

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**EFEITO DE ESCALA NO CRESCIMENTO DE TRINCAS POR
FADIGA EM MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS**

Evandro Esteban Pandia Cayro

Porto Alegre
2016

Evandro Esteban Pandia Cayro

**EFEITO DE ESCALA NO CRESCIMENTO DE TRINCAS POR
FADIGA EM MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Orientação: Prof. Dr. Eduardo Bittencourt

Porto Alegre
2016

CIP - Catalogação na Publicação

Pandia Cayro, Evandro Esteban

Efeito de escala no crescimento de trincas por fadiga em materiais quase frágeis / Evandro Esteban Pandia Cayro. -- 2016.

99 f.

Orientador: Eduardo Bittencourt.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2016.

1. Modelo coesivo irreversível de dano. 2. efeito de escala. 3. materiais quase frágeis. I. Bittencourt, Eduardo, orient. II. Título.

Evandro Esteban Pandia Cayro

**EFEITO DE ESCALA NO CRESCIMENTO DE TRINCAS POR
FADIGA EM MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na Área de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 29 de março de 2016

Prof. Eduardo Bittencourt

Dr. Pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Orientador

Prof. PhD Carlos Torres Formoso

PhD pela University of Salford
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Samir Maghous (PPGEC/UFRGS)

Dr. pela Ecole Nationale Des Ponts Et Chaussées

Prof. Marcelo Maia Rocha (PPGEC/UFRGS)

Dr.tech. pela Universitaet Innsbruck, Áustria

Prof Ignacio Iturrioz (PROMEC/UFRGS)

Dr. Pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Ao meu pai, que do céu acompanha cada um
de meus passos.

AGRADECIMENTOS

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelo acolhimento nas suas prestigiosas aulas, aos meus professores do mestrado que me formaram, e aos companheiros com os quais compartilhamos histórias e conhecimento.

A minha família e as pessoas que se tornaram minha família, por compreender-me e apoiar-me, nos meus sonhos, em especial a minhas tias e ao meu pai por ter me guiado até aqui.

Um imenso agradecimento ao meu orientador Eduardo Bittencourt, por ter me guiado pelos passos certos, por todo o apoio e ajuda durante cada etapa da dissertação, pelos valiosos comentários e contribuições que sempre me faz.

RESUMO

PANDIA, E.E. Ruptura de materiais quase-frágeis em cargas cíclicas considerando mudanças de escala. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

No trabalho estuda-se o crescimento de trincas em carga monotônica e cíclica nos casos de materiais quase-frágeis, introduzindo uma lei de dano cíclico. Revisam-se conceitos sobre modelos coesivos, leis de carga-descarga, leis de evolução de dano e efeito de escala. É seguido o modelo coesivo irreversível proposto por Wang e Siegmund (2006). Em particular se dá ênfase aos efeitos de escala não estatísticos. O modelo de zona coesiva irreversível apresenta uma formulação de dano e considera carregamento em fadiga. Quando o tamanho estrutural é reduzido (ou as trinca se estendem), a fratura por fadiga não mais ocorre por propagação de trinca, mas sim por uma decoesão uniforme.

O objetivo deste trabalho é implementar este modelo e verificar sua potencialidade na captura de efeitos de escala, comparando com experimentos e dados disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Modelo coesivo irreversível de dano; efeito de escala; materiais quase-frágeis

ABSTRACT

PANDIA, E.E. Size effect on fatigue crack growth in quise-brittle materials. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

At present work is intended to study crack growth in cyclic and monotonic loading in the case of quasi-brittle materials, introducing a damage mechanism, is reviewed concepts of cohesive models, loading-unloading laws, damage evolution laws and effect of scale. The irreversible cohesive zone model proposed by Wang e Siegmund (2006) is followed. In particular emphasizes in the not statistical size effects. The irreversible cohesive zone model, presents a damage formulation and considers fatigue loading. It is demonstrated in this study that, when the structure size is reduced (or extend cracks), the fatigue fracture no longer occurs by crack propagation, then occurs by uniform decohesion .

The objetive of this work is implementing this model and verify its capability to capture the scale effect compared with experiments and data available in literature.

Keywords: Irreversible cohesive zone model; size effect; quasi-brittle material.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 OBJETIVOS	21
1.2 JUSTIFICATIVA	21
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1 MODELOS DE FADIGA	23
2.1.1 Modelos sem considerar efeitos de escala	23
2.1.2 Modelos com considerações de efeitos de escala	26
2.2 MODELOS DE ZONA COESIVA EM FADIGA	31
2.2.1 Modelos coesivos em função da lei de carga-descarga	31
2.2.1.1 Leis de carga-descarga linear	31
2.2.1.2 Leis de carga-descarga linear com deslocamento residual	34
2.2.1.3 Leis de carga não linear e descarga linear	34
2.2.2 Modelos coesivos em função da incorporação da lei de dano	35
2.2.2.1 Considerações do dano de Lemaitre (2012)	36
2.1 EFEITO DE ESCALA	38
2.1.1 Leis de efeito de escala procedentes da mecânica da fratura	38
2.1.2 Lei de efeito de escala estatístico proposto por Weibull (1939)	45
3 METODOLOGIA	49
3.1 PRINCÍPIO DE TRABALHOS VIRTUAIS (PTV)	49
3.2 DESCRIÇÃO DO MODELO COESIVO DE NEEDLEMAN	50
3.3 DESCRIÇÃO DO MODELO DE DANO DE ROE E SIEGMUND (2003)	52
3.3 DESCRIÇÃO DO ALGORITMO	55
4 APLICAÇÕES	62
APLICAÇÃO 1: DUAS SUPERFÍCIES COM SOBRECARGA	62

APLICAÇÃO 2: FADIGA EM DOIS ELEMENTOS FINITOS E UM ELEMENTO DE INTERFACE	65
APLICAÇÃO 3: ANÁLISE DO EFEITO DE ESCALA EM CARREGAMENTO MONOTÔNICO	68
APLICAÇÃO 4: ANÁLISE DO EFEITO DE ESCALA EM FADIGA.....	72
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
5.1 CONCLUSÕES	84
5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	85
ANEXO A – FLUXOGRAMA DA IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO	86
ANEXO B – DEDUÇÃO TEÓRICA DA FORMULAÇÃO DO EFEITO DE ESCALA	90
B.1 – DEDUÇÃO DO EFEITO DE ESCALA USANDO A INTEGRAL J	90
B.2 – DEDUÇÃO DO EFEITO DE ESCALA USANDO CONCEITOS DO MODELO DISTRIBUÍDO E A INTEGRAL J	92
BIBLIOGRAFIA	95

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. 1 Zona de fratura de processos no concreto	18
Figura 1. 2 Mecanismos de danificação em carga cíclica. Adaptado de Ritchie (1999).....	18
Figura 1. 3 Trinca por fadiga em um pilar de uma ponte	19
Figura 2. 1 Diagrama dos eixos de trem analisados por Wöhler.....	23
Figura 2. 2 Curvas <i>S-N</i> para o aço e o alumínio	24
Figura 2. 3 Representação gráfica da lei de Paris.....	25
Figura 2. 4 Retas e dados experimentais da lei de Paris dependente do tamanho. Adaptado de Bazant (2002)	26
Figura 2. 5 Lei de escalamento multifractal do parâmetro <i>C</i> da lei de Paris.....	30
Figura 2. 6 Lei de carga-descarga linear até a origem com diminuição e escalamento da tensão coesiva	32
Figura 2. 7 Lei coesiva usada em Yang e Ravichandar (1996).....	32
Figura 2. 8 Lei coesiva usada em Camacho e Ortiz (1996).....	32
Figura 2. 9 Lei coesiva usada em De andrés et al (1999) e Ortiz e Pandolfi (1999).....	33
Figura 2. 10 Lei coesiva usada em Ural et al. (2009).....	33
Figura 2. 11 Lei de lei de carga-descarga linear com deslocamento residual	34
Figura 2. 12 Lei de carga-recarga não linear e descarga linear	35
Figura 2. 13 Lei coesiva usada em Yang et al. (2001)	35
Figura 2. 14 Lei coesiva usada em Nguyen et al. (2001)	35
Figura 2. 15 Esquema para a explicação do efeito de escala. Adaptado de Bazant (2004).....	39
Figura 2. 16 Efeito de escala tipo 1 em estruturas sem trinca	42
Figura 2. 17 Efeito de escala tipo 2 em superfície com trinca e efeito de escala tipo 3 em estrutura com zona danificada.	42
Figura 2. 18 Lei de escala multifractal	44
Figura 2. 19 Lei de escala multifractal em diagrama bi logarítmico.	44
Figura 2. 20 Mudança de distribuição de Gauss a Weibull.....	45
Figura 2. 21. Arranjo de modelos em serie e paralelo na representação de um volume representativo da estrutura.....	46
Figura 3. 1 Corpo de estudo	49
Figura 3. 2 Tensão normal T_n normalizada como uma função de Δ_n	50

Figura 3. 3 Tensão normal T_t normalizada como uma função de Δ_t	51
Figura 3. 4 Elemento de interface.....	52
Figura 3. 5 Lei cíclica de tensão-deslocamento incluindo o dano.....	52
Figura 3. 6 Algoritmo dos processos de implementação computacional (simplificado)	57
Figura 3. 7 Deslocamentos prescrito de duas superfícies vs tempo	57
Figura 3. 8 Gráfico histerético das tensões normais vs deslocamentos (cargas e descargas)...	61
Figura 4. 1 Deslocamentos prescrito de duas superfícies vs tempo	62
Figura 4. 2 Relação histerética de tensoes vs deslocamentos.....	63
Figura 4. 3 Evolução do dano no tempo.....	64
Figura 4. 4 Evolução do dano no percorrido do deslocamento	64
Figura 4. 5 Esquema do exemplo analisado	65
Figura 4. 6 Deslocamento prescrito nos nós superiores	65
Figura 4. 7 Deslocamento normal no primeiro ponto de Gauss vs tempo	66
Figura 4. 8 Relação histerética de tensões normais com o deslocamento normais em cada ciclo de carregamento.....	67
Figura 4. 9 Evolução do dano no percorrido do deslocamento	68
Figura 4. 10 Espécime analisado em carga monotônica variando a altura.....	68
Figura 4. 11 Distribuição de tensões normais no contorno da trinca em vários espécimes	70
Figura 4. 12 Comparação dos estados de falha monotônicos (teóricos e computacionais) em função da tensão normal e a altura dos espécimes em escala bilogarítmica	71
Figura 4. 13 Espécimen analisado em carga cíclica variando sua altura.....	72
Figura 4. 14 Deslocamento cíclico prescrito de carga e descarga.....	72
Figura 4. 15 Deslocamento normal vs número de ciclos em espécimes representativos	75
Figura 4.16 Número de ciclos iniciais para o começo da propagação	76
Figura 4. 17 Extensão de trinca normalizada com o número de ciclos, para todos os espécimenes	77
Figura 4. 18 Extensão de trinca normalizada com o número de ciclos, para todos os espécimes obtido por Wang e Siegmund (2006)	78
Figura 4. 19 Lei de Paris para o espécime $h_s/\delta_0 = 750$	80
Figura 4. 20 Distribuição do dano ao longo do comprimento da linha de elementos coesivos quando $N=15,5$ ciclos	80
Figura 4. 21 Distribuição do deslocamento ao longo do comprimento da linha de elementos coesivos quando $N=15,5$ ciclos	81

Figura 4. 22 Distribuição das tensões normalizadas $\sigma_{22}/\sigma_{max,0}$ ao redor da ponta da trinca.	82
Figura 4. 23 Distribuição das tensões normalizadas $\sigma_{22}/\sigma_{max,0}$ ao redor da ponta da trinca obtidos pelo Wang e Siegmund (2006)	83

LISTA DE QUADROS

Tabela 3. 1 Dados do material	58
Tabela 3. 2 Valores das tensões normais T_{ni} , incrementos de dano ΔD_{ci} e dano total D_c em cada ciclo	60
Tabela 4. 1 Dados do material e do modelo de dano.....	62
Tabela 4. 2 Valores do dano ao final de cada ciclo	63
Tabela 4. 3 Dados do material e do modelo de dano.....	66
Tabela 4. 4 Dados do material e do modelo de dano.....	69
Tabela 4. 5 Valores normalizados das alturas dos espécimes analisados	70
Tabela 4. 6 Resultados das tensões normais normalizadas na ponta da trinca para várias alturas normalizadas	71
Tabela 4. 7 Dados do material e do modelo de dano.....	72
Tabela 4. 8 Amplitude máximo do deslocamento prescrito para cada espécimen	73
Tabela 4. 9 Número de ciclos de incubação por espécime	76

LISTA DE SÍMBOLOS

- Δ_n : Incremento de separação do material
- a_0 : Comprimento da trinca inicial
- a : Comprimento da trinca
- a^* : Comprimento da trinca renormalizada
- c_f : Metade do comprimento da zona de fratura de processos
- dg : Parâmetro relativo à dimensão de um fractal
- A : Constante de penalidade
- C_{MF} : Parâmetro do material da lei de Paris com considerações multifractais
- D, D_c : Variável de dano
- \dot{D}_c : Incremento de dano
- E : Módulo de elasticidade
- F_D : Função potencial de dano
- F_{int} : Tensor de forças internas
- F_{ext} : Tensor de forças externas
- T_n : Tensão coesiva normal
- T_t : Tensão coesiva tangencial
- $\sigma_{max}, \sigma_{max,0}$: Tensão coesiva máxima e tensão normal máxima inicial
- σ_y : Tensão de escoamento
- σ_N : Tensão nominal
- $\bar{\sigma}_N$: Tensão nominal média
- σ_{Nu} : Tensão nominal última
- σ_{Ni} : Tensão nominal de iniciação de trinca
- δ_0 : Comprimento característico coesivo na direção normal
- δ_w : Comprimento coesivo acumulado
- σ_f : Tensão máxima limite sem dano
- H : Tamanho de uma estrutura, função de Heaviside
- $\Delta_{n,acc}$: Abertura acumulada do material
- Δ_n : Abertura normal à superfície da trinca
- Δ_t : Abertura tangencial à superfície da trinca
- $\Delta_{n,max}$: Abertura máxima de um ciclo

ΔK^* : Intervalo do fator de intensidade de tensões renormalizado

$T_{n,max}$: Tensão correspondente ao $\Delta_{n,max}$ de um ciclo

t : tempo

ν : Módulo de Poisson

φ_0 : Energia de fratura coesiva normal

Π : Energia potencial

l : Comprimento de escala

l_0 : Comprimento de referência do volume representativo

h, h_s : Altura do espécime

$P_1(\sigma)$: Função de densidade da probabilidade da tensão

W : Trabalho realizado por uma partícula

$\tilde{\sigma}$: Tensão efetiva

X : Tensor de endurecimento cinemático

Y : Densidade de taxa de alívio de energia

R : Tensor de endurecimento isotrópico

t_c : Tempo de um ciclo de carga e descarga

N : Número de ciclos

k : Variável que indica a inclinação de uma reta

K : Fator de intensidade de tensões

K_f : Fator de intensidade de tensões em uma estrutura infinitamente grande

p, p_D : deformação plástica e deformação plástica limite

r : deformação plástica

Ψ : Fator constante do modelo estatístico que depende da geometria

V : Volume da estrutura

ξ : Vetor relativo as coordenadas

$\hat{\sigma}(\xi)$: Campo adimensional de tensões

n_d : Número das dimensões

Γ : Função gama

ω : Coeficiente de variação da tensão

K_{coe}^{el} : Matriz de rigidez tangente

B : Matriz de função de forma

Θ : Matriz de rotação

R : Matriz de rigidez

1 INTRODUÇÃO

Por definição a fadiga é a fratura no tempo de um material submetido às tensões cíclicas que estão abaixo da tensão de falha do material (em carregamento estático). Assim a fadiga só ocorre se, pelos menos numa parte do carregamento cíclico as tensões trativas estão presentes (BITTENCOURT, E., 2011). No processo em que acontecem as tensões cíclicas a trinca inicia-se em pontos onde há imperfeição estrutural ou de composição e/ou de alta concentração de tensões produzindo-se micro trincas, deformações plásticas, rugosidades, asperezas, e outros processos (originando assim dano micro estrutural), que vão degradar as propriedades mecânicas, resultando numa origem de trinca que com o prosseguimento do carregamento, vai crescendo, até atingir um tamanho suficiente para provocar a ruptura final.

A fadiga em geral, pode ser caracterizada por 3 etapas: I-Nucleação, II-Propagação estável, III-Propagação instável. Na Nucleação (etapa I) existe acumulação de dano que vai dar origem à trinca, existindo um número de ciclos de incubação. Na propagação estável (etapa II) a trinca avança a velocidade constante. A propagação instável (etapa III) e a última parte do ciclo de vida de uma estrutura sendo que a falha ocorre quando atinge um determinado nível de diferença de intensidade de tensões ou o material encontra-se o suficientemente danificado para opor resistência às tensões externas.

A fadiga ao longo da história tem causado muitos acidentes catastróficos principalmente após a revolução industrial com o aumento de escala e magnitude das construções. Um dos mais emblemáticos ocorreram:

Em 1953-1954 com a queda dos aviões Comets. Descobriu-se que as quedas ocorreram por propagação de trincas que se originaram nas proximidades dos cantos das janelas quadradas do avião, e que se propagavam por fadiga causada pela pressurização/despressurização da cabine. Após a descoberta nenhum avião pressurizado usaria janelas sem cantos arredondados.

Em 1967 a ponte Silver que ligava o estado de W. Virginia a Ohio desaba. O vão central tinha mais de 130 metros. Em lugar de cabos, a ponte era suspensa por correntes ligadas por pinos. Um de elos de corrente se rompeu por clivagem devido ao clima frio e a sobrecarga, causando

ruptura dúctil de um dos pinos. Com a ruptura de uma das correntes, toda a estrutura colapsou, causando a morte de 46 pessoas. A ruptura foi causada por micro trincas que cresceram por fadiga e corrosão combinados.

Em 1980, em Noruega, a plataforma de perfuração de petróleo “Alexander L. Kielland” colapsou. Mais de 200 trabalhadores estavam fora de serviço nas acomodações da plataforma, quando ocorreu um rompimento. Cinco dos seis cabos de ancoragem da plataforma romperam. Mais de 120 trabalhadores foram mortos durante o naufrágio. A origem do colapso foi causada pela fissuração por fadiga em um dos suportes estruturais da plataforma. A trinca inicial foi atribuída a um pequeno cordão de solda de seis mm. As tensões cíclicas experimentadas pela plataforma no Mar do Norte serviram para agravar ainda mais a situação.

Segundo um estudo independente feito por Battelle (1982), as falhas em componentes causadas por mecanismos de fadiga representam 80 a 90% de todas as falhas estruturais registradas em associação com mecanismos de plasticidade cíclica, escorregamento ou contato, dano ambiental (fadiga por corrosão) e temperaturas elevadas (dano por fluência) (RITCHIE, 1999). Assim é importante o estudo e a compreensão dos processos e fatores envolvidos durante o desenvolvimento da fadiga no tempo. Sendo parte chave na aplicação em diversos campos da indústria e engenharia. A aplicação dos conceitos da mecânica de fratura em fadiga permite estabelecer tolerâncias admissíveis no projeto de estruturas como: vasos de pressão, fuselagem de aviões, cascos de navios, pás de turbinas, fundações e pilares de pontes de concreto armado, barragens de concreto, etc. Assim as estruturas podem ser reparadas antes que a trinca alcance um tamanho crítico.

O concreto sendo um material quase frágil apresenta uma zona denominada zona de fratura e processos (ZFP) (Figura 1.1). Quando o corpo é submetido a esforços externos. A zona de fratura de processos segue um processo de danificação. O processo de falha do concreto pode ser dividido em três fases:

- Formação, desenvolvimento e coalescência de microfissuras.
- Formação de pontes entre as faces da fissura pelos grãos de agregados
- Formação de um macro fissura, com possibilidade de engrenamento dos agregados.

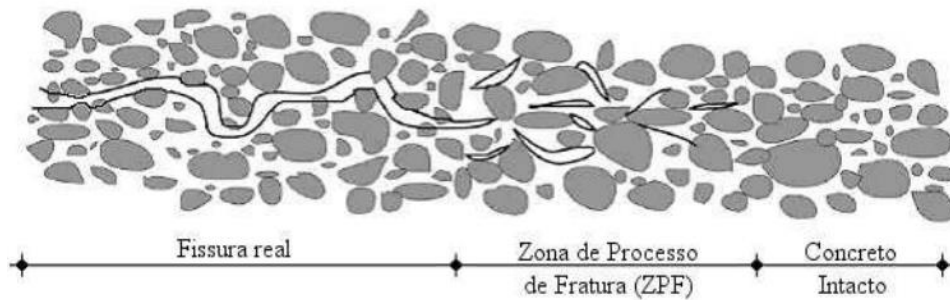


Figura 1. 1 Zona de fratura de processos no concreto

Em Ritchie (1999), consideram-se dois tipos de mecanismos de dano, para carregamento cíclico, um dano intrínseco micro estrutural (coalescência de vazios, fratura por clivagem) o qual é desenvolvido logo da ponta da trinca, e um mecanismo extrínseco que atua antes da trinca como escudo para retardar o crescimento da mesma (pontes de fibras, pontes de grãos). No caso do concreto a duas zonas formariam parte da zona de fratura de processos.

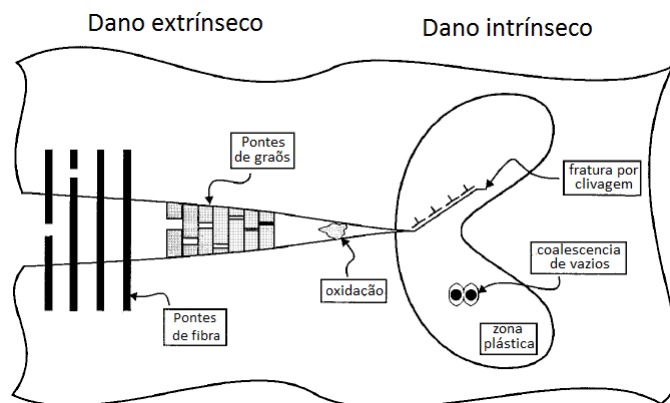


Figura 1. 2 Mecanismos de danificação em carga cíclica. Adaptado de Ritchie (1999)

Assim a fadiga no concreto e outras matérias quase-frágeis ocorre na zona de processo de fratura, que é uma zona não desprezível com respeito ao tamanho da estrutura, onde acontecem processos complexos e obedecem a certas leis que estão relacionadas á perda de ligações (pontes entre os agregados, varias micro trincas, fricção e atrito). Segundo o estudo recente de Bazant e Kirane (2016) é verificado numérica e experimentalmente que o tamanho da zona e fratura de processos para o caso de carga cíclica é menor comparada com o caso monotônico. O tamanho é reduzido em ao redor de 50–60%.

Apresenta-se um exemplo de uma trinca desenvolvendo um processo de fadiga em um pilar de uma ponte de concreto, sujeita a carregamentos variáveis dos veículos que transitam por o mesmo. (BITTENCOURT, T. N., 1999).

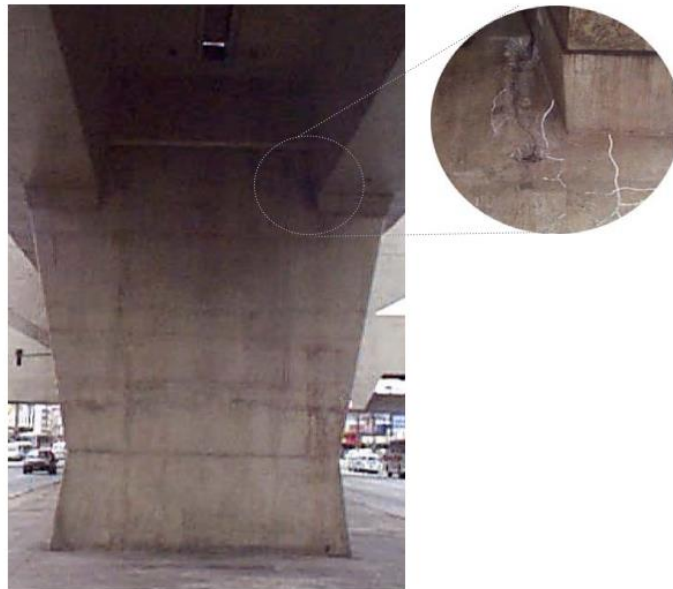


Figura 1. 3 Trinca por fadiga em um pilar de uma ponte

A tensão nominal de um material dado, muda com o escalonamento do tamanho do espécime. Em consequência a tensão deixa de ser uma constante do material, e tal efeito é denominado efeito de escala (SPAGNOLI; CARPINTIERI, 2004). Segundo Bazant (2004), o efeito de escala é principalmente determinístico envolvendo redistribuição de esforços e alívio de energia armazenada, produzida pela trinca ou pela zona de fratura de processos.

A faixa de escala nos testes de laboratório é geralmente pequena, e assim é crucial para as leis de escalonamento a extrapolação correta das tensões em estruturas grandes para as quais o salto de escala dos espécimes de laboratório pode acrescentar muitas ordens de magnitude (SPAGNOLI; CARPINTIERI, 2004). Recentemente, há crescentes esforços para utilizar materiais quase frágeis modernos (materiais reforçados com fibra, compósitos avançados) para construir grandes infraestruturas, aeronaves de baixo consumo de combustível, automóveis esportivos com resistência à colisão e grandes navios de baixo peso, para os quais existe uma grande diferença entre a estrutura de grande escala e o espécime de laboratório.

A escala e o tamanho governa quase tudo em fratura, em concreto normal o concreto ciclópico, a zona de processos de fratura têm um comprimento $c_F \approx 0,5 m$; em concreto de represas com agregado grande $c_F \approx 3 m$; nas mesmas condições para propagação de fratura em gelo marinho $c_F \approx 10 m$, em uma montanha com rochas $c_F \approx 50 m$. Por outro lado, a zona de fratura de processos num bloco de granito $c_F \approx 1 cm$, em cerâmicas de óxido de silicone $c_F \approx 0.1 mm$, numa pequena fatia de silicone puro $c_F \approx 10 - 100 nm$ (BAZANT, 2002). Baseado nestas características do material Bazant (2002) projeta uma relação de dimensão entre a altura de uma estrutura H e o tamanho da fratura de zona de processos c_F nos métodos de análise:

Para $H/c_F > 100$, é aplicável a mecânica da fratura linear elástica.

Para $5 \leq H/c_F < 100$, é aplicável a mecânica da fratura não linear em matérias quase frágeis.

Para $H/c_F < 5$, aplicável o dano não local, modelos de elementos discretos, plasticidade.

Quando H tende a zero, a falha não se propaga e deve acontecer simultaneamente ao longo da superfície inteira de falha (decoesão), para dimensões de H não muito grandes, a fratura coesiva se desenvolve em diferentes seções causando efeitos de escala complexos. Para valores de H maiores, a fratura ocorre em sequencia e somente é governado pela força aplicada (BAŽANT, 2004).

Os grandes valores do fator de segurança (cerca de 3 a 8 para as estruturas de tamanho pequeno) considerados nos códigos de desenho em concreto mostram que para o colapso de estruturas não somente é considerado o efeito de escala, sendo que vários erros acontecem na prática. Assim o efeito de escala pode ser um fator significativo no colapso da estrutura. Investigação recente mostra que o efeito de escala tem desempenhado um papel importante no colapso da Malpasset Dam (1959), St. Francis Dam em L. A. (1928), armazém em Wilkins Airforce base (1955) e plataforma de petróleo Sleipner na Noruega (1991). Um estudo preliminar do colapso da ponte de Koror-Babeldaob na República de Palau (1996) também mostra uma redução maior das tensões resistentes devido ao efeito de escala (BAZANT et al., 2009).

Um método apropriado para a análise da fadiga com efeito de escala é o método de elementos finitos. Quando acoplado com elementos de interface consegue modelar as variações

energéticas que existem num corpo quando são variadas suas dimensões (altura e espessura), sendo que estas variações energéticas no corpo originam o efeito de escala. Assim, já mostraram resultados satisfatórios na análise de efeitos de escala como é reportado em Bazant (2002).

