

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS
INCOMPRESSÍVEIS ATRAVÉS DA ANÁLISE
ISOGOMÉTRICA**

Patrícia Tonon

Porto Alegre
2016

PATRÍCIA TONON

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS
INCOMPRESSÍVEIS ATRAVÉS DA ANÁLISE
ISOGOMÉTRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em
Engenharia

Porto Alegre

Ano 2016

Tonon, Patrícia

Simulação Numérica de Escoamentos Incompressíveis através da Análise Isogeométrica / Patrícia Tonon. -- 2016.

124 f.

Orientador: Alexandre Luis Braun.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2016.

1. Dinâmica dos Fluidos Computacional. 2. Análise Isogeométrica. 3. Funções NURBS. 4. Escoamentos Incompressíveis. I. Braun, Alexandre Luis, orient. II. Título.

PATRÍCIA TONON

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS
INCOMPRESSÍVEIS ATRAVÉS DA ANÁLISE
ISOGEOMÉTRICA**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, área de estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 06 de abril de 2016

Prof. Alexandre Luis Braun
Dr. pelo PPGEC/UFRGS
orientador

Prof. Carlos Torres Formoso
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Adriane Prisco Petry (PROMEC/UFRGS)
Dra. pelo PROMEC/UFRGS

Prof. Álvaro Luiz de Bortoli (PPGMAp/UFRGS)
Dr. pelo POSMEC/UFSC

Prof. Inácio Benvegnu Morsch (PPGEC/UFRGS)
Dr. pelo PPGEC/UFRGS

Aos meus amados pais: *Marizete e Léo Tonon.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente ao meu orientador Prof. Alexandre Luis Braun, por sua inestimável contribuição na realização desse trabalho e em minha formação acadêmica.

Agradeço especialmente ao meu namorado Julián Camilo, por acreditar e fazer com que eu acreditasse também em mim mesma.

Agradeço a minha família: meus pais, Marizete e Léo, e meus irmãos, Fernando e Gabriela, por estarem sempre presentes me incentivando a seguir em frente.

Agradeço aos amigos que conquistei no mestrado pelo apoio e pela companhia ao longo dessa caminhada.

Agradeço ao CNPQ e CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual essa pesquisa não teria sido possível.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço a Deus, por me conceder os dons necessários para a concretização desse trabalho.

“Não sei o que posso parecer aos olhos do mundo, mas aos meus pareço apenas ter sido como um menino brincando à beira-mar, divertindo-me com o fato de encontrar de vez em quando um seixo mais liso ou uma concha mais bonita que o normal, enquanto o grande oceano da verdade permanece completamente por descobrir à minha frente”

Isaac Newton

RESUMO

TONON, P. Simulação Numérica de escoamentos Incompressíveis através da Análise Isogeométrica. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma formulação numérica baseada em Análise Isogeométrica para o estudo de escoamentos incompressíveis isotérmicos de fluidos newtonianos. Com o emprego desta metodologia, os procedimentos de pré-processamento e análise são unificados, melhorando as condições de continuidade das funções de base empregadas tanto na discretização espacial do problema como na aproximação das variáveis do sistema de equações. O sistema de equações fundamentais do escoamento é formado pelas equações de Navier-Stokes e pela equação de conservação de massa, descrita segundo a hipótese de pseudo-compressibilidade, além de uma equação constitutiva para fluidos viscosos de acordo com a hipótese de Stokes. Para problemas com escoamentos turbulentos emprega-se a Simulação de Grandes Escalas - LES (Large Eddy Simulation), na qual o modelo clássico de Smagorinsky é utilizado para a representação das escalas inferiores à resolução da malha. O esquema explícito de dois passos de Taylor-Galerkin é aplicado no contexto da Análise Isogeométrica para a discretização das equações governantes, sendo que a discretização espacial é realizada empregando-se funções NURBS (Non Uniform Rational Basis B-Splines). Essas funções base apresentam vantagens em relação às tradicionais funções utilizadas no MEF (Método dos Elementos Finitos), principalmente no que diz respeito à facilidade de obtenção de continuidade superior a C^0 entre os elementos e representação precisa das geometrias. Propõe-se também o desenvolvimento de ferramentas de pré e pós-processamento baseadas na estrutura de dados da Análise Isogeométrica para a geração de malhas e visualização de resultados. Alguns problemas clássicos da Dinâmica dos Fluidos Computacional são analisados para a validação da metodologia apresentada. Os resultados apresentados demonstram boa aproximação da formulação em relação a dados de referência, além de maior versatilidade quanto à discretização espacial dos problemas em comparação com as tradicionais formulações baseadas em elementos finitos.

Palavras-chave: Dinâmica dos fluidos computacional; Análise Isogeométrica; NURBS; Escoamentos incompressíveis.

ABSTRACT

TONON, P. Simulação Numérica de Escoamentos Incompressíveis Através da Análise Isogeométrica. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

This work aims to develop a numerical formulation based on Isogeometric Analysis for the study of incompressible flows of Newtonian fluids under isothermal conditions. By using this methodology, pre-processing and analysis procedures are unified, improving the conditions of continuity of the basis functions utilized in the approximations of the equation variables and spatial discretization of the problem. The system of fundamental equations of the fluid flow is constituted by the Navier-Stokes equations and the mass conservation equation, which is described according to the pseudo-compressibility hypothesis. In addition, a constitutive equation for viscous fluids according to Stokes' hypothesis is also provided. Turbulent flows are analyzed using LES (Large Eddy Simulation), where the Smagorinsky's model is adopted for sub-grid scales. The explicit two-step Taylor-Galerkin method is applied into the context of Isogeometric Analysis for the discretization of the flow equations, where spatial discretization is carried out taking into account Non Uniform Rational Basis B-Splines (NURBS) basis functions. These basis functions have advantages over traditional functions employed in the FEM (Finite Element Method). Particularly, it is easier to obtain continuity order higher than C^0 between adjacent elements and geometry representation is more accurate. Pre and post-processing tools for mesh generation and results visualization are also proposed considering the data structure inherent to Isogeometric Analysis. Some classic problems of Computational Fluid Dynamics are analyzed in order to validate the proposed methodology. Results obtained here show that the present formulation has good approximation when compared with predictions obtained by reference authors. Moreover, Isogeometric Analysis is more versatile than traditional finite element formulations when spatial discretization procedures are considered.

Key-words: Computational Fluid Dynamics; Isogeometric Analysis; NURBS; Incompressible flows.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	ANÁLISE ISOGOMÉTRICA	13
1.2	DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL	18
1.3	OBJETIVOS DO TRABALHO E METODOLOGIA	23
2	ANÁLISE ISOGOMÉTRICA	25
2.1	DEFINIÇÕES GERAIS	25
2.2	FUNÇÕES <i>B-SPLINES</i>	27
2.3	FUNÇÕES NURBS	33
2.4	REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DAS FUNÇÕES NURBS	34
2.5	MÚLTIPLOS MACRO-ELEMENTOS	37
2.5	QUADRATURA GAUSSIANA	38
3	EQUAÇÕES QUE GOVERNAM A DINÂMICA DOS FLUIDOS	40
3.1	EQUAÇÕES GOVERNANTES	40
3.2	HÍPOTESE DA PSEUDO-COMPRESSIBILIDADE	43
3.3	SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS (LES)	43
4	SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO	48
4.1	DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL: MÉTODO EXPLÍCITO DE TAYLOR-GALERKIN DE DOIS PASSOS	48
4.1.1	Equação conservação de quantidade de movimento	49
4.1.2	Equação de Conservação de Massa	51
4.2	DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL: MÉTODO DE BUBNOV-GALERKIN APLICADO A ANÁLISE ISOGOMÉTRICA	52
4.2.1	Equação de Conservação da Quantidade de Movimento e Equação de Conservação de Massa	53
4.3	MATRIZES DE CONECTIVIDADE	56
4.4	CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE	59
4.5	CONDIÇÃO DE CONVERGÊNCIA	59
5	REPRESENTAÇÃO DE GEOMETRIAS A PARTIR DE FUNÇÕES NURBS	61
5.1	REFINAMENTO DE CURVAS, SUPERFÍCIES E SÓLIDOS NURBS POR INSERÇÃO DE NÓS	61
5.2	REFINAMENTO DE CURVAS, SUPERFÍCIES E SÓLIDOS NURBS POR ELEVAÇÃO DE GRAU	64
5.3	CONSTRUÇÃO DAS MALHAS	67
5.3.1	Escoamento sobre um cilindro 2d – 1 macro-elemento	67
5.3.2	Escoamento em cavidade 2d	73

5.3.3	Escoamento sobre cilindro 2d – múltiplos macro-elementos	75
5.3.4	Canal com Degrau – Múltiplos macro-elementos	77
6	ETAPAS DA ANÁLISE	79
6.1	PRÉ-PROCESSAMENTO	79
6.2	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	79
6.3	PÓS-PROCESSAMENTO	80
6.3.1	Suavização dos campos de pressão	81
6.3.2	Obtenção dos Coeficientes Aerodinâmicos	82
7	APLICAÇÕES	84
7.1	ESCOAMENTO LAMINAR EM UMA CAVIDADE 2D	84
7.2	ESCOAMENTO TURBULENTO EM UMA CAVIDADE 2D	90
7.3	ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL EM UM CANAL COM DEGRAU	94
7.4	ESCOAMENTO SOBRE UM CILINDRO 2D	101
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	116
	REFERÊNCIAS	119

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação de uma geometria circular. (baseado em: COTTRELL et al., 2006)	16
Figura 2: Funções de forma Lagrangeanas quadráticas unidimensionais representadas no espaço paramétrico de um elemento.....	26
Figura 3: Definições sobre a Análise Isogeométrica (baseado em: COTTRELL et al., 2009)	27
Figura 4: Funções base <i>B-Splines</i> de grau 0, 1 e 2.	28
Figura 5: Funções base <i>B-spline</i> quadráticas.....	29
Figura 6: Curva <i>B-spline</i> quadrática.....	31
Figura 7: Produto tensorial entre funções <i>B-splines</i> quadráticas.....	32
Figura 8: Malha de pontos de controle e malha física para uma superfície com funções quadráticas (baseado em: COTTRELL et al., 2009).	32
Figura 9: a) transformação dos projetivos pontos de controle B_i^w em pontos de controle B_i b) transformação da projetiva curva <i>B-spline</i> $C^w(\xi)$ em uma curva NURBS $C(\xi)$ (baseado em: COTTRELL et al., 2009).....	35
Figura 10: Funções base na interface de macro-elementos (Fonte: COTTRELL et al., 2009)	38
Figura 11: Mapeamentos do espaço físico para o espaço de quadratura (baseado em: COTTRELL et al., 2009).....	39
Figura 12: Definições do problema: (a) espaço indicial; (b) espaço físico – malha de elementos; (c) espaço físico – malha de pontos de controle.....	57
Figura 13: Funções base <i>B-Splines</i> quadráticas após inserção da coordenada.....	62
Figura 14: Pontos de controle para de uma curva <i>B-Spline</i> quadrática após inserção de coordenada paramétrica.....	63
Figura 15: Rede de pontos de controle que descrevem uma superfície após a inserção de um nó (baseado em: PIEGL and TILLER et al., 1997).	63
Figura 16: Exemplo de elevação de grau. a) Curva cúbica original definida pelo vetor de nós b) o grau da função elevado uma vez (Fonte: PIEGL e TILLER et al., 1997).....	66
Figura 17: Rede de pontos de controle que descrevem uma superfície após a elevação de grau. (baseado em: PIEGL and TILLER et al., 1997).	67
Figura 18: Representação dos pontos de controle para um arco que varre 90°.....	69
Figura 19: Pontos de controle que descrevem a circunferência.	70
Figura 20: Pontos de controle que descrevem o retângulo.....	71
Figura 21: Processo de refinamento.	71
Figura 22: Obtenção da rede de pontos de controle que geram a superfície.	72
Figura 23: Espaço indicial e a representação dos elementos não nulos nesse espaço.	73
Figura 24: Rede de pontos de controle para uma superfície retangular.	75
Figura 25: Espaço indicial e a representação dos elementos não nulos nesse espaço.....	75
Figura 26: Rede de pontos de controle para uma superfície retangular vazada por uma circunferência em seu interior – Múltiplos macro-elementos.	77
Figura 27: Espaços indicial e representação dos elementos não nulos – Múltiplos macro-elementos.....	77
Figura 28: Rede de pontos de controle para um canal com degrau – Múltiplos macro-elementos.....	78
Figura 29: Espaços indicial e representação dos elementos não nulos – Múltiplos macro-elementos.....	78
Figura 30: Coeficientes aerodinâmicos em um escoamento (baseado em: BRAUN, 2007)....	82
Figura 31: Características geométricas do problema e condições de contorno.....	84
Figura 32: Perfil de velocidade V1 Re 100.	86

Figura 33: Perfil de velocidade V2 Re 100.	86
Figura 34: Perfil de velocidade V1 para Re 400.	87
Figura 35: Perfil de velocidade V2 para Re 400.	87
Figura 36: Perfil de velocidade V1 para Re 1000.	88
Figura 37: Perfil de velocidade V2 para Re 1000.	88
Figura 38: Campos de pressão e linhas de corrente para Re 100.	89
Figura 39: Campos de pressão e linhas de corrente para Re 400.	89
Figura 40: Campos de pressão e linhas de corrente para Re 1000.	89
Figura 41: linhas de corrente para Re 100, 400 e 1000 (Fonte: GHIA et al., 1982)	90
Figura 42: Perfil de velocidade V1 para Re 10000.	91
Figura 43: Perfil de velocidade V2 para Re 10000.	92
Figura 44: Linhas de corrente para Re 10000.	92
Figura 45: Linhas de corrente V2 para Re 10000 (Fonte: GHIA et al., 1982)	93
Figura 46: Perfil de velocidade V1 para Re 10000 e diferentes valores de Cs.	93
Figura 47: Perfil de velocidade V2 para Re 10000 e diferentes valores de Cs.	94
Figura 48: Domínio e dimensões características do escoamento sobre degrau.	95
Figura 49: Comprimento de recolamento do vórtice principal.	98
Figura 50: Detalhe das linhas de corrente no vórtice principal para Reynolds 100,200,400,600,800 e 1000.	99
Figura 51: Detalhe das linhas de corrente no vórtice secundário para Reynolds 600, 800 e 1000.	100
Figura 52: Isolinhas de pressão para Reynolds 100, 200, 400, 600,800 e 1000.	101
Figura 53: Características geométricas do problema e condições de contorno – 1 macro- elemento.	103
Figura 54: Características geométricas do problema e condições de contorno – múltiplos macro-elementos.	103
Figura 55: Campos de pressão e linhas de corrente para Re 40.	106
Figura 56: Campos de pressão e linhas de corrente para Re 10, 20, 30, 50.	108
Figura 57: Campos de pressão para Re 100 – Múltiplos macro-elementos	109
Figura 58: Campos de pressão para Re 100, 300, 500, 700 e 1000.	109
Figura 59: Comportamento do escoamento incidindo sobre um cilindro (baseado em: LIENHARD, 1966)	110
Figura 60: Coeficiente C_D para os Reynolds em estudo.	110
Figura 61: Coeficiente C_{L-RMS} versus número de Reynolds (Fonte: NORBERG, 2001).	111
Figura 62: Número de Strouhal (St) para os Reynolds 100, 300, 500, 700 e 1000.	112
Figura 63: Registro ao longo do tempo para os coeficientes C_D para os Reynolds 10, 20, 30, 40, 50.	113
Figura 64: Registro ao longo do tempo para os coeficientes C_D para os Reynolds 100, 300, 500,700,1000.	114
Figura 65: Registro ao longo do tempo para os coeficientes C_L para os Reynolds 100, 300, 500, 700, 1000.	115
Figura 66: Variação do C_p para os Reynolds de 40, 100, 500 e 1000.	116

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Matriz INC.	58
Tabela 2: Matriz IEN.	59
Tabela 3: Características do fluido, do escoamento e da malha de discretização com funções NURBS.	85
Tabela 4: Propriedades do fluido, do escoamento e da discretização com funções NURBS.	90
Tabela 5: Propriedades do fluido, do escoamento e da malha de discretização com funções NURBS	95
Tabela 7: Dados da discretização com funções NURBS e incremento temporal – 1 macro-elemento.	104
Tabela 8: Dados da discretização com funções NURBS e incremento temporal – Múltiplos Macro-elementos.	105
Tabela 9: Características do fluido e do escoamento	105
Tabela 10: Característica dos vórtices formados na região de recirculação para Re 40.	106
Tabela 11: Características dos vórtices formados na região de recirculação para Re 40	107
Tabela 12: Coeficiente CI-RMS	111

1 INTRODUÇÃO

A simulação numérica de escoamentos de fluidos tem sido realizada tradicionalmente empregando-se formulações baseadas no Método dos Elementos Finitos e no Método dos Volumes Finitos. No Método dos Elementos Finitos, o espaço físico do problema e as equações que governam o escoamento são discretizadas através de elementos finitos, nos quais funções de interpolação Lagrangeanas são adotadas para a obtenção das variáveis do escoamento e coordenadas de pontos no interior dos elementos a partir dos respectivos valores nodais.

