

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

JENNY CAROLINA CÁRDENAS AYALA

**ESTIMAÇÃO DA ESTRUTURA A PRAZO DA CURVA DE RENDIMENTOS PARA
COLÔMBIA: APLICAÇÃO EMPÍRICA COM ANÁLISE DE ESPECTRO
SINGULAR**

Porto Alegre

2016

JENNY CAROLINA CÁRDENAS AYALA

**ESTIMAÇÃO DA ESTRUTURA A PRAZO DA CURVA DE RENDIMENTOS PARA
COLÔMBIA: APLICAÇÃO EMPÍRICA COM ANÁLISE DE ESPECTRO
SINGULAR**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. João Frois Caldeira

Co-orientador: Prof. Dr. Hudson Da Silva Torrent

Porto Alegre

2016

CIP - Catalogação na Publicação

Cárdenas Ayala, Jenny Carolina

Estimação da estrutura a prazo da curva de rendimentos para Colômbia: aplicação empírica com análise de espectro singular / Jenny Carolina Cárdenas Ayala. -- 2016.

44 f.

Orientador: João Frois Caldeira.

Coorientador: Hudson da Silva Torrent.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, BR-RS, 2016.

1. Estrutura a termo da taxa de juros. 2. Análise Spectral Singular. 3. Random Walk. I. Caldeira, João Frois, orient. II. Torrent, Hudson da Silva, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

JENNY CAROLINA CÁRDENAS AYALA

**ESTIMAÇÃO DA ESTRUTURA A PRAZO DA CURVA DE RENDIMENTOS PARA
COLÔMBIA: APLICAÇÃO EMPÍRICA COM ANÁLISE DE ESPECTRO
SINGULAR**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Aprovada em: Porto Alegre, 24 de maio de 2016.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. João Frois Caldeira – Orientador
UFRGS

Prof. Dr. Hudson Da Silva Torrent - Co-orientador
UFRGS

Prof. Dr. André Alves Portela Santos
UFSC

Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal
UFRGS

Prof. Dr. Tiago Wickstrom Alves
UNISINOS

AGRADECIMENTOS

Dou graças a minha família pelo apoio e compreensão durante a vigência dos estudos do mestrado.

Agradeço especialmente aos meus professores Dr. João Caldeira e Dr. Hudson Torrent por toda sua ajuda e disposição no desenvolvimento desta pesquisa.

Finalmente, agradeço à secretaria do programa de pós-graduação em economia pela orientação e aos professores do PPGE, por os conhecimentos adquiridos.

RESUMO

A estimação da estrutura da taxa de juros é relevante por duas razões fundamentais: em primeiro lugar é considerado como um indicador antecipado de política, sendo uma das principais ferramentas para os bancos centrais como instrumento de política monetária; em segundo lugar, através da curva de rendimentos é possível fazer valoração de ativos financeiros. A causa da sua relevância, tanto na área macroeconômica e como no campo financeiro, uma ampla literatura dedicada a estimá-la se desenvolveu. Neste sentido, o objetivo deste documento é a previsão da curva de rendimentos da Colômbia através da metodologia de *Spectrum Singular Analysis* (SSA) durante o período 2006-2014. Para a previsão são usados parâmetros diários estimados pelo modelo de fatores de Nelson e Siegel (1987). Os resultados indicam ganhos na acurácia preditiva fora da amostra da abordagem de MSSA em relação ao modelo Random Walk e outros benchmarks amplamente usados na literatura, principalmente nos horizontes de previsão mais curtos. Os resultados são estatisticamente significantes. Assim mesmo, observe-se que o MSSA se ajusta melhor que os modelos competidores em todos os horizontes para as previsões das menores maturidades.

Palavras-chaves: Estrutura a termo da taxa de juros. Análise Spectral Singular. Random Walk.

Classificação JEL: C53, E43, G17

ABSTRACT

The estimation of the Yield curve is relevant because of two fundamental reasons: firstly, it is considered an anticipated indicator of economic policies, being one of the principal central banks tools as instrument of monetary policy; secondly, through this estimation it is possible to value financial assets. Due to its relevance in the macroeconomics area and the financial field, an extensive literature has been dedicated to its estimation. Concerning that, the goal of this document is to get a prediction of Colombia's yield curve through the *Spectrum Singular Analysis* (SSA) from 2006 to 2014. Daily estimated parameters by Nelson and Siegel (1987) factors model are used to obtain the prognostication. Results are statistically significant and indicate gains of the MMSA on the accuracy of previsions out of the sample in relation to the Random Walk competitor model and other benchmarks widely used in literature, mainly on short term previsions. Likewise, we observe that the MSSA method is better adjusted than competitors' models in all the horizons for the previsions where maturity is lower.

Keywords: Term structure of interest rates. Singular spectrum analysis. Random Walk.

RESUMEN

La estimación de la curva de rendimientos es relevante por dos razones fundamentales: en primer lugar es considerado como un indicador anticipado de política económica, siendo una de las principales herramientas para los bancos centrales como instrumento de política monetaria; en segundo lugar, a través de esta es posible realizar valoración de activos financieros. Dada su relevancia tanto en el área macroeconómica como en el campo financiero una amplia literatura ha sido dedicada a su estimación. En este sentido, el objetivo de este documento es la previsión de la curva de rendimientos de Colombia a través de la metodología de *Spectrum Singular Analysis* (SSA) durante noviembre de 2006 a diciembre de 2014. Para su pronóstico son usados los parámetros diarios estimados por el modelo de factores de Nelson e Siegel (1987). Los resultados son estadísticamente significativos e indican ganancias del método MSSA en la precisión de las previsiones fuera de la muestra principalmente en horizontes de previsión más cortos en relación al Random Walk y otros benchmarks ampliamente usados en la literatura. Así mismo, se observa que el método MSSA se ajusta mejor que los modelos competidores en todos los horizontes para las previsiones donde el vencimiento es menor.

Palabras claves: Curva de rendimientos. Spectrum Singular Analysis. Random Walk.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.4.1. Estructura temporal de la tasa de interés.....	26
Figura 2.5.1. <i>Cross Validation</i> - selección de L	28
Figura 2.5.2. Valores Singulares	29
Figura 2.5.3. Pares de Autovectores y Autovectores.....	29
Figura 2.5.4. Matriz W correlación	30
Figura 1.6.1. CSFE MSSA, DNSAR(1), DNSVAR(1) / RW, h=1.	35
Figura 1.6.2. CSFE MSSA, DNSAR(1), DNSVAR(1) / RW, h=5	36
Figura 1.6.3. CSFE MSSA, DNSAR(1), DNSVAR(1) / RW, h=21	37

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.4.1. Estadísticas descriptivas	27
Tabela 2.6.1 RMSE MSSA / RW	31
Tabela 2.6.2. RMSE AR(1) / RW.....	31
Tabela 2.6.3.RMSE VAR(1) / RW.....	31
Tabela 2.6.4.RMSE DNS-AR(1) / RW	32
Tabela 2.6.5.RMSE DNS-VAR(1) / RW	32

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	ESTIMACIÓN DE LA CURVA DE RENDIMIENTOS PARA COLOMBIA: APLICACIÓN EMPÍRICA CON ANÁLISIS DE ESPECTRO SINGULAR ..	12
2.1	INTRODUCCIÓN.....	13
2.2.1	Modelo de factores de Nelson y Siegel (1987)	16
2.3	METODOLOGÍA	18
2.3.1	Análisis de Espectro Singular.....	18
2.3.2	Previsión con SSA.....	20
2.3.3	Modelos Competidores RW, AR (1), VAR(1) y DNS.....	21
2.4	DATOS.....	25
2.6	RESULTADOS	30
2.7	CONCLUSIONES.....	37
	REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

O estudo da curva de rendimentos encontra-se associado a decisões de política econômica, dada sua capacidade de prever as expectativas de inflação, taxas de juro, atividade econômica e o déficit fiscal (AROSEMENA; ARANGO, 2002). Além disso, na área financeira é amplamente utilizado para a avaliação de ativos (ARANGO; MELO; VAZQUEZ, 2002).

A curva de rendimento é considerada como a representação gráfica da relação entre os retornos de um ativo e sua maturidade para um determinado momento no tempo. Normalmente, para seu cálculo são utilizados títulos zero cupom emitidos pelo governo nacional, pois este tipo de título executa um único pagamento no final da maturidade.

Na Colômbia, as primeiras estimativas da curva de juros foram desenvolvidas por Arango, Melo e Vasquez (2002), Vasquez e Melo Velandia (2002) Julio, Mera e Revéz Héroult (2002), nas quais foram adotados métodos como o modelo de fatores de Nelson e Siegel (1987), splines cúbicos de McCulloch (1971) e B-splines cúbicos suavizados.

Outros métodos utilizados para estimar a estrutura a termo das taxas de juros na Colômbia são modelos univariados (RESTREPO TOBÓN; BOTERO RAMÍREZ, 2008; HERRERA CARDONA; CARDENAS GIRALDO; SALCEDO GARCÍA, 2011), a metodologia de Svensson (1994), polinômios componentes principais, regressão Kernel, super suavizador de Friedman e redes neurais (SANTANA, 2008).

No entanto, na Colômbia, as principais investigações são centradas na estimação da estrutura temporal da taxa de juros, sendo escassa a literatura focada em previsão da curva de rendimentos. Ainda assim, encontrou-se que autores como Maldonado Castaño, Zapata Rueda, Pantoja Robayo (2012) realizam a estimativa dinâmica da curva de rendimentos, inspirando-se no modelo de Diebold e Li (2006). Os autores utilizam o modelo de filtro de Kalman para fazer previsões, pois ele é eficiente com a correção do erro padrão. São obtidas estimativas bastante ajustadas para a previsão um passo à frente, em parte porque a previsão consegue capturar as tendências da série.

Em consonância, o objetivo deste trabalho é obter a previsão da curva de rendimentos da Colômbia através da metodologia de *Spectrum Singular Analysis* (SSA) durante o período

2006-2014. Para a previsão são usados parâmetros diários estimados pelo modelo de fatores de Nelson e Siegel (1987).

A metodologia SSA foi selecionada nesta investigação, pois tem sido encontrado que produz estimativas e previsões mais precisas em relação a outros métodos (HASSANI, 2007; HASSANI; HERAVI; ZHIGLJAVSKY, 2009; HASSANI SOOFI; ZHIGLJAVSKY, 2010). O SSA pode ser usado para a análise e previsão de séries de tempo. Para fazer isso, esta metodologia decompõe a série de tempo original em pequenos grupos de subseries, que podem ser identificadas como uma tendência, componente periódica ou ruído. Este método também pode ser usado para modelar e fazer previsão de séries estacionárias e não-estacionárias.

Por outro lado, na economia, a metodologia SSA tem sido utilizado principalmente para a análise de causalidade, co-integração, modelagem de volatilidade e previsão. No entanto, não se tem encontrado literatura que estime previsões para a curva de rendimentos com a metodologia SSA. Ainda assim, o SSA tem sido usado para previsão de séries econômicas por autores como Hassani e Zhigljavsky (2009), os quais encontram bom ajuste do SSA para pequenas amostras. Por sua vez, Hassani, Heravi e Zhigljavsky (2009) encontram estimativas mais precisas do SSA para horizontes mais longos, em relação aos modelos ARIMA e Holt-Winters. Finalmente, Hassani, Soofi e Zhigljavsky (2010) constatam que, ao fazer a previsão da taxa de cambio da libra em relação ao dólar americano as estimativas do modelo de correção de erro (VEC) são inferiores que as de o SSA.

