

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ALAN LINUS LEE**

**APLICAÇÃO DE CONTROLADORES REPETITIVOS DE ALTA ORDEM EM UM  
SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA**

Porto Alegre

2014

**ALAN LINUS LEE**

**APLICAÇÃO DE CONTROLADORES REPETITIVOS DE ALTA ORDEM EM UM  
SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA**

Projeto de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para Graduação em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores

Porto Alegre

2014

**ALAN LINUS LEE**

Este trabalho de curso foi analisado e julgado adequado para obtenção do título de Engenheiro Eletricista e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora designada pela Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores, UFRGS

Aprovado em 4 de Dezembro de 2014

**BANCA EXAMINADORA:**

Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores, UFRGS

Prof. Dra. Lucíola Campestrini (Doutora), UFRGS

Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira (Doutor), UFRGS

Porto Alegre

2014

*À minha vó, Vivian Tong, que faleceu este ano de forma inesperada.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais, pela vida e educação dada, assim como demais suportes que me permitiram chegar onde estou.

A meu irmão, por ter sempre sido um mentor nas mais diversas áreas de conhecimento.

Ao professor orientador Jeferson Vieira Flores, por ter disponibilizado tanto tempo e vontade, para que este trabalho tivesse sido feito da melhor forma.

Aos demais professores que tive desde antes do ensino fundamental, inclusive aos professores de idioma e de música.

Aos colegas de trabalho na RBS TV, que, neste semestre de tantas responsabilidades, fizeram parte do meu dia-a-dia, sendo totalmente compreensíveis dos meus compromissos acadêmicos que por vezes implicou imprevistos no horário de trabalho.

Aos colegas de curso, em especial Douglas Sandri, Rui Alles, Lorenzo Dal'Aqua e Roberto Walter, por toda troca de experiências e companheirismo que trouxeram ao longo do curso, assim como Guilherme Bledow, que, com toda boa vontade e paciência possível, organizou o tradicional Futebol de Sábado, atividade que se tornou sagrada como forma de motivação e descontração nos últimos seis anos.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelas duas oportunidades de intercâmbio acadêmico para a Alemanha, que foram experiências que mudaram a maneira com que vejo o Mundo.

## RESUMO

A suspensão ativa dá mais estabilidade e conforto que a suspensão passiva, sendo alvo de estudo importante na indústria automobilística. Os controladores repetitivos, por sua vez, são eficientes em seguimento de referência, assim como em rejeição de perturbações, do tipo periódico. Estes tipos de controladores funcionam a partir de um elemento de atraso temporal. Contudo, se o período do sinal a ser seguido/rejeitado apresentar pequenas alterações em relação ao período do atraso, o controlador perde eficiência. Para tanto, foram desenvolvidos controladores repetitivos de alta ordem, que cobrem um maior espectro de frequência. Neste trabalho será aplicado o controle repetitivo de alta ordem em uma planta didática que simula a suspensão ativa de um carro, buscando a rejeitar um sinal sinusoidal, com frequência variante. A partir da definição de diferentes parâmetros do controlador, será mostrado de que forma este sistema de controle tem melhor desempenho.

**Palavras-chave:** Suspensão Ativa. Controle Repetitivo. Alta Ordem.

## **ABSTRACT**

The active suspension gives more stability and comfort to the passenger than the passive suspension, and that is why there are a lot of researches in this area in the automotive industry. The repetitive control is efficient at tracking references and rejecting disturbances when it comes to periodic signals. This kind of control systems are based on a time-delay element. However, if period of the signal to be tracked/rejected is just a little bit off the fundamental period, the controller has a huge loss in efficiency. The High Order Repetitive Control was then created to broaden the frequency spectrum of efficient operation. In this work it will be seen how efficient the High Order Repetitive Control is when applied to a system which simulates an active suspension of a car, aiming at rejecting a sinusoidal signal, with variant frequency. By defining different parameters for the controller, it will be shown how this control system achieves better performance.

**Keywords:** Active Suspension. High Order. Repetitive Control.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>10</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>12</b>
<b>LISTA DE SIGLAS.....</b>	<b>13</b>
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>14</b>
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>16</b>
2.1 PRINCÍPIO DO MODELO INTERNO .....	16
2.2 CONTROLADORES REPETITIVOS .....	19
2.2.1 Filtro Passa-Baixas em Série – <i>Q-Filter Repetitive Control</i> .....	20
2.2.2 Representação em Espaço de Estados .....	22
2.3 CONTROLADORES REPETITIVOS DE ALTA ORDEM.....	23
2.3.1 Ordem N do controlador e os pesos $W_i$ .....	24
2.3.2 Espaço de Estados .....	25
<b>3 PROJETO DO CONTROLADOR.....</b>	<b>28</b>
3.1 ANÁLISE PRELIMINAR DO SISTEMA .....	28
3.1.1 Condições de Estabilidade e o Cálculo dos Ganhos .....	30
<b>4 PLANTA DE SUSPENSÃO ATIVA ¼ DE CARRO.....</b>	<b>33</b>
4.1 MODELAGEM DO SISTEMA.....	34
4.2 REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS .....	37
4.3 PARÂMETROS DO SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA.....	39
4.4 ANÁLISE DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO MODELO .....	40
<b>5 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR À SUSPENSÃO ATIVA.....</b>	<b>42</b>
5.1 PERÍODO FUNDAMENTAL DO CONTROLADOR.....	42
5.2 GANHOS $K_G$ E $K_C$ .....	42
5.2.1 Taxa de decaimento $\alpha$ .....	43
5.2.2 Frequência de Corte $\omega_c$ do Filtro Passa-Baixas.....	43
5.2.3 Ordem N do HORC.....	43
5.3 SIMULAÇÕES .....	44
5.3.1 Simulações para a perturbação $p_1(t)$ .....	45
5.3.2 Simulações para a perturbação $p_2(t)$ .....	49



5.4	RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....	55
5.5	ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	60
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>63</b>
<b>7</b>	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>65</b>
	<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>67</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Diagrama de blocos de um Sistema de Controle. ....	16
Figura 2: Controlador Repetitivo.....	19
Figura 3: <i>Root Locus</i> de um sistema análogo ao controle repetitivo.....	20
Figura 4: <i>Q-Filter Repetitive Control</i> . ....	21
Figura 5: Diagrama de Bode do <i>Q-Filter Repetitive Control</i> .....	22
Figura 6: Controlador Repetitivo de Alta Ordem.....	23
Figura 7: Controlador Repetitivo de Alta Ordem com filtro $Q(s)$ .....	26
Figura 8: Diagrama de Bode para HARC de Ordens 1, 2, 3 e 4.....	27
Figura 9: Sistema final.....	30
Figura 10: Planta de Suspensão Ativa da Quanser.....	33
Figura 11: Modelo da Suspensão Ativa $\frac{1}{4}$ de Carro.....	34
Figura 12: Massa $M_p$ e as forças que agem. ....	35
Figura 13: Massa $M_r$ e as forças que agem.....	35
Figura 14: Comparação da Planta Real com os Modelos.....	40
Figura 15: Diagrama de Bode para o modelo da suspensão.....	40
Figura 16: Sinal de perturbação $p_1(t)$ . ....	44
Figura 17: Sinal de perturbação $p_2(t)$ . ....	45
Figura 18: Saída $y_3(t)$ e posição das placas em malha aberta para $p_1(t)$ . ....	45
Figura 19: Velocidade e aceleração do chassi em malha aberta para $p_1(t)$ . ....	46
Figura 20: Saída $y_3(t)$ e sinal de controle para $\alpha=0,01$ , $\omega_c = 0,5\text{rad/s}$ e $p_1(t)$ .....	46
Figura 21: Velocidade e aceleração do chassi para $\alpha=0,01$ , $\omega_c = 0,5\text{rad/s}$ e $p_1(t)$ .....	47
Figura 22: Saída $y_3(t)$ e sinal de controle para $\alpha=0,1$ e $\omega_c = 100\text{rad/s}$ e $p_1(t)$ .....	47
Figura 23: Velocidade e aceleração do chassi para $\alpha=0,1$ , $\omega_c = 100\text{rad/s}$ e $p_1(t)$ . ....	48
Figura 24: Saída $y_3(t)$ e posição das placas em malha aberta para $p_2(t)$ . ....	49

Figura 25: Velocidade e aceleração do chassi em malha aberta para $p_2(t)$ .	50
Figura 26: Saída $y_3(t)$ e sinal de controle para a Simulação 2.	50
Figura 27: Velocidade e aceleração do chassi para a Simulação 2.	51
Figura 28: Saída $y_3(t)$ e sinal de controle para a Simulação 3.	51
Figura 29: Velocidade e aceleração do chassi a Simulação 3.	52
Figura 30: Saída $y_3(t)$ e sinal de controle para a Simulação 4.	53
Figura 31: Velocidade e aceleração do chassi para a Simulação 4.	53
Figura 32: Saída $y_3(t)$ e sinal de controle para a Simulação 5.	54
Figura 33: Velocidade e aceleração do chassi para a Simulação 5.	54
Figura 34: Saída $y_3(t)$ e sinal de controle para ensaio em malha aberta.	55
Figura 35: Velocidade e aceleração do chassi para ensaio em malha aberta.	55
Figura 36: Saída $y_3(t)$ e sinal de controle para o Ensaio 2.	56
Figura 37: Velocidade e aceleração do chassi para Ensaio 2.	56
Figura 38: Saída $y_3(t)$ e sinal de controle para o Ensaio 3.	57
Figura 39: Velocidade e aceleração do chassi para Ensaio 3.	57
Figura 40: Saída $y_3(t)$ e sinal de controle para o Ensaio 4.	58
Figura 41: Velocidade e aceleração do chassi para Ensaio 4.	58
Figura 42: Saída $y_3(t)$ e sinal de controle para o Ensaio 5.	59
Figura 43: Velocidade e aceleração do chassi para Ensaio 5.	59
Figura 44: Posição das placas para o Ensaio 1 e Ensaio 4 de quarta ordem.	61
Figura 45: Resposta à onda quadrada em malha aberta.	62
Figura 46: Resposta à onda quadrada com HIRC de ordem 4.	62

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Pesos $W_i$ dos HORC.....	25
Tabela 2: Parâmetros do Sistema de Suspensão Ativa ¼ de Carro.....	39
Tabela 3: Parâmetros Ajustados da Suspensão Ativa.....	39
Tabela 4: Parâmetros para as simulações.....	49

## **LISTA DE SIGLAS**

PMI – Princípio do Modelo Interno

HORC – *High Order Repetitive Controller*

BIBO – *Bounded Input, Bounded Output*

LMI – *Linear Matrix Inequality*

# 1 INTRODUÇÃO

Sistemas de controle existem há mais de 2000 anos, desde a Clepsidra, ou Relógio de Água, de 270 a.C., descrita por Vitruvius [1]. Análises mais formais datam desde James Clerk Maxwell, que em 1868 analisou através de Equações Diferenciais o Governador Centrífugo [2], que é um dispositivo regulador que controla a velocidade do motor através da quantidade de combustível admitido. Desde então, o seguimento de referências e rejeição a perturbações de sinais tem sido um importante objeto de estudo da Teoria de Controle. Ao se tratar de sinais periódicos, foi desenvolvido nos anos 80 um controlador que os seguisse/rejeitasse, recebendo o nome de *Repetitive Control* (Controle Repetitivo). Tal controlador tem um atraso equivalente ao período fundamental do sinal de interesse, armazenando em si uma memória em relação ao mesmo. Posteriormente, este tipo de controlador foi aprimorado, para que um espectro maior de frequências fosse contemplado para seguimento/rejeição, sendo então chamado de *High Order Repetitive Control* (Controle Repetitivo de Alta Ordem). Estudos recentes validaram de forma bem sucedida a sua aplicação em um motor excêntrico, cujo centro de massa deslocado provoca uma perturbação cujo período varia proporcionalmente à velocidade de rotação do motor [3].

A indústria automobilística é de inegável impacto na economia mundial, movimentando anualmente mais de 1,8 trilhões de euros [4]. A empresa alemã Volkswagen, teve em 2013 uma receita de mais de 270 bilhões de dólares, a maior nesta indústria [5]. Dentro do cenário automobilístico, há incontáveis pesquisas sobre os sistemas de suspensão, e projeta-se que até 2018, o valor deste mercado chegará a 66 bilhões de dólares [6]. A suspensão de um automóvel tem importante papel desde o conforto do passageiro à dirigibilidade e manuseio do veículo. No que diz respeito ao conforto, em pistas irregulares, como por exemplo, de paralelepípedos, deseja-se que as variações de altura que a roda sofre não sejam transmitidas ao chassi. Todavia, a periodicidade com que estas variações ocorrem depende da velocidade que o automóvel se encontra. Neste contexto, a aplicação de controladores repetitivos de alta ordem seria fundamentadamente apropriada para a rejeição de distúrbios decorrentes da pista irregular, visando ao conforto do motorista e demais passageiros.

O estudo aqui apresentado tem o objetivo validar a eficiência dos controladores repetitivos de alta ordem a um sistema de suspensão ativa. Para tanto, serão matematicamente

formulados o controlador e o sistema de suspensão ativa, que é um planta didática em escala reduzida fornecido pelo fabricante canadense Quanser que simula a suspensão de uma roda de um carro, ou seja,  $\frac{1}{4}$  de carro. Serão então combinados os dois modelos, formando um sistema de controle em malha fechada. Antes de realizar os ensaios no modelo real, serão realizadas simulações utilizando os softwares Matlab e Simulink. Após uma análise dos resultados simulados, os ensaios no sistema da Quanser serão aqui apresentados e comparados, buscando a validação da aplicação dos controladores em questão à suspensão ativa.

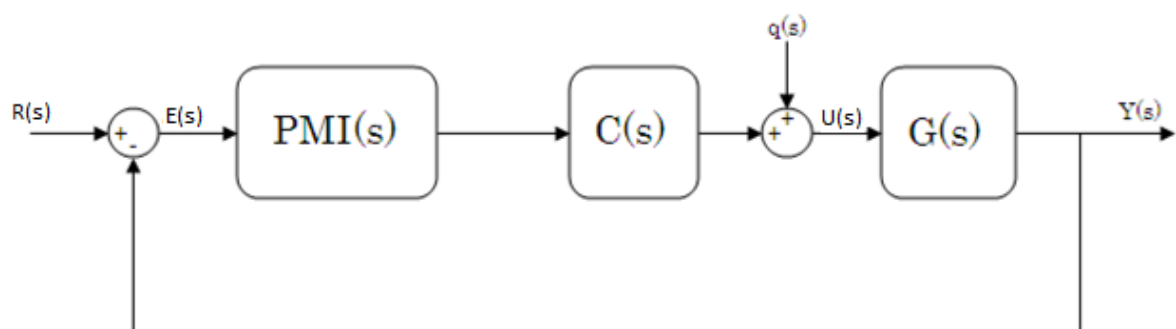
## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Antes de começar os estudos do controlador que será utilizado no sistema de suspensão ativa, serão revisados alguns conceitos básicos, para auxiliar no entendimento tanto do seu projeto, como da sua aplicação. Será primeiramente explicado o que é o Princípio do Modelo Interno. Em sequência, será visto como funcionam os controladores repetitivos em sua forma original, e finalmente os de alta ordem.

### 2.1 PRINCÍPIO DO MODELO INTERNO

Um dos principais objetivos de um sistema de controle é o seguimento de referência, assim como a rejeição de perturbações. Supondo um sinal de referência descrito por modos instáveis (com raízes, cuja parte real é positiva), ou marginalmente estáveis (raízes puramente imaginárias), para que haja garantia de seguimento, o sistema/controlador deve ser estável e conter os mesmo modos na malha direta. No Princípio do Modelo Interno (PMI) é formalizado o fato de que estando estes modos instáveis e marginalmente estáveis no interior da malha de controle, há perfeito seguimento de referência [7]. O mesmo é válido para a rejeição de perturbação, estando tais modos em sua malha de realimentação. O diagrama de blocos de um sistema de controle genérico está representado na Figura 1, e será utilizado para as explicações nas seções que seguem.

Figura 1: Diagrama de blocos de um Sistema de Controle.



Fonte: o autor.

Na Figura 1 o bloco  $C(s)$  representa um controlador projetado de tal forma que o sistema em malha fechada seja estável, e o bloco  $G(s)$  a planta a ser controlada. Os modos instáveis foram representados separadamente no bloco  $PMI(s)$  apenas para melhor visualização, mas poderia estar contido tanto no  $C(s)$  quanto no  $G(s)$ , para o seguimento de referência. O sinal  $R(s)$  é a referência a ser seguida, e esta será considerada na forma



$$R(s) = \frac{N_r(s)}{D_{ri}(s)D_{re}(s)} \quad (1)$$

onde  $N_r(s)$  é o numerador na forma polinomial e sem qualquer restrição,  $D_{re}(s)$  é o polinômio do denominador do sinal de referência que contém os modos estáveis, ou seja, todas as suas raízes estão no semiplano esquerdo do plano complexo (raízes com parte real negativa) e  $D_{ri}(s)$  é o polinômio do denominador do sinal de referência que contém os modos instáveis, ou seja, todas as suas raízes estão no semiplano direito do plano complexo, ou sobre do eixo das ordenadas (raízes com parte real positiva ou nula).

Para o controlador e a planta serão consideradas, respectivamente,

$$C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)}, \quad (2)$$

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}. \quad (3)$$

O bloco PMI(s) se trata dos modos instáveis que devem se encontrar na malha direta do sistema como anteriormente descrito, portanto,

$$PMI(s) = \frac{1}{D_{ri}(s)}. \quad (4)$$

Deduzindo a equação referente ao sinal de erro  $E(s)$  para o sistema de controle da Figura 1, chega-se à

$$E(s) = R(s) \frac{1}{1 + PMI(s)C(s)G(s)}.$$

Substituindo (1) a (4) em (5), tem-se

$$E(s) = \left( \frac{N_r(s)}{D_{ri}(s)D_{re}(s)} \right) \left( \frac{D_{ri}(s)D_C(s)D_G(s)}{D_{ri}(s)D_C(s)D_G(s) + N_C(s)N_G(s)} \right). \quad (5)$$

Ao analisar (5), percebe-se que os termos contidos no denominador da função PMI(s) aparecem no numerador da função  $E(s)$  do erro, que anulam os modos instáveis da referência  $R(s)$ . O polinômio  $D_{ri}(s)D_C(s)D_G(s) + N_C(s)N_G(s)$  é o mesmo do denominador da função de transferência do sistema em malha fechada, e este só será estável se o os seus polos

estiverem exclusivamente contidos no semiplano esquerdo do plano complexo. Da mesma forma, já havia sido definido que  $D_{re}(s)$  tem as raízes com parte real negativa. Aplicando o Teorema do Valor Final, prova-se o erro nulo em regime permanente de operação como segue:

$$e(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{N_r(s)}{D_{re}(s)} \right) \left( \frac{D_C(s)D_G(s)}{D_{ri}(s)D_C(s)D_G(s) + N_C(s)N_G(s)} \right) = 0.$$

De maneira análoga, a rejeição de qualquer perturbação que ocorra após o bloco  $PMI(s)$  é garantida. Assumindo que uma perturbação  $q(s)$  é da mesma forma que a referência,

$$q(s) = \frac{N_q(s)}{D_{qi}(s)D_{qe}(s)} \quad (6)$$

localizada entre o controlador  $C(s)$  e a planta  $G(s)$ , assim como está na Figura 1, a função de transferência  $T_q(s)$ , vista pela perturbação, é

$$T_q(s) = \frac{G(s)}{1 + PMI(s)C(s)G(s)}$$

que pode ser reescrita utilizando (2), (3) e (4), resultando em

$$T_q(s) = \frac{D_{qi}(s)D_C(s)N_G(s)}{D_{qi}(s)D_C(s)D_G(s) + N_C(s)N_G(s)}.$$

Lembrando que a saída do sistema é a multiplicação da entrada, no caso a perturbação (6), pela função de transferência, a saída pode ser expressa como

$$Y_q(s) = \left( \frac{N_q(s)}{D_{qi}(s)D_{qe}(s)} \right) \left( \frac{D_{qi}(s)D_C(s)N_G(s)}{D_{qi}(s)D_C(s)D_G(s) + N_C(s)N_G(s)} \right). \quad (7)$$

Na Equação (7), assim como na Equação (5), os modos instáveis se anulam. Aplicando o Teorema do Valor Final em (8), tem-se que

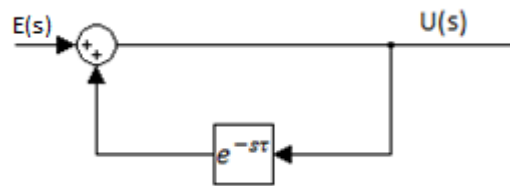
$$y(t = \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{N_q(s)}{D_{qe}(s)} \right) \left( \frac{D_C(s)N_G(s)}{D_{qi}(s)D_C(s)D_G(s) + N_C(s)N_G(s)} \right) = 0. \quad (8)$$

A saída do sistema visto pela perturbação  $q(s)$  é, portanto, nula em regime permanente, como é mostrado em (8), mostrando que pelo PMI assim como o seguimento é perfeito, a rejeição também é.