Devido às características do método, as funções de base utilizadas apresentam geralmente continuidade C^0 (primeira derivada descontínua, mas finita). Além disso, o processo de discretização pressupõe uma fase de pré-processamento, na qual a geometria do problema é definida e a divisão do espaço em elementos finitos é feita. Como os geradores de malha empregam uma formulação matemática distinta para a construção das geometrias, os procedimentos de discretização geralmente levam a erros de aproximação.

Com o objetivo de unificar as formulações adotadas nos procedimentos de pré-processamento e análise e melhorar as condições de continuidade foi criada a chamada Análise Isogeométrica (COTTRELL et al., 2009), na qual funções de base do tipo NURBS são utilizadas na discretização espacial do problema e na aproximação das variáveis das equações fundamentais.

Neste trabalho, buscou-se o desenvolvimento de uma ferramenta numérica para a simulação de escoamentos de fluidos em regime incompressível baseada na Análise Isogeométrica. Com isso, espera-se a obtenção de resultados mais precisos no estudo de escoamentos sobre corpos rombudos através de uma representação exata da geometria do problema, sobretudo no tratamento das regiões de camada limite e em escoamentos em regime turbulento.

1.1 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

A Análise Isogeométrica é um método numérico introduzido recentemente por Hughes et al. (2005) para a obtenção de soluções aproximadas de problemas governados por

equações diferenciais, podendo ser considerado como uma generalização do Método dos Elementos Finitos (MEF) clássico a partir da utilização de funções de interpolação especiais.

A solução de equações diferenciais pelo MEF consiste, em termos gerais, no uso de uma formulação variacional e de um espaço de funções de base para a discretização do espaço físico e das variáveis das equações. As funções de base são definidas no interior dos elementos finitos, que são representações do espaço em nível local, sendo os elementos uma decomposição, sem sobreposição, do domínio em formatos simples. Comumente, os elementos finitos são definidos em termos de polinômios, principalmente pelos Lagrangeanos e pelos de Hermite. As funções de base utilizadas na descrição da geometria e das variáveis na maioria dos casos são as mesmas, sendo denominada a formulação nesses casos de isoparamétrica (ZIENCKIEWICZ et al., 2005a; BATHE, 1996).

Na Análise Isogeométrica as funções de base escolhidas para a discretização do espaço solução e do espaço físico são as mesmas utilizadas nos sistemas CAD (*Computed Aided Design*). No âmbito dos sistemas CAD existem várias tecnologias empregadas na geração de modelos computacionais de geometrias que podem ser estendidas à Análise Isogeométrica. Dentre as técnicas numéricas disponíveis as mais comuns são aquelas baseadas em funções NURBS, fazendo com que essas funções sejam o ponto de partida dos estudos sobre Análise Isogeométrica.

As curvas NURBS são obtidas através de uma combinação de funções de base NURBS definidas em um dado espaço paramétrico pré-definido e valores de coordenadas associadas a um polígono de pontos denominados pontos de controle, os quais não se encontram geralmente sobre a curva e tem sua posição determinada de acordo com a forma desejada para esta curva. De uma forma similar, superfícies NURBS podem ser também obtidas considerando-se um produto tensorial de funções de base NURBS definidas independentemente em duas direções paramétricas dispostas perpendicularmente entre si e uma rede bidimensional de pontos de controle.

Na grande maioria das situações práticas, é necessário para descrever um domínio o uso de múltiplos *patches* NURBS, denominados nesse trabalho de macro-elementos. Cada macro-elemento é constituído por um espaço paramétrico, funções base e rede de pontos de controle distintos. O uso de múltiplos macro-elementos é necessário em função do produto tensorial de um único espaço paramétrico não ser adequado para a representação de geometrias complexas multiplamente conectadas.

A Análise Isogeométrica tem como um dos principais intuitos propiciar uma maior integração entre as técnicas numéricas utilizadas nos sistemas CAD e o processo de análise por elementos finitos, a qual requer sempre a geração de malhas baseadas nos dados obtidos a partir de programas CAD. Verifica-se que em problemas de Engenharia envolvendo geometrias complexas as geometrias CAD nunca são fielmente representas pelo modelo discreto em elementos finitos, onde aproximações polinomiais de grau baixo são geralmente adotadas. Nesse sentido, a Análise Isogeométrica apresenta-se vantajosa, pois permite a representação exata de tais geometrias devido ao uso das mesmas funções de base usadas no modelo CAD, as quais são capazes de representar exatamente muitas formas comuns, tais como as seções cônicas, círculos, cilindros, esferas e elipsoides.

A própria solução por elementos finitos pode em muitas situações ser afetada significativamente devido à falta de precisão na forma geométrica do modelo computacional. Como exemplos pode-se citar a flambagem de cascas, que é um problema extremamente sensível a imperfeições geométricas, os fenômenos de camada limite, que dependem fortemente da precisão geométrica da superfície dos corpos imersos no escoamento, e o contato normal entre corpos, o qual não pode ser representado exatamente sem uma precisa descrição da geometria, gerando dificuldades de convergência nos processos não lineares.

Na Análise Isogeométrica, geometrias complexas podem ser obtidas usando-se, inclusive, malhas grosseiras, bastando para isso a utilização de funções de base NURBS e uma rede de pontos de controle adequados. Por outro lado, no MEF observa-se o contrário, já que a geometria exata só é obtida no limite do processo de refinamento (*h*-refinamento), como visualiza-se na Figura 1.

Outra vantagem da Análise Isogeométrica é a possibilidade de empregarem-se procedimentos sistemáticos de refinamento e elevação de grau das funções, tendo como principal característica o fato que fixando a geometria exata em malhas mais grosseiras, esta não será alterada ao término desses procedimentos. Dessa forma, obtém-se a simplificação do processo de refinamento pela eliminação da necessidade de comunicação com a descrição CAD da geometria, como é feito nos modelos em elementos finitos.

As funções NURBS possuem muitas propriedades atrativas para aplicação em Análise Isogeométrica. Uma das características mais importantes para a modelagem numérica é a suavidade, que diz respeito ao fato de que as funções são $p-1$ vezes contínuas sobre o contorno dos elementos, sendo p o grau da função. No contexto do Método dos Elementos

Finitos, os elementos isoparamétricos comumente utilizados na discretização trabalham com continuidade C^0 entre elementos, pois os elementos com continuidade maior são complicados e apresentam maior custo computacional. Para os casos de flexão em placas finas e cascas, por exemplo, em que existe a necessidade de continuidade C^1 , muda-se a formulação variacional para driblar a necessidade da continuidade superior. Outras características atrativas das funções NURBS aos métodos numéricos serão tratadas ao longo do texto e podem ser visualizadas com mais detalhes em Cottrell et al. (2009) e Piegl e Tiller (1997).

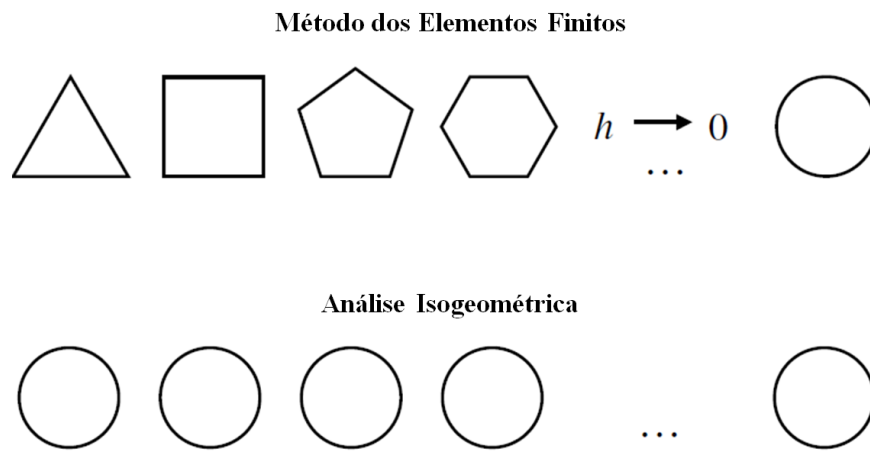


Figura 1: Representação de uma geometria circular (Baseado em: COTTRELL et al., 2006)

Hughes et al. (2005) demonstraram a aplicabilidade do método tanto em problemas de Mecânica dos Sólidos quanto nos de Mecânica dos Fluidos. Desde então, muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos mostrando a eficácia da Análise Isogeométrica nas mais diversas áreas, tais como: análise placas e cascas, problemas de otimização, problemas de vibrações estruturais, problemas de contato, escoamentos de fluidos, entre outros.

Nos problemas de placas e cascas a Análise Isogeométrica tem se mostrado vantajosa sobre as aproximações convencionais, visto que a suavidade das funções base NURBS proporciona facilmente a continuidade C^1 necessária entre elementos. Esses resultados podem ser observados nos trabalhos, por exemplo, de Kiendl et al. (2009), Hosseini et al. (2013) e Tran et al. (2013).

Nas formulações de contato usando discretização convencionais da geometria, a presença de superfícies em contato pode levar a saltos e oscilações nas tensões, a menos que malhas muito refinadas sejam utilizadas. O uso da análise Isogeométrica leva a uma ligação suave entre as geometrias e, conseqüentemente, a tensões mais precisas. Além disso, pode ser

visualizado no trabalho, por exemplo, de Temizer et al. (2010) uma melhora na convergência dos problemas em relação ao uso de elementos finitos de continuidade C^0 .

Com relação a problemas de otimização, pode-se citar o trabalho de Espath (2009), desenvolvido no CEMACOM/PPGEC/UFRGS, no qual se realizou um estudo de otimização de forma de cascas baseada em funções NURBS. Uma das vantagens do uso de funções de forma NURBS nesse contexto está relacionada ao fato que se pode modificar a geometria das cascas sem perder a parametrização, evitando, dessa forma, a geração de uma nova malha ao se modificar a forma. Nesse estudo obtiveram-se cascas de alto desempenho estrutural, demonstrando a eficiência da análise escolhida.

No contexto da análise de problemas de vibração estrutural, o uso da Análise Isogeométrica apresentou-se muito atrativa. Uma das principais vantagens observadas por Cotrell et al. (2006) foi o uso do refinamento k (exclusivo da Análise Isogeométrica) no lugar do refinamento p , típico do método dos elementos finitos. Esse procedimento resultou em espectros de frequência mais precisos.

No que diz respeito à Mecânica dos Fluidos, tem-se investigado, principalmente, a influência do uso das funções NURBS no estudo da turbulência, em problemas com equações diferenciais de alta ordem, e em análises com geometrias complexas, conforme pode ser observado nos trabalhos relatados na sequência.

Bazilevs et al. (2007) desenvolveram um modelo numérico baseado em Análise Isogeométrica para a avaliação de escoamentos turbulentos usando a metodologia de turbulência RBVMS (*residual-based variational multiscale turbulence modeling*). Os resultados obtidos para um problema simples de dispersão demonstram que as funções NURBS proporcionaram melhores aproximações quando comparadas às funções usadas no MEF clássico em processos advectivos e difusivos, os quais desempenham um papel importante no cálculo da turbulência.

Akkerman et al. (2008) estudaram o papel da continuidade das funções na turbulência, comparando funções quadráticas NURBS, com continuidade C^1 , com as utilizadas no método dos elementos finitos clássico, que possuem continuidade C^0 . Nesse estudo demonstrou-se que o uso de funções com maior suavidade apresenta melhores resultados nos problemas de turbulência. Além disso, verificou-se que esse efeito é maior à medida que o número de Reynolds é elevado.

No trabalho de Gomez et al. (2010), a Análise Isogeométrica é utilizada para estudos sobre as equações isotérmicas de Navier-Stokes-Korteweg. A resolução desse conjunto de equações requer o uso de funções suaves com continuidade global C^1 . No contexto do MEF clássico, existe um número limitado de funções com essa continuidade que podem ser aplicadas a geometrias complexas em problemas bidimensionais e nenhuma para problemas tridimensionais. Dessa forma, o uso das funções NURBS permitiu resolver a forma forte da equação diferencial de terceira ordem que representa a capilaridade.

Em Bazilevs e Akkerman (2010), a Análise Isogeométrica é empregada em uma simulação do escoamento turbulento de Taylor-Couette. Com o uso das funções NURBS pode-se representar exatamente a geometria complexa do problema, sem aproximações, em todos os níveis de discretização. Testes numéricos demonstraram que resultados precisos podem ser obtidos com malhas relativamente grosseiras.

Devido à eficiência demonstrada da Análise Isogeométrica, muitos trabalhos atuais a incorporam como metodologia de análise numérica de problemas da mecânica dos fluidos e problemas de interação fluido-estrutura, como por exemplo, os trabalhos de Bazilevs et al. (2014), Nguyen et al. (2014) e Hsu et al. (2014).

1.2 DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

A DFC (Dinâmica dos Fluidos Computacional) (ZIENCKIEWICZ et al., 2005; REDDY e GARTLING, 1994; GRESHO E SANI, 1999) tem como finalidade o emprego de técnicas numéricas para a obtenção de uma solução aproximada para as equações que governam os escoamentos e os processos de transferência de calor e massa nos fluidos em geral, visto que a solução analítica dessas equações é conhecida para poucos e simples casos. Neste contexto, os seguintes tópicos são de fundamental importância: os processos de discretização espacial e temporal, os métodos de estabilização e a modelagem de escoamentos turbulentos.

A solução numérica de escoamentos viscosos incompressíveis apresenta uma dificuldade básica relacionada à equação de conservação de massa. Ao levar-se em conta a incompressibilidade do escoamento, obtém-se a chamada equação da continuidade, onde o termo temporal desaparece, restando apenas o termo de divergente do vetor velocidade. Do ponto de vista computacional, este aspecto traz uma série de problemas para a obtenção do campo de pressão. Para superar estas dificuldades, vários métodos têm sido empregados para

o tratamento da equação de conservação de massa em escoamentos incompressíveis, entre os quais se destacam as formulações mistas, o método da penalidade, o método da pseudo-compressibilidade e os métodos fracionados.

A análise numérica de escoamentos incompressíveis iniciou-se através da utilização da formulação mista, na qual a velocidade e a pressão são tomadas como variáveis primárias do sistema de equações fundamentais, sendo um dos primeiros trabalhos publicado sobre o assunto desenvolvido por Hood e Taylor (1974). Neste caso, a pressão é vista como um multiplicador de Lagrange impondo a restrição de divergente nulo no campo de velocidades do escoamento. Consequentemente, impõe-se um limite na ordem de aproximação do campo de pressão, a qual deve ter a mesma ordem da restrição imposta pelo multiplicador de Lagrange, ou seja, o divergente do campo de velocidades.

O método da penalidade é uma variação da formulação mista e o primeiro registro de sua utilização foi no trabalho de Zienkiewicz (1974). Neste método, assume-se a pressão como sendo igual ao negativo do valor do parâmetro de penalidade aplicado à equação da continuidade. Essa expressão é substituída no gradiente de pressão apresentado nas equações de Navier Stokes e então a pressão é eliminada. O parâmetro de penalidade deve ser grande o suficiente para forçar a continuidade, mas não tão elevado para evitar que outros termos da equação de Navier-Stokes sejam calculados sem precisão. Os campos de pressão e velocidade devem também serem aproximados empregando-se funções de base consistentes com a condição de Babuska-Brezzi (BREZZI, 1974).