Este trabalho é composto de duas seções além desta introdução a qual procura explicar a importância do estudo curva de rendimentos. Em seguida, é apresentado o artigo: Estimação da Estrutura a Prazo da Curva de Rendimentos para Colômbia: aplicação empírica com análise de espectro singular. Finalmente são encontradas as conclusões do documento

2 ESTIMACIÓN DE LA CURVA DE RENDIMIENTOS PARA COLOMBIA: APLICACIÓN EMPÍRICA CON ANÁLISIS DE ESPECTRO SINGULAR

João Frois Caldeira¹, Jenny Cárdenas Ayala², Hudson da Silva Torrent³

RESUMO

Obter previsões acuradas da curva de juros para um continuum de maturidades é de fundamental importância em economia e finanças. Neste estudo, considera-se o problema da previsão da estrutura a termo de taxas de juros para a economia da Colômbia usando a metodologia de Análise Spectral Singular. Os resultados indicam ganhos na acurácia preditiva fora da amostra da abordagem SSA relativamente ao modelo Random Walk e outros benchmarks amplamente usados na literatura, principalmente nos horizontes de previsão mais curtos. Os resultados são estatisticamente significantes.

Palavras-chaves: Estrutura a termo da taxa de juros. Análise Spectral Singular. Random Walk.

Classificação JEL: C53, E43, G17

ABSTRACT

Get accurate forecasts of the continuous maturity yield curve is of fundamental importance in the economy and finance. In this study, we consider the problem of forecasting the term structure of the interest rate for the economy of Colombia using Singular spectral analysis methodology. The results indicate gains on the accuracy of prediction out of the sample with the SSA approach in relation to the random walk model and other benchmarks widely used in literature, especially in the shorter forecast horizons. The results are statistically significant.

Keywords: Term structure of interest rates. Singular spectrum analysis. Random Walk.

¹ Professor departamento de economia- Programa de Pós-Graduação em Economia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

² Mestranda em Economia Aplicada - Programa de Pós-Graduação em Economia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

³ Professor departamento de Estatística- Programa de Pós-Graduação em Economia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

RESUMEN

Obtener previsiones precisas de la estructura a plazos de la tasa de interés es de fundamental importancia en economía y finanzas. En este estudio, es considerado el problema de previsión de la estructura temporal de la tasa de interés para la economía colombiana, usando el método análisis de espectro singular. Los resultados son estadísticamente significativos e indican ganancias en los pronósticos fuera de la muestra del abordaje de SSA relativamente al modelo Random Walk y otros benchmarks utilizados en la literatura, especialmente en horizontes cortos de previsión.

Palabras claves: Estructura a término de la tasa de interés. Análisis de espectro singular. Random Walk.

2.1 INTRODUCCIÓN

La estimación de la estructura a término de la tasa de interés es relevante por dos razones fundamentales: en primer lugar, por la información económica que contiene, pues la estructura a término de la tasa de interés es una de las principales herramientas de política monetaria para los bancos centrales; en segundo lugar, a través de ésta es posible realizar valoración de activos, siendo fundamental para analistas financieros. De esta forma, por medio de la curva de rendimientos, pueden medirse los retornos de instrumentos libres de riesgo, independientemente de su periodo de vencimiento. Así, dada su relevancia tanto en el área macroeconómica como en el campo financiero, una amplia literatura se ha dedicado a estudiarla

Dentro de las investigaciones enfocadas en la estructura temporal de la tasa de interés se destacan los siguientes modelos: modelos de no arbitraje, modelos de equilibrio y modelo estadísticos no paramétricos. Los primeros modelos utilizados son aquellos que cumplen con la hipótesis de no arbitraje y poseen un único factor, normalmente son derivados en tiempo continuo (ALFARO; BECERRA; SAGNER, 2011). El foco de esos modelos recae sobre la idea del ajuste perfecto de la estructura temporal en un tiempo determinado, garantizando la no existencia de arbitraje, hecho importante para la fijación de precios de derivados (CALDEIRA; MOURA; PORTUGAL, 2010).

A pesar de las ventajas de los modelos anteriormente descritos, surgió una preferencia por modelos menos restrictos, por ejemplo: el modelo de tres factores de Nelson y Siegel (1987) –factores que fueron reinterpretados por Diebold y Li (2006) como nivel, inclinación y curvatura-. A su vez, Svensson (1994) incluye un cuarto factor que corresponde a una segunda curvatura, posibilitando mayor flexibilidad del modelo. La preferencia por el modelo de Nelson y Siegel (1987), se debe a su buen rendimiento empírico y a su simplicidad (ALFARO, 2009; MALDONADO CASTAÑO; ZAPATA RUEDA; PANTOJA ROBAYO, 2012).

Considerando que la estructura temporal de la tasa de interés tiene importancia por permitir prever movimientos futuros, el objetivo de este trabajo es realizar previsión de la curva de rendimientos de Colombia a través de la metodología de *Spectrum Singular Analysis* (SSA), durante el periodo de noviembre de 2006 hasta diciembre del 2014. Para el pronóstico son usados los parámetros estimados mediante el modelo de factores de Nelson y Siegel (1987).

La metodología de SSA puede ser utilizada para el análisis y previsión de series de tiempo. Para ello, esta metodología descompone la serie de tiempo original en grupos pequeños de subseries, que pueden ser identificados como tendencia, componente periódico o ruido. De esta manera, es posible reconstruir la serie original sin la presencia de ruido (HASSANI, 2007). La metodología SSA fue escogida en este trabajo, pues se ha encontrado que genera estimaciones y previsiones más precisas en relación a otros métodos (HASSANI, 2007, HASSANI; HERAVI; ZHIGLJAVSKY, 2009; HASSANI; SOOFI; ZHIGLJAVSKY, 2010). Este método puede ser usado para el modelaje y previsión de series estacionarias y no estacionarias, teniendo en cuenta el comportamiento volátil y no estacionario de la curva de rendimientos, la SSA podría ser adecuada para capturar la forma de los datos.

Como resultados de esta investigación, se encuentra que para la curva de rendimientos de Colombia, la previsión un paso adelante es bastante acertada. Además de eso se encontraron buenos pronósticos del modelo SSA multivariado, principalmente vencimientos pequeños. Se destaca también que las previsiones de MSSA se ajustaron muy bien para finales de 2011. En comparación con el modelo competidor RW, se puede concluir que el MSSA genera previsiones más precisas para la curva de interés colombiana. Sin embargo, para las primeras observaciones pronosticadas se exhibe un mejor desempeño en el acumulado del modelo RW. Por otro lado, se percibe que los modelos AR(1), VAR(1), DNS-

AR(1) y DNS-VAR(1) no consiguen tener mejor desempeño que el RW, para horizontes de 1 día.

Este documento está compuesto de 6 secciones. En primer lugar, se encuentra una breve introducción que intenta explicar la importancia del estudio de la estructura a término de la tasa de interés. En seguida es presentado el marco teórico sobre la estimación de la de la curva de rendimientos. Después es expuesta la metodología usada en esta investigación para realizar previsión de la estructura temporal de la tasa de interés, a su vez, son explicados los modelos competidores con los cuales son comparados los resultados de MSA. Posteriormente, se presenta la descripción de los datos y el procedimiento de diagnóstico de SSA. El documento finaliza con el análisis de los resultados y las conclusiones.

2.2 MARCO TEÓRICO: ESTRUCTURA TEMPORAL DE LA TASA DE INTERÉS

La estructura temporal de la tasa de interés evidencia la relación entre los rendimientos de un activo y su plazo de vencimiento para un momento de tiempo específico, su representación gráfica es conocida como curva de rendimientos. Estimaciones precisas de la curva de rendimientos son fundamentales, en parte por la información económica que esta contiene, pues es considerada como un instrumento de eficacia de política monetaria, la cual permite anticipar expectativas en términos de inflación, tasa de interés y actividad económica (FAMA, 1990; AROSEMENA; ARANGO, 2002; DIEBOLD; RUDEBUSCH; ARUOBA, 2006; AGUDELO RUEDA; ARANGO ARANGO, 2008). Por otro lado, en el área de finanzas la estructura temporal de la tasa de interés es una herramienta usada para la valoración de activos, análisis de carteras, entre otros (PÉREZ RODRÍGUEZ; BORREL VÍDAL; TORRA PORRAS, 2002).

Para la estimación de la estructura temporal de los tipos de interés son usados los bonos de renta fija, pues son considerados como inversiones libres de riesgo. De esta forma, a través de la curva de rendimientos es posible medir los retornos de estos títulos independientemente de su periodo de maduración. No obstante, es necesario que los bonos usados sean homogéneos, esto es, que coincidan en términos de liquidez, riesgo y características impositivas (AROSEMENA; ARANGO, 2002).

Existen dos tipos de títulos de renta fija, los bonos con cupón y aquellos denominados bonos cero cupón. Estos últimos son emitidos con diferentes tipos de vencimientos y son utilizados para la estimación teórica de la curva de rendimientos, puesto que no incluyen el pago de intereses intermedios. Por consiguiente, el emisor del bono cero cupón efectúa un solo pago al final de su vida útil, el cual es llamado valor fácil o nominal.

Dentro de la literatura se han propuesto varios métodos para la estimación de la estructura de la tasa de interés, las primeras investigaciones son atribuidas a Guthmann (1929), posteriormente es reconocido el trabajo de Durand (1942) donde son usados métodos de representación gráficos de la curva de rendimientos. Los primeros planteamientos en términos econométricos son los sugeridos por McCulloch (1971) y (1975) que propone la estimación por medio de splines polinómicos, técnica que permite buen ajuste y flexibilidad (RUIZ DOTRAS, 2005; FERNÁNDEZ PÉREZ, 2012). Una alternativa a esta metodología es la propuesta por Vasicek y Fong (1982) donde son usados splines exponenciales para el cálculo de la curva de rendimientos. Más adelante Steeley (1991) implementa B-Splines.

Además son de relevancia otros modelos paramétricos como Nelson y Siegel (1987), Svensson (1994), Björk y Christensen (1999) y Diebol y Li (2006). Estos últimos son conocidos también como modelos de factores y se ha encontrado que proporcionan un buen ajuste. En este artículo es realizado pronóstico de la curva de rendimientos estimada con el modelo de factores de Nelson e Siegel (1987). Las previsiones son realizadas con el método SSA y los resultados son contrastados con algunas otras metodologías usadas en la literatura. A continuación son descritos el modelo de factores de Nelson y Siegel (1987) y la metodología SSA.

2.2.1 Modelo de factores de Nelson y Siegel (1987)

El trabajo propuesto por Nelson y Siegel (1987) plantea un modelo de factores en tiempo continuo, con el fin de estimar la estructura temporal de la tasa de interés para los bonos de Estados Unidos. De tal modo su objetivo se centra en calcular la evolución de la tasa forward instantánea. Entre las ventajas de este método se destaca su parsimonia, haciendo posible que solo un número pequeño de parámetros consiga caracterizar la curva (ALFARO, 2009), así mismo, una de las particularidades que lo ha caracterizado como uno de los modelos más populares es su simplicidad.

Los autores consideran que la tasa forward instantánea al vencimiento m , denotada como $r(m)$, es dada por la solución a una ecuación diferencial de segundo orden con raíces reales iguales, considere:

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \cdot \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right) \quad (1)$$

Donde, β_0 , β_1 y β_2 son los parámetros a ser estimados, τ_1 y τ_2 son constantes de tiempo asociadas con la ecuación y determinadas por las condiciones iniciales. Luego, la curva de rendimiento $R(m)$ es obtenida como el promedio de los tipos de tasa Forward, esto es:

$$R(m) = \frac{1}{m} \int_0^m r(x) dx \quad (2)$$

Así, una vez obtenida la solución a la ecuación (1), tenemos:

$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \exp\left(-\frac{m}{\tau}\right) + \beta_2 \left[\left(\frac{m}{\tau}\right) \cdot \exp\left(-\frac{m}{\tau}\right)\right] \quad (3)$$

De acuerdo a (3) puede observarse que la curva de rendimiento de Nelson y Siegel (1987), corresponde a una curva de descuento que comienza en uno en la madurez cero y se aproxima a cero a medida que el vencimiento tiende a infinito, tal y como es argumentado por Diebold y Li (2006). Con base en esto es posible estimar la curva de rendimientos al vencimiento, al integrar la ecuación (3).

$$R(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot \left[1 - \frac{\exp\left(-\frac{m}{\tau}\right)}{\left(\frac{m}{\tau}\right)}\right] - \beta_2 \cdot \exp\left(-\frac{m}{\tau}\right) \quad (4)$$

Por tanto, los componentes de la tasa de interés a plazos pueden ser interpretados siendo: β_0 la tasa de largo plazo, de manera que se refiere a la tasa cuando el vencimiento del título tiende a infinito. A su vez, β_1 señala la tasa de corto plazo, pues su función asociada comienza en 1 y decae monotonamente hasta cero, presentando la descomposición más rápida de todas las funciones del modelo. β_2 se asocia con el mediano plazo e indica la forma que sigue la curva, es decir, si éste parámetro es positivo la curva evidencia una joroba, por el contrario si su signo es negativo, la curva presentara una U. Finalmente, τ al ser constante en el tiempo es positivo e indica la convergencia en el tiempo de la curva de corto plazo a la de largo plazo. No obstante, como señalan

Diebold e Li (2006), los parámetros del modelo de Nelson y Siegel (1987) también pueden ser reinterpretados como factores de nivel, inclinación y curvatura.