## 2.2 CONTROLADORES REPETITIVOS

Nos anos 80, surgiu a ideia de utilizar valores passados do sinal de erro, para gerar o sinal de controle atual, para o seguimento e rejeição de sinais periódicos. As pesquisas resultaram na criação do controlador repetitivo [9]. O bloco de controle se trata de uma malha com um laço de realimentação positiva que contém um elemento de atraso no tempo do mesmo período fundamental  $\tau$  a ser seguido/rejeitado. A configuração proposta é apresentada na Figura 2.

Figura 2: Controlador Repetitivo.



Fonte: o autor.

O sistema apresentado pela Figura 2 resulta em

$$C_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 - e^{-s\tau}} \quad (9)$$

onde  $C_r(s)$  é a função de transferência do erro para o sinal de controle  $U(s)$ . Assumindo  $s = j\omega$ ,  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$  e pela Fórmula de Euler, que relaciona a função exponencial a funções trigonométricas, (9) se torna

$$C_r(s) = \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} 2\pi\right) + j \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\omega_0} 2\pi\right)} .$$

Nota-se que quando a frequência tiver o valor da frequência fundamental, o ganho é infinito. Isso ocorre não somente na frequência fundamental, mas para qualquer múltiplo inteiro da mesma. Fazendo a analogia com o PMI, sabe-se que para se rejeitar, por exemplo, um sinal senoidal com frequência  $\omega_0$ , seria necessário ter na malha direta o termo  $\frac{1}{s^2 + \omega_0^2}$ .

Como, além da frequência  $\omega_0$ , há os seus múltiplos, a função  $PMI(s)$  teria infinitos termos, na forma

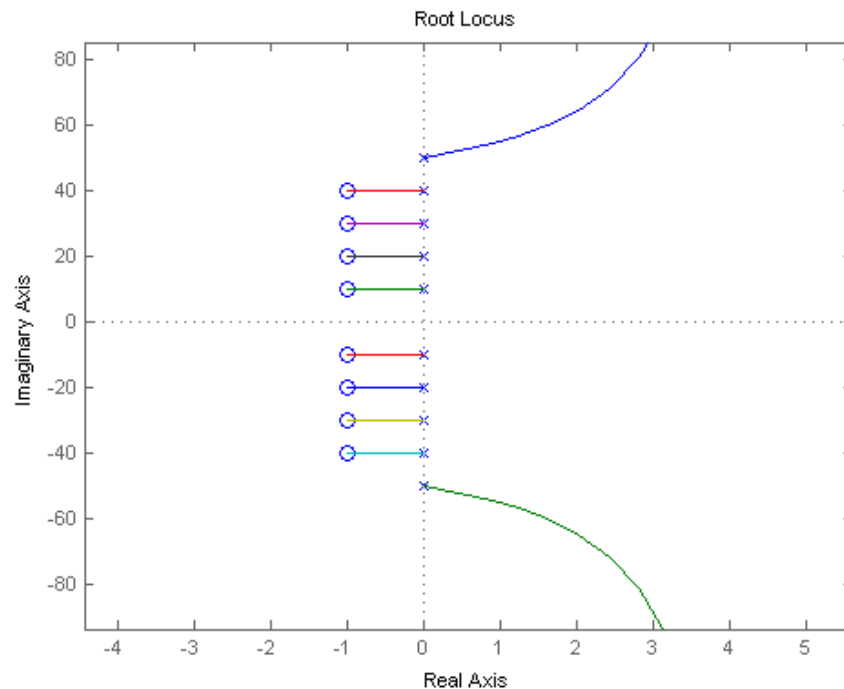
$$PMI(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 + (k\omega_0)^2}.$$

O elemento do atraso gera um ganho infinito em qualquer múltiplo da frequência fundamental, assim como o  $PMI(s)$  teórico para o mesmo caso.

### 2.2.1 Filtro Passa-Baixas em Série – *Q-Filter Repetitive Control*

Como foi apresentado no início da Seção 2.2, o controlador repetitivo, mostrado na Figura 2, introduz polos imaginários na frequência fundamental e seus infinitos múltiplos inteiros. Essa abordagem apresenta, entretanto, um problema relacionado à estabilidade. Há infinitos polos sobre o eixo imaginário, no limite da estabilidade. Percebe-se, por *Root Locus*, que a menos que haja infinitos zeros na malha direta, o sistema nunca se estabilizará em malha fechada. Na Figura 3 apresenta-se um *Root Locus* ilustrativo, com polos sobre o eixo imaginário, e que, apesar de não serem infinitos, são em maior quantidade que os zeros.

Figura 3: *Root Locus* de um sistema análogo ao controle repetitivo.



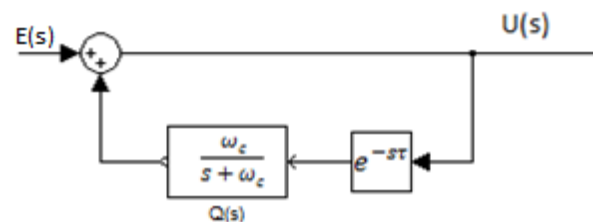
Fonte: o autor.

Para solucionar tal problema, foi proposta, em [10], uma mudança no laço de realimentação: um filtro passa-baixas em série com o bloco de atraso temporal altera a função de transferência do controlador, posicionando os polos no semiplano esquerdo do plano complexo, tornando-os não mais puramente imaginários, mas com uma parte real negativa. O filtro passa-baixas introduzido, chamado então de  $Q(s)$ , é da forma

$$Q(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad (10)$$

O filtro  $Q(s)$  além de estabilizar o sistema ainda evita que os ruídos de alta frequência sejam amplificados pelos altos ganhos do controlador, podendo ainda atenuá-los. O bloco  $C_Q(s)$  de controle mostrado na Figura 4 é como o controle repetitivo com o filtro  $Q(s)$ , e que é hoje conhecido como “*Q-Filter Repetitive Control*”, é implementado.

Figura 4: *Q-Filter Repetitive Control*.



Fonte: o autor, com auxílio do Simulink.

Neste caso, a função de transferência do controlador passa a ser

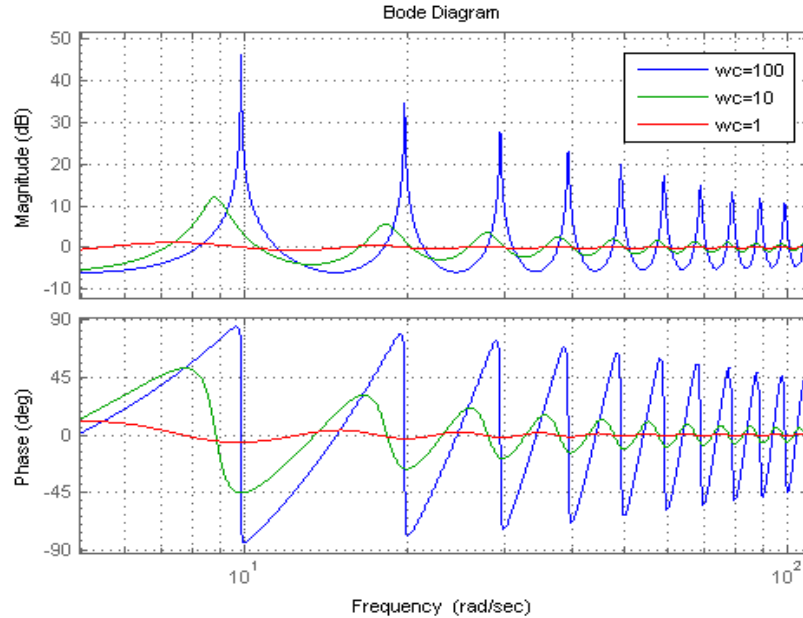
$$C_Q(s) = \frac{1}{1 - \frac{\omega_c}{s + \omega_c} e^{-s\tau}}. \quad (11)$$

O problema de estabilização do sistema, discutido anteriormente, é sanado pela inserção do filtro passa-baixas  $Q(s)$ . Todavia, o ganho deixa de ser infinito nos múltiplos inteiros da frequência fundamental, acarretando em um erro de seguimento. À medida que a frequência de corte  $\omega_c$  diminui, este efeito é cada vez mais aparente.

Na Figura 5 está mostrado o Diagrama de Bode para o controlador repetitivo com o filtro  $Q(s)$ . Foram *plotadas* curvas para diferentes valores de  $\omega_c$ , em 100rad/s, 10rad/s e 1 rad/s. Nota-se que a medida que a frequência de corte do filtro diminui, o ganho diminui, e o a frequência onde ocorre o pico está deslocada. Isto é devido ao efeito dos polos se afastarem

do eixo imaginário, fazendo com que os polos deixem de ser puramente imaginários, e se tornem complexos com parte real negativa.

Figura 5: Diagrama de Bode do *Q-Filter Repetitive Control*.



Fonte: o autor, com auxílio do Matlab.

### 2.2.2 Representação em Espaço de Estados

Outra maneira de representar o sistema é por espaço de estados. Lembrando que o espaço de estados se trata de uma representação no domínio tempo, em que uma equação diferencial de ordem  $N$  é representada por  $N$  equações diferenciais de ordem 1, será agora estabelecido o estado  $x_c(t)$ , que é o estado do controlador:

$$x_c(t) \leftrightarrow X_c(s) = \frac{1}{s + \omega_c} U(s) \quad (12)$$

Lembrando que a função de transferência do controlador é a relação entre a saída  $U(s)$  e a entrada  $E(s)$ , a partir de (11), chega-se a

$$E(s) = U(s) - \frac{\omega_c U(s)}{s + \omega_c} e^{-s\tau}, \quad (13)$$

ou ainda

$$E(s) = \frac{sU(s) + \omega_c U(s) - \omega_c U(s)e^{-s\tau}}{s + \omega_c}. \quad (14)$$

Reorganizando (13) e utilizando (12), tem-se que

$$\frac{sU(s)}{s + \omega_c} = -\frac{\omega_c U(s)}{s + \omega_c} + \frac{\omega_c U(s)e^{-s\tau}}{s + \omega_c} + E(s) = -\omega_c X_c(s) + \omega_c X_c(s)e^{-s\tau} + E(s) \quad (15)$$

Da mesma forma, substituindo (12) em (14), chega-se a

$$U(s) = \frac{\omega_c U(s)}{s + \omega_c} e^{-s\tau} + E(s) = \omega_c X_c(s)e^{-s\tau} + E(s) \quad (16)$$

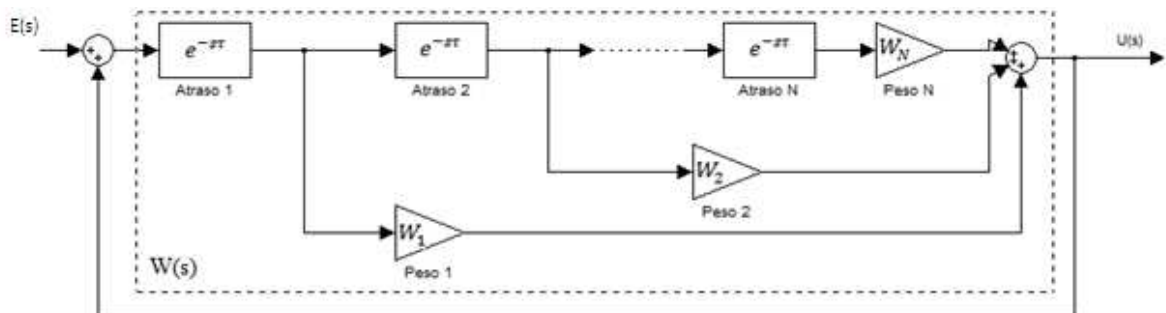
Transformando (15) e (16) para o domínio tempo, usando a Transformada Inversa de Laplace, chega-se às equações do espaço de estados

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= -\omega_c x_c(t) + \omega_c x_c(t - \tau) + e(t) \\ u(t) &= \omega_c x_c(t - \tau) + e(t) \end{aligned} \quad (17)$$

### 2.3 CONTROLADORES REPETITIVOS DE ALTA ORDEM

O controlador repetitivo, apresentado na Seção 2.2, tendo a sua estabilização garantida pelo filtro passa-baixas  $Q(s)$  explicado na Seção 2.2.1, é capaz de rejeitar sinais periódicos cuja frequência é um múltiplo inteiro da frequência fundamental. As frequências intermediárias, entretanto, não estão contemplados nos picos de ganho elevado (no caso da análise de seguimento), e qualquer variação de frequência não é devidamente controlada. Para lidar com este problema, se utiliza um Controlador Repetitivo de Alta Ordem (*High Order Repetitive Controller - HORC*) [11], que é mostrado na Figura 6.

Figura 6: Controlador Repetitivo de Alta Ordem.



Fonte: o autor.

Nota-se, pela Figura 6, que o HORC tem uma topologia um pouco diferente do controlador repetitivo anteriormente apresentado.

### 2.3.1 Ordem N do controlador e os pesos $W_i$

O sistema apresentado na Figura 6 representa um HORC de ordem N, onde os termos  $W_i$ , sendo i um índice inteiro de 1 até N, são pesos atribuídos a cada elemento de atraso. Será considerado os atrasos e seus respectivos pesos como

$$W(s) = W_1 e^{-s\tau} + W_2 e^{-2s\tau} + \dots + W_N e^{-Ns\tau} = \sum_{i=1}^N W_i e^{-is\tau}. \quad (18)$$

A Figura 6 na sua totalidade mostra o bloco  $C_{horc}(s)$  de controle, que é formalizado matematicamente como

$$C_{horc}(s) = \frac{U(s)}{e(s)} = \frac{W(s)}{1 - W(s)}. \quad (19)$$

Pelo Princípio do Modelo Interno, já discutido na Seção 2.1, sabe-se que  $W(s)$  tem que ter módulo unitário na frequência fundamental e seus múltiplos, tornando verdadeira a condição

$$\sum_{i=1}^N W_i = 1. \quad (20)$$

Foi visto que a ordem N do HORC é relativo à quantidade de N atrasos que aparecem, ponderados pelos pesos  $W_i$ . A Equação (20) apresentou uma das condições para os pesos, cuja soma deve ser necessariamente unitária, para satisfazer o PMI. Da Equação (18), observa-se que pode ser melhorada a robustez do controlador à variação do período, aplicando

$$\frac{dW(s = \frac{jk2\pi}{\tau})}{d\tau} = 0 \quad (21)$$

que se desenvolve em



$$\left. \frac{d \sum_{i=1}^N W_i e^{-is\tau}}{d\tau} \right|_{s = \frac{jk2\pi}{\tau}} = \sum_{i=1}^N is W_i e^{-is\tau} \Big|_{s = \frac{jk2\pi}{\tau}} = \sum_{i=1}^N i \frac{jk2\pi}{\tau} W_i e^{-ijk2\pi} = 0$$

chegando à outra condição

$$\sum_{i=1}^N i W_i = 0. \quad (22)$$

Para melhorar ainda mais a sensibilidade do sistema em maiores ordens, pode-se estender à quantidade de derivadas para N-1, generalizando (22) para

$$\sum_{i=1}^N i^{N-1} W_i = 0. \quad (23)$$

Nesta pesquisa serão tratados controladores com ordens até 4. Na Tabela 1 estão mostrados os pesos referentes aos HRC de ordem N de 1 até 4.

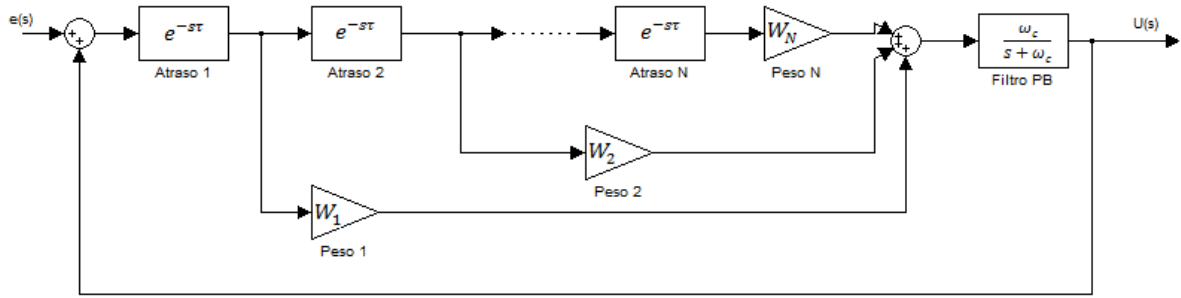
Tabela 1: Pesos  $W_i$  dos HRC.

N	W1	W2	W3	W4
1	1	-	-	-
2	2	-1	-	-
3	3	-3	1	-
4	4	-6	4	-1

### 2.3.2 Espaço de Estados

Assim como o controlador repetitivo tradicional, o de alta ordem necessita de um filtro passa-baixas em série para a sua estabilização. O filtro  $Q(s)$ , além de permitir a estabilidade do sistema, torna possível a sua representação em espaço de estados. O mesmo filtro utilizado para o controlador repetitivo da Seção 2.1 será agora utilizado, e a sua forma é a da Equação (10). Na Figura 7 está o controlador repetitivo de alta ordem com o filtro  $Q(s)$ , de frequência de corte  $\omega_c$  em série.

Figura 7: Controlador Repetitivo de Alta Ordem com filtro  $Q(s)$ .



Fonte: o autor.

A função de transferência do controlador é agora

$$C_{Qhorc}(s) = \frac{Q(s)W(s)}{1 - Q(s)W(s)} \quad (24)$$

em que  $Q(s)$  e  $W(s)$  estão mostradas respectivamente nas Equações (10) e (18). O controlador de (24) pode ser representada na forma de espaço de estados como

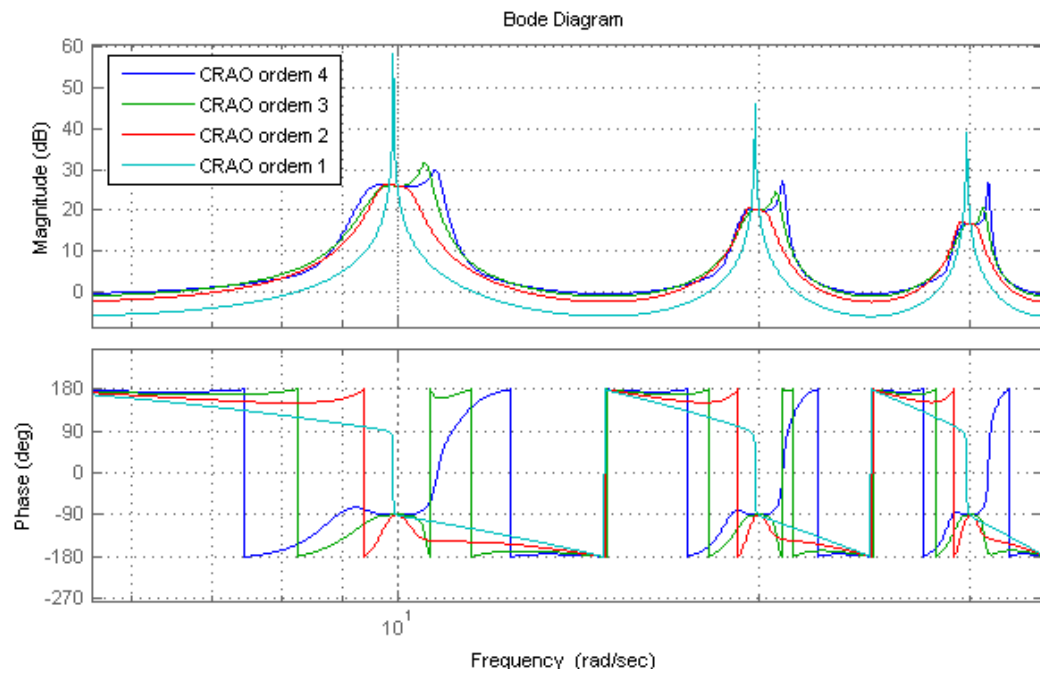
$$\dot{x}_c(t) = -\omega_c x_c(t) + \omega_c \sum_{i=1}^N W_i x_c(t - i\tau) + \omega_c \sum_{i=1}^N W_i e(t - i\tau) \quad (25)$$

$$y_c(t) = x_c(t) \quad (26)$$

cuja dedução é análoga à dedução de (17), podendo também ser encontrada em [3], e não será aqui demonstrada. Nota-se, pela Equação (26), que agora o estado do controlador é a sua própria saída, ou seja, o sinal de  $y_c(t)$ .