O método da pseudo-compressibilidade, utilizado nesse estudo, foi desenvolvido inicialmente por Chorin (1967) e trata-se da aplicação de uma compressibilidade artificial à equação da continuidade, sendo o seu uso justificado no fato de que o escoamento de um fluido em meio natural não é estritamente incompressível, ou seja, a velocidade do som se propaga a um valor finito (ver, por exemplo, KAWAHARA e HIRANO, 1983). Como consequência, obtém-se uma equação de conservação de massa com um termo temporal de pressão, a partir da qual é possível obter-se a pressão de forma explícita.

Os métodos fracionários também foram introduzidos por Chorin (1968) no contexto do Método das Diferenças Finitas e baseiam-se no cálculo inicial do campo de velocidades omitindo-se das equações de momento o termo de pressão. A pressão é calculada posteriormente através de uma equação de Poisson usando as componentes de velocidades obtidas inicialmente. O campo de velocidades é então corrigido com o uso da pressão obtida no passo anterior. Os primeiros trabalhos envolvendo métodos fracionados no contexto do

Método dos Elementos Finitos devem-se a Schneider et al. (1978) e Donea (1982). Mais recentemente, a aplicação de métodos fracionados pode ser encontrada, por exemplo, em Ramaswamy (1993), Tabarrok e Su (1994) e Nithiarasu et al. (2004).

No âmbito da DFC, as metodologias mais utilizadas no processo de discretização espacial são: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Volumes Finitos (MVF). No presente trabalho, será utilizada a Análise Isogeométrica, que consiste em uma generalização do MEF. Para garantir que as aproximações estejam o mais próximo possível da solução real, emprega-se como formulação variacional o método dos resíduos ponderados. O método dos resíduos ponderados (ASSAN, 2003) minimiza os resíduos resultantes das funções aproximadoras através de uma função peso, sendo o produto entre a função residual suposto igual a zero no domínio de integração de cada elemento. Quando a função ponderadora é a mesma utilizada na discretização têm-se o denominado método clássico de Galerkin (Bubnov-Galerkin).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) surgiu na década de 50, tornando-se rapidamente a ferramenta numérica mais utilizada na análise de problemas de Mecânica dos Sólidos e Mecânica das Estruturas. As primeiras aplicações na Mecânica dos Fluidos remetem a meados da década de 60 e desde então tem sido usado em vários problemas, embora não tendo a mesma popularidade observada nas aplicações em Mecânica dos Sólidos. O método apresenta como vantagens o fato de que complexas geometrias são facilmente acomodadas e que as condições de contorno podem ser aplicadas exatamente, além de ter um embasamento matemático consistente. Até a década de 70 o MEF ainda não era utilizado com sucesso na DFC por não possuir as ferramentas necessárias para lidar com as instabilidades que ocorrem em escoamentos com advecção dominante. As instabilidades em escoamentos com advecção dominante resultam do fato que os termos de transporte advectivo tornam o sistema de equações fundamentais não auto adjuntas, o que conduz a soluções oscilatórias no campo de velocidade quando o método de Galerkin clássico é utilizado (ZIENCKIEWICZ et al. 2005).

Historicamente o processo de estabilização dos termos de advecção iniciou-se com o MDF, onde os modelos baseados em aproximações em diferenças finitas centradas foram substituídos por diferenças finitas *upwind* para aproximação de derivadas de primeira ordem. No campo dos elementos finitos desenvolveu-se o método de Petrov-Galerkin, equivalente ao *upwind* para diferenças finitas, que consiste na utilização de funções distintas para as funções de base e peso, sendo equivalente a aplicação do método de Galerkin convencional com adição de uma constante de difusão artificial (ZIENCKIEWICZ et al. 2005). Essa

metodologia foi desenvolvida inicialmente nos trabalhos de Zienkiewicz et al. (1976), Christie et al. (1976), Heinrich et al. (1977) e Griffiths e Lorenz (1978).

Brooks e Hughes (1982) consolidaram a formulação SUPG (*streamline upwind Petrov-Galerkin*), a qual possui as qualidades dos clássicos métodos de Petrov-Galerkin sem a perda de precisão apresentada nesses métodos. A ideia básica do SUPG é adicionar uma difusão artificial que age apenas na direção do escoamento. Seguindo essa mesma metodologia de estabilização tem-se o método de GLS (*Galerkin Least Square*), proposto por Hughes et al. (1989), no qual os termos de estabilização são resultantes de um processo de minimização por mínimos quadrados de um operador residual da forma fraca das equações.

Um dos inconvenientes apresentados nos métodos de Petrov-Galerkin é a obtenção de matrizes de massa não simétricas, o que dificulta seu uso em esquemas explícitos. Para sanar esse inconveniente uma alternativa de estabilização é o método de T-G (Taylor Galerkin), introduzido por Donea (1984), onde a estabilização para os problemas de convecção é obtida através da introdução de termos de mais alta ordem para as expansões em série de Taylor no processo de discretização temporal, sendo a discretização espacial realizada pelo método convencional de Bubnov-Galerkin. Na mesma filosofia do método T-G, tem-se o método BTM (*balanced tensor diffusivity*) introduzido por Gresho et al. (1984), onde acrescenta-se um tensor difusivo, compensando o erro devido ao truncamento da discretização do tempo. Esses procedimentos possuem um equivalente no campo do MDF, desenvolvido originalmente por Lax e Wendroff (1964).

Uma alternativa mais recente é o denominado método CBS (*characteristic based split*), introduzido por Zienkiewicz e Codina (1995). O esquema CBS utiliza métodos fracionários para a resolução das equações da DFC aplicadas a escoamentos compressíveis e incompressíveis através do procedimento de Galerkin característico. Como resultado, obtém-se um modelo numérico com características de estabilização excelentes. O método permite a resolução através de um esquema totalmente explícito, mesmo nos casos de escoamentos incompressíveis, com auxílio da compressibilidade artificial, e de forma semi-implícita, onde o campo de pressão é obtido de forma implícita a partir de uma equação de conservação de massa descrita na forma de uma equação de Poisson (ver, por exemplo, Nithiarasu, 2004).

Além da instabilidade devido a advecção dominante podem surgir ainda oscilações no campo de pressão devido ao uso do mesmo grau de interpolação para as funções de velocidade e pressão, não cumprindo com a condição de Babuska-Brezzi (BREZZI, 1974).

Os principais métodos de discretização temporal utilizados na DFC baseiam-se em esquemas de solução independente para o espaço e o tempo, chamados de métodos das linhas ou métodos de semi-discretização. Estes esquemas são ainda classificados em implícitos e explícitos. Os esquemas implícitos são os mais comuns, admitindo um passo de tempo muito maior do que aquele usado por métodos explícitos, sem que isso afete a estabilidade do processo de integração. Por isso, são geralmente métodos mais robustos e com maior velocidade de convergência, embora exijam um gasto de memória computacional muito maior. Dentre os métodos implícitos destacam-se os métodos de Crank-Nicholson e de Euler, que utilizam esquemas em diferenças finitas para aproximação temporal (ver REDDY E GARTLING, 1994).

Os métodos explícitos apresentam em geral baixo custo computacional, facilidade de implementação, e ocupam pouco espaço na memória computacional. Por outro lado, o tamanho do incremento de tempo é restringido à condição de estabilidade. Entretanto, para os fenômenos que ocorrem a altos números de Reynolds em que se necessita de incrementos de tempo reduzidos, o esquema explícito torna-se mais eficiente.

Os esquemas explícitos mais populares no âmbito da DFC são os métodos de multipasso, também conhecidos como métodos de Runge-Kutta, onde a solução é função de vários passos de tempo dentro de um mesmo incremento de tempo. A influência de cada passo no resultado final é definida a partir de coeficientes escolhidos adequadamente a fim de aumentar a estabilidade e assegurar a convergência. Dependendo do número de coeficientes (ou passos), a aproximação será de segunda ordem (2 passos) ou superior.

Uma alternativa bastante utilizada na DFC é o modelo de T-G, que pode ser utilizado tanto de forma explícita quanto implícita dependendo da forma de avanço do tempo. Nesse trabalho é utilizado o método explícito de Taylor-Galerkin de dois passos, introduzido inicialmente por Kawahara e Hirano (1983) e aplicado, mais recentemente, nos trabalhos de Teixeira (2001), Petry (2002), Braun (2007) e Madalozzo (2012) apresentados no CEMACOM/PPGEC/UFRGS e PROMEC/UFRGS.

Outro aspecto relevante nas simulações numéricas diz respeito à reprodução de escoamentos turbulentos. As equações de Navier-Stokes têm validade tanto para escoamentos laminares como para turbulentos. Entretanto, a utilização da chamada Simulação Direta da Turbulência (DNS – *direct numerical simulation*) leva em geral a custos computacionais elevados, tendo em vista que o nível de refinamento da malha necessário para representar todas as escalas de turbulência se torna cada vez mais alto à medida que se eleva o número de

Reynolds. Para contornar esse problema são desenvolvidas metodologias para a simulação de escoamentos turbulentos, onde modelos de turbulência são adotados para representar as escalas da turbulência inferiores à resolução da malha adotada.

Os modelos que utilizam as equações RANS (*Reynolds Averaged Navier Stokes*) modelam o efeito das flutuações turbulentas no escoamento médio a partir da aplicação de uma operação de média temporal sobre as equações fundamentais. Dentro da metodologia RANS o modelo de turbulência comumente utilizado é o $k - \varepsilon$, introduzido por Launder e Spalding (1974). O método possui algumas limitações, como por exemplo, em linhas de correntes curvas, escoamentos sob a ação de gradientes adversos de pressão e em escoamentos com regiões de separação, condições tipicamente encontradas em problemas da DFC.

Nos modelos LES, escolhido como metodologia de simulação da turbulência para este trabalho, as grandes escalas de turbulência são resolvidas diretamente pelas equações de Navier-Stokes filtradas, enquanto que as escalas inferiores à resolução da malha são resolvidas por modelos de turbulência sub-malha. Os modelos LES tiveram seu início com o trabalho de Smagorinsky (1963), sendo utilizado pela primeira vez em aplicações de engenharia no trabalho de Deardoff (1970). Apesar de a modelagem LES conduzir a gastos computacionais muito superiores aos modelos RANS, a metodologia tem se mostrado mais adequada do que os modelos RANS, além de que, com o avanço contínuo na tecnologia dos computadores, o emprego da metodologia LES fica cada vez mais acessível. Trabalhos mais recentes que empregam a metodologia LES podem ser visualizados, por exemplo, em: Elshaer et al. (2016) e Colomé et al. (2016).

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO E METODOLOGIA

O objetivo básico deste trabalho é desenvolver um modelo numérico baseado em Análise Isogeométrica para a simulação de escoamentos de fluidos newtonianos em regime incompressível. Dentro deste processo, busca-se também o desenvolvimento de ferramentas de pré-processamento especiais para a geração de malhas em formulações NURBS, incluindo o uso de vários macro-elementos. Como objetivo último, busca-se a aplicação da formulação aqui desenvolvida em problemas clássicos da DFC com intuito de validar a metodologia através da comparação com resultados experimentais e com resultados numéricos de outros autores.

Para a análise de escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos utilizou-se nesse trabalho um modelo numérico baseado em uma formulação mista para a solução das equações de Navier-Stokes e da equação de conservação de massa, com o acoplamento entre velocidade e pressão sendo realizado através da hipótese de pseudo-compressibilidade. Nos casos que envolvem escoamentos turbulentos emprega-se a metodologia de Simulação de Grandes Escalas (“LES”) e para a modelagem sub-malha o modelo de Smagorinsky clássico. O modelo computacional é construído a partir da aplicação do método de Taylor-Galerkin de dois passos sobre as equações fundamentais do escoamento. A discretização espacial é realizada através da aplicação do método de Bubnov-Galerkin no contexto da Análise Isogeométrica, onde funções de base NURBS são empregadas. A integração temporal é realizada usando-se séries de Taylor de segunda ordem sobre os termos temporais das equações.

2 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

Como foi exposto anteriormente, a Análise Isogeométrica é uma particularização do Método dos Elementos Finitos, na qual funções de forma, comumente Lagrangeanas, são substituídas pelas funções do tipo NURBS, o que leva a algumas mudanças na formulação tradicional (ver, por exemplo, COTTRELL et al., 2009). Esse capítulo tem o intuito de apresentar as principais particularidades dessa formulação em relação ao Método dos Elementos Finitos.

2.1 DEFINIÇÕES GERAIS

No MEF tradicional têm-se uma única noção de malha e de elemento, com os elementos podendo ser representados de duas maneiras distintas: no domínio físico e no domínio paramétrico para a quadratura numérica. Os elementos são usualmente definidos pelas suas coordenadas nodais e pelas funções de base, as quais apresentam características tipicamente interpoladoras, podendo assumir valores positivos ou negativos. Nos elementos ditos isoparamétricos, nos quais as funções de base usadas para a descrição das variáveis são as mesmas utilizadas para a descrição da geometria, a escolha do tipo de função a ser utilizada é realizada primeiramente pela necessidade de aproximação das variáveis do problema, sendo a discretização da geometria através dessas funções uma consequência. Na Figura 2 observa-se funções de forma Lagrangeanas quadráticas definidas no espaço paramétrico de um elemento finito unidimensional.

Na Análise Isogeométrica, têm-se duas noções de malha: a malha de controle e a malha física. Os pontos de controle definem a malha de controle, que possui a aparência de uma malha típica de elementos finitos. Entretanto, a malha de controle não define a geometria, ela é apenas um ‘esqueleto’ que controla a geometria. As variáveis de controle são os graus de liberdade do problema, definidas diretamente nos pontos de controle. Ao contrário do MEF tradicional, a malha de controle pode ser severamente distorcida e até invertida e, ainda assim, se as funções forem suficientemente suaves, a geometria física permanece válida.

A malha física corresponde à representação discretizada da geometria ou região que define o problema a ser analisado no espaço físico. Nessa malha existem duas definições distintas de elementos: o macro-elemento (*patch*), e o *knot span*, denominado nesse estudo de

elemento, por ser equivalente aos elementos do MEF, uma vez que determinam os espaços onde se realiza a quadratura numérica.

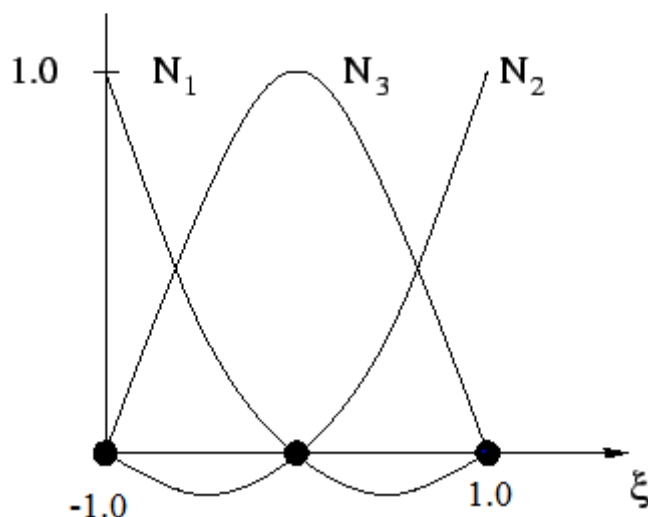


Figura 2: Funções de forma Lagrangeanas quadráticas unidimensionais representadas no espaço paramétrico de um elemento.

A geometria do problema pode ser descrita utilizando-se um ou mais macro elementos dependendo de sua complexidade. Cada macro-elemento possui representação tanto no espaço paramétrico, onde as funções base são definidas, quanto no espaço físico. Cada macro-elemento pode ser decomposto ainda em elementos, que são definidos a partir do vetor de nós ou de vetores de nós, de acordo com a topologia do problema. Esses elementos são definidos como pontos ou linhas, superfícies e volumes nos espaços físicos unidimensional, bidimensional e tridimensional, respectivamente, representando a imagem mapeada dos elementos do espaço paramétrico.