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é explorar a propagação de uma trinca em carregamento monotônico e carregamento cíclico em materiais quase-frágeis, além de capturar o efeito de escala com a mudança no tamanho dos espécimes analisados. Têm-se os seguintes objetivos específicos:

- Implementar o modelo de dano proposto por Roe e Siegmund (2003) dentro do programa Metafor (PONTHOT, 1995).
- Validar o efeito de escala da tensão última em carga monotônica
- Verificar o comportamento da velocidade do avanço da trinca nos estágios do processo de fadiga e com variação de escala.
- Validar resultados através da comparação com resultados obtidos por Wang e Siegmund (2006).
- Verificar os mecanismos de ruptura (crescimento progressivo e decoesão uniforme), a medida que se varia a altura do espécime.

1.2 JUSTIFICATIVA

O estudo do modelamento da falha em fadiga em matérias quase frágeis tomando em conta o tamanho e a geometria, ainda é um assunto pendente. Tem-se uma vasta informação sobre o comportamento da fadiga em materiais metálicos sendo pouca a informação em materiais quase-frágeis. Em materiais quase-frágeis é importante o comportamento da zona de fratura de processos, a qual é analisada em carga cíclica e com aumento ou diminuição do tamanho da estrutura.

É conhecido que a tensão de materiais está influenciada pelo tamanho da estrutura, tem-se evidencia experimental que manifesta isto: Walsh (1972), Bazant e Xu (1991), entre outros. O

estudo do processo da fadiga misturado com efeito de escala é ainda um tema em desenvolvimento, as análises típicas não consideram o efeito de escala (elasticidade, plasticidade, visco elasticidade, visco plasticidade). Praticamente todas as estruturas estão submetidas a algum tipo de carga cíclica. Portanto a consideração dos dois efeitos é de grande importância tecnológica, além de científica. Sendo que a maioria do projeto estrutural atual em grades escalas é baseada na identificação de propriedades do material em pequena escala.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação está estruturada em 4 capítulos.

No Capítulo 1 que é a Introdução se define a fadiga e se faz uma descrição dos casos históricos, refere-se também à fadiga em materiais quase-frágeis e efeito de escala e se mostra exemplos casos de falha em materiais quase-frágeis em fadiga e considerando mudanças de escala.

No Capítulo 2 que é a Revisão Bibliográfica. Descrevem-se os modelos de fadiga cronologicamente e os modelos coesivos aplicados à fadiga classificados em função a carga descarga e a modelos de consideram e não consideram dano. Descreve-se a teoria de dano de dano de Lemaitre (2012). Discorre-se também sobre o efeito de escala fazendo uma revisão das teorias principais presentes na literatura e suas principais características.

No Capítulo 3 que é a Metodologia. Faz-se uma descrição da ferramenta dos elementos finitos com elementos de interface, descrição do modelo coesivo de Needleman (1990b), descrição detalhada do modelo cíclico de dano de Siegmund (2003). Descreve-se também o algoritmo e se faz um exemplo simples.

No Capítulo 4. Seguem as aplicações desde o caso mais simples de duas superfícies, uma análise em dois elementos finitos com um elemento de interface e finalmente a análise de um espécime típico sujeito primeiro a um deslocamento prescrito monotônico e posteriormente a um deslocamento prescrito cíclico.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 MODELOS DE FADIGA

2.1.1 Modelos sem considerar efeitos de escala

2.1.1.1 Modelo de Wöhler (1855)

Wöhler no século XIX estudou a falha de eixos do trem. Os eixos do trem são basicamente uma viga de flexão em quatro pontos, a qual produz tensões compressivas ao longo da superfície superior e tensões trativas ao longo da superfície inferior. Após o eixo tenha rodado uma meia volta à parte inferior torna-se a parte superior e vice-versa. De modo que as tensões sobre uma determinada região de material na superfície varia sinusoidalmente de tensão a compressão e de volta. Este gera assim uma carga cíclica sinusoidal.

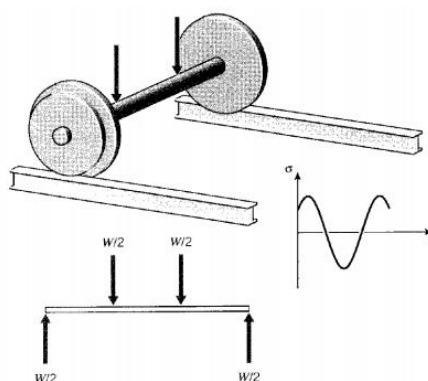


Figura 2. 1 Diagrama dos eixos de trem analisados por Wöhler

Assim Wöhler reportou as seguintes conclusões que foram chamadas como leis de Wöhler:

Um material pode ser induzido a falhar por a repetição constante de tensões, todas as tensões estão abaixo da tensão de falha estática. As amplitudes de tensão são decisivas para a destruição da coesão do material

Wöhler representou seus resultados em tabelas. Seu sucessor Spangenberg (1875), plotou as curvas em escala normal de tensão vs número de ciclos (quando em uma certa tensão S , o material falha em N ciclos), as quais foram chamadas as curvas de Wöhler ou S-N. Aplicações começaram em 1910 quando Basquin representou a região de vida da curva de Wöhler em escala logarítmica, a qual ainda é usada hoje (SCHÜTZ, 1996).

Nos gráfico $S-N$ (Figura 2.2), é definido o conceito de tensão de fadiga limite σ_f , como a amplitude de tensão máxima abaixo do qual o material nunca falha, presente em alguns materiais metálicos ferrosos. Para os aços o limite de resistência à fadiga σ_f está entre 35-65% do limite de resistência à tração. Embora que em materiais como o alumínio não existe a tensão de fadiga limite. Estes conceitos ajudam ao calculo de tempo de vida das estruturas.

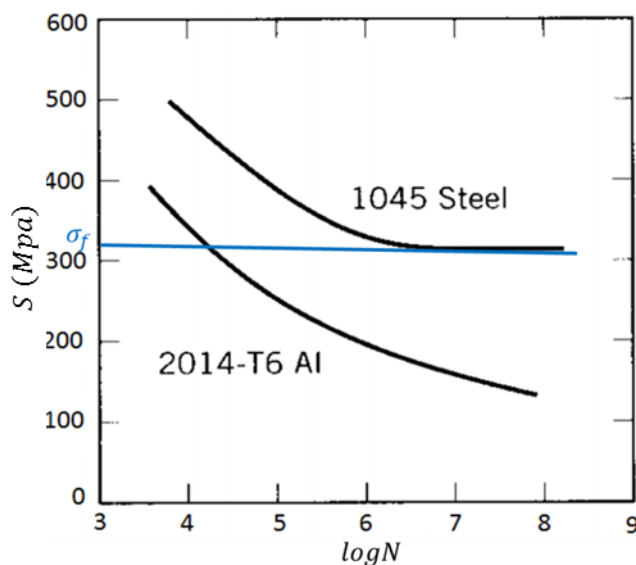


Figura 2. 2 Curvas $S-N$ para o aço e o alumínio

As curvas $S-N$ tiveram uso prático no projeto de estruturas com a incorporação do conceito de acumulação linear de dano proposto por Palgrem (1924). Conhecida como a lei de Palgrem-Miner, esta lei assume que a acumulação do dano é um processo linear, e é obtido somando os danos ocorridos em cada nível de tensão até que o dano atinge o valor de um. Na realidade física, a evolução do dano não é um processo linear como é explicado nas seções 2.2.2 e 3.3.

2.1.1.2 Modelo de Paris

Os modelos da mecânica da fratura tratam o problema da fadiga como um fenômeno de crescimento de trinca. Assim Irwin (1957) relaciona os fenômenos de fadiga em metais com a fratura relacionada com os fatores de intensidade de tensões.

Paris (1961) notou a evidência experimental que sugeria que a taxa de crescimento da trinca da/dN podia ser relacionada linearmente com a variação cíclica do fator de intensidade de

tensões ΔK em escala logarítmica, como se mostra na Figura 1.1. Assim propõe a expressão (1).

$$\frac{da}{dN} = C [\Delta K]^m \quad (1)$$

Sendo da/dN a taxa de crescimento em fadiga por ciclo, $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ é a diferença do valor do fator de intensidade máximo menos o fator de intensidade mínimo correspondentes à tensão máxima e mínima respectivamente e C e m são parâmetros que dependem do material, do ambiente, da frequência, temperatura e do $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ (stress ratio).

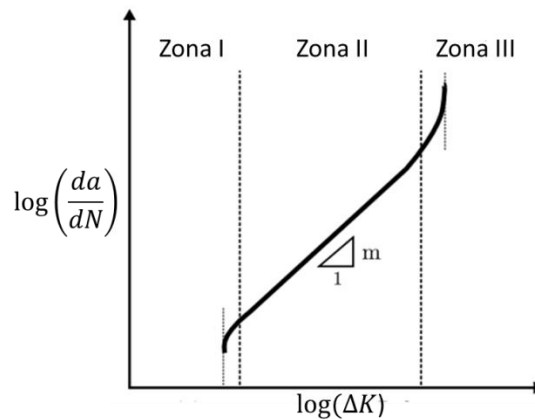


Figura 2. 3 Representação gráfica da lei de Paris

Na prática estas teorias deram resultado eficaz só em problemas cíclicos de amplitude de carga constante e em materiais homogêneos. Isto representa uma limitação muito grande na aplicação de tensões combinadas e seu uso fica restrita a zona II do processo de fadiga, que a zona de crescimento estável da trinca. O uso mais generalizado se dá no estudo da degradação por delaminação em fadiga.

Também é possível o uso do modelo de Paris em concreto, considerando as correções do modelo da trinca efetiva elástica proposto por Jenq e Shah (1985).

Têm-se outras leis empíricas baseadas na lei de Paris que adicionam outros parâmetros, pode se ver uma revisão detalhada em Beden *et al.* (2009). Como exemplos podemos mencionar o modelo de Forman e Mettu (1990) que amplia a análise para as regiões II e III, o modelo de

Klesnil e Lukas (1992) para a região I e II, e o modelo empregado pela NASA, para as três regiões, entre outros modelos.

2.1.2 Modelos com considerações de efeitos de escala

2.1.2.1 Modelo de Paris dependente do tamanho (BAZANT, ZDENEK P, 1984)

Foi observado que, ao plotar em escala bi logarítmica os valores de da/dN vs ΔK em vigas de concreto de diferente tamanho, os gráficos resultantes não eram coincidentes, mas achavam-se separadas e aproximadamente paralelas, implicando um efeito de escala no coeficiente C da lei de Paris, embora não no expoente m (Figura 2.4).

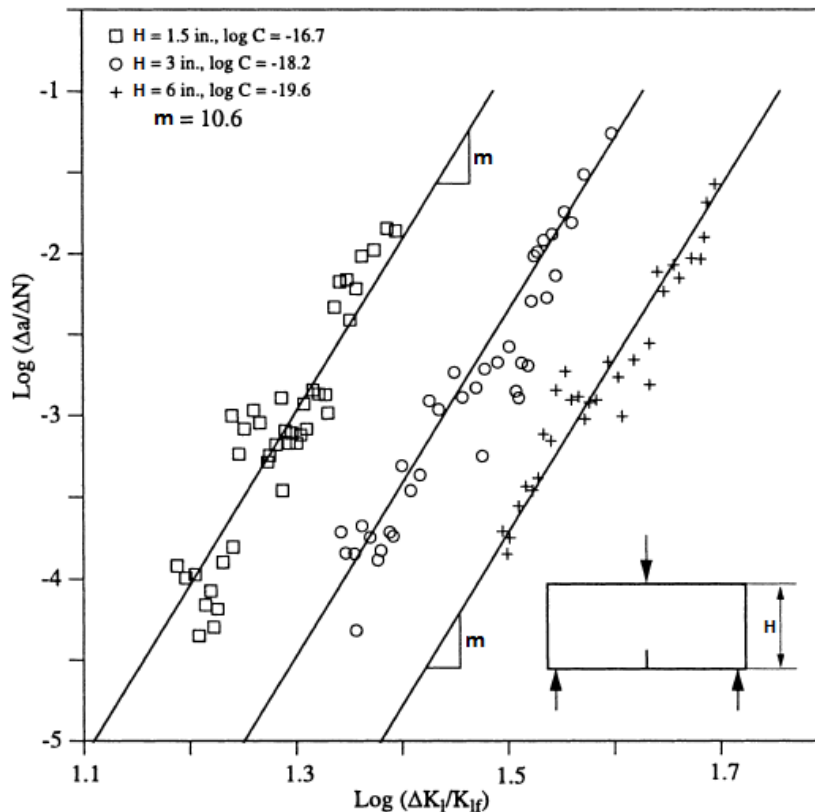


Figura 2. 4 Retas e dados experimentais da lei de Paris dependente do tamanho. Adaptado de Bazant (2002)

Para expressar a lei de Paris como uma propriedade do material, independente do tamanho da estrutura. Bazant e Zdenek (1984) propõem uma modificação (equação 2) baseando-se nas leis de escalonamento e considerando que o efeito de escala é originado no alívio de energia

acumulada devido ao crescimento estável de trincas longas ou longas zonas de dano antes da falha (BAZANT, 2003).

$$\frac{da}{dN}(H) = C \left[\frac{\Delta K}{K_c(H)} \right]^m = C \left[\frac{\Delta K}{K_f} \right]^m \left(\sqrt{1 + \frac{H_{0m}}{H}} \right)^m \quad (2)$$

Sendo H a altura o espécime, $K_c(H)$ é o fator de intensidade de tensões dependente da dimensão H , K_f é o fator de intensidade de tensões em uma estrutura infinitamente grande ($K_f = \lim_{H \rightarrow \infty} K_c(H)$), a é o comprimento da trinca, N é o número de ciclos, ΔK é a diferença entre o fator de intensidade de tensões máximo e o fator de intensidade de tensões mínimo correspondente a um histórico de carregamentos de amplitude constante. O valor de H_{0m} está relacionado com o tamanho da zona de fratura de processos em carga monotônica e com a geometria do espécime, e vem das formulas achadas por Bazant e Zdenek (1984) para o escalonamento (como é explicado mais adiante na seção 2.1.1.1).

Em Lee et al. (2014) apresenta-se uma outra dedução para a Lei de Paris tamanho dependente, considerando uma quantidade de energia para a propagação da trinca por fadiga. Se obtém a seguinte expressão

$$\frac{da}{dN} = C [\Delta K]^m \left(1 + \frac{H_{0c}}{H} \right)^{\frac{m}{2}} = C (\Delta K_D)^m \quad (3)$$

Sendo: ΔK_D o parâmetro tamanho dependente ajustado de ΔK , H_{0c} está relacionado com o tamanho da zona de fratura de processos em carga cíclica.

No estudo recente de Bazant e Kirane (2016), é demonstrado que a lei de Paris tamanho dependente (equação (2)), precisa levar em consideração os termos relacionado com o tamanho da zona de fratura em carga monotônica H_{0m} e em carga cíclica H_{0c} . Assim propuseram a seguinte correção:

$$\frac{da}{dN}(h) = C \left[\frac{\Delta K}{K_c(H)} \right]^m = C_1 [\Delta K]^m \left(\sqrt{\frac{H + H_{0m}}{H + H_{0c}}} \right)^m = C_1 (\Delta K_D)^m \quad (4)$$

Porém nestes modelos não é factível achar resposta em espécimes pequenos, onde os mecanismos de falha são diferentes aos propostos pela mecânica de fratura linear elástica, isto é quando falham por decoesão uniforme.

2.1.2.2 Modelo de Paris dependente do tamanho com análise fractal (CARPINTERI; SPAGNOLI, 2004)

O conceito básico da geometria fractal é descrito em Maldenbrot (1983). Um domínio de dimensão euclidiana apresenta um inteiro como dimensão (1 para uma reta, 2 para uma superfície e 3 para um sólido). No enquanto que o domínio de um fractal é um conjunto matemático com uma dimensão não inteira.

Os fractais são um conjunto de geometrias que seguem duas propriedades:

- Igual-Similaridade, isto é apresentam a mesma forma ou característica em cada escala.
- A dimensão não inteira. Quando apresentam uma dimensão grande são denominados fractais invasivos e quando apresentam uma dimensão pequena, fractais lacunares.

As superfícies de fratura (depois da ruptura) podem ser consideradas fractais invasivos com uma dimensão compreendida entre 2 e 3. Assim os ligamentos do material antes de atingir a carga pico podem ser considerados multifractais (MALDENBROT, 1983).

Mandelbrot (1983) apontou que a não-uniforme (multifractal) escalonamento dos fractais naturais, difere daquele uniforme dos fractais matemáticos. Isto é, na realidade física, a transição que ocorre de um regime fractal de estruturas pequenas a um regime euclidiano para estruturas maiores com respeito a um comprimento característico do material. Em outras palavras o efeito da desordem microestrutural (heterogeneidades e/ou dano micro mecânico) de um dado material no comportamento macroscópico gradualmente começa sumir com o aumento do tamanho da estrutura, como se pode observar na Figura 2. 5.

A aproximação fractal provê leis de escalonamento completamente consistentes com aquelas determinadas pelo análise dimensional. Williford (1988) modelou as superfícies da trinca, perto da ponta como fractais invasivos, onde os parâmetros são função das dimensões fractais da superfície. Segundo esta linha Spagnoli (2005) propôs a uma lei de fadiga dependente do tamanho, conforme equação (5), (CARPINTERI; PAGGI, 2011). Definem também a energia de fratura e os fatores de intensidade de tensões baseados em dimensões físicas diferentes das clássicas. A energia de fratura normalizada é definida independente da escala de observação.

$$\frac{da^*}{dN} = C [\Delta K^*]^m \quad (5)$$

Os valores a^* e ΔK^* são quantidades renormalizadas e dizer que viram independentes da escala. Sendo: $a^* = a^{1+dg}$ e $\Delta K^* = \Delta K a^{-\left(\frac{dg}{2}\right)}$. O dg é um parâmetro relativo à dimensão fractal do perfil invasivo da trinca e m uma constante do material.

A equação (5) pode ser reescrita em términos da rapidez de propagação de trinca da/dN e o fator de intensidade de tensões ΔK , da seguinte maneira:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C}{1+dg} a^{-dg\left(1+\frac{m}{2}\right)} [\Delta K]^m \quad (6)$$

Este modelo refere-se a uma aproximação monofractal (a dimensão fractal é constante em qualquer escala de observação) de efeito de escala no crescimento de trinca por fadiga.

Paggi e Carpinteri (2009) propuseram uma aproximação multi-fractal para o efeito de escala no parâmetro C da lei de Paris. Sendo representado como uma função de interpolação entre a assíntota para trincas curtas onde $dg \rightarrow 1/2$ e para trincas longas onde $dg \rightarrow 0$ (Figura 2.5). A lei de mudança do parâmetro C é dada por C_{MF} , na equação (7).

$$C_{MF} = C \left(1 + \frac{a_0}{a}\right)^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{2}\right)} \quad (7)$$

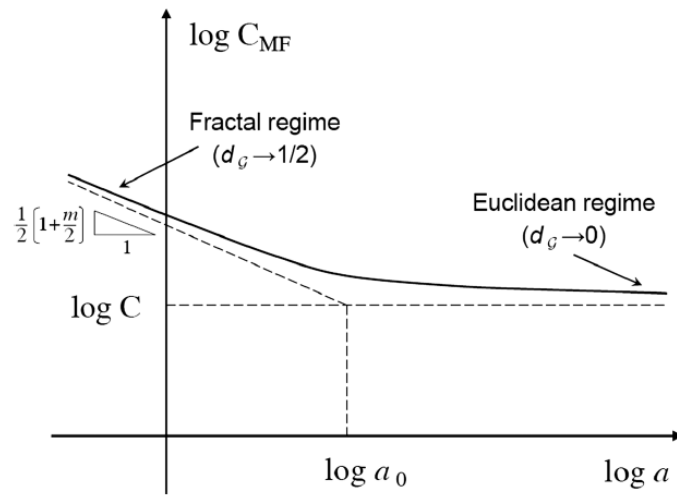


Figura 2. 5 Lei de escalamento multifractal do parâmetro C da lei de Paris. Adaptado de Paggi e Carpinteri (2009)

2.2 MODELOS DE ZONA COESIVA EM FADIGA

Os modelos de zona coesiva foram inicialmente propostos por Dugdale (1960) e Barenblatt (1962). O primeiro uso combinado com o método de elementos finitos se apresenta em Needleman (1985). No caso da fadiga, a degradação do material tem que ser considerado para o estudo do crescimento da trinca.

2.2.1 Modelos coesivos em função da lei de carga-descarga

A lei de carga e descarga representa o comportamento do material, quando o mesmo é submetido à carga cíclica. A lei de carga e descarga relaciona os deslocamentos com as tensões, segundo funções lineais e não lineais. Dependendo do tipo de material, autores sugerem diversos tipos de leis.

2.2.1.1 Leis de carga-descarga linear

A carga descarga dentro do processo cíclico acontece pela mesma trajetória linear, podendo variar a inclinação da relação de tensão deslocamento conforme vão se degradando as propriedades elásticas do material.

Para o material frágil a carga descarga linear é o mais adequado, sendo que a inclinação da carga e recarga tenha direção até a origem, como se mostra nas Figuras 2.7 e 2.8. Embora fosse usado em materiais quase-frágeis por Wang e Siegmund (2006), mas com um escalonamento da função das tensões normais T_n . Este escalonamento obedece a uma lei de dano proposto por Roe e Siegmund (2003) e é o modelo usado no presente trabalho, como se mostra na Figura 2.6. Xu e Yuang (2009) apresentaram uma variação do modelo de Wang e Siegmund (2006) considerando duas definições de dano, uma para a nucleação e outra para a propagação.

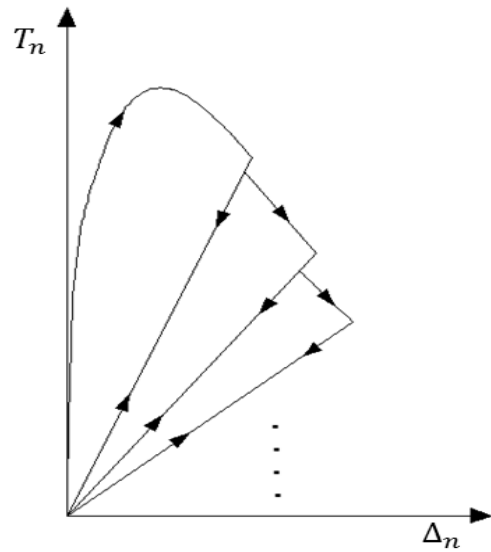


Figura 2. 6 Lei de carga-descarga linear até a origem com diminuição e escalamento da tensão coesiva

Yang e Ravichandar (1996) consideraram uma lei coesiva bi linear e efeitos de carga-descarga lineares, assim consideram o dano ao diminuir a inclinação da linha de carga-descarga, uma análise parecida e feita pelo Camacho e Ortiz, (1996) onde também se propôs uma lei coesiva irreversível, que consiste em diminuir o valor da tensão coesiva com o incremento da abertura da trinca, usado para modelar a propagação da trinca sob impacto em materiais frágeis.

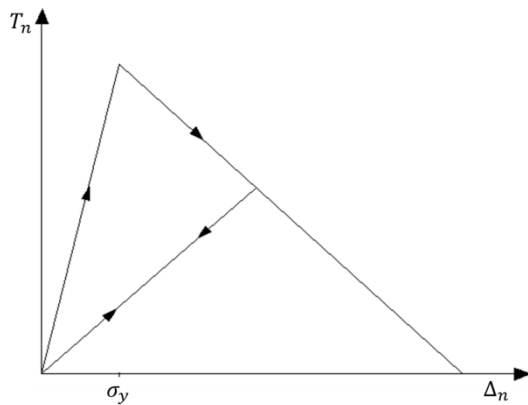


Figura 2. 7 Lei coesiva usada em Yang e Ravichandar (1996)

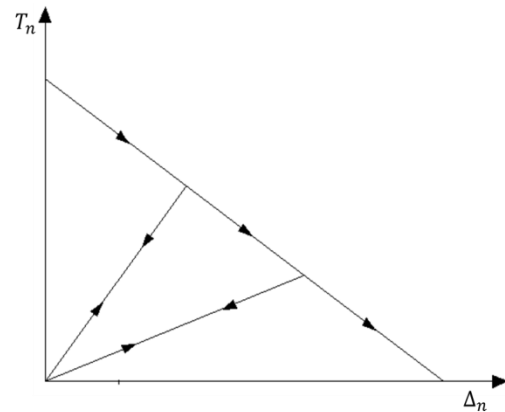


Figura 2. 8 Lei coesiva usada em Camacho e Ortiz (1996)

De Andrés et al, (1999), apresentou uma formulação com lei coesiva irreversível, considerando uma variável de dano, fazendo diminuir irreversivelmente o valor da tensão coesiva máxima para cada ciclo. O dano é relacionado com o número de ciclos de carregamento. O tipo de carga descarga considerado é como o mostrado na figura 2.9. Para a análise foi usado um elemento coesivo tridimensional e o material analisado foram placas de

alumínio. Ortiz e Pandolfi (1999) apresentaram uma análise tridimensional similar para o análise dinâmico do crescimento da trinca, considerando condições de plasticidade em longa escala. Os dois autores usam como referência a lei coesiva de Needleman (1990b).

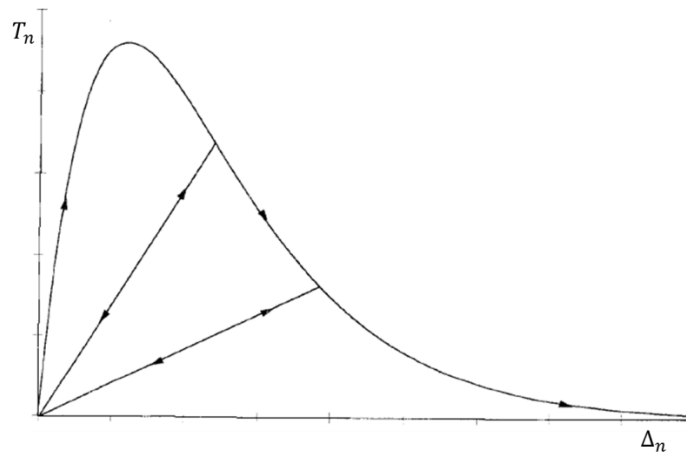


Figura 2. 9 Lei coesiva usada em De Andrés et al (1999) e Ortiz e Pandolfi (1999)

Ural *et al.* (2009), apresentaram um modelo coesivo de crescimento de trinca em placas de alumínio usando uma lei linear de modelo coesivo. Propuseram uma lei de evolução de dano baseado nos princípios do dano em plasticidade. Consideraram descarga linear com inclinação à origem de coordenadas, com o qual limita o estudo a materiais frágeis. Também é levada em conta a retardação da trinca (no tramo da descarga DO da Figura 2.10), onde o valor do dano pode diminuir.

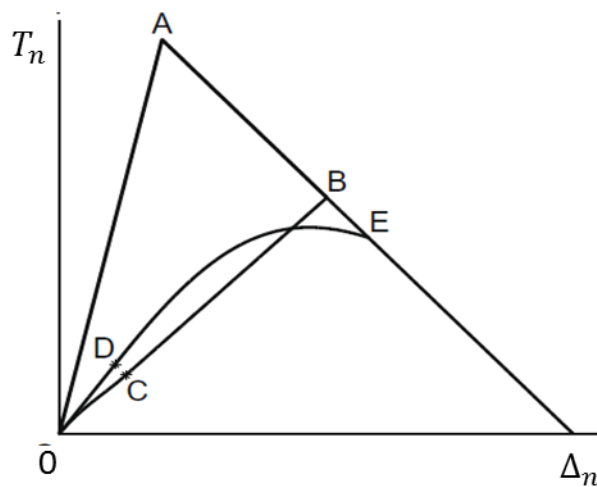


Figura 2. 10 Lei coesiva usada em Ural et al. (2009)

2.2.1.2 Leis de carga-descarga linear com deslocamento residual

Enquanto para materiais dúcteis pode se considerar a lei de carga-descarga também linear, mas a inclinação da linha de descarga-recarga com uma direção até um deslocamento residual e já não até a origem (Figura 2.11), isto pode ser explicado pelo fato que a separação inelástica é irreversível desde que o trabalho para originar dano é totalmente dissipado na nucleação de micro trincas, crescimento de vazios e coalescência. Foi utilizado por Siegmund (2004), Deshpande et al. (2001), Machado (2007). Não há neste caso degradação das propriedades elásticas.

