenção, uma vez que as superfícies descritas pelas leis de formação das funções de duas variáveis reais podem se apresentar de formas distintas conforme o seu domínio. Observe:

Figura 6 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(xy)$ com intervalos $x, y \in [-1, 1]$.



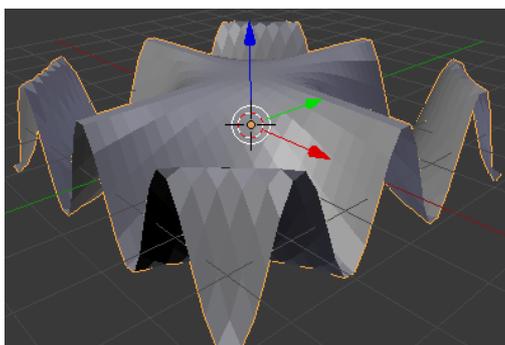
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 7 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(xy)$ com intervalos $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



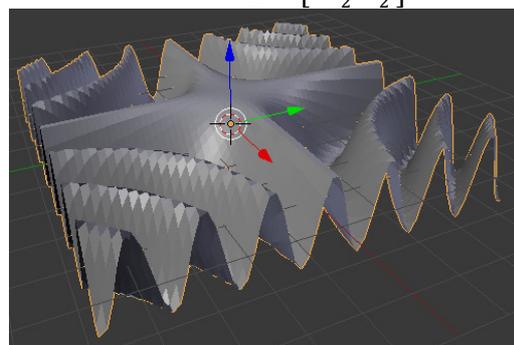
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(xy)$ com intervalos $x, y \in [-\pi, \pi]$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 9 – Gráfico da função $f(x, y) = \cos(xy)$ com intervalos $x, y \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Notamos que o comprimento dos intervalos nos eixos x e y do gráfico representado pela superfície da Figura 6 medem, respectivamente, 2 unidades, ao mesmo tempo em que o comprimento dos intervalos nos eixos x e y do gráfico representado pela superfície da Figura 9 medem, respectivamente, 3π unidades. Então, podemos dizer que existe uma razão, entre as regiões delimitadas por essas superfícies (ilustradas nas Figuras 6 e 9) no plano xy , de $\frac{4}{9\pi^2} \cong 0,045$. Isto é, a área abrangida pela superfície da Figura 6 (no plano xy) representa menos que 5% da área total abrangida pela superfície da Figura 9 (no plano xy). Consequentemente, notamos uma grande diferença, em nosso entendimento, entre os formatos das superfícies descritas nesses casos, relacionado à proporção entre os comprimentos dos intervalos nos eixos x e y , os quais definem o domínio da mesma função de duas variáveis. Nesse sentido, há uma quantidade significativa de regiões de uma mesma superfície que podemos visualizar por uma mesma lei de formação de funções de duas variáveis reais, ajustando, apenas, o domínio dessa função de duas variáveis reais, em um determinado intervalo. Embora esse princípio também possa ser observado semelhantemente com funções de uma única variável real, não nos parece evidente e simples esboçar, mentalmente, as modificações que poderão ocorrer no gráfico das superfícies conforme ajustamos novos intervalos para uma mesma função. Essa constatação contribui com a forma de se pensar o *design* de atividades, pois, estabelece conexões iniciais com o domínio da função de duas variáveis reais e permite se pensar em como ensinar e estudar os elementos desse fenômeno em um ambiente de RA.

Além disso, o licenciando/pesquisador consultou anotações da disciplina de Cálculo e Geometria Analítica II – cursada na própria UFRGS. Percebemos que pouco havia sido discutido sobre os gráficos das funções de duas variáveis reais nessa disciplina. Tampouco havia se trabalhado com softwares específicos para desenho das superfícies geradas por funções de duas variáveis, apesar de Anton (2000) comentar a respeito da possível dificuldade para visualizar os gráficos dessas funções, sem um recurso computacional. De fato, retomar o estudo das funções de duas variáveis reais, também permitiu ao licenciando/pesquisador pensar em como ensinar e estudar os elementos das funções de duas variáveis reais em relação à quantidade de formas das superfícies que podem ser descritas por uma mesma função. Assim, o licenciando/pesquisador pode perceber, da mesma forma, como esse fenômeno não foi trabalhado ou não se manteve em um registro mnemônico, por exemplo, como as superfícies ilustradas nas Figuras 2 até 5. Nesse aspecto, nossa pesquisa pretende utilizar os recursos de RA para além de visualizar os

gráficos dessas funções, verificarmos se, ao longo do processo de ensino e de aprendizagem, conseguimos transformar/potencializar o estudo das funções de duas variáveis.

No próximo capítulo, nos dedicaremos a escrever sobre a Metodologia adotada para investigação dessa pesquisa a qual podemos observar desde o início da produção de dados até na análise desses.

2. METODOLOGIA

2.1 Tipo de Pesquisa

Entendemos que a metodologia adequada para essa pesquisa consiste em um processo investigativo de caráter qualitativo. Afirmamos isso, pois, Bogdan e Biklen (1994) definem como investigação de natureza qualitativa:

[...] um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características. Os dados recolhidos são designados pós qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico. As questões a investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo, outrossim, formuladas com o objetivo de responder a questões prévias ou de testar hipóteses. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.16).

A definição para uma pesquisa qualitativa se deu após orientações sobre a temática do trabalho. Entendemos que para essa investigação foi necessário adotarmos uma postura qualitativa, em virtude do propósito desse trabalho em buscar responder, possivelmente, a questão formulada a partir da pergunta diretriz: *Como a Realidade Aumentada potencializa/transforma o design de tarefas em termos da Modelagem Matemática, no que tange o estudo de funções de duas variáveis reais?* Com efeito, Bogdan e Biklen (1994) defendem que uma pesquisa qualitativa está empenhada em verificar a evolução do processo investigativo acima de seu resultado final. No decorrer dessa investigação, pretendemos, na medida do possível, evidenciar dados que nos assistiram para tentar responder nossa pergunta diretriz. Não obstante, estamos interessados, justamente, em investigar os dados produzidos ao longo da pesquisa. Independentemente do resultado final, entendemos que a análise do processo de preparação das atividades pode nos assistir a responder a pergunta diretriz dessa investigação.

Na seção seguinte, descrevemos os sujeitos da pesquisa os quais participaram do processo de investigação do desenvolvimento das atividades preparadas com TD.

2.2 Sujeitos da Pesquisa

Os sujeitos dessa pesquisa se concentram em um grupo pequeno. O próprio licenciando/pesquisador, professor orientador e o grupo de pesquisa, formado pelos colegas A e B, os quais desenvolviam outras pesquisas correlatas. O foco, todavia, está sobre o licenciando/pesquisador, pois, por intermédio desse é que ocorreu o *design* das atividades com as quais tentamos responder a pergunta diretriz da pesquisa, repensando sua formatação

com sugestões dos colegas do grupo de pesquisa e do professor orientador. Ao longo do processo investigativo, surgiram dificuldades, assim como ideias, as quais são discutidas com os sujeitos da pesquisa e, conseqüentemente, analisadas nesse trabalho.

Importante destacar que os colegas do grupo de pesquisa são alunos do curso de graduação em licenciatura matemática. Além do mais, a aplicação das atividades desenvolvidas pelo licenciando/pesquisador, nessa investigação, está direcionada aos seus colegas de grupo, sujeitos da própria pesquisa.

Na próxima seção, apresentaremos os recursos utilizados na pesquisa, os quais selecionamos para produção de dados. Além disso, descrevemos os recursos utilizados para registrar situações e informações, as quais nós consideramos importantes para responder nossa pergunta diretriz.

2.3 Recursos da Pesquisa

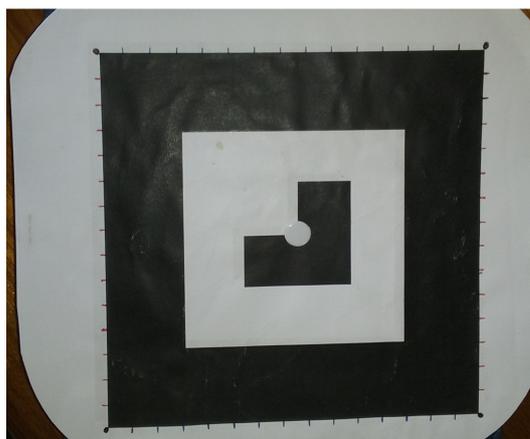
Dentre as TD disponíveis para o andamento da pesquisa, selecionamos o aplicativo AndAR, o qual, na tradução das palavras do seu desenvolvedor Domhan (2010): “[...] é um projeto direcionado para o uso de Realidade Aumentada na plataforma Android”. Domhan (2010) explica que o aplicativo possui um código aberto, ou seja, o mesmo está disponível para receber contribuições de usuários os quais podem submeter fontes de códigos⁸ para aprimorá-lo. Domhan (2010) ainda comenta que AndAR possui uma GPL (General Public License – Licença Pública Geral) a qual permite aos usuários do aplicativo criarem projetos livremente, desde que os mesmos respeitem os termos de sua GPL. AndAR está disponível para download na Google Play Store⁹ em dois aplicativos distintos: “AndAR” e “AndAR Model Viewer”. Ambos os aplicativos são necessários para experimentar os recursos de RA em um *smartphone* ou em um *tablet* (DOMHAN, 2010). Domhan (2010) explica, da mesma forma, que para utilização do aplicativo, devemos imprimir um *marker*¹⁰ conforme ilustrado abaixo:

⁸ Os usuários podem submeter, sob a mesma plataforma de programação computacional na qual o aplicativo foi desenvolvido, recursos que ajudem a melhorar suas funções.

⁹ A Google Play Store deverá ser acessada a partir de um *smartphone* ou *tablet* com sistema operacional Android. Caso contrário, não será possível realizar o download dos aplicativos AndAR e AndAR Model Viewer. Os links para download dos aplicativos AndAR e AndAR Model Viewer são, respectivamente: <https://play.google.com/store/apps/details?id=edu.dhbw.andopenglcam> e <https://play.google.com/store/apps/details?id=edu.dhbw.andarmodelviewer>. Acessos em: 17 mar. 2016.

¹⁰ Um desenho específico, utilizado para marcar a posição na qual o objeto virtual será projetado e, simultaneamente, visualizado na tela do *smartphone* ou *tablet* conforme o ângulo de captura da câmera do aparelho.

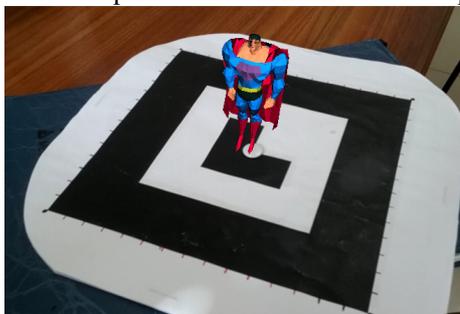
Figura 10 – Exemplo de imagem utilizada como *marker* pelo aplicativo AndAR.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Após instalar os aplicativos, o usuário deverá localizar o atalho criado (no *smartphone* ou no *tablet*) para iniciar o aplicativo AndAR Model Viewer. A partir dele, o usuário terá acesso a uma pequena biblioteca a qual é composta por modelos de objetos 3-D virtuais como, por exemplo, uma planta, uma cadeira, um sofá ou, até mesmo, um modelo de super-homem conforme ilustrado na figura a seguir:

Figura 11 – Imagem capturada da tela do *smartphone* ao projetar o modelo de um super-homem sobre o *marker* utilizado pelo AndAR com a câmera do aparelho.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para explorar os recursos de RA desse aplicativo, devemos carregar o objeto virtual desejado (a partir da biblioteca do aplicativo Andar Model Viewer) e apontarmos a câmera do *smartphone* ou do *tablet* para o centro do *marker* (ilustrado na Figura 10). Assim, poderemos visualizar o objeto virtual escolhido na tela do aparelho utilizado (exemplo do super-homem da Figura 11). O usuário também poderá girar em torno do objeto virtual (desde que continue apontando a câmera para o centro do *marker*), analisando-o de diversos ângulos. Além disso, é possível aumentar e diminuir o tamanho do modelo apenas deslizando um dedo (convenientemente) sobre a tela do *smartphone* ou do *tablet*. Entre outros recursos, o usuário também poderá abrir um *menu* a partir da tela do *smartphone* ou

do *tablet* o qual disponibilizará funções como: transladar, rotacionar e tirar uma foto do objeto virtual visto sobre o *marker* na própria tela do aparelho.

Além dos modelos virtuais 3-D pré-instalados com o aplicativo AndAR Model Viewer, é possível importar modelos virtuais 3-D construídos, por exemplo, com o programa Blender. Contudo, Domhan (2010) adverte que os modelos gerados a partir deste programa devem ser exportados, obrigatoriamente, no formato *wavefront* (extensões *.obj* e *.mtl*) para o aplicativo AndAR Model Viewer. Neste caso, também será necessário instalar o aplicativo OI File Manager¹¹ para importar os modelos construídos com o programa Blender para visualização sobre o *marker* com o *smartphone* ou *tablet*.

Primeiramente, o pesquisador pensou que seria complicado aprender a utilizar os recursos do programa Blender. A interface do programa apresenta uma série de opções e, provavelmente, pode ser um desafio aprender a utilizar seus recursos para um usuário iniciante. Além disso, o programa apresenta diferenças sutis quanto à navegação na janela de visualização 3-D em comparação ao programa GeoGebra o qual o pesquisador já estava familiarizado. O processo de adaptação com o programa Blender exigiu paciência e concentração do pesquisador.

Nesse cenário, o pesquisador, o orientador e o grupo de pesquisa exploraram o programa Blender para encontrar um recurso capaz de gerar funções de duas variáveis reais. Com efeito, os sujeitos da pesquisa se assistiram, da mesma forma, para descobrir como os arquivos do programa Blender deveriam ser exportados, possibilitando a visualização das superfícies de funções com o aplicativo AndAR. Os manuais do programa Blender e do aplicativo AndAR não estavam claros, em nosso entendimento, e, por isso, foi necessário trabalhar em equipe para compreender as funcionalidades dos softwares.

A linguagem do programa Blender também dificultou, em alguns momentos, a compreensão de seus recursos. O termo “malha”, por exemplo, na verdade está associado ao conceito de superfície, nomenclatura utilizada para os gráficos de funções de duas variáveis, em geral, conforme bibliografia consultada (ANTON, 2000). Analogamente, a noção de comprimento do intervalo definida no recurso *Z Math Function*¹² pelos campos *X Size* e *Y*

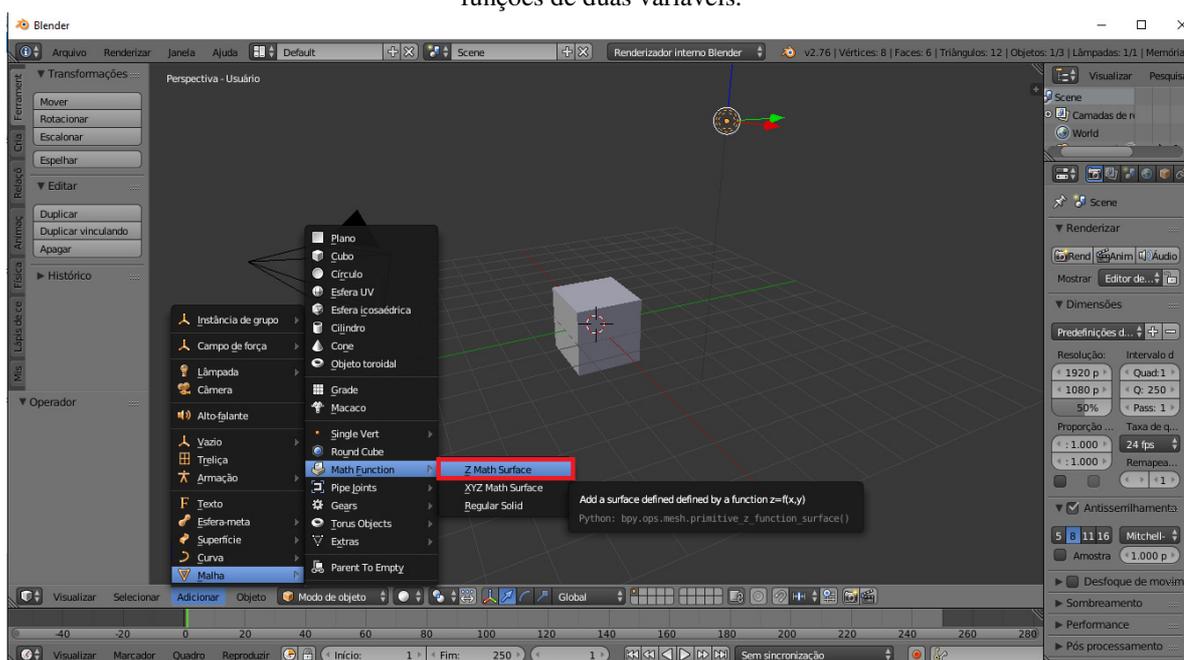
¹¹ Disponível para download na Google Play Store através do link: https://play.google.com/store/apps/details?id=org.openintents.filemanager&hl=pt_BR. Acesso em: 17 mar. 2016.

¹² Esse recurso possibilita a inserção de uma lei de formação de uma função de duas variáveis na janela de visualização 3-D do programa Blender.

*Size*¹³ também não estava clara. Nesse sentido, o pesquisador pensou em efetuar uma série de testes com funções tais como: $f(x, y) = x + y$ e $g(x, y) = 2x + y$ para compreender as diferenças entre os gráficos das funções descritas na janela de visualização 3-D.

Todavia, verificamos que por meio do programa Blender, é possível, então, construir e modelar objetos virtuais 3-D. Esse programa conta com uma série de mecanismos para transformar, por exemplo, a superfície de um cubo em um modelo de pneu para carros¹⁴. Os mecanismos do programa Blender, apesar de utilizarem conceitos matemáticos, estão disponíveis em uma linguagem mista, contendo elementos matemáticos bem como elementos de *design* virtual 3-D. Nesse trabalho, entretanto, pretendemos elaborar as atividades com os elementos de funções de duas variáveis. Para essa finalidade, vamos utilizar o recurso *Z Math Surface* do programa Blender conforme o caminho ilustrado na próxima figura:

Figura 12 – Caminho para acessar o recurso *Z Math Function* do programa Blender, necessário para construir funções de duas variáveis.



Fonte: Elaborada pelo autor.

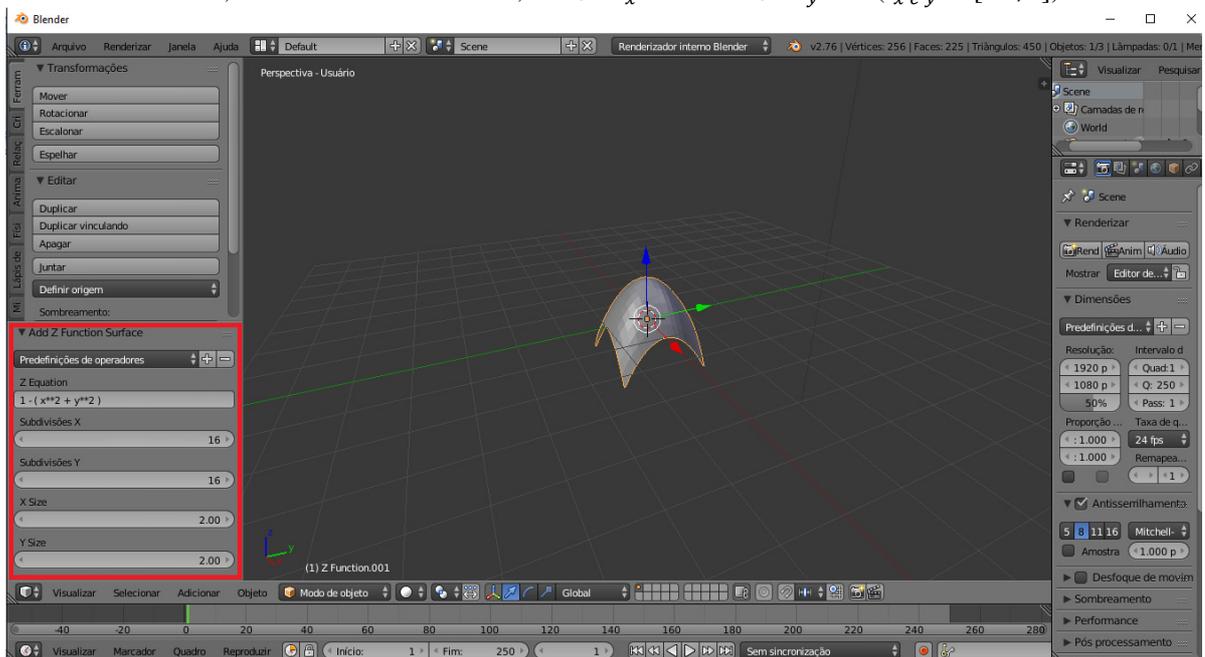
O recurso *Z Math Function* dispõe de cinco campos para preenchimento os quais são: *Z Equation*, *Subdivisões X*, *Subdivisões Y*, *X Size* e *Y Size*. No campo *Z Equation* introduzimos a função $f(x, y)$ que desejamos construir com o programa Blender. Nos

¹³ Esses campos representam, na verdade, o domínio da função de duas variáveis descrita pela lei de formação inserida com o recurso *Z Math Function*.