Outra importante definição sobre o estudo das funções NURBS é o espaço indicial de um macro-elemento, o qual identifica exclusivamente cada nó e distingue os nós com multiplicidade maior do que um.

As funções NURBS são tipicamente não interpoladoras e possuem sempre valor positivo em seu domínio de definição, o espaço paramétrico. Ao contrário do que acontece no MEF, as funções de base são escolhidas com o objetivo principal de descrever a geometria. Na Figura 3 é apresentado um esquema que permite a visualização dos espaços relatados para um modelo de uma superfície com um macro-elemento construído a partir de funções de base NURBS quadráticas.

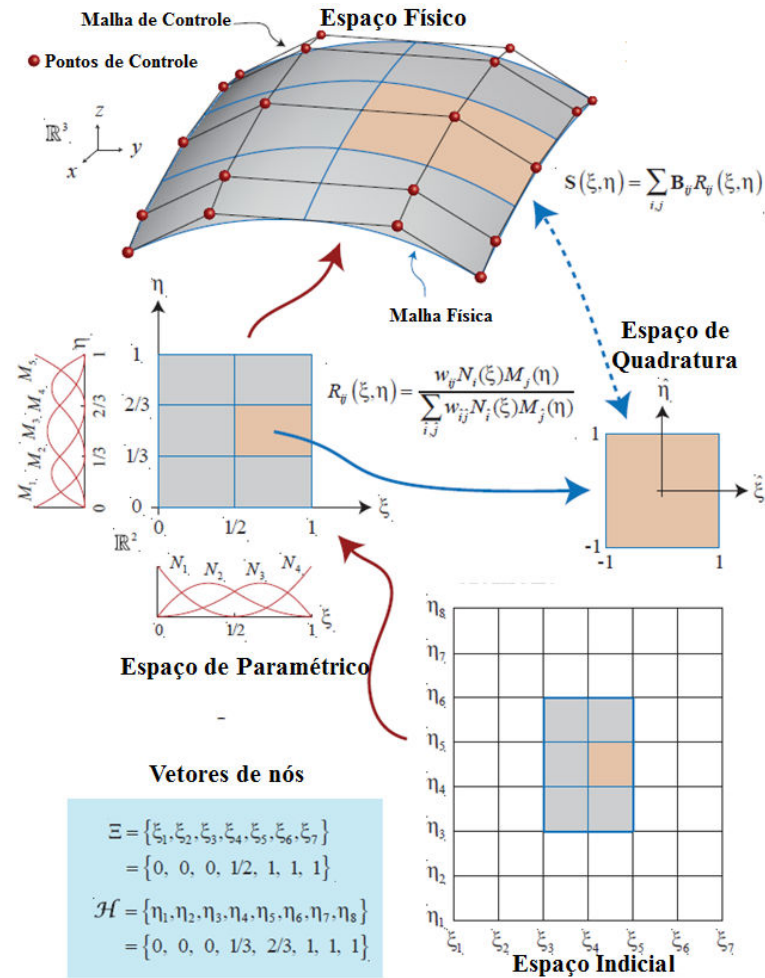


Figura 3: Definições sobre a Análise Isogeométrica (Baseado em: COTTRELL et al., 2009)

2.2 FUNÇÕES B-SPLINES

As funções NURBS usadas na Análise Isogeométrica são obtidas a partir da racionalização das funções *B-splines*. As funções base *B-splines* unidimensionais são definidas no espaço paramétrico por um vetor de nós, que consiste em um conjunto crescente de coordenadas, descrito por $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, sendo $n + 1$ a quantidade de pontos de controle no espaço e p o grau dessas funções. Os nós do espaço paramétrico dividem esse espaço em elementos (ou *knot spans*).

Uma função *B-spline* unidimensional $N_{i,p}$ inicia na coordenada paramétrica ξ_i , com $i = 0, 1, \dots, n$, e é definida recursivamente de acordo com a fórmula de Cox-deBoor (COX, 1972 e DEBOOR 1972) da seguinte maneira:

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{para } p = 0 \quad (2.1)$$

$$N_{i,p} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad \text{para } p = 1, 2, 3, \dots,$$

Na Figura 4 observa-se funções de forma *B-splines* de grau 0, 1 e 2. Nota-se que essas funções são idênticas aos polinômios de Lagrange para os graus 0 e 1. Além disso, percebe-se que todas as funções de base são idênticas e apenas deslocadas, o que confere a essa base de funções um padrão homogêneo.

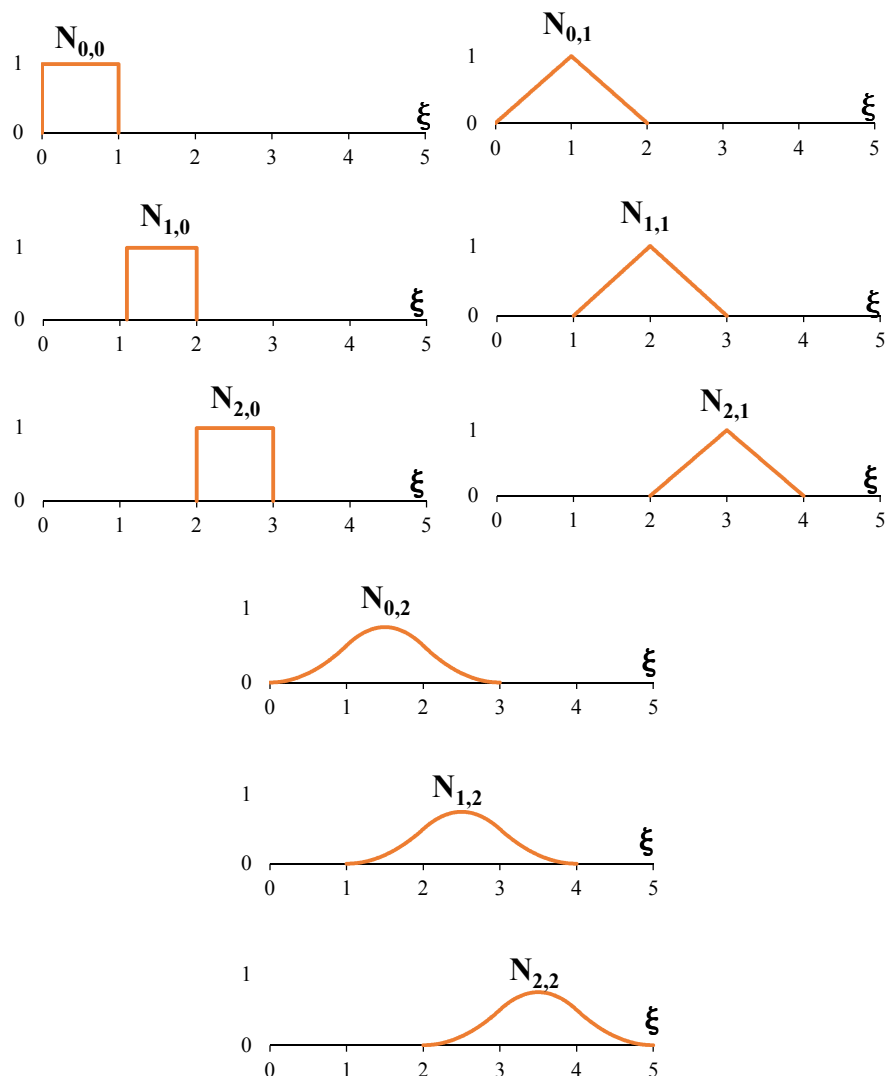


Figura 4: Funções base *B-Splines* de grau 0, 1 e 2.

Para obtenção de funções de base interpoladoras no início e no fim do espaço paramétrico utiliza-se o conceito de vetores de nós abertos, que consiste em repetir $p + 1$

vezes os valores paramétricos dos nós nas extremidades do vetor de nós. Isso se deve ao fato de que funções de base de ordem p possuem continuidade $p - m_i$ sobre um nó i interno qualquer, sendo m_i a multiplicidade do nó definido pela coordenada paramétrica ξ_i .

Na Figura 5 observa-se um espaço paramétrico definido através de um vetor de nós aberto $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4]$ e discretizado por funções de base B -splines quadráticas. Nota-se, de acordo com o que foi exposto, que o uso desse tipo de vetor de nós conduz a funções interpoladoras no início e no fim do espaço paramétrico. Além disso, nota-se uma redução de continuidade das funções sobre um nó com multiplicidade superior a um. Por fim, visualiza-se que em um mesmo elemento apenas $p + 1$ funções possuem valores não nulos.

Dessa forma, as principais propriedades no que diz respeito às funções B -splines são:

a) *Partição da Unidade:*

$$\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) = 1 \quad (2.2)$$

b) *Positividade:* Cada função de base é positiva, ou seja, $N_{i,p}(\xi) \geq 0, \forall \xi$. Assim, todos os coeficientes da matriz de massa são maiores ou iguais a zero.

c) *suavidade:* Uma função de ordem p tem $p - 1$ derivadas contínuas ao longo do contorno dos elementos.

d) *Suporte Compacto:* O suporte de cada $N_{i,p}$ está contido no intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$, ou seja $N_{i,p}(\xi) = 0$ se ξ estiver fora desse intervalo. Dessa forma em um dado elemento $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, no máximo $p + 1$ funções são não nulas: $N_{i-p,p}, \dots, N_{i,p}$.

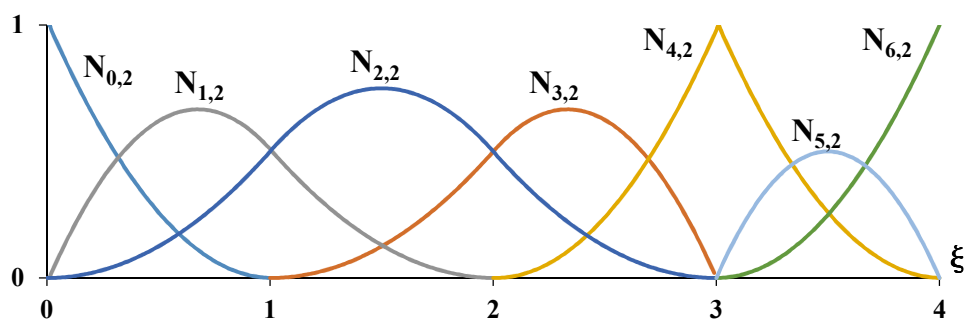


Figura 5: Funções base B -spline quadráticas.

Uma curva *B-spline* é construída através da combinação linear entre funções de base *B-spline* e um polígono de pontos de controle, que para um espaço físico definido por coordenadas cartesianas ortogonais (x, y, z) é definida por:

$$\mathbf{C}(\xi) = (x(\xi), y(\xi), z(\xi)) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i \quad (2.3)$$

na qual \mathbf{B}_i $i = 0, 1, \dots, n$ representa as coordenadas dos pontos pertencentes ao polígono de controle.

As propriedades citadas das funções base *B-splines* são mantidas para a curva, apresentando ainda as seguintes características:

- a) *Transformação afim*: Obtém-se a transformação afim pela aplicação de transformações diretamente sobre os pontos de controle, sendo a principal característica para satisfazer os *patch-tests*.
- b) *Localidade*: Devido ao suporte compacto das funções de base, movendo-se um ponto de controle afeta-se não mais do que $(p + 1)$ elementos da curva.
- c) *Forte característica de envelope convexo*: Uma curva *B-spline* é completamente contida dentro do polígono composto pelos pontos de controle.
- d) *Diminuição da variação da função*: Nenhum plano possui mais interseções com a curva do que com o polígono de controle, levando a função a ser monótona.

Na Figura 6 pode ser observada uma curva quadrática obtida através da combinação de funções de base descritas com o mesmo vetor de nós apresentado na Figura 5. Em a) têm-se representado juntamente com a curva o polígono de pontos de controle que a gerou. Nota-se novamente nessa imagem a característica interpoladora dos vetores de nós abertos, que leva os pontos de controle a estarem sobre a curva. Observa-se que em $\xi = 3$ a multiplicidade dois do nó tornou a curva interpoladora também nesse ponto, o que acontece quando $m_i \geq p$, sendo m_i a multiplicidade do nó i . Além disso, nota-se que a continuidade C^1 esperada para uma curva *B-spline* de grau 2 é alterada nesse ponto para C^0 . Em b) observa-se a imagem dos elementos do espaço paramétrico mapeados sobre a curva.

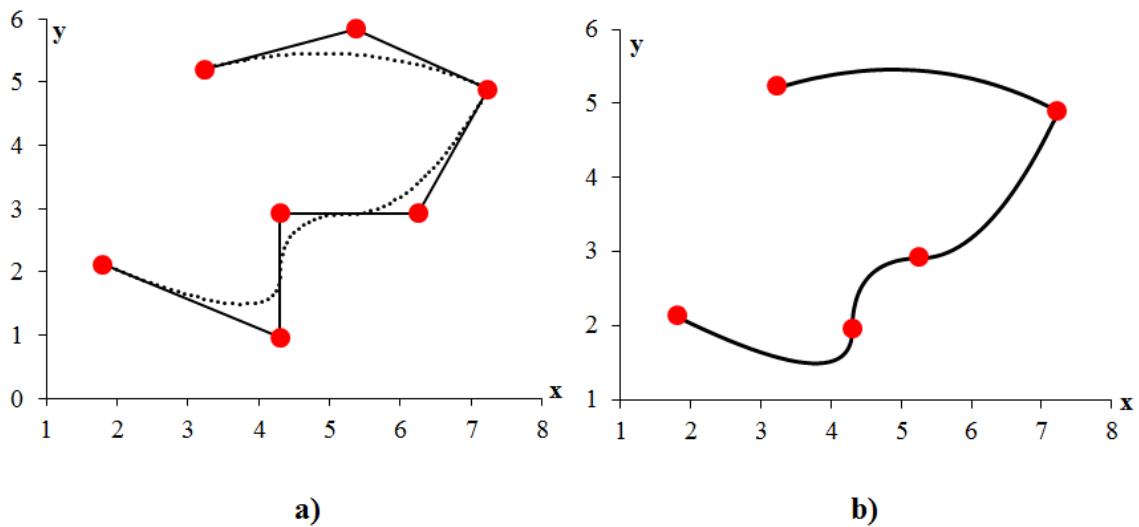


Figura 6: Curva quadrática. a) Curva e polígono de pontos de controle; b) Curva e elementos no espaço físico.

Uma superfície *B-spline* é obtida a partir das coordenadas associadas a uma malha de pontos de controle $B_{i,j}$ com $i = 0, 1, \dots, n$ e $j = 0, 1, \dots, m$, e pelo produto tensorial entre duas *B-splines* unidirecionais:

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{i,j} \quad (2.4)$$

na qual as funções $N_{i,p}(\xi)$ e $M_{j,q}(\eta)$, de grau p e q , são definidas a partir dos vetores de nós $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ e $\mathbf{H} = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m+q+1}\}$.

Na Figura 7 observa-se o produto tensorial entre duas funções quadráticas unidirecionais $\tilde{N}_{2,2,2,2}(\xi, \eta) = N_{2,2}(\xi) M_{2,2}(\eta)$, sendo o vetor de nós em ambas as direções $\Xi = \{0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1\}$.

O suporte local das funções base segue o mesmo formato das funções unidimensionais. O suporte de uma função bidimensional $\tilde{N}_{i,j,p,q}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta)$ é exatamente $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$. A única propriedade não conservada das curvas *B-splines* na geração da superfície é a diminuição da variação da função.