2.3 METODOLOGÍA

En esta sección es explicada la metodología de Análisis de Espectro Singular y su aplicación para el pronóstico de la estructura de la tasa de interés a plazos. Igualmente, son presentados los modelos competidores Random Walk, AR (1) y VAR(1) y Diebold e Li (2006).

2.3.1 Análisis de Espectro Singular

El análisis de espectro singular es una técnica no paramétrica usada para el análisis de series temporales, siendo especialmente útil para modelar la dependencia entre las observaciones de la serie y para el pronóstico de series con componentes estacionales. Una de las ventajas de este método es que funciona bien incluso para muestras con tamaños pequeños.

La SSA tiene por objetivo descomponer la serie original en una suma de subseries, donde no es necesaria la presencia de información a priori sobre la estructura de la serie (GOLYANDINA; KOROBENNIKOV, 2014). Siendo posible realizar identificación, de tendencias, componentes cíclicos y ruidos aperiódico (ALONSO SANCHEZ, 2005).

Descripción de SSA

Considere una serie de tiempo $y_t = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ de longitud N . Sea

- L un número entero denominado longitud de la ventana “window length” tal que $1 \leq L \leq N$,
- K es el número de subseries rezagadas en el tiempo, el cual puede ser definido como $K = N - L + 1$.

El algoritmo SSA consta de dos etapas: la primera de ellas es la descomposición de la serie y la segunda reconstrucción de la serie original sin componentes de ruido. Esta última es

usada para realizar previsión. Cada una de las etapas es conformada por dos pasos, *Embadding*, descomposición del valor singular (SVD), *Grouping* y *Diagonal Averaging*, respectivamente.

El primer paso denominado *Embadding* consiste en mapear la serie de tiempo original en una secuencia de vectores retardados de tamaño L , o en otras palabras, dentro de una serie multidimensional $X = X_1, \dots, X_K$, con vectores $X = (y_i, \dots, y_{i+L-1})^T$, donde K es definido como $K = N - L + 1$. Por su parte, X_i se conoce como vectores rezagados (*L-lagged*). Con base en lo anterior, es posible construir la matriz de trayectoria $X = (f_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = [X_1: \dots: X_K]$.

El siguiente paso es conocido como descomposición del valor singular (SVD), considere $S = XX^T$. Por medio de la descomposición de XX^T pueden ser obtenidos los autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ y los autovectores correspondientes U_1, U_2, \dots, U_L . Con base en esto es posible construir el vector $V_i = \frac{X^T U_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ $i = 1, \dots, d$, donde d es el número de valores propios distintos de cero de XX^T ($d \leq L$).

Así, la SVD de la matriz de trayectoria puede escribirse como:

$$X = E_1 + \dots + E_d$$

Donde $E_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ $i = 1, \dots, d$

Por tanto, en este paso es realizada la descomposición de la matriz singular X en una suma de matrices elementares $\sum_1^d E_i$. Este hecho indica que el peso de las primeras matrices elementares a la matriz de trayectoria X , es mayor en relación a las ultimas que representan el ruido.

Para reconstruir la serie original primero es realizado un agrupamiento. Este paso corresponde a la división de los matrices elementales E_i en varios grupos, donde serán sumadas las matrices de cada grupo. Estableciendo $I = i_1, \dots, i_p$, la matriz X_I correspondiente al grupo I es definida como $X_I = E_{I1} + \dots + E_{Ip}$. La descomposición de los subíndices $j = 1, \dots, d$ de las matrices elementares en los subconjuntos disyuntos $I = i_1, \dots, i_m$, corresponde a la representación de la matriz de trayectoria como la suma de las matrices resultantes:

$$X = E_{I1} + \dots + E_{Im}$$

El procedimiento de elección de conjuntos I_1, \dots, I_m , es conocido como agrupamiento de eigentriples. Por tanto, como indica Alonso Sánchez (2005) este paso consiste en aproximar la matriz de trayectoria por la suma de las r primeras matrices elementales que representan la tendencia de la señal observada.

Finalmente, el último paso consiste en transformar cada matriz X_I , en un componente aditivo de la serie de tiempo inicial. Así aplicando el promedio de la diagonal de la matriz $X = E_{I_1} + \dots + E_{I_m}$, o también conocido como procedimiento de Hankelización, se obtiene

$$\tilde{X} = \tilde{E}_{I_1} + \dots + \tilde{E}_{I_m}$$

Esto es equivalente a la descomposición de la serie inicial en una suma de series m . Luego las matrices resultantes son transformadas en varias series de tiempo reconstruidas de longitud N .

2.3.2 Previsión con SSA

El método SSA, permite realizar previsiones para los componentes individuales de la serie, o para esta reconstruida. El algoritmo de previsión SSA, puede ser aplicado a las series que satisfacen aproximadamente las fórmulas de recurrencia lineal, es decir se cumple que:

$$y_{i+d} = \sum_{k=1}^d \alpha_k y_{i+d-k}, \quad 1 \leq i \leq N-d \quad (5)$$

Donde y_i satisface recurrencia lineal de dimensión d si existen coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, entonces para cualquier N y L existe por lo menos d valores singulares no nulos para la SVD, de la matriz de trayectoria X .

Para definir el algoritmo de previsión SSA, considere la serie original $y_t = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ y la serie reconstruida como $\tilde{y}_t = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_N)$. Para un vector propio $U \in \mathbb{R}^L$ son denotados los vectores de los primeros $L-1$ componentes como $U^\vee \in \mathbb{R}^L$. Por su parte, considere π_i como el último componente de $U_i, i \in I$. De este modo es posible definir $v^2 = \sum_i \pi_i^2$. Finalmente A es un vector de coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_{L-1}$, el cual puede escribirse como

$$A = \frac{1}{1-v^2} \sum_{i \in I} \pi_i U_i \quad (6)$$

Con base en lo anterior, es formulado el algoritmo recurrente para la previsión de los valores futuros de la curva de rendimientos $\hat{y}_{N+1}, \dots, \hat{y}_{N+h}$, esto es:

$$\hat{y}_i = \begin{cases} \tilde{y}_i & i = 1, \dots, N \\ \sum_{j=1}^{L-1} a_j \hat{y}_{i-j} & i = N + 1, \dots, N + h \end{cases} \quad (7)$$

2.3.3 Modelos Competidores RW, AR (1), VAR(1) y DNS

El paseo aleatorio RW es un modelo sencillo, el cual ha sido utilizado para la previsión de la curva de rendimientos por autores como Steeley (1990), Diebold y Li (2006), Steeley (2008), Christensen, Diebold y Rudebusch (2011), Duffee (2011) y Arantes, Caldeira y Portugal (2014). En la aplicación a la estructura temporal de la tasa de interés es definido como un proceso donde el valor futuro de esta es explicado por su valor en el momento anterior más un error. La curva de rendimientos es considerada como un proceso estocástico no estacionario al estar determinado por situaciones anteriores. Por consiguiente, suponga una serie de tiempo y_t la cual puede ser representada como:

$$y_{t+h}(\tau) = y_t(\tau) + \varepsilon_t(\tau) \quad \varepsilon_t(\tau) \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (8)$$

Donde ε_t es el término de error, el cual sigue un proceso ruido blanco, que está formado por una secuencia de variables no correlacionadas con media cero y varianza constante igual a σ^2 .

Así mismo, los modelos autorregresivos han sido usados en la literatura relacionada con previsión de la tasa de interés por Diebold y Li (2006), Steeley (2008), Arantes, Caldeira y Portugal (2014). Es así que bajo un proceso univariado AR(1), la estructura temporal de la tasa de interés y_t viene determinada únicamente por su valor pasado y una perturbación contemporánea, es decir, el valor futuro de la curva de rendimiento es definido por su valor en el momento inmediatamente anterior, esto es:

$$y_{t+h}(\tau) = c + \phi_1 y_t(\tau) + \varepsilon_t(\tau) \quad \varepsilon_t(\tau) \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (9)$$

Note que cuando ϕ_1 toma el valor de 1, esta ecuación se convierte en un modelo de paseo aleatorio.

Los modelos VAR, son un sistema de ecuaciones simultáneas, utilizados normalmente para determinar interacciones simultáneas en el sistema de variables, siendo así, considera

diversas variables endógenas de manera conjunta, donde cada una de estas es explicada por sus valores rezagados y por los valores rezagados de las demás variables en el modelo. En consecuencia, el uso de VAR en la predicción de la curva de rendimientos es pertinente, pues tal y como señalan Arante, Portugal, Caldeira (2014) otras variables pueden contener informaciones extra de la estructura temporal de la tasa de interés, indicando que un modelo multivariado podría generar previsiones más exactas. Así mismo, a través de los modelos VAR, es posible examinar múltiples plazos simultáneamente.

Un Vector Autorregresivo de primera orden VAR (1), puede ser representado por:

$$y_t = A + B y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim II(0, \Sigma) \quad (10)$$

Donde y_t está formado por los rendimientos de 14 vencimientos, $y_t = (y_t(\tau_1), y_t(\tau_2), \dots, y_t(\tau_N))'$. La previsión h- pasos al frente es dada:

$$\hat{y}_{t+h|t} = \hat{A} + \hat{B} y_t \quad (11)$$

En el modelo VAR(1) se crea una matriz en la que cada variable pronosticada es retrocedido en función de sus propios valores pasados y de los retardos de los demás parámetros incluidos. Este modelo ha sido implementado por autores como Diebol y Li (2006), De Pooter (2007), Caldeira, Moura y Portugal (2010).

Una diferencia importante entre los modelos de Nelson-Siegel y VAR(1) es que este último no impone una forma paramétrica específica en el lado derecho de la medición de ecuaciones. Por consiguiente, el modelo VAR (1) se puede utilizar para determinar si los modelos exponenciales de la clase de Nelson-Siegel que incluyen un factor de carga son beneficiosos para el pronóstico rendimientos.

Por su parte, Diebold y Li (2006) realizan una reparametrización de la forma funcional sugerida por Nelson y Siegel (1987), reinterpretando los tres factores asociados a corto plazo, largo plazo y mediano plazo como factores de nivel, pendiente y curvatura respectivamente. En la literatura este modelo es conocido como modelo dinámico de Nelson e Siegel y es representado como sigue:

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right) \quad (12)$$

De este modo, la curva de rendimientos es interpretada por tres factores más un (λ) que regula la tasa de decaimiento exponencial, no obstante Diebold y Li (2006) proponen

mantener este último fijo en el tiempo. La ventaja de esta estrategia es que al condicionar por este parámetro lambda, se obtienen estimaciones menos volátiles y adicionalmente desaparece la no linealidad. Por lo tanto, en este caso se pueden utilizar métodos de estimación lineales. Los autores proponen realizar la estimación en dos etapas, primero son obtenidas las series de tiempo de los parámetros a través de mínimos cuadrados ordinarios (MCO). En la segunda etapa son modelados los factores mediante un AR(1) o un VAR(1).