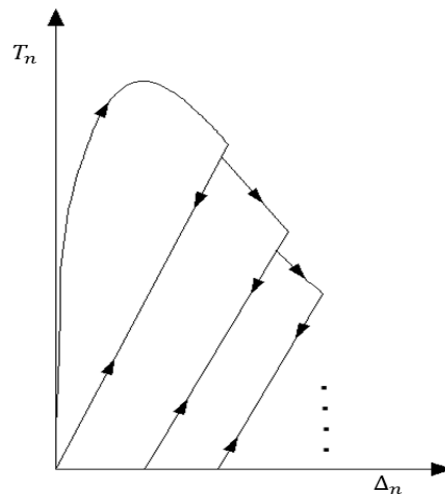


Figura 2. 11 Lei de lei de carga-descarga linear com deslocamento residual

2.2.1.3 Leis de carga não linear e descarga linear

Foram propostos por Yang et al. (2001) e Nguyen et al.(2001). A vantagem desta formulação é que possibilita levar em conta mecanismos dissipativos como deslizamento cristalográfico e as interações entre as asperezas na superfície da trinca (LIU et al., 2013), como se pode observar na figura 2.10. O dano encontra-se incluído intrinsecamente nas formulações de carga-descarga. Assim, Yang et al., (2001), modelou um espécime retangular de concreto com uma trinca, em modo I e em modo II, predizendo satisfatoriamente a iniciação e crescimento da trinca em materiais quase-frágeis enquanto de Nguyen et al (2001) faz uma análise elastoplástica. Além Nguyen et al. (2001) reporta que este tipo lei de carga descarga facilita o processo de convergência numérica.

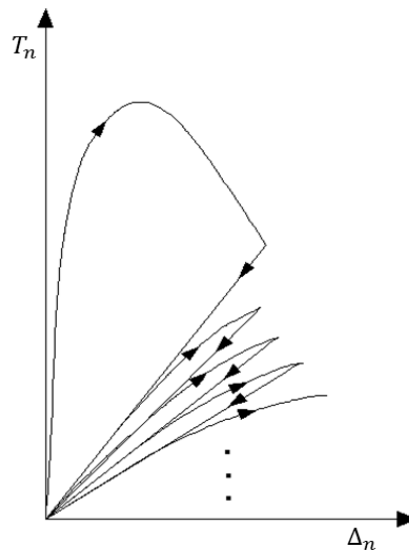


Figura 2.12 Lei de carga-recarga não linear e descarga linear

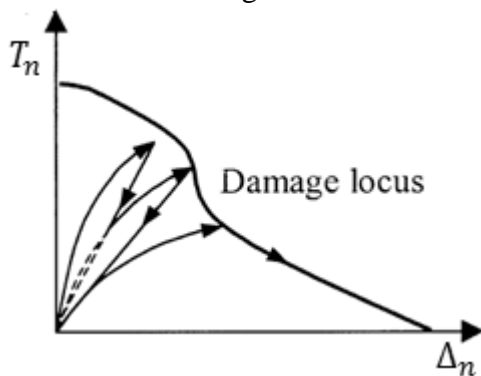


Figura 2.13 Lei coesiva usada em Yang et al. (2001)

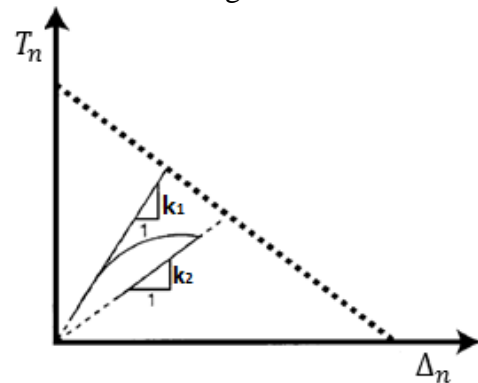


Figura 2.14 Lei coesiva usada em Nguyen et al. (2001)

2.2.2 Modelos coesivos em função da incorporação da lei de dano

Considerando que a inclinação e o alcance da linha carga-recarga diminuem, se está assumindo que existe uma degradação progressiva e acumulada do material, assim se degradam as propriedades elásticas e não elásticas. O dano pode ser calculado como a divisão entre a energia consumida por ciclo, entre a energia total por ciclo isto é, no contexto da zona coesiva, a razão entre a área $T_n \Delta_n$ coesiva danificada e a área $T_n \Delta_n$ coesiva inicial sem dano, como é considerado por: Yang e Ravichandar (1996), Camacho e Ortiz (1996), De Andrés et al (1999) e Ortiz e Pandolfi (1999).

Também a lei de evolução de dano pode ser incorporada de maneira implícita dentro das leis de carga e recarga como é apresentado nos trabalhos de Yang et al. (2001) e Nguyen et al.(2001)

Pode-se também incorporar uma lei de dano na equação constitutiva do material. Lemaitre (2012) mostra as condições que deve seguir esta lei de evolução de dano, como é explicado a seguir.

2.2.2.1 Considerações do dano de Lemaitre (2012)

Dado que a evolução do dano é um processo não linear de deformação inelástica, pode-se estabelecer uma analogia com os modelos de zona coesiva e os princípios de plasticidade (LIU; LI; WU, 2013).

No caso da plasticidade (LEMAITRE, 2012):

Seja a R o módulo de endurecimento isotrópico, X o módulo de endurecimento cinemático e σ_y a tensão de escoamento. A tensão unidimensionalizada σ se define como:

$$\sigma = \sigma_y + R + X \quad (8)$$

De (8) forma-se a função potencial plástica.

$$F = |\sigma - X| - R - \sigma_y \quad (9)$$

Segundo o Lemaitre (2012) o dano D_c pode ser inserido na função potencial do seguinte modo:

$$F = (\tilde{\sigma} - X) - R - \sigma_y + F_D(Y; (r, D_c)) \quad (10)$$

Com:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D_c}$$

$\tilde{\sigma}$: é a tensão efetiva

F_D é a função potencial do dano, que depende de Y que é a densidade da taxa de alívio de energia, r e a deformação plástica e D_c que é a variável de dano.

O termo F_D é parte do potencial do qual a lei cinética de evolução do dano é derivada. Os experimentos mostram que não depende explicitamente da tensão atual (σ) nem do módulo de endurecimento cinemático (X), nem do módulo de endurecimento isotrópico (R).

Segundo Lemaitre (2012), a característica principal é a proporcionalidade da variação do dano (\dot{D}), com a densidade da taxa de alívio de energia (Y) e com a variação da deformação plástica acumulada (\dot{r}), enquanto esteja acima de um valor limite de deformação plástica (p_D). Assim a variação de dano \dot{D} é definida como:

$$\dot{D} = \frac{\partial F_D}{\partial Y} \dot{r} \quad (11)$$

Com $\dot{r} = \dot{p}(1 - D_c)$, sendo $\dot{p} = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^P \dot{\varepsilon}_{ij}^P\right)^{\frac{1}{2}}$ ou seja a deformação plástica equivalente.

Assim a lei de evolução de dano fica:

$$\dot{D} = \frac{\partial F_D}{\partial Y} \dot{p} (1 - D_c) H(p - p_D) \quad (12)$$

Sendo H uma função tipo Heaviside, com seguinte definição:

$$\begin{aligned} H(p - p_D) &= 1 \quad \text{Se } p \geq p_D \\ H(p - p_D) &= 0 \quad \text{Se } p < p_D \end{aligned} \quad (13)$$

A escolha da função F_D é por certo a chave para a representação da evolução do dano. A variável \dot{p} é sempre positiva ou zero, representando a natureza irreversível do dano.

Assim derivam-se varias leis de evolução de dano segundo os princípios expostos em: Roe e Siegmund (2003), Ural *et al.* (2009), Xu e Yuang (2009a), Bouvard *et al.* (2009), Gong *et al.* (2012), Beaurepaire e Schuëller (2011), Walander (2016) entre outros.

2.1 EFEITO DE ESCALA

O efeito de escala representa o desvio na capacidade de carga de uma estrutura devido à mudança do tamanho da estrutura. A capacidade de carga prevista pela análise de limite plástico ou outra teoria determinística (na qual os critérios de falha do material são expressos em termos de tensão ou deformação (ou ambos)) não considera o efeito de escala (BAZANT, ZDENEK P; PLANAS, 1997). O efeito de escala é definido na comparação de estruturas geometricamente similares, mas de diferente tamanho.

Leonardo da Vinci nos meados dos 1500's, já tinha notado o efeito de escala em cabos, é mencionou que existia uma relação inversa entre a tensão e o tamanho.

Mariotte (1886) menciona que um cabo longo e um cabo curto suportam o mesmo peso, a menos que o cabo longo tenha vazios, então falhará antes do cabo curto.

Griffith (1921), demonstrou experimentalmente que a tensão nominal de fibras de vidro aumenta de 42 300 psi a 491 000 psi, quando o diâmetro é diminuído de 0,0042 in a 0,00013 in. Isto é que a tensão decresce nos filamentos de vidro por a presença de micro trincas das quais o tamanho é proporcional ao diâmetro da seção transversal.

Peterson (1933), observou o efeito de escala em materiais frágeis sob carga em fadiga.

A seguir descrevem-se as principais teorias de efeito de escala:

2.1.1 Leis de efeito de escala procedentes da mecânica da fratura

Leicester (1969) parece ter sido o primeiro em pesquisar o efeito de escala na tensão de estruturas com trinca em um material quase frágil. Identificou dois aspectos fundamentais que originam o efeito de escala: i) a heterogeneidade do material e ii) a ocorrência de entalhes e outras descontinuidades no fluxo da tensão. Propôs um efeito de escala menos severo que o que prediz a teoria de Griffith, representado na equação (14) (KARIHALOO, 1999).

$$\sigma_N = \frac{A}{H^s} \quad (14)$$

Sendo A uma constante, s um valor menor que $1/2$, σ_N a tensão normal e H a altura do espécime.

2.1.1.1 Lei de efeito de escala proposto por Bazant (1984)

Apresenta-se uma dedução simples para o efeito de escala em Bazant (2004). Considerando uma explicação não estatística do efeito de escala e baseada fundamentalmente na liberação da energia.

Considera-se painéis retangulares de diferentes tamanhos sob tensão uniaxial uniforme (Figura 2.15). Os modos de falha são geometricamente similares, o que significa que a_0/H vai-se mantendo constante nos espécimes escalonados e quando ocorre a carga máxima.

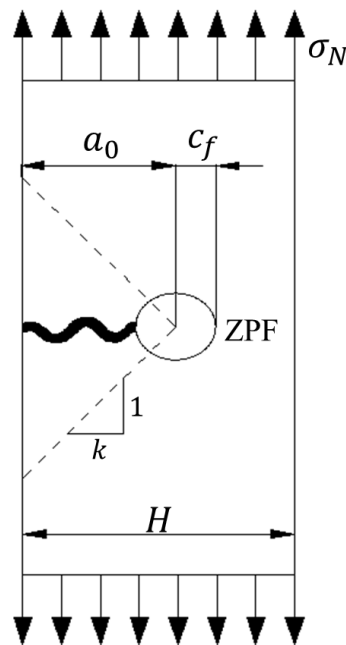


Figura 2. 15 Esquema para a explicação do efeito de escala. Adaptado de Bazant (2004)

A formação da trinca suaviza as tensões e em consequência é liberada energia de deformação de aproximadamente os triângulos formados aos lados da trinca (Figura 2.15), limitados por linhas de alguma inclinação k , que saem do meio da Zona de Processos de Fratura.

Assumimos que é suficiente saber que o valor de k é constante para painéis escalonados da mesma forma geométrica. A energia potencial (com os extremos fixados) é: $\Pi(a) = \Pi_0 - (\sigma_N^2/2E)bA_r$, sendo Π_0 constante, A_r área dos triângulos sombreados ($A_r = ka^2$), a comprimento de trinca equivalente ($a = a_0 + c_f$), a_0 é a trinca efetiva e c_f é a metade do comprimento da zona de fratura de processos. Assim a trinca pode-se propagar, se a taxa e energia liberada $-\partial\Pi/\partial a$ é igual à taxa de energia de dissipação bG_f , sendo G_f a energia de fratura do material. Resolvendo para σ_N se obtêm a lei de efeito de escala energética (BAŽANT, 2004).

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{E G_f}{k (a_0 + c_f)}} \quad (15)$$

Sendo H a dimensão característica da estrutura, assume-se que o valor de a_0/H é constante em qualquer tamanho dos espécimes. Além se considera que:

$$a_0/H = c_f/H_0 \quad (16)$$

Sendo H_0 uma constante. A equação mostra que o valor de H_0 é assumido proporcional ao comprimento da metade da zona de fratura de processos c_f .

Substituindo (16) em (15), pode ser obter:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{E G_f}{k c_f (1 + \frac{H_0}{H})}} \quad (17)$$

Pode se observar na equação (17), quando $H \rightarrow \infty$ se reduz a uma análise elástica linear da mecânica da fratura.

Expandindo a equação (17), em series de Taylor (ver Bazant (2002, p.23)). Pode se expressar como:

$$\sigma_N = \sigma_0 (1 + \beta)^{-1/2} \quad (18)$$

Sendo $\beta = H/H_0$

$$H_0 = c_f(H/a_0)$$

$$\sigma_0 = \left(\frac{EG_f}{kc_f} \right)^{1/2}$$

Sendo σ_0 e H_0 constantes positivas.

Esta lei de escala é válida para vários tipos de geometria e foi corroborada por análises assintóticas, análises experimentais e modelos de fissura coesiva e distribuída.

Posteriormente Bazant (2002) deriva equações com dependência dos dois primeiros termos não zerados da expansão assintótica da equação (18) em função das potências de H e H^{-1} (series de Taylor), achando que somente existem três tipos de efeito e escala: (ver Bazant (2002, p.189).

Quando $H \rightarrow 0$, pode se mostrar que:

$$\sigma_N = b_0 - c_0H + \dots \quad (19)$$

Quando $H \rightarrow \infty$, realizando expansões assintóticas baseadas no método distribuído, resultam as equações (20), (21) e (22)

$$\sigma_N = b_1 + c_1H^{-1} + \dots \quad (20)$$

$$\sigma_N = H^{-1/2}(b_2 + c_2H^{-1} + \dots) \quad (21)$$

$$\sigma_N = H^{-1/2}(b_3 + c_3H^{-1} + \dots) \quad (22)$$

Sendo $b_0, c_0, b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3$ constantes positivas.

Assim se denomina a equação (20), efeito de escala do tipo 1, a equação (21) efeito de escala do tipo 2 e a equação (22) de efeito de escala do tipo 3. Sendo que o tipo 1 acontece quando se se danifica a zona de fratura de processos em superfícies planas (sem trinca) e falham quando inicia a propagação da trinca (Figura 2.16). Acontece em estruturas que não tenham trincas longas preexistentes. O tipo 2 acontece quando existe uma zona faixa longa de

superfície danificada tendo uma propagação estável antes de atingir a carga máxima (Figura 2.17) e o tipo 3 acontece quando existe uma trinca no meio do elemento em forma de vazio (superfície negativa).

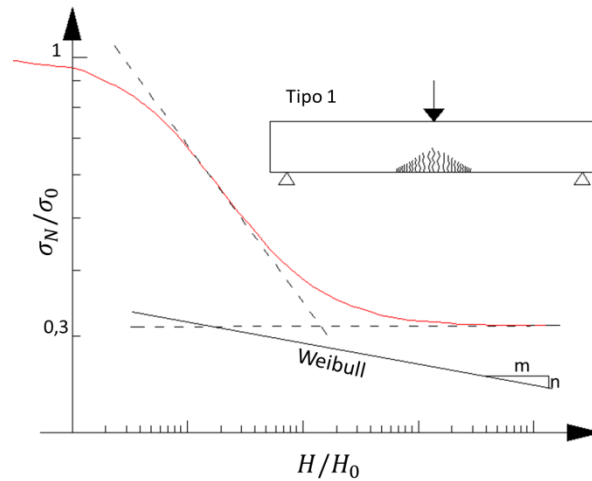


Figura 2. 16 Efeito de escala tipo 1 em estruturas sem trinca

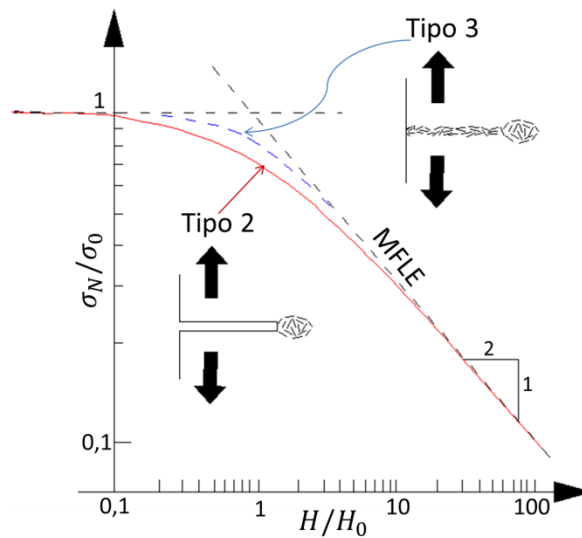


Figura 2. 17 Efeito de escala tipo 2 em superfície com trinca e efeito de escala tipo 3 em estrutura com zona danificada.

Também Karihaloo (1999) deduz uma lei de efeito de escala similar, mas só no caso de vigas de três pontos. Usando conceitos de aproximações assintóticas do modelo coesivo e fator de intensidade de tensões conclui:

$$\sigma_N = A \left(B - \frac{C}{H} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

Sendo A e B constantes. Esta formula não é valida quando H é pequeno, os coeficientes A e B estão relacionados ao tamanho da zona de fratura de processos de uma estrutura grande e a um fator de geometria.

2.1.1.1 Lei de efeito de escala com fractais proposto por Carpinteri (1994)

O efeito de escala é explicado considerando a natureza fractal das seções transversais, isto é, a tensão de fadiga renormalizada é representada por uma amplitude e força atuando sobre uma superfície com uma dimensão fractal menor que 2.

Considerando a monofractalidade (isto é, que a dimensão fractal se mantem constante) pode se deduzir uma lei de escala linearmente decrescente entre a tensão nominal σ_N e o tamanho da estrutura H em escala bi logarítmica, como é apresentado em Carpinteri et al. (2001).

Também é apresentada uma dedução considerando a multifractalidade (isto é, que a dimensão fractal diminui com o incremento do tamanho da estrutura). Em consequência o efeito da microestrutura do material no comportamento macroscópico da fadiga gradualmente desaparece para estruturas maiores com respeito ao tamanho microestrutural característico (CARPINTERI, SPAGNOLI; VANTADORI, 2001).

O conceito conta com a homogeneidade e não homogeneidade do material. Isto é, em estruturas pequenas de concreto o tamanho do agregado e grande com respeito ao tamanho da estrutura. Assim a não homogeneidade é máxima é o efeito de escala forte. Pelo contrario em estruturas de concreto maiores o tamanho de agregado é pequeno, comparado com a estrutura e o material fecha perfeitamente homogêneo. Como consequência o efeito de escala desaparece. Assim é proposta uma lei multifractal de efeito de escala como: (CARPINTERI, 2002).

$$\sigma_N = \left(A + \frac{C}{H} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Sendo σ_N a tensão nominal, H o tamanho da estrutura, A e C são constantes. A constante C tem um conotação de comprimento característico da estrutura. Isto é, quando o $H > C$ o efeito de escala tende a desaparecer em consequência a estrutura falha com a iniciação da trinca (fratura frágil). Se $H < C$, o efeito de escala é forte e a resposta estrutural é mais dúctil.

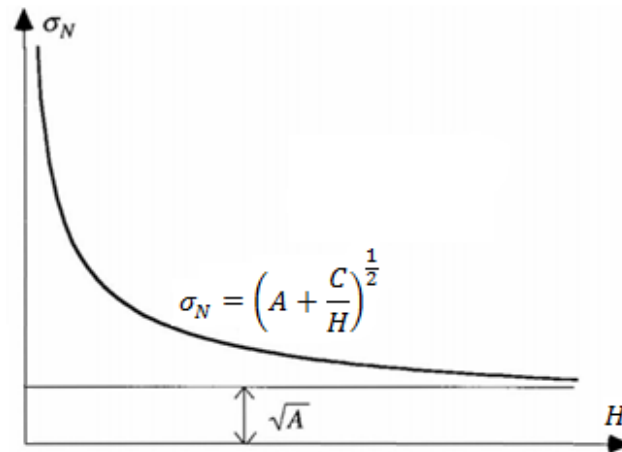


Figura 2. 18 Lei de escala multifractal

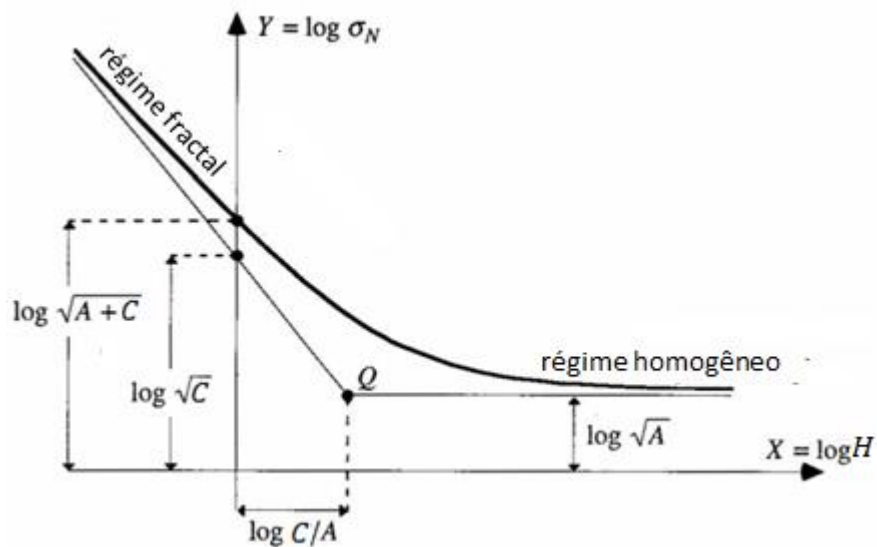


Figura 2. 19 Lei de escala multifractal em diagrama bi logarítmico.

No trabalho de Kostaski et al. (2011), se obtêm uma correlação satisfatória da lei de escalonamento multifractal em espécimes de placas de rocha de diferente tamanho, usando o Método de Elementos Discretos.

2.1.2 Lei de efeito de escala estatístico proposto por Weibull (1939)

A teoria estatística do efeito de escala foi explicada por Weibull (1939) e Weibull (1951), e estendida aos sólidos. O modelo de união fraca proposto por Peirce (1926) é usado, junto com os valores estatísticos extremos propostos por Tippet (1925) e Frechet (1927) e outros.

As funções de probabilidade de falha seguem também um tipo de efeito de escala, sendo que em estruturas menores com tensões de falha maiores seguem uma distribuição de Gauss e estruturas maiores com tensões de falha menores seguem uma distribuição tipo Weibull como se observa na Figura 2.21 (BAŽANT, 2004).

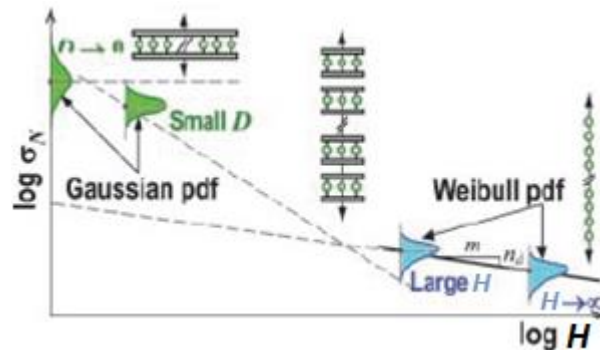


Figura 2. 20 Mudança de distribuição de Gauss a Weibull

A definição clássica da integral de Weibull para tensões de estruturas pode ser derivada de um ordenamento de volumes representativos acoplados em series (modelo de cadeia, Figura 2.22). Cada volume representativo é independente dos outros e sua tensão é uma variável aleatória com uma função de distribuição de probabilidade.

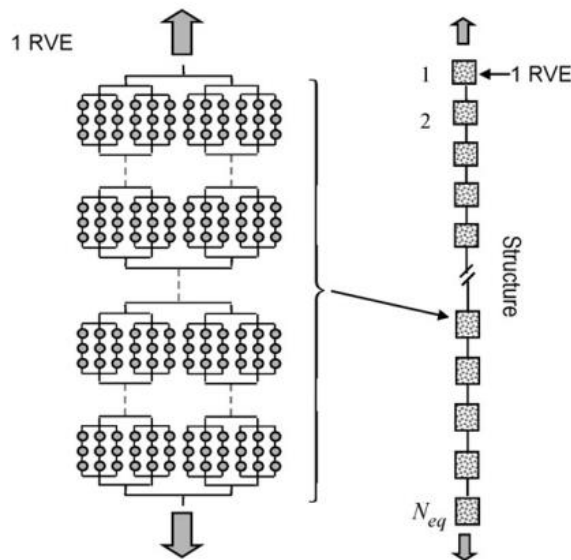


Figura 2. 21. Arranjo de modelos em serie e paralelo na representação de um volume representativo da estrutura.

Se a função de densidade acumulada é idêntica para todos os segmentos da cadeia, então podemos dizer que todos os segmentos são independentes e identicamente distribuídos. Todos os segmentos compartilham o mesmo carregamento σ (devido a uma força externa F). (KADEROVÁ; VORECHOVSKÝ, 2013).

A probabilidade de falha de um volume representativo $P_1(\sigma)$ é igual à função de densidade da probabilidade da tensão. A probabilidade complementar, é dizer de não falha, de um segmento é $1 - P_1(\sigma)$. Assim a probabilidade complementar da cadeia inteira é $1 - P_f$ e é dada a condição que todos os segmentos não devem falhar (O colapso de um segmento significa o colapso da cadeia inteira). Para elementos independentes a probabilidade de não falha é o produto das probabilidades de falha dos segmentos individuais unidos em series.

$$1 - P_f = (1 - P_1)(1 - P_1) \dots (1 - P_1)(1 - P_1) = (1 - P_1)^N$$

Tomando logaritmos á equação se obtém:

$$\ln(1 - P_f) = N \ln(1 - P_1)$$

Como a probabilidade de falha da cadeia P_f é um número muito baixo em situações práticas, a expressão $\ln(1 - P_1) \approx -P_1$, o qual leva a aproximação:

$$P_f(\sigma) = 1 - \exp(-NP_1(\sigma)) \quad (25)$$

Onde $P_1(\sigma)$ é a probabilidade de distribuição de falha do comprimento de referência l_0 para um nível de tensão σ . O comprimento de referência pode ser entendido como uma parte do comprimento total l da estrutura e cada comprimento do segmento é considerado independente das partes. O número total de segmentos de cadeia independentes é logo: $N = l/l_0$. Assim:

$$P_f(\sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{l}{l_0}P_1(\sigma)\right) \quad (26)$$

A chave é a distribuição $P_1(\sigma)$. Não foi identificada com sucesso até Weibull (1939) que reconheceu a gráfica desta lei de potência. Denotando o expoente da gráfica como m . Pode-se mostrar que, se a estrutura é suficientemente maior que o volume representativo então probabilidade de falha de uma estrutura como uma função de σ_N é:

$$P_f = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_N}{S_0}\right)^m\right] \quad (27)$$

Sendo:

$$S_0 = s_0(l_0/D)^{na/m}\Psi^{-1/m} \quad (28)$$

A equação (27) é a distribuição acumulada de Weibull com parâmetro de escala S_0 e parâmetro de forma $\Psi = \int_V [\hat{\sigma}(\xi)]^m dV(\xi)$ que é um fator constante que depende da geometria da estrutura, V é o volume da estrutura, ξ vetor relativo as coordenadas (independente do tamanho), $\hat{\sigma}(\xi)$ campo adimensional de tensões (dependente da geometria), que escalado com ao máxima tensão deve ser igual a 1. n é o número das dimensões espaciais ($n = 1, 2$ ou 3), l_0 é comprimento característico do volume representativo.