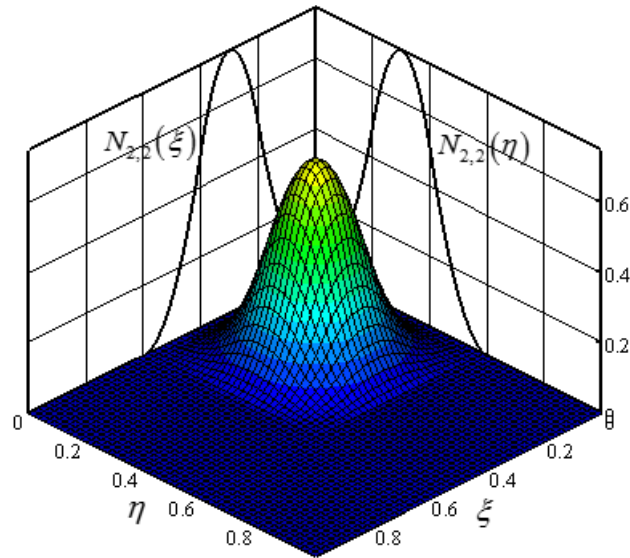


Figura 7: Produto tensorial entre funções *B-splines* quadráticas.

Na Figura 8 observa-se a rede de pontos de controle e a malha física correspondente para uma superfície definida a partir de funções de forma quadráticas nas direções ξ e η com vetores de nós: $\Xi = [0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1]$, $H = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$.

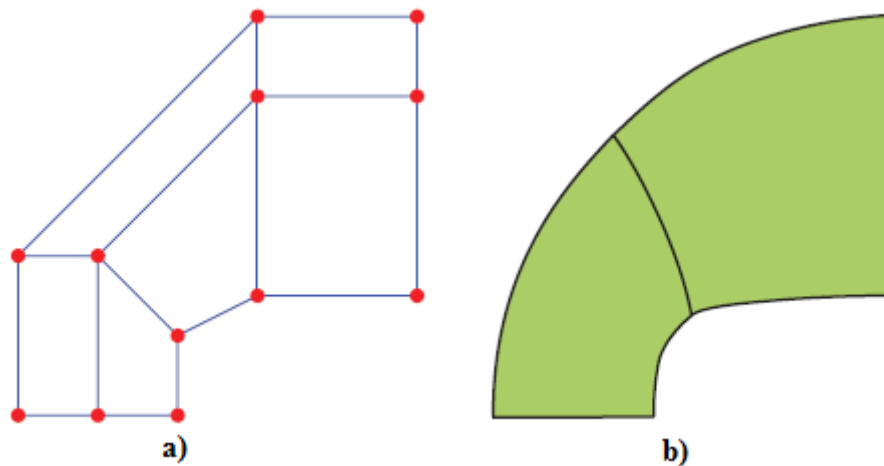


Figura 8: Superfície quadrática. a) Rede de pontos de controle; b) Malha física (Fonte: COTTRELL et al., 2009).

Analogamente, um sólido *B-spline* é obtido pelas coordenadas dos pontos de controle $B_{i,j,k}$ com $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$ e $k = 0, 1, \dots, l$, e pelo produto tensorial das funções $N_{i,p}$, $M_{j,q}$, $L_{k,r}$ de grau p , q e r , respectivamente, definidas pelos vetores de nós $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, $H = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ e $Z = \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{l+r+1}\}$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{T}(\xi, \eta, \zeta) = (x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) \mathbf{B}_{i,j,k} \quad (2.5)$$

2.3 FUNÇÕES NURBS

É de conhecimento da matemática clássica que todas as curvas cônicas, incluindo o círculo, podem ser representadas com o uso de funções racionais, as quais são obtidas pela razão entre dois polinômios. É nesse contexto que a transformação de uma função não-racional *B-spline* para uma função do tipo NURBS apresenta-se vantajosa para aplicação em Análise Isogeométrica.

A construção de uma função de base NURBS (R) é dada pela seguinte relação:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{\hat{i}=0}^n N_{\hat{i},p}(\xi) w_{\hat{i}}} \quad (2.6)$$

Sendo w_i e $w_{\hat{i}}$ os denominados pesos.

Uma curva NURBS é obtida através da seguinte expressão:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i \quad (2.7)$$

Analogamente ao apresentado para as curvas não-rationais *B-splines*, as superfícies NURBS são obtidas pelas respectivas relações:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q} w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}}} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j} \quad (2.9)$$

e um sólido NURBS por:

$$R_{i,j,k}^{i,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m \sum_{\hat{k}=0}^l N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) L_{\hat{k},r}(\zeta) w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{T}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_{i,j,k} \quad (2.11)$$

2.4 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DAS FUNÇÕES NURBS

Uma função racional é definida como a razão entre duas funções polinomiais e pode ser representada da seguinte maneira:

$$x(\xi) = \frac{X(\xi)}{W(\xi)} \quad y(\xi) = \frac{Y(\xi)}{W(\xi)} \quad z(\xi) = \frac{Z(\xi)}{W(\xi)} \quad (2.12)$$

sendo X, Y, Z e W funções polinomiais e x, y, z funções coordenadas que tem o mesmo denominador.

Curvas racionais com o mesmo denominador possuem uma representação geométrica elegante através das coordenadas homogêneas, as quais permitem um processamento eficiente de armazenamento de maneira compacta. As coordenadas homogêneas representam a curva racional definida no espaço n -dimensional como um polinômio no espaço $(n+1)$ -dimensional.

Considerando inicialmente um ponto $P(x, y, z)$ no espaço tridimensional euclidiano, o qual é representado no espaço com quatro dimensões por $P^w = (xw, yw, zw, w) = (X, Y, Z, W)$, a obtenção de $P(x, y, z)$ a partir de P^w é possível pela divisão de todas as coordenadas de P^w pela quarta coordenada W :

$$P(x, y, z) = \left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W}, \frac{W}{W} \right) \quad (2.13)$$

ou seja, mapeando P^w da origem até o hiperplano $W = 1$.

Dessa forma, pode-se representar uma função NURBS em coordenadas homogêneas da seguinte maneira:

$$\mathbf{C}^w(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i^w \quad (2.14)$$

com $\mathbf{B}_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$ e w_i sendo o peso relacionado ao ponto de controle de índice i . A curva C é relacionada com sua projetiva pela seguinte expressão:

$$\mathbf{C}(\xi) = \frac{\mathbf{C}^w(\xi)}{W(\xi)} \quad (2.15)$$

sendo $W(\xi)$ a função peso, definida como:

$$W(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i \quad (2.16)$$

Na Figura 9 observa-se o círculo no espaço \mathbb{R}^2 construído pela transformação projetiva de uma *B-spline* quadrática no espaço \mathbb{R}^3 .

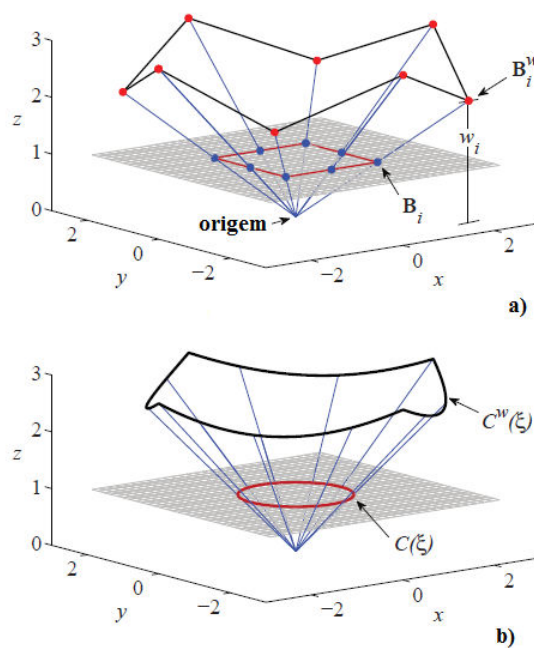


Figura 9: Transformação projetiva. a) transformação dos projetivos pontos de controle B_i^w em pontos de controle B_i ; b) transformação da projetiva curva *B-spline* $C^w(\xi)$ em uma curva NURBS $C(\xi)$ (Baseado em: COTTRELL et al., 2009).

Analogamente, uma superfície NURBS é definida em coordenadas homogêneas por:

$$\mathbf{S}^w(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p} M_{j,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j}^w \quad (2.17)$$

com $B_{i,j}^w = (w_{i,j} x_{i,j}, w_{i,j} y_{i,j}, w_{i,j} z_{i,j}, w_{i,j})$. A superfície é relacionada com sua projetiva pela seguinte expressão:

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{S}^w(\xi, \eta)}{W(\xi, \eta)} \quad (2.18)$$

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p} M_{j,q}(\xi, \eta) w_{i,j}$$

Por fim, tem-se um sólido em coordenadas homogêneas definido por:

$$\mathbf{T}^w(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p} N_{j,q} N_{k,r}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_{i,j,k}^w \quad (2.19)$$

sendo $B_{i,j,k}^w = (w_{i,j,k} x_{i,j,k}, w_{i,j,k} y_{i,j,k}, w_{i,j,k} z_{i,j,k}, w_{i,j,k})$. O sólido é relacionado com sua projetiva de acordo com a expressão:

$$\mathbf{S}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\mathbf{S}^w(\xi, \eta, \zeta)}{W(\xi, \eta, \zeta)} \quad (2.20)$$

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p} M_{j,q} L_{k,r}(\xi, \eta, \zeta) w_{i,j,k}$$

2.4 ABORDAGEM ISOPARAMÉTRICA

A geometria de um problema geometricamente unidimensional (uma curva no plano ou no espaço) no espaço físico pode ser representada a partir das funções de base NURBS usando-se a seguinte relação:

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{i=0}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i \quad (2.21)$$

sendo $\mathbf{x}(\xi)$ o vetor de coordenadas $x(\xi), y(\xi), z(\xi)$ de um ponto qualquer do espaço físico correspondente à coordenada paramétrica ξ e \mathbf{B}_i um vetor contendo as coordenadas dos i pontos de controle.

Da mesma forma, uma variável qualquer θ é aproximada através das funções de base NURBS de acordo com a seguinte equação:

$$\theta(\xi) = \sum_{i=0}^n R_i^p(\xi) \theta_i \quad (2.22)$$

O vetor $\boldsymbol{\theta}_i$ contém os valores da variável definidos sobre os pontos de controle. Ao adotarem-se as mesmas funções de base R_i^p tanto para a geometria como para as variáveis, obtém-se uma abordagem isoparamétrica para o problema analisado.

As equações (2.21) e (2.22) podem ser estendidas diretamente para superfícies substituindo a função unidimensional pelo produto tensorial entre funções e pontos de controle por uma rede de pontos adequada:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j} \quad (2.23)$$

$$\theta(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \boldsymbol{\theta}_{i,j} \quad (2.24)$$

e, para um sólido NURBS, tem-se:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{B}_{i,j,k} \quad (2.25)$$

$$\theta(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) \boldsymbol{\theta}_{i,j,k} \quad (2.26)$$

2.5 MÚLTIPLOS MACRO-ELEMENTOS

Na grande maioria das situações práticas, é necessário para descrever um domínio o uso de vários macro-elementos NURBS, visto que o produto tensorial do espaço paramétrico não é adequado para a representação de domínios complexos multiplamente conectados. Além disso, mesmo em simples domínios, do ponto de vista das simulações numéricas, o uso de múltiplos macro-elementos pode resultar em melhores malhas, conforme veremos mais tarde no capítulo de exemplos.

De acordo com Cottrell et al. (2009), o uso de múltiplos macro-elementos pode ainda facilitar análises numéricas quando diferentes materiais e modelos físicos são usados em diferentes partes do domínio ou, quando por exemplo, diferentes subdomínios estão sendo resolvidos em paralelo, quando torna-se conveniente do ponto de vista de estrutura de dados não ter um único macro-elemento entre diferentes processadores.

A utilização de múltiplos macro-elementos implica em compatibilizar a discretização na interface dos macro-elementos, ou seja, o mapeamento e a parametrização devem ser idênticos nesses locais. Cada ponto de controle em uma face de macro-elementos adjacentes

deve possuir um correspondente na outra face, assim como as variáveis do problema para as simulações numéricas.

Esses pontos de controle iguais serão tratados com um único ponto de controle no sistema global resultante da análise numérica. Na Figura 10 são apresentadas as funções base na interface de dois macro-elementos. Pode-se notar que na interface de dois macro-elementos a continuidade das funções será C_0 .

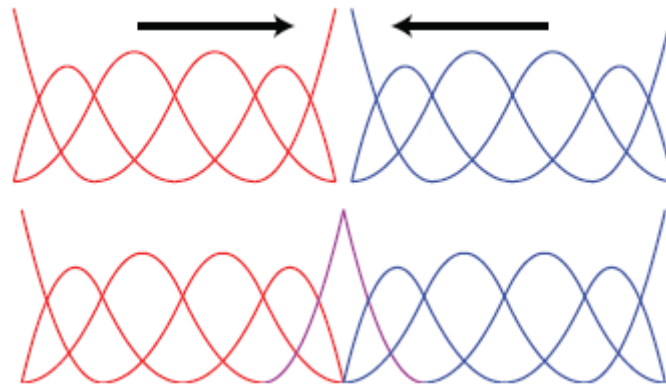


Figura 10: Funções base na interface de macro-elementos (Fonte: COTTRELL et al., 2009)

2.5 QUADRATURA GAUSSIANA

A integração numérica nos subdomínios é realizada através da quadratura Gaussiana. Para isso, conforme observa-se na Figura 11, realizam-se dois mapeamentos. Primeiramente mapeia-se o elemento do espaço físico (Ω^e) para o espaço paramétrico ($\hat{\Omega}^e$) através de um mapeamento geométrico e então através de um segundo mapeamento afim o elemento é levado para o espaço da quadratura ($\tilde{\Omega}^e$).

Considerando $\mathbf{x}(x, y, z)$ como o vetor de coordenadas no espaço físico, $\xi(\xi, \eta, \zeta)$ o vetor de coordenadas no espaço paramétrico onde estão definidas as funções de base e $\tilde{\xi}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})$ o vetor de coordenadas no espaço paramétrico de quadratura, a matriz jacobiana do mapeamento do espaço físico para o espaço quadratura fica definido através da seguinte relação:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tilde{\xi}} = \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \frac{d\xi}{d\tilde{\xi}} \quad (2.27)$$

O termo $dx/d\xi$ é calculado através da equação (2.21). Para o segundo termo da direita, considerando o elemento $\hat{\Omega}^e = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_i, \eta_{i+1}] \times [\zeta_i, \zeta_{i+1}]$, calcula-se $\xi, \eta, \zeta \in \hat{\Omega}^e$ a partir de $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \in \tilde{\Omega}^e$ através das seguintes relações:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_i + (\tilde{\xi} + 1) \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)}{2} \\ \eta &= \eta_i + (\tilde{\eta} + 1) \frac{(\eta_{i+1} - \eta_i)}{2} \\ \zeta &= \zeta_i + (\tilde{\zeta} + 1) \frac{(\zeta_{i+1} - \zeta_i)}{2}\end{aligned}\tag{2.28}$$

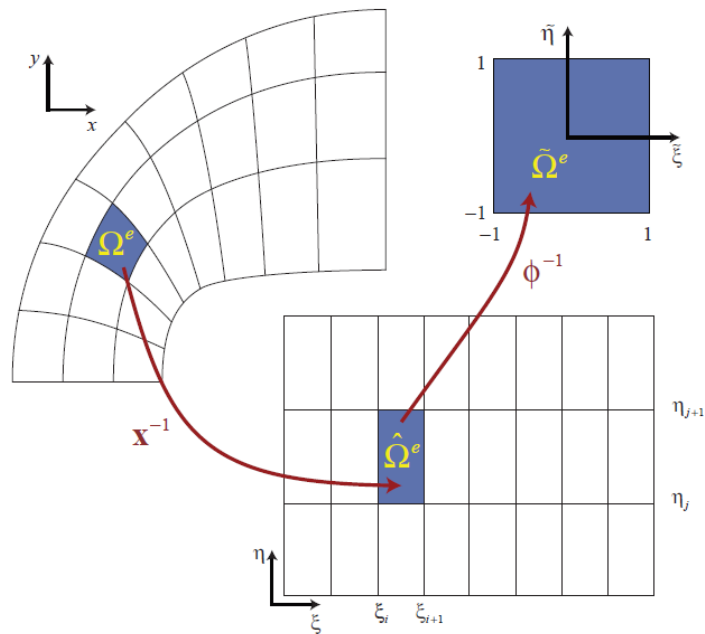


Figura 11: Mapeamentos do espaço físico para o espaço de quadratura (Fonte: COTTRELL et al., 2009).