Na Figura 8 é mostrado o diagrama de Bode para o HORC de ordens 1, 2, 3 e 4, considerando uma frequência fundamental de 10rad/s e frequência de corte de 200rad/s. Comparando os diagramas de Bode, percebe-se que o pico de frequência diminui em ordens maiores. Há, entretanto, um alargamento na faixa de frequência onde pode haver seguimento e rejeição. No HORC de 4ª ordem há uma singularidade, que aparece também na 3ª ordem, mas menos acentuada. Esta singularidade cresce com a frequência, à medida que o resto do alargamento decresce, como previsto na teoria, por causa da frequência de corte.

Figura 8: Diagrama de Bode para HORC de Ordens 1, 2, 3 e 4.



Fonte: o autor, com auxílio do Matlab.

### 3 PROJETO DO CONTROLADOR

A aplicação do controlador repetitivo à suspensão ativa a ser apresentada se trata de um sistema composto pela planta, e o controlador repetitivo de alta ordem.

#### 3.1 ANÁLISE PRELIMINAR DO SISTEMA

A planta considerada é representada no espaço de estados da forma apresentada no conjunto de equações

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_q q(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ e(t) = r(t) - y(t) \end{cases} \quad (27)$$

onde  $x(t)$  é o vetor de estado da planta,  $u(t)$  é o sinal de controle,  $q(t)$  é a perturbação e  $y(t)$  é a saída do sistema. A terceira equação de (27) se trata apenas do erro  $e(t)$ , que é a diferença entre a referência  $r(t)$  e a saída  $y(t)$ . Este erro, quando considerado um atraso  $\tau$ , pode ser reescrito como

$$e(t - i\tau) = r(t - i\tau) - Cx(t - i\tau) \quad (28)$$

O erro  $e(t)$  é a diferença da referência  $r(t)$  e da saída  $y(t)$ , portanto, se for considerado uma referência passada com um atraso  $i\tau$  e uma saída com essa mesma defasagem, o erro conseqüentemente irá assimilar o mesmo atraso, o que justifica a formulação de (28). Em relação à referência, há o interesse de analisar por hora o seguimento de um sinal periódico, e, portanto, se um sinal periódico estiver atrasado um tempo exatamente igual a um múltiplo de seu período fundamental, este sinal atrasado será exatamente o mesmo sinal sem o atraso, implicando que  $r(t - i\tau) = r(t)$ . Substituindo (28) em (25), tem-se

$$\dot{x}_c(t) = -\omega_c x_c(t) + \omega_c \sum_{i=1}^N W_i x_c(t - i\tau) + \omega_c r(t) - \omega_c \sum_{i=1}^N W_i Cx(t - i\tau). \quad (29)$$

Tendo as equações de estado de uma planta  $G(s)$  nos formatos da Equação (27), e com a equação dos estados do controlador  $C_{Qhorc}(s)$  nas Equações (29) e (26), cria-se um sistema aumentado  $x_a(t)$ , na forma

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad (30)$$

sendo a sua variação podendo ser expressa por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -\omega_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_c W_i C & \omega_c W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - i\tau) \\ x_c(t - i\tau) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & B_q \\ \omega_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ q(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

O sinal de controle  $u(t)$  será assumido da forma

$$u(t) = K_G x(t) + K_c y_c(t) = K_G x(t) + K_c x_c(t) = K x_a(t) \quad (32)$$

de forma que o estado  $x(t)$  é realimentado positivamente na entrada da planta  $G(s)$ , com ganho  $K_G$ , juntamente com a saída do controlador  $C_{Qhorc}(s)$ , com um ganho  $K_c$ . Os ganhos  $K_G$  e  $K_c$  serão representados por um vetor  $K$ , expresso por

$$K = [K_G \quad K_c]. \quad (33)$$

Uma outra forma de representar (31), levando em conta (32) é

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -\omega_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [K_G \quad K_c] \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_c W_i C & \omega_c W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - i\tau) \\ x_c(t - i\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_q \\ \omega_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

cujas matrizes podem ser expressas na forma

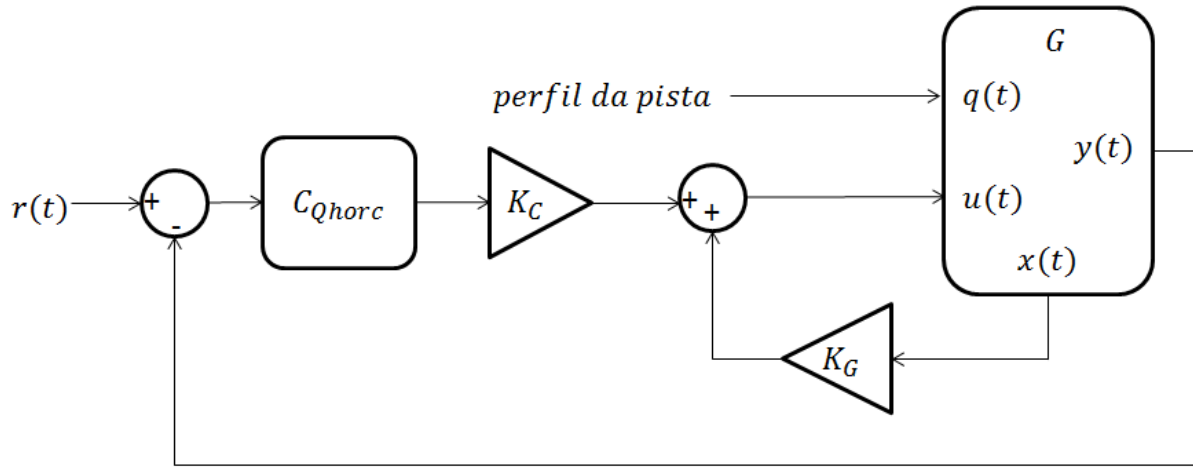
$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -\omega_c \end{bmatrix}, \quad A_{\tau i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_c W_i C & \omega_c W_i \end{bmatrix}, \\ B_a &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{rq} = \begin{bmatrix} 0 & B_q \\ \omega_c & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad r q(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

reduzindo (34) a

$$\dot{x}_a(t) = (A_a + B_a K) x_a + \sum_{i=1}^N A_{i\tau} x_a(t - i\tau) + B_{rq} r q(t). \quad (35)$$

A topologia final do sistema, incluindo o controlador, a planta e as devidas realimentações é mostrada na Figura 9.

Figura 9: Sistema final.



Fonte: o autor.

### 3.1.1 Condições de Estabilidade e o Cálculo dos Ganhos

Como foi visto na Seção 2.3.2, dois ganhos deverão ser determinados:  $K_G$  para os estados da planta  $x(t)$ , que serão realimentados, e  $K_C$  para o estado  $x_c(t)$  do controlador  $C(s)$ . Os ganhos devem ser tais que o sistema em malha fechada seja estável no sentido BIBO (*Bounded Input, Bounded Output*). No estudo [12] é apresentado um teorema que prova que sistemas de dimensões infinitas que são internamente estáveis assintoticamente, são também BIBO estáveis. Para (35), é possível desconsiderar as variáveis externas de referência e perturbação, sendo necessário, portanto, apenas provar a estabilidade de

$$\dot{x}_a(t) = (A_a(\lambda) + B_a K)x_a + \sum_{i=1}^N A_{i\tau} x_a(t - i\tau). \quad (36)$$

Adicionalmente ao critério de estabilidade, é possível estabelecer critérios referente ao desempenho do sistema em malha fechada. Um determinante para o desempenho transitório é a taxa de decaimento  $\alpha$ , definida por

$$\|x_a(t)\| \leq \beta \|\phi\|_{N\tau} e^{-\alpha t} \quad (37)$$

que é um critério que basicamente define o tempo de recuperação do sistema, onde  $\beta$  é um escalar positivo e  $\|\phi\|$  é a função inicial, que faz o papel da condição inicial com até o tempo de  $N\tau$  de atraso.

O último critério é a minimização de uma Função de Custo que depende dos estados  $x_a(t)$  e do sinal de controle  $u(t)$ , sendo denominado  $J(x_a, u)$ , definida como

$$J(x_a, u) = \|p(t)\|_2^2 = \int_0^\infty p(t)'p(t)dt \quad (38)$$

sendo  $p(t)$  uma saída de desempenho transitório, tal que

$$p(t) = C_p x_a(t) + D_p u(t). \quad (39)$$

Através de (39) é estabelecido como serão feitas as penalizações quanto aos estados e ao sinal de controle, e a norma de  $p(t)$  elevado ao quadrado, representa a energia acumulada do sistema. A partir dos três critérios apresentados, pode-se formular uma restrição na forma de uma Desigualdade Linear Matricial (*Linear Matrix Inequality* - LMI), apresentada por

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11j} & \Upsilon_{12} & QC'_p + Y'D_p \\ \Upsilon'_{12} & -\Upsilon_{22} & 0 \\ QC_p + YD_p & 0 & -\nu \end{bmatrix} < 0 \quad (40)$$

onde

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11j} &= He\{A_m Q + BY\} + \sum_{i=1}^N S_i + 2\alpha Q, \\ \Upsilon_{12} &= [e^{\alpha\tau} A_{\tau 1} Q \quad e^{\alpha 2\tau} A_{\tau 2} Q \quad \dots \quad e^{\alpha N\tau} A_{\tau N} Q], \\ \Upsilon_{22} &= diag\{S_1, S_2, \dots, S_N\}. \end{aligned}$$

Em [3] é apresentado, juntamente com a sua prova, um teorema que afirma que, dada a existência das matrizes simétricas  $Q, S_i \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , da matriz  $Y \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e o escalar positivo  $\nu$ , que satisfazem a LMI em (40), então o ganho  $K$ , calculado por

$$K = YQ^{-1} \quad (41)$$

torna o sistema em malha fechada assintoticamente estável, e a Função de Custo é tal que

$$\|p(t)\|_2^2 \leq \nu V(0) \quad (42)$$

sendo

$$V(0) = x_a(0)'Q^{-1}x_a(0) + \int_{-\tau}^0 x_a(\theta)'PS_i^{-1}Px_a(\theta)d\theta$$

A partir do teorema, os ganhos podem ser, portanto, definidos a partir de 4 etapas.

- 1) Definir a ordem  $N$  do HORC, e os pesos  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  que satisfaça (20).
- 2) A partir de  $\alpha$  e  $\omega_c$  definidos para obter o desempenho desejado, encontrar o menor valor de  $v$  possível que solucione a LMI em (40).
- 3) Para a solução da LMI, calcular o ganho  $K$ , através da Equação (41).
- 4) Se a resposta em malha fechada desejada não for alcançada, deve-se aumentar os valores de  $N$ ,  $\alpha$  ou  $\omega_c$  e retornar à primeira etapa.

O problema de otimização pode ser resolvido através de pacotes computacionais. A solução para LMI será resolvido utilizando o Parser Yalmip [13] e o *solver* LMILAB do Matlab.

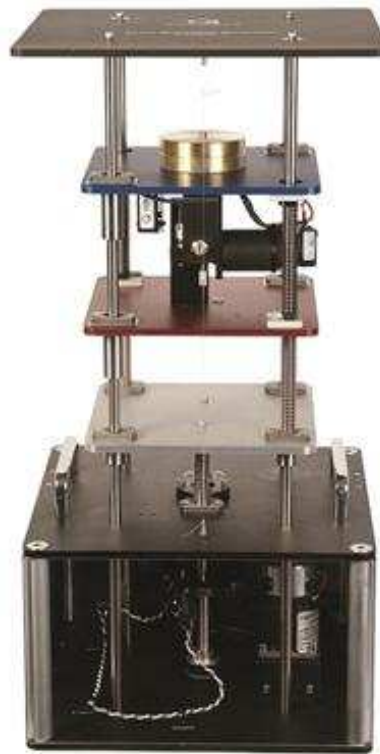


#### 4 PLANTA DE SUSPENSÃO ATIVA ¼ DE CARRO

Nesta seção será modelado o sistema de suspensão. Na Seção 3, foi projetado o Controlador Repetitivo de Alta Ordem levando em conta um sistema na forma apresentada em (27), da Seção 3.1. Será agora visto exatamente do que se trata este sistema.

A Quanser é renomadamente um dos líderes no *design* e implementação de sistemas de controle para educação, pesquisa e até mesmo na indústria [14]. Para a presente aplicação, o sistema de suspensão ativa será usado, simulando um sistema de suspensão ativa de ¼ de carro. A Figura 10 mostra a planta de suspensão ativa da Quanser.

Figura 10: Planta de Suspensão Ativa da Quanser.



Fonte: SITE DA QUANSER

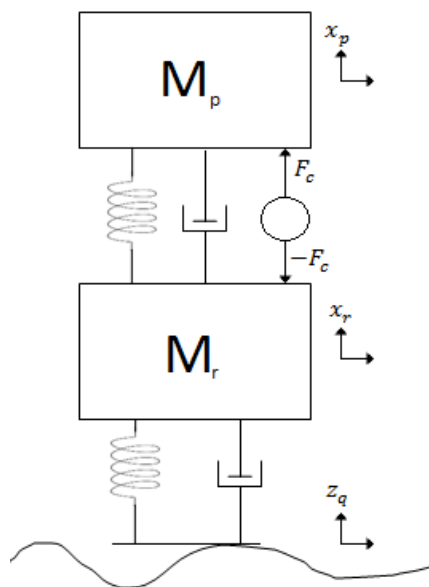
Como pode ser visto na Figura 10, o sistema de suspensão ativa da Quanser é composto por três placas dispostas paralelamente. A placa branca, que é a mais de baixo, representa o chão. A placa do meio, distinguida pela cor vermelha, representa o eixo de uma das 4 rodas de um carro. A placa azul, que está localizada acima das outras placas, é o chassi do carro, ou pode-se pensar também no próprio passageiro, posto que o efeito sofrido por ambos é o mesmo, sendo justamente este efeito o que se deseja ser evitado. O contato entre as

placas se da por meio de molas, havendo ainda um atrito a ser considerado. No sistema há ainda 2 motores. Um motor é acoplado a placa branca, simulando as irregularidades do solo. O segundo motor está posicionado entre as duas placas superiores, e é, na pratica, o atuador do sistema de suspensão a ser controlado.

#### 4.1 MODELAGEM DO SISTEMA

Na Figura 11 pode ser visto o modelo do sistema descrito, que consta no manual de instrução da Quanser [15].

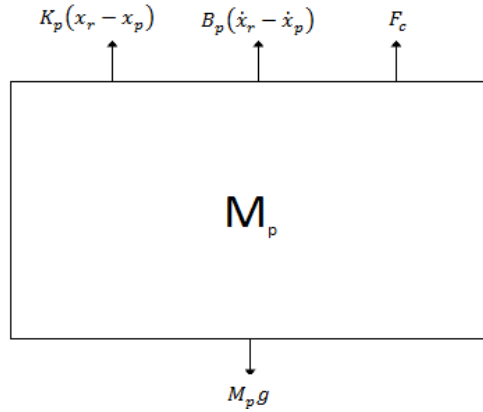
Figura 11: Modelo da Suspensão Ativa ¼ de Carro.



Fonte: o autor.

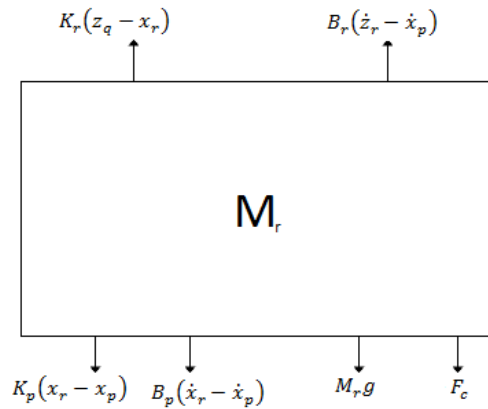
Na Figura 11,  $M_p$  representa a massa da placa superior,  $M_r$  é a massa da placa que representa a roda, e  $F_c$  é a força aplicada pela suspensão ativa. Para cada placa, é estabelecido uma referência no eixo vertical. Associada à massa  $M_p$ , tem-se a referência  $x_p$ , da mesma forma que à massa  $M_r$ , tem-se a referência  $x_r$ . Adicionalmente, a referência  $z_q$  se refere à posição do solo. Cada bloco será individualmente analisado, realizando o seu somatório de forças. Nas Figura 12 e Figura 13 estão mostrados os diagramas de forças das massas  $M_p$  e  $M_r$ .

Figura 12: Massa  $M_p$  e as forças que agem.



Fonte: o autor.

Figura 13: Massa  $M_r$  e as forças que agem.



Fonte: o autor.

Lembrando que a força resultante em um corpo é o somatório de todas as forças atuando sobre ele, que por sua vez é o produto da sua massa e sua aceleração, conforme a 2ª Lei de Newton. A somatória de forças no corpo de massa  $M_p$  é

$$M_p \ddot{x}_p = K_p(x_r - x_p) + B_p(\dot{x}_r - \dot{x}_p) - M_p g + F_c \quad (43)$$

e no corpo de massa  $M_r$  é

$$M_r \ddot{x}_r = K_r(z_q - x_r) + B_r(\dot{z}_r - \dot{x}_p) - K_p(x_r - x_p) - B_p(\dot{x}_r - \dot{x}_p) - M_r g - F_c. \quad (44)$$

Para o problema em questão, é de interesse a medida da aceleração dos corpos. Para tanto, (43) e (44) podem ser reescritas, agrupando as variáveis similares, como

$$\ddot{x}_p = -g + \frac{F_c}{M_p} + \frac{B_p \dot{x}_r}{M_p} - \frac{B_p \dot{x}_p}{M_p} + \frac{K_p x_r}{M_p} - \frac{K_p x_p}{M_p}, \quad (45)$$

$$\ddot{x}_r = -g - \frac{F_c}{M_r} + \frac{(-B_r - B_p) \dot{x}_r}{M_r} + \frac{B_p \dot{x}_p}{M_r} + \frac{B_r \dot{z}_q}{M_r} + \frac{(-K_r - K_p) x_r}{M_r} + \frac{K_p x_p}{M_r} + \frac{K_r z_q}{M_r}. \quad (46)$$

Contudo, em (45) e (46) as funções dependem da gravidade, não estando, portanto, no seu ponto de equilíbrio. Supondo o sistema em equilíbrio, não há aceleração em qualquer ponto do sistema, tampouco velocidade. Além do mais, pode-se supor a posição  $z_q$  na posição zero e a força aplicada pela suspensão ativa nula. Neste caso, (45) e (46) se tornam

$$0 = -g + \frac{K_p x_{req}}{M_p} - \frac{K_p x_{peq}}{M_p}$$

$$0 = -g + \frac{(-K_r - K_p) x_{req}}{M_r} + \frac{K_p x_{peq}}{M_r}$$

que podem ser rearranjadas, a fim de isolar as variáveis  $x_{req}$  e  $x_{peq}$ , chegando-se aos valores da posição no equilíbrio

$$x_{req} = -\frac{(M_r + M_p)g}{K_r}, \quad (47)$$

$$x_{peq} = -\frac{(M_r + M_p)g}{K_r} - \frac{M_p g}{K_p}. \quad (48)$$

Tendo os valores das posições para o ponto de equilíbrio, pode-se realizar as substituições de variáveis:

$$x_r(t) = z_r(t) + x_{req}, \quad (49)$$

$$x_p(t) = z_p(t) + x_{peq}. \quad (50)$$

que implica também

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= \dot{z}_r(t) \\ \ddot{x}_r(t) &= \ddot{z}_r(t) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= \dot{z}_p(t) \\ \ddot{x}_p(t) &= \ddot{z}_p(t) \end{aligned} \quad (52)$$

Substituindo (49)-(52) em (45) e (46), chega-se a

$$\ddot{z}_p = \frac{F_c}{M_p} + \frac{B_p \dot{z}_r}{M_p} - \frac{B_p \dot{z}_p}{M_p} + \frac{K_p z_r}{M_p} - \frac{K_p z_p}{M_p}, \quad (53)$$

$$\ddot{z}_r = -\frac{F_c}{M_r} + \frac{(-B_r - B_p) \dot{z}_r}{M_r} + \frac{B_p \dot{z}_p}{M_r} + \frac{B_r \dot{z}_q}{M_r} + \frac{(-K_r - K_p) z_r}{M_r} + \frac{K_p z_p}{M_r} + \frac{K_r z_q}{M_r}. \quad (54)$$

#### 4.2 REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS

A representação do sistema de suspensão ativa em espaço de estados será feita nos modelos do sistema apresentado em (27). Serão primeiramente definidos os estados, a entrada, a perturbação e as saídas, respectivamente como

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_p(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_p(t) \\ z_r(t) - z_q(t) \\ \dot{z}_r(t) \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$u(t) = F_c \quad (56)$$

$$q(t) = \dot{z}_q(t) \quad (57)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_p(t) - z_r(t) \\ \ddot{z}_p(t) \\ z_p(t) - z_r(t) + \dot{z}_p(t) \end{bmatrix} \quad (58)$$

Os estados mostrados em (55) se tratam da distância entre as placas representando o passageiro e a roda, a velocidade do passageiro no sentido vertical, a distância entre as placas representando a roda e o solo, e a velocidade do eixo da roda no sentido vertical. A entrada do sistema é a força aplicada pelo atuador, como apresentado em (56) e a perturbação é taxa de variação da altura do solo, como em (57). O sistema da Quanser fornece duas saídas, que são as duas primeiras em (58). A primeira é  $y_1(t)$ , que é igual ao primeiro estado, e a segunda é  $y_2(t)$ , que é a variação do segundo estado, ou seja a aceleração da placa que representa o passageiro. De fato o que o passageiro sente é a aceleração do chassi, que é diretamente transmitido para ele, entretanto as LMIs não encontraram solução para o sistema sendo considerado a aceleração como saída. Minimizar apenas a distância entre a roda e o chassi não tem tanto sentido prático, pois neste caso não haveria a necessidade de uma suspensão.