¹⁴ Um exemplo de vídeo demonstrando o fato: <https://www.youtube.com/watch?v=VdkmBYAWYWw>. Acesso em: 17 mar. 2016.

campos *Subdivisões X* e *Subdivisões Y* determinamos o número de vértices a serem utilizados para desenhar a superfície da função $f(x, y)$ tanto no eixo x quanto no eixo y . Nos campos *X Size* e *Y Size* selecionamos o comprimento do intervalo no qual a função $f(x, y)$ será definida nos eixos x e y ; contudo, o programa Blender interpreta os intervalos da seguinte maneira: $I_{x \text{ ou } y} = \left[-\frac{C_{x \text{ ou } y}}{2}, +\frac{C_{x \text{ ou } y}}{2}\right]$. Nessa situação, $I_{x \text{ ou } y}$ representa os intervalos no eixo x ou y nos quais o gráfico da função $f(x, y)$ será descrito, enquanto que $C_{x \text{ ou } y}$ representa o comprimento do intervalo definido nos campos *X Size* e *Y Size*.

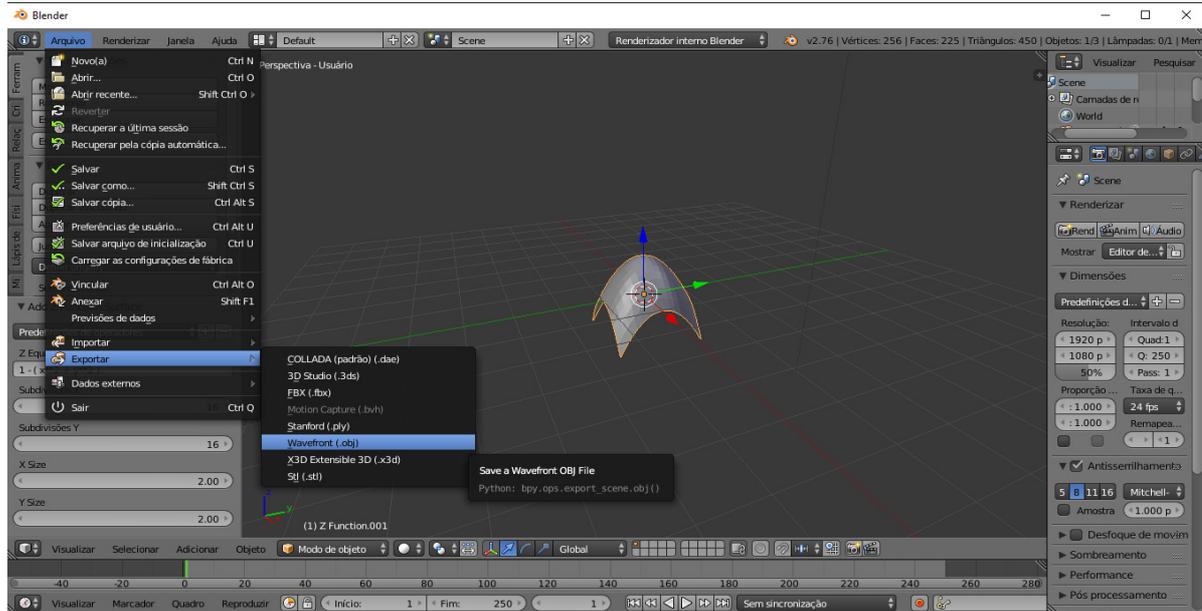
Figura 13 – Exemplo de preenchimento dos campos *Z Equation*: $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$, *Subdivisões X*: 16 vértices, *Subdivisões Y*: 16 vértices, *X Size*: $C_x = 2$ e *Y Size*: $C_y = 2$ ($I_{x \text{ e } y} = [-1, 1]$).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, a escolha do programa Blender é fundamental para o desenvolvimento das atividades com RA no aplicativo AndAR, pois a partir dele podemos exportar os gráficos das funções de duas variáveis criadas em um formato *wavefront*, extensões *.obj* e *.mtl*, para serem visualizados no aplicativo AndAR.

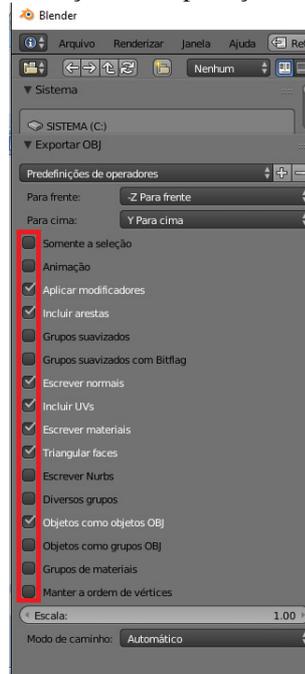
Figura 14 – Exportando o gráfico da função $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$ no formato *wavefront*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Antes de salvarmos o arquivo para ser, posteriormente, aberto com o aplicativo Andar Model Viewer, é necessário conferirmos as caixas de definições do programa Blender para não ocasionar erros de leitura do arquivo no aplicativo Andar Model Viewer (DOMHAN, 2010):

Figura 15 – Conferindo as predefinições de exportação do arquivo no formato *wavefront*.



Fonte: Elabora pelo autor.

Finalmente, podemos transferir o arquivo exportado do programa Blender para o *smartphone* ou *tablet*, salvando-o em uma pasta de arquivos do aparelho. Desse modo,

podemos utilizar os recursos do aplicativo OI File Manager a partir do aplicativo Andar Model Viewer, selecionando o arquivo salvo no *smartphone* ou *tablet* para ser visualizado na perspectiva da RA.

O programa *LAB Fit*¹⁵ também foi utilizado em nossa investigação. Esse software apresenta, como uma de suas funcionalidades principais, um processo para obtenção da lei de formação de alguma função (de uma ou mais variáveis) a partir do momento em que o usuário informa para o programa uma determinada quantidade de pontos em coordenadas cartesianas (x, y, z) , por exemplo. O programa retorna para o usuário as melhores funções encontradas (a partir de uma biblioteca pré-definida no próprio programa) com base nos dados coletados, ou seja, ele tenta encontrar uma função $f(x, y) = z$ a qual tome a maior quantidade dos pares ordenados (x, y) , informados pelo usuário, para assumir os valores de z (também informados pelo usuário) correspondentes pela lei de formação da função f , encontrada a partir da pesquisa, do próprio programa, em sua biblioteca pré-definida.

Assim, com esses recursos, com o objetivo de produzir dados para a pesquisa em questão, utilizamos o *design* das atividades planejadas pelo licenciando/pesquisador, comentando dúvidas, conjecturas e tentativas sobre a preparação das mesmas com o programa Blender, articuladas com o aplicativo AndAR com intuito de praticar a MM no ambiente de RA. Além disso, capturamos imagens da tela do computador, enquanto as atividades eram desenvolvidas. Essas imagens foram importantes para retomar o pensamento a respeito das atividades e auxiliaram na formulação de perguntas quanto ao andamento do processo de *design*.

Na seção seguinte, descrevemos como se sucedeu o desenvolvimento das atividades, identificando a trajetória do processo investigativo dessa pesquisa.

2.4 Desenvolvimento das Atividades

O desenvolvimento das atividades dessa pesquisa está dividido em momentos distintos; porém, eles se sucederam concomitantemente, uma vez que os sujeitos da pesquisa trabalhavam em conjunto para averiguar os recursos disponíveis nos softwares selecionados. Um dos momentos é formado por experiências, crenças e concepções oriundas da própria formação acadêmica do licenciando/pesquisador desse trabalho. Assim, transcrevemos recortes desse momento, ao apresentar as preocupações e reflexões do pesquisador sobre o

¹⁵ O software *LAB Fit* está disponível para *download* no sistema operacional Windows 7 ou superior através do link: http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/download_p.htm. Acesso em: 24 de jun. 2016;

design das atividades com tecnologia, buscando reconhecer estratégias para o ensino e para a aprendizagem de matemática. Por outro lado, trazemos, igualmente, contribuições formadas pelo professor orientador e pelo grupo de pesquisa os quais incentivaram o pesquisador a raciocinar além do *design* planejado de suas próprias atividades. Na medida em que os colegas do grupo de pesquisa nos forneciam o *feedback* da resolução das versões de atividades desenvolvidas pelo licenciando/pesquisador, repensávamos no processo de construção delas com tecnologia, conduzindo-nos à constante depuração dos objetivos propostos. A partir dos diálogos e trocas de ideias, houve concentração e aprofundamento sobre as TD (nesse caso, o aplicativo Andar e o programa Blender) ao mesmo tempo em que se aprimoravam os saberes sobre funções de duas variáveis. Do mesmo modo, pesquisador e orientador buscavam investigar como trabalhar com a MM em meio às TD.

Contudo, salientamos, mais uma vez, que o desenvolvimento das atividades não ocorreu separadamente, mas sim interligado concomitantemente durante a evolução da pesquisa, admitindo contribuições dos colegas do grupo de pesquisa e do professor orientador conforme um processo de depuração compartilhada de ideias (ROSA, 2008). Para realizar a análise desse processo investigativo, visando contribuir com os demais docentes que trabalham com MM e TD, apresentaremos a transcrição e análise dos dados produzidos para tentar responder a pergunta diretriz de nossa investigação. Assim, com intuito para que o leitor possa compreender nosso processo de investigação, seguimos para o próximo capítulo transcrevendo e analisando os dados.

3. TRANSCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA

Nesse capítulo, transcreveremos os dados produzidos ao longo dessa investigação para tentarmos responder a pergunta diretriz dessa pesquisa a partir da análise desses. Inicialmente, os dados foram produzidos a partir do *design* de atividades planejadas pelo licenciando/pesquisador durante o processo investigativo, buscando responder a pergunta diretriz desse trabalho. O *design* dessas atividades será apresentado, indicando o dia ou tempo transcorrido para planejamento das atividades construídas pelo licenciando/pesquisador. Da mesma forma, serão expostas as anotações pessoais do licenciando/pesquisador, refletindo sobre o *design* de suas próprias atividades. Além disso, serão apresentadas, do mesmo modo, as contribuições dos colegas do grupo de pesquisa ao analisarem o *design* das atividades ou ao resolverem as atividades propostas pelo licenciando/pesquisador. Assim, foram produzidos os dados relativos aos diálogos do pesquisador com o grupo de pesquisa e professor orientador (por meio de reuniões pessoais, via Skype¹⁶ ou pelo aplicativo Whatsapp¹⁷), realizando observações possivelmente relevantes para o processo de investigação da pesquisa. Com base nesses dados, ou seja, licenciando/pesquisador pensando-com-TD (ROSA, 2008), licenciando/pesquisador dialogando pessoalmente, via Skype e/ou via Whatsapp com orientador e grupo de pesquisa, assim como, licenciando/pesquisador e grupo de pesquisa pensando-com-TD (ROSA, 2008), transcrevemos os dados e realizamos suas respectivas análises, para tentarmos responder a pergunta diretriz posta.

A investigação se mostrou inspiradora para o autor, uma vez que suas experiências anteriores, conforme relatadas na introdução desse trabalho, se relacionavam às TD e as suas inquietações como licenciando em prática, desde a disciplina de LAB III e os Estágios, em repensar o ensino e a aprendizagem matemática com-TD (ROSA, 2008). Embora o pesquisador não conhecesse o termo RA, nos questionamos sobre a possibilidade dos recursos de RA em transformar/potencializar o estudo de funções de duas variáveis reais em

¹⁶ Esse software permite que seus usuários se comuniquem por mensagens de texto bem como chamadas audiovisuais, sendo necessário o cadastramento de um e-mail com domínio relacionado à empresa Microsoft (Hotmail, Outlook, Msn e etc.). Sua plataforma foi desenvolvida para utilização tanto em computadores quanto em *smartphones* ou *tablets*. Por isso, ele possui versões para instalação como um programa ou um aplicativo (conforme o hardware utilizado).

¹⁷ Esse aplicativo possibilita a comunicação via mensagem de texto e de áudio entre usuários de *smartphones* ou *tablets* com o aplicativo Whatsapp devidamente instalado no aparelho nos mais diversos sistemas operacionais (tais como Android e Windows Phone, por exemplo).

termos da MM. Com efeito, persistimos (pesquisador, orientador e grupo de pesquisa) para encontrar caminhos os quais tivéssemos condições de analisar o *design* de atividades de MM com-TD para formação profissional, independentemente dos desafios impostos durante a pesquisa. Devido a essas circunstâncias, cabe transcrever, nesse capítulo, os dados extraídos dos momentos experimentados ao longo da pesquisa, os quais nos assistiram, a nosso ver, a responder a pergunta diretriz dessa investigação, a qual infere sobre:

Como a Realidade Aumentada potencializa/transforma o design de tarefas em termos da Modelagem Matemática, no que tange o estudo de funções de duas variáveis reais?

Portanto, explicamos, na próxima seção, o modo como os dados da pesquisa são apresentados, para que o leitor possa compreender como o processo investigativo se desenvolveu ao longo dessa pesquisa.

3.1 Apresentação dos Dados

Os dados da pesquisa estão divididos em duas seções distintas: *Percepção distinta à Realidade Mundana e Heterogeneidade do Ambiente de RA (virtual mais mundano)*. Essas seções, por sua vez, são constituídas por registros do *design* das atividades preparadas pelo autor, desenvolvendo objetos virtuais com o programa Blender e, em seguida, visualizando-os em um *smartphone*, com o aplicativo AndAR instalado, no ambiente de RA. Os registros surgiram como consequência do *design* de tarefas construídas pelo autor e foram guardados a partir de capturas de imagem da tela do computador e/ou da tela do *smartphone* bem como através de algumas anotações pessoais. Conforme organizamos anteriormente, o *design* de cada uma das atividades será apresentado em ordem cronológica à medida que o licenciando/pesquisador refinava os objetivos pedagógicos de suas atividades. Posteriormente, separamos um material relativo às contribuições dos colegas do grupo de pesquisa, os quais se dispuseram a resolver as primeiras versões de atividades propostas pelo licenciando/pesquisador. Esse material é composto pela transcrição de um diálogo, via Skype, do pesquisador com o colega B do grupo de pesquisa, assim como pelas capturas de imagem feitas pelo colega A ao resolver algumas dessas atividades, planejadas pelo licenciando/pesquisador. Desse modo, agregamos as opiniões e os resultados dos colegas conforme nossas seções, as quais se tornaram tangíveis, em nossa interpretação, para responder a pergunta diretriz de nossa pesquisa.

Nomeamos as seções desse capítulo com intuito de exprimir a noção principal compreendida, em nossa opinião, na análise dos dados produzidos pela investigação, procurando responder, possivelmente, a pergunta diretriz da pesquisa. Isso posto, seguimos para a próxima seção, transcrevendo para o leitor sobre como refinamos, primeiramente, os registros dos dados produzidos para seção: *Percepção distinta à Realidade Mundana*. Na medida em que transcrevemos os dados, também os analisamos e, pretendemos, ao mesmo tempo, tentar responder a pergunta diretriz dessa pesquisa.

3.2 Percepção distinta à Realidade Mundana

A compreensão de Percepção distinta à Realidade Mundana manifestou-se no processo de desenvolvimento de atividades associadas ao ambiente de RA. Estudamos os recursos do programa Blender para construir superfícies, cenários e objetos virtuais. Refletimos como seria possível planejar essas atividades, envolvendo, igualmente, princípios de MM defendidos por autores mencionados no capítulo do Referencial Teórico dessa pesquisa. Pesquisamos por materiais na internet, os quais envolviam objetos virtuais, reproduzidos a partir de modelos mundanos, inseridos em um ambiente de RA. Assim, começamos a explorar a produção de sentidos do conhecimento matemático na percepção de superfícies, cenários e objetos virtuais em um ambiente de RA.

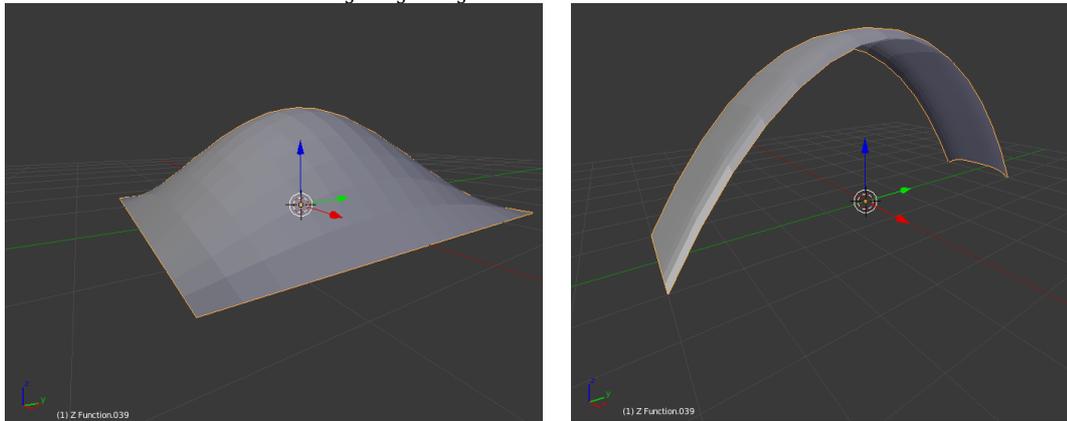
Inicialmente, pensávamos que a construção de modelos de objetos mundanos com funções de duas variáveis reais nos limitaria a poucos casos para investigação. Nesse viés, buscamos revisar, rapidamente, o conteúdo de equações paramétricas, uma vez que o grau de liberdade para construirmos superfícies no espaço tridimensional da janela de visualização 3-D do programa Blender seria, em tese, maior. Observamos esse fato a partir da seguinte função: $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; $x, y \in \mathbb{R}$ e $R \in \mathbb{R}_+$ com **R** fixo. Esse exemplo representa, por exemplo, a lei de formação da função de uma **semi-esfera** (ANTON, 2000, p. 314) de **raio R**. Contudo, o programa Blender não é capaz de desenhar a superfície correspondente a essa função, pois existem infinitos valores para x e y tais que: $R^2 - x^2 - y^2 < 0$. Claramente, o programa Blender não é capaz de lidar com essa situação, pois sabemos que não é possível extrair a raiz quadrada de um número real negativo. Além disso, se desejássemos reproduzir a superfície de um cilindro, para tentar esboçar o modelo de um copo, por exemplo, não teríamos condições de modelá-lo com funções de duas variáveis, pois, por definição (ANTON, 2000), sabemos que um par ordenado (x, y) se relaciona a um único elemento z pela função $f(x, y) = z$. Como a secção da superfície de

um cilindro reto (com da base descrita no plano xy), efetuada em qualquer altura ortogonal a sua base, resultará em uma circunferência, a qual possui infinitos pontos, não conseguiríamos representar a superfície do cilindro por uma função $f(x,y)$. Para nos certificarmos, bastava considerarmos o eixo z como a altura desse cilindro e, como consequência, verificaríamos infinitos valores de z relacionados a um mesmo par ordenado (x,y) pela função $f(x,y)$. Isso ocorreria em virtude das infinitas secções que podemos efetuar no cilindro, a qualquer altura, perpendicularmente ao eixo z .

No entanto, o licenciando/pesquisador não conseguiu encontrar um método para construir o *design* das atividades a partir das equações paramétricas. Em função do tempo para investigação nessa linha de pesquisa e da pergunta diretriz (proposta desde o início da pesquisa), avaliamos que a temática da pesquisa deveria permanecer com o estudo de funções de duas variáveis. Outrossim, aprofundamos nosso estudo com as superfícies de funções de duas variáveis e percebemos que seria possível trabalhar com funções as quais descrevessem objetos e cenários mundanos, conduzindo, sob o referencial estudado, o *design* das atividades em termos da MM para futuros alunos e/ou professores.

Sabemos que o estudo de funções de duas variáveis reais nos remete a gráficos descritos em um espaço tridimensional (3-D) conforme argumentado por Anton (2000, p. 314). Com efeito, já observamos gráficos de superfícies nesse espaço nos exemplos ilustrados em nosso capítulo de Funções de Duas Variáveis, pertencente ao Referencial Teórico desse trabalho. O licenciando/pesquisador, então, explorando e desvendando os recursos do programa Blender, conseguiu identificar gráficos de superfícies semelhantes, em nossa opinião, a objetos e a cenários mundanos. Na verdade, essas funções de duas variáveis específicas foram obtidas através de modificações conduzidas sobre as leis de formação das funções expostas anteriormente, no capítulo de Funções de Duas Variáveis Reais. Abaixo, podemos observar dois exemplos de funções as quais descrevem, em nosso ver, objetos e cenários mundanos:

Figura 16 – Gráficos descritos pelas funções $f(x, y) = \cos(x) \cdot \cos(y)$; $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (à esquerda) e $g(x, y) = -\frac{x^4}{5} - \frac{y^2}{5} + \frac{17}{5}$; $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-4, 4]$ (à direita).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 16, a função $f(x, y)$ descreve um gráfico cujo formato, em nossa interpretação, pode lembrar um capacete, um envelope de comprimido ou até mesmo o relevo de uma região montanhosa. Igualmente, a função $g(x, y)$ pode nos parecer familiar, como, por exemplo, a obra arquitetônica em frente ao Mercado Público de Porto Alegre/RS, o arco formado por uma ponte ou um viaduto e, ainda, o para-lama de um automóvel. Certamente, podemos averiguar outros cenários e objetos mundanos relacionados às superfícies produzidas pelos gráficos das funções da $f(x, y)$ e da $g(x, y)$. Atribuímos essa ideia à percepção do outro, segundo Rosa e Seidel (2011), ou seja, o sujeito que visualiza e interpreta o objeto conforme sua visão de mundo. Nesse caso, entendemos que a percepção do sujeito se comporta em virtude da maneira como ele concebe os sentidos dados aos objetos e os compara com outros similares às suas vivências. Assim, acreditamos que podemos caracterizar o processo de ensino e de aprendizagem de matemática, nessa compreensão, conforme as ideias de Skovsmose (2001), trazidas no Referencial Teórico dessa pesquisa. Com efeito, relembramos as ponderações de Skovsmose (2001) ao descrever a tendência de orientação-ao-processo. Correlacionamos à tendência de orientação-ao-processo, na linha da EM, descrita por Skovsmose (2001), à construção de sentidos matemáticos atribuídos no momento da elaboração da atividade que se iniciava. Esforçamos para alcançar esse propósito ao preparar o *design* das primeiras versões de atividades, pois tentamos convidar (SKOVSMOSE, 2000) os colegas do grupo de pesquisa a pensar e a refletir sobre que tipos de superfícies, descritas por funções de duas variáveis reais, poderiam gerar os modelos virtuais visualizados em RA. Assim, se desenvolveu, inicialmente, o processo de *design* das primeiras atividades. A seguir, apresentamos e

analisamos as primeiras versões das atividades propostas pelo licenciando/pesquisador, as quais foram elaboradas e redigidas até o dia 30/05/2016:

Atividade 1

Abra o arquivo Superficie1.obj no aplicativo Andar Model Viewer. Observe a superfície, utilizando os recursos do aplicativo como zoom e rotação (ou, se preferir, rotacione o marker em sentido horário e anti-horário para gerar um efeito semelhante). Em seguida, responda aos itens abaixo:

a) Dentre os gráficos de funções que você estudou até o momento, as curvas da superfície visualizada se assemelham a(s) qual(is) tipo(s) de função(ões)? Justifique sua resposta.