Equivalentemente, Diebold, Rudebusch y Arouba (2006) plantean que si los parámetros β_1 , β_2 y β_3 siguen un proceso autorregresivo vectorial de primer grado, es posible representar el modelo en formato de estado espacio y así estimar linealmente los factores a través de la aplicación recursiva del filtro de Kalman, la representación en estado de espacio es definida como:

$$y_t = X_t \beta_t + e_t, \quad e_t^{i.i.d.} \sim N(0, H) \quad (13)$$

$$\beta_t = \mu + \Phi \beta_{t-1} + v_t, \quad v_t^{i.i.d.} \sim N(0, Q) \quad (14)$$

Donde

$$y_t = \begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ y_t(\tau_2) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{pmatrix}, \quad X_t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\lambda T_1}}{\lambda T_1} & \frac{1 - e^{-\lambda T_1}}{\lambda T_1} - e^{-\lambda T_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1 - e^{-\lambda T_N}}{\lambda T_N} & \frac{1 - e^{-\lambda T_N}}{\lambda T_N} - e^{-\lambda T_N} \end{pmatrix}, \quad \beta_t = \begin{pmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \beta_{3t} \end{pmatrix}$$

Donde, X_t es una matriz $N \times 3$ que representa los factores latentes del modelo, los cuales son variables solo si el factor de decaimiento varía en el tiempo. β_t es una matriz 3×1 que incluye los parámetros del modelo de Nelson e Siegel (1987). Tal como indica De Pooter (2007), a través de la estimación de (13) se obtiene el vector de rendimientos para N diferentes plazos de vencimiento, el cual es considerado como la suma de factores multiplicados por cada factor de carga más un vector de errores de rendimientos, bajo la hipótesis de que se distribuyen normal e independientemente. Finalmente, se supone que en el estado inicial las perturbaciones de las ecuaciones de medida y de transición son ortogonales entre ellas y normalmente distribuidas:

$$\begin{bmatrix} e_t \\ v_t \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \right)$$

$$E = [\beta_0 e_t] = 0$$

$$E = [\beta_0 v_t] = 0$$

Donde, H es una matriz diagonal de dimensión $N \times N$ y Q representa la covarianza de los errores del estado.

Para realizar el pronóstico de la curva de rendimiento es maximizada la función de verosimilitud \mathcal{L} usando el filtro de Kalman. La función de verosimilitud es determinada en función de los parámetros $\Theta = (\mu, \lambda, \beta_t, \Phi, H, Q)$ y es obtenida a través de la descomposición de los errores de previsión. La función de verosimilitud del sistema de estado de espacio en (13) y (14), puede expresarse como:

$$\mathcal{L}(\Theta) = \sum_{t=1}^T \left[-\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(|f_{t|t-1}|) - \frac{1}{2} \eta'_{t|t-1} f_{t|t-1}^{-1} \eta_{t|t-1} \right] \quad (15)$$

Donde $\eta_{t|t-1}$ es el vector ($N \times 1$) del error de previsión para un periodo adelante y es especificado como $\eta'_{t|t-1} = y_t(\tau) - y_{t|t-1}(\tau)$, $y_{t|t-1}(\tau)$ es el vector de previsión de rendimiento obtenido en el momento $t - 1$. Por su parte, $f_{t|t-1}$ es la matriz de covarianza condicional de los errores de previsión, así $f_{t|t-1} = E(\eta_{t|t-1} \eta'_{t|t-1})$.

Así, a través del filtro de Kalman que es considerado como un algoritmo recursivo pues utiliza la señal enviada y la llegada de nuevas informaciones (observaciones) en el período $t+1$ para actualizar las estimaciones realizadas en el período anterior, se obtienen estimaciones de parámetros eficientes y resultados suavizados de los factores latentes, conforme a lo encontrado por Diebold, Rudebusch y Arouba (2006), De Pooter (2007) y Caldeira, Moura y Portugal (2010).

La evidencia empírica ha encontrado buenos ajustes en el pronóstico de la curva de rendimientos de los modelos RW, AR(1), VAR (1) y DNS. Por consiguiente los resultados obtenidos con las previsiones de MSSA serán comparados con las estimativas generadas por estos modelos.

2.4 DATOS

El mercado de renta fija colombiano, está compuesto por la deuda pública y privada. Entre los títulos que componen la deuda privada se encuentran: Bonos emitidos por empresas del sector real o financiero, CDT (títulos de corto plazo emitidos por establecimientos de crédito), Papeles comerciales (títulos de corto plazo emitidos por empresas del sector real) y otros como TIPS y CERTS. No obstante, el mercado de deuda pública representa el mayor volumen de negociación. Los tipos de títulos públicos que existen son: TES y TES de corto plazo (deuda soberana, emitidos por el ministerio de hacienda y crédito público), TIDIS (títulos de devolución de impuestos), Bonos emitidos por empresas estatales o entidades territoriales y Bonos de paz.

Para la estimación de la estructura temporal de la tasa de interés son usados los títulos de deuda pública -TES- de la república de Colombia, los cuales son emitidos por la tesorería general de la nación y administrados por el Banco de la Republica. Los TES pueden estar denominados en moneda local, moneda extranjera como el dólar o en unidades de valor real constante -UVR-. Así, los TES son los activos financieros más representativos y tranzados del mercado de capitales colombiano.

Los TES se pueden dividir en clase A y Clase B. Los primeros tienen como finalidad cubrir pasivos existentes con el Banco de la Republica, así como obligaciones adquiridas en operaciones de mercado abierto. Por su parte, el objetivo de los TES clase B es incentivar el ahorro de largo plazo y desarrollar el mercado de capitales nacional. Además, son usados por el Banco de la Republica como instrumentos para regular la liquidez de la economía.

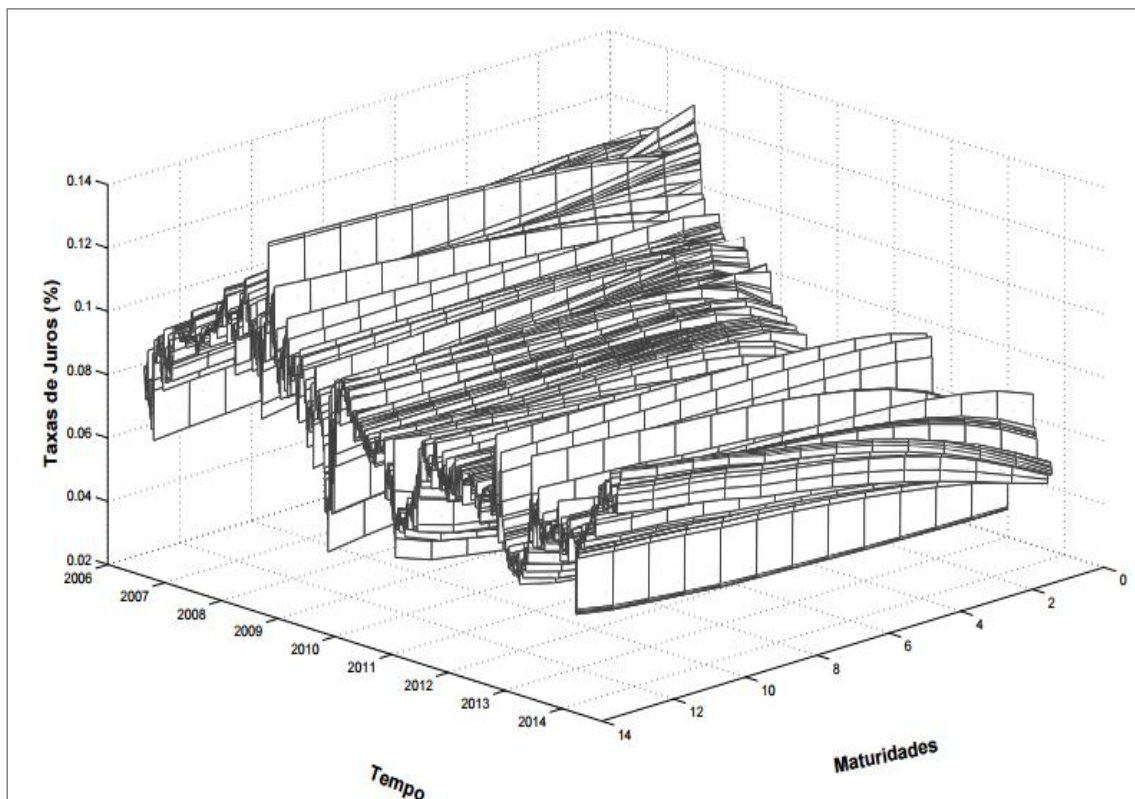
Por consiguiente, el objetivo de esta investigación es realizar previsión de la curva de rendimientos. Para esto son usados los parámetros diarios estimados a través de la metodología de Nelson y Siegel (1987), desde noviembre de 2006 hasta diciembre de 2014. En base a esto fue construida la estructura temporal de la tasa de interés para 14 vencimientos diferentes: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 36, 42, 48, 60. Finalmente, vale la pena señalar que los datos utilizados en este artículo fueron obtenidos a través de INFOVALVER.

La estructura temporal de la tasa de interés exhibida en la figura 2.4.1 fue calculada basándose en el modelo de Nelson y Siegel (1987). La curva de rendimientos evidencia un comportamiento irregular. En el tramo corto muestra una tendencia creciente y en el periodo

2008-2009 un decaimiento, asociado con la crisis financiera internacional. Durante el final del periodo estudiado, es posible observar una tendencia creciente.

En la tabla 2.4.1, son expuestas las estadísticas descriptivas de la curva de rendimientos junto a sus respectivos plazos. Puede observarse que la curva de rendimientos colombiana tiene una inclinación positiva. Además, la volatilidad de los retornos disminuye con el aumento de los vencimientos.

Figura 2.4.1. Estructura temporal de la tasa de interés



Fuente: Elaboración propia (2015).

Tabla 2.4.1. Estadísticas descriptivas

Vencimiento	Media	STD Dev	Min.	Max.	Mediana	1st Qu.	3rd Qu.
X3	6.38	2.53	2.53	12.74	5.4	4.16	8.87
X6	6.92	2.57	3.01	13.2	6.18	4.8	9.29
X9	7.18	2.5	3.01	12.84	6.71	5.23	9.4
X12	7.32	2.39	3.04	12.48	7.04	5.46	9.44
X15	7.42	2.28	3.09	12.48	7.18	5.66	9.42
X18	7.49	2.18	3.17	12.6	7.34	5.83	9.39
X21	7.55	2.09	3.24	12.7	7.43	5.98	9.37
X24	7.6	2.01	3.29	12.77	7.5	6.08	9.33
X27	7.65	1.94	3.35	12.82	7.57	6.19	9.3
X30	7.69	1.88	3.42	12.87	7.61	6.31	9.26
X36	7.77	1.77	3.59	12.94	7.69	6.48	9.21
X42	7.83	1.68	3.78	12.98	7.74	6.64	9.2
X48	7.88	1.61	3.98	13.02	7.77	6.73	9.19
X60	7.97	1.5	3.9	13.07	7.8	6.94	9.16

Fuente: Elaboración propia (2015).

2.5 ESTIMACIÓN CON SSA

Como es observado en la sección 3, el método SSA está compuesto por dos etapas: la descomposición de la serie original y la reconstrucción de la serie sin ruido. Siendo así, para el diagnóstico es necesario hacer selección de dos parámetros. El primero se refiere a la longitud de la ventana (L) y el segundo está asociado con la elección del número de componentes para el paso de agrupamiento.