Das equações (26), (27) e (28) pode-se mostrar que a tensão nominal media $\bar{\sigma}_N$ e o coeficiente de variação da tensão ω são:

$$\bar{\sigma}_N = C_s(l_0/D)^{n/m} \quad (29)$$

Com:

$$C_s = \Gamma(1 + m^{-1}) \Psi^{-1/m} s_0 \quad (30)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\Gamma(1 + 2m^{-1})}{\Gamma^2(1 + m^{-1})}} - 1 \quad (31)$$

Sendo Γ a função gama. A equação (29) mostra o efeito de escala na meia da tensão nominal, sendo o $\bar{\sigma}_N$ diretamente proporcional a $D^{n/m}$, se o $n = 1$, A inclinação da linha ajustada em um gráfico bi logarítmico $\log(\sigma_N)$ vs $\log(D)$ resulta $-1/m$.

A hipótese básica da falha é que a tensão se encontre danificada e alcance seu valor de colapso em algum ponto da estrutura. Em consequência se produz o colapso da estrutura completa. Isto é verdade para os materiais quase frágeis somente se a estrutura é extremadamente grande (represas). Em estruturas de dimensões menores, onde a zona de fratura de processos tem um tamanho considerável com respeito à estrutura, se desenvolve um processo de falha progressivo e estável antes do colapso.

3 METODOLOGIA

3.1 PRINCÍPIO DE TRABALHOS VIRTUAIS (PTV)

Na análise em elementos finitos é usado o princípio de trabalhos virtuais (PTV) na resolução do problema de equilíbrio. Na equação global de equilíbrio (equação (32)) é adicionado um trabalho interno que representa a abertura da trinca através da zona com superfície coesivas Γ^T (segundo termo da equação (32)). Esta zona de superfícies coesivas está governada por outras leis constitutivas diferentes do volume Ω . Tem-se também uma zona restrições Γ^U , como se mostra na Figura 3.1.

$$\int_{\Omega} \sigma : \left(\frac{\partial \delta U}{\partial x} \right) dV + \int_{\Gamma^T} T_{CZ} \cdot \delta \Delta dS = \int_{\Gamma^F} F \cdot \delta U dS \quad (32)$$

Na qual, \mathbf{U} define os deslocamentos no corpo Ω , Δ é a abertura da superfície coesiva, F representa o vetor de forças aplicadas no contorno Γ^F , σ representa as tensões de Cauchy, o símbolo δ define uma variação arbitrária virtual e compatível e T_{CZ} representa o vetor de tensões coesivas normais e tangentes nas interfaces com: $T_{CZ} = T_n \hat{n} + T_t \hat{t}$ e $\Delta = \Delta_n \hat{n} + \Delta_t \hat{t}$, onde \hat{n} e \hat{t} são vetores unitários que definem a direção normal e tangencial da superfície coesiva.

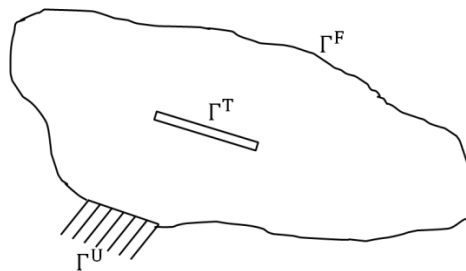


Figura 3. 1 Corpo de estudo

Discretizando o corpo em elementos finitos e eliminando variações arbitrárias resulta que a equação de equilíbrio pode ser escrita como um equilíbrio de forças internas e externas (equação (33)). Esta condição deve ser satisfeita em todos os nós dos elementos finitos.

$$\mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (33)$$

Sendo \mathbf{F}_{int} e \mathbf{F}_{ext} representam as forças internas e externas.

3.2 DESCRIÇÃO DO MODELO COESIVO DE NEEDLEMAN

É utilizado a lei coesiva de Needleman (1990b) na zona de superfícies coesivas Γ^T . Needleman (1990b) estabeleceu leis para as tensões normais e tangentes a partir de um potencial. Assim relaciona uma tensão para um deslocamento, dando a esta curva uma forma exponencial (para mais detalhe ver Fedrigo (2001)). As tensões resultantes do potencial são:

$$T_n = \sigma_{max,0} \exp(1) \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_0}\right) \left\{ \frac{\Delta_n}{\delta_0} \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) + \frac{1-q}{r-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \right] \right\} \quad (34)$$

$$T_t = 2\sigma_{max,0} \exp(1) q \frac{\Delta_t}{\delta_0} \left(1 + \frac{\Delta_n}{\delta_0} \right) \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_0}\right) \exp\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right) \quad (35)$$

Sendo T_n a tensão coesiva na direção normal e T_t a direção coesiva na direção tangente, Δ_n corresponde à abertura na direção normal, Δ_t à abertura na direção tangencial, δ_0 é o comprimento característico na direção normal, δ_t é o comprimento característico na direção tangencial, $q = \phi_t/\phi_0$, $r = \Delta_n^*/\delta_0$, onde ϕ_0 é o trabalho de separação normal, ϕ_t é o trabalho de separação tangencial, Δ_n^* é o valor de Δ_n após a separação completa por cisalhamento com $T_n = 0$.

Segue os gráficos das tensões T_n e T_t normalizadas em função dos deslocamentos Δ_n e Δ_t respectivamente.

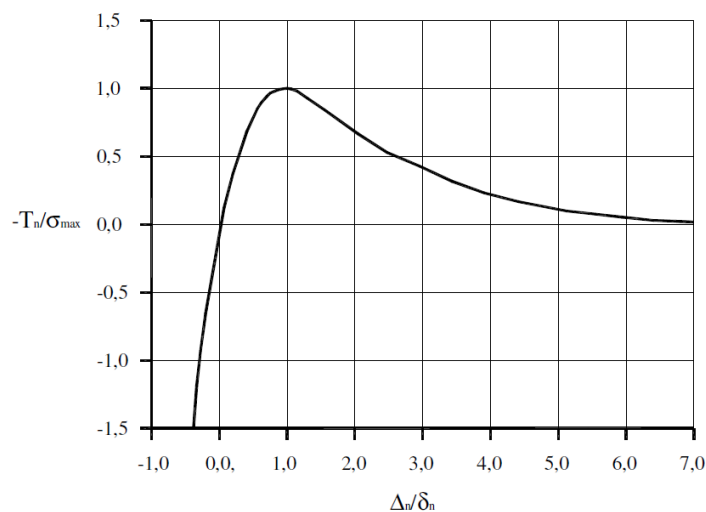


Figura 3. 2 Tensão normal T_n normalizada como uma função de Δ_n

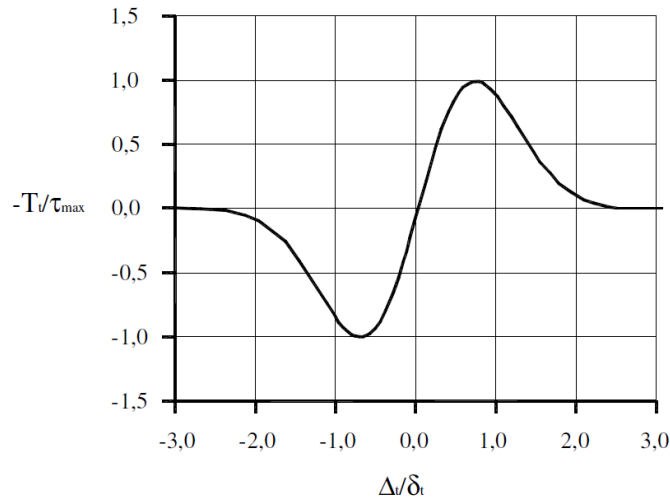


Figura 3. 3 Tensão normal T_t normalizada como uma função de Δ_t

Em modo I (isto é aberturas somente na direção normal à trinca) a tensão coesiva normal se reduz a:

$$T_n = \sigma_{max,0} \exp(1) \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_0}\right) \frac{\Delta_n}{\delta_0} \quad (36)$$

Os parâmetros do modelo coesivo de Needleman (1990b) são calibrados mediante ensaios experimentais uniaxiais. Os parâmetros são: a energia de fratura ϕ_0 , a tensão coesiva máxima $\sigma_{max,0}$ é o parâmetro do comprimento característico coesivo δ_0 , conhecidos dois parâmetros o terceiro pode ser derivado através da expressão:

$$\sigma_{max,0} = \phi_0 / (\delta_0 \exp(1)) \quad (37)$$

A equação (36) mostra uma gráfica de duas fases (Figura 3.2). A primeira fase consta de um carregamento monotônico crescente, nesta fase há ocorrência de dano. A segunda fase é de amolecimento a partir do comprimento característico δ_0 (típico dos materiais quase-frágeis) o qual decresce até o ponto em que ocorre a separação total das interfaces coesivas, não havendo mais coesão entre as mesmas.

As leis coesivas para T_n e T_t , são inseridos nos elementos de interface mediante os pontos de Gauss. Os elementos de interface constam de 4 nós e 4 pontos de Gauss. Os nós 1 e 2, conectam com a superfície inferior e os 3 e 4, com a superior. Inicialmente os nodos 2,3 e 1,4 se encontram superpostos (Figura 3.4), com o desenvolvimento das forças externas os nós

mencionados começam-se a separar. Da separação nos nós são calculados os deslocamentos nos pontos de Gauss mediante funções de interpolação. Com os deslocamentos obtidos nos pontos de Gauss são calculados as tensões com a lei coesiva de Needleman (1990b). As tensões obtidas nos pontos de Gauss são distribuídas nos nós mediante funções de interpolação e levadas ao mecanismo de equilíbrio global.

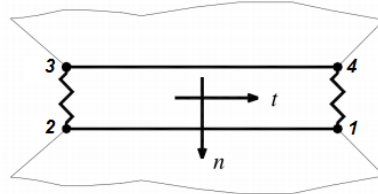


Figura 3. 4 Elemento de interface

3.3 DESCRIÇÃO DO MODELO DE DANO DE ROE E SIEGMUND (2003)

A fadiga por acumulação de dano é um processo irreversível sendo que as propriedades do material se deterioram e degeneram continuamente sob carga cíclica. Para incluir esta deterioração, é preciso definir uma lei de dano e incluir a mesma na lei constitutiva do material.

Nesta dissertação é seguido o modelo de dano proposto por Roe e Siegmund (2003). O modelo incorpora uma lei de dano à lei coesiva exponencial proposta por Needleman (1990b), resultando na lei de carga-descarga representada na Figura 3.5.

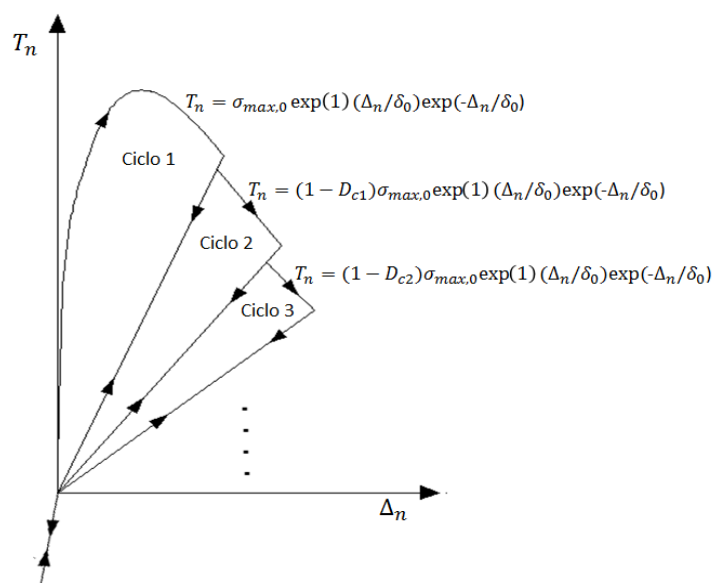


Figura 3. 5 Lei cíclica de tensão-deslocamento incluindo o dano

O modelo proposto segue uma trajetória cíclica entre as tensões normais e a abertura da trinca, como se observa na Figura 3.5 e se descreve a seguir:

No primeiro ciclo, no processo de carga, o trajeto segue a lei coesiva tradicional de Needleman (1990b) até o começo do processo de descarga. No processo de descarga segue um trajeto linear em direção até a origem, podendo ser que a abertura atinja valores negativos, nesse caso segue um trajeto procedente do método da penalidade. Ao final o primeiro ciclo é calculado o dano e é armazenado em uma variável D_{c1} .

No segundo ciclo, agora o processo de carga se divide em dois trajetos diferentes, o primeiro trajeto segue a linha com a mesma inclinação da descarga do ciclo anterior, o segundo trajeto segue a lei coesiva de Needleman, mas multiplicada por o fator $(1 - D_{c1})$. No processo de descarga segue um trajeto linear com uma inclinação até a origem e se a abertura é negativa segue o trajeto dado pelo método da penalidade. Ao final do segundo é calculado o dano acumulado e é armazenado em uma variável D_{c2} . Se segue o mesmo procedimento com os ciclos sucessivos até que o dano acumulado atinja o valor de 1, então ocorre a falha do material.

Para o cálculo do dano é seguido o estabelecido por Roe e Siegmund (2003). Onde propõe uma lei de evolução de dano baseado nas sugestões do Lemaitre (2012). Roe e Siegmund (2003) estabelecem três condições para a lei de evolução do dano:

- i) O dano começa-se a acumular uma vez que a deformação acumulada ($\Delta_{n,acc}$), seja maior que uma magnitude crítica (δ_0).
- ii) O incremento do dano \dot{D}_c é proporcional ao incremento de deformação $\dot{\Delta}_n$, multiplicado por valores de carga atuais $\left(\frac{1}{\delta_w} \left[\frac{T_n}{\sigma_{max}} - \frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} \right] \right)$
- iii) Existe uma tração de tensão limite (σ_f), embaixo do qual o carregamento cíclico pode continuar infinitamente sem acumulação de dano.

Além a incorporação do dano, é feita ao final de cada ciclo, atualizando a tensão coesiva máxima $\sigma_{max,0}$, por uma tensão coesiva efetiva σ_{max} , na lei coesiva de Needleman (1990), da seguinte forma:

$$\sigma_{max} = \sigma_{max,0}(1 - Dc) \quad (38)$$

A equação de tensão-abertura atualizada fica:

$$T_n = (1 - Dc)\sigma_{max,0} \exp(1) \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_0}\right) \frac{\Delta_n}{\delta_0} \quad (39)$$

Baseado nestas condições, a evolução do dano é definida por Roe e Siegmund como:

$$\dot{D}_c = \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\delta_w} \left[\frac{T_n}{\sigma_{max}} - \frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} \right] H(\Delta_{n,acc} - \delta_0) \quad (40)$$

$$Se \dot{D}_c \geq 0, \quad \Delta_{n,acc} = \int_t |\dot{\Delta}_n| dt \quad (41)$$

Sendo $\dot{\Delta}_n$ a variação da abertura normal à trinca, T_n é a tensão normal atual, σ_{max} é a tensão máxima coesiva atual, $\sigma_{max,0}$ é a tensão máxima coesiva inicial, $\Delta_{n,acc}$ é a abertura da trinca acumulada, δ_0 é o comprimento coesivo, H designa a função de Heaviside.

O σ_f , é definida como uma tensão de tração limite, que é a maior tração, ou uma faixa de tração, que pode ser repetido infinitamente, sem ter dano na zona coesiva, e dizer que abaixo de este valor não há acumulação de dano.

O δ_w , é denominado comprimento coesivo acumulado. Divide o incremento de separação do material e também determina a magnitude do incremento de dano, que ocorre num estado dado de carga, influenciando assim no número de ciclos até a falha do elemento.

Observa-se na equação (40), se $T_n/\sigma_{max} < \sigma_f/\sigma_{max,0}$ (a tensão T_n normalizada pela tensão coesiva máxima σ_{max} , é menor que a tensão de tração limite σ_f , normalizada pela tensão coesiva inicial $\sigma_{max,0}$) não se acumula dano pois \dot{D}_c viraria negativo.

A descarga é definida linear, desde o ponto onde ocorre a abertura máxima, em cada ciclo, até a origem, considera-se também que não há dano neste processo. Assim segue a seguinte lei:

$$T_n = T_{n,max} + \frac{T_{n,max}}{\Delta_{n,max}} * (\Delta_n - \Delta_{n,max}) \quad (42)$$

Durante a descarga o valor da abertura normal Δ_n , pode atingir valores nulos e negativos, em consequência as superfícies podem entrar em contato, para evitar a superposição e interpenetração das superfícies, é assumida a penalidade $A = 30$. Assim a lei que segue é:

$$\text{Se } \Delta_n < 0, \quad T_n = A\sigma_{max,0}e^{\frac{\Delta_n}{\delta_0}} \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_0}\right) \quad (43)$$

Pode-se ver a lei de evolução de dano desde outro ponto de vista, fazendo uma analogia entre a lei de dano proposta por Roe e Siegmund (2003) (equações (40) e (41)) com as recomendações dadas por Lemaitre (2012) para materiais elastoplásticos, que foram mencionadas na seção 2.2.2.1, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta_{n,acc} &\equiv p \\ \delta_0 &\equiv p_D \\ |\dot{\Delta}_n| &\equiv \dot{p} \\ \frac{1}{\delta_w} \left[\frac{T_n}{\sigma_{max}} - \frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} \right] &\equiv \frac{\partial F_D}{\partial Y} (1 - D_c) \end{aligned}$$

Sendo p_D um valor limite de deformação plástica, \dot{p} a deformação plástica equivalente, F_D função potencial do dano, Y densidade da taxa de alívio da energia.

3.3 DESCRIÇÃO DO ALGORITMO

Se implementou o modelo de zona coesiva em fadiga de Roe e Siegmund (2003), no programa de elementos finitos Metafor, desenvolvido pelo Ponthot (1995) e modificado por Fedrigo (2001).

O modelo de Roe e Siegmund (2003) é inserido modificando a lei tensão-abertura dos elementos coesivos por uma lei nova como a mostrada na Figura 3.5. Devido às considerações geométricas do espécime analisado nas aplicações (Capítulo 4), onde o comprimento horizontal é muito maior que o comprimento vertical, consideram-se os valores da tensão tangencial T_t nulos.

A matriz de rigidez tangente do elemento de interface pode ser escrita como:

$$K_{coe}^{el} = \int_{-1}^1 B^T \Theta R \Theta^T B \det J \det \xi$$

Sendo B a matriz de função de forma, J a matriz do jacobiano, Θ é a matriz de rotação, ξ é coordenada natural, a matriz de rigidez R é definida como:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_t}{\partial \Delta_t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial T_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix}$$

Finalmente o vetor forças coesivas é descrito como:

$$f_{coe}^{el} = \int_{-1}^1 B^T \Theta^T \det J \det \xi$$

As forças coesivas resultantes são somadas as forças internas e levadas ao equilíbrio global. O equilíbrio é verificado quando o problema converge, mediante o método de Newton Raphson, sob uma tolerância dada (para mais detalhe ver Fedrigo (2001)).

O algoritmo completo e detalhado apresentasse no anexo A em forma de fluxograma, onde também se inclui o algoritmo da lei de dano.

A Figura 3.6 mostra a sequência de passos do algoritmo simplificado para um só ponto de Gauss. Sendo os valores de entrada as aberturas normais Δ_n e os valores de saída, as tensões coesivas normais T_n . Sendo $\Delta_{n,acc}$ a abertura da trinca acumulada, δ_0 o comprimento coesivo e $delum$ o ponto do carregamento onde acontece a mudança de uma lei linear (equação (42)) a uma não linear (equação (39)).

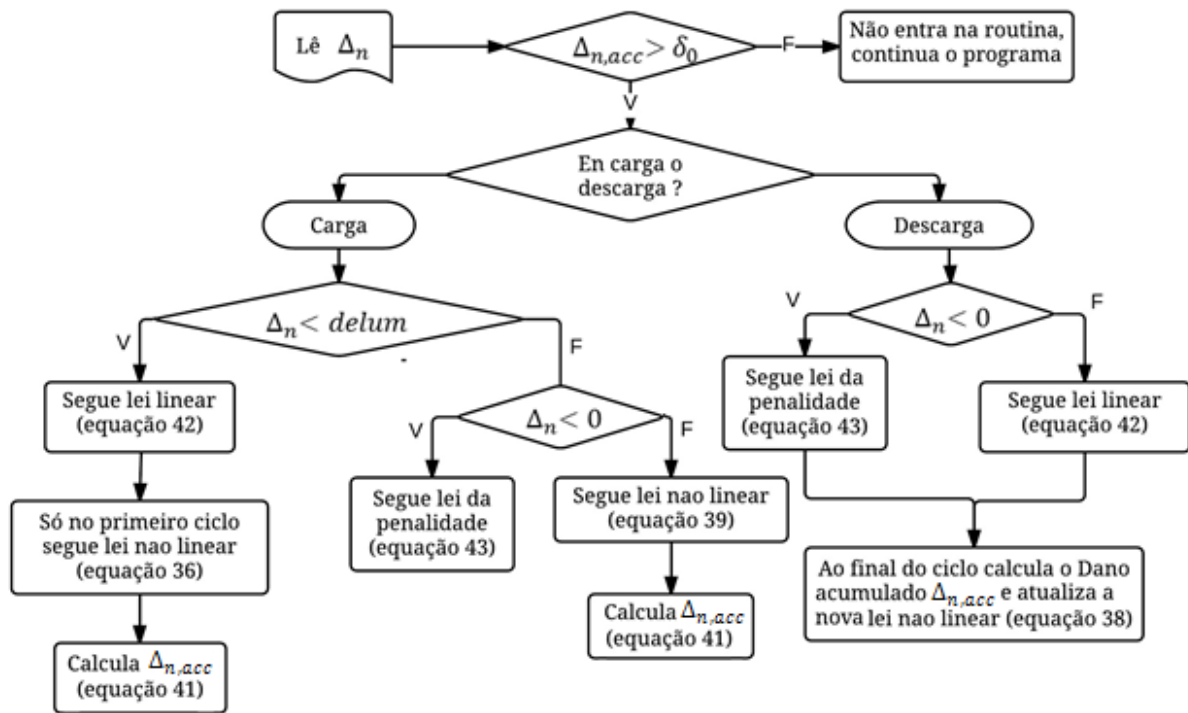


Figura 3. 6 Algoritmo dos processos de implementação computacional (simplificado)

A seguir é apresentado um exemplo simples para testar a validade do modelo.

Consideram-se duas superfícies, cuja separação segue a lei coesiva proposta por Needleman (1990b), e o modelo de dano proposto por Roe e Siegmund (2003). As superfícies estão submetidas ao deslocamento cíclico prescrito Δ_n , conforme a figura 3.11.

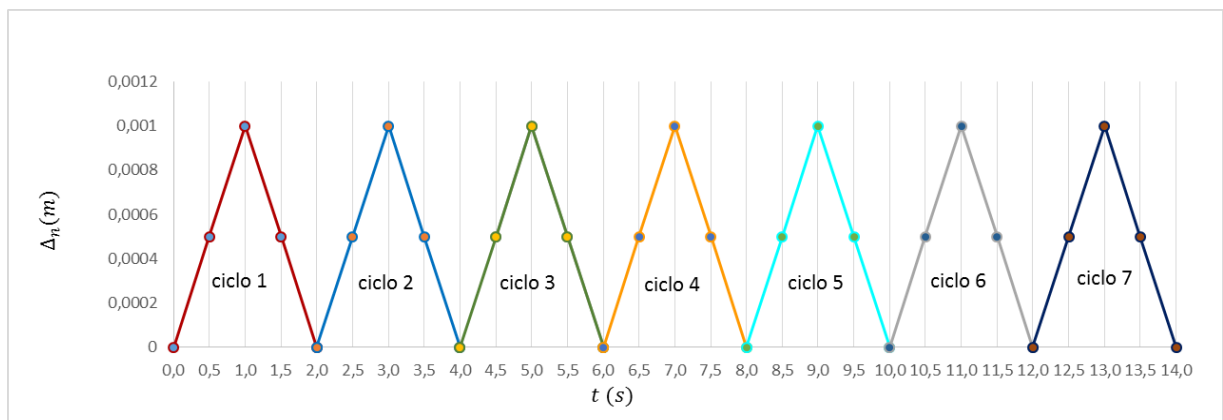


Figura 3. 7 Deslocamentos prescrito de duas superfícies vs tempo

Características e dados das superfícies:

Tabela 3. 1 Dados do material

$t_c = 2 \text{ s}$	$\sigma_{max,0} = 1,5 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	$E = 10^{11} \text{ Pa}$
$\delta_0 = 0,00085 \text{ m}$	$\frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} = 0,25$	$\frac{\delta_w}{\delta_0} = 4$

Segundo o modelo de interfaces coesivas de Needleman:

$$T_n = \sigma_{max,0} e \exp\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_0}\right) \frac{\Delta_n}{\delta_0}$$

Segundo a evolução do dano descrito por Roe e Siegmund (ROE; SIEGMUND, 2003):

$$\dot{D}_c = \frac{|\dot{\Delta}_n|}{\delta_w} \left[\frac{T_n}{\sigma_{max}} - \frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} \right]$$

Sendo que ΔD_c , não pode tomar valores negativos e só acontece depois de atingir um valor acumulado de $\Delta_n \geq \delta_0$ enquanto que, durante o descarregamento, o valor do dano é zero.

Para o ciclo 1 :

Considera-se que as superfícies começam a separar-se desde zero até alcançar o maior deslocamento em $t = 1 \text{ s}$, para depois descarregar e voltar à separação nula. O intervalo de tempo por cada ciclo de $t_c = 2$ segundos, 1 segundo para o carregamento 1 segundo o descarregamento, na avaliação das expressões, só se consideram 2 pontos no carregamento e 2 pontos no descarregamento, deste jeito o passo de tempo é de 0,5 segundos (Salienta-se que nos cálculos apresentados aqui, tanto \dot{D}_c como $\dot{\Delta}_n$ serão considerados como incrementos e não taxas).

O dano começa a se acumular quando atinge o comprimento característico δ_0 , até o valor máximo de deslocamento Δ_{nmax} , em seguida a variável dano D_c , se mantém constante durante o descarregamento.

O primeiro intervalo de deslocamento a considerar é $\dot{\Delta}_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$, neste caso:

$$\dot{\Delta}_n = \Delta_{nmax} - \delta_0 = 0.001 - 0.0009$$

$$\dot{\Delta}_{n1} = 0.00015 \text{ m}$$

Avaliando o valor de T_n em $t = 1$ s

$$T_{n1} = \sigma_{max,o} e \exp\left(-\frac{\Delta_{n1}}{\delta_0}\right) * \frac{\Delta_{n1}}{\delta_0}$$

$$T_{n1} = 1,4792 \cdot 10^9 N/m^2$$

Avaliando o primeiro intervalo de dano

$$\Delta D_{c1} = \frac{\dot{\Delta}_{n1}}{\delta_w} \left(\frac{T_{n1}}{\sigma_{max}} - \frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} \right)$$

$$\Delta D_{c1} = 0,0207$$

O dano acumulado D_c é:

$$D_c = D_{c1} = \Delta D_{c1} = 0,0325$$

Para o ciclo 2 : O ciclo tem 2 pontos de avaliação no carregamento:

➤ O primeiro ponto avaliado é quando $t = 2,5$ s

$$\dot{\Delta}_n = \Delta_n(t = 2,5 \text{ s}) - \Delta_{n-1}(t = 2,0 \text{ s})$$

$$\dot{\Delta}_{n2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Avaliando o valor de T_n em $t = 2,5$ s . Como se tem a primeira recarga, ele terá um comportamento linear, como se apresenta na equação 17, é será do seguinte jeito:

$$T_{n2} = T_{n1} + \frac{T_{n1}}{\Delta_{n1}} * (\Delta_{n2} - \Delta_{n1})$$

$$T_{n2} = 7,3961 \cdot 10^8 N/m^2$$

Avaliando o valor do dano no intervalo

$$\Delta D_{c2} = \frac{\dot{\Delta}_{n2}}{\delta_w} \left(\frac{T_{n2}}{\sigma_{max} (1 - D_{c1})} - \frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} \right)$$

$$\Delta D_{c2} = 0,0382$$

O dano acumulado D_c é:

$$D_c = \Delta D_{c2} + D_{c1} = 0,0766$$

➤ O segundo ponto avaliado é quando $t = 3 s$

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_n &= \Delta_n(t = 3,0 s) - \Delta_{n-1}(t = 2,5 s) \\ \dot{\Delta}_{n2} &= 5 * 10^{-4} m\end{aligned}$$

Avaliando o valor de T_n em $t = 3 s$

$$\begin{aligned}T_{n2} &= (1 - D_{c1}) \sigma_{max,o} e \exp\left(-\frac{\Delta_{n2}}{\delta_0}\right) * \frac{\Delta_{n2}}{\delta_0} \\ T_{n2} &= 1,4312 \cdot 10^9 N/m^2\end{aligned}$$

Avaliando o valor do dano no intervalo

$$\begin{aligned}\Delta D_{c2} &= \frac{\dot{\Delta}_{n2}}{\delta_w} \left(\frac{T_{n2}}{\sigma_{max} (1 - D_{c1})} - \frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} \right) \\ \Delta D_{c2} &= 0,1083\end{aligned}$$

O dano acumulado D_c é:

$$D_c = D_{c2} = D_{c1} + \Delta D_{c2}(\text{ponto 1}) + \Delta D_{c2}(\text{ponto 2}) = 0,1789$$

Os demais ciclos são avaliados da mesma forma que o ciclo 2, a seguir na Tabela 3.2 , Apresentam-se os resultados finais obtidos até o rompimento do material quando o dano atinge a unidade.