Portanto, foi projetada uma terceira saída  $y_3(t)$  ao sistema, que é a soma do primeiro e do segundo estado, com o objetivo de minimizar a velocidade vertical do chassi. Em termos reais, poderia ter sido considerado apenas o segundo estado, entretanto a resolução das LMIs não foi possível para este caso. A partir de (53) e (54), chega-se a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_p(t) - \dot{z}_r(t) \\ \ddot{z}_p(t) \\ \dot{z}_r(t) - \dot{z}_q(t) \\ \ddot{z}_r(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -K_p & -B_p & 0 & B_p \\ M_p & M_p & 0 & M_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_p & B_p & -K_r & -B_r - B_p \\ M_r & M_r & M_r & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_p(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_p(t) \\ z_r(t) - z_q(t) \\ \dot{z}_r(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M_p \\ 0 \\ 1/M_r \end{bmatrix} F_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ B_r/M_r \end{bmatrix} \dot{z}_q(t) \end{aligned} \quad (59)$$

$$z_p(t) - z_r(t) + \dot{z}_p(t) = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} z_p(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_p(t) \\ z_r(t) - z_q(t) \\ \dot{z}_r(t) \end{bmatrix} \quad (60)$$

Comparando (27) a (59) e (60), juntamente com (55) - (58), tem-se as matrizes A, B,  $B_q$  e C, sendo considerada apenas a terceira saída

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -K_p & -B_p & 0 & B_p \\ M_p & M_p & 0 & M_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_p & B_p & -K_r & -B_r - B_p \\ M_r & M_r & M_r & M_r \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M_p \\ 0 \\ 1/M_r \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$B_q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ B_r/M_r \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$C = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (64)$$

#### 4.3 PARÂMETROS DO SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA

Após a modelagem do sistema, para que os cálculos possam ser realizados, é necessário saber os valores dos parâmetros do sistema. No manual do usuário da planta [16], são fornecidos os valores, que podem ser encontrados na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros do Sistema de Suspensão Ativa ¼ de Carro.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
$M_p$	Massa da placa superior (passageiro)	2,45	kg
$M_r$	Massa da placa do meio (roda)	1,00	kg
$K_p$	Constante elástica passageiro-roda	900	N/m
$K_r$	Constante elástica roda-estrada	2500	N/m
$B_p$	Constante de amortecimento passageiro-roda	7,5	N.s/m
$B_r$	Constante de amortecimento roda-estrada	5,0	N.s/m

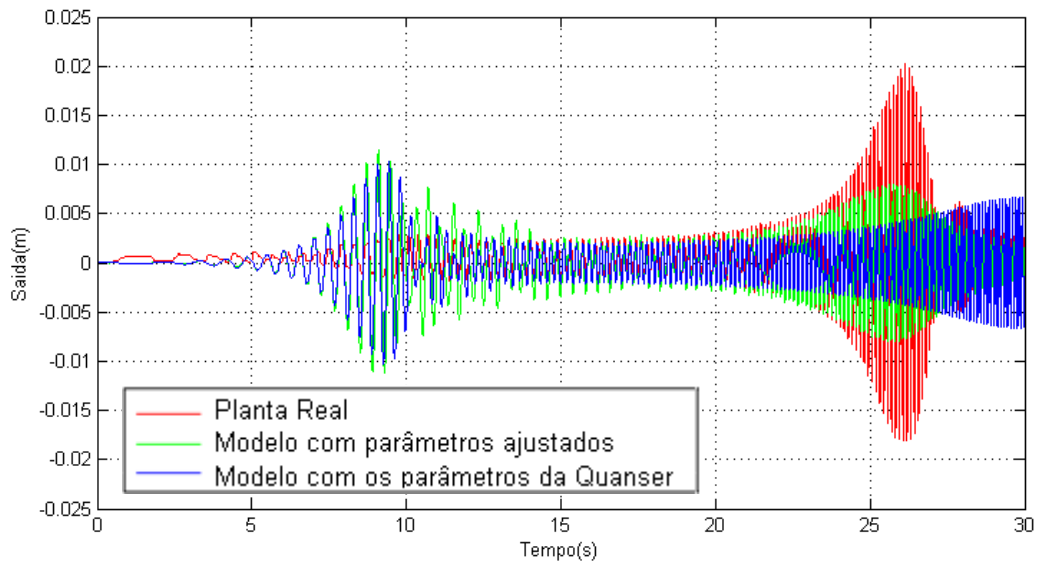
O modelo foi verificado através de ensaios à malha aberta, e realizado os ajustes devidos nos parâmetros, como mostra a Tabela 3.

Tabela 3: Parâmetros Ajustados da Suspensão Ativa.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
$M_p$	Massa da placa superior (passageiro)	2,5	kg
$M_r$	Massa da placa do meio (roda)	1,15	kg
$K_p$	Constante elástica passageiro-roda	1100	N/m
$K_r$	Constante elástica roda-estrada	1600	N/m
$B_p$	Constante de amortecimento passageiro-roda	3	N.s/m
$B_r$	Constante de amortecimento roda-estrada	6	N.s/m

O ensaio, levando em conta uma perturbação  $p_1(t)$ , que será melhor detalhada na Seção 5.3, é mostrado na Figura 14, sendo a saída  $y_1(t)$  de (58). Para a análise que segue, é importante saber que a perturbação é um sinal sinusoidal, com frequência que varia linearmente a frequência de 0 a 60rad/s.

Figura 14: Comparação da Planta Real com os Modelos.

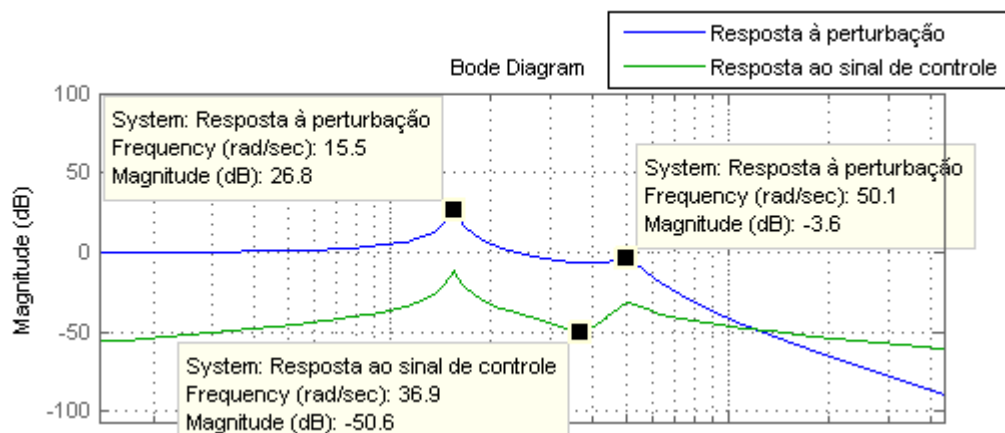


Fonte: o autor.

#### 4.4 ANÁLISE DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO MODELO

A modelagem da suspensão ativa levou em conta a força do sinal de controle como a entrada, e ainda foi considerada a perturbação. Na Figura 15 é mostrado o diagrama de Bode da função de transferência do sinal de controle e do sinal de perturbação para a saída respectivamente.

Figura 15: Diagrama de Bode para o modelo da suspensão.



Fonte: O autor, com o auxílio do Matlab.



No diagrama de Bode mostrado na Figura 15, nota-se que a própria planta já atenua perturbações, à medida que estas aumentam em frequência. Esta constatação poderia já de antemão ter sido feita, afinal há molas e atrito entre cada uma das placas. Há dois picos de maior ganho, nas frequências de 15,5 e 50,1rad/s em que a perturbação é menos atenuada. Contudo, estes picos acontecem na mesma frequência em que o sinal de controle tem melhor resposta. Há um pico de atenuação no sinal de controle na frequência de 36,9rad/s. É esperado, portanto, que o sinal de controle aumente nesta região, a fim de manter a perturbação atenuada. Em altas frequências, há uma atenuação do sinal de controle; entretanto, a perturbação, como já mencionado, é atenuada pela própria planta. Ao analisar a Figura 14, percebe-se maiores efeitos da perturbação nos tempos de aproximadamente 8 segundos, e 26 segundos, que correspondem a 16 e 52 rad/s respectivamente.

## 5 APLICAÇÃO DO CONTROLADOR À SUSPENSÃO ATIVA

Nesta seção será aplicado o controlador projetado na Seção 3 na planta modelada na Seção 4. Primeiramente serão realizadas simulações no *software* Matlab, que serão apresentados na Seção 5.3. Após validado em simulações, será finalmente aplicado o controlador na planta da Quanser. Os resultados serão descritos na Seção 5.4, comparando o que de fato ocorre, com o que foi calculado numericamente.

### 5.1 PERÍODO FUNDAMENTAL DO CONTROLADOR

A escolha do período fundamental  $\tau$  para esta aplicação levará em conta o fato de estar o controlador sendo aplicado a uma suspensão ativa de um automóvel. Os fatores que afetam diretamente o período são a deformação da pista, e a velocidade em que se encontra. Sabe-se da Figura 5 que os picos tendem a diminuir, à medida que os múltiplos da frequência fundamental se tornam mais altos, devido à frequência de corte. Isto significa que o controlador é mais eficiente na frequência fundamental.. Todavia, caso seja inicialmente escolhida uma frequência alta, as frequência mais baixas não serão devidamente atenuadas.

Nos experimentos a serem realizados, será considerado que a deformação da pista é da mesma ordem de grandeza do comprimento do pneu do carro. Um pneu de raio de 30cm, a uma velocidade de 10km/h resulta em uma frequência fundamental de aproximadamente 9,26rad/s, o que corresponde a um período fundamental de aproximadamente 0,68 segundos. Para esta escolha de período de atraso, ainda teriam picos de ganhos nas frequências múltiplas da fundamental, sendo as primeiras delas 18,52rad/s, 27,78rad/s e 37,04rad/s, que corresponderiam a 20km/h, 30km/h e 40km/h.

### 5.2 GANHOS $K_G$ E $K_C$

O sistema controlado possui ainda ganhos que deverão ser determinados. Os ganhos  $K_G$  e  $K_C$  se referem, respectivamente, ao ganho dado aos estados e ao sinal vindo da saída do controlador. Os parâmetros taxa de decaimento  $\alpha$  e frequência de corte  $\omega_c$ , assim como a ordem do HORC, determinam os ganhos para esta planta, com o período fundamental calculado na Seção 5.1. Será apenas penalizado o segundo estado, considerando portanto os coeficientes da performance como  $C_p = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$  e  $D_p = 0$ .

No Apêndice A são mostrados valores dos ganhos para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\omega_c$ , todos para a frequência fundamental de 12rad/s, e serão nas seções 5.2.1 e 5.2.2, respectivamente, melhores analisados.

Percebe-se que, via de regra, à medida que cada um dos parâmetros aumenta, crescem também os ganhos, principalmente o primeiro estado, que é ao que se visa atenuar, e o do sinal de controle. Há, entretanto, alguns casos que isso não é verificado.

### 5.2.1 Taxa de decaimento $\alpha$

A taxa de decaimento representa a velocidade com que o sinal converge quando há mudança na referência ou alguma perturbação. Se a perturbação tende a diminuir a uma taxa maior, é porque o controlador está atuando mais, e, portanto, os ganhos tendem a ser maiores.

Se for tomado como exemplo o controlador com frequência de corte de 10rad/s, de ordem 4, tem-se que o ganho  $K_C$  do controlador, com valores de  $\alpha$  sendo 0,01, 0,1 e 0,5 são respectivamente  $2,1 \times 10^3$ ,  $2,66 \times 10^3$  e  $1,15 \times 10^4$ . De 0,01 para 0,1 o aumento no ganho foi de aproximadamente 25%, mas aumentar o valor de  $\alpha$  para 0,5, houve um crescimento em  $K_C$  de quase 5 vezes.

### 5.2.2 Frequência de Corte $\omega_c$ do Filtro Passa-Baixas

Os efeitos da frequência de corte já foram vistos na Seção 2.2.1. Uma frequência de corte mais alta implica picos maiores nos múltiplos inteiros da frequência, como mostra a Figura 7. A 1rad/s, o ganho  $K_C$  do controlador de quarta ordem, com valores de  $\alpha$  sendo 0,01, 0,1 e 0,5 é respectivamente  $1,09 \times 10^2$ ,  $2,9 \times 10^2$  e  $7,54 \times 10^2$ . Em comparação com a frequência de corte de 10rad/s, visto na Seção 5.2.1, há uma diferença de uma ordem de grandeza, sendo, portanto, mais significativo na alteração dos ganhos que a taxa de decaimento.

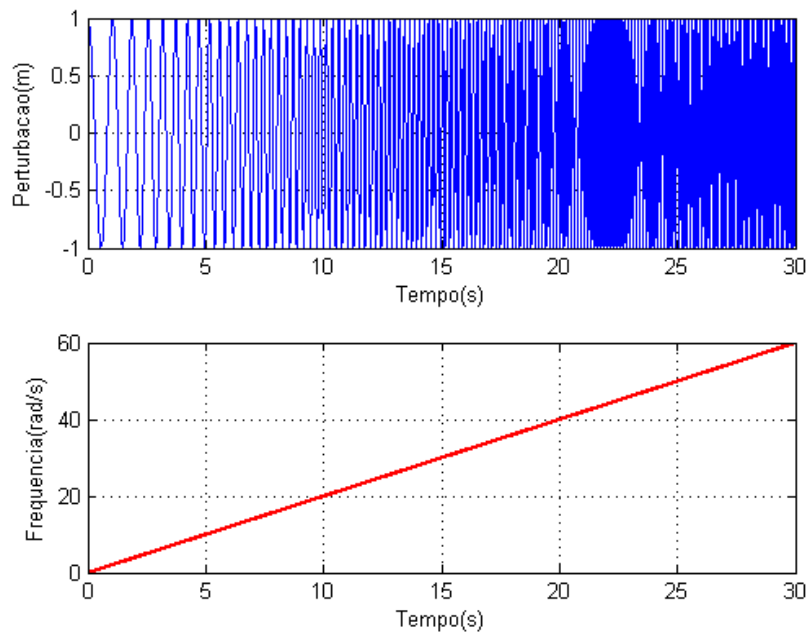
### 5.2.3 Ordem N do HRC

A mesma explicação exposta para a taxa de decaimento  $\alpha$  é válida para a ordem do controlador: uma ordem maior almeja uma atenuação maior, surgindo a necessidade de um sinal de controle de maiores valores. Para exemplificar, será usado os valores de  $\alpha$  e  $\omega_c$  respectivamente em 0,1 e 10rad/s. Os valores do ganho do sinal de controle para ordens N de 1, 2, 3 e 4, são, respectivamente,  $4,55 \times 10^1$ ,  $3,4 \times 10^2$ ,  $5,27 \times 10^2$  e  $2,66 \times 10^3$ .

### 5.3 SIMULAÇÕES

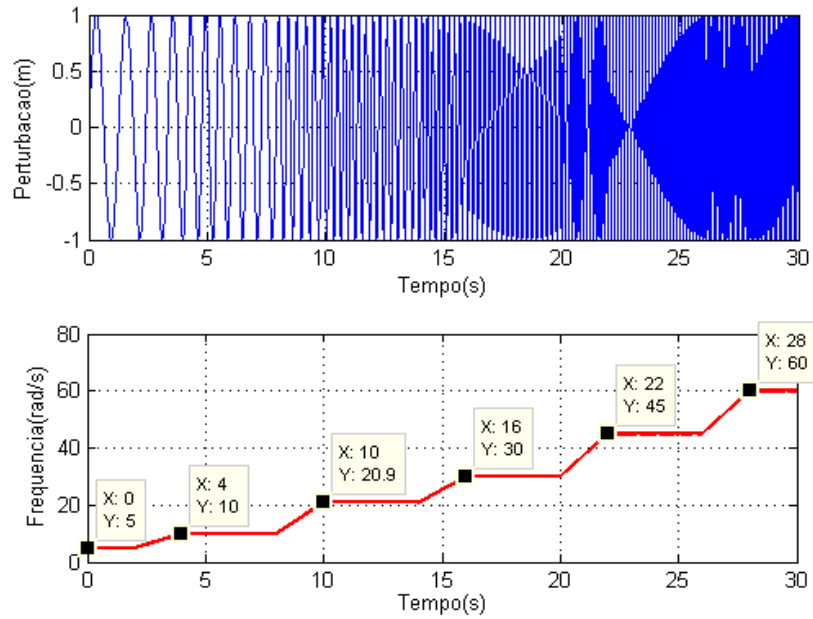
Antes de utilizar o controlador na planta da Quanser, serão realizadas simulações utilizando os *softwares* Matlab e Simulink. Além de problemas numéricos que o Simulink pode apresentar, a planta possui uma saturação no sinal de controle, no valor de  $\pm 39,6\text{N}$ . Outro impasse é o limite mecânico das placas, que encontra um fundo de escala, e possuem, portanto, um limite para suas oscilações. Para a forma da estrada, serão considerados dois sinais,  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$ .  $p_1(t)$  é um sinal senoidal com amplitude de 1,5mm, que por um período de 30 segundos irá variar a frequência entre 0 e 60rad/s, ou seja, a uma rampa de frequência, que cresce à taxa de 2rad/s, como mostra a Figura 16.  $p_2(t)$  é também um sinal sinusoidal, cuja frequência sobe gradativamente, assim como  $p_1(t)$ , mas estacionando por vezes em frequências intermediárias, como mostra a Figura 17. Contudo, a perturbação se trata na verdade da derivada do perfil da pista.

Figura 16: Sinal de perturbação  $p_1(t)$ .



Fonte: o autor.

Figura 17: Sinal de perturbação  $p_2(t)$ .