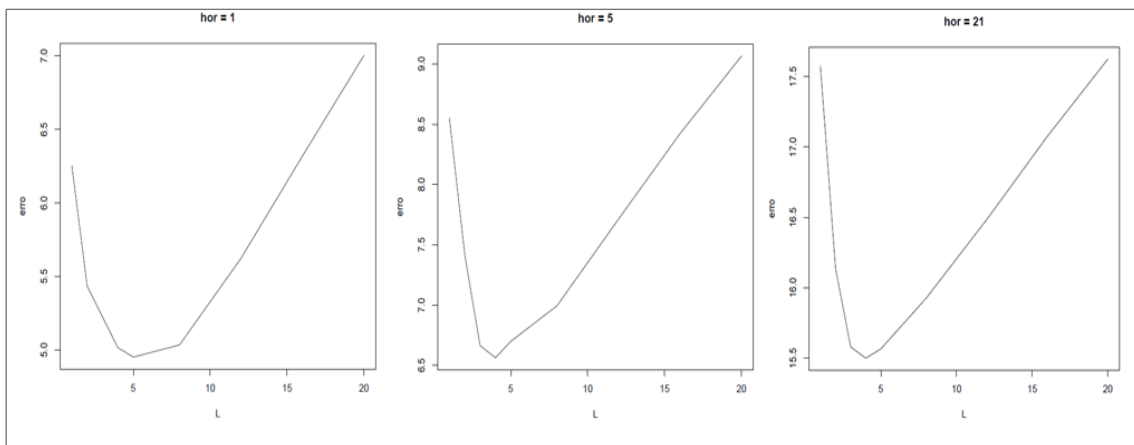
En este sentido, usando SSA multivariada (MSSA) para la previsión de la curva de rendimientos de Colombia, fueron considerados 14 vencimientos. Estos fueron apilados en una matriz de dimensión $L \times K$, formando así la matriz de trayectoria. Para cada uno de los diferentes términos fue utilizada la misma longitud de la ventana, escogida a través de Cross Validation.

De este modo, utilizando una ventana de previsión de 252 observaciones, la Cross Validation fue implementada para el período de diciembre de 2008 a diciembre de 2010, es decir, para las últimas 500 observaciones. Así mismo, fueron considerados tres horizontes de previsión: un día, una semana y un mes. De manera que mediante Cross Validation se realizaron pronósticos para los siguientes valores de L , $L = 1,2,3,4,5,8,12,16,20$.

Por consiguiente, de acuerdo a los resultados de Cross Validation para la descomposición de la estructura temporal de la tasa de interés, se usó $L = 5$ para horizontes de un día y $L = 4$ en horizontes de cinco días y 21 días. En la figura 1.5.1, son expuestos los resultados al considerar solo un vencimiento para cada uno de los horizontes analizados, los gráficos para los otros vencimientos no son presentados porque son semejantes.

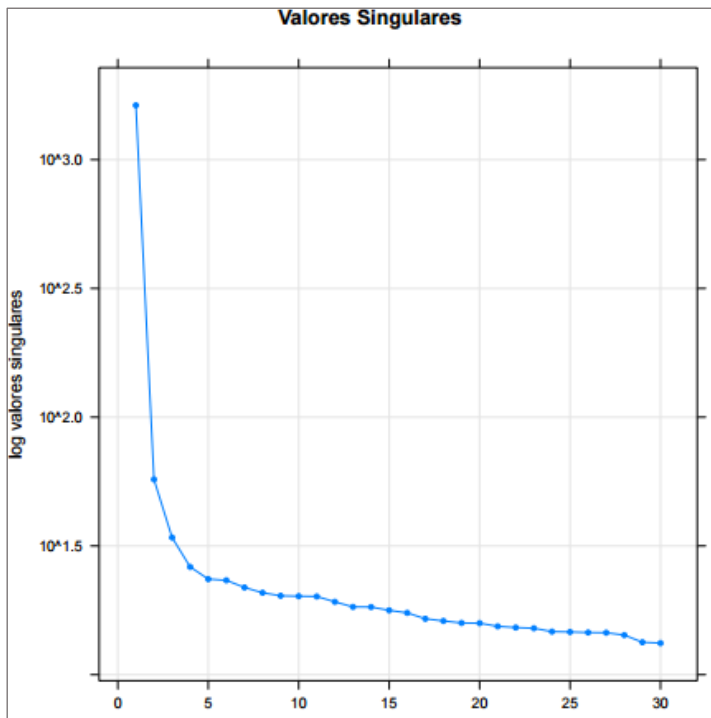
En la figura 1.5.2 se observa el comportamiento de los valores propios de la matriz de trayectoria. Es importante destacar que el primer valor singular evidencia una mayor participación en relación a los otros valores singulares. La figura 1.5.3 representa el diagrama de dispersión de los vectores propios de la curva de rendimientos de Colombia, ordenados por su contribución para el paso de construcción de la SVD. Nótese que el primer componente corresponde a 99,5%, indicando que este realmente representa la mayor magnitud de esta etapa.

Figura 2.5.1. *Cross Validation* - selección de L



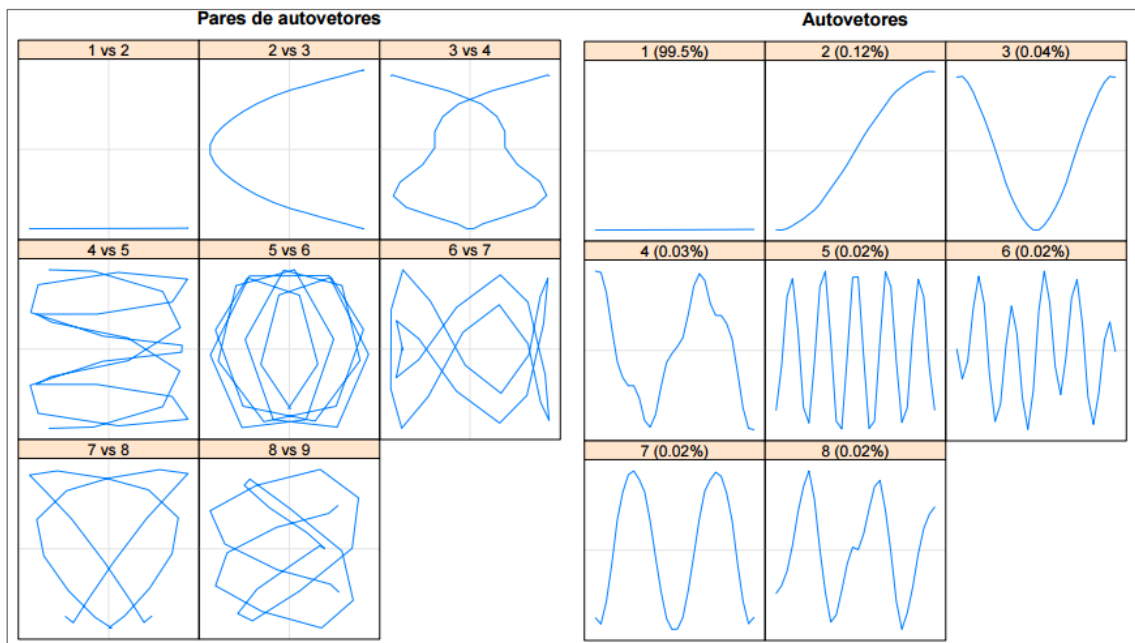
Fuente: Elaboración propia (2015).

Figura 2.5.2. Valores Singulares



Fuente: Elaboración propia (2015).

Figura 2.5.3. Pares de Autovectores y Autovectores

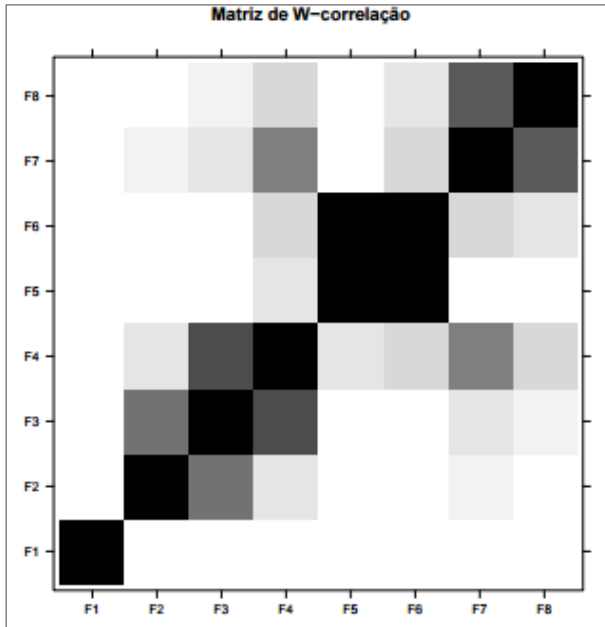


Fuente: Elaboración propia (2015).

Uno de los aspectos más importantes para el buen funcionamiento del SSA es la separabilidad entre elementos. En consecuencia, para determinar el grado de dependencia entre las series, una de las medidas frecuentemente utilizadas es la matriz W correlación. Por lo tanto se espera que los elementos reconstruidos tengan una correlación cero. La figura 1.5.4

muestra los resultados de la matriz de W correlación, a partir de estos es posible confirmar que el primer componente tiene una separación completa. Consistentemente, para la etapa de agrupamiento fue utilizado solo el primer componente.

Figura 2.5.4. Matriz W correlación



Fuente: Elaboración propia (2015).

2.6 RESULTADOS

En esta sección, son presentados los resultados de SSA multivariada y de RW para la previsión de la curva de rendimientos de Colombia. Fueron hechas 893 previsiones, a partir del año 2011. Los pronósticos MSSA fueron inspirados por la lógica del paseo aleatorio. A su vez, fue escogida la previsión un paso adelante dado su buen ajuste.

Para evaluar la calidad de las estimativas, se utilizó la raíz del error cuadrático medio (RMSE), así es posible para un determinado modelo m obtener el RMSE para un cierto vencimiento (τ) tal como es indicado por la ecuación (19).

$$RMSE_m(\tau) = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{t=1}^p (\hat{y}_{t+h|t,m}(\tau) - y_{t+h}(\tau))^2} \quad (19)$$

Donde p representa el número total de previsiones. De esta forma, basándose en el RMSE es posible usar los criterios de Diebold y Mariano para comparar la significancia estadística del modelo MSSA, en relación al RW. Estos resultados son presentados en la tabla 2.6.1.

Como indica la tabla 2.6.1, para horizontes de previsión de cinco días y 21 días, el método MSSA genera estimaciones más precisas que RW. En contrapartida para el horizonte de un día los resultados apenas son significativos al nivel de confianza de 5% y 10% para los primero cuatro vencimientos. Por tanto, se puede concluir que los rendimientos para horizontes más pequeños son más difíciles de predecir, al igual que con horizontes muy grandes.

Tabla 2.6.1 RMSE MSSA / RW

Ven	X3	X6	X9	X12	X15	X18	X21	X24	X27	X30	X36	X42	X48	X60
h=1	0.854**	0.893**	0.916*	0.930*	0.938	0.945	0.950	0.954	0.957	0.960	0.965	0.968	0.970	0.979
h=5	0.894**	0.919**	0.927***	0.929***	0.930***	0.928***	0.927***	0.926***	0.925***	0.925***	0.924***	0.924***	0.925***	0.928***
h=21	0.920	0.934*	0.939*	0.940**	0.941***	0.940***	0.940***	0.939***	0.939***	0.938***	0.938***	0.937***	0.937***	0.937**

Fuente: elaboración propia (2015).

Del mismo modo, son comparadas las previsiones de RW con las generadas por los modelos AR(1) y VAR(1). Estos resultados pueden observarse en la tabla 2.6.2 y tabla 2.6.3.

Tabla 2.6.2. RMSE AR(1) / RW

Vent	X3	X6	X9	X12	X15	X18	X21	X24	X27	X30	X36	X42	X48	X60
h=1	1.010	0.990	0.986	0.984	0.983	0.982*	0.982*	0.982*	0.982*	0.983*	0.984	0.984	0.985	0.986
h=5	1.454***	1.327***	1.246***	1.19***	1.156***	1.137**	1.127**	1.124**	1.124**	1.128**	1.138**	1.151**	1.164**	1.187***
h=21	1.71***	1.611*	1.547*	1.482*	1.432	1.400	1.384	1.377	1.377	1.378	1.381	1.380	1.373	1.352

Fuente: elaboración propia (2015).