Tabela 3. 2 Valores das tensões normais T_{ni} , incrementos de dano ΔD_{ci} e dano total D_c em cada ciclo

Ciclo	T_{ni}	$\dot{\Delta}_{ni}$	ΔD_{ci}	D_c
1	1,47921782E+09	0,00015	0,03248	0,03248
2	7,39608911E+08	0,0005	0,03818	0,07066
2	1,43117727E+09	0,0005	0,10826	0,17891
3	7,15588636E+08	0,0005	0,04868	0,22759
3	1,21456565E+09	0,0005	0,10826	0,33585
4	6,07282823E+08	0,0005	0,05288	0,38873
4	9,82425289E+08	0,0005	0,10826	0,49698

Ciclo	T_{ni}	$\dot{\Delta}_{ni}$	ΔD_{ci}	D_c
5	4,91212645E+08	0,0005	0,05897	0,55596
5	7,44069460E+08	0,0005	0,10826	0,66422
6	3,72034730E+08	0,0005	0,07186	0,73607
6	4,96698752E+08	0,0005	0,10826	0,84433
7	2,48349376E+08	0,0005	0,11964	0,96397
7	2,30269302E+08	0,0005	0,10826	1,07223

No ciclo 7, em estado de carregamento antes do segundo ponto avaliado o valor do dano acumulado atinge a 1, é onde as superfícies falham.

Na Figura 3.8, apresenta-se a trajetória percorrida do carregamento-descarregamento em cada ciclo até a falha.

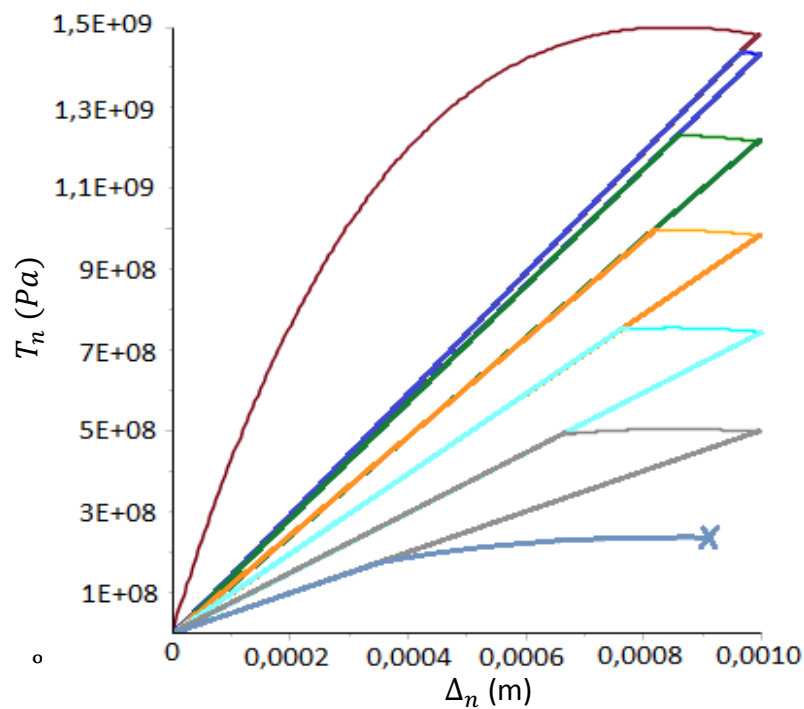


Figura 3. 8 Gráfico histerético das tensões vs deslocamentos (cargas e descargas)

4 APLICAÇÕES

APLICAÇÃO 1: DUAS SUPERFÍCIES COM SOBRECARGA

Consideram-se duas superfícies que se separam com o seguinte deslocamento cíclico de amplitude variável:

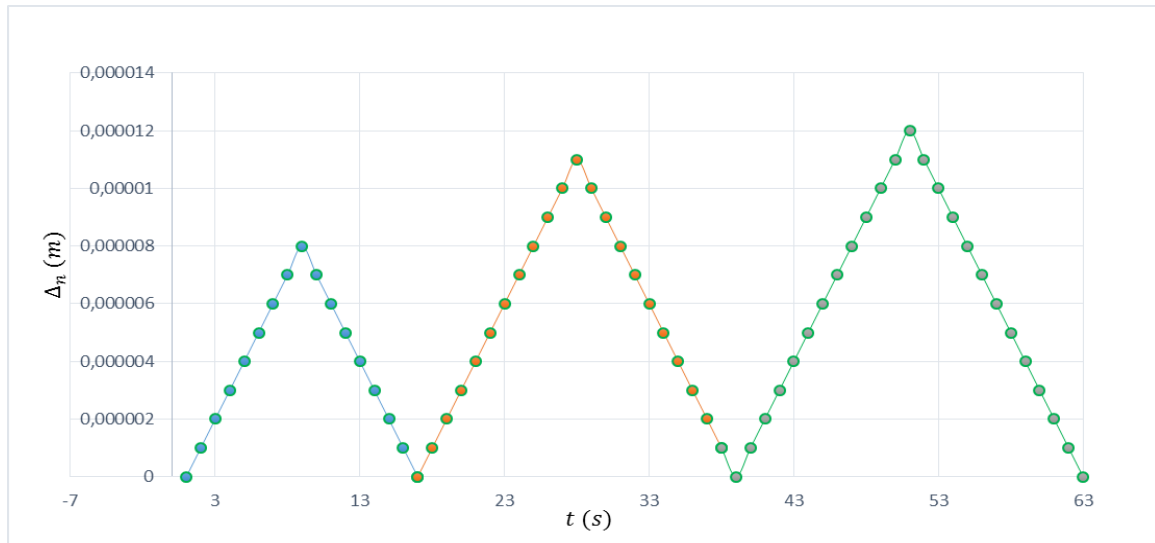


Figura 4. 1 Deslocamentos prescrito de duas superfícies vs tempo

Para o material se considera os seguintes dados:

Tabela 4. 1 Dados do material e do modelo de dano

$\sigma_{max,0} = 10^{10} Pa$	$\frac{\delta_w}{\delta_0} = 4$	$E = 10^{12} Pa$
$\delta_0 = 5 * 10^{-6} m$	$\frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} = 0,25$	

Realizando a análise se obtém a Figura 4.2 como correspondência para as tensões normais e os deslocamentos, onde se pode corroborar o comportamento da lei cíclica devido à incorporação do modelo de dano. Na tabela 4.2 apresentam-se os valores de dano acumulados ao finalizar cada ciclo.

Tabela 4. 2 Valores do dano ao final de cada ciclo

	DANO ACUMULADO
1º ciclo	10,245%
2º ciclo	29,681%
3º ciclo	43,375%

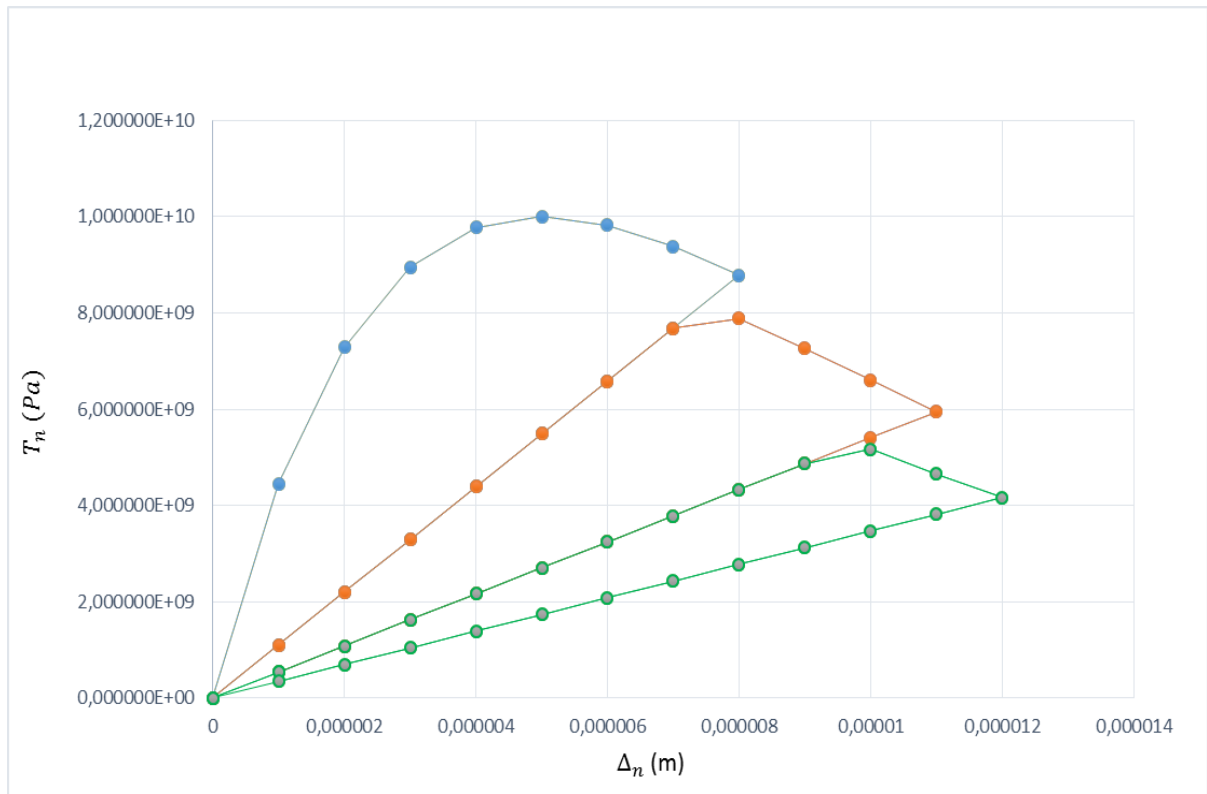


Figura 4. 2 Relação histerética de tensões vs deslocamentos

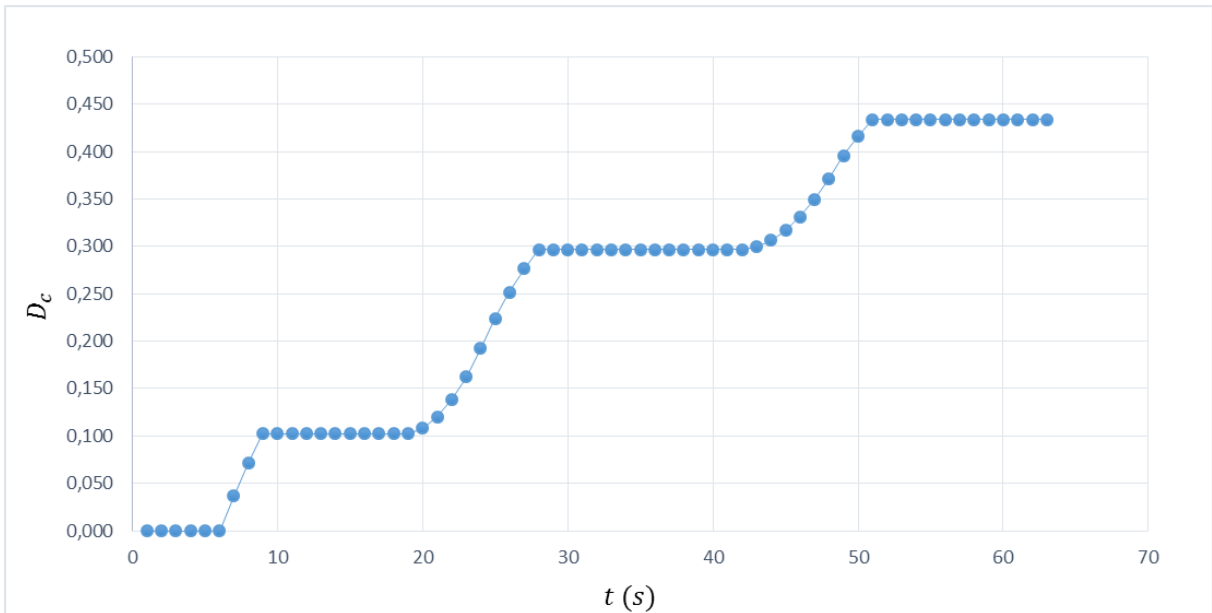


Figura 4. 3 Evolução do dano no tempo

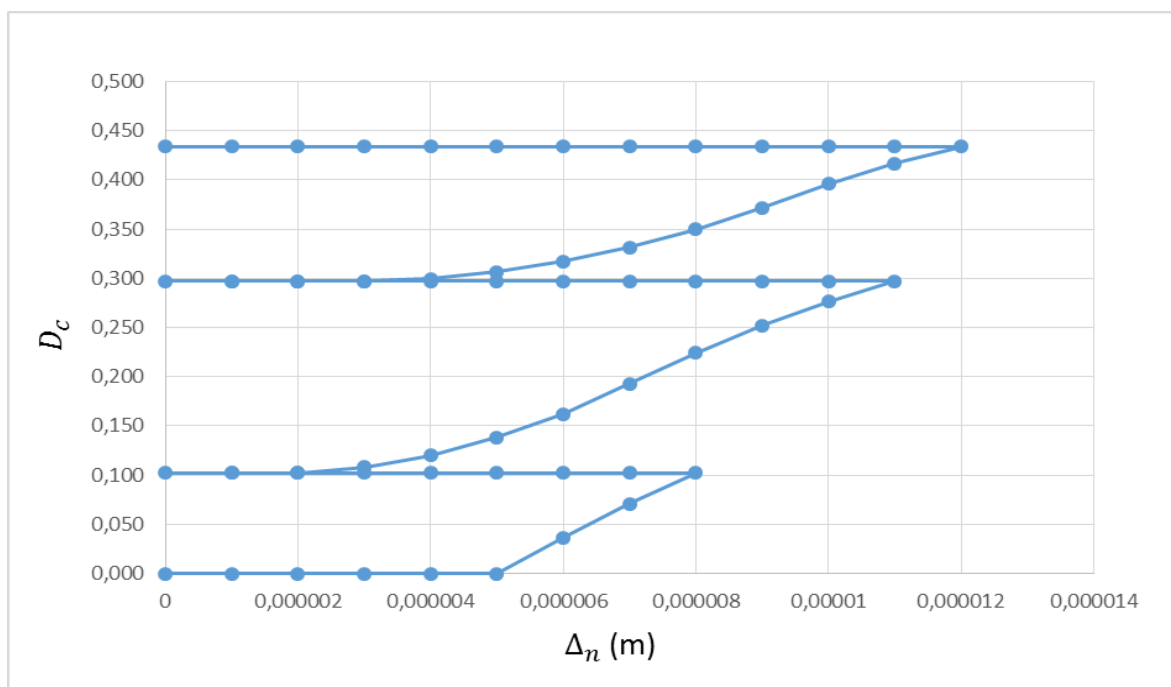


Figura 4. 4 Evolução do dano com o deslocamento

Na Figura 4.2, consegue-se representar satisfatoriamente a lei coesiva com a incorporação do dano descrita anteriormente, Na Figura 4.3 e Figura 4.4, observa-se a evolução crescente do dano conforme o tempo e o deslocamento. O dano aumenta somente no carregamento em cada ciclo, no descarregamento o dano se mantém constante.

APLICAÇÃO 2: FADIGA EM DOIS ELEMENTOS FINITOS E UM ELEMENTO DE INTERFACE

É analisado uma configuração que consta de dois elementos finitos, inicialmente de forma quadrada com lados de comprimento igual ao comprimento característico δ_0 , e um elemento de interface entre eles (Figura 4.5), submetido a um deslocamento prescrito $u(t)$ (Figura 4.6).

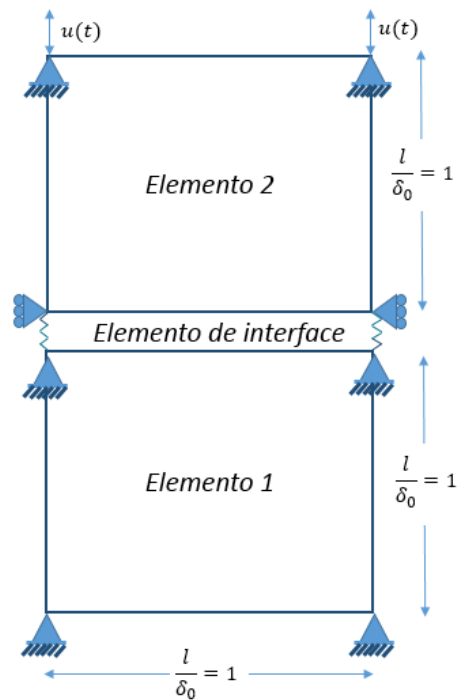


Figura 4. 5 Esquema do exemplo analisado

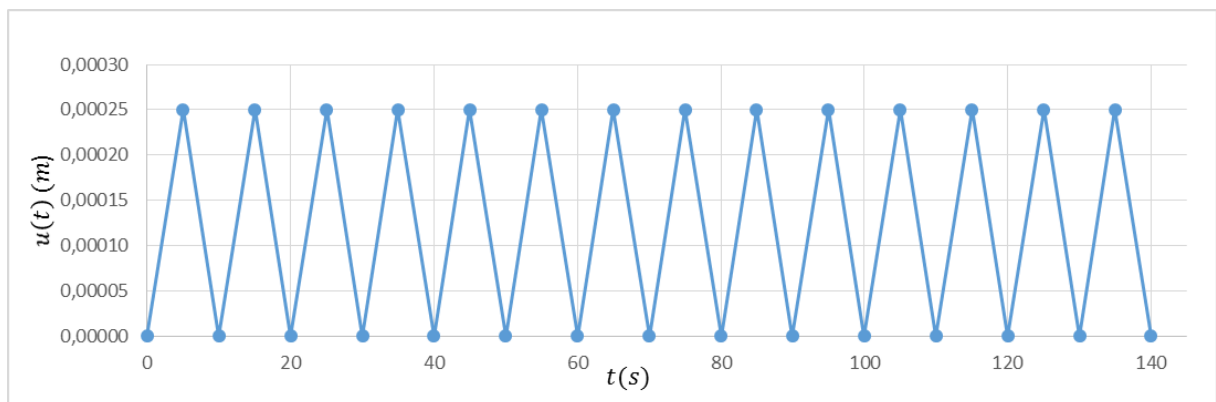


Figura 4. 6 Deslocamento prescrito nos nós superiores

Para o material se considera os seguintes dados:

Tabela 4. 3 Dados do material e do modelo de dano

$\sigma_{max,0} = 10^9 Pa$	$\frac{\delta_w}{\delta_0} = 4$	$E = 10^{11} Pa$
$\delta_0 = 1 \cdot 10^{-4} m$	$\frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} = 0,25$	

Para a análise da convergência se considerou um passo de tempo $\Delta t = 0,02$ segundos. Mostram-se os resultados do deslocamento com o tempo para o primeiro ponto de Gauss do elemento de interface (Figura 4.7), têm valores de deslocamento normal Δ_n , da mesma ordem do deslocamento prescrito $u(t)$, variando a forma devido ao processo de convergência. É atingido o valor o valor de dano D_c igual a 1, quando $t=93,653$ segundos (9,4 ciclos), momento em que o material rompe.

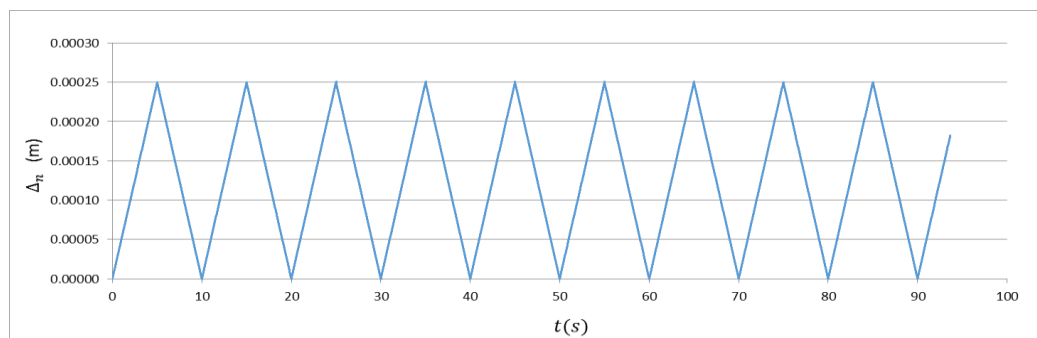


Figura 4. 7 Deslocamento normal no primeiro ponto de Gauss vs tempo

Na Figura 4.8, se mostra a relação histerética das tensões normais T_n , com os deslocamentos normais Δ_n , em cada iteração e passo de tempo, como o previsto no modelo, no primeiro ciclo tem carregamento não linear e descarregamento linear, nos demais ciclos o carregamento ao início tem uma parte linear e depois uma parte não linear e um descarregamento linear, sendo os primeiros 2 ciclos onde os valores de tensões normais T_n , tem maior decrescimento, para logo decrescer a valores bem menores.

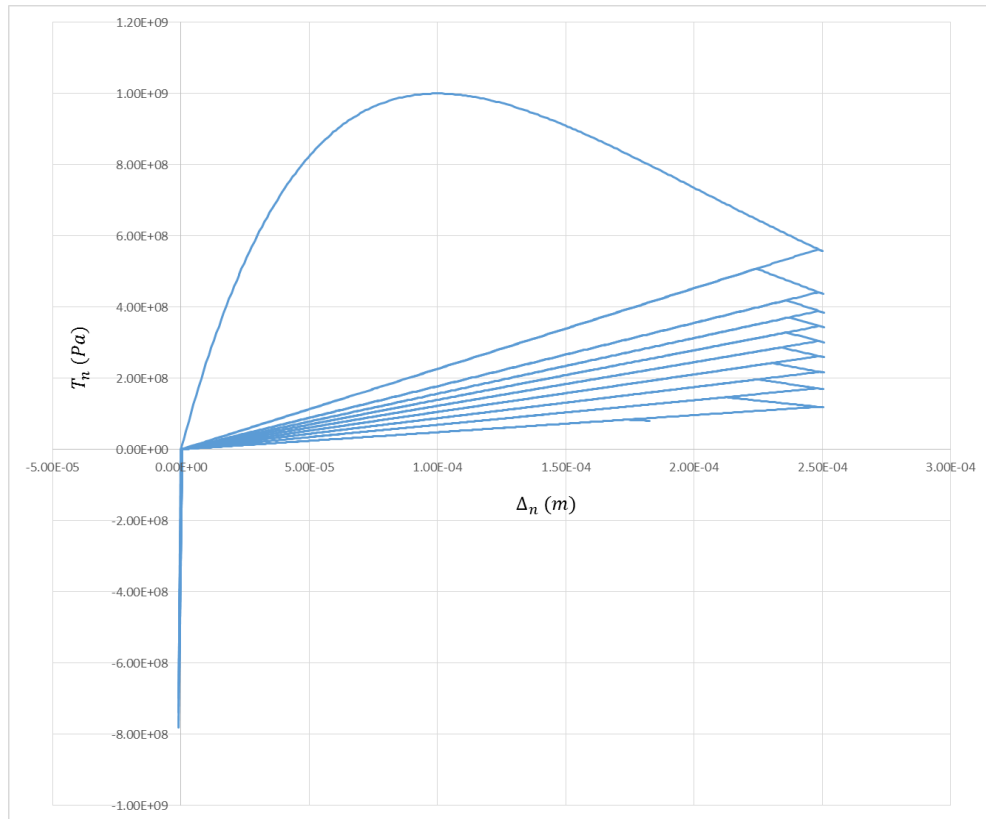


Figura 4. 8 Relação histerética de tensões normais com o deslocamento normais em cada ciclo de carregamento

Na Figura 4.9, se mostra o valor do dano D_c , em relação com o deslocamento Δ_n , sendo que durante o processo de carga e recarga o valor do dano se acrescenta, enquanto que na descarga o valor permanece constante, o espécime falha quando o dano atinge o valor de 1, isso acontece no carregamento no ciclo 9,4 como já mencionados. Os três pontos de Gauss restantes, tem comportamentos iguais ao primeiro ponto de Gauss.

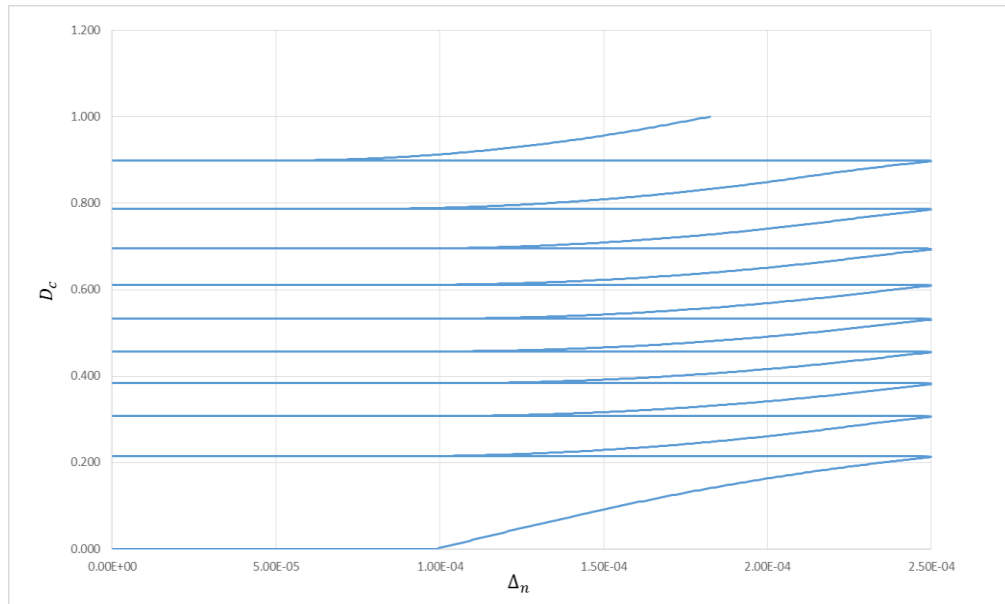


Figura 4. 9 Evolução do dano no percorrido do deslocamento

APLICAÇÃO 3: ANÁLISE DO EFEITO DE ESCALA EM CARREGAMENTO MONOTÔNICO

São analisados vários espécimes em estado plano de deformação conforme a Figura 4.10. É variada a altura $2h_s$, o espécimen tem um comprimento (L) constante muito maior que altura ($2h_s$). O comprimento da trinca é a_0 e está localizada até $L/3$ e ao centro da altura. Na continuação da trinca são inseridos elementos de interface, com uma lei coesiva de Needleman (1990b). Nestes espécimes aplica-se um deslocamento prescrito, uniforme e monotônico $u_2(t)$.