*b) Suponha que a superfície visualizada possui ponto mínimo em $f(x, y) = -1$ e, então, esboce um possível valor para o pico (valor máximo) dessa mesma superfície. Fundamente sua resposta conforme sua análise no **item a**.*

*c) Se $f(-1.57, 1.57) = -1$, o que podemos dizer sobre os valores da função quando os pares ordenados (x, y) assumem os valores $(1.57, 1.57)$; $(1.57, -1.57)$ e $(-1.57, -1.57)$? **Note que: $1.57 \cong \pi/2$.***

d) Com base nas informações anteriores, você acredita que a superfície visualizada é descrita pela função $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$ ou $f(x, y) = \text{cos}(x) \cdot \text{cos}(y)$. Justifique sua resposta.

e) Agora que você já possui a lei de formação dessa função, tente analisar o domínio (limitado) para representação dessa superfície através aplicativo AndAR. Você consegue estimar os limites dos intervalos dessa função tanto para os valores de x quanto para os valores de y ? Justifique sua resposta.

Resposta: a lei de formação da função descrita pela superfície visualizada na Atividade 1 é:

$$f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y); x, y \in [-\pi, \pi]$$

Atividade 2

Abra o arquivo *Superficie2.obj* no aplicativo *Andar Model Viewer*. Observe a superfície, utilizando os recursos do aplicativo como *zoom* e *rotação* (ou, se preferir, *rotacione o marker* em sentido horário e anti-horário para gerar um efeito semelhante). Em seguida, responda aos itens abaixo:

a) Dentre os gráficos de funções que você estudou até o momento, as curvas da superfície visualizada se assemelham a(s) qual(is) tipo(s) de função(ões)? Justifique sua resposta.

b) Suponha que a superfície visualizada possui média entre os valores de mínimo e de máximo igual a **0.5**. Então, esboce possíveis valores, respectivamente, para os pontos de máximo e de mínimo da superfície descrita por essa função. Fundamente sua resposta conforme sua análise no **item a**.

c) Se $f(0, 0) = 1$, o que podemos dizer sobre os valores da função quando os pares ordenados (x, y) assumem os valores $(1.57, 1.57)$; $(-1.57, 1.57)$; $(1.57, -1.57)$ e $(-1.57, -1.57)$? **Note que: $1.57 \cong \pi/2$.**

d) Com base nas informações anteriores, você acredita que a superfície visualizada é descrita pela função $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{cos}(y)$ ou $f(x, y) = \text{cos}(x) \cdot \text{cos}(y)$. Justifique sua resposta.

e) Agora que você já possui a lei de formação dessa função, tente analisar o domínio (limitado) para representação dessa superfície através do aplicativo *AndAR*. Você consegue estimar os limites dos intervalos dessa função tanto para os valores de x quanto para os valores de y ? Justifique sua resposta.

Resposta: a lei de formação da função descrita pela superfície visualizada na Atividade 2 é:

$$f(x, y) = \mathbf{cos}(x) \cdot \mathbf{cos}(y); x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Atividade 3

Abra o arquivo *Superficie3.obj* no aplicativo *Andar Model Viewer*. Observe a superfície, utilizando os recursos do aplicativo como zoom e rotação (ou, se preferir, rotacione o marker em sentido horário e anti-horário para gerar um efeito semelhante). Em seguida, responda aos itens abaixo:

a) Dentre os gráficos de funções que você estudou até o momento, a curva da superfície visualizada se assemelha a qual(is) tipo(s) de função(ões)? Justifique sua resposta, observando a superfície de diferentes ângulos.

b) Sabendo que a superfície visualizada, descrita por uma função $f(x, y)$, possui valor mínimo em $f(-1, 4)$, esboce os demais valores para os pares ordenados (x, y) nos quais a f também assume o valor mínimo. Aproveite para identificar, se possível, o ponto no qual a superfície assume valor máximo.

c) Sabendo que a superfície formada pela função $f(x, y)$ assume valor mínimo nos pontos identificados no item anterior, é possível identificarmos o domínio dessa superfície?

d) Com base nas informações anteriores, utilize o programa *Blender* articulado com o aplicativo *AndAR* para encontrar uma possível lei de formação da função correspondente à superfície visualizada. Abaixo, seguem as alternativas sugeridas para lei de formação da função citada. Justifique sua resposta. **OBS.: Lembre-se de substituir os valores dos campos *X Size* e *Y Size* pelos intervalos encontrados no item b.** Por exemplo, se você encontrou $x \in [-a, a]$; $a \in \mathbb{N}$, então **X Size será igual a $2a$** , pois o comprimento do intervalo é igual a $2a$.

$$I) \quad f_1(x, y) = -\frac{x^4}{7} - \frac{y^2}{7} + c$$

$$II) \quad f_2(x, y) = -\frac{x^4}{2} - \frac{y^2}{2} + c$$

$$III) \quad f_3(x, y) = -\frac{x^4}{6} - \frac{y^2}{6} + c$$

$$IV) \quad f_4(x, y) = -\frac{x^4}{5} - \frac{y^2}{5} + c$$

$$V) \quad f_5(x, y) = -\frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{4} + c$$

e) Perceba como c irá ditar o valor máximo da superfície descrita pela função f (observe este fato utilizando diferentes valores para c no programa *Blender*). Agora verifique se você acertou a alternativa anterior substituindo o valor de c por $\frac{17}{5}$ de tal modo que os pares ordenados encontrados no item b resultem em $f(x, y) = 0$.

Resposta: a lei de formação da função descrita pela superfície visualizada na Atividade 3 é:

$$f(x, y) = -\frac{x^4}{5} - \frac{y^2}{5} + \frac{17}{5}; x \in [-1, 1] \text{ e } y \in [-4, 4]$$

Atividade 4

Abra os arquivos *Superficie4.obj* e *Superficie5.obj* no aplicativo *Andar Model Viewer*. Observe as superfícies, utilizando os recursos do aplicativo como zoom e rotação (ou, se preferir, rotacione o marker em sentido horário e anti-horário para gerar um efeito semelhante). Em seguida, responda aos itens abaixo:

a) Quais diferenças ou semelhanças você conseguiu verificar entre as superfícies visualizadas. Procure descrever detalhadamente sua resposta.

b) Sabendo que ambas as superfícies estão descritas nos intervalos de $x \in [-1, 1]$ e de $y \in [-1, 1]$, tente identificar alguns pontos coincidentes para o gráfico da superfície visualizada no arquivo *Superficie4.obj* quanto para o gráfico da superfície visualizada no arquivo *Superficie5.obj*.

c) Digamos que $f(x, y)$ corresponde ao gráfico da superfície visualizada em *Superficie4.obj* e $g(x, y)$ corresponde ao gráfico da superfície visualizada em *Superficie5.obj*, o que podemos dizer sobre os valores da função $g(x, y)$ quando $f(1, 1)$; $f(1, -1)$; $f(-1, 1)$ e $f(-1, -1)$ assumem, respectivamente, os seguintes valores -1 ; 0 ; 0 e 1 .

d) Com base nas informações anteriores, identifique quais as leis de formação das superfícies visualizadas a partir das alternativas abaixo. Justifique sua resposta.

$$I) \quad f_1(x, y) = -\frac{x^3}{2x} + \frac{y^3}{2y}$$

$$II) \quad f_2(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

$$III) \quad f_3(x, y) = -\frac{x}{2} - \frac{y}{2}$$

$$IV) \quad f_4(x, y) = -\frac{x^3}{2x} - \frac{y^3}{2y}$$

Algebricamente, as superfícies não possuem a mesma lei de formação (*exceto por $g(0,0)$)? Tente justificar, com suas palavras, o motivo pelo qual as superfícies são descritas por superfícies distintas. ***Por quê?**

Resposta: as leis de formação das funções descritas pelas superfícies visualizadas na

Atividade 4 são:

$$f(x, y) = -\frac{x}{2} - \frac{y}{2}; \quad x, y \in [-1, 1] \text{ e } g(x, y) = -\frac{x^3}{2} - \frac{y^3}{2}; \quad x, y \in [-1, 1]$$

Atividade 5

Abra o arquivo *Objeto1.obj* no aplicativo *Andar Model Viewer*. Observe o objeto, utilizando os recursos do aplicativo como zoom e rotação (ou, se preferir, rotacione o marker em sentido horário e anti-horário para gerar um efeito semelhante). Baseado no comportamento das superfícies descritas pelas funções de duas variáveis estudadas, até o momento, utilize o programa *Blender* para desenhar a composição de superfícies do objeto visualizado no aplicativo *AndAR Model Viewer*. Descreva os passos da sua construção no espaço abaixo:

Resposta: As funções que descrevem o modelo virtual da Atividade 5 são:

$$f_1(x, y) = -(\cos(x) \cdot \cos(y)) + 1; x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f_2(x, y) = 2 \cdot (\cos(x) \cdot \cos(y)); x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Atividade 6

Abra o arquivo *Objeto2.obj* no aplicativo *Andar Model Viewer*. Observe o objeto, utilizando os recursos do aplicativo como zoom e rotação (ou, se preferir, rotacione o marker em sentido horário e anti-horário para gerar um efeito semelhante). Baseado no comportamento das superfícies descritas pelas funções de duas variáveis estudadas, até o momento, utilize o programa *Blender* para desenhar a composição de superfícies do objeto visualizado no aplicativo *AndAR Model Viewer*. Descreva os passos da sua construção no espaço abaixo:

Resposta: As funções que descrevem o modelo virtual da Atividade 6 são:

$$f_1(x, y) = -(\cos(x) \cdot \cos(y)); x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f_2(x, y) = -x^2 - y^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e } y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Atividade 7

Abra o arquivo Objeto3.obj no aplicativo Andar Model Viewer. Observe o objeto, utilizando os recursos do aplicativo como zoom e rotação (ou, se preferir, rotacione o marker em sentido horário e anti-horário para gerar um efeito semelhante). Baseado no comportamento das superfícies descritas pelas funções de duas variáveis estudadas, até o momento, utilize o programa Blender para desenhar a composição de superfícies do objeto visualizado no aplicativo AndAR Model Viewer. Descreva os passos da sua construção no espaço abaixo:

Resposta: As funções que descrevem o modelo virtual da Atividade 7 são:

$$f_1(x, y) = x^8 + y^8; x, y \in [-1, 1]$$

$$f_2(x, y) = -(x^8 + y^8) + 2; x, y \in [-1, 1]$$

Atividade 8

Abra o arquivo Objeto4.obj no aplicativo Andar Model Viewer. Observe o objeto, utilizando os recursos do aplicativo como zoom e rotação (ou, se preferir, rotacione o marker em sentido horário e anti-horário para gerar um efeito semelhante). Baseado no comportamento das superfícies descritas pelas funções de duas variáveis estudadas, até o momento, utilize o programa Blender para desenhar a composição de superfícies do objeto visualizado no aplicativo AndAR Model Viewer. Descreva os passos da sua construção no espaço abaixo:

Resposta: As funções que descrevem o modelo virtual da Atividade 8 são:

$$f_1(x, y) = \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{16}}{\frac{\pi^2}{4}} \right) x^2 + y^4; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ e } y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$f_2(x, y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \frac{\pi}{2}; x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$f_3(x, y) = y^8 + \frac{3}{4}; x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right] \text{ e } y \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right]$$

$$f_4(x, y) = x^2 + y^4 + \frac{1}{4}; x \in \left[-\frac{3}{10}, \frac{3}{10} \right] \text{ e } y \in \left[-\frac{13}{20}, \frac{13}{20} \right]$$

$$f_5(x, y) = -x^2 - y^2 + \frac{5}{4}; x, y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]; \text{origem deslocada } \frac{1}{4} \text{ para esquerda no eixo } x$$

$$f_6(x, y) = -x^2 - y^2 + \frac{5}{4}; x, y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]; \text{origem deslocada } \frac{1}{4} \text{ para direita no eixo } x$$

Transcrevemos as anotações pessoais do licenciando/pesquisador, realizadas no próprio arquivo do TCC (digitado no programa Microsoft Word), ao iniciar a construção do *design* de suas primeiras atividades. Assim, começamos a analisar a produção de dados dessa pesquisa:

Dia 24/05/2016 – Anotação pessoal: “*Quero criar uma atividade que envolva a interação do aluno com o ambiente de Realidade Aumentada. Quero que o aluno pense no conhecimento matemático conforme ele explora esse ambiente de Realidade Aumentada, ou seja, conforme ele se movimenta e utiliza os recursos da câmera (zoom, rotação e translação) do smartphone perante o objeto virtual inserido no ambiente mundano. Gostaria que ele descrevesse e analisasse o objeto matematicamente conforme ele o percebe em diferentes ângulos no ambiente de RA*”.

A anotação pessoal acima expõe, em nossa opinião, uma das ideias iniciais que contribuíram para responder a pergunta diretriz dessa pesquisa em relação a essa seção, a *Percepção distinta à Realidade Mundana*. As palavras do pesquisador como “[...] ***interação com o ambiente*** [...]”, “[...] ***conforme ele se movimenta*** [...] ***perante o objeto*** [...]” e “[...] ***o percebe em diferentes ângulos*** [...]” nos sugerem a noção compreendida, pelo licenciando/pesquisador, para essa seção. Entendemos que o licenciando/pesquisador está propondo o uso dos recursos de RA para perceber, segundo Seidel e Rosa (2011), as superfícies geradas por funções de duas variáveis reais em um contexto de RA, isto é, em um ambiente de RA. Da mesma forma, compreendemos que o licenciando/pesquisador está utilizando os recursos de RA semelhantemente às ponderações de Rosa (2008) ao tratar sobre o saber-fazer-com-TD, ou seja, tornar os recursos de RA partícipes do processo de ensino e de aprendizagem matemática.

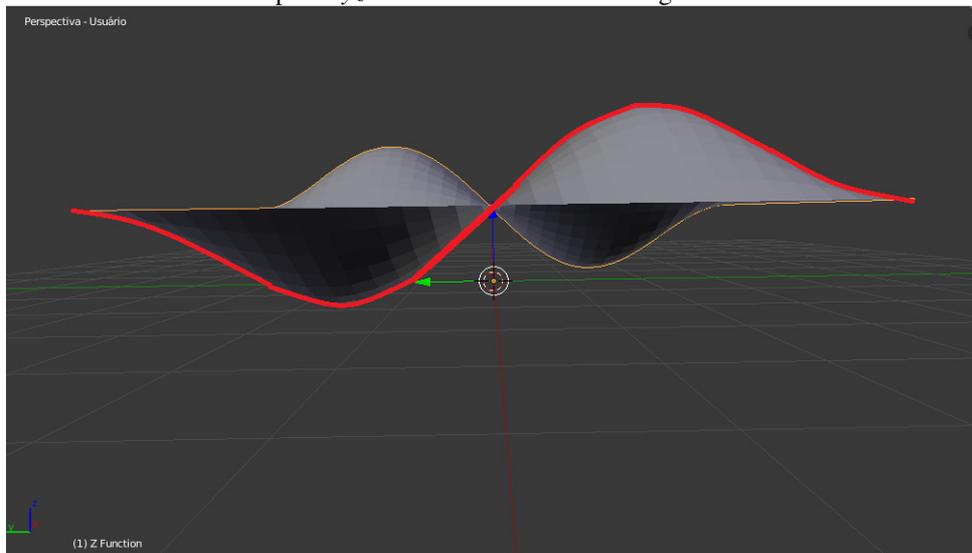
Dessa forma, o licenciando/pesquisador pensou, durante o processo de *design* das Atividades 1 até 8, em incentivar o aluno a investigar e a explorar as superfícies descritas por funções de duas variáveis, elaboradas com o programa Blender, no ambiente de RA através do *smartphone* ou *tablet* (com o aplicativo *AndAR* instalado). Esse movimento de incentivo ao aluno nos remete às ponderações de Rosa (2008), pois entendemos que a interação do aluno com o aparelho (*smartphone* ou *tablet*) sugere uma ação de saber-fazer-com-TD.

Todavia, o pesquisador também exprime um sentimento quanto à tentativa de usar a visualização, igualmente, para identificar o domínio da função conforme apresentado na próxima transcrição de pensamento:

Dia 24/05/2016 – Anotação pessoal: “Preciso criar uma atividade no Blender com a função: $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$, tal que as variáveis x e y estejam limitadas nos intervalos $[-\pi, \pi]$ e $[-\pi, \pi]$. Vou limitar o domínio da função nesse intervalo, pois percebi que essa função tem um comportamento semelhante ao da função $f(x) = \text{sen}(x)$ nesse mesmo domínio. E se compararmos $f(x, y)$ com $g(x, y) = 2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$ em um ambiente de RA? Percebemos alguma diferença? Nota: Pergunto isto, pois em um ambiente de RA não temos condições de analisar o gráfico da superfície definida pelos eixos xyz no espaço tridimensional. Quero verificar se, mesmo assim, é possível perceber alguma diferença entre essas duas funções e gostaria que os colegas descrevessem a diferença entre as superfícies. Pensei em fazer algo semelhante com uma função do tipo $f(x, y) = x^{2a} + y^{2b}$; $a, b \in \mathbb{N}$ e pedir para os colegas descreverem as diferenças entre $f_1(x, y) = x^2 + y^4$ e $f_2(x, y) = x^4 + y^2$, por exemplo”.

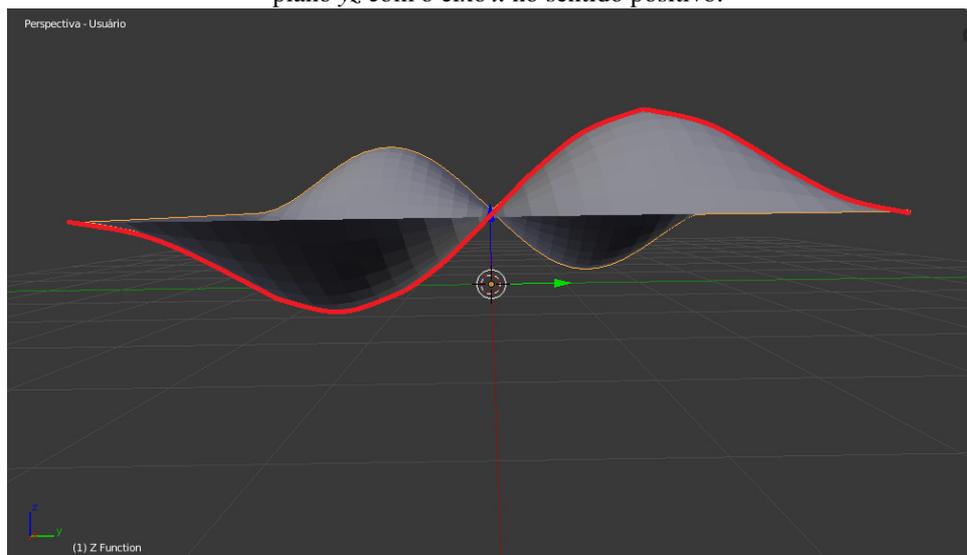
Inicialmente, o licenciando/pesquisador pensou em criar “[...] **a função: $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$, tal que as variáveis x e y estejam limitadas no intervalo $[-\pi, \pi]$ e $[-\pi, \pi]$** ”, pois, sob seu ponto de vista, ele distinguiu características da função $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$, as quais lhe pareceram familiares durante seu processo de aprendizagem tanto no ensino médio quanto em sua formação acadêmica. Nesse sentido, ele percebeu que o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ tinha um comportamento análogo ao da função $f(x, y)$. Ele atentou a esse fato ao perceber, devido a sua visão de mundo (SEIDEL; ROSA, 2011) e suas experiências anteriores, a superfície de ângulos específicos, conforme ilustrados nas figuras abaixo:

Figura 17 – Superfície descrita pela função: $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y) + 1$; $x, y \in [-\pi, \pi]$ vista a partir do plano yz com o eixo x no sentido negativo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – Superfície descrita pela função: $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y) + 1$; $x, y \in [-\pi, \pi]$ vista a partir do plano yz com o eixo x no sentido positivo.