Se constata que en relación al RW, el modelo AR(1) evidencia un desempeño superior para el horizonte de previsión de 5 días. Sin embargo para horizontes de 1 día, resultados significativos son presentados al 10% de confianza apenas para los plazos: 18, 21, 24, 27 y 30. Por otro lado, al comparar las previsiones del VAR(1) con RW, se encuentra que el primero no presenta una buena performance en los horizontes de 1 día y 21 días. No obstante, a partir del vencimiento 12 exhibe un buen ajuste al considerar el horizonte de previsión de 5 días, tal como es expuesto en la tabla 2.6.3.

Tabla 2.6.3. RMSE VAR(1) / RW

Ven	X3	X6	X9	X12	X15	X18	X21	X24	X27	X30	X36	X42	X48	X60
h=1	0.932	0.940	0.947	0.95*	1.012	1.007	1.004	1.002	1.001	1.012	1.011	1.011	1.011	1.011
h=5	1.098*	1.079	1.070	1.062	1.253***	1.234***	1.221***	1.212***	1.207***	1.29***	1.283***	1.28***	1.278***	1.276***
h=21	1.225*	1.146	1.148	1.155	1.275*	1.272	1.270	1.269	1.267	1.305	1.303	1.302	1.300	1.296

Fuente: elaboración propia (2015).

En el mismo sentido, las tablas 2.6.4 y 2.6.5, presentan el RMSE de las estimaciones DNS-AR(1) y DNS-VAR(1), respectivamente. Se percibe que en ninguno de los horizontes analizados DNS-AR(1) y DNS-VAR(1), consiguen superar significativamente las estimaciones generadas por RW.

Tabla 2.6.4. RMSE DNS-AR(1) / RW

Vem	X3	X6	X9	X12	X15	X18	X21	X24	X27	X30	X36	X42	X48	X60
h=1	2.567	1.381	1.103	1.029	1.008	1.002	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.998
h=5	2.361	1.324	1.091	1.028	1.009	1.003	1.001	1.001	1.001	1.001	1.000	1.000	0.999	1.001
h=21	1.993	1.248	1.079	1.028	1.010	1.004	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.001	1.001	1.000

Fuente: elaboración propia (2015).

Tabla 2.6.5. RMSE DNS-VAR(1) / RW

Mat	X3	X6	X9	X12	X15	X18	X21	X24	X27	X30	X36	X42	X48	X60
h=1	2.569	1.382	1.104	1.029	1.008	1.002	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.998
h=5	2.363	1.325	1.092	1.028	1.009	1.003	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.000	1.000	1.002
h=21	1.994	1.248	1.079	1.028	1.010	1.004	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.001	1.001

Fuente: elaboración propia (2015).

Otra medida usada para comparar los errores de previsión es el error cuadrático acumulativo de previsión (CSFE), usado por Welch y Goyal (2008), De Pooter (2010) y Caldeira y Torrent (2013). A través de este es posible observar gráficamente en que momento del tiempo el modelo m , se ajusta mejor, en relación al benchmark, en este caso el modelo RW. Así el CSFE del modelo m , en el tiempo T , para el vencimiento τ_i , es representado por:

$$CSFE_{m,T}(\tau) = \sum_{t=1}^T \left[(\hat{y}_{t+h|t, benchmark}(\tau) - y_{t+h}(\tau))^2 - (\hat{y}_{t+h|t, m}(\tau) - y_{t+h}(\tau))^2 \right] \quad (13)$$

Donde $y_{t+h}(\tau)$ es el rendimiento observado para el vencimiento τ en el tiempo $t + h$, por su parte, \hat{y}_{t+h} , es el rendimiento previsto por el modelo m en el momento t .

Obsérvese que cuando un modelo supera al *benchmark*, la serie presentará un comportamiento creciente. Por el contrario, si el *benchmark* evidencia una mejor performance es apreciada una tendencia decreciente de la serie.

En las figuras 2.6.1, 2.6.2, 2.6.3, 2.6.4, 2.6.5, son resumidos los resultados de la comparación de los métodos MSSA, AR(1), VAR(1), DNS-AR(1), DNS-VAR(1) en relación a RW para los horizontes de 1 día, 5 días y 21 días respectivamente. La línea café representa el CSFE de MSSA/RW, la roja el CSFE del modelo DNS-AR(1)/RW, la verde el CSFE de

DNS-VAR(1)/RW, las líneas azul oscuro y azul claro señalan el CSFE de AR(1) y VAR(1) respectivamente.

Para el horizonte de previsión de un día, se destaca que usando MSSA, AR(1) y VAR(1) se produce una ganancia bastante grande al final del 2012, cabe resaltar que para este periodo el modelo VAR(1) consigue ajustarse muy bien superando incluso el acumulado del MSSA. No obstante para los últimos vencimientos se observa una notable pérdida del modelo VAR(1) a comienzo del 2013, así mismo a inicio del segundo trimestre del 2014, se evidencia un mejor desempeño del RW en relación a MSSA, resultados contrarios son presentados por los modelos AR(1) y VAR(1). A su vez, al observar los resultados de DNS-AR (1) y DNS-VAR(1) se encuentran estimaciones más precisas con RW en los primeros y últimos vencimientos.

Al considerar 5 días como horizonte de previsión, se observa resultados superiores en el acumulado de MSSA comparando con los otros modelos. Además a inicios del 2013 es apreciada una ganancia de MSSA en relación al RW para los primeros vencimientos, después de este periodo el ajuste de los dos modelos es similar. Por su parte se encuentra un mejor ajuste del modelo RW, en relación a DNS-AR(1) y DNS-VAR(1) para los primeros plazos analizados, para los vencimientos 24 y 36 los resultados de los tres modelos son similares.

La estimación usando AR(1) muestra una pérdida bastante marcada durante todo el periodo en relación a RW, especialmente en los vencimientos iniciales. Por el contrario, a partir del 2013 se encontró que las previsiones con VAR(1), exhiben una pérdida superior para los rendimientos de mayores vencimientos. Se destaca que en los primeros plazos el modelo VAR(1), presenta un comportamiento similar al del MSSA, no obstante este último tiene un acumulado mayor.

Para horizontes de 21 días se observa un buen ajuste de MSSA en todos los plazos. En cuanto a las estimaciones de VAR(1) y AR(1) a medida que aumenta el vencimiento pierden en relación al RW. Aun así, para los primeros plazos los pronósticos de VAR(1), presentan ganancias en los mismo periodos que el MSSA, sin embargo este último gana en el acumulado. En relación a DNS-AR(1) y DNS-VAR(1), no evidencian buen desempeño en los primeros vencimientos, con todo sus resultados son muy semejante al RW especialmente en los plazos medios.

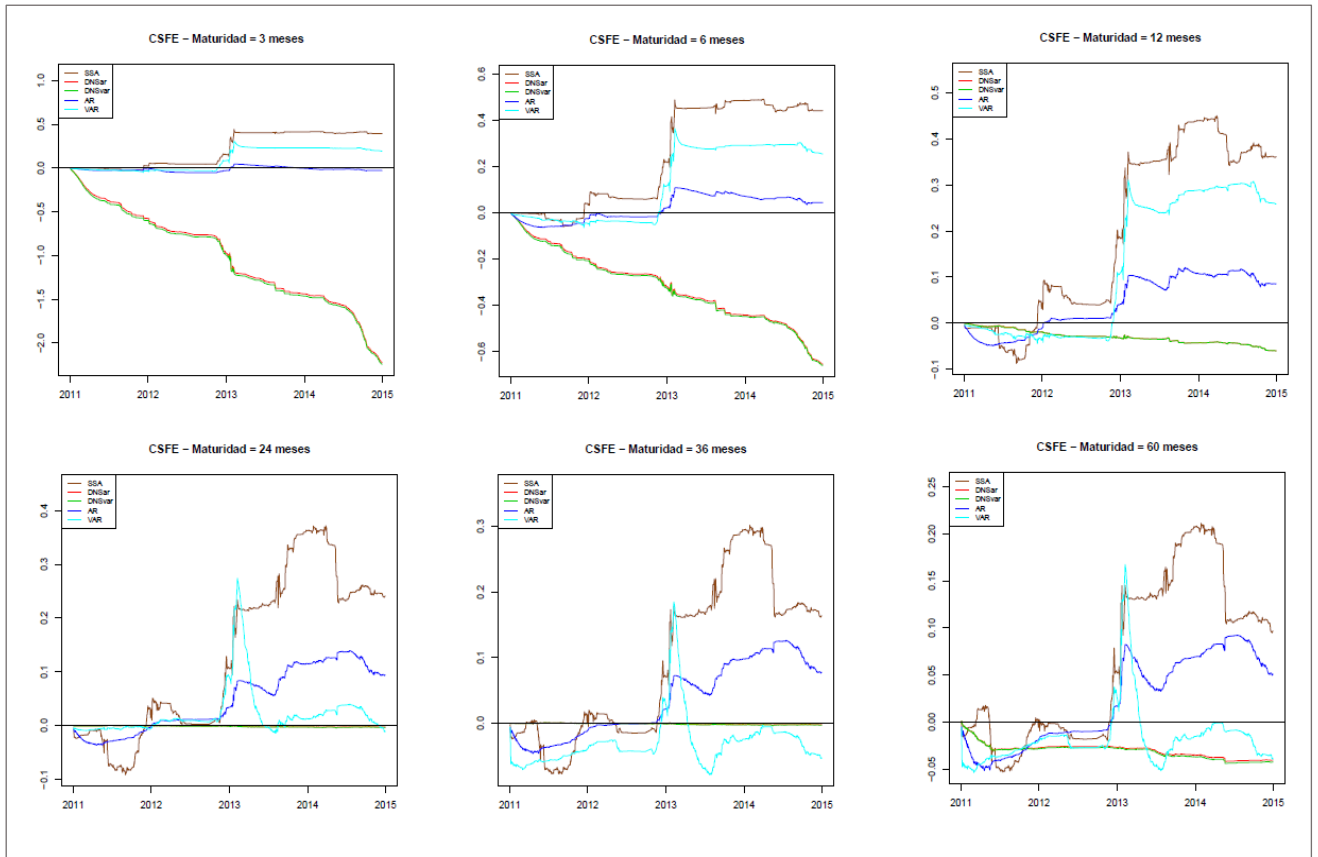
Obsérvese que en los horizontes de tiempo analizados el MSSA gana en el acumulado, pero dada la naturaleza no paramétrica de este método es difícil explicar su buen rendimiento.

Además puede resaltarse que a pesar de la diferencia de la especificación en la ecuación de estado para las estimaciones con DNS-AR (1) y DNS-VAR(1), es presentado un comportamiento similar en el CSFE.

Otro hecho relevante, es que si bien MSSA ha demostrado una ventaja en el acumulado de los pronósticos para todos los plazos estudiados, se descubrió que considerando un horizonte de previsión de un día en la medida en que el vencimiento aumenta, se presenta una disminución en la eficacia de MSSA en los primeros meses del 2014. En contraste, con los otros horizontes se muestra una mejoría principalmente en las primeras estimaciones cuando el vencimiento es mayor. Se destaca también que los modelos competidores no se adaptan tan bien para vencimientos pequeños en ninguno de los horizontes de previsión, por el contrario el método MSSA evidencia un buen comportamiento.