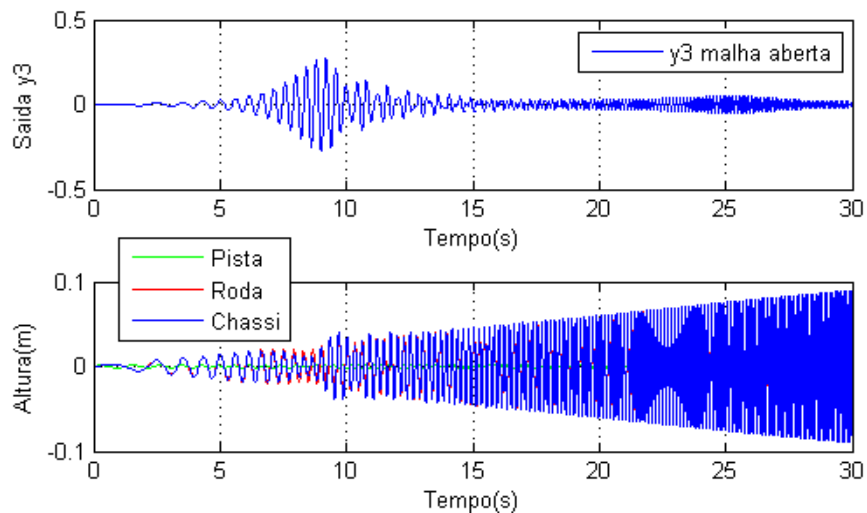


Fonte: o autor.

### 5.3.1 Simulações para a perturbação $p_1(t)$

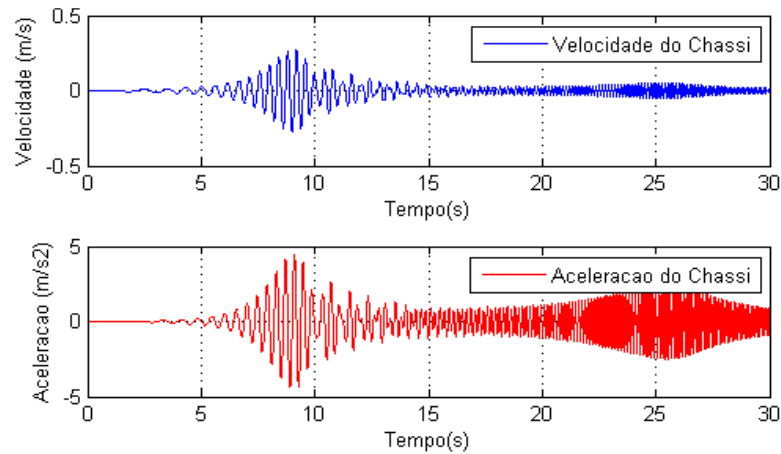
A referência do sistema será estabelecida em zero. Na Figura 18 é mostrado como o sistema responde em malha aberta à perturbação  $p_1(t)$ , mostrando como a saída  $y_3(t)$ , e a posição das placas, e na Figura 19 é mostrada a velocidade e aceleração da placa que representa o chassi.

Figura 18: Saída  $y_3(t)$  e posição das placas em malha aberta para  $p_1(t)$ .



Fonte: o autor.

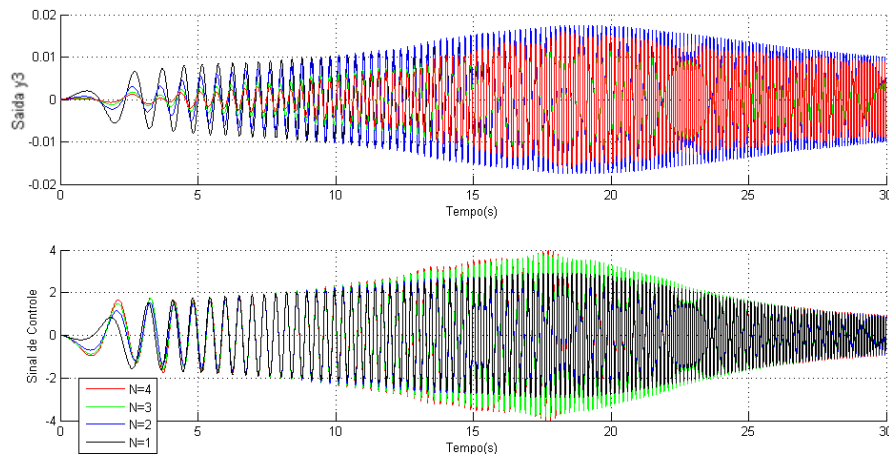
Figura 19: Velocidade e aceleração do chassi em malha aberta para  $p_1(t)$ .



Fonte: o autor.

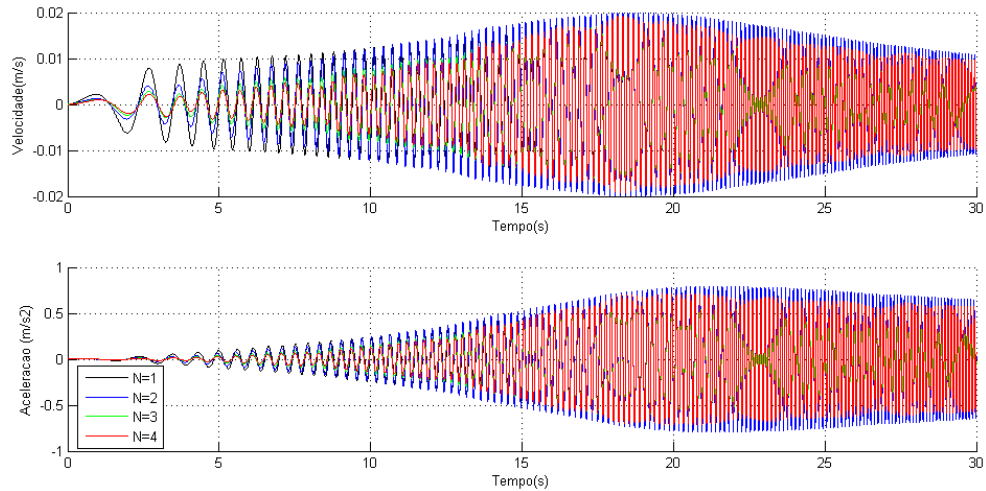
Percebe-se que o sistema é mais suscetível à perturbação nas frequências de aproximadamente 15,5 e 50,1rad/s, como já indicado pelo Diagrama de Bode da Figura 15. Nota-se, também, que o sinal de saída  $y_3(t)$  e o da velocidade do chassi são notavelmente similares, implicando que a maior parte da saída é de fato composta em termos absolutos, pelo segundo estado, enquanto o primeiro é irrelevante, por ser de uma ordem de grandeza bem menor, como pode ser estimado ao comparar a movimentação das placas Figura 18. Serão agora mostradas simulações para o sistema controlado, com diferentes valores para a taxa de decaimento e a frequência de corte. A Figura 20 mostra o sinal de saída  $y_3(t)$  e o sinal de controle  $u(t)$  para a perturbação  $p_1(t)$  e valores de  $\alpha$  e  $\omega_c$  de respectivamente 0,01 e 0,5rad/s. Para os mesmo parâmetros e sinal de perturbação, na Figura 21 é mostrado a velocidade e aceleração vertical da placa do chassi.

Figura 20: Saída  $y_3(t)$  e sinal de controle para  $\alpha=0,01$ ,  $\omega_c = 0,5\text{rad/s}$  e  $p_1(t)$ .



Fonte: o autor.

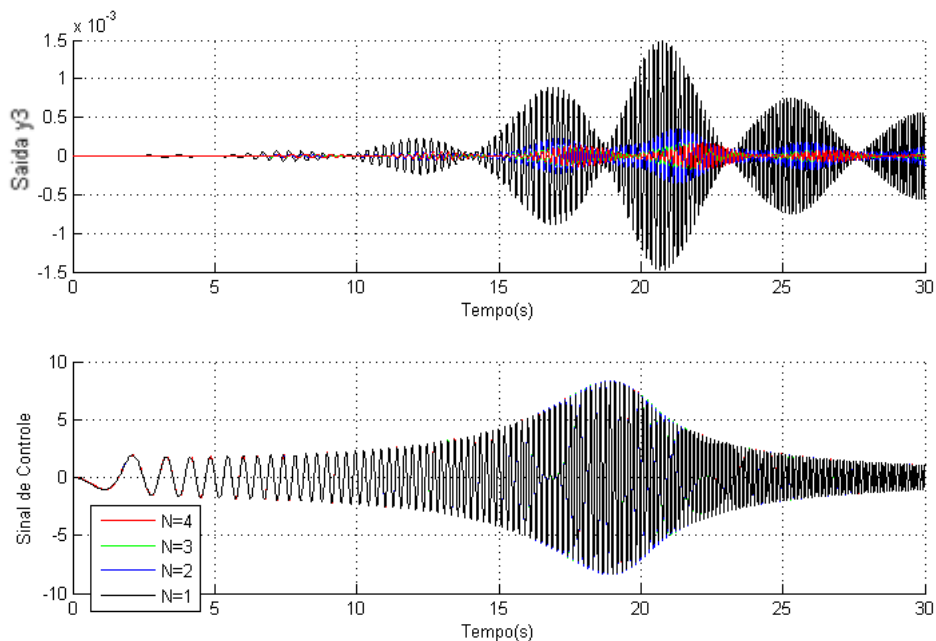
Figura 21: Velocidade e aceleração do chassi para  $\alpha=0,01$ ,  $\omega_c = 0,5\text{rad/s}$  e  $p_1(t)$ .



Fonte: o autor.

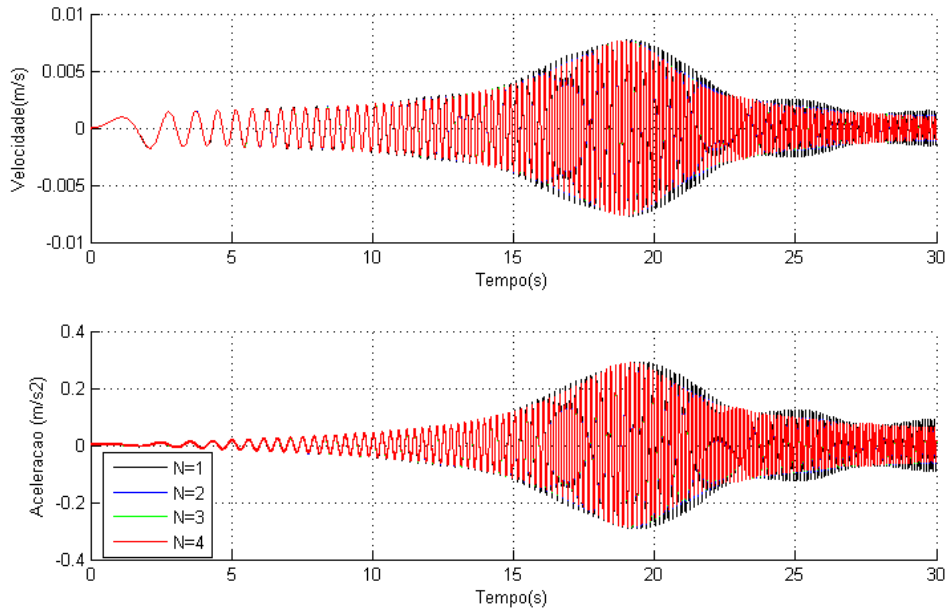
O sinal de saída é mais atenuado para ordens maiores, ao custo de um sinal de controle mais elevado. Para efeito de comparação, será agora simulado com valores de  $\alpha$  e  $\omega_c$  em 0,1 e 100rad/s, respectivamente, e considerando a mesma perturbação  $p_1(t)$ . A saída  $y_3(t)$  e o sinal de controle  $u(t)$  são mostrados na Figura 22, e a velocidade e aceleração da placa de massa  $M_p$  é mostrada na Figura 23.

Figura 22: Saída  $y_3(t)$  e sinal de controle para  $\alpha=0,1$  e  $\omega_c = 100\text{rad/s}$  e  $p_1(t)$ .



Fonte: o autor

Figura 23: Velocidade e aceleração do chassi para  $\alpha=0,1$ ,  $\omega_c = 100\text{rad/s}$  e  $p_1(t)$ .



Fonte: o autor.

Como já previsto pela análise do diagrama de Bode, valores mais elevados de  $\omega_c$  implicam um melhor desempenho pelo controlador, com picos muito mais elevados em múltiplos inteiros da frequência fundamental, que é justamente onde ocorrem as maiores atenuações, em  $9,26\text{rad/s}$ ,  $18,52\text{rad/s}$ ,  $27,78\text{rad/s}$ , e demais múltiplos inteiros de  $9,26\text{rad/s}$ . Pode-se observar que a saída  $y_3(t)$  melhora na ordem de 10 vezes para um controlador de primeira ordem, e 100 vezes para quarta ordem, sem um aumento significativo no sinal de controle. O mesmo não ocorre ao ser analisada a aceleração e a velocidade, pois não estão sendo diretamente controladas, sendo atenuadas pouco mais que 2 vezes. Nota-se que o efeito do controle na velocidade e aceleração da placa de massa  $M_p$  é praticamente o mesmo para ordens 2, 3 e 4 assim como no sinal de controle. Este sinal tem seu pico em aproximadamente 18,5 segundos, que equivale à frequência de  $37\text{rad/s}$ . No diagrama de Bode da Figura 15, havia sido verificado que há um pico de maior atenuação em aproximadamente  $36,9\text{rad/s}$ , justificando este aumento para compensar o menor efeito na planta.



### 5.3.2 Simulações para a perturbação $p_2(t)$

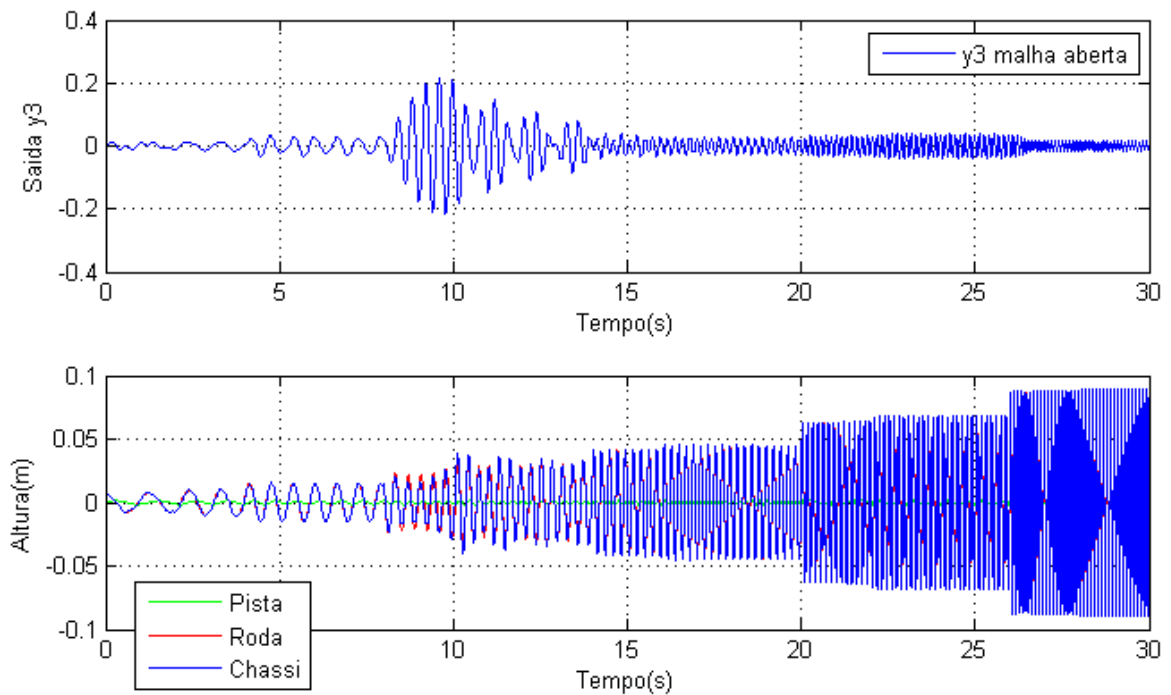
Na Tabela 4 é mostrado como serão os parâmetros para cada simulação.

Tabela 4: Parâmetros para as simulações.

Simulação	$\alpha$	$\omega_c$ (rad/s)
1	Malha Aberta	
2	0,01	0,5
3	0,1	0,5
4	0,1	1
5	0,1	10

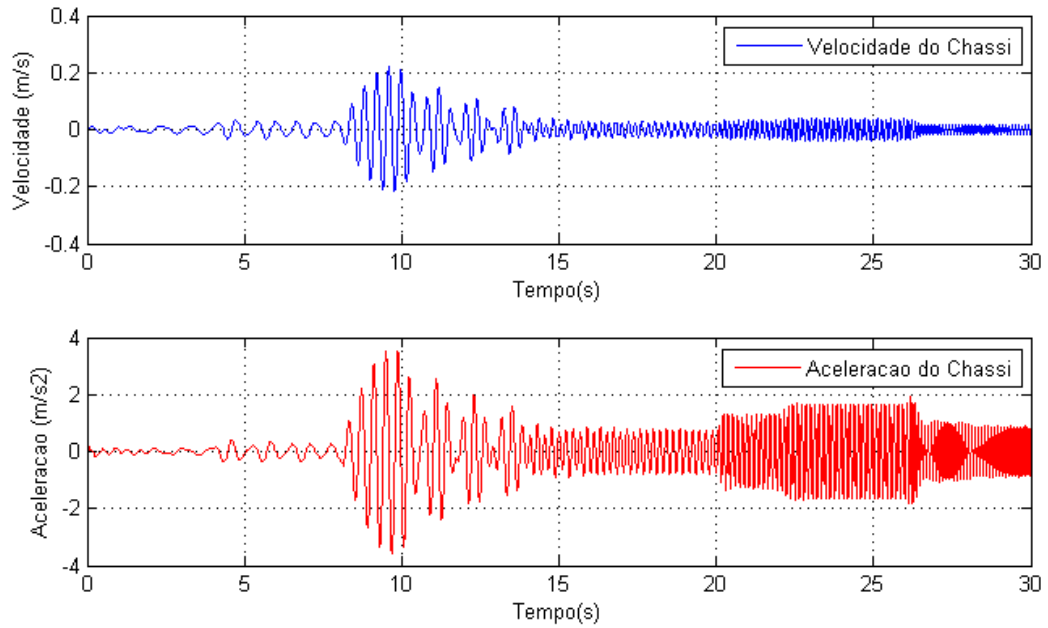
Foi visto que o controlador trabalha a partir do período anterior de tempo  $N\tau$  para a atuação, tendo seu melhor desempenho em regime permanente. Será, portanto, utilizado agora o sinal de perturbação  $p_2(t)$  para os demais ensaios. Novamente, será primeiro realizada a simulação em malha aberta.

Figura 24: Saída  $y_3(t)$  e posição das placas em malha aberta para  $p_2(t)$ .



Fonte: o autor.

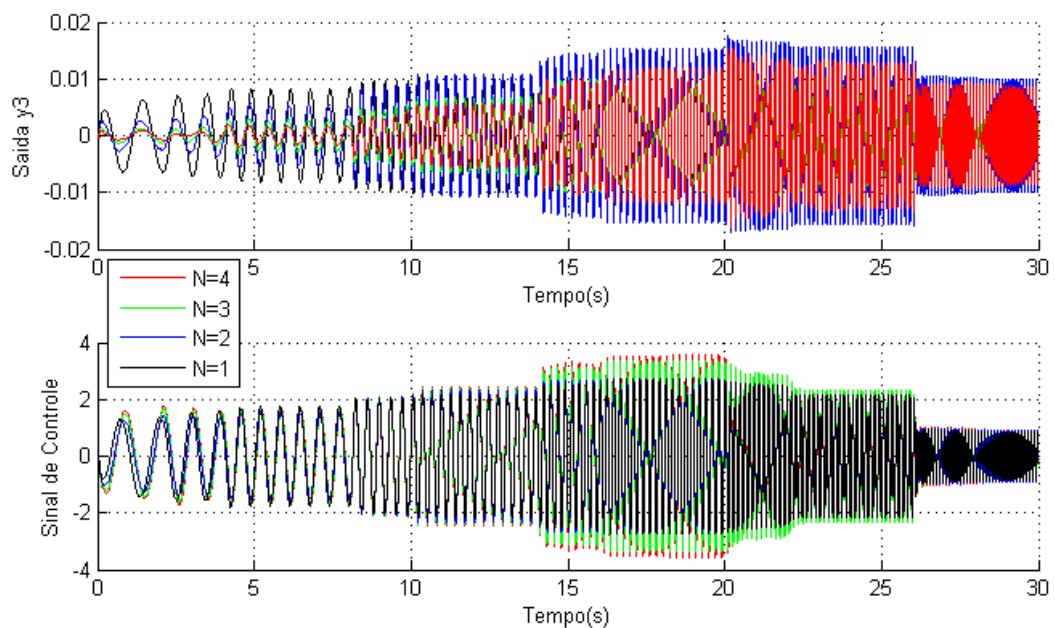
Figura 25: Velocidade e aceleração do chassi em malha aberta para  $p_2(t)$ .