3 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA DINÂMICA DOS FLUIDOS

A análise do escoamento de um fluido newtoniano requer a solução das equações que governam a dinâmica dos fluidos, ou seja, as equações de Navier-Stokes, expressas a partir do balanço de momento linear sobre um volume diferencial e da lei da viscosidade de Newton generalizada usando-se a hipótese de Stokes. Deve-se levar em conta ainda a equação de conservação de massa e, nos casos em que ocorram variações significativas no campo de temperatura, a equação de conservação de energia, a qual deve ser utilizada também no caso de escoamentos compressíveis juntamente com relações termodinâmicas (ver, por exemplo, White, 1991). Essas equações dão origem a um sistema de equações diferenciais parciais acopladas e não lineares que tornam possível avaliar o comportamento de um fluido no espaço e no tempo. No caso de escoamentos incompressíveis, quando a equação de conservação de massa reduz-se à condição de divergente nulo sobre o campo de velocidades, deve-se utilizar uma metodologia que permita o acoplamento entre a pressão e a velocidade, sendo nesse estudo utilizado a hipótese da pseudo-compressibilidade proposta por Chorin (1967).

As equações que descrevem o escoamento de fluidos podem representar em teoria todas as escalas da turbulência. Entretanto, a chamada simulação DNS dos escoamentos leva a necessidade de uma discretização do domínio em elementos de tamanho inferiores às menores escalas do escoamento (escala de Kolmogorov). Para alguns escoamentos naturais existentes, as menores escalas são tão pequenas que ultrapassam a capacidade dos computadores mais potentes atuais (BLOCKEN, 2014). Para sanar tal inconveniente, são utilizados os chamados modelos de turbulência, sendo utilizada nesse trabalho a metodologia LES, pois é capaz de lidar corretamente com fenômenos complexos que surgem em escoamentos altamente transientes.

3.1 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

As equações de Navier-Stokes são derivadas da Segunda Lei de Newton, onde se tem que a soma das forças externas que atuam sobre um elemento infinitesimal de fluido é igual à variação temporal da quantidade de movimento do mesmo. Considerando um sistema de coordenadas cartesiano ortogonal e uma descrição cinemática Euleriana, obtém-se a forma conservativa das equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = X_i - \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Nessa equação têm-se como variáveis primárias as componentes do vetor velocidade do fluido v_i e a pressão termodinâmica P , ambas descritas em função da sua posição com relação às coordenadas cartesianas x_i e em função do tempo t , sendo ρ a massa específica do fluido. As componentes X_i representam as forças de volume atuantes e τ_{ij} são as componentes do tensor de tensões viscosas. O símbolo δ_{ij} é conhecido como delta de Kroenecker, sendo $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

As componentes do tensor de tensões viscosas para um fluido newtoniano são representadas pela seguinte equação constitutiva:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

sendo μ o coeficiente de viscosidade dinâmica e λ o coeficiente de viscosidade volumétrica que corresponde a $-2\mu/3$, de acordo com a Hipótese de Stokes. Substituindo a relação apresentada em (3.2) na equação (3.1), chega-se a expressão:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = X_i - \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (3.3)$$

$(i, j, k = 1, 2, 3)$

A equação de conservação de massa, por sua vez, realiza um balanço em um volume infinitesimal entre as parcelas de massa entrando e saindo por unidade de tempo e a mudança em densidade, sendo expressa por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (3.4)$$

A equação da conservação de energia é derivada da primeira Lei da Termodinâmica e realiza um balanço entre a energia interna no sistema e a energia trocada através de suas fronteiras com o exterior na forma de calor e trabalho. Para escoamentos de fluidos newtonianos, a equação de conservação de energia pode ser expressa por:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e v_j)}{\partial x_j} + p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{i,j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \phi + Q \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

onde T é a temperatura, e é a energia total específica, $K_{i,j}$ representa as componentes do tensor de condutibilidade térmica e Q é o termo fonte de calor. A parcela $\mu \phi$ é conhecida como termo de dissipação viscosa, o qual é representado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mu \phi = 2\mu & \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 + \\ & \mu \left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nesse estudo trabalha-se apenas com escoamentos isotérmicos, fazendo com que não seja mais necessário o uso da equação de conservação de energia.

Para a resolução das equações que descrevem o comportamento do fluido devem ser ainda fornecidas as condições iniciais e as condições de contorno essenciais e naturais das variáveis do problema.

As condições iniciais de velocidade (v_{i0}) e pressão (P_0) em $t = t_0$ sobre o domínio de análise Ω são representadas por:

$$\begin{aligned} v_i [x_1, x_2, x_3] &= v_{i0} \quad (i = 1, 2, 3) \\ P [x_1, x_2, x_3] &= P_0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

As condições de contorno essenciais ou de Dirichlet são dadas pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} v_i &= v_i^* \quad \text{em } \Gamma_v \\ P &= P^* \quad \text{em } \Gamma_p \end{aligned} \quad (3.8)$$

sendo v_i^* e p^* os valores prescritos nos contornos Γ_v e Γ_p do domínio de análise Ω , respectivamente.

As condições de contorno Naturais ou de Neumann são obtidas através da seguinte equação:

$$t_i^* = \left[-P\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] n_j \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

onde t_i^* são as componentes do vetor de tração prescritas na direção x_i agindo sobre a região Γ_σ do contorno e n_j são as componentes do vetor de co-senos diretores da normal a um ponto qualquer do contorno Γ_σ segundo a direção x_j dos eixos coordenados.

3.2 HÍPOTESE DA PSEUDO-COMPRESSIBILIDADE

O problema da redução da equação da conservação de massa para um escoamento de fluido incompressível a uma simples equação do divergente do campo de velocidades pode ser resolvido através da hipótese da pseudo-compressibilidade elaborada por Chorin (1967). Esta hipótese baseia-se no fato de que, para um fluido em meio natural, a velocidade do som (c) se propaga a um valor finito, conforme a seguinte equação:

$$c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad (3.10)$$

Dessa forma, é possível obter-se um termo explícito para a pressão na equação de conservação de massa:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (3.11)$$

3.3 SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS (LES)

A metodologia LES é empregada na simulação de escoamentos turbulentos, situando-se em uma posição intermediária entre a simulação DNS e a simulação utilizando as equações RANS. A formulação baseia-se no fato de que para altos números de Reynolds o escoamento turbulento pode ser considerado como uma composição de vórtices, no qual os grandes vórtices interagem com o escoamento principal extraindo energia do mesmo e transferindo-a para os vórtices de escala inferior. Os vórtices de escalas inferiores transferem energia para vórtices ainda menores e assim sucessivamente até que em uma dada escala as forças viscosas tornam-se predominantes e a energia é dissipada. Esse comportamento é

conhecido como cascata de energia, cuja descrição detalhada pode ser encontrada, por exemplo, em Hinze (1975) e Lesieur (2008).

As grandes escalas de turbulência são responsáveis pela maior parte do transporte de energia e de quantidade de movimento, sendo resolvidas diretamente pelas equações fundamentais filtradas. As escalas inferiores à resolução da malha são representadas através de modelos de turbulência sub-malha, que tem por finalidade representar os efeitos do processo físico de transferência de energia entre as menores escalas sobre as grandes escalas.

A diferenciação entre grandes escalas e as pequenas é realizada através de um processo de filtragem espacial aplicada sobre as variáveis de campo do problema da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i + v_i' \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \\ P &= \bar{P} + P' \end{aligned} \quad (3.12)$$

na qual o símbolo barra indica uma variável de grandes escalas e o símbolo apóstrofe de pequenas escalas.

A parcela das grandes escalas pode ser obtida através da convolução da variável a ser filtrada com uma função filtro (LEONARD, 1974). Considerando uma variável f e uma função filtro $G(x_i)$ têm-se:

$$\bar{f}(x_i) = \int G(x_i - x_i') f(x_i') dx_i' \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

De acordo com Findikakis e Street (1982), a função filtro tipo “box” é a que apresenta melhores resultados, sendo definida como:

$$G(x_i - x_i') = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n \text{ dim}} \frac{1}{\Delta_i} & \text{para } |x_i - x_i'| < \frac{\Delta_i}{2} \\ 0 & \text{para } |x_i - x_i'| > \frac{\Delta_i}{2} \end{cases} \quad (3.14)$$

com Δ_i sendo a dimensão do filtro na direção coordenada x_i e $n \text{ dim}$ o número de dimensões do problema. No contexto do Método dos Elementos Finitos e da Análise Isogeométrica, o filtro é constituído pelo tamanho do elemento, sendo a dimensão característica dada por:

$$\bar{\Delta} = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3} \quad (3.15)$$

em que Δx , Δy e Δz indicam as dimensões do elemento segundo as direções coordenadas x_i .

O filtro uniforme empregado conduz a uma operação de média espacial das variáveis envolvidas. Considerando f e g duas variáveis genéricas, as principais propriedades para a operação de filtragem dessas variáveis consistem em:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{f}} &= \overline{f} & \overline{\overline{g}} &= \overline{g} & \overline{f'} &= 0 & \overline{g'} &= 0 \\ \overline{g+f} &= \overline{f} + \overline{g} & \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} & \frac{\partial \overline{g}}{\partial s} &= \frac{\partial \overline{g}}{\partial s} \\ \overline{\overline{gf}} &\neq \overline{\overline{gf}} & \overline{\overline{gf'}} &\neq \overline{\overline{gf'}} & \overline{\overline{gf'}} &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Aplicando a decomposição das variáveis de acordo com (3.12) e as propriedades apresentadas em (3.16) nas equações (3.3) e (3.11), chega-se às seguintes equações:

$$\frac{\partial(\overline{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{v}_i \overline{v}_j)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial \overline{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) = \frac{\overline{X}_i}{\rho} \quad (3.17)$$

$(i, j, k = 1, 2, 3)$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (3.18)$$

com ν sendo a viscosidade cinemática do fluido. Os termos sub-malha, que consistem em termos resultantes do produto entre variáveis de pequenas escalas, são desprezados na equação de conservação de massa.

A parcela advectiva da equação (3.17) pode ser reescrita como:

$$\overline{v_i v_j} = \left(\overline{v_i v_j} + \overline{v_i' v_j'} + \overline{v_i' v_j} + \overline{v_i v_j'} \right) \quad (3.19)$$

Considerando a aproximação de Leonard (1974) para o termo $\overline{v_i' v_j'}$ e a aproximação de Clark et al. (1979) para os termos cruzados, chega-se à seguinte expressão para o termo advectivo:

$$\overline{v_i v_j} = \left(\overline{v_i v_j} + L_{ij} + C_{ij} + \overline{v_i' v_j'} \right) \quad (3.20)$$

em que:

$$L_{ij} + C_{ij} = \frac{\Delta_k^2}{2\gamma} \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_k} \quad (3.21)$$

para a função filtro tipo box, toma-se $\gamma = 6$. Em Petry e Awruch (1997) demonstra-se que os termos de Leonard e os termos cruzados aumentam o tempo de processamento e exercem pouca influência sobre o resultado, podendo-se então reduzir a equação (3.20) a:

$$\overline{v_i v_j} = (\overline{v_i} \overline{v_j} + \overline{v'_i v'_j}) \quad (3.22)$$

Com isso, o termo $\overline{v'_i v'_j}$ é introduzido na equação (3.17), com o tensor de tensões sub-malha sendo representado por $\overline{\tau}_{ij}^{SGS} = \rho \overline{v'_i v'_j}$.

O tensor $\overline{\tau}_{ij}^{SGS}$ deve ser modelado com um modelo de fechamento. Os modelos de fechamento mais utilizados baseiam-se na hipótese de Boussinesq (ver SCHLICHTING, 1979). A hipótese é uma analogia com a lei da viscosidade de Newton definida para escoamentos laminares, sendo no contexto da simulação LES definida por:

$$\overline{\tau}_{ij}^{SGS} = 2\mu_t \overline{S}_{ij} \quad (3.23)$$

em que μ_t é a viscosidade dinâmica turbulenta do escoamento e \overline{S}_{ij} é o tensor taxa de deformação expresso em termos das velocidades de grandes escalas da seguinte forma:

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.24)$$

Portanto, os modelos sub-malha têm como objetivo a determinação de μ_t . Nesse trabalho será utilizado o modelo clássico de Smagorinsky (1963), no qual a viscosidade turbulenta é obtida de acordo com a seguinte expressão:

$$\mu_t = \rho (C_s \overline{\Delta})^2 |\overline{S}| \quad (3.25)$$

com $|\overline{S}|$ dado por:

$$|\overline{S}| = (2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij})^{1/2} \quad (3.26)$$

e C_s correspondendo à constante de Smagorinsky, que usualmente assume valores entre 0,1 e 0,25.

A forma final para as equações fundamentais do escoamento fica definida então por:

$$\frac{\partial(\bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{v_i v_j})}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) = \frac{\bar{X}_i}{\rho} \quad (3.27)$$

$(i, j, k = 1, 2, 3)$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (3.28)$$

Um fato importante a ser entendido é que a viscosidade turbulenta não é uma característica do fluido, mas sim do escoamento.

4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO

A simulação numérica de escoamentos de fluidos consiste em resolver de forma aproximada as equações que governam a dinâmica dos fluidos através de procedimentos de discretização temporal e espacial dessas equações. No contexto do MEF, princípios variacionais devem ser considerados adequadamente a fim de produzir uma formulação numérica estável, além de garantir que as aproximações conduzam a resultados esperados.

Nesse trabalho, a discretização temporal é realizada através do método de Taylor-Galerkin de dois passos, que consiste na utilização de séries de Taylor para a aproximação no tempo das variáveis das equações fundamentais do escoamento, seguida da aplicação do método de convencional de Galerkin. Esta formulação tem demonstrado ser muito eficiente na estabilização dos termos advectivos e tem sido utilizada em vários trabalhos do PPGEC/UFRGS, como em Teixeira (2001), Braun (2007) e Madalozzo (2012), mostrando-se muito apropriada principalmente nos aspectos referentes ao processamento, estabilidade e qualidade de resultados.

Para a discretização espacial utiliza-se uma abordagem baseada na aplicação do método de Bubnov-Galerkin no contexto da Análise Isogeométrica, a qual pode ser vista como uma formulação em elementos finitos generalizada, propiciando o uso de funções de base em número e grau qualquer. A representação da geometria e aproximações para as variáveis do escoamento são obtidas a partir de funções de base do tipo NURBS juntamente com o conceito de pontos de controle.

4.1 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL: MÉTODO EXPLÍCITO DE TAYLOR-GALERKIN DE DOIS PASSOS

A discretização temporal explícita de Taylor-Galerkin de dois passos é realizada através de uma expansão em série de Taylor aplicada sobre as variáveis de campo (pressão e velocidade). Considerando uma variável genérica $\phi(\bar{x}, t)$, a expansão é realizada até os termos de segunda ordem, sendo definida por:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \frac{\partial \phi^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial t^2} = \phi^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \phi^n}{\partial t} \right) \quad (4.1)$$

na qual n equivale ao instante de tempo t em um intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$. Essa equação é resolvida em dois passos, sendo que no primeiro passo calculam-se as variáveis de campo no instante de tempo $t + \Delta t/2$, que corresponde aos termos dentro dos parênteses da equação (4.1), ou seja:

$$\phi^{n+1/2} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \phi^n}{\partial t} \quad (4.2)$$

No segundo passo, as variáveis são calculadas no tempo $t + \Delta t$ usando os valores obtidos no passo $t + \Delta t/2$ de acordo com:

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \frac{\partial \phi^{n+1/2}}{\partial t} \quad (4.3)$$

4.1.1 Equação de conservação da quantidade de movimento.

Para a discretização temporal de acordo com a equação (4.1) deve-se inicialmente obter as derivadas primeira e segunda da variável a ser discretizada. Para a equação de conservação da quantidade de movimento apresentada em (3.3) discretiza-se temporalmente o vetor velocidade, com a primeira derivada obtida diretamente isolando-se esse termo, como mostrado abaixo:

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^n = \left[\frac{1}{\rho} X_i - v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + v_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right]^n \quad (4.4)$$

Derivando-se a equação (4.4) em relação a t chega-se a segunda derivada temporal:

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial X_i}{\partial t} - \left(\frac{\partial v_j}{\partial t} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial P}{\partial t} \delta_{ij} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + v_t) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial t} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial t} \delta_{ij} \right) \right]^n \quad (4.5)$$

De acordo com Braun (2002), o termo $(\partial v_j / \partial t)(\partial v_i / \partial x_j)$ pode ser desprezado da equação sem levar a perda de precisão das soluções.