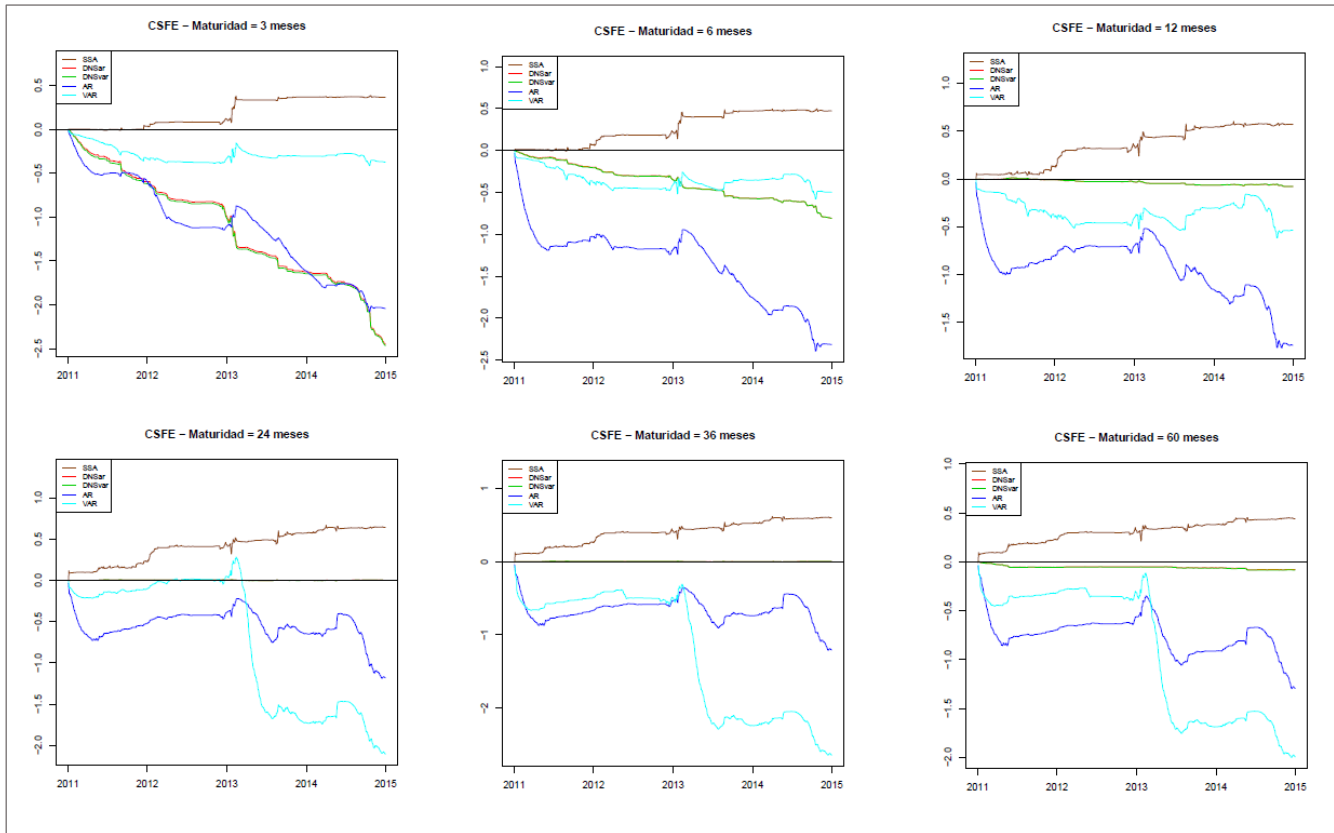
Finalmente se aprecia que en el caso de Colombia las previsiones de la curva de rendimientos presentan mejor ajuste usando MSSA, superando así el modelo RW, AR(1), VAR(1), DNS-AR (1) y DNS-VAR(1), principalmente para horizontes de 1 día. Este hecho es constatado al observar el comportamiento creciente de la línea café en la figura 1.6.1, hecho que indica que el RMSE de RW aumenta más rápido que el RMSE de MSSA, es decir, los resultados de este último sobrepasan a los obtenidos por RW. Sin embargo para horizontes pequeños entre mediados de 2011 e inicios de 2012 se observa un mejor comportamiento en el acumulado de los datos pronosticados por el modelo RW, así como para los primeros meses del 2014.

Figura 1.6.1. CSFE MSSA, AR(1), VAR(1), DNS-AR(1), DNS-VAR(1) / RW, $h=1$.



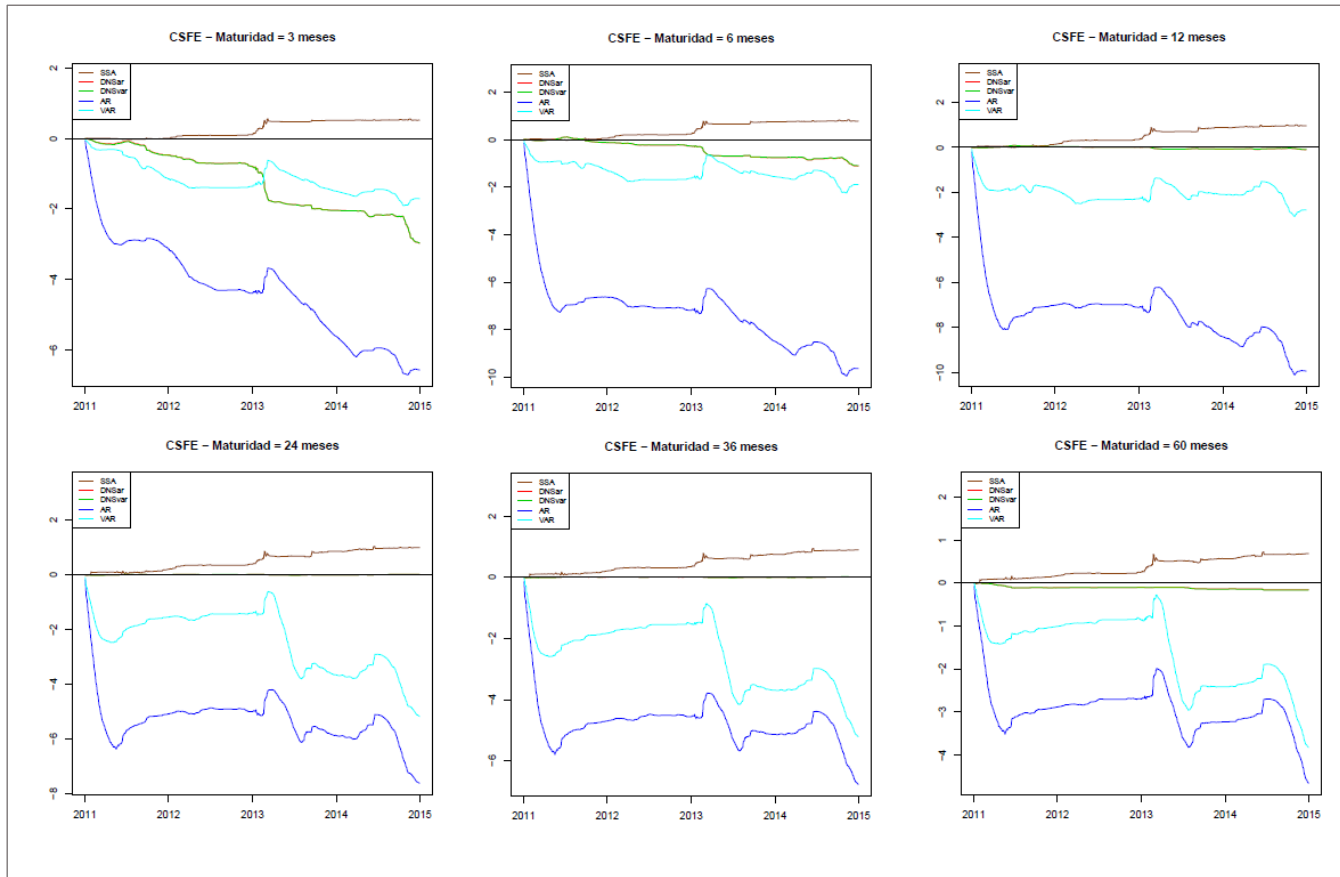
Fuente: elaboración propia (2015).

Figura 1.6.2. CSFE MSSA, AR(1), VAR(1), DNS-AR(1), DNS-VAR(1) / RW, h=5



Fuente: elaboración propia (2015).

Figura 1.6.3. CSFE MSSA, DNS-AR(1), DNS-VAR(1) / RW, h=21



Fuente: elaboración propia (2015).

2.7 CONCLUSIONES

En esta investigación, se realizó pronóstico de la curva de rendimientos de Colombia a través de la metodología SSA multivariada. Los resultados de MSSA fueron comparados con las estimativas generadas por el modelo RW, AR(1), VAR(1), DNS-AR(1), DNS-VAR(1). Para la estimación de la estructura temporal de la tasa de interés son usados los títulos de deuda pública -TES-, así a partir de los parámetros estimado por medio de la metodología de Nelson y Siegel (1987) fue construida la curva de rendimientos para 14 plazos diferentes. Se utilizaron los rendimientos diarios desde el 11 de noviembre de 2006 hasta el 31 de diciembre de 2014, contando con una muestra de 1909 datos. Para evaluar la capacidad predictiva del modelo, fueron usadas las últimas 893 observaciones.

Como resultado, la evidencia empírica sugiere que para la estructura temporal de la tasa de interés de Colombia, la previsión un paso adelante es bastante acertada. Además de eso se encontraron buenos pronósticos del modelo SSA multivariado, principalmente para

horizontes de tiempo de 5 días e 21 días. También es importante notar que las previsiones de MSSA se ajustaron muy bien para finales del 2012. En comparación con el modelo competidor RW, se puede concluir que el MSSA genera previsiones más precisas para la curva de interés colombiana. Sin embargo, para las primeras observaciones pronosticadas considerando un día como horizonte de previsión se exhibe un mejor desempeño en el acumulado del modelo RW. Por su parte, se percibe que los modelos AR(1) y VAR(1) exhiben un buen desempeño en relación al RW, no obstante el acumulado de MSSA es mayor. Por el contrario DNS-AR(1) y DNS-VAR(1) no consiguen alcanzar un mejor rendimiento que el RW, para horizontes de 1 día.

En el marco de la metodología SSA, este documento genera una contribución significativa, en parte porque esta técnica ha sido aplicada recientemente en el campo de la economía y finanzas, de manera que los estudios en estas áreas no son tan extensos. Además de esto bajo el conocimiento de los autores es la primera vez que este método se utiliza para prever la estructura temporal de la tasa de interés encontrando un buen ajuste del modelo. Si bien los resultados obtenidos utilizando MSSA son satisfactorios para futuras investigaciones, para mejorar la exactitud de las previsiones puede ser importante ajustar la curva de rendimientos por modelos como los implementados por Svensson (1994).

Finalmente en Colombia un gran número de investigaciones está orientada a estudiar y estimar la estructura temporal de la tasa de interés, tales como las publicadas por Arango, Melo y Vásquez (2002), Vásquez y Melo Velandia (2002), Santana (2008), Restrepo Tobón y Botero Ramírez (2008) y Herrera Cardona, Salcedo Giraldo e Cárdenas García (2011), entre otros. No obstante, en relación a la previsión de la curva de rendimientos, la literatura es limitada. Dada la importancia de la curva de rendimientos en la economía como un instrumento de política monetaria y en las finanzas para la valorización de activos, es conveniente continuar realizando estudios semejantes, en parte por el mayor grado de desenvolvimiento que está alcanzando el mercado de renta fija.

3 CONCLUSÃO

Nesta pesquisa, foi realizada previsão da curva de rendimentos da Colômbia através da metodologia multivariada de SSA. Para estimar a estrutura a termo de taxas de juros são utilizados os títulos de dívida pública (TES), desta maneira a partir dos parâmetros estimados pelo modelo de Nelson e Siegel (1987) foi construída a curva de rendimento para 14 diferentes maturidades. Foram usados retornos diários a partir do 11 de novembro de 2006 até 31 de dezembro de 2014, com uma amostra de 1909 dados. Para avaliar a capacidade preditiva do modelo, foram usadas as últimas 893 observações.