Fonte: o autor.

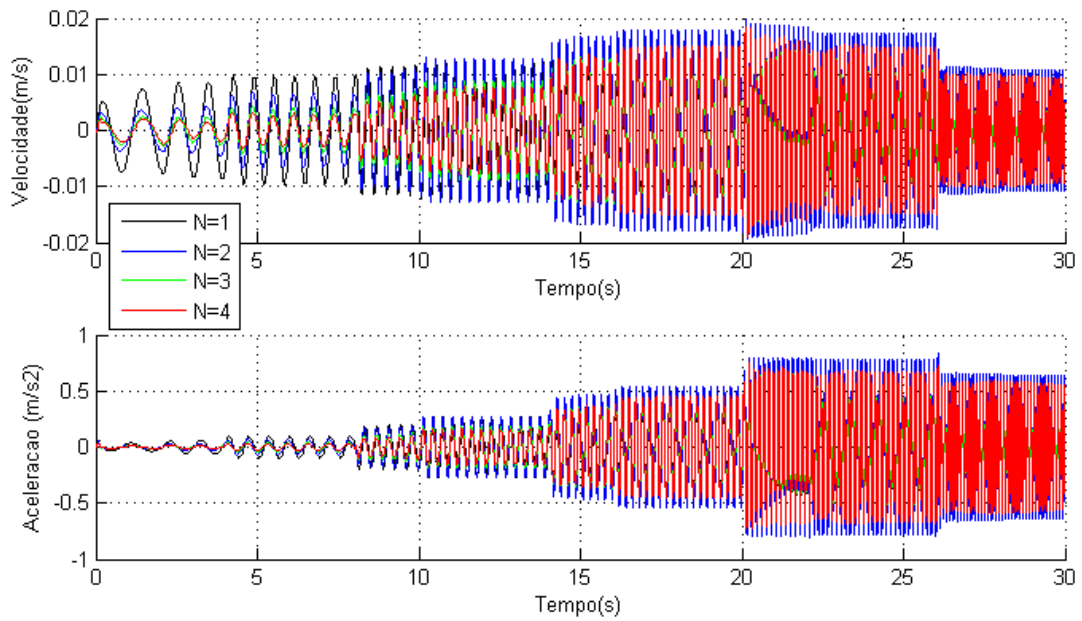
Utilizando os mesmo parâmetros do primeiro sistema controlado na Seção 5.3.1, sendo  $\alpha = 0,01$  e  $\omega_c = 0,5rad/s$  será realizada a Simulação 2. São apresentados a saída  $y_3(t)$  e o sinal de controle na Figura 26 e a velocidade e aceleração do chassi na Figura 27.

Figura 26: Saída  $y_3(t)$  e sinal de controle para a Simulação 2.



Fonte: o autor.

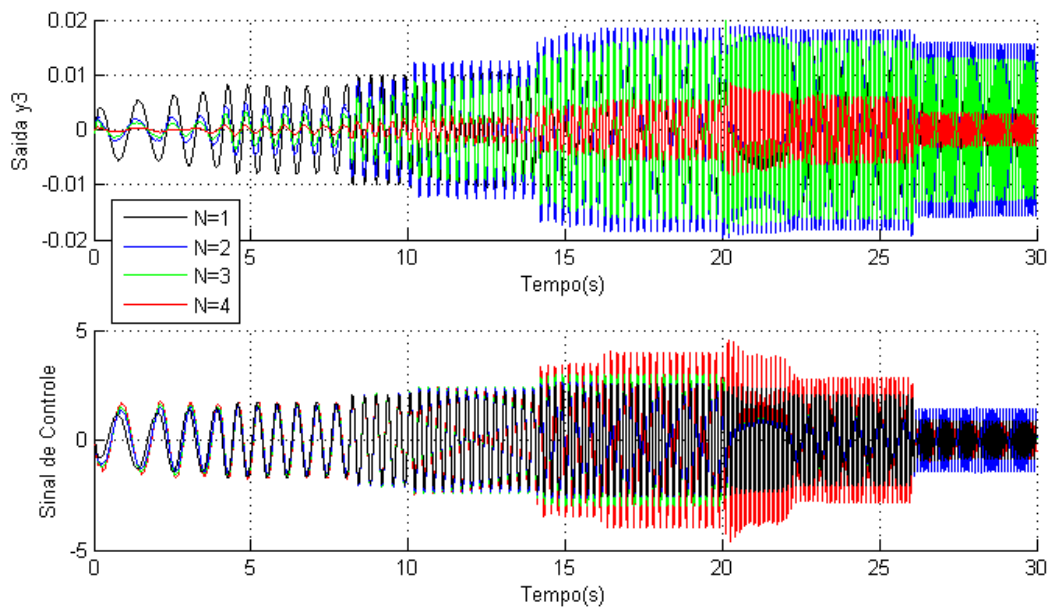
Figura 27: Velocidade e aceleração do chassi para a Simulação 2.



Fonte: o autor.

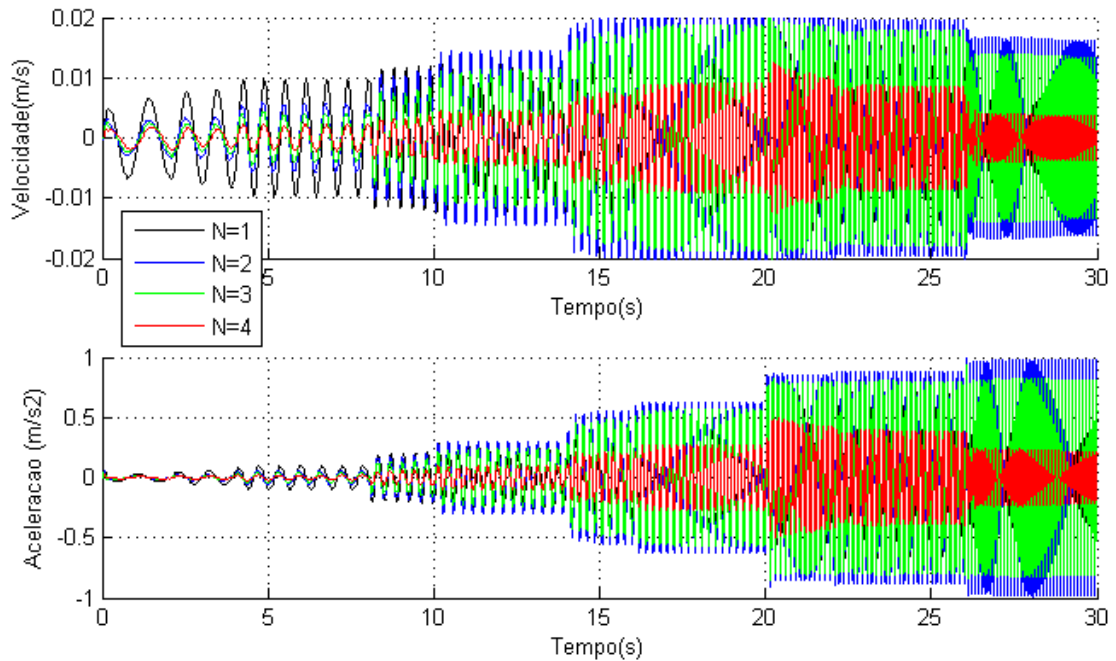
Para a próxima Simulação 3, será aumentado a taxa de decaimento  $\alpha$  em uma ordem de grandeza, para 0,1, mantendo a frequência de corte  $\omega_c$  em 0,5rad/s. Os resultados são apresentados nos mesmo formatos, nas Figura 28 e Figura 29.

Figura 28: Saída  $y_3(t)$  e sinal de controle para a Simulação 3.



Fonte: o autor.

Figura 29: Velocidade e aceleração do chassi a Simulação 3.

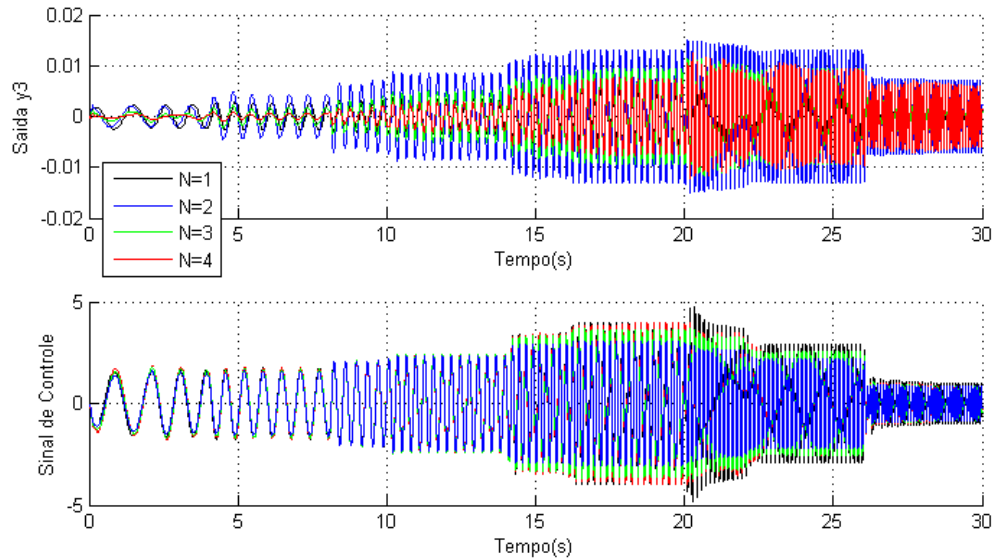


Fonte: o autor.

A partir do aumento de  $\alpha$  em 10 vezes, percebe-se que o HORC de quarta ordem teve a melhora mais significativa entre os controladores, atenuando aproximadamente duas vezes mais, com um aumento no sinal de controle de aproximadamente 50%. Para as outras ordens, o controlador apresentou nas simulações pior desempenho, principalmente em altas frequências. Para quando a perturbação tem frequência de 60rad/s, em comparação com a frequência de 45rad/s, a aceleração no HORC de segunda ordem é maior, enquanto no de quarta ordem é menor, e no de ordem 3 é de mesmo módulo, estando no limiar desta troca entre as duas frequências de operação.

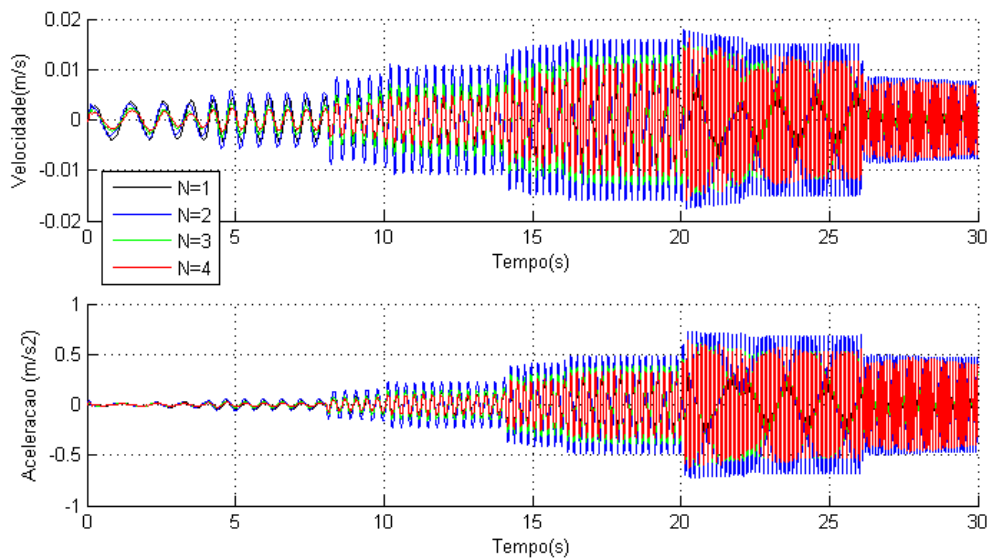
Será agora variada a frequência de corte, mantendo a taxa de decaimento. Os parâmetros para Simulação 4 serão, portanto,  $\alpha = 0,1$  e  $\omega_c = 1rad/s$ . As simulações estão apresentadas nas Figura 30 e Figura 31, mostrando respectivamente o sinal de saída  $y_3(t)$  e o sinal de controle, e a velocidade e aceleração.

Figura 30: Saída  $y_3(t)$  e sinal de controle para a Simulação 4



Fonte: o autor.

Figura 31: Velocidade e aceleração do chassi para a Simulação 4.

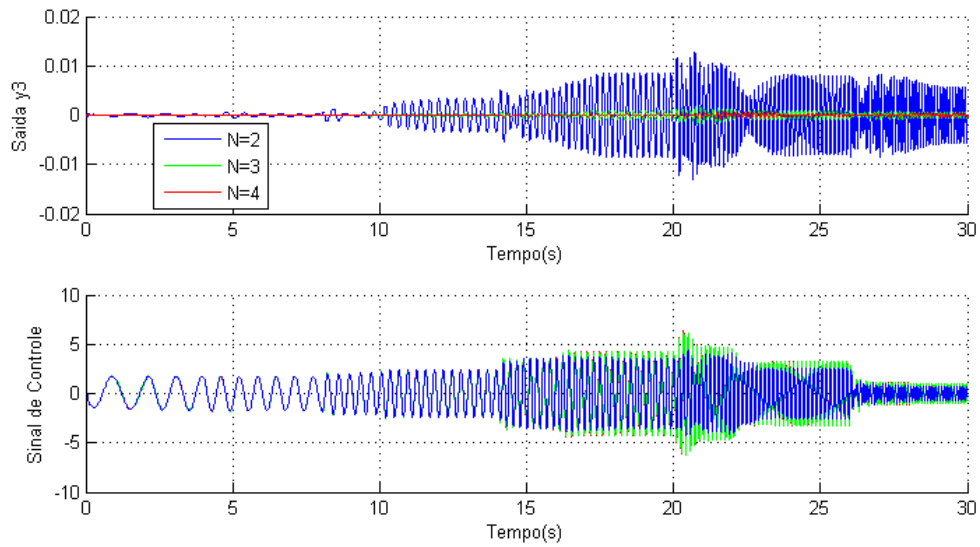


Fonte: o autor.

Com o aumento de  $\omega_c$ , percebe-se uma melhora nos controladores de ordem 2 e 3, principalmente no que diz respeito às altas frequências. O controlador de ordem 4 não sofreu alterações relevantes.

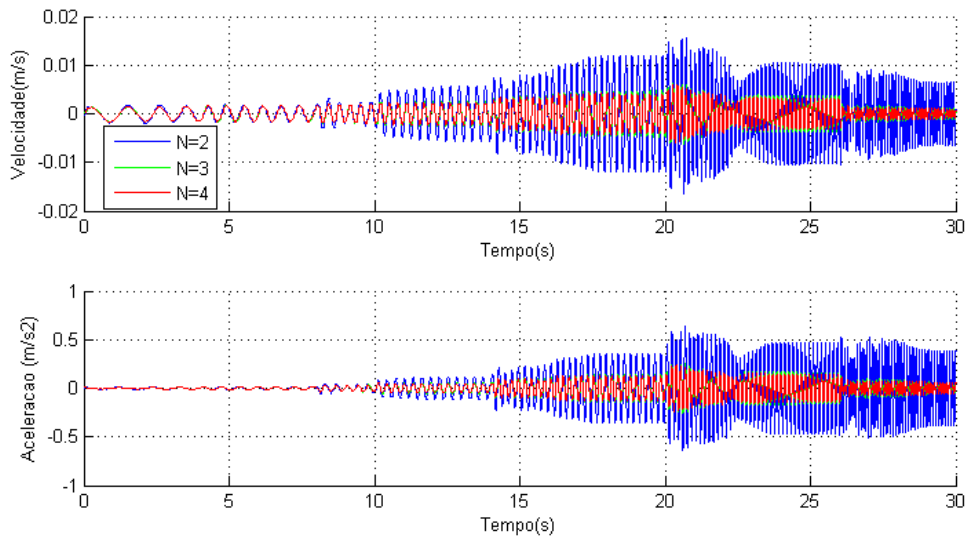
A última simulação será realizada aumentando a frequência de corte em dez vezes. Os parâmetros para a Simulação 5 serão, portanto,  $\alpha = 0,1$  e  $\omega_c = 10\text{rad/s}$ , que está apresentada nas Figura 32 e Figura 33.

Figura 32: Saída  $y_3(t)$  e sinal de controle para a Simulação 5.



Fonte: o autor.

Figura 33: Velocidade e aceleração do chassi para a Simulação 5.



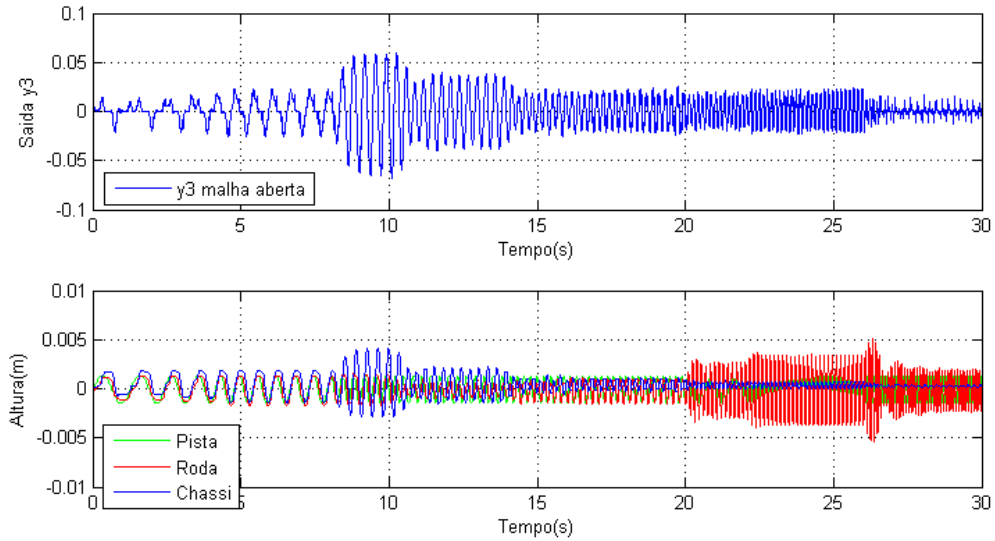
Fonte: o autor.

Ao aumentar a frequência de corte em uma ordem de grandeza, observa-se uma melhora na saída controlada para os HARC de ordens 2, 3 e 4. Entretanto, percebe-se que nos de ordens 2 e 3 a saída  $y_3(t)$  e a velocidade da placa do chassi passam a não ter resultados tão próximos quanto anteriormente, ocasionado pela maior participação numérica do primeiro estado.

## 5.4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

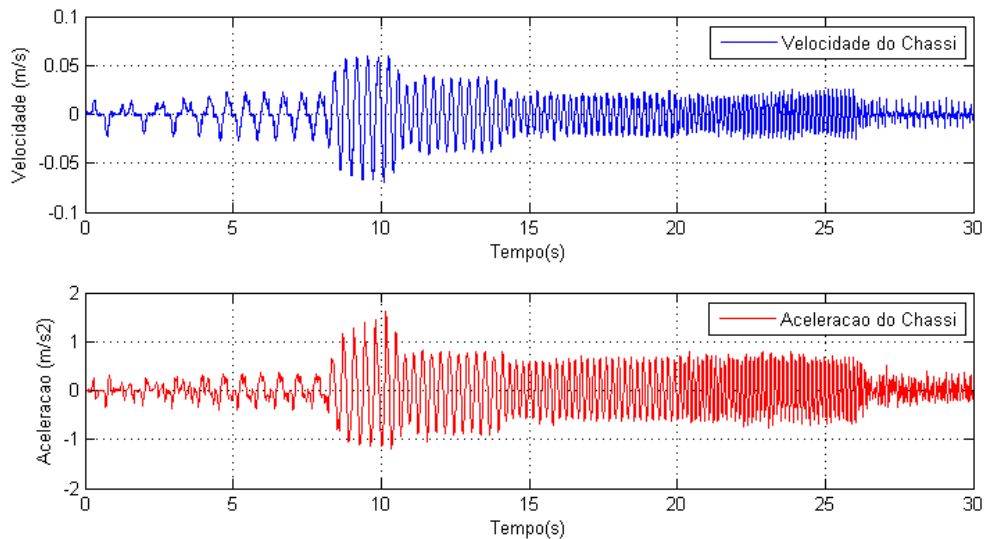
Para as simulações da Seção 5.3.2, que consideram o sinal  $p_2(t)$  como perturbação, serão agora realizados ensaios na planta didática da Quanser. O primeiro ensaio será realizado com o sistema em malha aberta, apresentado nas Figura 34 e Figura 35.