Considera-se uma linearização das derivadas temporais para a expressão (4.5), que para uma variável genérica ϕ consiste em:

$$\frac{\partial \phi^n}{\partial t} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = \frac{\Delta \phi^{n+1}}{\Delta t} \quad (4.6)$$

e substituindo as relações (4.5) e (4.4) em (4.1) chega-se a seguinte expressão:

$$\Delta v_i^{n+1} = \Delta t \left[\frac{1}{\rho} X_i - v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + v_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right]^n \quad (4.7)$$

$$\frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{\rho} \Delta X_i - v_j \frac{\partial \Delta v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Delta P}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + v_t) \left(\frac{\partial \Delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \Delta v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right]^{n+1}$$

Trabalhando com a equação (4.7) chega-se a relação exposta em (4.3) para a velocidade:

$$\Delta v_i^{n+1} = \Delta t \left[\frac{1}{\rho} \Delta X_i - v_j \frac{\partial \Delta v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Delta P}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + v_t) \left(\frac{\partial \Delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \Delta v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right]^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

ou seja,

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \Delta t \frac{\partial v_i^{n+1/2}}{\partial t} \quad (4.9)$$

Dessa forma, o processo de determinação de v_i^{n+1} consiste em primeiramente calcular-se a variável v_i no tempo $n+1/2$. Para isso, utiliza-se uma expansão em série de Taylor em $n+1/2$ que para uma variável genérica $\phi(\vec{x}, t)$ é descrita por:

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} = \phi^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \phi^n}{\partial t} + \frac{(\Delta t/2)^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial t^2} \quad (4.10)$$

A derivada primeira da velocidade é simplesmente a equação (4.4) e a derivada segunda é obtida substituindo-se (4.4) em (4.5). Eliminando-se todos os termos de velocidade com derivadas iguais ou superiores a terceira ordem, os termos com derivadas temporais de forças de volume e, por fim, os termos de pressão com derivadas iguais ou superiores a segunda ordem, chega-se finalmente a:

$$\frac{\partial^2 v_i^n}{\partial t^2} = \left[-\frac{1}{\rho} v_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + v_j v_k \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} \right]^n \quad (4.11)$$

Substituindo as equações (4.4) e (4.11) em (4.10) e omitindo-se da equação (4.11) o termo de pressão, chega-se a expressão para a velocidade em $n + 1/2$:

$$v_i^{n+1/2} = v_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{\rho} X_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + v_i) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\Delta t}{4} \frac{1}{\rho} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\Delta t}{4} v_j v_k \frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 x_i x_j} \right] \quad (4.12)$$

O campo de velocidades deve ser corrigido pelo termo de pressão omitido da equação (4.11) através da seguinte relação:

$$v_i^{n+1/2} = v_i^{n+1/2} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial \Delta P^{n+1/2}}{\partial x_j} \delta_{ij} \quad (4.13)$$

sendo que a dedução do termo $\Delta P^{n+1/2}$ é apresentada mais adiante.

Por fim, a solução obtida em (4.13) é substituída em (4.8) para a obtenção da velocidade em $n + 1$.

4.1.2 Equação de Conservação de Massa

Na equação de conservação de massa o termo expandido pela série de Taylor é a pressão. A derivada primeira é obtida diretamente pela equação (3.11) isolando-se o termo de pressão:

$$\frac{\partial P^n}{\partial t} = - \left[v_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right]^n \quad (4.14)$$

A segunda derivada é obtida derivando-se em relação a t a expressão (4.14):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = - \left[v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial t} \right]^n \quad (4.15)$$

Substituindo as expressões (4.14) e (4.15) em (4.1) e considerando a linearização das derivadas temporais de acordo com (4.6), chega-se à equação:

$$\Delta P^{n+1} = -\Delta t \left[v_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right]^n - \frac{\Delta t}{2} \left[v_j \frac{\partial \Delta P}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_j} \right]^{n+1} \quad (4.16)$$

que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\Delta P^{n+1} = \Delta t \left[v_j \frac{\partial \Delta P}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_j} \right]^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.17)$$

Dessa forma o problema de se determinar P^{n+1} consiste em determinar-se inicialmente a pressão em $n+1/2$. A primeira derivada é obtida diretamente de (4.14) e a segunda derivada é obtida substituindo (4.14) em (4.15), considerando-se apenas o termo que contém a derivada segunda da pressão, ou seja:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \left[v_j v_k \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} \right]^n \quad (4.18)$$

Substituindo-se (4.14) e (4.18) em (4.10), considerando a pressão como variável, chega-se a $P^{n+\frac{1}{2}}$:

$$P^{n+\frac{1}{2}} = P^n - \frac{\Delta t}{2} \left[v_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + \rho c^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \frac{\Delta t}{4} v_j v_k \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} \right] \quad (4.19)$$

Por fim, substitui-se a expressão (4.19) em (4.17) para a obtenção da pressão no tempo $n+1$.

4.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL: MÉTODO DE BUBNOV-GALERKIN APLICADO A ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

Na Análise Isogeométrica as variáveis das equações diferenciais e a geometria do problema são aproximadas por funções de base NURBS através da discretização do problema em subdomínios. Como a função aproximadora não é, em geral, a solução exata da equação diferencial, tem-se um resíduo que deve ser minimizado. O método dos resíduos pondera os resíduos resultantes das funções aproximadoras através de uma função peso, sendo o produto entre a função residual e a função peso suposto igual a zero no domínio de integração de cada elemento, determinando a condição de ortogonalidade.

Suponha-se a seguinte equação diferencial:

$$L(\mathbf{v}) - \mathbf{f} = 0 \text{ em } \Omega \quad (4.20)$$

onde $L(\bullet)$ é um operador diferencial, \mathbf{v} é o vetor que representa a solução exata do problema, \mathbf{f} é um vetor de constantes e Ω representa o domínio de análise. Emprega-se uma função aproximadora ($\tilde{\mathbf{v}}$) para \mathbf{v} dada pela seguinte expressão:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=0}^n N_i \tilde{\mathbf{v}}_i \quad (4.21)$$

onde N_i representa as funções NURBS e $\tilde{\mathbf{v}}_i$ são as variáveis de controle localizadas nos pontos de controle do elemento. Dessa forma, a equação (4.20) transforma-se em:

$$L(\tilde{\mathbf{v}}) - \mathbf{f} = \mathbf{R} \text{ em } \Omega \quad (4.22)$$

onde \mathbf{R} é o resíduo resultante da aproximação. A ortogonalização do resíduo é realizada em relação a uma função peso (\mathbf{W}) em todo o domínio da análise, chegando-se a:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^T (L(\tilde{\mathbf{v}}) - \mathbf{f}) \, d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^T \mathbf{R} \, d\Omega_e = 0 \quad (4.23)$$

Nesse trabalho utiliza-se o método de Bubnov-Galerkin, no qual a função peso \mathbf{W} é igual a aproximação da variação da variável independente aproximada da equação analisada, ou seja, $\mathbf{W} = N_i \delta \tilde{\mathbf{v}}_i$.

A função aproximadora deve ser contínua até a ordem de derivação mais elevada que exista na equação diferencial, no entanto, essa restrição pode ser diminuída utilizando-se a formulação fraca do problema, que consiste em realizar uma integral por partes nos termos que contenham derivadas de mais alta ordem.

4.2.1 Equação de Conservação da Quantidade de Movimento e Equação de Conservação de Massa

As variáveis que necessitam ser aproximadas para a solução do sistema de equações fundamentais são a velocidade e a pressão, que são expressas vetorialmente por:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{N} \mathbf{v}_i \quad (4.24)$$

$$P = \mathbf{N} \mathbf{P} \quad (4.25)$$

sendo \mathbf{v}_i e \mathbf{P} o vetor das variáveis de controle localizadas nos pontos de controle do elemento e \mathbf{N} é uma matriz linha que contém as funções de base NURBS.

Para reduzir a exigência de continuidade das funções de base realizou-se uma integração por partes nos termos que apresentam derivadas de segunda ordem nas equações (4.12) e (4.19) através do teorema de Gauss-Green. O termo de pressão na equação de quantidade de movimento também foi submetido ao procedimento de integração por partes. Assim, substituindo-se as expressões (4.24) e (4.25) nessas equações e aplicando então o método de Bubnov-Galerkin, chega-se as equações de conservação da quantidade e momento e massa para obtenção de velocidade e pressão no tempo $n + 1/2$:

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_i^{n+1/2} = \mathbf{M}\mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{X}}_i - (\mathbf{AD} + \mathbf{BD})\mathbf{v}_i + \frac{1}{\rho} \mathbf{G}_j \delta_{ij} \mathbf{P} - \mathbf{D}_{ij}^{2p} \mathbf{v}_j + \tilde{\mathbf{t}}_i + \tilde{\mathbf{b}} \mathbf{d}\mathbf{v}_i \right]^n \quad (4.26)$$

$$\mathbf{MP}^{n+1/2} = \mathbf{MP}^n + \frac{\Delta t}{2} \left[(\mathbf{AD} + \mathbf{BD})\mathbf{P} + \rho c^2 \mathbf{G}_j^T \mathbf{v}_j - \tilde{\mathbf{b}} \mathbf{d}\mathbf{p} \right]^n \quad (4.27)$$

Realizando-se o mesmo procedimento de substituição das funções aproximadoras e a aplicação método de Bubnov-Galerkin à equação (4.13) obtém-se a correção da velocidade para o passo $n + 1/2$:

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_i^{n+1/2} = \mathbf{M}\mathbf{v}_i^{n+1/2} - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta t}{4} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \delta_{ij} d\Omega (\mathbf{P}^{n+1/2} - \mathbf{P}^n) \quad (4.28)$$

Por fim, conhecidas as variáveis no tempo $n + 1/2$ e substituindo-se as aproximações (4.24) e (4.25) em (4.8) e (4.17) obtém-se as variáveis de velocidade e pressão no tempo $n + 1$:

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{v}_i^n + \Delta t \left[\frac{1}{\rho} \mathbf{X}_i - \mathbf{AD}\mathbf{v}_i + \frac{1}{\rho} \mathbf{G}_j \delta_{ij} \mathbf{P} - \mathbf{D}_{ij}^{2p} \mathbf{v}_j + \tilde{\mathbf{t}}_i \right]^{n+1/2} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{MP}^{n+1} = \mathbf{MP}^n + \Delta t \left[(\mathbf{AD})\mathbf{P} - \rho c^2 \mathbf{G}_j^T \mathbf{v}_j \right]^{n+1/2} \quad (4.30)$$

As matrizes e vetores apresentados nas equações desse item são definidos da seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}\mathbf{N}^T d\Omega \quad (4.31)$$

$$\mathbf{AD} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}\mathbf{v}_j^T \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega \quad (4.32)$$

$$\mathbf{G}_j = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \mathbf{N} d\Omega \quad \mathbf{G}_j^T = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega \quad (4.33)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{D} = \frac{\Delta t}{4} \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}\mathbf{v}_j^n)(\mathbf{N}\mathbf{v}_k^n) \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_k} d\Omega \quad (4.34)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{d}\mathbf{v}_i = \frac{\Delta t}{4} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \left[(\mathbf{N}\mathbf{v}_j^n)(\mathbf{N}\mathbf{v}_k^n) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_k} \mathbf{v}_i^n \right] n_j d\Gamma \quad (4.35)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{d}\mathbf{p} = \frac{\Delta t}{4} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \left[(\mathbf{N}\mathbf{v}_j^n)(\mathbf{N}\mathbf{v}_k^n) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_k} \mathbf{P}^n \right] n_j d\Gamma \quad (4.36)$$

$$\mathbf{X}_i = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T (\mathbf{N}\mathbf{X}_i^n) d\Omega \quad (4.37)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i - \frac{\Delta t}{4} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}\mathbf{v}_j^n \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \mathbf{X}_i^n d\Omega \quad (4.38)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}_i = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} \mathbf{v}_i^n + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_i} \mathbf{v}_j^n \right) + \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_k} \mathbf{v}_k^n \right) \delta_{ij} - \frac{1}{\rho} \mathbf{N}\mathbf{P}^n \right] n_j d\Gamma \quad (4.39)$$

$$\mathbf{D}_{ij}^{2p} = \begin{cases} \text{se } i=j \text{ (k=valores restantes)} \\ \int_{\Omega_e} \left[2(\nu + \nu_t) + \frac{\lambda}{\rho} \right] \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_e} (\nu + \nu_t) \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_k} d\Omega \\ \text{se } i \neq j \\ \int_{\Omega_e} (\nu + \nu_t) \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_k} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x_k} d\Omega \end{cases} \quad (4.40)$$

Todas as matrizes apresentadas de (4.31) a (4.40) são integradas numericamente em cada subdomínio através do método de Gauss-Legendre com mapeamento realizado de acordo com o apresentado no item 2.5.

Para utilização de um sistema explícito desacoplado emprega-se uma matriz de massa discreta \mathbf{M}_d no lugar da matriz consistente \mathbf{M} . A fim de auxiliar o processo de estabilização do campo de pressão, emprega-se neste trabalho o conceito de parâmetro seletivo de massa proposto por Kawahara e Hirano (1983). Assim, no termo de massa à direita da igualdade na equação de conservação de massa, equação (4.30), adota-se:

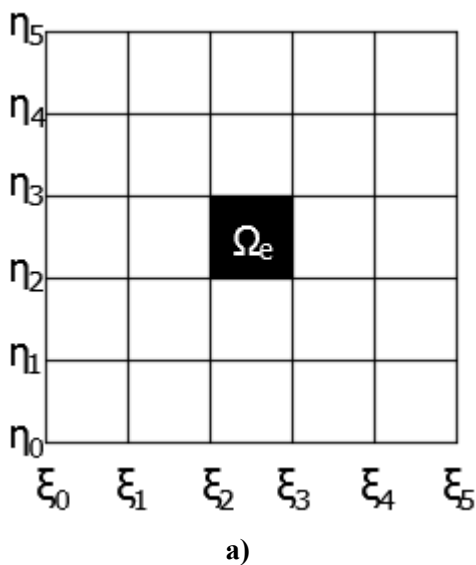
$$\tilde{\mathbf{M}} = e\mathbf{M}_d + (1-e)\mathbf{M} \quad (4.41)$$

onde e é o parâmetro de diagonalização seletiva, o qual tem por finalidade controlar o amortecimento numérico, assumindo valores entre 0 e 1. Nesse trabalho foi utilizado o valor de 0,9 para esse parâmetro.

4.3 MATRIZES DE CONECTIVIDADE

Assim como no MEF, na Análise Isogeométrica adota-se uma convenção para a numeração das funções em nível global e uma numeração em nível local (nível de elemento). Durante o processo de integração das matrizes da formulação em nível de elemento são utilizadas numerações locais. A proposta das matrizes de conectividade é relacionar de forma simples o esquema local com o global, possibilitando o armazenamento dos dados obtidos em cada elemento em um sistema global, onde finalmente são aplicadas as condições iniciais e de contorno do problema e então o conjunto de equações é resolvido de forma desacoplada. No contexto na Análise Isogeométrica existem duas matrizes que possibilitam essa ligação entre o sistema local e o global: as matrizes INC e IEN.

Para simplificar o processo de entendimento dessas matrizes, adota-se um exemplo bidimensional, com $p = 2$ e $q = 2$ e vetores de nós $\Xi = [0,0,0,1,1,1]$ e $Z = [0,0,0,1,1,1]$, resultando nos espaços apresentados na Figura 12 com apenas um elemento não nulo e 9 funções de forma.