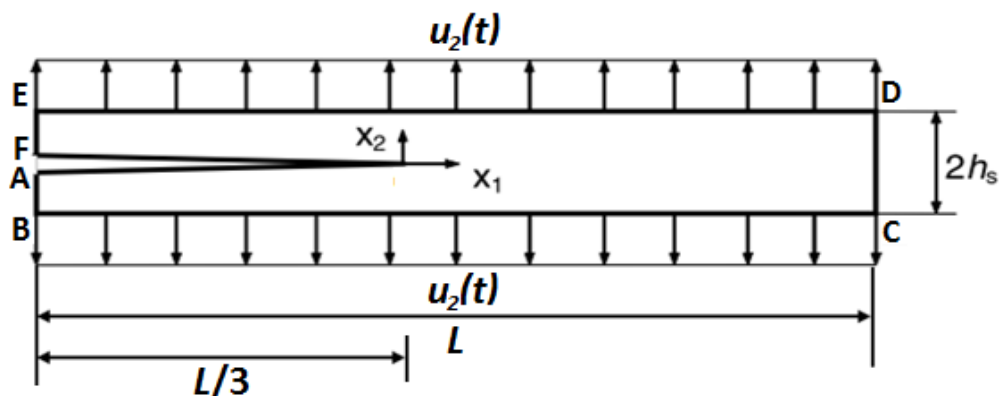


Figura 4. 10 Espécime analisado em carga monotônica variando a altura

Características do material:

Tabela 4. 4 Dados do material e do modelo de dano

$\nu = 0,34$	$\sigma_{max,0} = 10^9 Pa$	$E = 10^{11} Pa$
$\delta_0 = 1 * 10^{-4} m$	$\frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} = 0,25$	$\frac{\delta_w}{\delta_0} = 4$

A análise teórica é baseada no alívio de energia. No anexo B1, se apresenta uma dedução do efeito de escala usando o conceito da integral J com a lei do modelo coesivo de Needleman (1990b). No anexo B2 apresenta-se uma dedução usando o conceito da integral J e do modelo distribuído. As duas deduções são sugeridas em Bazant (2002).

Com o uso dos conceitos da integral J e o modelo coesivo discreto (Anexo B1), se chega a uma relação entre a tensão σ_{22} e h_s (equação 42), que representa uma linha em escala bi logarítmica entre a tensão σ_{22} e a altura h_s , a qual é desenhada na figura 4.12.

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{max,0}} = \sqrt{\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{E \phi_0}{\sigma_{max,0}^2 h_s}} = \sqrt{\frac{(1-\nu) \exp(1)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{E}{\sigma_{max,0}} \frac{\delta_0}{h_s}} \quad (44)$$

Porém o modelo numérico estabelece que enquanto o tamanho do espécime é pequeno, a tensão é independente do tamanho ($\sigma_{22}/\sigma_{max,0} = 1$), isto é a falha segue o conceito de análise limite falhando quando a tensão normal σ_{22} é igual à tensão coesiva máxima $\sigma_{max,0}$. No caso de espécimes maiores a relação entre $\sigma_{22}/\sigma_{max,0}$ e δ_0/h_s segue a equação (44), sendo uma linha em escala bi logarítmica como é mostrado na Figura 4.12. Assim é previsto uma dependência do tamanho. O ponto de transição entre os casos dependente a não dependente do tamanho, se dá para $h_s/\delta_0=420.25$.

Apresenta-se uma outra dedução no Anexo B2, segundo conceitos do modelo distribuído e a integral J.

Com uso do método dos elementos finitos com elementos de interface inseridos, são analisados os seguintes espécimes de comprimento $L = 3740 \delta_0$ constante, variando a altura h_s .

Tabela 4. 5 Valores normalizados das alturas dos espécimenes analisados

(h_s/δ_0)	10	20	80	100	150	750	900

A análise é realizado com o método dos elementos finitos e comparado com as análises teóricas.

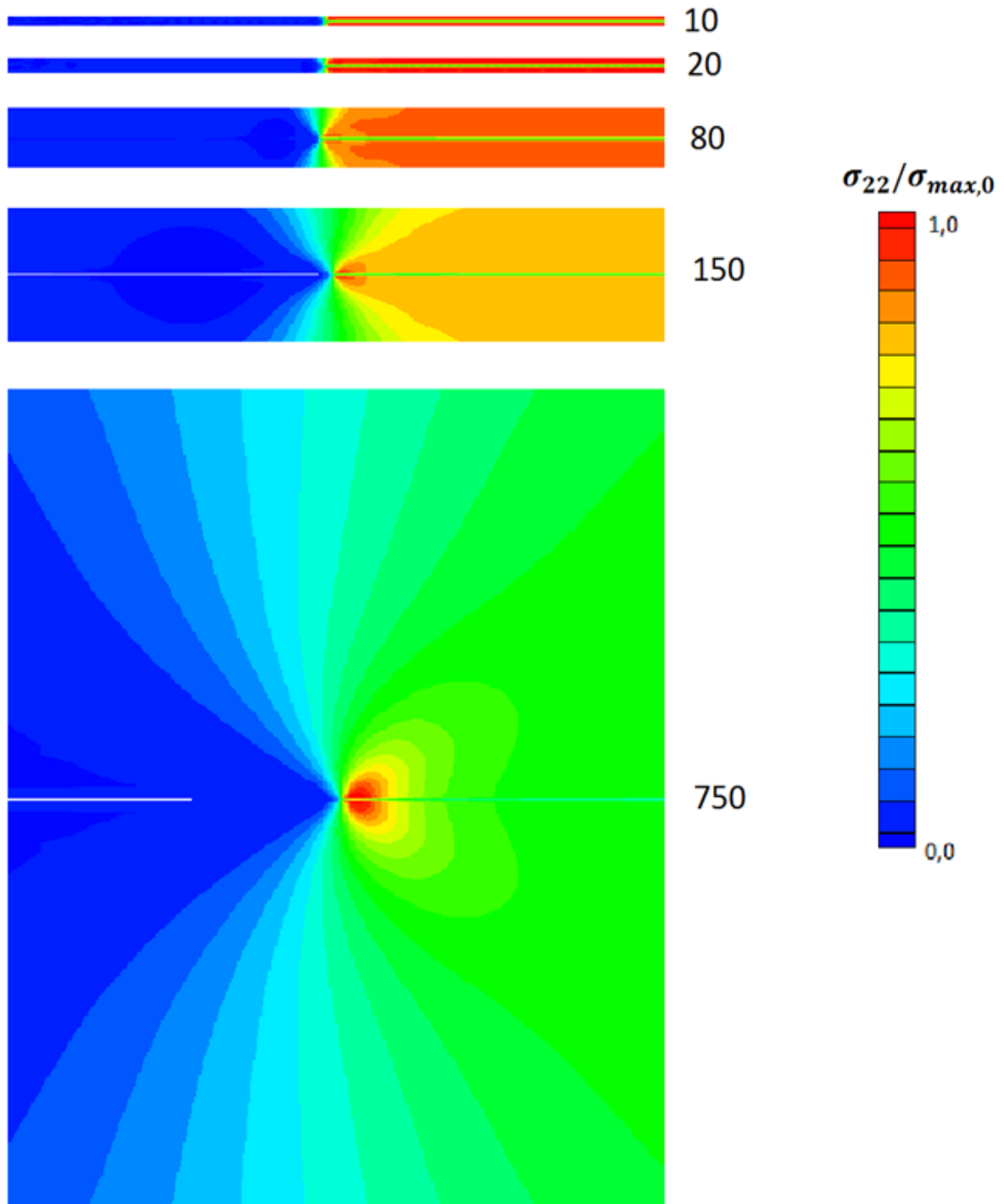


Figura 4. 11 Distribuição de tensões normais no contorno da trinca em vários espécimenes

Na tabela 4.6, se resume os valores de tensão última calculados na ponta da trinca no momento da propagação.

Tabela 4. 6 Resultados das tensões normais normalizadas na ponta da trinca para várias alturas normalizadas

h_s/δ_0	10	20	80	100	150	240	750	900
$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{max,0}}$	0,9998	0,9999	0,9994	0,9999	0,9850	0,9100	0,6602	0,6252

A Figura 4.11 mostra a distribuição das tensões $\sigma_{22}/\sigma_{max,0}$. Pode-se observar que os espécimes pequenos tendem a falhar integralmente em todo o elemento, enquanto que os espécimes maiores apresentam concentração das tensões na ponta da trinca. Desenhando os pontos de tensão normal vs altura, se obtêm correspondência com as análises teórica previstas, como se mostra na Figura 4.12.

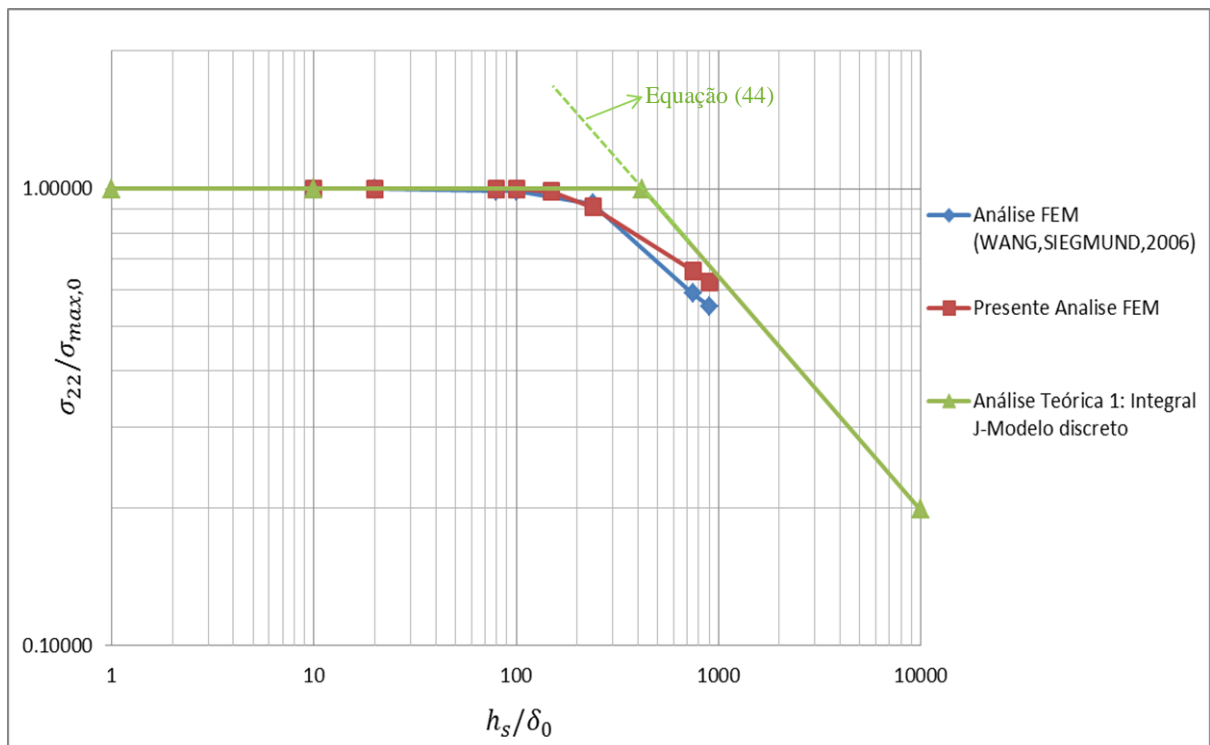


Figura 4. 12 Comparação dos estados de falha monotônicos (teóricos e computacionais) em função da tensão normal e a altura dos espécimes em escala bilogarítmica

APLICAÇÃO 4: ANÁLISE DO EFEITO DE ESCALA EM FADIGA

São analisados vários espécimes, com as mesmas características da aplicação 3, com a diferença que o deslocamento prescrito $u_2(t)$, tem um comportamento cíclico de carga e descarga, como se mostra na Figura 4.14.

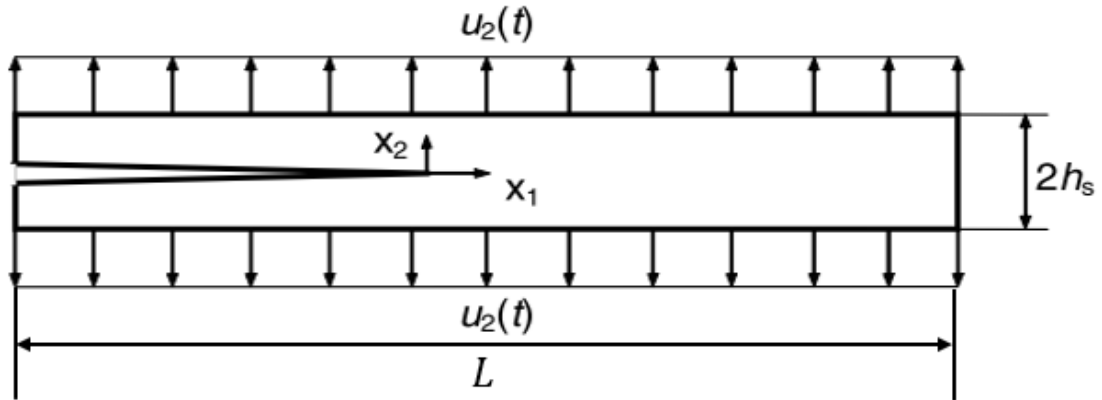


Figura 4. 13 Espécimen analisado em carga cíclica variando sua altura

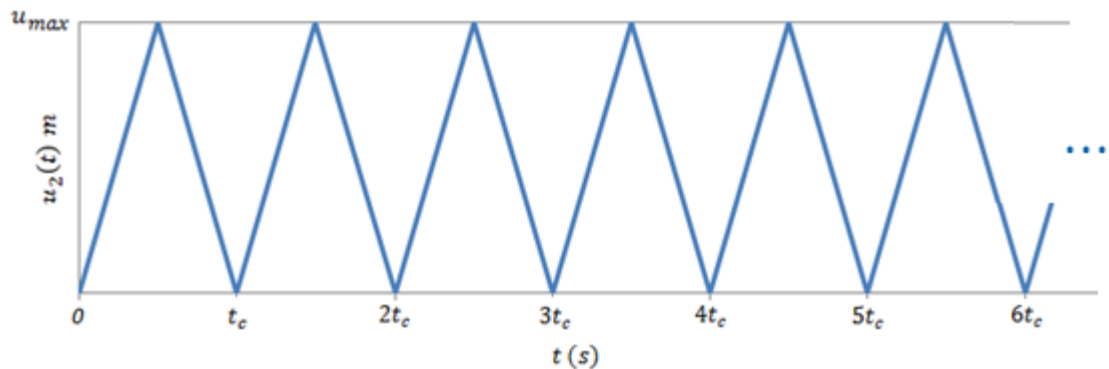


Figura 4. 14 Deslocamento cíclico prescrito de carga e descarga

Tabela 4. 7 Dados do material e do modelo de dano

$t_c = 20 \text{ seg}$	$\sigma_{max,0} = 10^9 \text{ Pa}$	$E = 10^{11} \text{ Pa}$
$\delta_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$\frac{\sigma_f}{\sigma_{max,0}} = 0,25$	$\frac{\delta_w}{\delta_0} = 4$
$\Delta G / \phi_0 = 0,2$	$\nu = 0,34$	

Calcula-se a amplitude de deslocamento máxima u_{max} , com a condição $\Delta G / \phi_0 = 0,2$ e $R = 0$, onde R é definido como $R = G_{min} / G_{max}$

$$\frac{\Delta G}{\phi_0} = \frac{G_{max} - G_{min}}{\sigma_{max,0} \exp(1) \delta_0} = 0.2 \quad (45)$$

Sabendo que: $0 \leq u_2(t) \leq u_{max}$, se pode formar os limites de $G(t)$, assim:

$$0 \leq \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{[u_2(t)]^2}{h_s} \leq \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{[u_{max}]^2}{h_s}$$

$$0 \leq G(t) \leq \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{[u_{max}]^2}{h_s} \quad (46)$$

De onde:

$$G_{min} = 0 \quad (47)$$

$$G_{max} = \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{[u_{max}]^2}{h_s} \quad (48)$$

Substituindo (47) e (48) em (45), se obtêm:

$$u_{max} = \sqrt{\frac{0.2 \phi_0 h_s (1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}} \quad (49)$$

Obtendo-se assim os resultados dos deslocamentos prescritos u_{max} a medida que aumenta a altura h_s dos espécimes, como mostra-se na Tabela 4.10

Tabela 4. 8 Amplitude máximo do deslocamento prescrito para cada espécimen

h_s/δ_0	$u_{max} (m)$
10	$1,87939324 \cdot 10^{-5}$
20	$2,65786340 \cdot 10^{-5}$
50	$4,20245103 \cdot 10^{-5}$
80	$5,31572681 \cdot 10^{-5}$
100	$5,94316324 \cdot 10^{-5}$
150	$7,27885870 \cdot 10^{-5}$
200	$8,40490206 \cdot 10^{-5}$

h_s/δ_0	$u_{max} (m)$
240	$9,20710891 \cdot 10^{-5}$
400	$1,18863265 \cdot 10^{-4}$
750	$1,62760229 \cdot 10^{-4}$
900	$1,78294897 \cdot 10^{-4}$

Logo da simulação do modelo nas diferentes escalas se tem:

a) Começo da propagação

A propagação começa quando o primeiro ponto de Gauss atinge um valor de dano $D_c = 1$, em certo número de ciclos, denominado ciclos de incubação. A quantidade de ciclos de incubação é maior nos espécimes pequenos (no E1, $N=35,5$ ciclos), e vai decrescendo conforme aumenta o tamanho até convergir em valores perto de 5 ciclos para os espécimes maiores (Figura 4.16, Tabela 4.11).

Na figura 4.15 observa-se que os picos de deslocamento normal Δ_n no primeiro ponto de Gauss, apresentam uma tendência de crescimento com o aumento do número de ciclos, que é mais notório nos espécimes grandes sendo uma característica da perda de rigidez. Também o valor do deslocamento normal máximo Δ_n vai aumentando à medida que o tamanho do espécime acrescenta.

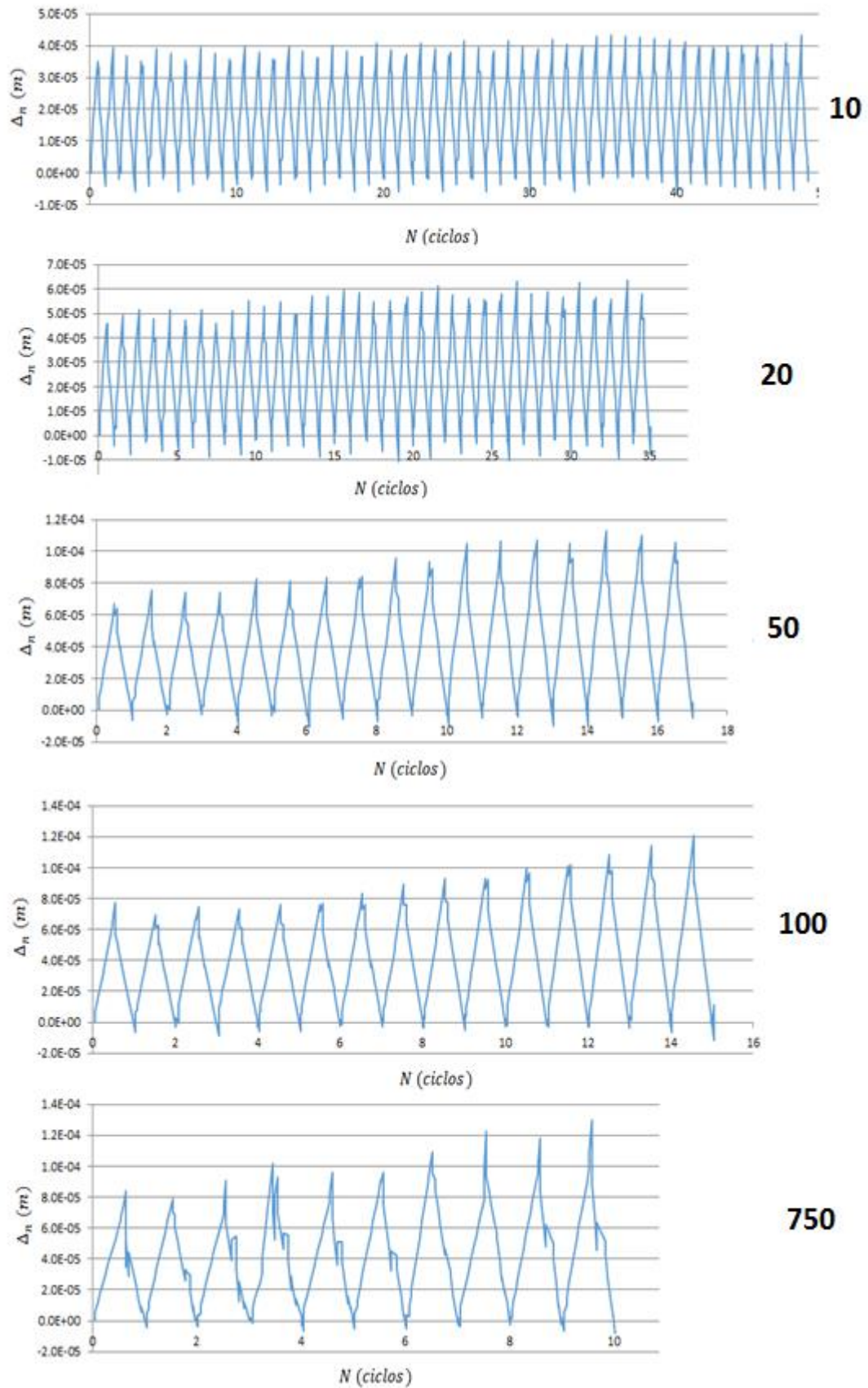


Figura 4. 15 Deslocamento normal vs número de ciclos em espécimes representativos

Tabela 4. 9 Número de ciclos de incubação por espécime

h_s/δ_0	N_{ini} (ciclos)
10	35,581
20	18,235
50	9,582
80	8,550
100	8,475
150	7,492
200	6,588
240	5,544
400	7,217
750	7,511
900	7,013

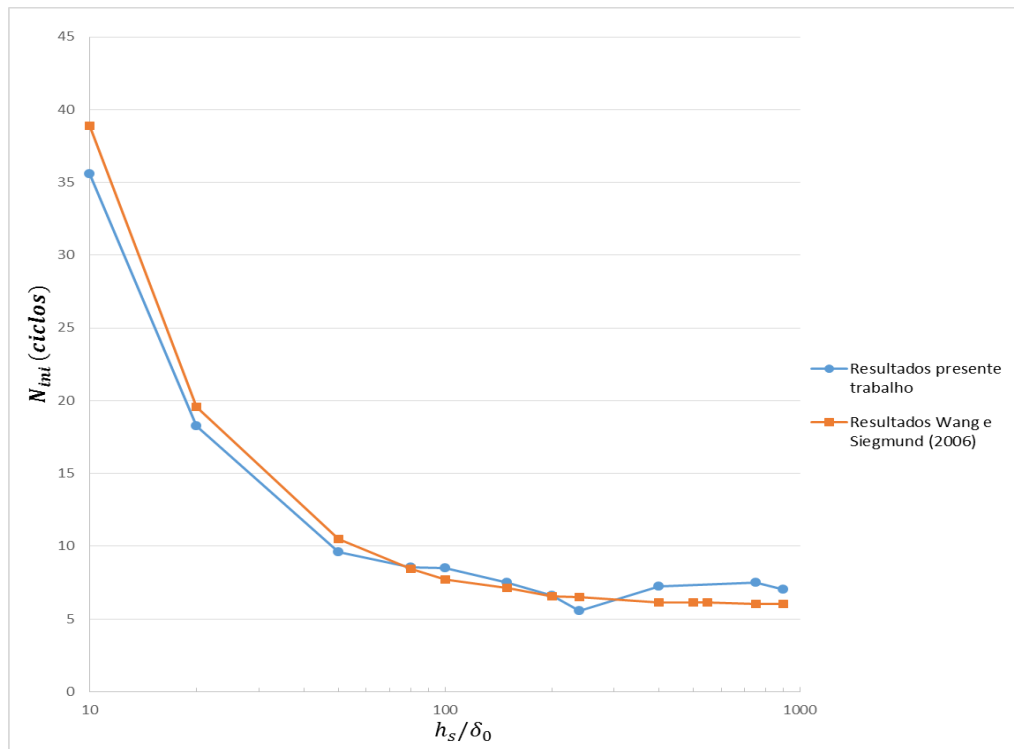


Figura 4.16 Número de ciclos iniciais para o começo da propagação

Pode-se observar que os resultados obtidos aproximam aos do Wang e Siegmund (2006), a não coincidência exata acontece por vários motivos: tipo de malha dos espécimes, o tamanho de passo na convergência e o caso que o deslocamento prescrito é do tipo linear e do Wang e Siegmund (2006) é Sinusoidal.

b) Propagação da trinca

A propagação da trinca vai ocorrer quando os elementos de interface atinjam um dano igual a 1. O processo de falha progressiva dos elementos de interface durante o número de ciclos tem comportamentos diferentes à medida que se vai escalonando os espécimes, como se mostra na Figura 4.17.

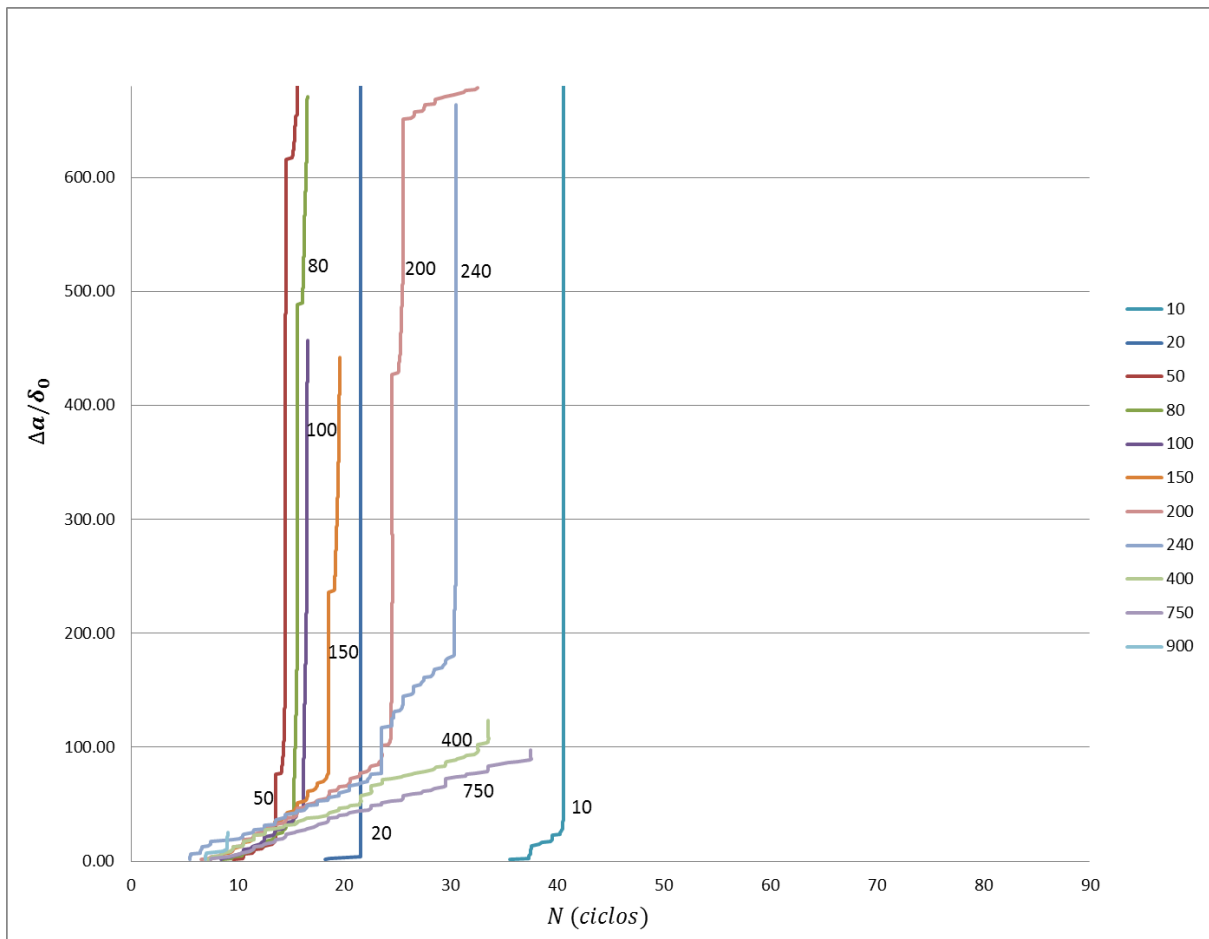


Figura 4. 17 Extensão de trinca normalizada com o número de ciclos, para todos os espécimes

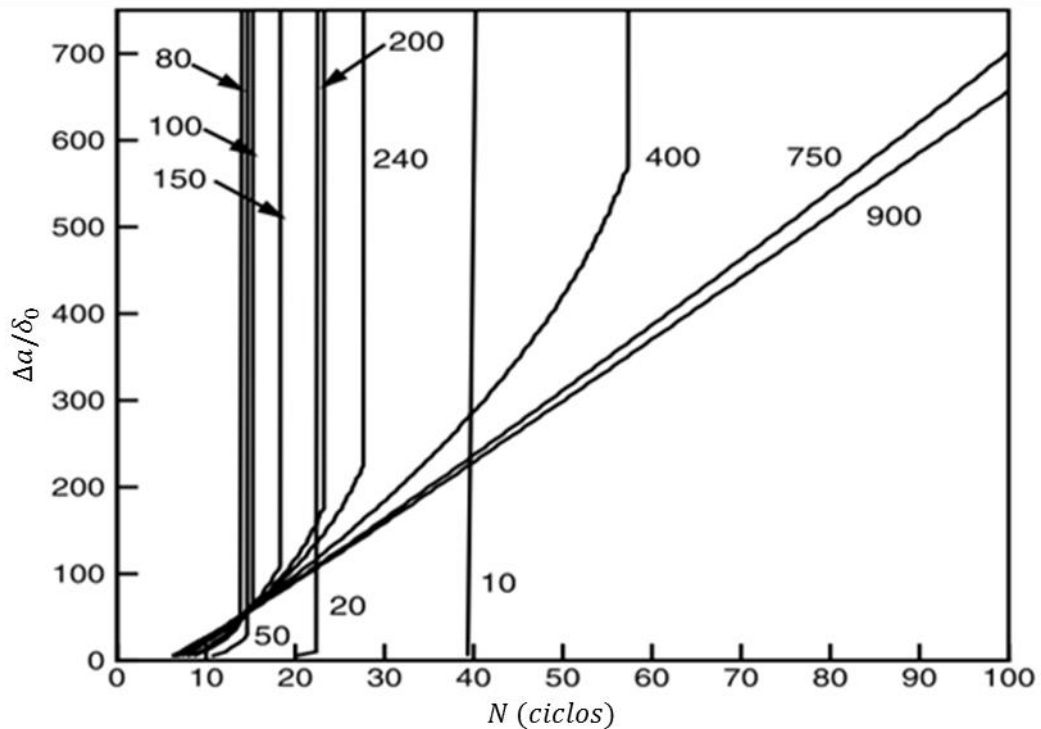


Figura 4. 18 Extensão de trinca normalizada com o número de ciclos, para todos os espécimes obtido por Wang e Siegmund (2006)

Na Figura 4.17 se mostra a extensão da trinca normalizada $\Delta a/\delta_0$ dependendo do número de ciclos de carregamento aplicado. Para todos os tamanhos de espécimes considerados, um número inicial de ciclos de incubação N_{ini} é requerido, como já discutido. Para os espécimes grandes $h_s/\delta_0 = 750$ e $h_s/\delta_0 = 900$ o período de incubação é seguido por uma fase de extensão com uma velocidade de crescimento quase-constante.