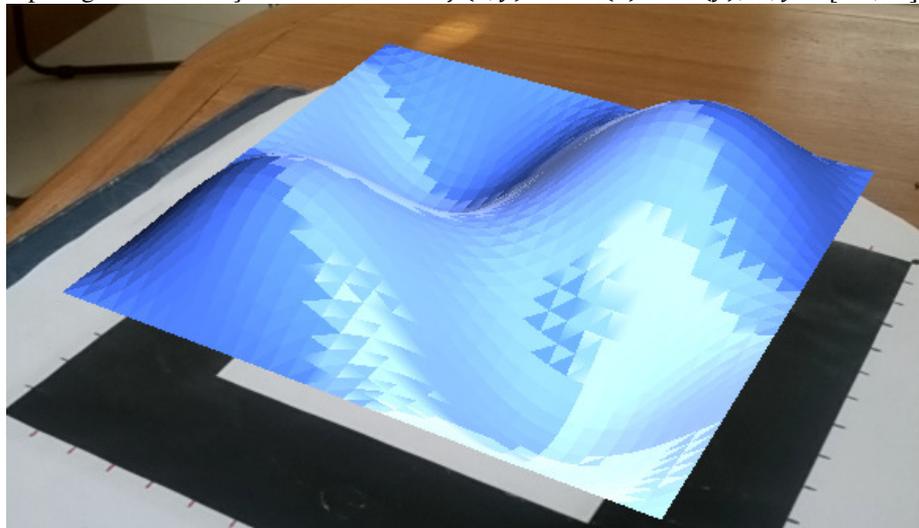


Fonte: Elaborada pelo autor.

Destacamos em vermelho (nas Figuras 17 e 18) as linhas que caracterizam o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x) + 1$; $x \in [-\pi, \pi]$. De fato, ao observarmos a linha vermelha nessas figuras, estamos olhando para todos os pontos da função f tais que $f\left(\pm\frac{\pi}{2}, y\right) = \text{sen}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(y) + 1 \rightarrow f\left(\pm\frac{\pi}{2}, y\right) = \pm \text{sen}(y) + 1$. Ocorre que mesmo ao invertemos o sentido do eixo x (positivo para negativo e vice-versa) ainda continuamos enxergando a função $f(x) = \text{sen}(x)$. Assim, o pesquisador despertou um olhar para o modo como os objetos, os cenários e as superfícies são percebidos diferentemente em ambientes de realidade virtual e de RA ou, ainda, desenhados em uma folha de papel, pois a percepção

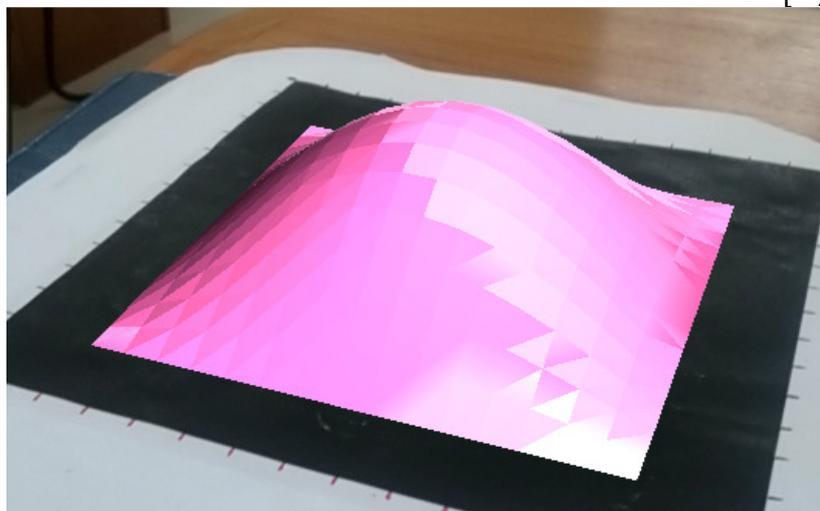
(SEIDEL; ROSA, 2011), tomado pelo ato de pensar-com-TD (ROSA, 2008) do outro (observador) pode ser diferente da nossa, sob esse mesmo olhar, no ambiente de RA. Nesse ponto, o pesquisador pensou no *design* das Atividades 1 e 2, identificando possibilidades para se trabalhar com as funções de duas variáveis $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$; $x, y \in [-\pi, \pi]$ e $g(x, y) = \text{cos}(x) \cdot \text{cos}(y)$; $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Inclusive, podemos utilizar um raciocínio semelhante ao caso anterior (da função $f(x, y)$), tomando $g(0, y) = \text{cos}(0) \cdot \text{cos}(y) \rightarrow g(0, y) = \text{cos}(y)$. Ilustramos as capturas de imagem, realizadas com os recursos do aplicativo AndAR (instalado no *smartphone* do pesquisador), para explicarmos essa ponderação:

Figura 19 – Imagem capturada em um *smartphone*, com os recursos do aplicativo AndAR, a qual é expressa pelo gráfico da função da Atividade 1: $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$; $x, y \in [-\pi, \pi]$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

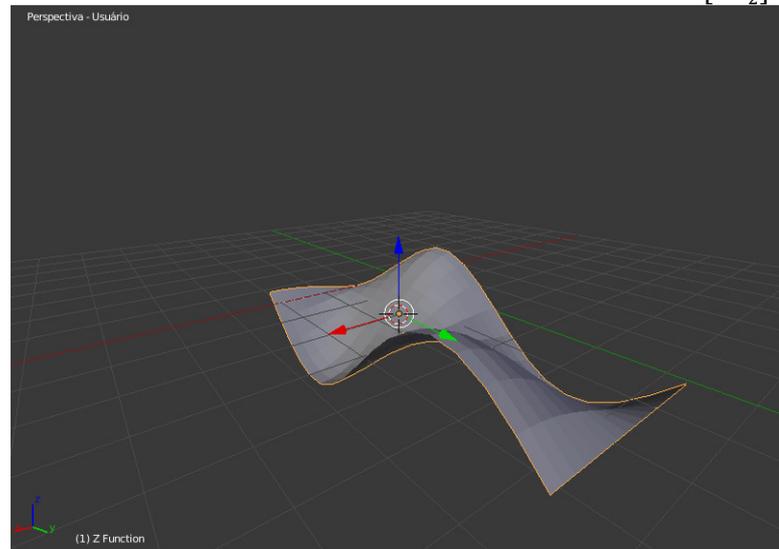
Figura 20 – Imagem capturada em um *smartphone*, com os recursos do aplicativo AndAR, a qual é expressa pelo gráfico da função da Atividade 2: $g(x, y) = \text{cos}(x) \cdot \text{cos}(y)$; $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Anton (2000, p. 315) argumenta: “Exceto nos casos mais simples, os gráficos de funções de duas variáveis podem ser difíceis de visualizar sem a ajuda de um recurso gráfico computacional”. De fato, o pesquisador, não teve condições de esboçar, mentalmente, o gráfico da $f(x, y) = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y)$ nem mesmo da função $g(x, y) = \cos(x) \cdot \cos(y)$; $x, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ em suas primeiras tentativas. Para exemplificar esse fato, podemos citar, por exemplo, o gráfico (ANTON, 2000, p. 314) da função $f(x, y) = \cos(x) \cdot \text{sen}(y)$:

Figura 21 – Gráfico descrito pela função $f(x, y) = \cos(x) \cdot \text{sen}(y)$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $y \in [0, 2\pi]$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) do gráfico da Figura 21, desenhada no papel, pode causar dúvidas e incertezas quanto à localização de determinados pontos sobre a superfície descrita pela função $f(x, y) = \cos(x) \cdot \text{sen}(y)$ em nossa opinião, por causa de seu contexto (a superfície da Figura 21 desenhada no papel, ou seja, em um objeto da Realidade Mundana). Tomamos como exemplo os pontos $P = (\pi, \frac{3\pi}{2}, 1)$ e $Q = (0, \frac{\pi}{2}, 1)$. Note que os pontos P e Q pertencem ao gráfico da função $f(x, y)$ e ambos estão à mesma altura (com coordenada $z = 1$). Nossa percepção do gráfico segundo Seidel e Rosa (2011), ilustrado na Figura 21, pode não ser exatamente o resultado obtido através da lei de formação dessa função, pois não nos parece evidente (devido ao contexto de Realidade Mundana), em nosso entendimento, que os pontos P e Q estejam situados exatamente a mesma altura (eixo z) ao percebermos o gráfico da função apenas no papel. Em nossa opinião, acreditamos que, provavelmente, alguns alunos poderiam achar, inclusive, que o ponto P está abaixo do ponto Q , percebendo (SEIDEL; ROSA, 2011) a superfície apenas no papel. Entendemos, também, que a noção de profundidade, possivelmente, não é perceptível, pois parece-nos que falta algo para garantir que realmente os pontos P e Q estão a uma

mesma altura em termos visuais, sem, no caso, apelar para o aspecto algébrico de constatação e, com isso, podendo gerar dúvidas em relação à execução de cálculos. Seguramente, poderíamos pensar que o ângulo do qual foi produzida a imagem da Figura 21 não favorece nossa percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) para analisar os pontos P e Q e, matematicamente, sabemos que seria possível capturar a imagem dessa superfície de infinitos ângulos distintos. Contudo, observamos que as imagens, independente dos ângulos pelos quais são percebidas (SEIDEL; ROSA, 2011) no papel, sempre estarão desenhadas em um ambiente diferente da RA e da realidade virtual e, desse modo, temos a sensação de que nossa percepção sobre elas não estará completa devido, também, ao contexto (SEIDEL; ROSA, 2011) no qual as superfícies são percebidas. Em contrapartida, a imagem da superfície gerada pela função $f(x, y) = \cos(x) \cdot \sin(y)$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $y \in [0, 2\pi]$ em um ambiente de RA pode ser percebida diferentemente. Isso, pois, é possível visualizarmos efeitos de luz na superfície, construídos pelo próprio programa Blender, em uma perspectiva de RA, conforme modificamos o ângulo de visualização da câmera do aparelho sobre o *marker*, propiciando, em nosso ver, um contexto qualitativamente melhor para nossa percepção (SEIDEL; ROSA, 2011). Podemos verificar esse fato nas Figuras 19 e 20. A qualidade e a informação que a RA proporciona, parece-nos significativa, em comparação ao gráfico de uma superfície descrita por uma função de duas variáveis, percebido (SEIDEL; ROSA, 2011) apenas no papel.

Em virtude dessas observações, o licenciando/pesquisador integrou-se aos recursos do programa Blender e do aplicativo AndAR, aprimorando sua percepção (SEIDEL; ROSA, 2011), em nosso ver, ao passo que interagiu com as superfícies nos ambientes de realidade virtual e RA. As noções de profundidade e de tamanho, aparentemente, se tornaram perceptíveis (SEIDEL; ROSA, 2011) para o licenciando/pesquisador ao manusear o *smartphone* em torno da superfície visualizada em um ambiente de RA. Essas circunstâncias que o estimularam, durante o processo *design* das Atividades 1 até 8, na produção de significados para os seus próprios saberes matemáticos com-TD (ROSA, 2008). Em contrapartida, temos a impressão que o mesmo não ocorreria se o licenciando/pesquisador percebesse (SEIDEL; ROSA, 2011) superfícies, geradas por funções de duas variáveis, desenhadas apenas em uma folha de papel. Entendemos que as experiências são distintas nesses casos. Uma vez que o licenciando/pesquisador “mergulhou” no ambiente de RA – movendo, rotacionando, transladando o objeto ou a superfície, procurando um ângulo diferente para visualizá-lo(a) – compreendemos que ele pode ter refinado sua percepção

(SEIDEL; ROSA, 2011), pensando-com-TD (ROSA, 2008) matematicamente. Entendemos que esse processo também contribuiu para formação do próprio licenciando/pesquisador, uma vez que em suas experiências anteriores, em relação ao estudo de funções de duas variáveis reais, ele não havia estudado os gráficos das funções de duas variáveis nem mesmo em um ambiente virtual.

Retomando a segunda anotação pessoal, do dia 24/05/2016, do licenciando/pesquisador, observamos uma tentativa dele para produzir o *design* de uma atividade ao comentar: “[...] **Pensei em fazer algo semelhante com uma função do tipo $f(x, y) = x^{2a} + y^{2b}$; $a, b \in \mathbb{N}$ e pedir para os colegas descreverem as diferenças entre $f_1(x, y) = x^2 + y^4$ e $f_2(x, y) = x^4 + y^2$, por exemplo**”. Realmente, podemos perceber que o gráfico das superfícies descritas por funções de duas variáveis com expoentes inteiros pares e positivos como os das funções $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ preservam sua forma em razão da sua simetria com eixo z . A correspondência que podemos fazer, nesse caso, com as funções de uma variável são aquelas geradas a partir da lei de formação $f(x) = x^{2k}$; $k \in \mathbb{N}^*$. Os gráficos das funções formadas por essa lei de formação possuem simetria em relação ao eixo y (em um espaço bidimensional). Assim, o licenciando/pesquisador procurou realizar experimentos com funções de duas variáveis reais semelhantes à função $f(x, y) = x^{2a} + y^{2b}$; $a, b \in \mathbb{N}$ para tentar construir uma superfície que pudesse ser relacionada a um objeto mundano. Logo, transcrevemos seu esforço para obter resultados a partir da sua próxima anotação pessoal, descrita abaixo:

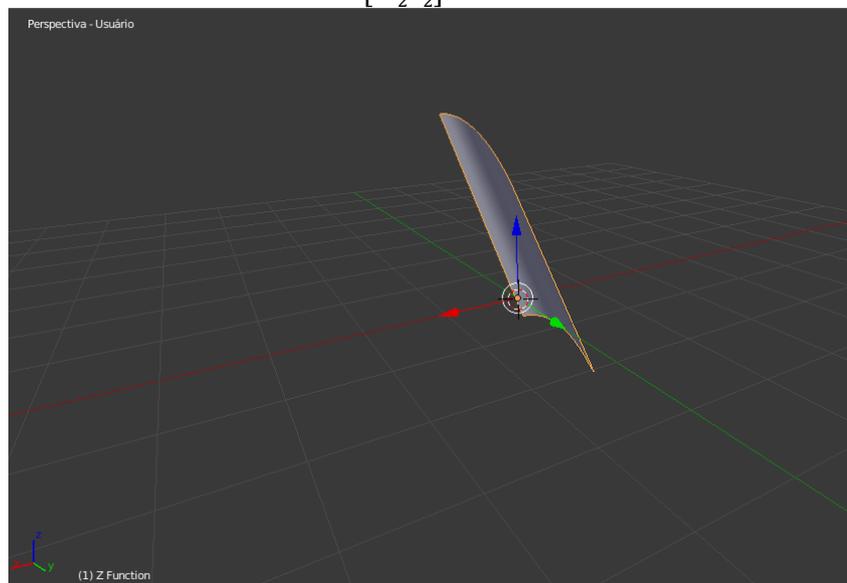
Dia 25/05/2016 – Anotação pessoal: “Estou tentando criar uma superfície mais sinuosa, semelhante às curvas de um vaso. Tentei com a função $f(x, y) = -\frac{x^2}{1+x} - \frac{y^2}{y+1}$ e fiquei surpreso com o resultado, não estou entendendo por que razão a superfície está parecendo um “cone deitado”.

“Bah! Que legal! Posso criar uma atividade com uma função que se parece com o “arco” da estação Mercado de Porto Alegre: $g(x, y) = -\frac{x^4}{5} - \frac{y^2}{5} + \frac{17}{5}$; $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-4, 4]$ ”.

No trecho: “Tentei com a função $f(x, y) = -\frac{x^2}{1+x} - \frac{y^2}{y+1}$ e fiquei surpreso com o resultado, não estou entendendo por que razão a superfície está parecendo um ‘cone deitado’”, o licenciando/pesquisador estava testando expressões para lei de formação da

função de duas variáveis reais, tentando encontrar uma superfície sinuosa a qual chamasse a sua atenção. No momento desse registro, ele ainda não sabia que o programa Blender efetuava os cálculos exatamente na ordem em que os elementos estavam escritos no campo *Z Equation*. Ou seja, ao escrevermos $-\frac{x^2}{1+x} - \frac{y^2}{y+1}$ no campo *Z Equation*, o programa Blender realizava as operações da seguinte forma: $-\left(\left(\left(\mathbf{1} \times x^2\right) \div \mathbf{1}\right) + x\right) - \left(\left(\left(\mathbf{1} \times y^2\right) \div y\right) + \mathbf{1}\right)$. Desse modo, o pesquisador visualizava, na verdade, a seguinte superfície na janela de visualização 3-D do programa Blender:

Figura 22 – Superfície construída com o programa Blender, descrita pela função: $f(x, y) = -x^2 + x - y + 1$; $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e $y \in [-1, 1]$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Entretanto, o licenciando/pesquisador nos demonstra satisfação no fragmento em que argumenta: “*Bah! Que legal! Posso criar uma atividade com uma função que se parece com o ‘arco’ da estação Mercado de Porto Alegre* $g(x, y) = -\frac{x^4}{5} - \frac{y^2}{5} + \frac{17}{5}$; $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-4, 4]$ ”. O licenciando/pesquisador, ao notar que não obteve o resultado desejado (conforme mencionado no fragmento do registro realizado no dia 25/05/2016), testou coeficientes de valores racionais para as variáveis x e y , procurando obter em gráfico de uma superfície com comportamento diferente das anteriores (superfícies das versões das Atividades 1 e 2). Na prática, essa função $g(x, y)$ sustentou o *design* da própria Atividade 3. Entendemos que o *design* da Atividade 3 é similar ao das atividades anteriores; porém, percebemos que essa atividade alude a uma outra lei de formação de funções de duas

variáveis. A seguir, ilustramos o objeto virtual visualizado com o aplicativo AndAR na Atividade 3:

Figura 23 – Imagem capturada em um *smartphone*, com os recursos do aplicativo AndAR, a qual é expressa pelo gráfico da função da Atividade 3: $f(x, y) = -\frac{x^4}{5} - \frac{y^4}{5} + \frac{17}{5}$; $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-4, 4]$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

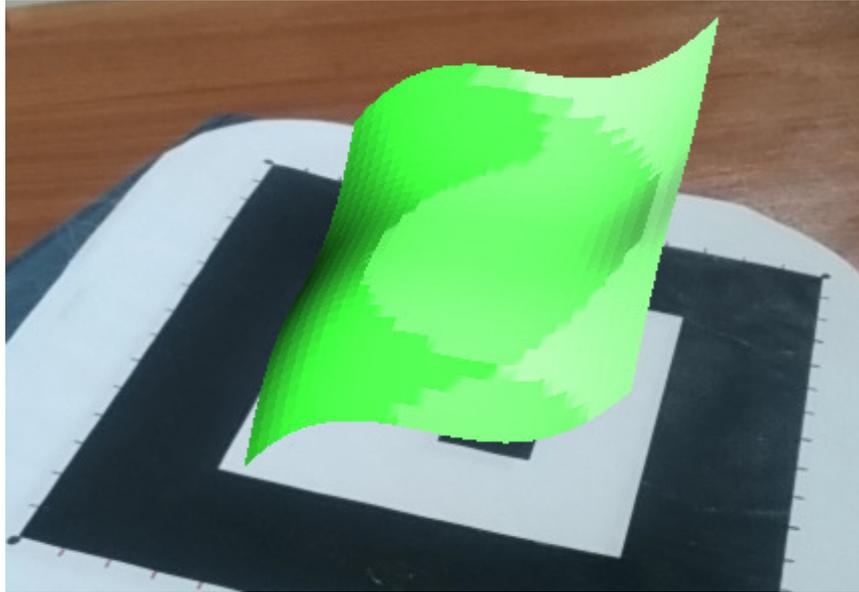
Preliminarmente, o licenciando/pesquisador pensou, no *design* da Atividade 4, em comparar dois gráficos de superfícies de funções de duas variáveis. Porém, ao escrever as leis de formação das funções, ele imaginava que essas leis das funções eram algebricamente equivalentes. Observe os gráficos das funções utilizadas nas figuras abaixo:

Figura 24 – Superfície descrita pela função $f(x, y) = -\frac{x}{2} - \frac{y}{2}$; $x, y \in [-1, 1]$, visualizada em um ambiente de RA (Atividade 4 – Superfície 4).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Superfície descrita pela função $f(x, y) = -\frac{x^3}{2} - \frac{y^3}{2}$; $x, y \in [-1, 1]$, visualizada em um ambiente de RA (Atividade 4 – Superfície 5).



Fonte: Elaborada pelo autor.

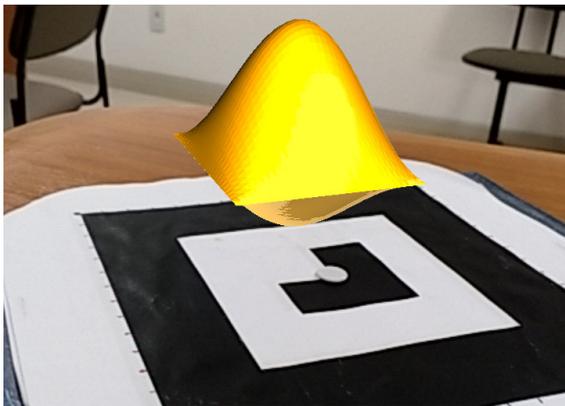
De fato, o licenciando/pesquisador havia escrito no programa Blender a seguinte função $f(x, y) = -\frac{x^2}{2x} - \frac{y^2}{2y}$ e, a partir disso, obtido, como resultado na janela de visualização 3-D, o gráfico da superfície ilustrada na Figura 25, o qual, na verdade, representa o gráfico da função ilustrado na Figura 24 (exceto para $x, y = 0$). Novamente, o programa Blender efetuou as operações conforme a ordem dos elementos escritos no campo *Z Equation*, fato que já havíamos destacado anteriormente. Ao escrever $= -\frac{x^2}{2x} - \frac{y^2}{2y}$ o programa Blender efetuava as seguintes operações com os elementos do campo *Z Equation*: $-(x^2 \div 2) \times x) - ((y^2 \div 2) \times y)$. Esse erro de interpretação do licenciando/pesquisador e do programa Blender foi informado, na verdade, pelos colegas do grupo de pesquisa ao resolverem as atividades construídas pelo licenciando/pesquisador. Nesse sentido, as contribuições dos colegas do grupo de pesquisa foram importantes para que o licenciando/pesquisador repensasse no *design* de suas atividades.