Figura 34: Saída  $y_3(t)$  e sinal de controle para ensaio em malha aberta.



Fonte: o autor.

Figura 35: Velocidade e aceleração do chassi para ensaio em malha aberta.

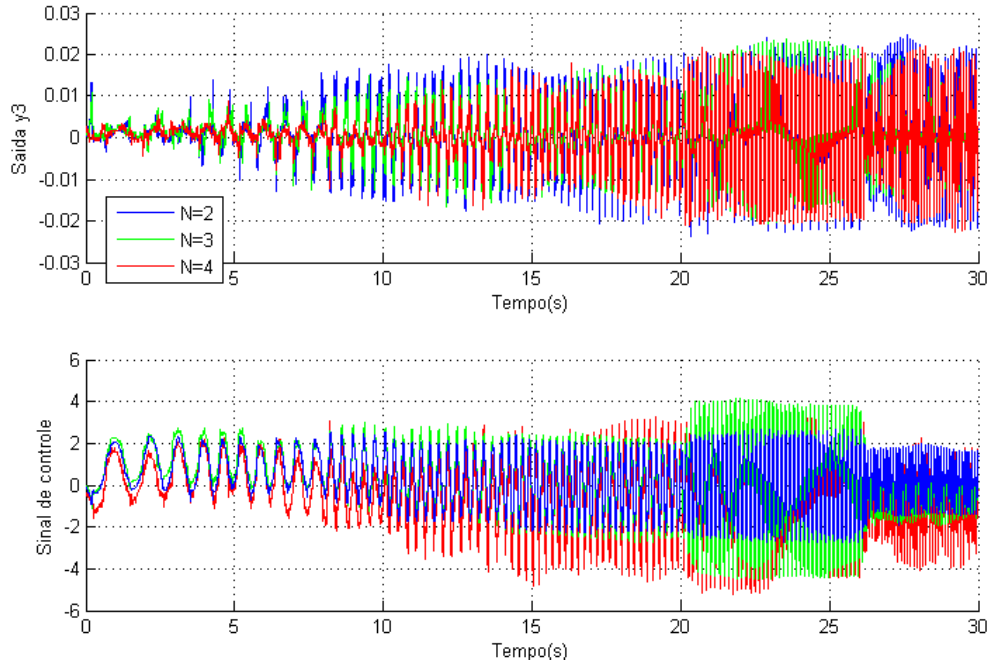


Fonte: o autor.

Percebe-se que no ensaio de malha aberta as placas sofreram maior perturbação que no simulado, especialmente em altas frequências.

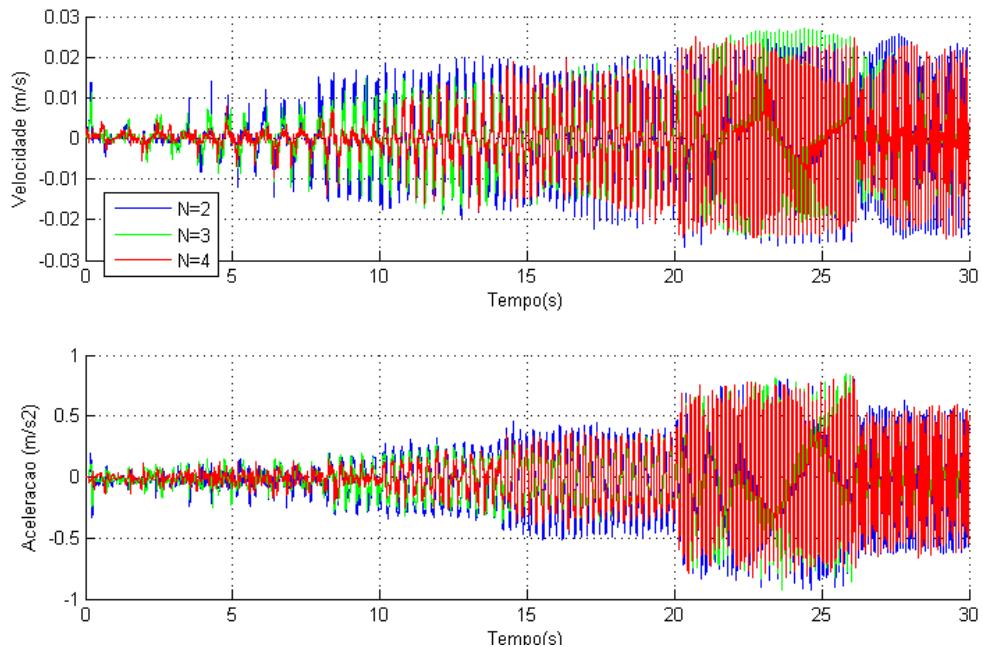
O Ensaio 2 será realizado com os parâmetros  $\alpha=0,01$  e  $\omega_c = 0,5\text{rad/s}$ , os resultados constam nas Figura 36 e Figura 37.

Figura 36: Saída  $y_3(t)$  e sinal de controle para o Ensaio 2.



Fonte: o autor.

Figura 37: Velocidade e aceleração do chassi para Ensaio 2.



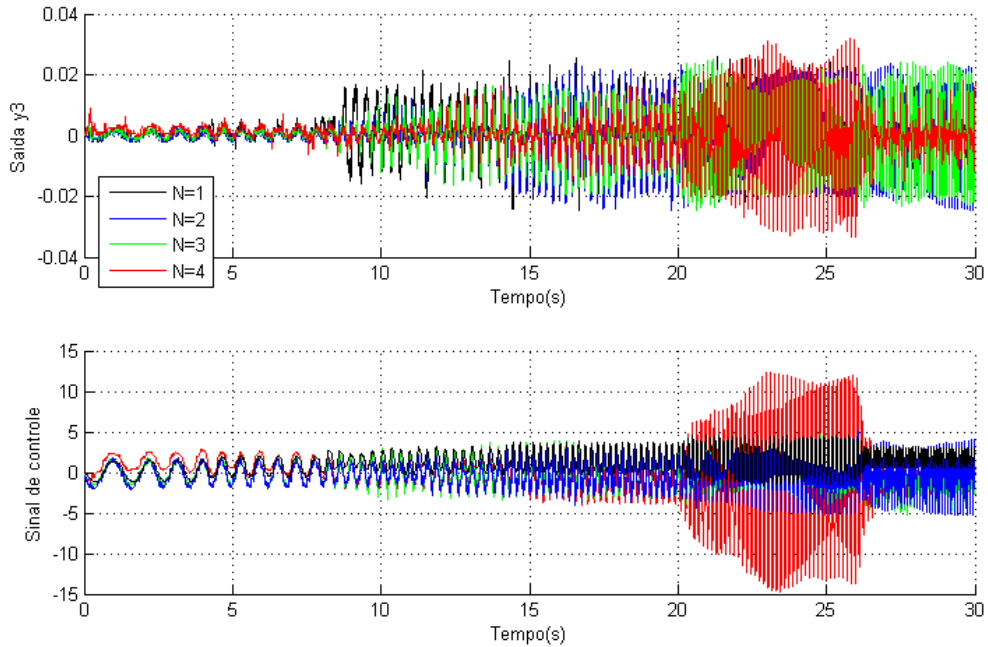
Fonte: o autor.

A simulação e o ensaio apresentaram resultados muito mais próximos que no que ensaio de malha aberta. A maior disparidade foi no sinal de controle, em mais altas frequências. A perturbação, em comparação à malha fechada, foi duas vezes mais baixa.



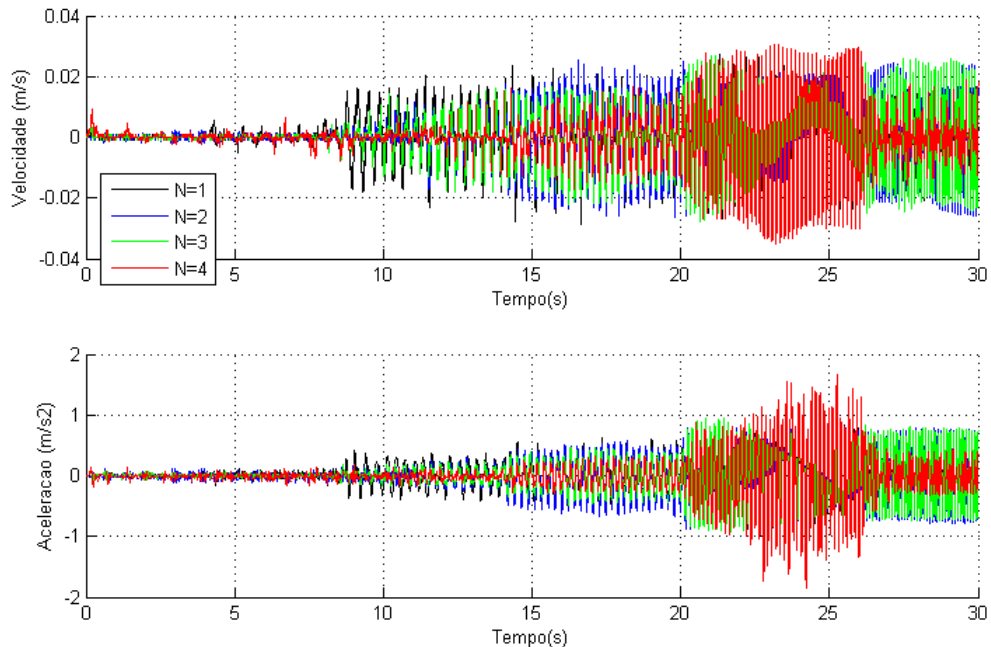
O Ensaio 3 será realizado com os parâmetros  $\alpha=0,1$  e  $\omega_c = 0,5\text{rad/s}$ , os resultados constam nas Figura 38 e Figura 39.

Figura 38: Saída  $y_3(t)$  e sinal de controle para o Ensaio 3.



Fonte: o autor.

Figura 39: Velocidade e aceleração do chassi para Ensaio 3.

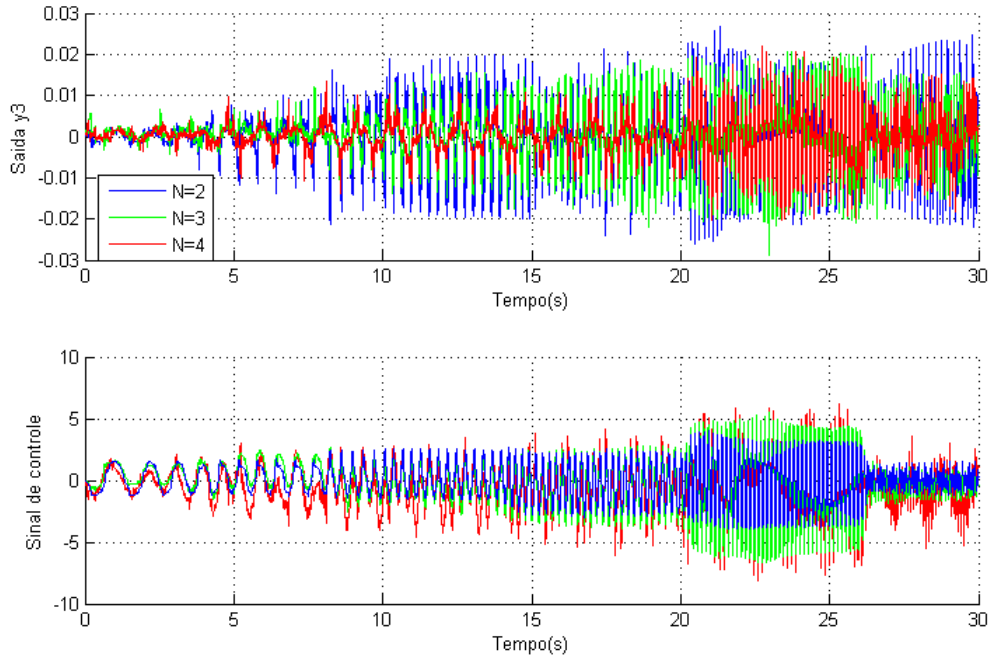


Fonte: o autor.

O maior efeito no aumento da taxa de decaimento pode ser verificado no HOCR de ordem 4. Entretanto, na frequência de  $45\text{rad/s}$ , o desempenho foi pior que nos controladores de demais ordens.

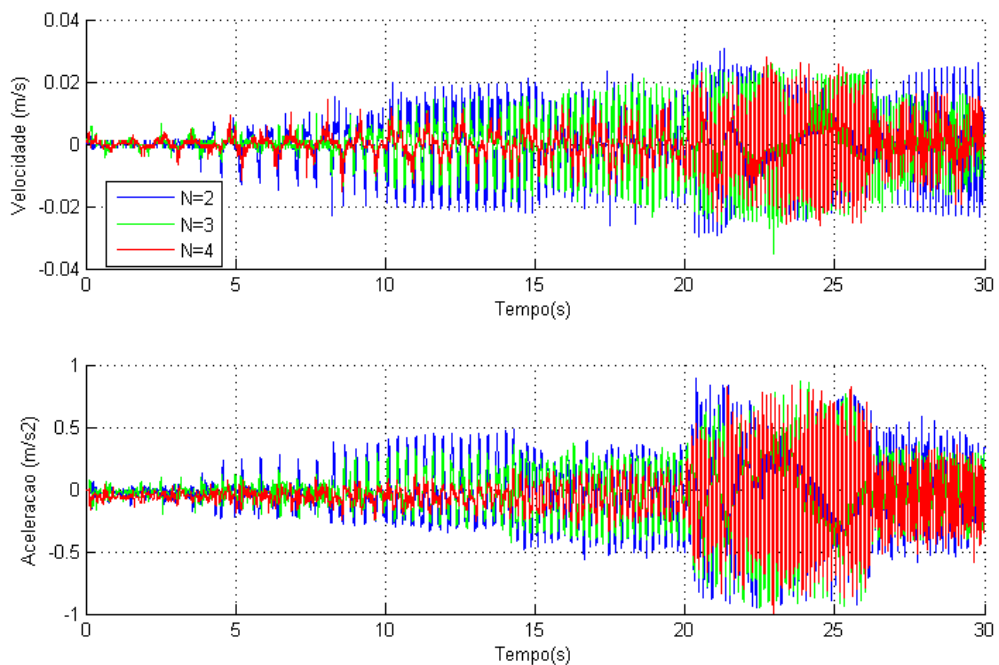
O Ensaio 4 será realizado com os parâmetros  $\alpha=0,1$  e  $\omega_c = 1\text{rad/s}$ , os resultados constam nas Figura 40 e Figura 41.

Figura 40: Saída  $y_3(t)$  e sinal de controle para o Ensaio 4.



Fonte: o autor.

Figura 41: Velocidade e aceleração do chassi para Ensaio 4.

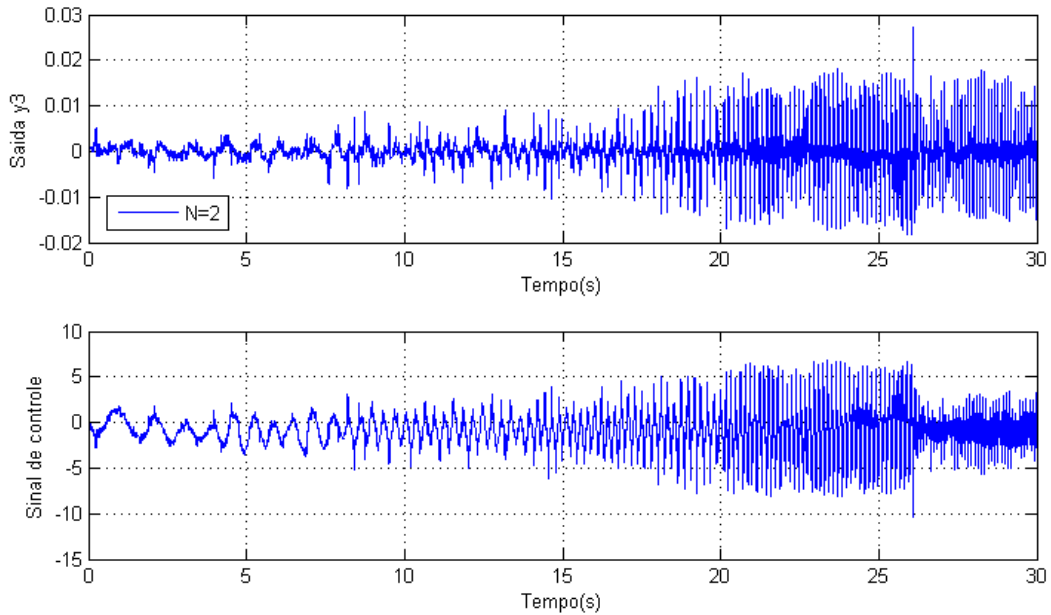


Fonte: o autor.

O HORC de segunda ordem teve um pior desempenho no ensaio, do que na simulação, para parâmetros  $\alpha=0,1$  e  $\omega_c = 1\text{rad/s}$ .

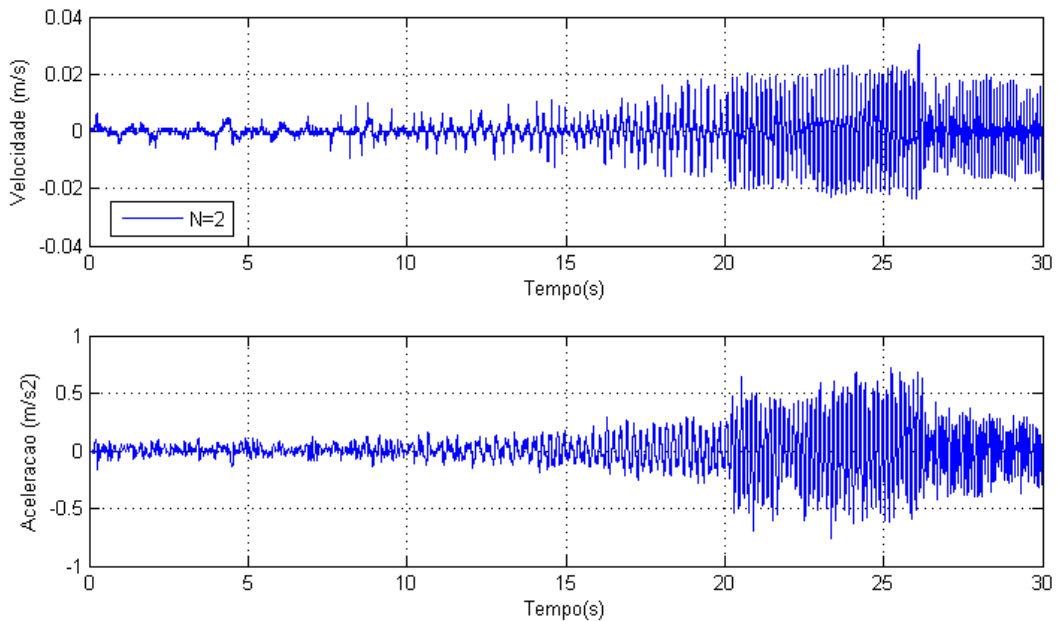
O Ensaio 5 será realizado com os parâmetros  $\alpha=0,1$  e  $\omega_c = 10\text{rad/s}$ , contudo, apenas o HORC de ordem 2 obteve resultados sem saturação mecânica das placas. Os resultados constam nas Figura 42 e Figura 43.

Figura 42: Saída  $y_3(t)$  e sinal de controle para o Ensaio 5.



Fonte: o autor.

Figura 43: Velocidade e aceleração do chassi para Ensaio 5.



Fonte: o autor.

O desempenho do HORC de ordem 2 para os parâmetros  $\alpha=0,1$  e  $\omega_c = 10\text{rad/s}$  foram muito próximos do de ordem 4 para parâmetros  $\alpha=0,1$  e  $\omega_c = 1\text{rad/s}$ , mas com maior sinal de controle.

## 5.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Comparando a Simulação 2 com o Ensaio 2, nota-se que o sinal de controle apresentou valores maiores nos ensaios principalmente em altas frequências. Para a saída  $y_3(t)$  e a velocidade, que para estes parâmetros são quase idênticos, ficaram na simulação abaixo de 0,02m/s, mas nos ensaios próximo de 0,025m/s. A aceleração, apesar de ser matematicamente atrelada à velocidade, apresentou resultados muito fiéis às simulações.