Para espécimes menores $100 < h_s/\delta_0 < 750$, inicialmente tem um comportamento como os espécimes maiores com um período de incubação maior, seguido por uma fase de crescimento de trinca, até atingir um ciclo crítico N_c quando ocorre a falha repentina do espécime completo.

O terceiro grupo de espécimes menores, $h_s/\delta_0 < 100$, apresenta um maior número de ciclos de incubação, em seguida falham sem desenvolver nenhum crescimento gradual de trinca. A falha é sempre por decoesão uniforme.

O crescimento de trinca não se pode calcular para espécimes menores que $h_s/\delta_0 < 50$, devido ao tipo de falha é por decoesão, portanto se estes espécimes contém uma trinca, leis baseadas na lei de Paris não podem ser usadas.

Para espécimes na faixa $50 < h_s/\delta_0 < 200$, a variação da taxa de crescimento da trinca é prevista decrescente com o tamanho de espécimen, ou seja menor o tamanho mais rápida a propagação. Esses resultados tem correlação com os estudos experimentais (BAZANT, ZENEK P; SCHELL, 1993) e (BAZANT, ZDENEK P; XU, 1991). Para estes espécimes uma lei de Paris dependente do tamanho (equação 2), pode ser usada para representar o crescimento da trinca.

Para os espécimes de maior tamanho ($h_s/\delta_0 = 750$ e 900), o cálculo computacional prediz a taxa inicial de evolução da trinca independentemente do tamanho e também da Figura 4.17 se pode deduzir que o valor $\partial N/\partial a$ é constante para o nível de ΔG considerado. Nesta faixa a lei de Paris é válida (equação 1). O cálculo do crescimento da taxa da evolução da trinca deste modo pode ser transferido para outros espécimes maiores.

Assim para corroborar o anterior é plotado a relação de rapidez de avanço da trinca da/dN com diferentes variações de energia ΔG (sendo ϕ_0 a energia coesiva), para o espécime $h_s/\delta_0 = 750$ (Figura 4.19). Resultando uma relação com tendência linear, o que valida a lei de Paris.

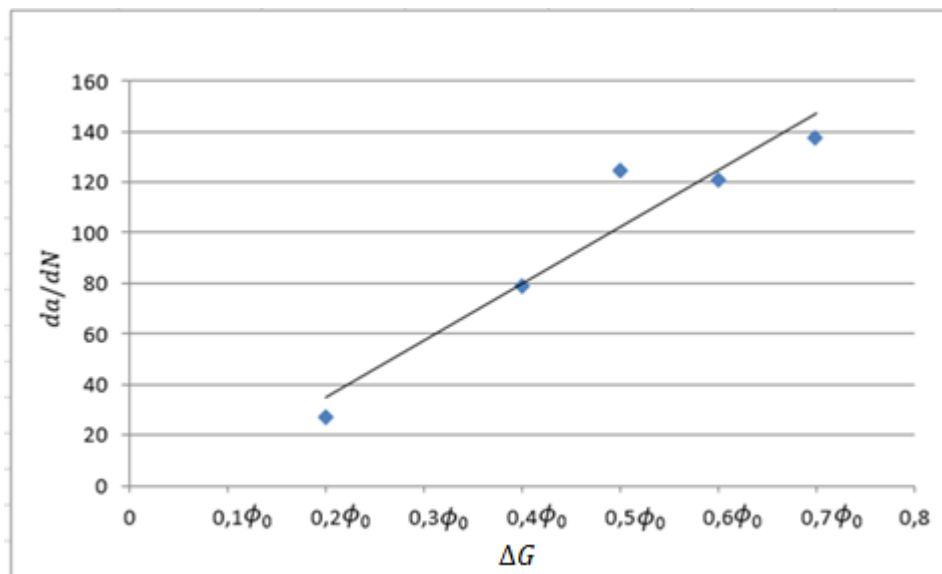


Figura 4. 19 Lei de Paris para o espécime $h_s/\delta_0 = 750$

c) Distribuição do dano e do deslocamento quando $N=15,5$ ciclos

Na figura 4.20, se mostra a distribuição do dano D_c ao longo da zona coesiva quando o número de ciclos $N=15,5$ ciclos, para o espécimen intermediário $h_s/\delta_0 = 240$ e para o espécime maior $h_s/\delta_0 = 750$, a distribuição do dano é igual a 1 até um valor aproximado de 125 ciclos, ou seja os elementos de interface até esse valor falharam, desse ponto seguem valores decrescentes até valores próximos de zero. Para o mesmo número de ciclos o dano para o espécime $h_s/\delta_0 = 20$, se mantém abaixo de 1. A simulação prediz que o crescimento da trinca tipo falha progressiva só acontece nas estruturas maiores: $h_s/\delta_0 = 240$ e $h_s/\delta_0 = 750$. Enquanto que em estruturas menores $h_s/\delta_0 = 20$, a falha ocorre por decoesão uniforme.

O mesmo comportamento acontece com a abertura de trinca (Figura 4.21). Para os espécimes $h_s/\delta_0 = 240$ e $h_s/\delta_0 = 750$, se tem que a abertura da trinca vai decrescendo gradualmente, o que significa uma falha por crescimento da trinca e tipo falha. No enquanto que para o espécimen $h_s/\delta_0 = 20$, o valor é constante, ou seja a falha acontece por decoesão uniforme. Os valores obtidos tem semelhança com os obtidos por Wang e Siegmund (2006).

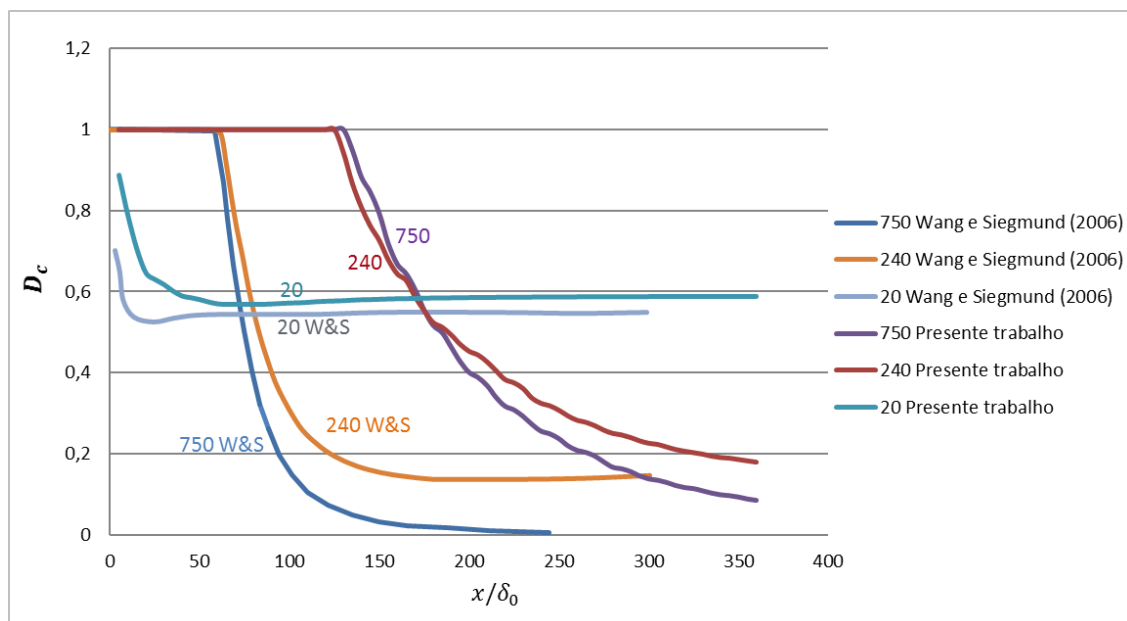


Figura 4. 20 Distribuição do dano ao longo do comprimento da linha de elementos coesivos quando $N=15,5$ ciclos

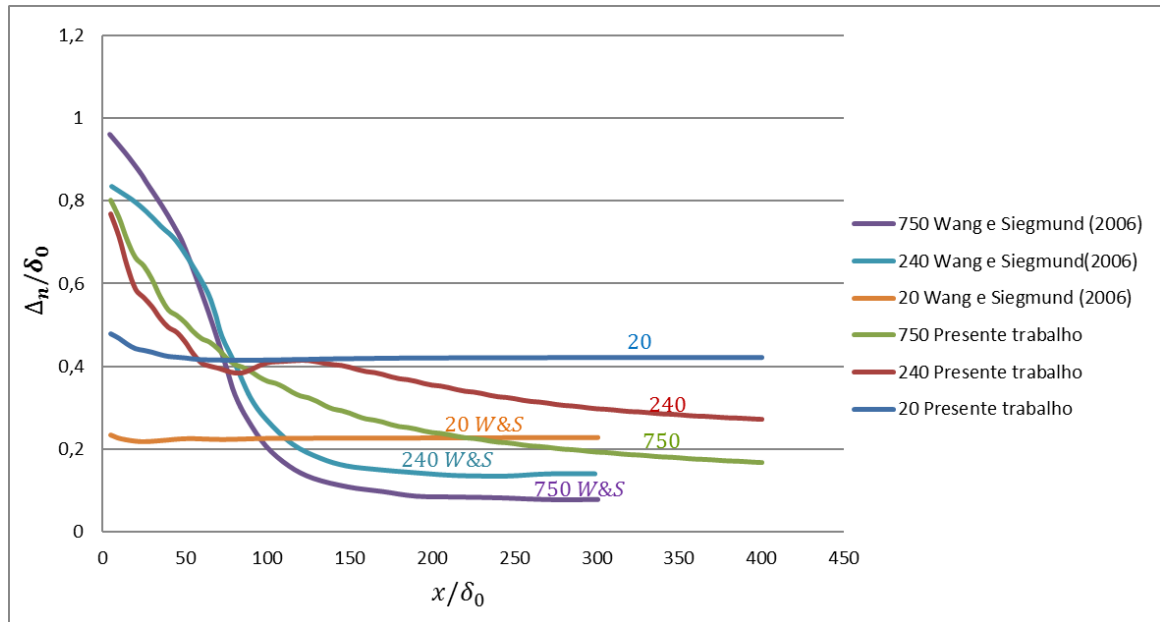


Figura 4. 21 Distribuição do deslocamento ao longo do comprimento da linha de elementos coesivos quando $N=15,5$ ciclos

d) Distribuição das tensões ao redor da trinca

Na Figura 4.22, se mostra a distribuição das tensões $\sigma_{22}/\sigma_{max,0}$ no decorrer do tempo (quando o número de ciclos é: 0,5; 15,5 e 25,5), para o espécime maior (Figura 4.22a). A concentração de tensões está presente desde o início, e vai se propagando por crescimento de trinca, até que num momento o material rompe, e a trinca se propaga tendo uma falha final do tipo decoesão uniforme, como se pode notar também na Figura 4.17. Para o espécimen menor (Figura 4.22b) não se apresenta a concentração de tensões na ponta, por tanto a falha sempre ocorre por decoesão uniforme, os resultados apresentam similitude com os resultados obtidos por Wang e Siegmund (2006), apresentados na Figura 4. 23.

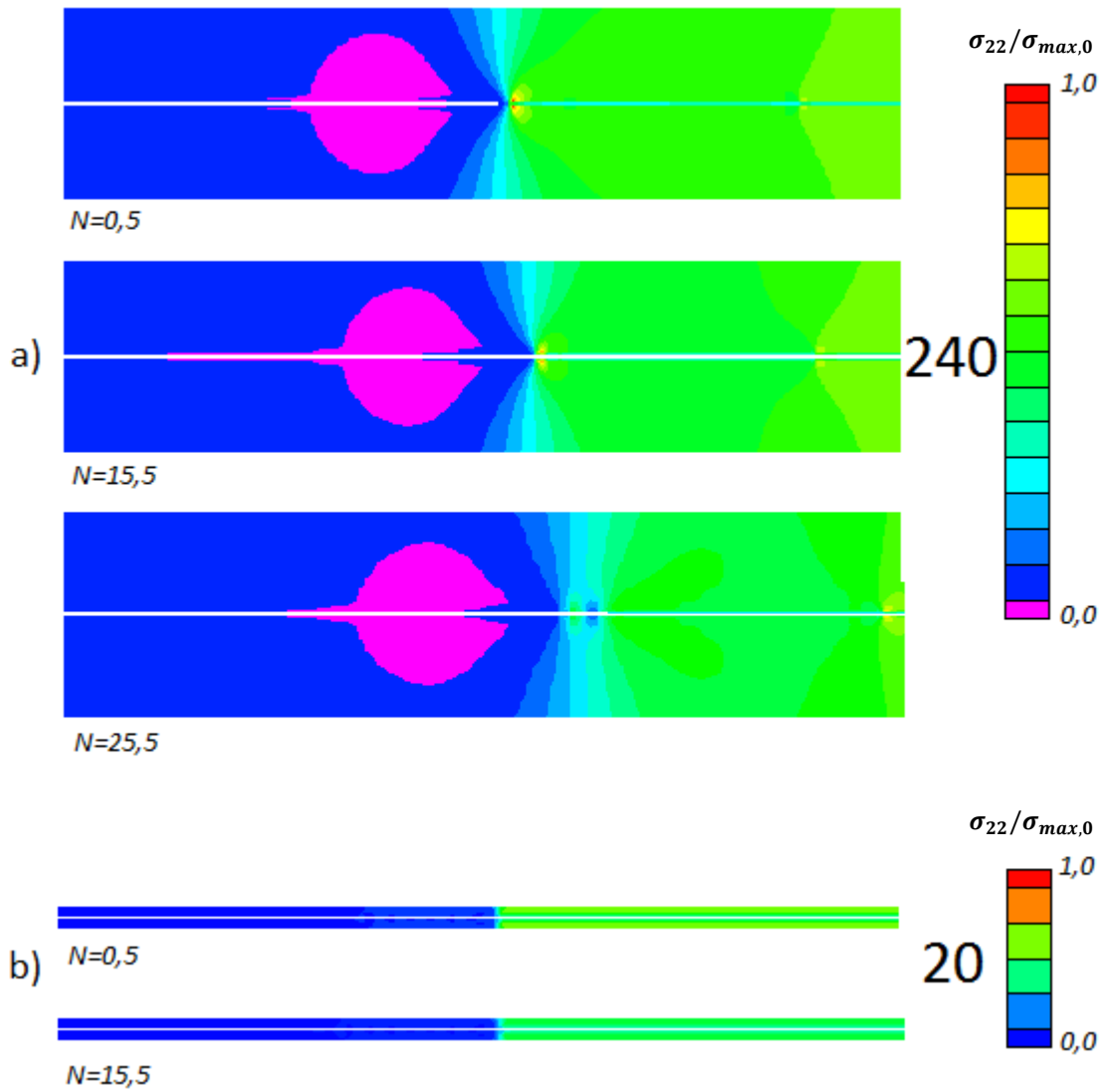


Figura 4. 22 Distribuição das tensões normalizadas $\sigma_{22}/\sigma_{max,0}$, ao redor da ponta da trinca

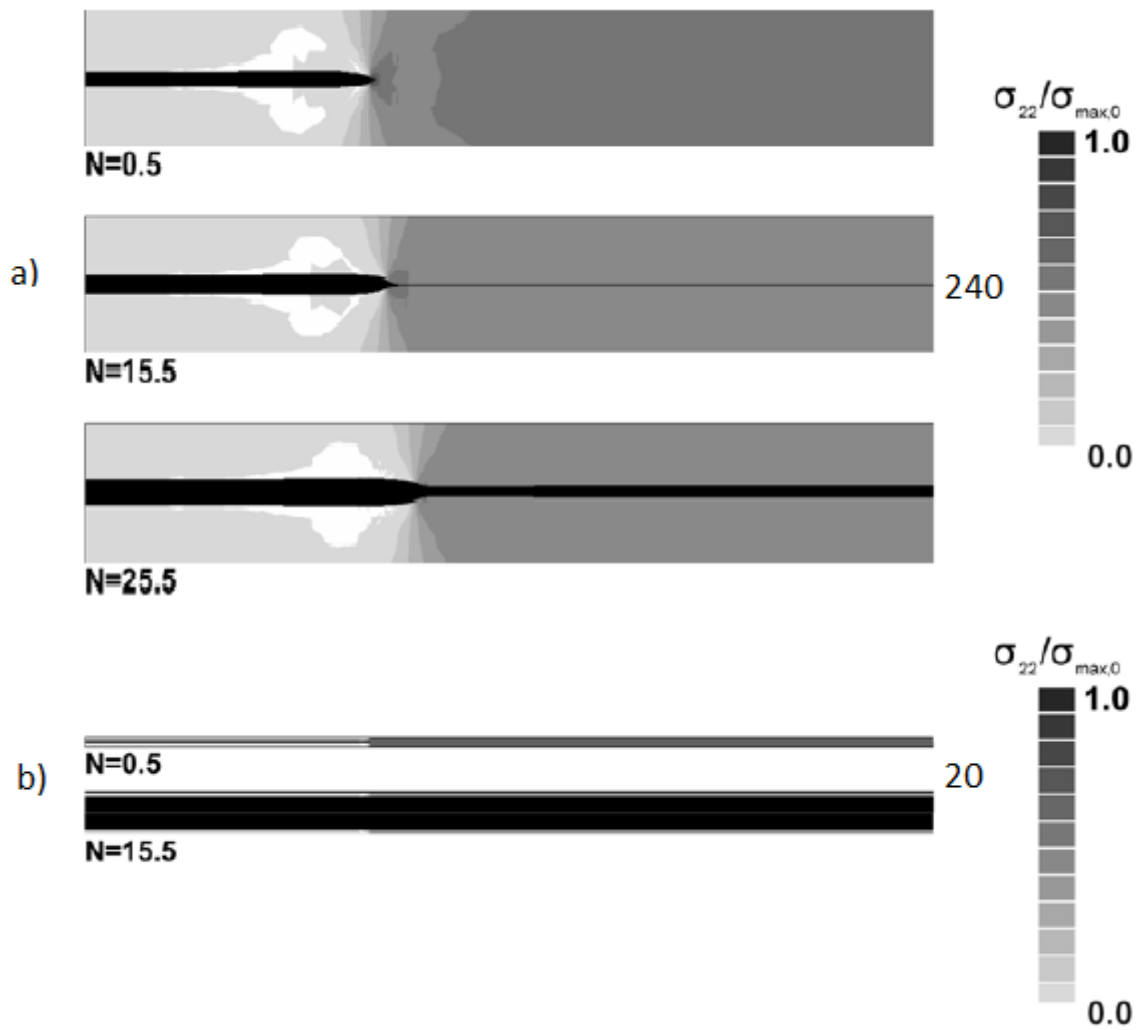


Figura 4. 23 Distribuição das tensões normalizadas $\sigma_{22}/\sigma_{\max,0}$, ao redor da ponta da trinca obtidos pelo Wang e Siegmund (2006)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 CONCLUSÕES

O modelo implementado consegue representar corretamente as características do processo de fadiga em materiais quase frágeis, isto é a degradação progressiva das tensões resistentes do material na zona de fratura de processos. Assim também é representado o efeito de escala quando são variadas as dimensões do espécime estudado, observando principalmente que a análise em elementos finitos, com interfaces coesivas, consegue captar as variações e redistribuições energéticas no corpo quando o mesmo é escalonado (sendo estas variações o principal motivo do efeito de escala).

No caso monotônico com o uso das interfaces coesivas se consegue verificar o efeito de escala ao testar a tensão de falha última para cada espécime de diferente altura. Os resultados fecham quase coincidentes com os de Roe e Siegmund (2006), com a análise teórica baseada em conceitos da integral J e o modelo coesivo. Também pode se notar a variação dos campos de tensões normais ao redor da trinca, sendo esta uma característica do efeito de escala.

No caso de carregamento cíclico, se consegue monitorar a vida em crescimento da trinca, desde o começo da propagação até a falha final. Conforme vai se testando os espécimes com diferente tamanho pode-se observar as características do efeito de escala, expressas em termos de rapidez de avanço da trinca, deslocamentos normais, tensões e dano.

Nos espécimes menores se tem um maior número de ciclos de incubação para o começo da propagação, e uma rapidez de avanço de trinca também maior. Sendo que para os dois espécimes menores a falha completa acontece pouquíssimo tempo depois de atingido o número de ciclos de incubação e com uma rapidez que tende ao infinito, isto é denominada uma falha por decoesão uniforme. Enquanto os espécimes maiores, depois de atingido o número de ciclos de incubação tem um maior número de ciclos de desenvolvimento até a falha completa. Isto é uma falha progressiva. Os espécimes intermediários tem um comportamento misto de avanço progressivo e falha por decoesão uniforme.

Esta característica progressiva dos espécimes maiores apresenta uma relação linear entre a abertura da trinca e o número de ciclos. Também é considerado que o deslocamento prescrito vem de considerar um valor de variação de energia constante (ΔG). Estas duas características fazem que estes espécimes possam ser modelados mediante a lei de Paris. Os espécimes intermediários também podem ser modelados mediante a lei de Paris dependente do tamanho, más só na faixa de crescimento progressivo e quando exista relação linear entre a abertura da trinca e o número de ciclos.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho permitiu explorar um modelo coesivo de dano cíclico. Durante o processo apresentaram-se novos temas de estudo. A seguir são apresentadas algumas sugestões e passos a seguir para trabalhos futuros:

- Consideração do modo tangencial na implementação do código computacional, o que permitiria ampliar o análise para casos de deslocamentos mistos. Também a aplicação do modelo analisado em três dimensões.
- A inclusão de outros tipos de materiais como os metais, em uma análise similar, acrescentando na formulação de dano o dano devido à deformação plástica.
- Exploração com mais detalhe do efeito de escala tanto em materiais frágeis, quase-frágeis e dúcteis, assim como estruturas de dois materiais diferentes.
- Implementação de outras leis irreversíveis de dano, que permitam analisar outros efeitos assim como o fechamento de trinca e o análise com varias trincas paralelas na ponta.

ANEXO A – FLUXOGRAMA DA IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO

O modelo é inserido na lei dos elementos coesivos, assim para cada abertura normal no ponto de Gauss ($die(nu, j, el)$) é calculada uma tensão normal à abertura ($tnp(nu, j, el)$), segundo a lei coesiva de Needleman (1990b) e a lei de dano irreversível de Roe e Siegmund (2003), sendo nu o número de iteração, j o número de ponto de Gauss e el o número de elemento.

A seguir apresenta-se o diagrama de fluxo para o cálculo das tensões nos pontos de Gauss na Figura A.1 e na figura A.2 se apresenta o fluxograma do modelo de dano. O significado dos símbolos usados nas Figuras A.1 e A.2 apresentam-se na Tabela A.1.