Os objetivos pedagógicos, em particular, das quatro primeiras atividades produzidas pelo licenciando/pesquisador, em nosso entendimento, não estavam claros e nem se espelharam em uma prática pedagógica de MM. Observamos que ele trabalhou, no processo de *design* de suas atividades, as noções de domínio e de imagem dos gráficos das superfícies de funções de duas variáveis reais, atribuindo, a suas atividades, conceitos estritamente matemáticos. Não conseguimos identificar quais outros sentidos que essas atividades poderiam trazer para o ensino e para a aprendizagem dos alunos, além de uma

prática de exercícios matemáticos. Igualmente, percebemos sua preocupação em instigar o aluno a identificar qual a lei de formação das funções de duas variáveis reais utilizadas para elaboração dos objetos virtuais, percebidos (SEIDEL; ROSA, 2011) em RA. Compreendemos que a sua prática pedagógica, até esse ponto, estava fundamentada em um ensino puramente formal. Notamos que o licenciando/pesquisador não conseguiu desenvolver um cenário para investigação (SKOVSMOSE, 2000) dos saberes matemáticos, limitando o raciocínio das suas atividades em cálculos e reprodução desses, consequentemente.

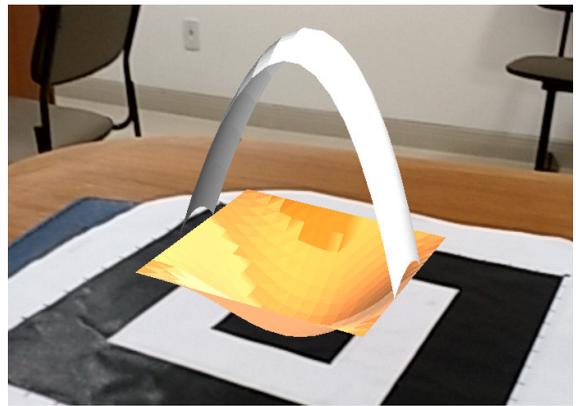
Entretanto, ao analisarmos em conjunto todas as atividades preparadas pelo licenciando/pesquisador até o dia 30/05/2016, percebemos que o processo de resolução das Atividades 1 até 3, pelo menos, tinha o propósito de preparar e instruir os alunos para realização das Atividades 5 até 8. Isso, pois, os objetos virtuais construídos nessas atividades são constituídos por funções de duas variáveis reais com leis de formação semelhantes às analisadas e estudadas nas Atividades 1 até 4. Observamos as imagens expostas nas próximas figuras, na perspectiva da RA, relativas aos objetos virtuais construídos para as Atividades 5 até 8:

Figura 26 – Objeto virtual da Atividade 5, visualizado em RA.



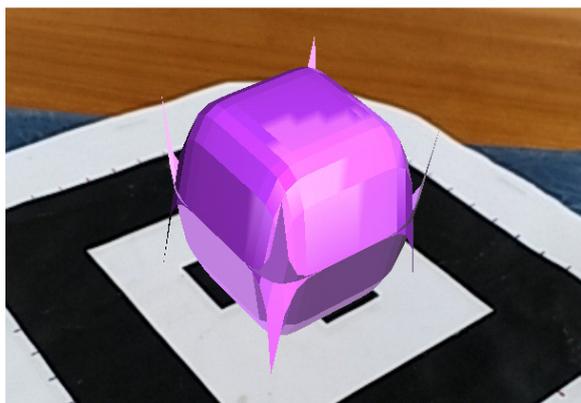
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27 – Objeto virtual da Atividade 6, visualizado em RA.



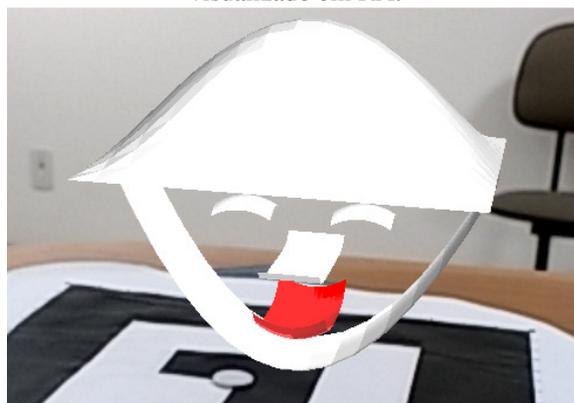
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 28 – Objeto virtual da Atividade 7, visualizado em RA.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29 – Objeto virtual da Atividade 8, visualizado em RA.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A ideia de construir objetos virtuais para serem visualizados em RA, foi vislumbrada pelo licenciando/pesquisador a partir da anotação pessoal do dia 25/05/2016, conforme descrevemos anteriormente. O licenciando/pesquisador começou a pensar (com base na anotação pessoal do dia 25/05/2016) que a partir da percepção do outro (SEIDEL; ROSA, 2011), seria possível relacionar os objetos virtuais, construídos para serem percebidos (SEIDEL; ROSA, 2011) em um ambiente de RA, ao ensino e à aprendizagem de matemática. Observamos as imagens que o licenciando/pesquisador localizou na internet e capturou com seu *smartphone* para exemplificar como os modelos de objetos virtuais (Figuras 26 até 29) poderiam se relacionar com modelos de objetos mundanos:

Figura 30 – Forma de alumínio para confecção de ovo de Páscoa.



Fonte: Página do site Confraria da Arte¹⁸.

Figura 31 – Cestos de palha em três tamanhos distintos.



Fonte: Página do site Zardo Arquitetura e Eventos¹⁹

¹⁸ Disponível em: <http://d2fvaoyneucth8.cloudfront.net/assets/39513/produtos/1484/materiaprima-formasdealuminio-formaovogde.jpg>. Acesso em: 07 mai. 2016.

¹⁹ Disponível em: <http://www.dizardo.com.br/loc/catdcr/cest/cest21b.jpg>. Acesso em: 07 mai. 2016.

Figura 32 – Anel com pedra de ametista (réplica).

Fonte: Elaborada pelo autor.

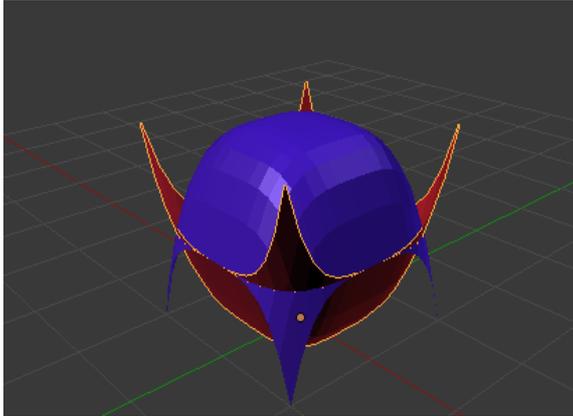
Figura 33 – Brinquedos Playmobil.

Fonte: Página do site Pipoca de Pimenta²⁰.

Segundo a percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) de objetos virtuais relacionados a objetos da realidade mundana, o licenciando/pesquisador entendeu que o ensino de matemática (no que tange o estudo de funções de duas variáveis reais) poderia ser ampliado. Então, ele pensou que estaria provocando os alunos a refletirem e a pensarem nos elementos matemáticos dos objetos virtuais (Figuras 26 até 29) ao mesmo tempo em que poderia trabalhar com os alunos os princípios de MM desses objetos, associados à realidade mundana. Nesse sentido, ele desenvolveu o *design* das Atividades 5 até 8 para analisar, igualmente, a percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) do aluno, a qual poderia ser distinta. Na verdade, o licenciando/pesquisador entendeu que poderia guiar o processo de construção de funções de duas variáveis por diferentes caminhos; porém, com representações gráficas similares em uma perspectiva da RA. Abaixo, exemplificamos o ponto de vista do licenciando/pesquisador:

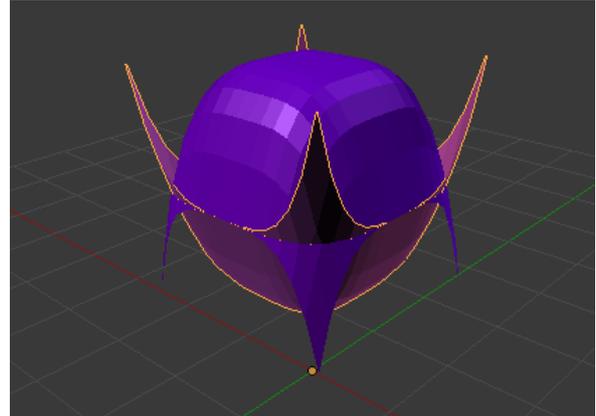
²⁰ Disponível em: <http://pipocadepimenta.com/wp-content/uploads/2016/05/Playmobil-2.jpg>. Acesso em: 08 mai. 2016.

Figura 34 – Exemplo A do objeto virtual criado com o programa Blender semelhante ao objeto virtual visualizado em RA na Atividade 7.



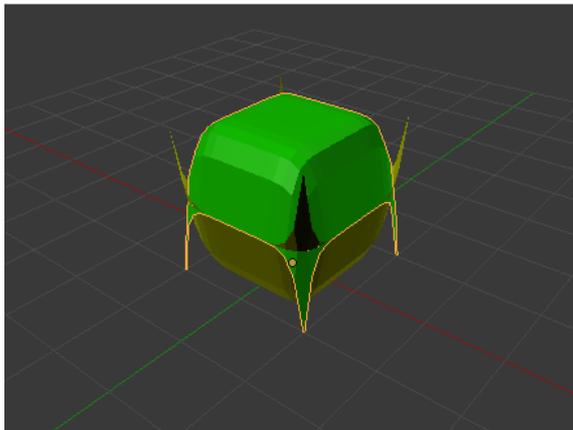
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 35 – Exemplo B do objeto virtual criado com o programa Blender semelhante ao objeto virtual visualizado em RA na Atividade 7.



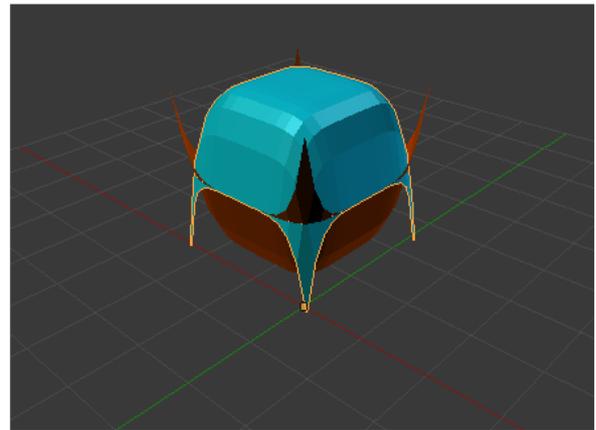
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 36 – Exemplo C do objeto virtual criado com o programa Blender semelhante ao objeto virtual visualizado em RA na Atividade 7.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 37 – Exemplo D do objeto virtual criado com o programa Blender semelhante ao objeto virtual visualizado em RA na Atividade 7.



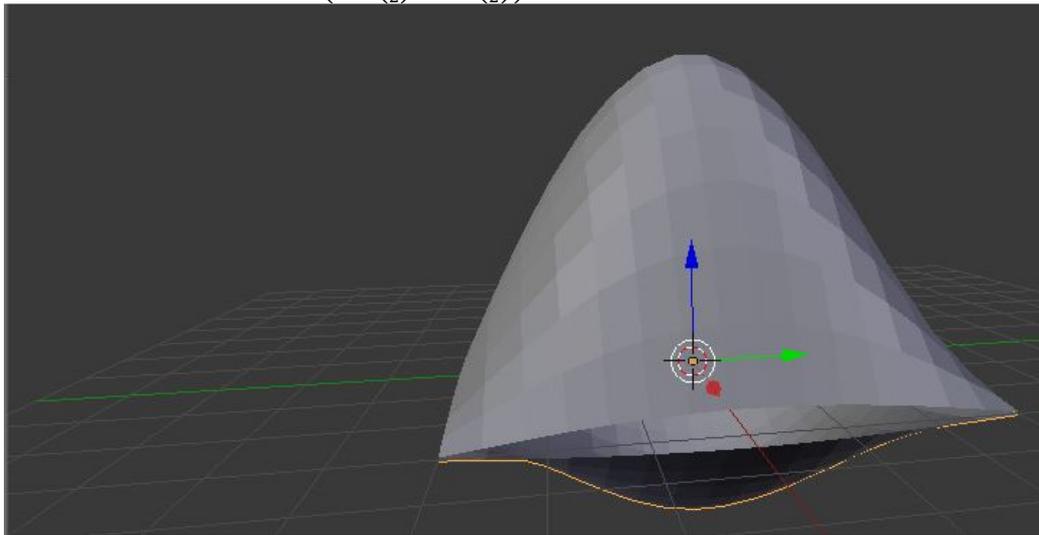
Fonte: Elaborada pelo autor.

Cada objeto virtual das Figuras 34 até 37 está associado a duas funções do tipo $f(x, y) = ax^{2c} + by^{2c} + d$; $x, y \in [-1, 1]$ sendo $a, b, c, d \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Ou seja, cada objeto virtual (produzido com o programa Blender) possui uma construção realizada com duas funções geradas por leis de formação distintas e, ainda, ambas estão descritas em um mesmo espaço tridimensional. Entretanto, todos esses objetos virtuais se assemelham, em nosso entendimento, ao formato do objeto virtual percebido (SEIDEL; ROSA, 2011) em RA da Figura 28. Em contrapartida, apenas um dos objetos virtuais possui exatamente as mesmas leis de formação das funções de duas variáveis utilizadas para reproduzir as superfícies do objeto virtual da Figura 28 (no caso, o exemplo C, da Figura 36).

O licenciando/pesquisador sustentou parcialmente sua teoria a respeito do *design* das Atividades 5 até 8 a partir das contribuições do colega A do grupo de pesquisa. O colega A realizou, individualmente, a construção dos modelos virtuais (visualizados em um

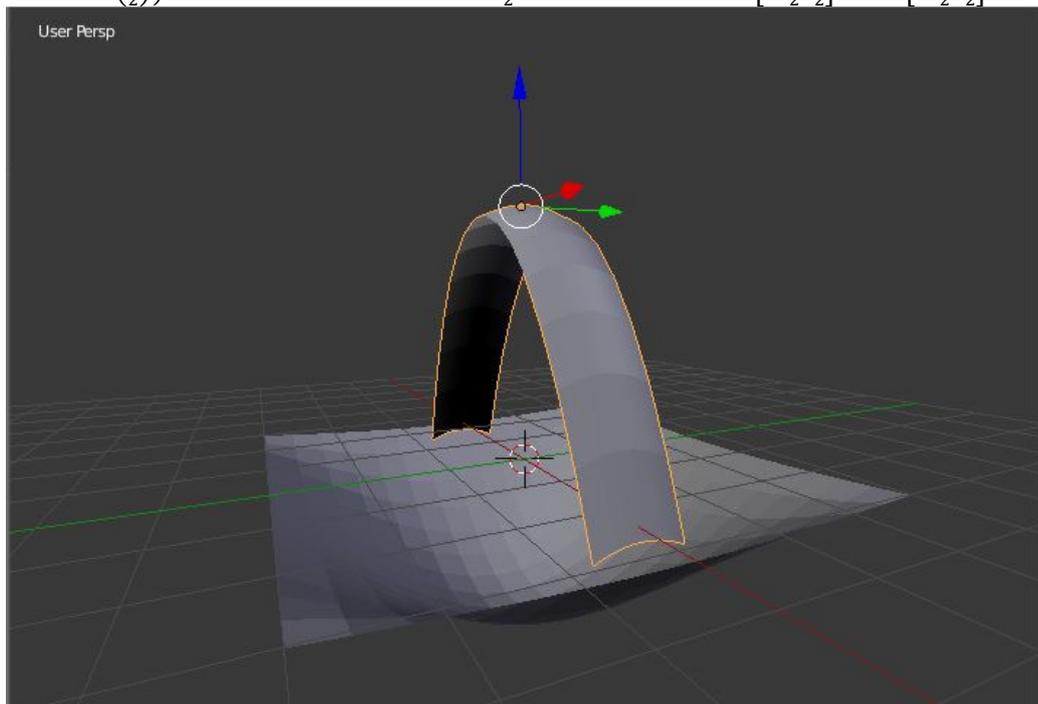
ambiente de RA) das Atividades 5 até 8. Importante destacar que o colega A já estava familiarizado com o programa Blender e o aplicativo AndAR, colaborando para que o mesmo tivesse condições de realizar, individualmente, a atividade. Na sequência, apresentamos imagens produzidas pelo colega A, enviadas por e-mail para o licenciando/pesquisador no **dia 03/06/2016**:

Figura 38 – Construção do objeto virtual da Atividade 5 obtida pelo colega A: $f(x, y) = 4 \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right) \right)$ e $g(x, y) = -2 \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right) \right)$ ambas com intervalos $x, y \in [-3, 3]$.



Fonte: Elaborada pelo colega A do grupo de pesquisa.

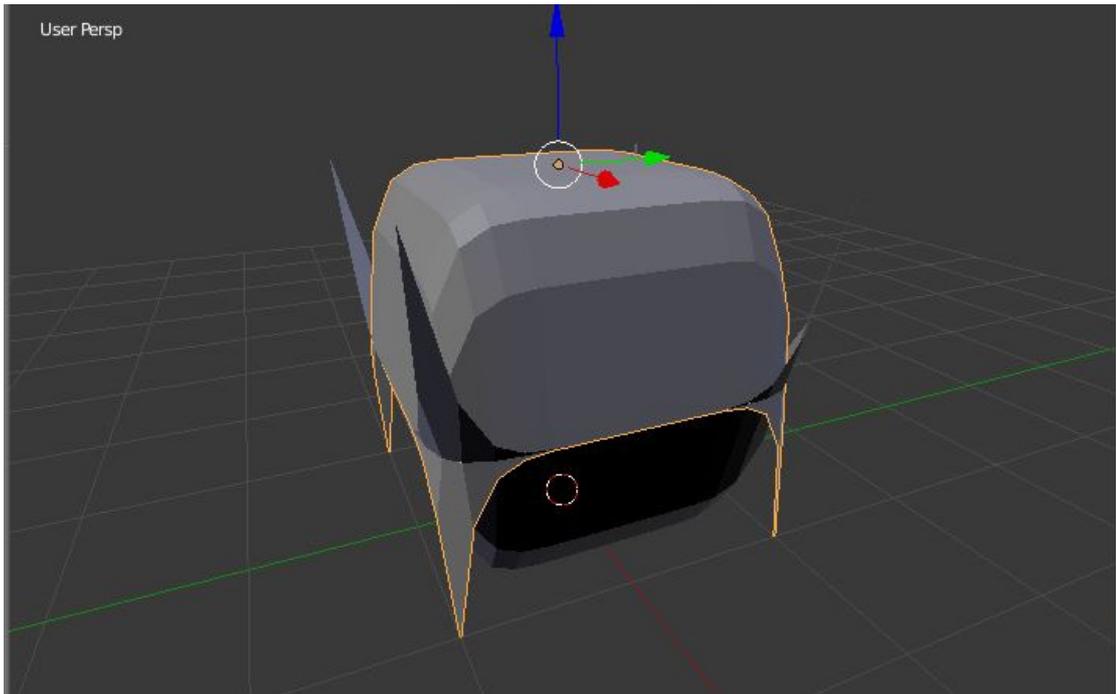
Figura 39 – Construção do objeto virtual da Atividade 6 obtida pelo colega A: $f(x, y) = -2 \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right) \right)$; $x, y \in [-3, 3]$ e $g(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + 3$; $x \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ e $y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.



Fonte: Elaborada pelo colega A do grupo de pesquisa.

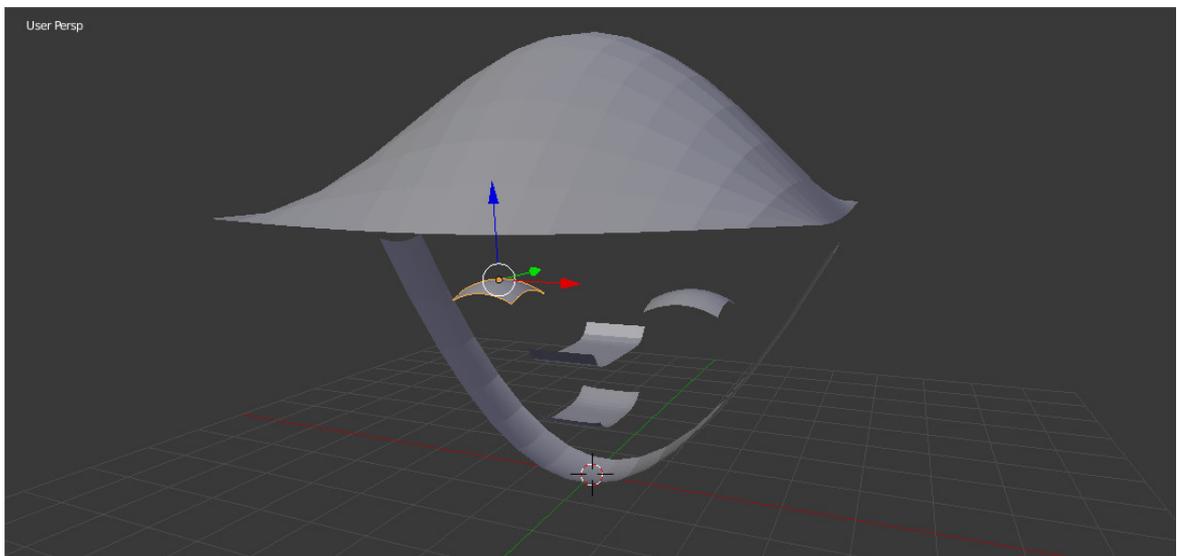
Figura 40 – Construção do objeto virtual da Atividade 7 obtida pelo colega A:
ambas com intervalos em

e



Fonte: Elaborada pelo colega A do grupo de pesquisa.