No Ensaio 3, o HORC que mais percebe-se mudanças é no de ordem 4, assim como tinha sido visto nas simulações. Contudo, para a frequência de 45rad/s, o controlador apresentou valores mais elevados em todas as medições de quarta ordem. Nas demais faixas, os resultados foram como previstos em simulação

No Ensaio 4, o HORC de ordem 2 teve resultados menos comportados que na Simulação 4, tendo valores mais elevados na maior parte das frequências, à exceção de 30rad/s, que para todas as ordens teve uma atenuação melhor do que o que era esperado.

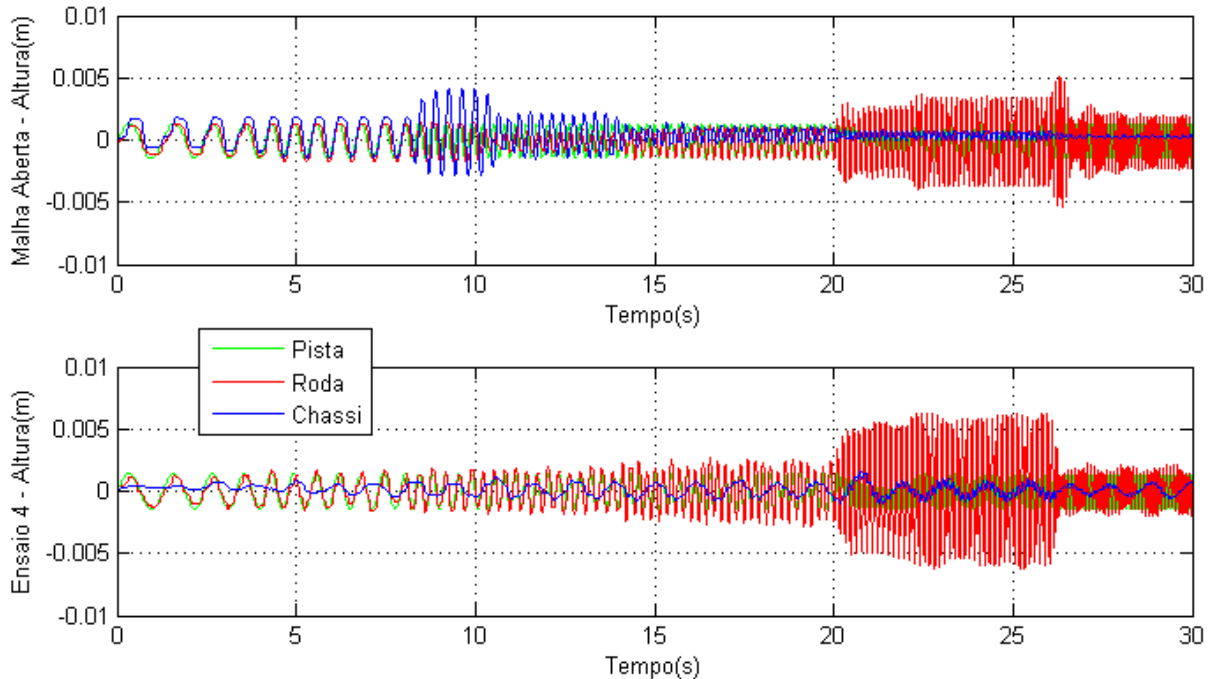
No último ensaio, há novamente a maior disparidade entre a simulação e o prático na frequência de 45rad/s. Para as demais frequências, os resultados foram fiéis à simulação.

Percebe-se que há sistematicamente uma maior infidelidade nos resultados na frequência de 45rad/s. Todavia, embora tenha sido realizado um ajuste nos parâmetros do modelo da planta da Quanser, na Seção 4.3, pode ser visto na Figura 14 que o modelo não representa perfeitamente a planta real, tendo a sua maior diferença nas frequências próximas de 50rad/s. A saída controlada apresentou melhoras ao serem aumentados os parâmetros  $\alpha$  e  $\omega_c$ , sendo conseqüentemente o sinal de controle também aumentado. Ao aumentar a taxa de decaimento em dez vezes, o controlador que mais foi afetado foi o de quarta ordem, enquanto nos demais não sofreram mudanças significativas. Já a alteração na frequência de corte fez com que os controladores de ordens 2, 3 e 4 tivessem melhor desempenho. O HORC de ordem 2 do Ensaio 5 apresentou uma atenuação muito próxima do HORC de ordem 4 do Ensaio 4, mas com um sinal de controle mais elevado.

Na Figura 44 são mostradas as posições das placas para o Ensaio 1 em malha aberta, e o Ensaio 4 para o controlador de quarta ordem. Em baixas frequências é imperceptível a movimentação do chassi, enquanto em altas frequências, apesar de o deslocamento absoluto

ser maior em relação à referência, a aceleração é significativamente mais baixa, como já verificado nos gráficos de aceleração.

Figura 44: Posição das placas para o Ensaio 1 e Ensaio 4 de quarta ordem.

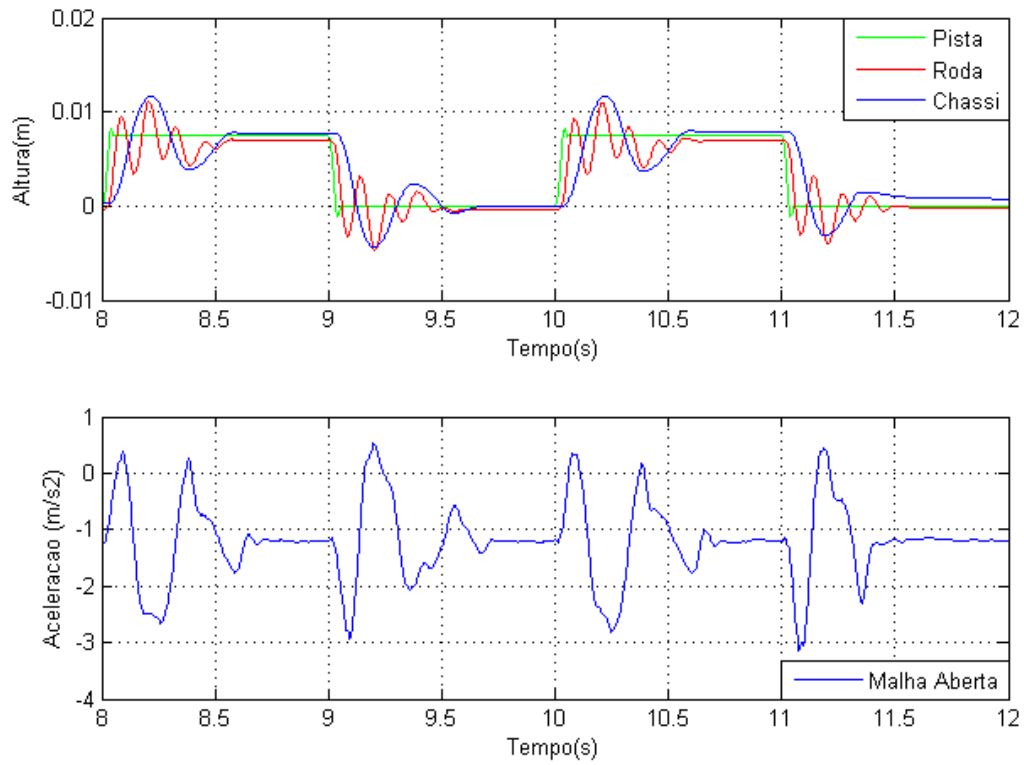


Fonte: o autor.

O que o passageiro sente, quando se tratando de conforto, é a aceleração vertical do chassi, pois isto é o que provoca impacto no contato entre os corpos. Neste quesito, foram observadas melhoras ao passo que o controlador teve parâmetros de mais alta magnitude, aumentando consequentemente o sinal de controle. Por limitações numéricas do Matlab e Simulink, assim como limites mecânicos das placas, não foi possível realizar ensaios com parâmetros ainda maiores.

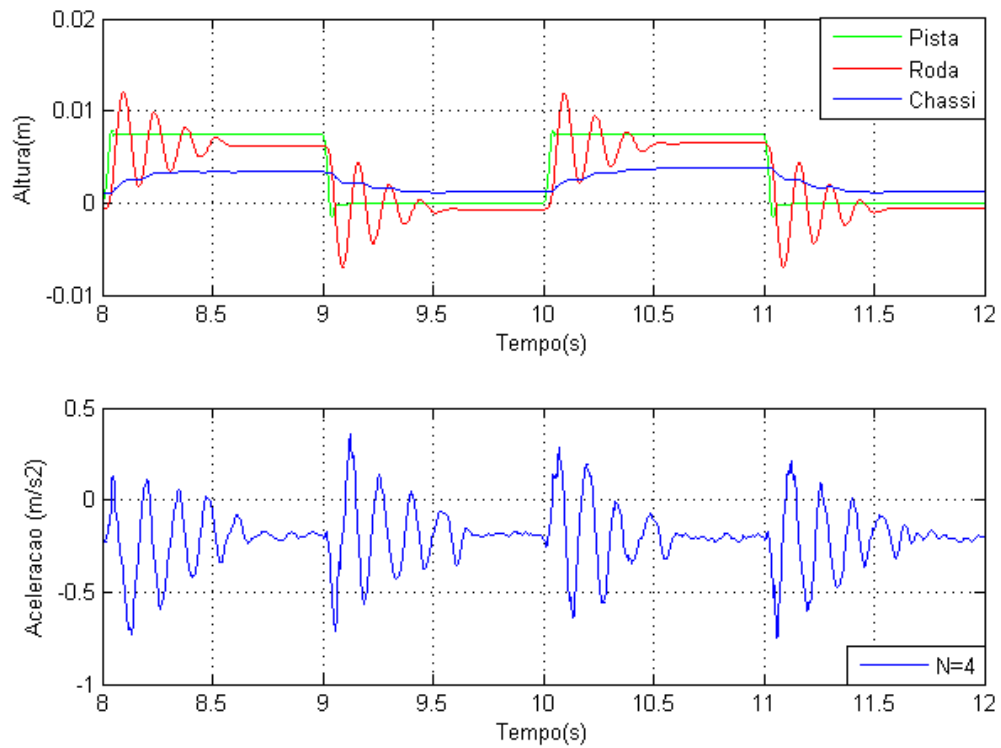
Sem o objetivo de uma análise mais profunda, mas apenas para mostrar como o sistema responde a uma perturbação do tipo degrau, será agora apresentado ensaios com uma perturbação que é uma onda quadrada de amplitude 0,075m. Na Figura 45 é mostrado o ensaio em malha aberta e na Figura 46 com o HORC de ordem 4, com parâmetros  $\alpha=0,1$  e  $\omega_c = 0,5rad/s$ . A aceleração do chassi diminui perto de 4 vezes, que pode também ser verificado na posição das placas, com um transitório bem menos oscilatórios.

Figura 45: Resposta à onda quadrada em malha aberta.



Fonte: o autor.

Figura 46: Resposta à onda quadrada com HORC de ordem 4.



Fonte: o autor.

## 6 CONCLUSÃO

No estudo aqui realizado foi aplicado o Controlador Repetitivo de Alta Ordem em uma planta didática de suspensão ativa, validando a sua eficiência em rejeição de sinais periódicos.

Ao longo do trabalho, foi investigado o funcionamento destes controladores que utilizam um elemento de atraso em um laço de realimentação positiva, desde a sua forma mais tradicional até os de ordens 2, 3 e 4. A planta de suspensão ativa foi então modelada, e uma nova saída estabelecida, pois as fornecidas pela Quanser não eram adequadas, ou apresentavam empecilhos numéricos na resolução. Contudo, a saída controlada não era de fato a variável de interesse, apesar de estar em sua composição. Simulações foram então realizadas, para diferentes parâmetros de controle, comparados e validado que a perturbação foi atenuada. A aceleração da placa que representa o chassi foi conseqüentemente também atenuada, mas, por ter sido de forma indireta, a atenuação apresentou, nas simulações, resultados não tão bons quanto a saída controlada. Posteriormente, os ensaios foram realizados, com os mesmos parâmetros das simulações, buscando validar o que tinha sido visto computacionalmente. Os resultados mostram semelhanças em seus formatos, sendo o pico das oscilações majoritariamente acima do que previsto em simulação. Isto se deve ao fato de o modelo não representar perfeitamente a planta didática, como foi visto ao ser realizado o ajuste nos parâmetros.

No caso do controlador, foi visto como os parâmetros Taxa de Decaimento  $\alpha$ , Frequência de Corte  $\omega_c$  e Ordem N influem no cálculo dos ganhos, que, por sua vez, passam a ter melhor desempenho na função de rejeição à perturbação. Em teoria, foi visto que os controladores ao terem ordens mais altas passam a ser capazes de atenuar os sinais por um espectro de frequência mais alargado, e isto foi verificado nas simulações. Nos ensaios, um controlador de ordem mais alta resultou sempre em uma melhor rejeição à perturbação, ao custo de um sinal de controle também mais elevado. A taxa de decaimento, ao ser aumentada, impactou mais o controlador de quarta ordem. Para a frequência de corte do Filtro Q(s), o seu aumento se mostrou mais significativo para os controladores de ordens 2 e 3. Infelizmente não foi possível realizar os ensaios com parâmetros mais altos, pela limitação mecânica das placas da planta.

Foi ainda realizado um ensaio com uma entrada do tipo onda quadrada de baixa frequência, que simulava diversos saltos. Não foi analisada como se comportaria à variação dos parâmetros do controlador, mas foi possível perceber que houve uma redução de aproximadamente 70% na aceleração sofrida pelo chassi. De fato, pelo princípio do modelo interno apresentado, há um polo na origem, o que justifica a rejeição ao salto.

O estudo foi importante para validar este tipo de controlador no contexto de suspensão ativa, pois esta faz parte da cadeia de construção de automóveis, cujo mercado é de uma grandeza incontestável. O controle foi realizado de uma forma indireta, e já assim apresentou resultados positivos. Sugere-se que para próximas pesquisas, seja encontrada uma maneira de controlar ou a velocidade do chassi, ou diretamente a aceleração. Para a última, maiores mudanças na formulação das LMIs serão necessárias, mas controlaria diretamente a variável de interesse. Uma outra possível abordagem seria condicionar o período do atraso  $\tau$  ao período da perturbação, sendo portanto o elemento de atraso variável no tempo.



## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BENNET, S. A Brief History of Automatic Control. *IEEE Control Systems*, jun. 1996.
- [2] IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL. Control & Control History. Disponível em <https://www3.nd.edu/~ieeetac/history.html>. Acesso em out. 2014.
- [3] FLORES, J. V.; SALTON, A. T.; CASTRO, R.S. Robust State Feedback Formulation for High Order Repetitive Controllers. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, a ser publicado.
- [4] OICA. Economic Facts: Automotive Industry and Economy. Disponível em <http://www.oica.net/category/economic-contributions/facts-and-figures/>. Acesso em out. 2014.
- [5] STATISTA. Revenue of the leading car manufacturers worldwide in FY 2013 (in billion U.S. dollars). Disponível em <http://www.statista.com/statistics/232958/revenue-of-the-leading-car-manufacturers-worldwide/>. Acesso em out. 2014.
- [6] MARKETS AND MARKETS. Automotive Suspension Systems Market by Vehicle Type (Passenger Car, LCV & HCV), System Type (Passive & Semi-Active/Active), Damping Type (Hydraulic & Electromagnetic) & Geography - Industry Trends & Forecast to 2018. Disponível em <http://www.marketsandmarkets.com/Market-Reports/automobile-suspension-systems-market-939.html>. Acesso em out. 2014.
- [7] CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. 3<sup>a</sup> edição. New York: Oxford University Press, 1999.
- [8] FRANCIS, B. A.; WONHAM, W. M. The internal model principle of control theory. *Elsevier Ltd*, 1 oct. 1995.
- [9] INOUE, T.; NAKANO, M.; IWAI, S. High accuracy control of servomechanism for repeated contouring. *Incremental Motion Control Systems Soc*, Champaign, 1981.
- [10] HARA, S. et al. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 7, p. 659-668, 1988.

[11] STEINBUCH, M. Repetitive control for systems with uncertain period-time. *Automatica*, v. 38, n. 12, p. 2103-2109, dez. 2002.

[12] YAMAMOTO, T.; HARA, S. Relationships between internal and external stability for infinite-dimensional systems with applications to a servo problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 11, p. 1044-1052, nov.1988.

[13] LOFBERG, J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, p. 284-289, set. 2004.

[14] QUANSER. Quanser History. Disponível em <http://www.quanser.com/history>. Acesso em set. 2014.

[15] QUANSER. *Active Suspension LQG Control using QUARC: Instructor Manual*, Document Number 845.

[16] QUANSER. *Active Suspension System: User Manual*, Document Number 847.

## APÊNDICE A

$\alpha$	$\omega_c$	N	$K_{G1}$	$K_{G2}$	$K_{G3}$	$K_{G4}$	$K_C$
0.01	1	1	1.08E+03	-9.03E+00	2.43E+01	5.21E+00	5.49E+00
		2	1.06E+03	-3.40E+01	1.25E+02	5.11E+00	3.27E+01
		3	9.98E+02	-1.03E+02	6.76E+02	1.59E+01	9.91E+01
		4	9.89E+02	-1.08E+02	7.11E+01	2.98E-01	1.09E+02
	10	1	1.05E+03	-4.20E+01	9.63E+01	2.55E+00	4.33E+01
		2	7.49E+02	-3.50E+02	1.08E+03	7.66E+00	3.38E+02
		3	6.48E+02	-4.50E+02	6.77E+01	-1.74E+00	4.46E+02
		4	-1.01E+03	-2.11E+03	8.33E+01	-2.20E+00	2.10E+03
	100	1	-3.76E+02	-1.47E+03	1.90E+02	5.31E-01	1.63E+03
		2	-3.27E+03	-4.37E+03	6.28E+01	-1.33E+00	4.40E+03
		3	-9.92E+03	-1.10E+04	3.10E+01	-1.71E+00	1.10E+04
		4	-1.77E+04	-1.88E+04	1.40E+01	-1.95E+00	1.88E+04
0.1	1	1	1.08E+03	-9.52E+00	4.75E+00	3.59E+00	6.71E+00
		2	1.05E+03	-5.18E+01	4.67E+02	1.47E+01	4.71E+01
		3	1.02E+03	-7.97E+01	3.39E+02	8.68E+00	7.83E+01
		4	8.07E+02	-2.93E+02	9.13E+02	1.07E+01	2.90E+02
	10	1	1.05E+03	-4.40E+01	7.44E+01	1.57E+00	4.55E+01
		2	7.48E+02	-3.51E+02	9.09E+02	4.76E+00	3.42E+02
		3	5.66E+02	-5.31E+02	6.66E+01	-1.82E+00	5.27E+02
		4	-1.57E+03	-2.67E+03	8.33E+01	-2.24E+00	2.66E+03
	100	1	-6.09E+02	-1.71E+03	1.98E+02	6.03E-01	1.87E+03
		2	-1.04E+04	-1.15E+04	1.83E+02	-3.89E-01	1.16E+04
		3	-1.27E+04	-1.38E+04	3.23E+01	-1.70E+00	1.38E+04
		4	-2.23E+04	-2.34E+04	1.42E+01	-1.92E+00	2.34E+04
0.5	1	1	9.88E+02	-1.16E+02	1.63E+03	3.95E+01	9.58E+01
		2	1.04E+03	-6.17E+01	9.24E+01	2.25E+00	6.13E+01
		3	8.98E+02	-2.01E+02	2.89E+02	2.42E+00	2.00E+02
		4	3.44E+02	-7.55E+02	1.14E+02	-1.73E+00	7.54E+02
	10	1	1.04E+03	-5.98E+01	4.49E+01	-2.75E-01	5.94E+01
		2	8.60E+02	-2.38E+02	7.93E+01	-1.43E+00	2.36E+02
		3	-2.75E+02	-1.37E+03	8.68E+01	-2.20E+00	1.37E+03
		4	-1.04E+04	-1.15E+04	2.31E+02	-3.55E+00	1.15E+04
	100	1	1.04E+03	-5.98E+01	4.49E+01	-2.75E-01	5.94E+01
		2	8.60E+02	-2.38E+02	7.93E+01	-1.43E+00	2.36E+02
		3	-2.75E+02	-1.37E+03	8.68E+01	-2.20E+00	1.37E+03
		4	-1.04E+04	-1.15E+04	2.31E+02	-3.55E+00	1.15E+04