Tabela A.1 Legenda dos símbolos da figura 2.10 e 2.11

Símbolo	Descrição
nu	Número de iteração
j	Número de ponto de Gauss
el	Número de elemento de interface
$die(nu, j, el)$	Deslocamento normal, na iteração nu , no ponto de Gauss j e no elemento el
$deltacontrol(mm, j)$	Valores de referência dos deslocamentos normais convergidos, mm é o número de iteração convergida
$ci(j, el)$	Contador de ciclos para um ponto de Gauss j , e um elemento el
$tn(j)$	Tensão normal no ponto de gauss j
$delum(j, el)$	Ponto de interseção entre a reta de carregamento e a nova configuração da curva tensão normal-deslocamento
$Qmax0$	Tensão coesiva máxima
$damal(nu, j, el)$	Deslocamento acumulado até a iteração nu , do ponto de gauss j e o elemento el
$delum(j, el)$	Deslocamento localizado na interseção da reta de carregamento e a nova configuração escalonada da curva de tensão normal-deslocamento.

tnpaso(j,el)	Último valor da tensão coesiva normal antes de começar o descarregamento, em cada ponto de gauss j, em cada elemento el
paso(j,el)	Último valor do deslocamento normal antes de começar o descarregamento, em cada ponto de gauss j, em cada elemento el
daci(j,el)	Valor do dano acumulado dos ciclos anteriores
ddano(nu,j,el)	Incremento do dano no intervalo considerado, na iteração nu, ponto de gauss j e elemento el
Dc(nu,j,el)	Valor do dano acumulado atual

Abreviaturas da formulação:

$$f(Q_{\max 0}, die(nu, j, el)) = Q_{\max 0} \exp(1) \exp(-die(nu, j, el)/\delta_0) die(nu, j, el)/\delta_0$$

$$delum(j, el) = -\delta_0 \ln \left[\frac{tnpaso(j, el)\delta_0}{paso(j, el) Q_{\max 0} (1 - daci(j, el)) \exp(1)} \right]$$

$$ddano(nu, j, el) = \frac{abs(die(nu, j, el) - die(nu - 1, j, el))}{4 \delta_0} \left(\frac{tn(nu, j, el)}{Q_{\max 0} (1 - daci(j, el))} - \frac{\sigma_f}{Q_{\max 0}} \right)$$

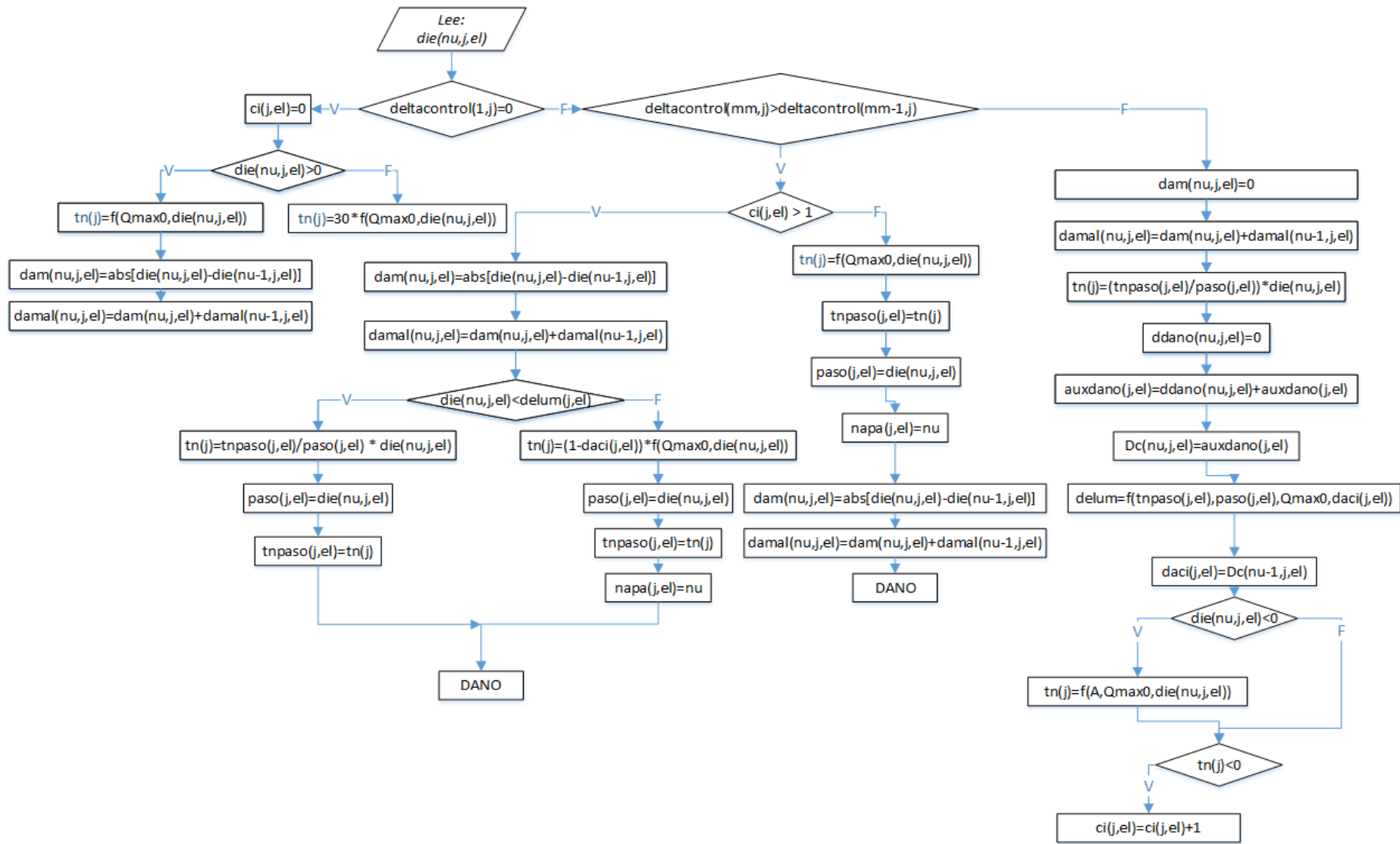


Figura A.1 Diagrama de fluxo que transforma os deslocamentos em tensões, segundo o modelos coesivo e de dano

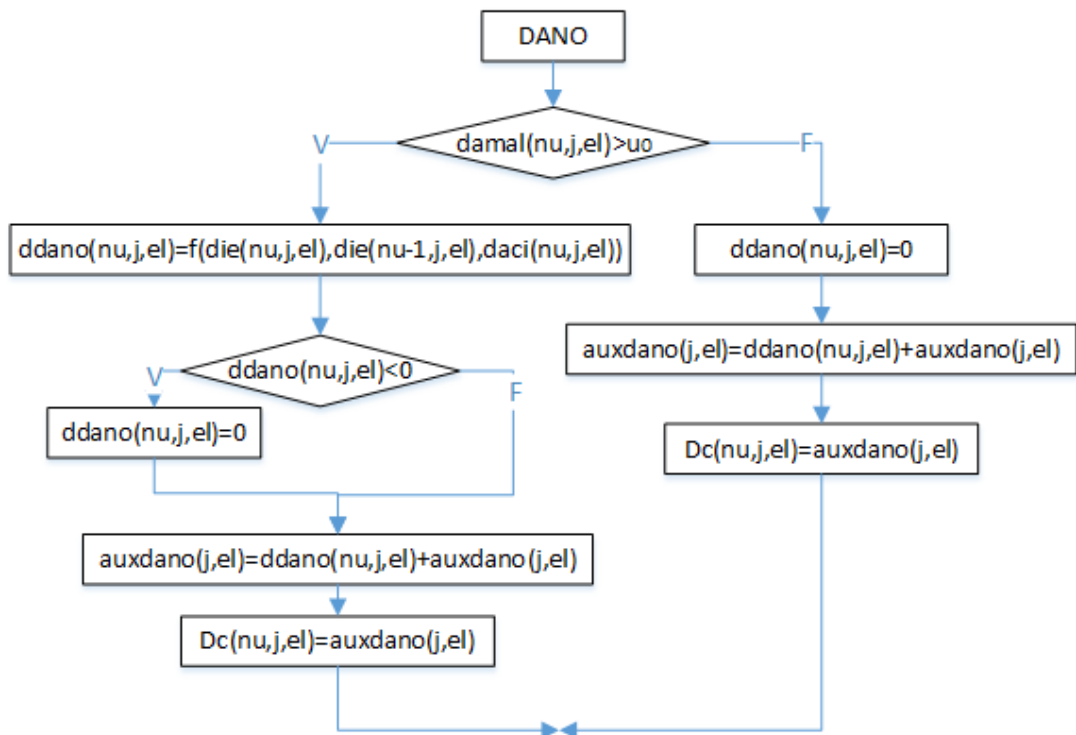


Figura A.2 Parte do diagrama de fluxo correspondente ao dano

ANEXO B – DEDUÇÃO TEÓRICA DA FORMULAÇÃO DO EFEITO DE ESCALA

B.1 – DEDUÇÃO DO EFEITO DE ESCALA USANDO A INTEGRAL J

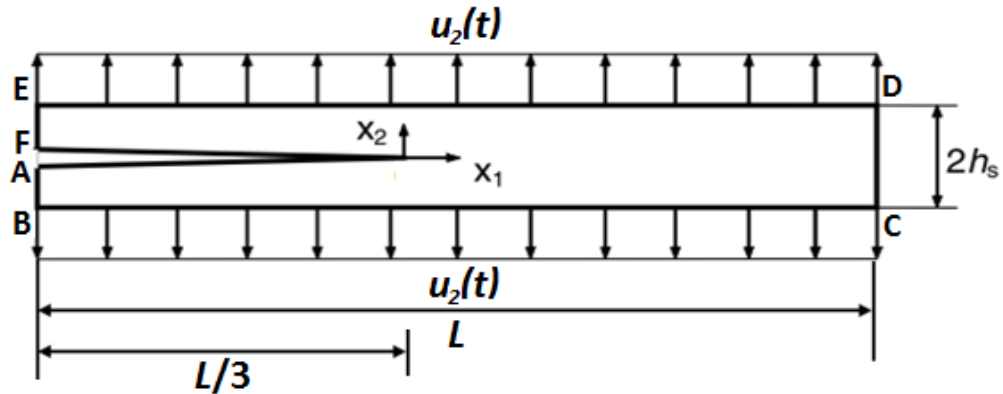


Figura B.1 Espécime analisado

Considerando a integral J, sobre o contorno da figura ABCDEF, se obtém:

$$J = \int_{-h_s}^{h_s} \left(W n_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dx_2 = \int_{-h_s}^{h_s} W dx_2 = W(2h_s) \quad (B1)$$

Sendo n_1 o a projeção em x_1 do vetor normal externo à superfície em estudo, T_i os vetores tensões de superfície e $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}$ é o gradiente de deslocamento com respeito a x_1 , W é a energia específica de deformação.

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (B2)$$

Com:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} , C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (B3)$$

λ e μ são as constantes de Lamé

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ e } \lambda = \frac{2\mu E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (B4)$$

Substituindo (21) e (22) em (20) e considerando que somente se tem deslocamento na direção x_2 , resulta:

$$W = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \frac{E}{2(1 + \nu)} \varepsilon_{22}^2 \quad (\text{B5})$$

A deformação na direção do eixo x_2 é:

$$\varepsilon_{22} = \frac{u_2(t)}{h_s} \quad (\text{B6})$$

A integral J , que é igual à taxa de alívio de energia G , se pode expressar finalmente como:

$$J(t) = G(t) = \frac{E(1 - \nu)}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{2 (u_2(t))^2}{h_s} \quad (\text{B7})$$

No modelo coesivo de Needleman (1990b), a energia coesiva sob carregamento monotónico é:

$$\phi_0 = \sigma_{max,0} \exp(1) \delta_0 \quad (\text{B8})$$

Devido a que as taxas de energia para o avanço da trinca, devem ser iguais:

$$J(t) = G(t) = \phi_0 \quad (\text{B9})$$

Desta última expressão se pode chegar a:

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{max,0}} = \sqrt{\frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{E \phi_0}{\sigma_{max,0}^2 h_s}} = \sqrt{\frac{(1 - \nu) \exp(1)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{E}{\sigma_{max,0}} \frac{\delta_0}{h_s}} \quad (\text{B10})$$

B.2 – DEDUÇÃO DO EFEITO DE ESCALA USANDO CONCEITOS DO MODELO DISTRIBUÍDO E A INTEGRAL J

Considerando o espécime típico a densidade de energia de deformação é $\sigma^2/2E$. A formação da trinca pode ser imaginada como uma aproximação da energia de deformação e tensão da área 1264351. Considerando a área 1234 como a faixa do modelo distribuído e os triângulos 246 e 153 como complementos de área a ser aliviados e com uma inclinação k .

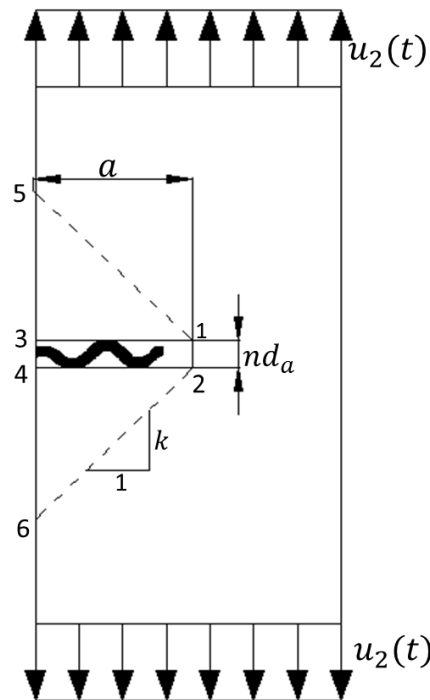


Figura B.2 Zonas de alívio de energia segundo o modelo distribuído

A energia total liberada é: $W = W_1 + W_2$

$$W_1 = a^2 k b \frac{\sigma_{22}^2}{2E} \quad e \quad W_2 = a(nd_a)b \frac{\sigma_{22}^2}{2E} \quad (B11)$$

Sendo a o comprimento da trinca total, a inclinação dos triângulos sombreados e d_a é o tamanho menor do agregado, n é um multiplicador da faixa do modelo distribuído em concreto $n=3$, E módulo de elasticidade e b a espessura do espécime.

Assumem-se os extremos se encontram fixos durante o fraturamento é dizer que o trabalho da carga externa aplicada nos extremos é zero. A taxa do alívio de energia potencial é:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = (2ak + nd_a)b \frac{\sigma_{22}^2}{2E} \quad (\text{B12})$$

Devido ao requerimento de balance de energia $\partial W/\partial a$, deve ser igual à integral $J(t)$, achada na equação B.7 do anexo B.1.

$$\frac{\partial W}{\partial a} = J(t) \quad (\text{B13})$$

$$(2ak + nd_a)b \frac{\sigma_{22}^2}{2E} = \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{2(u_2(t))^2}{h_s}$$

Ordenado os termos se pode chegar à expressão B14, onde se observa uma dependência do valor de tensões normais σ_{22} com a altura h_s e os deslocamentos prescritos $u_2(t)$.

$$\sigma_{22} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{2E}{(2ak + nd_a)} \frac{1}{h_s}} u_2(t) \quad (\text{B14})$$

Assim a equação B.14, se observa uma relação de efeito de escala entre a tensão normal σ_{22} e a altura h_s , más que também depende do deslocamento prescrito $u_2(t)$. Assim considerando valores típicos o concreto e valores monotonamente crescentes para o deslocamento prescrito $u_2(t)$ (como se mostram nas tabelas B.1 e B.2), pode-se ajustar uma curva continua que representa o efeito de escala para os espécimes analisados desde os pequenos até os maiores como é mostrado na Figura B.3.

Tabela B. 1 Dados do material para o efeito de escala para a equação 40

$n = 3$	$d_a = 0,0035$	$E = 10^{11} \text{ Pa}$
$a = 0,11566 \text{ m}$	$c_f = 0,01$	$k = 1,3$

Tabela B. 2 Deslocamento prescrito monotônico $u_2(t)$

$u_2(t) \text{ m}$	0,0001	0,00015	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007
--------------------	--------	---------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

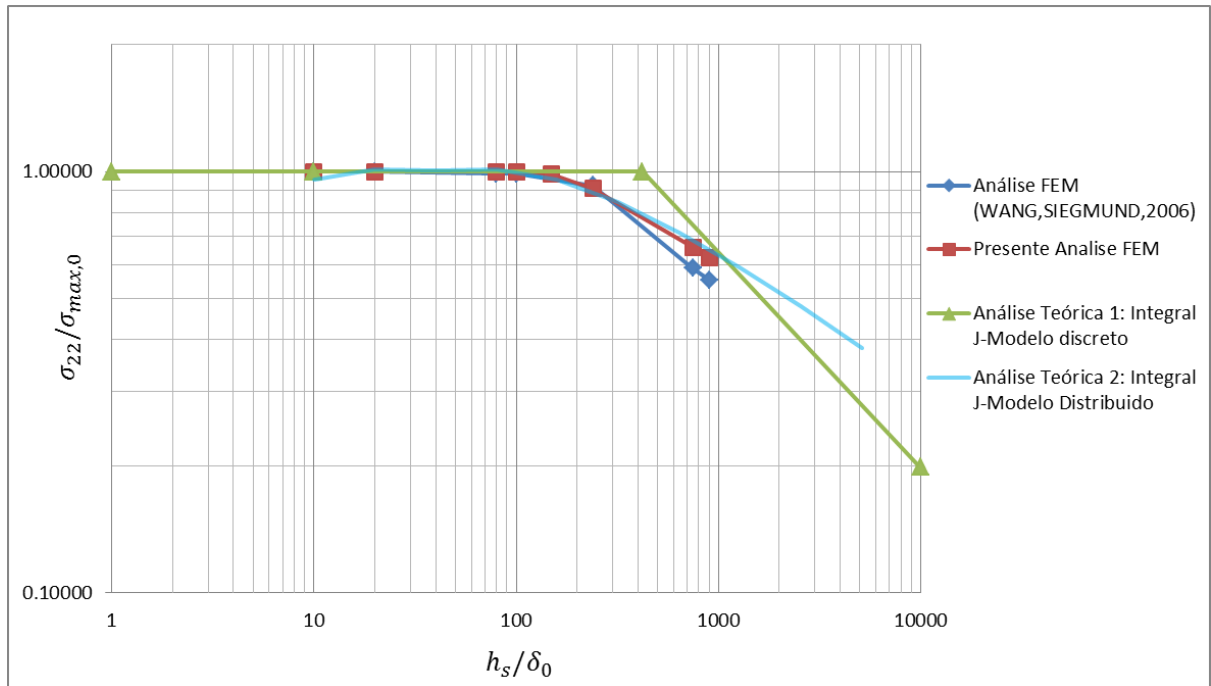


Figura B. 3 Comparação dos estados de falha monotônicos (teóricos e computacionais) em função da tensão normal e a altura dos espécimes em escala bilogárstica

Pode se observar que com os dados assumidos pode-se ajustar uma curva não linear (Análise Teórica 2) que aproxima por perto os análises feitos anteriormente.

BIBLIOGRAFIA

- BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. **Advances in applied mechanics**, v. 7, n. 1, p. 55-129, 1962.
- BAZANT, Z. Scaling of structural strength. **Computational Mechanics**, v. 32, n. 1, p. 140-140, 2003.
- BAZANT, Z. P. Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 110, n. 4, p. 518-535, 1984.
- BAŽANT, Z. P. Scaling theory for quasibrittle structural failure. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 101, n. 37, p. 13400-13407, 2004.
- BAŽANT, Z. P.; LE, J.-L.; YU, Q. Quasibrittle Size Effect: Problems and Progress.
- BAZANT, Z. P.; PLANAS, J. **Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials**. CRC press, 1997. ISBN 084938284X.
- BAZANT, Z. P.; SCHELL, W. F. Fatigue fracture of high-strength concrete and size effect. **ACI Materials Journal**, v. 90, n. 5, 1993.
- BAZANT, Z. P.; XI, Y. Statistical size effect in quasi-brittle structures: II. Nonlocal theory. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 117, n. 11, p. 2623-2640, 1991.
- BAZANT, Z. P.; XU, K. Size effect in fatigue fracture of concrete. **ACI Materials Journal**, v. 88, n. 4, 1991.
- BEAUREPAIRE, P.; SCHUËLLER, G. Modeling of the variability of fatigue crack growth using cohesive zone elements. **Engineering fracture mechanics**, v. 78, n. 12, p. 2399-2413, 2011.
- BEDEN, S.; ABDULLAH, S.; ARIFFIN, A. Review of fatigue crack propagation models for metallic components. **European Journal of Scientific Research**, v. 28, n. 3, p. 364-397, 2009.
- BITTENCOURT, E. Mecânica da Fratura e do Dano. p. 136, 2011.
- BITTENCOURT, T. N. **Fraturamento do Concreto Estrutural: Aspectos Teóricos, Computacionais e Experimentais, e suas Aplicações**. 1999. Tese (Livre docência)–Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
- BOUVARD, J. et al. A cohesive zone model for fatigue and creep–fatigue crack growth in single crystal superalloys. **International Journal of Fatigue**, v. 31, n. 5, p. 868-879, 2009.
- BUDZAKOSKA, E. et al. Predicting the J integral fracture toughness of Al 6061 using the small punch test. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 30, n. 9, p. 796-807, 2007.

CAMACHO, G. T.; ORTIZ, M. Computational modelling of impact damage in brittle materials. **International Journal of solids and structures**, v. 33, n. 20, p. 2899-2938, 1996.

CARPINTERI, A. Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 31, n. 3, p. 291-302, 1994.

_____. **Size-scale effects in the failure mechanisms of materials and structures**. CRC Press, 2002. ISBN 0203475925.

CARPINTERI, A.; PAGGI, M. Dimensional analysis and fractal modeling of fatigue crack growth. In: (Ed.). **Fatigue and Fracture Mechanics: 38th Volume**: ASTM International, 2012.

CARPINTERI, A.; SPAGNOLI, A. A fractal analysis of size effect on fatigue crack growth. **International journal of fatigue**, v. 26, n. 2, p. 125-133, 2004.

CARPINTERI, A.; SPAGNOLI, A.; VANTADORI, S. An approach to size effect in fatigue of metals using fractal theories. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 25, n. 7, p. 619-627, 2002.

CHANDRA, N. et al. Some issues in the application of cohesive zone models for metal-ceramic interfaces. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, n. 10, p. 2827-2855, 2002.

DE-ANDRÉS, A.; PÉREZ, J.; ORTIZ, M. Elastoplastic finite element analysis of three-dimensional fatigue crack growth in aluminum shafts subjected to axial loading. **International Journal of Solids and Structures**, v. 36, n. 15, p. 2231-2258, 1999.

DESHPANDE, V.; NEEDLEMAN, A.; VAN DER GIESSEN, E. Discrete dislocation modeling of fatigue crack propagation. **Acta materialia**, v. 50, n. 4, p. 831-846, 2002.

DUGDALE, D. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 8, n. 2, p. 100-104, 1960.

FEDRIGO, F. **Aplicação de interfaces coesivas na mecânica da fratura via método dos elementos finitos**. 2001. (Dissertação). PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

FORMAN, R. G.; METTU, S. R. Behavior of surface and corner cracks subjected to tensile and bending loads in Ti-6Al-4V alloy. 1990.

GONG, B.; PAGGI, M.; CARPINTERI, A. A cohesive crack model coupled with damage for interface fatigue problems. **International journal of fracture**, v. 173, n. 2, p. 91-104, 2012.

GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character**, p. 163-198, 1921.

HARYANTO, I.; TAKAHASHI, O. Ductile fracture assessment of Indonesian wearing course mixtures using critical J integral and crack tip opening angle. **International Journal of Pavement Engineering**, v. 9, n. 3, p. 165-176, 2008.

IRWIN, G. Relation of stresses near a crack to the crack extension force. **9th Cong. App. Mech., Brussels**, 1957.

JENQ, Y.; SHAH, S. P. Two parameter fracture model for concrete. **Journal of engineering mechanics**, v. 111, n. 10, p. 1227-1241, 1985.

KADEROVÁ, J.; VORECHOVSKÝ, M. Experimental Testing of Statistical Size Effect in Civil Engineering Structures. 2013.

KARIHALOO, B. Size effect in shallow and deep notched quasi-brittle structures. **International Journal of Fracture**, v. 95, n. 1-4, p. 379-390, 1999.

KIRANE, K.; BAŽANT, Z. P. Size effect in Paris law and fatigue lifetimes for quasibrittle materials: Modified theory, experiments and micro-modeling. **International Journal of Fatigue**, v. 83, p. 209-220, 2016.

KLESNIL, M.; LUKÁŠ, P. **Fatigue of metallic materials**. Elsevier, 1992. ISBN 0444987231.

KOSTESKI, L.; ITURRIOZ, I.; RIERA, J. Consideration of size effect multifractal theory in fracture analysis by means of the truss-like discrete element method (DEM). III international symposium of solid mechanics, 2011.

KUMAR, S.; SINGH, I.; MISHRA, B. A homogenized XFEM approach to simulate fatigue crack growth problems. **Computers & Structures**, v. 150, p. 1-22, 2015.

LEE, C.-C. et al. Interfacial fracture investigation of low-k packaging using J-integral methodology. **Advanced Packaging, IEEE Transactions on**, v. 31, n. 1, p. 91-99, 2008.

LEICESTER, R. The size effect of notches. Proc., 2nd Australasian Conf. on Mech. of Struct. Mater., Melbourne, 1969.

LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics**. Springer Science & Business Media, 2012. ISBN 3642182550.

LIN, G.; CORNEC, A.; SCHWALBE, K.-H. Three-dimensional finite element simulation of crack extension in Aluminium alloy 2024FC. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 21, n. 10, p. 1159-1173, 1998.

LIU, J.; LI, J.; WU, B. The cohesive zone model for fatigue crack growth. **Advances in Mechanical Engineering**, v. 5, p. 737392, 2013.

MACHADO, A. **Uso do método das interfaces coesivas na simulação do processo de propagação de trincas por fadiga**. 2007. (Dissertação). PPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature.** Macmillan, 1983. ISBN 0716711869.

MARIOTTE, E. **Traité du mouvement des eaux.** Chez Estienne Michallet, 1886.

NEEDLEMAN, A. An analysis of decohesion along an imperfect interface. **International Journal of Fracture**, v. 42, n. 1, p. 21-40, 1990a.

_____. An analysis of tensile decohesion along an interface. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 38, n. 3, p. 289-324, 1990b.

NGUYEN, O. et al. A cohesive model of fatigue crack growth. **International Journal of Fracture**, v. 110, n. 4, p. 351-369, 2001.

NOROOZI, A.; GLINKA, G.; LAMBERT, S. A two parameter driving force for fatigue crack growth analysis. **International Journal of Fatigue**, v. 27, n. 10, p. 1277-1296, 2005.

ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 44, n. 9, p. 1267-1282, 1999.

PALMGREN, A. Durability of ball bearings. **ZVDI**, v. 68, n. 14, p. 339-341, 1924.

PARIS, P. C.; GOMEZ, M. P.; ANDERSON, W. E. A rational analytic theory of fatigue. **The trend in engineering**, v. 13, n. 1, p. 9-14, 1961.

PATHAK, H.; SINGH, A.; SINGH, I. V. Fatigue crack growth simulations of 3-D problems using XFEM. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 76, p. 112-131, 2013.

PETERSON, R. Model testing as applied to strength of materials. **Journal of Applied Mechanics**, v. 1, p. 79-85, 1933.

PONTHOT, J.-P. Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis. 1995.

RITCHIE, R. O. Mechanisms of fatigue-crack propagation in ductile and brittle solids. **International Journal of Fracture**, v. 100, n. 1, p. 55-83, 1999.

ROE, K.; SIEGMUND, T. An irreversible cohesive zone model for interface fatigue crack growth simulation. **Engineering fracture mechanics**, v. 70, n. 2, p. 209-232, 2003.

SCHÜTZ, W. A history of fatigue. **Engineering fracture mechanics**, v. 54, n. 2, p. 263-300, 1996.

SPAGNOLI, A. Self-similarity and fractals in the Paris range of fatigue crack growth. **Mechanics of Materials**, v. 37, n. 5, p. 519-529, 2005.

URAL, A.; KRISHNAN, V. R.; PAPOULIA, K. D. A cohesive zone model for fatigue crack growth allowing for crack retardation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 46, n. 11, p. 2453-2462, 2009.

WALANDER, T. et al. Prediction of mixed-mode cohesive fatigue strength of adhesively bonded structure using Mode I data. **International Journal of Adhesion and Adhesives**, v. 66, p. 15-25, 2016.

WALSH, P. Fracture of plain concrete. **Indian Concrete Journal**, v. 46, n. 11, 1972.

WEERTMAN, J. Rate of growth of fatigue cracks calculated from the theory of infinitesimal dislocations distributed on a plane. **International Journal of Fracture Mechanics**, v. 2, n. 2, p. 460-467, 1966.

WHEELER, O. E. Spectrum loading and crack growth. **Journal of basic engineering**, v. 94, n. 1, p. 181-186, 1972.

WILLENBORG, J.; ENGLE, R.; WOOD, H. **A crack growth retardation model using an effective stress concept**. DTIC Document. 1971

WILLIFORD, R. Multifractal fracture. **Scripta Metallurgica**, v. 22, n. 11, p. 1749-1754, 1988.

WÖHLER, A. Theorie rechteckiger eiserner Brückenbalken mit Gitterwänden und mit Blechwänden. **Zeitschrift für Bauwesen**, v. 5, p. 121-166, 1855.

XU, Y.; YUAN, H. Computational analysis of mixed-mode fatigue crack growth in quasi-brittle materials using extended finite element methods. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 76, n. 2, p. 165-181, 2009a.

_____. On damage accumulations in the cyclic cohesive zone model for XFEM analysis of mixed-mode fatigue crack growth. **Computational Materials Science**, v. 46, n. 3, p. 579-585, 2009b.

YANG, B.; MALL, S.; RAVI-CHANDAR, K. A cohesive zone model for fatigue crack growth in quasibrittle materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, n. 22, p. 3927-3944, 2001.

YANG, B.; RAVI-CHANDAR, K. On the role of the process zone in dynamic fracture. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 44, n. 12, p. 1955-1976, 1996.

YANG, Q.; SHIM, D.; SPEARING, S. A cohesive zone model for low cycle fatigue life prediction of solder joints. **Microelectronic Engineering**, v. 75, n. 1, p. 85-95, 2004.