Como resultado, a evidência empírica sugere que para a estrutura a termo da taxa de juros da Colômbia, a previsão um passo à frente é bastante acertada. Além disso é encontrado que o modelo multivariado SSA gera boas previsões, principalmente para horizontes de tempo de cinco dias e 21 dias. Também importante notar que as previsões com MSSA se ajustaram bastante bem no fim do ano 2012, resultados similares se encontraram com o AR(1) e o VAR(1). Pode concluir-se que em comparação com o modelo de competidor RW, o MSSA produz previsões mais precisas para a curva de rendimentos da Colômbia. No entanto, para o horizonte de previsão de um dia, nas primeiras estimativas o RW exibe um desempenho melhor que o MSSA no acumulado. Enquanto isso, percebe-se que os modelos AR (1) e VAR(1) mostram um bom desempenho em relação a RW, apesar disso o acumulado da MSSA é maior. Em contraste DNS-AR (1) e DNS-VAR (1) não conseguem atingir um desempenho melhor do que o RW, para horizontes de 1 dia.

No âmbito da metodologia SSA, este trabalho gera uma contribuição significativa, em parte porque esta técnica foi recentemente aplicada na área da economia e das finanças, de modo que os estudos neste campo não são tão extensos. Além disso sob o conhecimento dos autores é a primeira vez que este método é utilizado para prever a estrutura a termo da taxa de juros. Embora os resultados obtidos usando MSSA são satisfatórios em futuras pesquisas com objetivo de melhorar o desempenho das previsões poderia se ajustar a curva de rendimentos com outro modelo, por exemplo como o implementado por Svensson (1994).

Finalmente, na Colômbia um grande número de investigações tem como objetivo estudar e estimar a estrutura a termo das taxas de juros, como os publicados pelo Arango, Melo y Vásquez (2002), Vásquez y Melo Velandia (2002), Santana (2008), Restrepo Tobón y Botero Ramírez (2008) y Herrera Cardona, Salcedo Giraldo e Cárdenas García (2011), entre outros. No entanto, em relação à previsão da curva de rendimentos, a literatura é limitada.

Dada a importância da curva de rendimentos na economia como um instrumento de política monetária e no campo das finanças para a valoração de ativos, é conveniente continuar realizando estudos semelhantes, em parte pelo maior grau de desenvolvimento que está atingindo o mercado de renda fixa no país.

REFERÊNCIAS

- AGUDELO RUEDA, Diego; ARANGO ARANGO, Mónica. La curva de rendimientos a plazo y las expectativas de tasas de interés en los mercados colombianos de renta fija 2002-2007. **Lecturas de Economía**, Universidad de Antioquia, Medellín, n. 68, p.39-66, enero 2008.
- ALFARO, Rodrigo. La curva de rendimiento bajo Nelson-Siegel. **Documentos de Trabajo**, Banco Central de Chile, [S.l.], n. 531, p. 1-24, oct. 2009.
- ALFARO, Rodrigo; BECERRA, Juan Sebastian; SAGNER, Andres. Estimación de la estructura de tasas nominales de Chile: aplicación del modelo dinámico Nelson-Siegel. **Economía Chilena**, Santiago, n. 3, v.14, p.57-74, dic. 2011.
- ALONSO SÁNCHEZ, F. J. **Tratamientos de señales cinemáticas y de masas de tejido blando en el análisis dinámico inverso de modelo biomecánicos esqueléticos**. 146 f. Tese (Doutorado) - Ingeniería Electromecánica., Universidad de Extremadura, Badajoz, España, 2005.
- ARANGO, Luis Eduardo; MELO, Luis Fernando; VÁSQUEZ, Diego Mauricio. Estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés. **Borradores de Economía**, Bogotá, n. 196, p. 1-33, enero 2002.
- ARANTES, Breno de Oliveira; CALDEIRA, João Fróis; PORTUGAL, Marcelo Savino. Previsão da estrutura a termo da taxa de juros brasileira usando redes neurais artificiais. **ANPEC-Associação Nacional dos Centros de Pós-graduação em Economia**, [S.l.], 2014.
- AROSEMENA, Angélica María; ARANGO, Luis Eduardo. Lecturas alternativas de la estructura a plazo: una breve revisión de literatura. **Borradores de Economía**, Banco de La Republica, Bogotá, n. 223, p.1-39, dic. 2002.
- CALDEIRA, João F.; MOURA, Guilherme V.; PORTUGAL, Marcelo S. Efficient Yield Curve Estimation and Forecasting in Brazil, **Revista EconomiA**, Brasilia, n. 1, v.11, 27-51, jan. 2009.
- CHRISTENSEN, Jens H.E.; DIEBOLD, Francis X.; RUDEBUSCH, Glenn D. The affine arbitrage-free class of Nelson–Siegel term structure models. **Journal of Econometrics**, North-Holland, n. 1, v. 164, p. 4-20, sept. 2011.
- DE POOTER, Michiel David. **Modeling and Forecasting Stock Return Volatility and the Term Structure of Interest Rates**. 268 f. Tese (Doutorado) - Curso de Financial Econometrics, Erasmus Universiteit Rotterdam, 2007.
- DE POOTER, Michiel David; RAVAZZOLO, Francesco; VAN DIJK, Dick JC. Term structure forecasting using macro factors and forecast combination. **FRB International Finance Discussion Paper**, n. 993, Washington, 2010.
- DIEBOLD, Francis X.; LI, Canlin. Forecasting the term structure of government bond yields. **Journal of Econometrics**, North-Holland, n. 2, v. 130, p. 337- 364, feb. 2006.

DIEBOLD, Francis X.; RUDEBUSCH, Glenn D.; ARUOBA, S. Boragan. The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach. **Journal Of Econometrics**, North-Holland, n. 1 v. 131, p.309-338, mar. 2006.

DUFFEE, Gregory R. Forecasting with the term structure: The role of no-arbitrage restrictions. **Working papers**, Johns Hopkins University, Department of Economics, Baltimore, n. 576, p, 1-43, jan. 2011.

DURAND, David. "Basic Yields of Corporate Bonds. 1900-1942", Working Paper, **National Bureau of Economic Research (NBER)**, Broadway, New York, n.3, p. 1-25 1942.

GOLYANDINA, N; NEKRUTKIN, V; ZHIGLJAVSKY, A. Analysis of Time Series Structure: SSA and related techniques. Chapman & Hall/CRC, Florida, 2001.

GOLYANDINA, Nina; KOROBAYNIKOV, Anton. Basic Singular Spectrum Analysis and forecasting with R. **Computational Statistics & Data Analysis**, St. Petersburg, v. 71, p.934-954, mar. 2014.

GUTHMANN, H.G. **The Relation of the Maturity Factor to Yield Differences among Investment Securities**. Tese (Doutorado), University of Chicago, Chicago, 1929.

FAMA, Eugene F.. Term-structure forecasts of interest rates, inflation, and real returns. **Journal Of Monetary Economics**, Chicago, n. 25, p.59-76, jan. 1990.

FERNÁNDEZ PÉREZ, Adrián. **Aportaciones a la estimación, predicción y contenido informativo de la estructura temporal de tipos de interés**. 2012. 403 f. Tese (Doutorado) - Curso de Economía, Departamento de Departamento de Métodos Cuantitativos En Economía y Gestión, Universidad Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de Gran Canaria, 2012.

HASSANI, H. Singular Spectrum Analysis: Methodology and Comparison. **Journal of Data Science**, [S.l.] v. 5, p.239-257, 2007.

HASSANI, Hossein; ZHIGLJAVSKY, Anatoly. Singular spectrum analysis: methodology and application to economics data, **Journal of Systems Science and Complexity**, [S.l.], n. 22, p.372-394, jul. 2009.

HASSANI, H; HERAVI, S; ZHIGLJAVSKY, A. Forecasting European industrial production with singular spectrum analysis. **International journal of forecasting**, [S.l.], n. 25, p. 103-118, 2009.

HASSANI, H; SOOFI, A; ZHIGLJAVSKY, A. Predicting daily exchange rate with singular spectrum analysis. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, [S.l.], n. 11, p. 2023-12034, 2010.

HASSANI, H; THOMAKOS, D. review on singular spectrum analysis for economic and financial time series, **Statistics and Its Interface**, [S.l.], n. 3, p. 377-397, 2010.

HERRERA CARDONA, L. G., CÁRDENAS GIRALDO, D., y SALCEDO GARCÍA, J. P. Estimación de la estructura a plazos para un título de renta fija del tesoro colombiano por el método unifactorial de Vasicek. **Revista Gestión y Desarrollo**, Cali, v. 8, n. 1, v13, p. 95-114, 2011.

- JULIO, Juan Manuel; MERA, Silvia Juliana; REVÉIZ HÉRAULT, Alejandro. La curva spot (cero cupón), Estimación con splines cúbicos suavizados. **Borradores de Economía**, Banco de la República, Bogotá, n. 213, p. 1-38, 2002.
- MALDONADO CASTAÑO, Rogelio; ZAPATA RUEDA, Natalia; PANTOJA ROBAYO, Javier Orlando. Estimación dinámica de una estructura- de tasas de interés para Colombia: Análisis empírico con filtro de Kalman. **Centro de investigaciones económicas y Financieras**, Documento de trabajo, Universidad EAFIT, Medellín, v. 13, n12, p.1-23, 2012.
- MCCULLOCH, J. Huston. Measuring the term structure of interest rates. **Journal of Business**, Chicago, v.44, n. 1, p. 19-31, jan. 1971.
- MCCULLOCH, J. Huston. The tax-adjusted yield curve. **Journal of Finance**, Philadelphia v.30, n. 3, p. 811-830, jun. 1975.
- NELSON, C.R; SIEGEL, A.F. Parsimonious modelling of yield curves, **Journal of Business**, Chicago, n. 60, p. 473-489, 1987.
- PÉREZ RODRÍGUEZ, Jorge V.; BORRELL VIDAL, Máximo; TORRA PORRAS, Salvador. El ajuste de la curva de rendimientos o la estimación de la estructura temporal. **Cuadernos de Economía: Spanish Journal of Economics and Finance**, [S.l.], v. 25, n. 69, p.157-184, 2002.
- RESTREPO TOBÓN, Diego Alexander; RAMÍREZ BOTERO, Juan Carlos. Modelo unifactoriales de tipo de interés: aplicación al mercado colombiano. **Cuadernos de Administración**, Bogotá, v. 36, n. 21, p.133-165, jul. 2008.
- RUIZ DOTRAS, Elisabet. **Comparación de curvas de tipos de interés. Efectos de la integración financiera**. 2005. 285 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciencias Económicas y Empresariales, Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial, Universidad de Barcelona, Barcelona, 2005.
- SANTANA, Juan Camilo. La curva de rendimientos: una revisión metodológica y nuevas aproximaciones de estimación. **Cuadernos de Economía**, Bogotá, v. 17, n. 48, p.71-113, abr. 2008.
- STEELEY, James M. Modelling the dynamics of the term structure of interest rates. **Economic & Social Review**, Dublin, v. 21, n. 4, p. 337-361, jul.1990.
- STEELEY, James M. Estimating the Gilt-edged Term Structure: Basis Splines and Confidence intervals **Journal of Business Finance & Accounting**, Coventry, v. 18, n. 4, p. 513-529, jun. 1991.
- STEELEY, James M. Testing term structure estimation methods: Evidence from the UK STRIPs market. **Journal of Money, Credit and Banking**, Columbus, v. 40, n. 7, p. 1489-1512, out. 2008.
- SVENSSON, Lars E. O. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. N°.w4871. **National Bureau of Economic Research**, Cambridge.1994.
- VASICEK, Oldrich A.; FONG, H. Gifford. Term structure modeling using exponential splines. **Journal of Finance**, Philadelphia, v.37, n. 2, p. 339-348, maio. 1982.

VÁSQUEZ, Diego Mauricio; MELO VELANDIA , Luis Fernando. Estimación de la estructura a plazos de las tasas de interés en Colombia por medio del método de funciones B-spline cúbicas. **Borradores de Economía**, Bogotá, n. 210, p.1-32, maio 2002.

VAUTARD, R., GHIL, M. Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with application to paleoclimatic time series. **Physica D: Non linear Phenomena**, California, n. 35, p. 395-424, maio. 1989.

WELCH, Ivo; GOYAL, Amit. A comprehensive look at the empirical performance of equity premium prediction. **Review of Financial Studies**, Oxford, v. 21, n. 4, p. 1455-1508, 2008.