Figura 41 – Construção do objeto virtual da Atividade 8 obtida pelo colega A.



Fonte: Elaborada pelo colega A do grupo de pesquisa.

Complementando as contribuições do colega A, ainda transcrevemos as funções encontradas pelo mesmo para construir o objeto virtual da Figura 41:



$$f_3(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (x^8 + y^8) + 2; x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ e } y \in \left[-\frac{9}{5}, \frac{9}{5}\right]$$

$$f_4(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + 3; x, y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ com origem deslocada } \frac{3}{2} \text{ para direita no eixo } x$$

$$f_5(x, y) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + 3; x, y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ com origem deslocada } \frac{3}{2} \text{ para esquerda no eixo } x$$

$$f_6(x, y) = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y}{2}\right)\right) + 4; x, y \in \left[-\frac{13}{4}, \frac{13}{4}\right]$$

Notamos que o colega A obteve leis de formação diferentes para quase todas as atividades em comparação às leis encontradas pelo licenciando/pesquisador para cada uma das Atividades de 5 até 8. Porém, observamos que ele não representou as superfícies como o licenciando/pesquisador imaginava ou não conseguiu estimar alguns valores para o domínio das funções. Salientamos essa consideração, pois, podemos observar que nas Figuras 38, 39 e 41 ele não ligou os pontos das superfícies formadas pelas funções as quais possuíam pontos em comum, em virtude de não ter refletido, provavelmente, sobre os intervalos das funções no programa Blender. Contudo, o licenciando/pesquisador ficou satisfeito com os resultados obtidos pelo colega A, pois o licenciando/pesquisador observou que a percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) do colega A (sobre a lei de formação das funções) foi diferente da sua, circunstância que o licenciando/pesquisador defende, previamente, no ato de modelar os objetos virtuais com o programa Blender.

Embora o licenciando/pesquisador tenha se demonstrado satisfeito com os resultados encontrados para as Atividades 5 até 8, analisamos que as mesmas não estavam de acordo com a pergunta diretriz da nossa pesquisa. O problema de MM, envolvido no *design* dessas atividades, encaminhava um processo de construção em uma dimensão de realidade (DALLA VECCHIA, 2012) a qual não dizia respeito à RA, mas sim à realidade virtual. Justificamos esse fato, pois o programa Blender deveria ser utilizado para MM dos objetos virtuais dessas atividades. Ou seja, o processo de MM não decorreria em virtude da dimensão abrangida pela RA (DALLA VECCHIA, 2012), pois, seria necessário apenas modelarmos virtualmente o objeto em um ambiente que correspondesse à realidade virtual. Na verdade, também entendemos que a noção de percepção segundo Seidel e Rosa (2011), construída pelo licenciando/pesquisador, se sucedeu em razão das próprias definições matemáticas processadas pelo programa Blender, ou seja, bastava o colega A utilizar os

recursos do programa Blender para modelar os objetos virtuais, sem precisar percebê-los (SEIDEL; ROSA, 2011) no ambiente de RA.

Diante disso, compreendemos que a seção de *Percepção distinta à Realidade Mundana* se constituiu, essencialmente, pela construção das versões de atividades (do licenciando/pesquisador) com suporte dos recursos de RA. Assim, o licenciando/pesquisador pode perceber (SEIDEL; ROSA, 2011) características distintas da realidade mundana em relação a um ambiente de RA (mundano mais virtual), devido ao contexto no qual as superfícies, geradas por funções de duas variáveis, eram percebidas (SEIDEL; ROSA, 2011) no papel ou no ambiente de RA. Entendemos, ainda, que esse ambiente de RA incentivou o licenciando/pesquisador a refinar sua percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) sobre objetos virtuais descritos por funções de duas variáveis.

Compreendemos que o licenciando/pesquisador ao lançar-se, na construção do *design* de atividades planejadas para o ambiente de RA, realizou um movimento semelhante às ponderações de Rosa (2008) ao tratar do ser-com-o-ciberespaço. Distinguimos o ser-com-RA analogamente ao ser-com-o-ciberespaço definido por Rosa (2008). Ser-com-RA, em nosso entendimento, é estar imerso nesse ambiente, seja por gestos naturais na interface háptica do *smartphone* ou, ainda, pela inserção de objetos virtuais semelhantes aos objetos mundanos, misturando-se em nosso ambiente mundano. Entendemos que o movimento de ser-com-RA estabeleceu um elo entre o licenciando/pesquisador e o ambiente de RA o qual pode ajudá-lo a potencializar e a transformar sua percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) no ensino e na aprendizagem dos saberes matemáticos no que concerne o estudo de funções de duas variáveis reais. Realmente, observamos que os recursos de RA tornaram-se partícipes do processo de construção do *design* das atividades. Mesmo que os objetos virtuais tenham sido modelados matematicamente em uma dimensão abrangida pela realidade virtual (DALLA VECCHIA, 2012), o licenciando/pesquisador exercitou sua percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) a partir do ambiente de RA. Nesse contexto (SEIDEL; ROSA, 2011), ele conseguiu perceber (SEIDEL; ROSA, 2011), diferentemente, o comportamento dos gráficos descritos por funções de duas variáveis em relação ao gráfico das mesmas funções, percebidas (SEIDEL; ROSA, 2011) em um ambiente virtual ou em uma folha de papel. A experiência com o ambiente de RA, sob o ponto de vista do licenciando/pesquisador, contribuiu para sua formação e para o seu ensino e sua aprendizagem matemática, visto a quantidade de superfícies e objetos virtuais que esse ambiente incentivou o licenciando/pesquisador a preparar para suas atividades. Assim como Nunes (2011), o

processo de autoanálise do *design* das atividades construídas pelo licenciando/pesquisador contribuiu para que ele refinasse seu pensamento. Desse modo, entendemos que o licenciando/pesquisador desenvolveu o processo de pensar-com-RA a partir da sua percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) nesse contexto.

Assim, apresentamos nossos argumentos, com base na transcrição e análise de dados produzidos, para exprimir nossa ideia sobre a percepção, segundo Seidel e Rosa (2011), de superfícies e objetos virtuais (na perspectiva da RA), aliada à construção de funções de duas variáveis, capazes de representar objetos mundanos. Por outro lado, também explicamos nossas considerações a respeito da percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) de gráficos de algumas funções de duas variáveis em comparação ao ambiente de RA e a uma folha de papel. Contudo, ainda entendemos que as transformações no *design* de atividades em termos de MM no estudo de funções de duas variáveis merecem outra seção. Tentamos compreender as características dos ambientes de realidade virtual e RA e, desse modo, identificar algumas diferenças entre esses ambientes. Com esse propósito, apresentamos nossas transcrições e observações a respeito das características da *Heterogeneidade do Ambiente de RA (virtual mais mundano)*.

3.3 Heterogeneidade do Ambiente de RA (virtual mais mundano)

Sob o ponto de vista dos ambientes de realidade virtual e de RA, observamos características distintas ao analisarmos os objetos e os cenários construídos com funções de duas variáveis. Percebemos como a RA pode potencializar ou transformar o *design* de atividades em termos de MM por sua heterogeneidade do ambiente (virtual mais mundano). Iniciamos nosso raciocínio, expondo a transcrição de um diálogo do licenciando/pesquisador com o colega B do grupo de pesquisa ao discutir a resolução da Atividade 1

Transcrição parcial da conversa realizada pelo programa Skype (via chamada de áudio) entre o licenciando/pesquisador e o colega B. Realizada nos dias 30/05/2016 e 31/05/2016 (iniciada às 22h10min e encerrada às 00h34min):

Colega B: - *Não estou conseguindo resolver o item c, pois não consigo entender como estão dispostos os eixos xyz...*

Licenciando/Pesquisador: - *Tente localizar o ponto $f(-1.57, 1.57)$, olhando o objeto virtual de ângulos diferentes. Tente observá-lo de cima e veja se você consegue enxergar os*

pontos onde a superfície é mais escura, ou seja, mais funda. Veja se você consegue verificar a afirmação inicial e aí você irá descobrir como os eixos estão dispostos.

Colega B: - *Estou tentando, mas me parece que tem algo errado. Eu visualizo a superfície com um “vale saindo” e a esquerda da tela do smartphone. Daí, não bate com a informação inicial, porque, pelo meu referencial, deveria ser $f(-1.57, -1.57) = -1$.*

Licenciando/Pesquisador: - *Ok, sua observação está correta no seu referencial, mas insisto que é possível visualizar o ponto do item c conforme a afirmação inicial. Tente novamente, olhando de ângulos diferentes a superfície.*

Colega B: - *Vou tentar, mas acho que você deveria analisar a questão dos referenciais, pois me parece que, sem eles, podemos ter diversas interpretações...*

As dificuldades do colega B em resolver o item c da Atividade 1, na verdade, demonstraram para o pesquisador uma preocupação quanto à ausência de eixos coordenados xyz no ambiente de RA. O colega B acredita que esse fato poderia acarretar uma série de interpretações quanto à localização dos pontos na superfície visualizada em RA por intermédio do aplicativo AndAR. O licenciando/pesquisador não concordava com esse aspecto, pois, havia pensado que fixando um ponto para representar um determinado lugar sobre a superfície, não seria possível definir outra localização para os demais pontos solicitados no item c da Atividade 1. Sob esse ponto de vista, o licenciando/pesquisador constatou diferenças entre os ambientes de RA visualizados por ele e pelo colega B. Dessa forma, ele registrou a seguinte anotação pessoal em relação às dificuldades encontradas pela colega B do grupo de pesquisa:

Dia 01/06/2016 – Anotação pessoal: *“Por que o colega B não está visualizando a superfície como eu havia visualizado? O que eu preciso fazer para que ela consiga observar a superfície de uma maneira semelhante a minha? Não quero desenhar os eixos coordenados xyz, pois entendo que eles podem reduzir as possibilidades de aprendizagem dos colegas quanto às leis de formação das superfícies. Como eu poderia usar o ambiente de RA a favor dessa visualização dos pontos?”.*

A anotação pessoal do dia 01/06/2016 demonstra a preocupação do licenciando/pesquisador em encontrar um caminho para utilizar o ambiente de RA ao seu favor. Pensando nisso, o licenciando/pesquisador teve a ideia de utilizar o ambiente de RA de uma maneira diferente:

Dia 02/06/2016 – Anotação pessoal: “*Quero comparar os tamanhos dos objetos virtuais com o ambiente mundano. Quero aproveitar o ambiente mundano para ter um referencial e uma noção do espaço tridimensional no qual o objeto virtual está inserido. Quero tentar estimar a localização de determinados pontos da superfície visualizada na perspectiva da RA. Será que conseguimos estimar as distâncias de uma região da superfície até outra região (dessa mesma superfície), utilizando objetos reais? Mesmo que não tenhamos os eixos coordenados xyz, podemos usar o ambiente, a nosso favor, para fazermos relações entre os pontos mínimos e máximos definidos como o domínio dessa superfície?”.*

Assim, o licenciando/pesquisador cogitou a ideia de usar marcações (com unidades de *cm*) em volta do *marker* do aplicativo AndAR para tentar refinar o *design* do processo de construção das suas atividades. Essas marcações, por sua vez, não precisavam, obrigatoriamente, ter valores específicos, pois a visualização de cada uma das superfícies da atividade poderia se beneficiar de uma origem diferente ou de um domínio diferente. Isto é, ele imaginou que os colegas poderiam supor origens e domínios diferentes para cada uma das superfícies da atividade conforme seus próprios critérios e as exigências de cada uma das atividades quanto ao processo de MM (DALLA VECCHIA, 2012). Essa ponderação o levou a sustentar a ideia de que podemos nos beneficiar do ambiente de RA pela sua heterogeneidade, potencializando, possivelmente, o estudo de funções de duas variáveis em termos da MM. Apesar disso, infelizmente, não foi possível remeter uma versão atualizada da atividade, a qual previa a utilização de um *marker* customizado, ou seja, com borda externa centimetrada (modelo disponível no Apêndice C). Embora não tenha sido possível encaminhar a atividade para os colegas A e B, as contribuições dos mesmos foram importantes, em nossa opinião, para nos debruçarmos sobre a conjectura a qual diz respeito à Heterogeneidade do Ambiente de RA (virtual mais mundano) como possibilidade para potencializar o ensino de funções de duas variáveis em termos da MM. Desse modo, apresentamos a versão final da atividade (também disponível no Apêndice A) construída e redigida pelo licenciando/pesquisador até a data de 25/06/2016:

Título: *Vamos investigar alguns modelos virtuais em um ambiente de Realidade Aumentada?*

Objetivos Pedagógicos:

- *Exercitar a imaginação e a criatividade dos alunos com intuito de induzi-los a perceber como um modelo virtual, construído em um ambiente virtual e visualizado em um ambiente de Realidade Aumentada, possui uma relação matemática com alguns objetos mundanos;*
- *Mostrar exemplos de algumas funções de duas variáveis reais as quais descrevam gráficos que lembrem ou se assemelhem a objetos mundanos;*
- *Investigar o domínio e tentar identificar alguns pontos de algumas funções de duas variáveis reais em um ambiente misto, ou seja, em um ambiente de Realidade Mundana plus Realidade Virtual, a partir da análise de um modelo virtual visualizado sobre o marker de borda centimetrada;*
- *Indagar os alunos sobre como o ambiente de Realidade Aumentada pode nos ajudar a reconstruir um modelo mundano a partir do modelo virtual, visualizado no próprio ambiente de Realidade Aumentada;*
- *Plotar os pontos identificados com um recurso computacional, tentando esboçar um possível gráfico de uma função de duas variáveis reais para um modelo virtual visualizado a partir do ambiente de Realidade Aumentada;*
- *Investigar se os alunos conseguiram compreender o que foi feito no processo de plotagem dos pontos.*

Orientações Iniciais:

- I.** *Para realização dessa atividade, é necessário um smartphone ou tablet com sistema operacional Android 5.0 ou superior. Além disso, você deverá instalar no seu aparelho os aplicativos AndAR, AndAR Model Viewer e OI File Manager, disponíveis na Google Play Store;*
- II.** *Será necessário, da mesma forma, instalar o software LAB Fit em seu computador o qual está disponível para o sistema operacional Windows 7 ou superior através do link: http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/download_p.htm. Acesso em: 24 de jun. 2016;*
- III.** *Tenha em mãos uma régua ou um esquadro com escala em centímetros, pelo menos;*
- IV.** *Copie os arquivos Objeto1.obj/Objeto1.mtl, Objeto2.obj/Objeto2.mtl, Objeto3.obj/Objeto3.mtl e Objeto4.obj/Objeto4.mtl (em anexo) para uma pasta do seu smartphone ou tablet;*

V. Imprima o marker de borda centimetrada (em anexo) para visualizar os modelos virtuais disponíveis nos arquivos copiados anteriormente;

VI. Abra um dos arquivos (*Objeto1.obj* ou *Objeto2.obj* ou *Objeto3.obj* ou *Objeto4.obj*), salvos em uma pasta do aparelho, a partir do ícone do aplicativo, criado na tela do smartphone ou tablet: **AndAR Model Viewer** → **Selecione um arquivo de modelo**. Para acessar um dos arquivos, você perceberá que o aplicativo *OI File Manager* será aberto a partir dessa última opção selecionada. Assim, você deverá localizar um dos arquivos conforme a pasta em que estes foram salvos no aparelho;

VII. Agora, observe o modelo virtual (escolhido a partir de um dos arquivos), utilizando os recursos do aplicativo *AndAR Model Viewer*, tais como ampliar ou reduzir o tamanho (deslize um dedo, convenientemente, sobre a tela do aparelho para perceber esse efeito). Utilize, também, o recurso rotação ou, se preferir, rotacione o marker impresso em sentido horário e/ou anti-horário para gerar um efeito semelhante. Igualmente, você pode se mover em torno do objeto, desde que você continue focando a câmera do aparelho para o centro do marker de borda centimetrada;

VIII. Agora sim, você está pronto! Por isso, leia atentamente os itens abaixo para tentar respondê-los:

a) Observando o modelo virtual no ambiente de Realidade Aumentada, disponível em um dos arquivos com extensão “.obj”, você consegue verificar alguma semelhança ou referência do modelo virtual visualizado com algum objeto mundano? Tente citar alguns exemplos, descrevendo-os com suas palavras. **OBS.: Exercite sua imaginação!**

b) O modelo virtual, visualizado anteriormente, de fato, foi criado com um programa computacional de modelagem virtual 3-D. É verdade, também, que para construção desse modelo virtual foram utilizadas as superfícies descritas por funções de duas variáveis reais. Sabendo disso, pense que tipos de funções de duas variáveis reais podem descrever o modelo virtual visualizado no começo dessa atividade. Consulte a internet ou um livro para auxiliá-lo a responder essa pergunta.

c) Nesse item, vamos exercitar a noção de domínio de funções de duas variáveis reais. Analise e pratique a resolução dos subitens a seguir:

i. Observe o modelo virtual escolhido, utilizando a câmera do smartphone ou tablet, de modo que você ajuste o ângulo da câmera do aparelho perpendicularmente em relação ao marker de borda centimetrada. Ou seja, observe o modelo virtual escolhido de uma vista de cima, paralela ao plano do marker de borda centimetrada;

ii. A partir desse ponto de vista, localize o centro do marker de borda centimetrada e assumo-o como ponto de origem de um plano de coordenadas cartesianas xy . Nesse caso, considere como ponto de origem do plano formado pelo marker de borda centimetrada o ponto $P = (0, 0)$;

iii. Agora, tente registrar pares ordenados (x, y) , com suporte da borda centimetrada do marker e das tabelas (em anexo), os quais pertençam à imagem descrita pelo modelo virtual. Nesse caso, analise, individualmente, em partes cada um dos modelos virtuais, conforme o formato de cada um dos modelos virtuais (analise o comportamento das curvas das imagens de cada um dos modelos virtuais). Tente localizar, pelo menos, 20 pares ordenados (x, y) para cada uma das partes do modelo virtual. Observe a tabela abaixo relativa aos pontos de coordenadas (x, y) , elaborada para a parte alaranjada/amarelada do modelo virtual do arquivo Objeto2.obj:

$1^{\circ} (0, 0)$	$2^{\circ} (4.5, 4.5)$	$3^{\circ} (3, 4.5)$	$4^{\circ} (1.5, 4.5)$
$5^{\circ} (0, 4.5)$	$6^{\circ} (-1.5, 4.5)$	$7^{\circ} (-3, 4.5)$	$8^{\circ} (-4.5, 4.5)$
$9^{\circ} (-4.5, 3)$	$10^{\circ} (-4.5, 1.5)$	$11^{\circ} (-4.5, 0)$	$12^{\circ} (-4.5, -1.5)$
$13^{\circ} (-4.5, -3)$	$14^{\circ} (-4.5, -4.5)$	$15^{\circ} (-3, -4.5)$	$16^{\circ} (-1.5, -4.5)$
$17^{\circ} (0, -4.5)$	$18^{\circ} (1.5, -4.5)$	$19^{\circ} (3, -4.5)$	$20^{\circ} (4.5, -4.5)$

*iv. Por fim, tente estimar, usando uma régua ou um esquadro com escala em centímetros, valores para a coordenada z (tomando como referência um eixo perpendicular ao plano cartesiano xy) a partir dos pares ordenados (x, y) registrados no subitem anterior. **OBS.: Sinta-se à vontade para escolher outro ponto como origem (subitem ii) ou para registrar novos pares ordenados (x, y)***

(subitem iii), caso você tenha muita dificuldade em estimar um valor para coordenada z.

Observe a tabela abaixo relativa aos pontos de coordenadas (x, y, z), elaborada para a parte alaranjada/amarelada do modelo virtual do arquivo Objeto2.obj:

$1^\circ (0, 0, 0)$	$2^\circ (4.5, 4.5, 3)$	$3^\circ (3, 4.5, 3)$	$4^\circ (1.5, 4.5, 3)$
$5^\circ (0, 4.5, 3)$	$6^\circ (-1.5, 4.5, 3)$	$7^\circ (-3, 4.5, 3)$	$8^\circ (-4.5, 4.5, 3)$
$9^\circ (-4.5, 3, 3)$	$10^\circ (-4.5, 1.5, 3)$	$11^\circ (-4.5, 0, 3)$	$12^\circ (-4.5, -1.5, 3)$
$13^\circ (-4.5, -3, 3)$	$14^\circ (-4.5, -4.5, 3)$	$15^\circ (-3, -4.5, 3)$	$16^\circ (-1.5, -4.5, 3)$
$17^\circ (0, -4.5, 3)$	$18^\circ (1.5, -4.5, 3)$	$19^\circ (3, -4.5, 3)$	$20^\circ (4.5, -4.5, 3)$

Pergunta: *Você sabe interpretar, matematicamente, esses pontos que estamos localizando no modelo virtual? Você percebeu que, em virtude do ambiente de Realidade Aumentada, conseguimos localizar pontos significativos do modelo virtual, de modo que teríamos uma noção inicial de como reconstruí-lo materialmente, ou seja, de como poderíamos construir um modelo mundano dele a partir dos registros anteriores? Pense nos fatos mencionados e escreva suas considerações a respeito dos mesmos.*

d) *Se você conseguiu acompanhar e desenvolver todos os itens até o momento, você terá condições de esboçar as leis de formação das funções de duas variáveis reais que constituem o modelo virtual estudado nessa atividade. Para isso, observe e analise os subitens abaixo:*

i. *Abra o programa LAB Fit e na tela inicial clique em New → **Number of independent variables: 2** → Ok.*

ii. *O LAB Fit utiliza X1 e X2 como variáveis independentes e Y como variável dependente. Por isso, escolha X1, por conveniência, para preencher os campos em branco, dessa nova janela, como sendo a coordenada x dos pares ordenados encontrados para cada um dos pontos de uma parte do modelo virtual (conforme seus registros do **item c, subitem iii**). Clique em Ok e repita o mesmo procedimento para as duas próximas janelas, preenchendo os campos em branco com os valores encontrados para as coordenadas y e z, respectivamente;*

iii. Você deverá escolher um nome para salvar seus registros como um arquivo de dados e clicar em *Ok*;

iv. Clique no botão *User* e escreva uma das seguintes sentenças matemáticas no campo “*Y =*” (observe a sintaxe utilizada pelo programa para digitar uma das sentenças abaixo):

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot \cos\left(\frac{X1}{B}\right) \cdot \cos\left(\frac{X2}{B}\right) + C \\ A \cdot (X1)^2 + B \cdot (X2)^2 + C \\ A \cdot (X1)^6 + B \cdot (X2)^6 + C \end{array} \right.$$

Lembre-se de digitar **3** no campo “*Number of parameters:*” dessa mesma janela;

v. Clique em *Ok* → *Ok* → *Fit* → *Ok* → *Ok* → *Cancel*;

vi. Após efetuar as operações do **subitem v**, você estará visualizando, provavelmente, uma janela com o gráfico de uma superfície semelhante à parte do modelo virtual escolhido para plotagem dos pontos que você havia registrado. Caso isso não tenha acontecido, repita o processo do **item d** desde o começo, mas selecione outra sentença matemática no **subitem iv**.

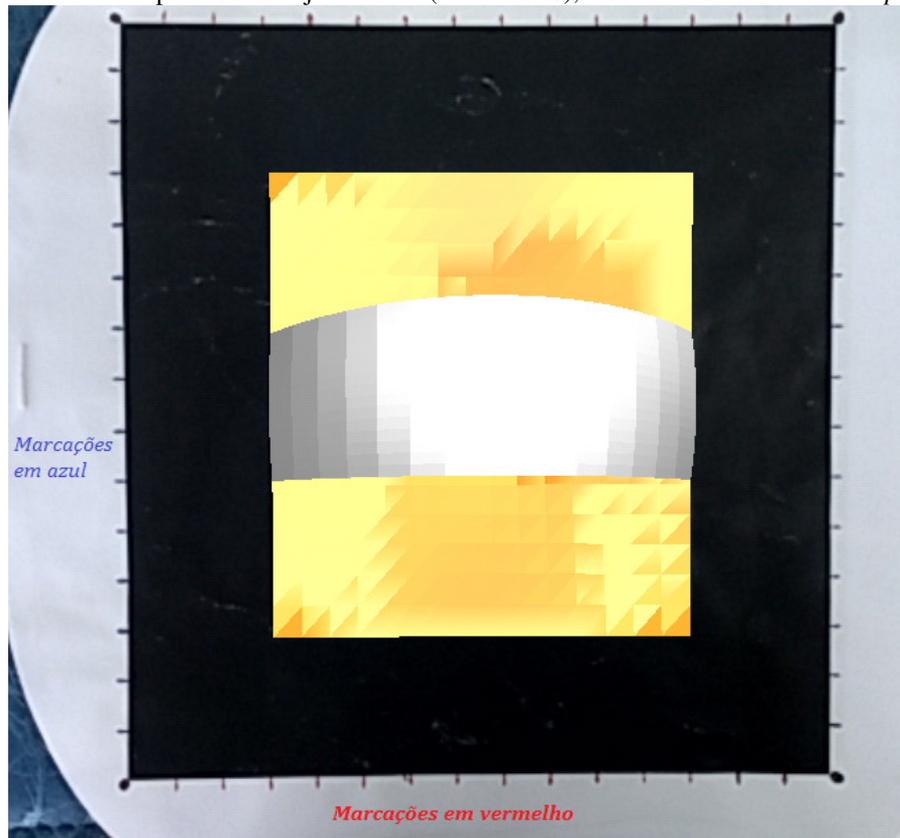
Pergunta: Descreva, com suas palavras, o papel dos parâmetros **A**, **B** e **C** nas sentenças do **subitem iv**. Da mesma forma, tente descrever o que o programa *LAB Fit* encontrou com os seus registros juntamente com uma das sentenças que você digitou na janela do programa ao efetuar o procedimento do **subitem iv**. Você conseguiu compreender o que aconteceu? Justifique sua resposta.

Para Atividade Final, o licenciando/pesquisador utilizou os mesmos modelos de objetos visualizados nas Figuras 26 até 29. Através da construção do *design* dessa atividade, o licenciando/pesquisador notou que o ambiente de RA pode nos ajudar a dimensionar o tamanho dos objetos e dos cenários virtuais em uma escala mundana, pois esses se sobrepõem ao espaço mundano ao serem visualizados na tela do *smartphone*. Diferentemente, no ambiente de realidade virtual, não existe sobreposição de objetos virtuais em um espaço mundano, em razão do seu ambiente homogêneo (totalmente virtual). Nesse aspecto, nossas impressões nos levam a crer que é possível produzirmos sentidos matemáticos diferenciados em ambos os espaços, pois conectamos, provavelmente, um

objeto virtual à realidade mundana, ou seja, empregamos materiais mundanos para estabelecer um vínculo com o virtual. Assim, esperamos que se produzam conhecimentos matemáticos que façam sentido perante a MM das funções de duas variáveis frente ao referencial utilizado (mundano mais virtual), pois buscamos vincular o objeto virtual ao nosso mundo, aos nossos recursos materiais. A partir desse fato, lembramos-nos das considerações de Kenski (2007), pois assim como a autora comenta sobre a engenhosidade do homem (desde a pré-história) para produzir inovações tecnológicas, entendemos que o licenciando/pesquisador foi astuto em relacionar os recursos de RA com outros instrumentos tecnológicos.

Fundamentados nessa interpretação, buscamos desenrolar o significado da heterogeneidade do ambiente de RA, tentando propiciar relações do conhecimento matemático com a realidade mundana. Nesse sentido, o licenciando/pesquisador procurou usar o ambiente de RA ao seu próprio favor. Dessa maneira, o pesquisador imaginava que seria possível estimar os valores dos domínios das funções de duas variáveis reais (as quais descreviam os objetos virtuais das Atividades 5 até 8), e talvez, aproximar os valores das próprias funções nos limites de seus domínios. Fundamentado nessas considerações, o licenciando/pesquisador teve condições de desenhar, eixos coordenados x e y (em uma escala de comprimento mundano, como o cm) para se situar no plano definido pelo próprio *marker*. Desse modo, entendemos que seja possível analisar o gráfico descrito pela função de duas variáveis com um olhar diferente em relação a nossa perspectiva no ambiente de realidade virtual. Embora não visualizamos explicitamente os eixos xyz como no ambiente de realidade virtual, entendemos que pode ocorrer uma interpretação do gráfico diversificada em um ambiente de RA. Note as nossas considerações a partir da figura abaixo:

Figura 42 – Estimando os valores nos eixos desenhados na borda centimetrada do *marker* para tentar identificar o domínio da superfície do objeto virtual (Atividade 6), visualizada na tela do *smartphone*.

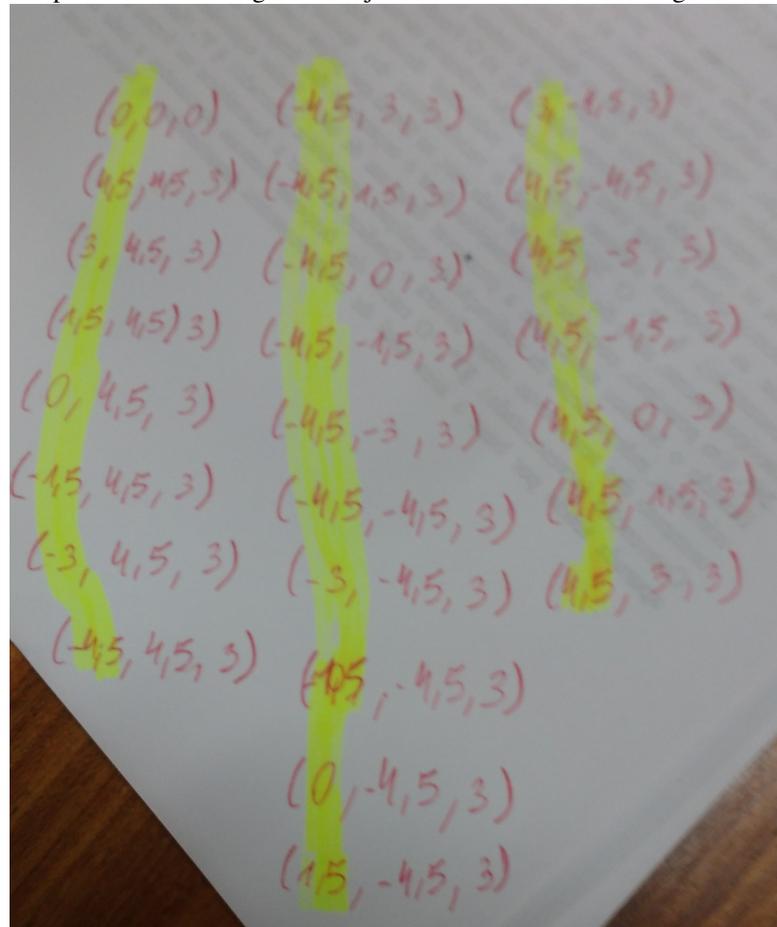


Fonte: Elaborada pelo autor.

No exemplo da Figura 42, supomos que as marcações em vermelho representam o eixo x e as marcações em azul representam o eixo y . Por conveniência, vamos considerar como origem, o centro do *marker* de borda centimetrada. Assim, podemos construir um plano de coordenadas xy . Conseqüentemente, podemos aproximar um domínio para o plano no qual o objeto virtual está contido semelhantemente ao modo como definimos um domínio para uma função de duas variáveis em um plano xy . Entretanto, nosso exemplo é apenas um caso particular e, por isso, entendemos que o ambiente de RA pode diversificar a interpretação do gráfico de funções de duas variáveis reais, pois, com os recursos do aplicativo AndAR, o usuário pode ampliar o objeto virtual bem como girar o *smartphone* em torno do mesmo para construir seus próprios eixos x e y e estimar o domínio no qual esse objeto está inserido. Assim, retomando nosso exemplo da Figura 42, podemos esboçar um domínio para a superfície virtual, aproximando os valores das coordenadas dos eixos x e y , observando-a de um ângulo praticamente perpendicular ao plano xy construído sobre o *marker* (conforme ilustrado na Figura 42). Analogamente, podemos registrar valores para imagem desses pontos, estimando valores para coordenada no eixo z , observando a superfície do objeto virtual de um ângulo paralelo ao eixo x ou y . Desse modo, registramos,

baseados na foto capturada (conforme ilustrada na Figura 42) e com auxílio do recurso *zoom* do *smartphone* bem como de uma régua, os seguintes valores para os eixos x , y e z :

Figura 43 – Rascunho utilizado pelo licenciando/pesquisador para registrar pontos de coordenadas (x, y, z) pertencentes à imagem do objeto virtual visualizado na Figura 42.



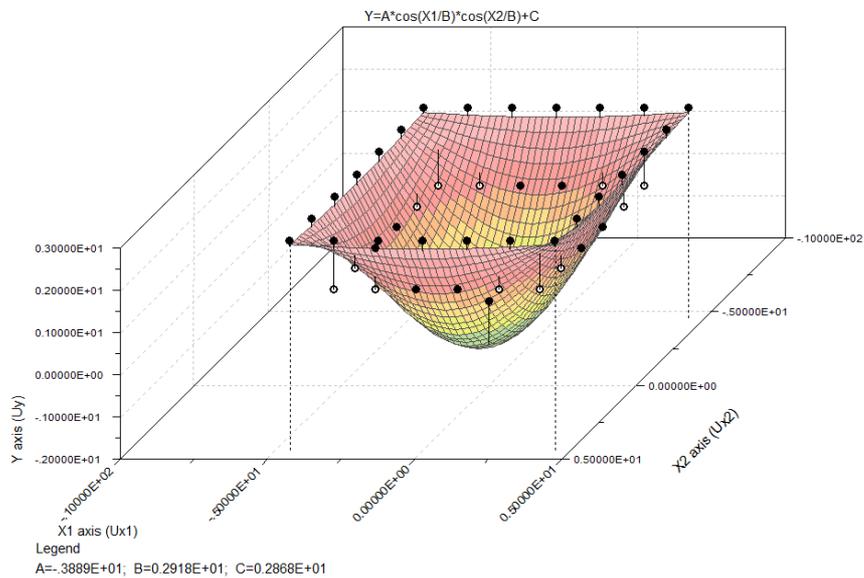
Fonte: Elaborada pelo autor.

Verificando os valores encontrados, percebemos que os mesmos não estão precisamente exatos com a lei de formação do objeto virtual da Atividade 6 o qual foi construído com a função $f(x, y) = -\cos(x) \cdot \cos(y)$; $x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Embora o comprimento dos intervalos no eixo x e y não sejam proporcionais ao comprimento original dos mesmos intervalos na função citada, consideramos que a aproximação realizada possa propiciar uma estimativa, em escala mundana, das dimensões da superfície da função. Diante disso, entendemos que se fortalece um elo entre a EM e a EC defendidas por Skovsmose (2001), pois, sabemos que nem toda abstração matemática pode ser transferida para as situações mundanas. Ou seja, não temos condições de verificar, com exatidão, nossas estimativas, pois, devido às limitações físicas (precisão da régua, da câmera do *smartphone* ou da nossa própria visão), não conseguimos contemplar a natureza matemática do nosso experimento.

Entretanto, com os recursos do programa *LAB Fit*, conseguimos plotar um gráfico para os pontos registrados pelo licenciando/pesquisador. Apesar do programa não contar (em sua biblioteca) com leis de formação semelhantes às funções utilizadas pelo licenciando/pesquisador para construir os objetos virtuais das Atividades 5 até 8, conseguimos inserir nossos próprios modelos de funções para que o programa *LAB Fit* reproduzisse um gráfico os pontos registrados pelo pesquisador na perspectiva da RA.

Figura 44 – Gráfico obtido pelo programa *LAB Fit* ao plotar os pontos registrados pelo licenciando/pesquisador com a lei de formação dada por: $A \cdot \cos\left(\frac{X1}{B}\right) \cdot \cos\left(\frac{X2}{B}\right) + C$.

Imagem Plotada da $f(x, y) = -\cos(x) \cdot \cos(y)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente, acreditamos que a nossa compreensão adotada para a MM a qual se refere a “[...] **um processo dinâmico e pedagógico de construção de modelos sustentados por ideias matemáticas que se referem e visam encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade**” (DALLA VECCHIA, 2012, p. 123 – grifo do autor) foi atingida, na dimensão abrangida pela RA, no que concerne a pergunta diretriz de nossa pesquisa. Entendemos que conseguimos construir um modelo (os objetos virtuais) sustentado por ideias matemáticas (definições e características das funções de duas variáveis reais) que se referem e visam encaminhar problemas (*design* planejado para a Atividade Final) de qualquer dimensão abrangida pela realidade (inclusive, a RA). Assim, acreditamos que o estudo de funções de duas variáveis reais pode ter sido potencializado/transformado, a partir de uma prática pedagógica da MM, pela Heterogeneidade do Ambiente de RA (virtual mais mundano). Observamos que o *design* da Atividade Final nos remete às considerações de Campos et. al. (1998, p. 2), fundamentadas em Klemm e Snell (1996), ao afirmarem que

as modernas tecnologias (as TD e os recursos para utilizarmos o ambiente de RA) necessitam de “[...] um ambiente que suporte a forma construtivista de trabalhar com o aluno e a aprendizagem colaborativa”. Acreditamos que esses componentes (CAMPOS et. al., 1998, p. 2) de “forma construtivista” e de “aprendizagem colaborativa” estiveram presentes no *design* da Atividade Final.

Aproximando-nos do epílogo dessa obra, convidamos o leitor a conferir nossas considerações finais, no próximo capítulo, quanto à investigação dessa pesquisa, apontando nossas reflexões sobre todo o processo investigativo desse trabalho, salientando, igualmente, o processo de formação do pesquisador durante a pesquisa bem como as possíveis questões que ela poderá suscitar futuramente.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O caminho confrontado pela investigação desse trabalho, naturalmente, contribuiu para formação do pesquisador. Ora pela aprendizagem ao estudar possibilidades didáticas com os recursos tecnológicos de RA, ora pelo *design* de atividades para o estudo de funções de duas variáveis em termos de MM. Assim sendo, dados foram produzidos e analisados, ponderando-se suas características para tentar responder a pergunta diretriz da pesquisa. Expomos conjecturas, erros, incertezas e hipóteses ao longo desse estudo. Sentimos-nos atraídos pelas possibilidades da RA ao mesmo tempo em que nos dedicamos para compreender as funcionalidades do programa Blender para potencializar o desempenho dos recursos de RA. Resumimos a trajetória da nossa investigação, relacionando nossas considerações, através do quadro abaixo:

Quadro 2 – Relação entre o Referencial Teórico consultado e nossas considerações finais a respeito dos dados produzidos durante a pesquisa.

Referencial Teórico (RT) consultado	Considerações finais sobre os dados produzidos em relação ao RT consultado
Modelagem Matemática (CAPÍTULO 1, SEÇÃO 1)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Estimulou o licenciando/pesquisador a repensar em sua prática pedagógica durante a construção do <i>design</i> de suas próprias atividades (SKOSMOSE, 1994, 2000, 2001); ▪ Incentivou o licenciando/pesquisador a construir objetos virtuais que se assemelhassem a objetos mundanos; ▪ Contribuiu, com base no entendimento de Dalla Vecchia (2012), a desenvolver um processo de construção de um modelo que se refere e visa encaminhar um problema da dimensão abrangida pela RA (Atividade Final).
Tecnologias Digitais (CAPÍTULO 1, SEÇÃO 2)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ O licenciando/pesquisador observou como as TD se tornaram partícipes na produção de conhecimento matemático no que tange o estudo de funções de duas variáveis reais (ROSA, 2008); ▪ Manifestou no licenciando/pesquisador um movimento do ser-com-RA e pensar-com-RA análogo ao ser-com-TD e pensar-com-TD defendido por Rosa (2008). Isto é, o licenciando/pesquisador lançou-se no ambiente de RA em conjunto com os recursos tecnológicos necessários para exploração/investigação desse/nesse ambiente de RA; ▪ Influenciou o licenciando/pesquisador a considerar e a aprimorar sua própria Ciberformação (ROSA, 2008).
Realidade Aumentada (CAPÍTULO 1, SEÇÃO 3)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Contribuiu para que o licenciando/pesquisador percebesse (SEIDEL; ROSA, 2011) as superfícies geradas por funções de duas variáveis reais diferentemente de um gráfico desenhado em uma folha de papel; ▪ Possibilitou a articulação da noção de MM, defendida por Dalla Vecchia (2012), ao seu ambiente heterogêneo (virtual mais mundano).

Design Instrucional (CAPÍTULO 1, SEÇÃO 4)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Proporcionou reflexões quanto ao <i>design</i> das atividades construídas pelo licenciando/pesquisador (CAMPOS et. al., 1998); ▪ Instigou o licenciando/pesquisador a repensar em sua prática pedagógica de modo que ele buscasse refinar os objetivos pedagógicos e o <i>design</i> de suas próprias atividades (NUNES, 2011); ▪ Favoreceu para que o licenciando/pesquisador tentasse construir um <i>design</i> de atividades em hipermídias (CAMPOS; CAMPOS, 1997), direcionadas à investigação ou à descoberta dos significados matemáticos.
Percepção (CAPÍTULO 1, SEÇÃO 5)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Permitiu que o licenciando/pesquisador conectasse as ideias sobre percepção de Seidel e Rosa (2011) no contexto ou no ambiente da RA, sugerindo características qualitativamente distintas entre a percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) dos gráficos das funções de duas variáveis reais no ambiente mundano e no ambiente de RA.
Funções de Duas Variáveis Reais (CAPÍTULO 1, SEÇÃO 6)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Sustentou as argumentações matemáticas descritas nos dados produzidos ao longo da pesquisa (ANTON, 2000) (CHEN, 2008); ▪ Colaborou para que o licenciando/pesquisador compreendesse o comportamento do domínio das funções de duas variáveis no programa Blender (ANTON, 2000);

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, tivemos a sensação de que o vínculo da RA com aparelhos eletrônicos de interfaces hápticas (*smartphones* ou *tablets*, por exemplo) tornaram envolventes a exploração e a investigação dos objetos virtuais. Isso nos chama a atenção, pois, de fato, nossa sociedade, no mundo contemporâneo, tende a acompanhar o desenvolvimento das TD, modificando-se e reorganizando-se conforme a evolução tecnológica (DALLA VECCHIA, 2012). Assim, nos parece natural ser-com-RA e pensar-com-RA, uma vez que interagimos nesse ambiente da maneira semelhante às ponderações de Rosa (2008) ao tratar das ações e das interações no ciberespaço. Convencemos-nos ainda mais, na medida em que os autores Kirner e Siscoutto (2007) expressam suas opiniões sobre como a interface de RA requer gestos fáceis e naturais.

Compreendemos que o ensino e a aprendizagem de matemática podem se beneficiar das TD de RA. Acreditamos que a RA pode estabelecer significados possivelmente pertinentes para outros saberes matemáticos além do estudo de funções de duas variáveis. Imaginamos que esse recurso tecnológico pode ser aproveitado tanto para o estudo de geometria (euclidiana ou analítica) quanto para Equações Paramétricas (proposta didática identificada ao longo da pesquisa).

A pesquisa nos mostrou indicativos que o programa Blender, aliado ao aplicativo AndAR, pode nos ajudar a construir um *design* para atividades que trabalhem com a nossa

percepção (SEIDEL; ROSA, 2011) durante o próprio processo de construção das atividades. Por isso, entendemos que o *design* de atividades com tecnologias de Realidade Aumentada também pode favorecer a formação de futuros professores de matemática nos demais campos de abrangência dessa ciência.

Ainda, nos indagamos como a Heterogeneidade do Ambiente de RA (virtual mais mundano) pode ser explorada nesse ambiente de RA, uma vez que nos mantivemos concentrados em trabalhar apenas com algumas superfícies de funções de duas variáveis reais. Vislumbramos, a partir dessa observação, que podemos conduzir um processo de ensino e de aprendizagem envolvendo diversos saberes e significados matemáticos uma vez que estudamos funções de duas variáveis reais, relacionamos instrumentos tecnológicos para dimensionar objetos virtuais, plotamos pontos em um recurso computacional para gerar gráficos de funções e etc.

Em virtude da Percepção distinta à Realidade Mundana e a Heterogeneidade do Ambiente de RA (virtual mais mundano), entendemos que conseguimos conduzir a nossa investigação, procurando responder a pergunta diretriz de nossa pesquisa. Do mesmo modo, compreendemos que nosso objetivo em investigar possibilidades para a formação de futuros professores foi atingido, pois percebemos o longo caminho percorrido pelo licenciando/pesquisador desde aprender a utilizar as TD envolvidas no processo investigativo, como também a estudar os autores do Referencial Teórico para compreender as noções de MM, TD, *Design* Instrucional, Percepção e Realidade Aumentada até aprofundar seus conhecimentos matemáticos no estudo de Funções de Duas Variáveis Reais. O processo de autoanálise e autocrítica a respeito do *design* de suas próprias atividades (realizado pelo licenciando/pesquisador) nos sugere uma possibilidade para trilhar futuras pesquisas que contribuam para formação de professores de matemática, especialmente no quesito de uma Ciberformação (ROSA, 2008), uma vez que buscamos apresentar como os recursos de RA potencializam/transformam o *design* de atividades em termos de MM no estudo de funções duas variáveis reais.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte**. Trad. sob a direção de Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. Porto Alegre: Bookman, v. 2, 2000.
- AZUMA, R. T. A Survey of Augmented Reality. UNC Chapel Hill, In **Presence: Teleoperators and Virtual Environments**, 1997.
- BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática e os professores: a questão da formação**. Bolema, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001.
- BARBOSA, J. C. **Modelagem e modelos matemáticos na educação científica**. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, p. 69-85, 2009.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 2.ed. São Paulo: Contexto, 2004.
- BICUDO, M. A. V. **A formação do professor: um olhar fenomenológico**. In: BICUDO, M. V. (Org.). **Formação de Professores?** Bauru: EDUSC, 2003.
- BICUDO, M. A. V.; ROSA, M. **Realidade e cibernundo: horizontes filosóficos e educacionais antevistos**. Canoas: ULBRA, 2010.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Características da investigação qualitativa. In: **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto Editora, 1994.
- BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O. The Ideology of Certainty in Mathematics Education. **For the Learning of Mathematics**, v. 17, n. 3, p. 17-23, 1997. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/40248248>. Acesso em: 02 de mai. 2016.
- CAMPOS, F.; CAMPOS, G. H. B. de. Design Instrucional, novas tecnologias e desenvolvimento de software educacional. **Anais VIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**. São José dos Campos, 1997.
- CAMPOS, F.; ROCHA, A. R.; CAMPOS, G. H. B. de. Design instrucional e construtivismo: em busca de modelos para o desenvolvimento de software. In: **IV Congresso RIBIE**. 1998.
- CARDOSO, A.; LAMOUNIER JR., E. **Aplicações de RV e RA na Educação e Treinamento**. In: **Simpósio de Realidade Virtual e Aumentada**, Editora SBC – Sociedade Brasileira de Computação, Porto Alegre, 2009. Livro do pré-simpósio, XI Symposium on Virtual and Augmented Reality, Porto Alegre – RS, 2009.
- CEZAR, C.; PUNTEL, M. **Modelo conceitual de Mobile Marketing para Android com Realidade Aumentada**. Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), 2012.
- CHEN, W. W. L. **Análise Multivariável e Vetorial**. Universidade Macquarie, Sydney – Nova Gales do Sul, 2008. Disponível em: <https://rutherglen.science.mq.edu.au/~maths/Chen-notes/lmvafolder/lmva.html>. Acesso em: 11 de jul. 2016.
- DALLA VECCHIA, R. **A modelagem matemática e a realidade do mundo cibernético**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, UNESP, Rio Claro, 2012.
- DIAS, F. A. S. **Educação online e formação continuada de educadores: uma investigação em um curso para professores de matemática do Ensino Médio**.

- Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, UNIBAN, São Paulo, 2010.
- DOMHAN, T. Arquivo Google Code. **AndAR – Android Augmented Reality**, mar. 2010. Disponível em: <https://code.google.com/archive/p/andar/>. Acesso em: 17 mar. 2016.
- FILATRO, A. C.; PICONEZ, S. C. B. **Design instrucional contextualizado**. São Paulo: Senac, 2004.
- FILATRO, A. C. **Learning design como fundamentação teórico-prática para o design instrucional contextualizado**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2008.
- HEIDEGGER, M. **Ser e Tempo**. Petropolis: Vozes, 1988.
- KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**. Papirus editora, 2007.
- KIRNER, C.; SISCOOTTO, R. A. **Realidade Virtual e Aumentada: Conceitos, Projeto e Aplicações**. Editora SBC – Sociedade Brasileira de Computação, Porto Alegre, 2007. Livro do pré-simpósio, IX Symposium on Virtual and Augmented Reality, Petrópolis – RJ, 2007.
- KLEMN, W. R.; SNELL, J. R. **Integrating the World Wide Web and non-web information in computer conferencing**. In: Proceedings of the Thirteenth International Conference on Technology and Education. p. 49-51. 1996.
- NASCIMENTO, E. G. A. do. **Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola**. XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, ISSN, 2012.
- NUNES, J. de A. **Design instrucional na educação matemática: trajetória de um professor de matemática que elabora atividades sobre funções trigonométricas com a calculadora HP 50G**. Dissertação de Mestrado - ULBRA, Canoas, 2011.
- ORMELL, C. P. **Mathematics, applicable versus pure-and-applied**. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v. 3, n. 2, p. 125-131, 1972.
- PALACIOS, M. S.; CUNHA, R. **A taticidade em dispositivos móveis: primeiras reflexões e ensaio de tipologias//TACTILITY AND MOBILE DEVICES: FIRST APPROXIMATIONS AND A TYPOLOGY**. Contemporanea-Revista de Comunicação e Cultura, v. 10, n. 3, p. 668-685, 2012.
- PAPERT, S. **Logo: computadores e educação**. São Paulo: Brasiliense, 1985.
- PAPERT, S. **A Máquina das Crianças: Repensando a Escola na Era da Informática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.
- REINHARDT, A. **New Ways to Learn-As networking, multimedia, and better software converge, corporations and schools will be offering much-improved ways of learning**. BYTE-NEW HAMPSHIRE-, v. 20, p. 50-50, 1995.
- ROBERTO, R. A. ; TEIXEIRA, J. M.; LIMA, J. P.; SILVA, M. M. O.; ALBUQUERQUE, E. S.; ALVES, D. F. M.; TEICHRIEB, V.; KELNER, J. **Jogos Educacionais Baseados em Realidade Aumentada e Interfaces Tangíveis. Tendências e Técnicas em Realidade Virtual e Aumentada**, v. 1, p. 1-40, 2011.
- ROMISZOWISKI, A. J. **Designing Instrctional Systems**. Nichols Publishing Company. 1981.
- ROSA, M. **Role Playing Game Eletrônico: uma tecnologia lúdica para aprender e ensinar matemática**. Dissertação de Mestrado - ULBRA, Canoas, 2004.

ROSA, M. **A Construção de Identidades Online por meio do Role Playing Game: relações com o ensino e aprendizagem de matemática em um curso à distância.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP, Rio Claro, 2008.

ROSA, M. **Cyberformação de professores de matemática: recursos e processos tecnológicos.** In: Elsa Maria Mendes Pessoa Pullin; Neusi Aparecida Navas Berbel. (Org.). Pesquisa em Educação: inquietações e desafios. 1ed. Londrina-PR: Eduel, 2012, v. 1, p. 433-446.

ROSA, M. Cyberformação com Professores de Matemática: interconexões com experiências estéticas na cultura digital. In.: ROSA, M. BAIRRAL, M. A. AMARAL, R. B. **Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância: pesquisas contemporâneas.** Natal (RN): Editora da Física, 2015.

SANTIN, R. et. al. **Ações interativas em Ambientes de Realidade Aumentada com ARTollKit.** 2004.

SEIDEL, D. J.; ROSA, M. Cyberformação do Professor de Matemática: a percepção do outrem. In: **Conferência Interamericana de Educação Matemática.** 2011.

SKOVSMOSE, O. **Towards a critical mathematics education.** Educational studies in mathematics, v. 27, n. 1, p. 35-57, 1994.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação.** Bolema, 14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: a questão da democracia.** Papirus Editora, 2001.

SOUZA-CONCILLIO, I. de A. et al. O Uso de Dispositivos Móveis e Realidade Aumentada em Ambientes Virtuais de Ensino e Aprendizagem. **Tendências e Técnicas em Realidade Virtual e Aumentada,** Salvador, v. 4, p. 152-166, 2014.

APÊNDICE A – ATIVIDADE FINAL

Título: Vamos investigar alguns modelos virtuais em um ambiente de Realidade Aumentada?

Objetivos Pedagógicos:

- Exercitar a imaginação e a criatividade dos alunos com intuito de induzi-los a perceber como um modelo virtual, construído em um ambiente virtual e visualizado em um ambiente de Realidade Aumentada, possui uma relação matemática com alguns objetos mundanos;
- Mostrar exemplos de algumas funções de duas variáveis reais as quais descrevam gráficos que lembrem ou se assemelhem a objetos mundanos;
- Investigar o domínio e tentar identificar alguns pontos de algumas funções de duas variáveis reais em um ambiente misto, ou seja, em um ambiente de Realidade Mundana *plus* Realidade Virtual, a partir da análise de um modelo virtual visualizado sobre o *marker* de borda centimetrada;
- Indagar os alunos sobre como o ambiente de Realidade Aumentada pode nos ajudar a reconstruir um modelo mundano a partir do modelo virtual, visualizado no próprio ambiente de Realidade Aumentada;
- Plotar os pontos identificados com um recurso computacional, tentando esboçar um possível gráfico de uma função de duas variáveis reais para um modelo virtual visualizado a partir do ambiente de Realidade Aumentada;
- Investigar se os alunos conseguiram compreender o que foi feito no processo de plotagem dos pontos.

Orientações Iniciais:

- I. Para realização dessa atividade, é necessário um *smartphone* ou *tablet* com sistema operacional Android 5.0 ou superior. Além disso, você deverá instalar no seu aparelho os aplicativos *AndAR*, *AndAR Model Viewer* e *OI File Manager*, disponíveis na *Google Play Store*;

- II. Será necessário, da mesma forma, instalar o software *LAB Fit* em seu computador o qual está disponível para o sistema operacional Windows 7 ou superior através do link: http://zeus.df.ufcg.edu.br/labfit/download_p.htm. Acesso em: 24 de jun. 2016;
- III. Tenha em mãos uma régua ou um esquadro com escala em centímetros, pelo menos;
- IV. Copie os arquivos *Objeto1.obj/Objeto1.mtl*, *Objeto2.obj/Objeto2.mtl*, *Objeto3.obj/Objeto3.mtl* e *Objeto4.obj/Objeto4.mtl* (em anexo) para uma pasta do seu *smartphone* ou *tablet*;
- V. Imprima o *marker* de borda centimetrada (em anexo) para visualizar os modelos virtuais disponíveis nos arquivos copiados anteriormente;
- VI. Abra um dos arquivos (*Objeto1.obj* ou *Objeto2.obj* ou *Objeto3.obj* ou *Objeto4.obj*), salvos em uma pasta do aparelho, a partir do ícone do aplicativo, criado na tela do *smartphone* ou *tablet*: **AndAR Model Viewer** → **Selecione um arquivo de modelo**. Para acessar um dos arquivos, você perceberá que o aplicativo *OI File Manager* será aberto a partir dessa última opção selecionada. Assim, você deverá localizar um dos arquivos conforme a pasta em que estes foram salvos no aparelho;
- VII. Agora, observe o modelo virtual (escolhido a partir de um dos arquivos), utilizando os recursos do aplicativo *AndAR Model Viewer*, tais como ampliar ou reduzir o tamanho (deslize um dedo, convenientemente, sobre a tela do aparelho para perceber esse efeito). Utilize, também, o recurso rotação ou, se preferir, rotacione o *marker* impresso em sentido horário e/ou anti-horário para gerar um efeito semelhante. Igualmente, você pode se mover em torno do objeto, desde que você continue focando a câmera do aparelho para o centro do *marker* de borda centimetrada;
- VIII. Agora sim, você está pronto! Por isso, leia atentamente os itens abaixo para tentar respondê-los:

a) Observando o modelo virtual no ambiente de Realidade Aumentada, disponível em um dos arquivos com extensão “.obj”, você consegue verificar alguma semelhança ou referência do modelo virtual visualizado com algum objeto mundano? Tente citar alguns exemplos, descrevendo-os com suas palavras. **OBS.: Exercite sua imaginação!**

b) O modelo virtual, visualizado anteriormente, de fato, foi criado com um programa computacional de modelagem virtual 3-D. É verdade, também, que para construção desse modelo virtual foram utilizadas as superfícies descritas por funções de duas variáveis reais. Sabendo disso, pense que tipos de funções de duas variáveis reais podem descrever o modelo virtual visualizado no começo dessa atividade. Consulte a internet ou um livro para auxiliá-lo a responder essa pergunta.

c) Nesse item, vamos exercitar a noção de domínio de funções de duas variáveis reais. Analise e pratique a resolução dos subitens a seguir:

i. Observe o modelo virtual escolhido, utilizando a câmera do *smartphone* ou *tablet*, de modo que você ajuste o ângulo da câmera do aparelho perpendicularmente em relação ao *marker* de borda centimetrada. Ou seja, observe o modelo virtual escolhido de uma vista de cima, paralela ao plano do *marker* de borda centimetrada;

ii. A partir desse ponto de vista, localize o centro do *marker* de borda centimetrada e assumo-o como ponto de origem de um plano de coordenadas cartesianas xy . Nesse caso, considere como ponto de origem do plano formado pelo *marker* de borda centimetrada o ponto $P = (0, 0)$;

iii. Agora, tente registrar pares ordenados (x, y) , com suporte da borda centimetrada do *marker* e das tabelas (em anexo), os quais pertençam à imagem descrita pelo modelo virtual. Nesse caso, analise, individualmente, em partes cada um dos modelos virtuais, conforme o formato de cada um dos modelos virtuais (analise o comportamento das curvas das imagens de cada um dos modelos virtuais). Tente localizar, pelo menos, 20 pares ordenados (x, y) para cada uma das partes do modelo virtual. Observe a tabela abaixo relativa aos pontos de coordenadas (x, y) , elaborada para a parte alaranjada/amarelada do modelo virtual do arquivo *Objeto2.obj*:

1° (0, 0)	2° (4.5, 4.5)	3° (3, 4.5)	4° (1.5, 4.5)
5° (0, 4.5)	6° (-1.5, 4.5)	7° (-3, 4.5)	8° (-4.5, 4.5)
9° (-4.5, 3)	10° (-4.5, 1.5)	11° (-4.5, 0)	12° (-4.5, -1.5)
13° (-4.5, -3)	14° (-4.5, -4.5)	15° (-3, -4.5)	16° (-1.5, -4.5)
17° (0, -4.5)	18° (1.5, -4.5)	19° (3, -4.5)	20° (4.5, -4.5)

iv. Por fim, tente estimar, usando uma régua ou um esquadro com escala em centímetros, valores para a coordenada z (tomando como referência um eixo perpendicular ao plano cartesiano xy) a partir dos pares ordenados (x, y) registrados no subitem anterior. **OBS.: Sinta-se à vontade para escolher outro ponto como origem (subitem ii) ou para registrar novos pares ordenados (x, y) (subitem iii), caso você tenha muita dificuldade em estimar um valor para coordenada z .**

Observe a tabela abaixo relativa aos pontos de coordenadas (x, y, z) , elaborada para a parte alaranjada/amarelada do modelo virtual do arquivo *Objeto2.obj*:

1° (0, 0, 0)	2° (4.5, 4.5, 3)	3° (3, 4.5, 3)	4° (1.5, 4.5, 3)
5° (0, 4.5, 3)	6° (-1.5, 4.5, 3)	7° (-3, 4.5, 3)	8° (-4.5, 4.5, 3)
9° (-4.5, 3, 3)	10° (-4.5, 1.5, 3)	11° (-4.5, 0, 3)	12° (-4.5, -1.5, 3)
13° (-4.5, -3, 3)	14° (-4.5, -4.5, 3)	15° (-3, -4.5, 3)	16° (-1.5, -4.5, 3)
17° (0, -4.5, 3)	18° (1.5, -4.5, 3)	19° (3, -4.5, 3)	20° (4.5, -4.5, 3)

Pergunta: Você sabe interpretar, matematicamente, esses pontos que estamos localizando no modelo virtual? Você percebeu que, em virtude do ambiente de Realidade Aumentada, conseguimos localizar pontos significativos do modelo virtual, de modo que teríamos uma noção inicial de como reconstruí-lo materialmente, ou seja, de como poderíamos construir um modelo mundano dele a partir dos registros anteriores? Pense nos fatos mencionados e escreva suas considerações a respeito dos mesmos.

d) Se você conseguiu acompanhar e desenvolver todos os itens até o momento, você terá condições de esboçar as leis de formação das funções de duas variáveis reais que

constituem o modelo virtual estudado nessa atividade. Para isso, observe e analise os subitens abaixo:

i. Abra o programa *LAB Fit* e na tela inicial clique em *New* → ***Number of independent variables: 2*** → *Ok*.

ii. O *LAB Fit* utiliza *X1* e *X2* como variáveis independentes e *Y* como variável dependente. Por isso, escolha *X1*, por conveniência, para preencher os campos em branco, dessa nova janela, como sendo a coordenada *x* dos pares ordenados encontrados para cada um dos pontos de uma parte do modelo virtual (conforme seus registros do **item c, subitem iii**). Clique em *Ok* e repita o mesmo procedimento para as duas próximas janelas, preenchendo os campos em branco com os valores encontrados para as coordenadas *y* e *z*, respectivamente;

iii. Você deverá escolher um nome para salvar seus registros como um arquivo de dados e clicar em *Ok*;

iv. Clique no botão *User* e escreva uma das seguintes sentenças matemáticas no campo “*Y =*” (observe a sintaxe utilizada pelo programa para digitar uma das sentenças abaixo):

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot \cos\left(\frac{X1}{B}\right) \cdot \cos\left(\frac{X2}{B}\right) + C \\ A \cdot (X1)^2 + B \cdot (X2)^2 + C \\ A \cdot (X1)^6 + B \cdot (X2)^6 + C \end{array} \right.$$

Lembre-se de digitar **3** no campo “*Number of parameters:*” dessa mesma janela;

v. Clique em *Ok* → *Ok* → *Fit* → *Ok* → *Ok* → *Cancel*;

vi. Após efetuar as operações do **subitem v**, você estará visualizando, provavelmente, uma janela com o gráfico de uma superfície semelhante à parte do modelo virtual escolhido para plotagem dos pontos que você havia registrado. Caso isso não tenha acontecido, repita o processo do **item d** desde o começo, mas selecione outra sentença matemática no **subitem iv**.

Pergunta: Descreva, com suas palavras, o papel dos parâmetros ***A***, ***B*** e ***C*** nas sentenças do **subitem iv**. Da mesma forma, tente descrever o que o programa *LAB Fit* encontrou com os seus registros juntamente com uma das sentenças que você

digitou na janela do programa ao efetuar o procedimento do **subitem iv**. Você conseguiu compreender o que aconteceu? Justifique sua resposta.

APÊNDICE B – TABELAS PARA REGISTO DE PONTOS

1°	2°	3°	4°
5°	6°	7°	8°
9°	10°	11°	12°
13°	14°	15°	16°
17°	18°	19°	20°

1°	2°	3°	4°
5°	6°	7°	8°
9°	10°	11°	12°
13°	14°	15°	16°
17°	18°	19°	20°

1°	2°	3°	4°
5°	6°	7°	8°
9°	10°	11°	12°
13°	14°	15°	16°
17°	18°	19°	20°

1°	2°	3°	4°
5°	6°	7°	8°
9°	10°	11°	12°
13°	14°	15°	16°
17°	18°	19°	20°

APÊNDICE C – *MARKER* COM BORDA CENTIMETRADA