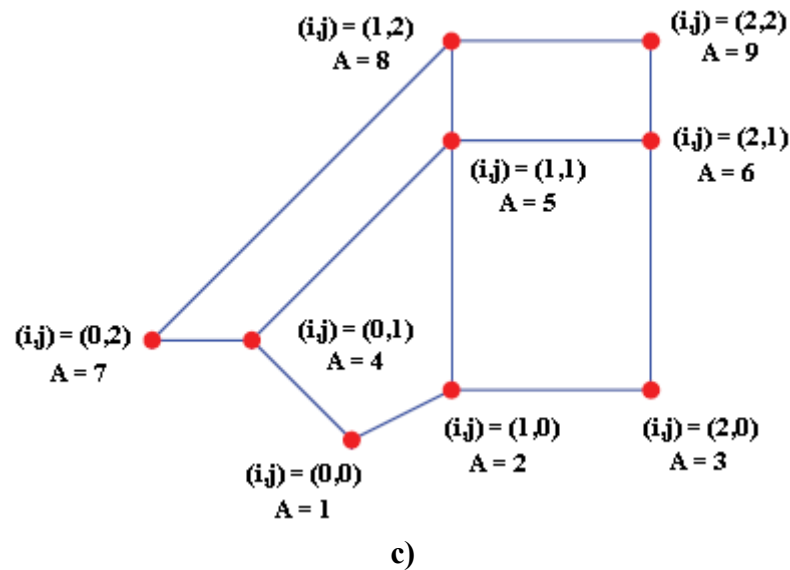


Figura 12: Definições do problema: a) espaço indicial; b) espaço físico – malha de elementos; c) espaço físico – malha de pontos de controle.

Antes da apresentação da matriz INC é necessário que sejam definidas as seguintes características referentes às malhas NURBS: numeração global das funções e coordenadas NURBS. A numeração global (A) de uma função bidimensional N_A formada pelo produto tensorial entre $N_i(\xi)$ e $N_j(\eta)$ é definida da seguinte forma:

$$A = (n+1)j + i + 1 \quad (i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m) \quad (4.42)$$

sendo $n + 1$ a quantidade de funções na direção ξ e $m + 1$ a quantidade de funções na direção η . As coordenadas NURBS podem ser entendidas como os índices que definem os vértices do espaço paramétrico.

A matriz INC relaciona o número global das funções com as coordenadas NURBS onde o suporte dessa função inicia. Dessa forma, para a função N_A as coordenadas NURBS i e j são definidas através da matriz INC da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} i &= INC(A, 1) \\ j &= INC(A, 2) \end{aligned} \quad (4.43)$$

A matriz de conectividade INC do exemplo em questão é representada na Tabela 1.

Tabela 1: Matriz INC.

INC	A(número global das funções de forma)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1(ξ)	0	1	2	0	1	2	0	1	2
2(η)	0	0	0	1	1	1	2	2	2

Para melhor compreensão da matriz IEN define-se primeiramente os conceitos de elemento, de numeração local e global dentro do mesmo. A numeração de um elemento e , no espaço bidimensional, é realizada através da seguinte relação:

$$e = (j - q)(n + 1 - p) + (i + 1 - p) \quad (p \leq i \leq n; \quad q \leq j \leq m) \quad (4.44)$$

onde j e i são as coordenadas NURBS do vértice esquerdo inferior do elemento e p e q são os graus das funções nas direções ξ e η , respectivamente. Assim, a posição de um elemento pode ser definida por $\Omega_e = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_i, \eta_{i+1}]$.

Do conhecimento das propriedades das funções *B-Splines*, sabe-se exatamente quais funções de forma tem suporte no elemento e , isto é, qualquer função no formato $N_\alpha(\xi)N_\beta(\eta)$, de tal modo que $i - p \leq \alpha \leq i$ e $j - q \leq \beta \leq j$. Então, o número total de funções de forma em um elemento é definido como $(p + 1)(q + 1)$.

Considerando como função local de número 1 no elemento a função de forma com coordenadas NURBS i e j correspondentes ao vértice inferior esquerdo do elemento, as demais funções de forma locais são numeradas da direita para esquerda no sentido de ξ e de cima para baixo no sentido de η .

A função local 1 possui uma numeração global equivalente a A definida de acordo com a equação (4.42). Dessa forma, para a obtenção da numeração global respectiva aos demais valores locais faz-se o mesmo caminho para trás. A numeração global das primeiras $p + 1$ funções na direção de ξ são $A, A - 1, \dots, A - p$. Movendo-se uma linha na direção de η a numeração continua com $A - n, A - n - 1, A - n - p$. Novamente movendo-se para a próxima linha a numeração segue $A - 2n, A - 2n - 1, A - 2n - p$ e assim até a última função de forma do elemento.

A matriz IEN conecta as funções de forma globais com a respectiva numeração local no elemento. Considerando o elemento de numeração e e a função de forma local de numeração b , sua função global B é dada por:

$$B = IEN(b, e) \quad (4.45)$$

A matriz de conectividade IEN para o exemplo em questão é representada na .

Tabela 2.

Tabela 2: Matriz IEN.

		b (funções de forma local)								
IEN		1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>e=1</i>		9	8	7	6	5	4	3	2	1

4.4 CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE

O uso de esquemas explícitos implica a restrição do tamanho de incremento de tempo a uma condição de estabilidade. Nesse trabalho se utiliza a condição de Courant, descrita pela seguinte equação em nível de elemento:

$$(\Delta_t)_e = \alpha \frac{(\Delta_x)_e}{c + V_e} \quad (4.46)$$

onde $(\Delta_t)_e$ é o incremento de tempo no elemento e , α é um coeficiente de segurança ($\alpha \leq 1$), $(\Delta_x)_e$ é a dimensão característica do elemento, V_e é a velocidade do escoamento no elemento e c é a velocidade do som. Nesse trabalho adota-se como $(\Delta_t)_e$ o menor valor obtido entre todos os elementos.

4.5 CONDIÇÃO DE CONVERGÊNCIA

Nos escoamentos permanentes verifica-se a cada passo de tempo se o escoamento já chegou numericamente a esse estado através da avaliação do resíduo de uma ou mais variáveis do problema. Quando o resíduo se iguala a uma tolerância inicialmente determinada, diz-se que a análise convergiu. Nesse trabalho utiliza-se a norma euclidiana para a avaliação do resíduo nas variáveis de velocidade e pressão, conforme expressa na seguinte equação:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{npc} (\phi_i^{n+1} - \phi_i^n)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{npc} (\phi_i^n)^2}} \leq \text{tolerância} \quad (4.47)$$

sendo ϕ_i^n a variável no ponto de controle i e no tempo n , ϕ_i^{n+1} a variável no ponto de controle i e no tempo $n+1$ e npc a quantidade total de pontos de controle do problema. A tolerância para os problemas foi adotada geralmente como sendo 10^{-9} .

5 REPRESENTAÇÃO DE GEOMETRIAS A PARTIR DE FUNÇÕES NURBS

Nesse capítulo serão apresentadas ferramentas comumente utilizadas para descrição de geometrias, como os refinamentos por inserção de nós e por elevação de grau. Além disso, tem-se como principal intuito apresentar o processo de obtenção das geometrias NURBS utilizadas neste trabalho.

5.1 REFINAMENTO DE CURVAS, SUPERFÍCIES E SÓLIDOS NURBS POR INSERÇÃO DE NÓS

O procedimento de refinamento de curvas, superfícies e sólidos NURBS por inserção de nós é uma ferramenta muito valiosa para a Análise isogeométrica, pois propicia um processo sistemático de refinamento e possibilita que as malhas sejam refinadas sem que a geometria inicialmente descrita seja modificada.

Considerando a curva NURBS $\mathbf{C}^w(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i^w$ definida sobre o vetor de nós $\Xi = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$, o processo de inserir uma coordenada $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1})$ em Ξ gera um novo vetor de nós $\bar{\Xi} = [\bar{\xi}_0 = \xi_0, \dots, \bar{\xi}_k = \xi_k, \bar{\xi}_{k+1} = \bar{\xi}, \bar{\xi}_{k+2} = \xi_{k+1}, \dots, \bar{\xi}_{n+p+2} = \xi_{n+p+1}]$. Se V_u e $V_{\bar{u}}$ representam os espaços vetoriais das curvas definidas em Ξ e $\bar{\Xi}$, respectivamente, então claramente $V_u \subset V_{\bar{u}}$, e $\mathbf{C}^w(\xi)$ tem uma representação em $\bar{\Xi}$ definida da seguinte forma:

$$\mathbf{C}^w(\xi) = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{N}_{i,p}(\xi) \mathbf{Q}_i^w \quad (5.1)$$

sendo $\bar{N}_{i,p}$ simplesmente as funções base *B-splines* de grau p definidas no vetor $\bar{\Xi}$. Dessa forma, o processo de inserção consiste em determinar os novos pontos de controle \mathbf{Q}_i^w através da solução do seguinte sistema linear:

$$\mathbf{C}^w(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i^w = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{N}_{i,p}(\xi) \mathbf{Q}_i^w \quad (5.2)$$

O procedimento de resolução da equação (5.2) pode ser visto com mais detalhes em Piegl e Tiller (1997) e resulta na seguinte expressão:

$$\mathbf{Q}_i^w = \alpha_i \mathbf{B}_i^w + (1 - \alpha_i) \mathbf{B}_{i-1}^w \quad (5.3)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \leq k - p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0 & i \geq k + 1 \end{cases}$$

Nota-se que o processo de refinamento é definido sobre a curva projetiva, sendo ao final desse procedimento aplicado o mapeamento apresentado no item 2.4 para obtenção dos valores relativos à curva racional NURBS. Para fins práticos, o processo de refinamento consiste na aplicação sucessiva do procedimento descrito acima com a inserção consecutiva de coordenadas no vetor de nós. Um algoritmo mais eficiente para realizar esse procedimento pode ser encontrado em Piegl e Tiller (1997). Na Figura 13 pode ser observada a mudança de funções base quadráticas com a inserção da coordenada $\bar{\xi} = 1/2$ no vetor de nós $\Xi = [0, 0, 0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1, 1, 1]$. Na Figura 14 observa-se ainda, a mudança que ocorre aos pontos de controle originais com essa inserção, e o fato que a geometria continua inalterada.

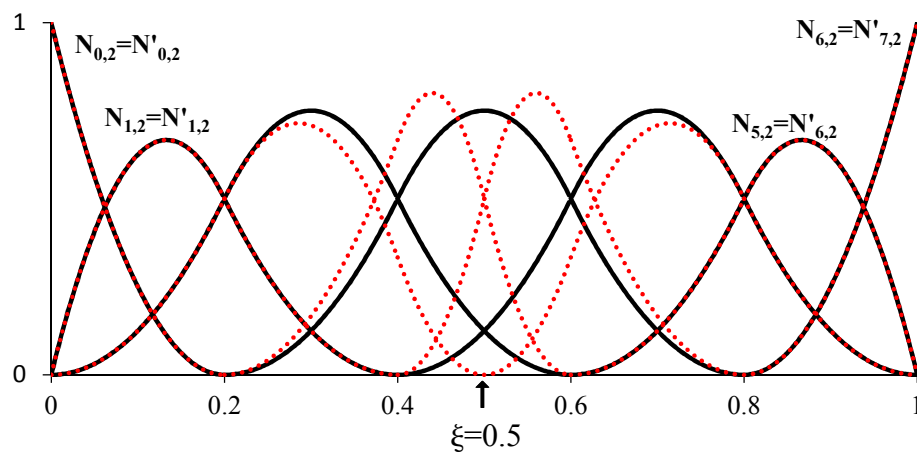


Figura 13: Funções base *B-Splines* quadráticas após inserção da coordenada

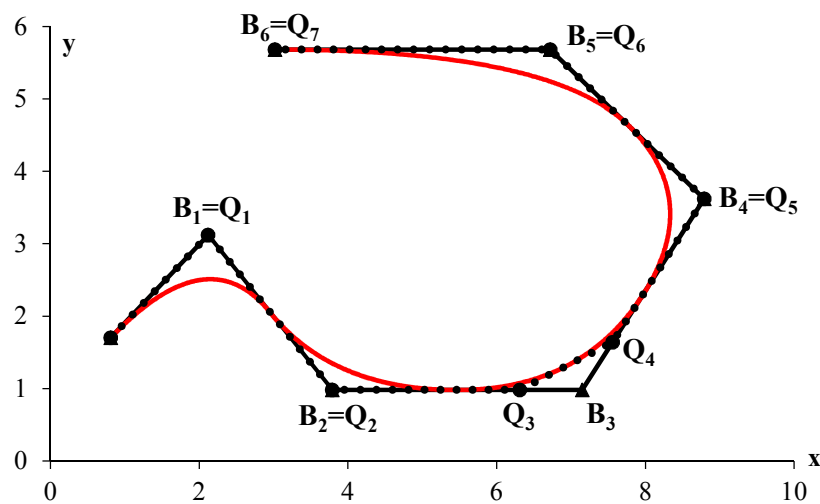


Figura 14: Pontos de controle para de uma curva *B-Spline* quadrática após inserção de coordenada paramétrica.

Considerando agora a superfície definida por $\mathbf{S}^w(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p} N_{j,q}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j}^w$

com vetores de nós Ξ e H , o processo de refinamento do vetor de nós Ξ consiste na aplicação do algoritmo de refinamento nas $m + 1$ colunas de pontos de controle, enquanto que o processo de refinamento em H requer a aplicação do algoritmo nas $n + 1$ linhas dos pontos de controle. Analogamente, o processo de refinamento pode ser aplicado a sólidos.

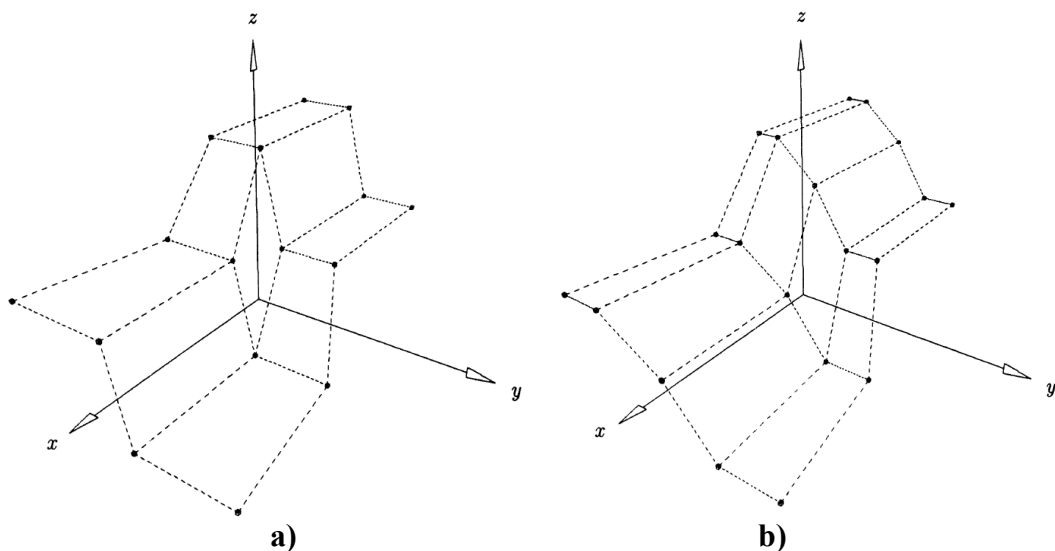


Figura 15: Processo de refinamento por inserção de nós. a) Rede de pontos de controle que descrevem uma superfície; b) Rede de pontos de controle após a inserção de nó em uma das direções paramétricas (Fonte: PIEGL and TILLER et al., 1997).

Na Figura 15 acima é apresentada uma rede de pontos de controle que descrevem uma superfície (cúbica x quadrática) definida pelos seguintes vetores de nós: $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$ e $H = [0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1]$. Nessa mesma figura é apresentada a rede de pontos de controle após a inserção do nó $\xi = 2/5$ nas $m+1$ colunas de pontos de controle.

O refinamento por inserção de nós é muito semelhante ao refinamento h clássico do MEF, onde se criam novos elementos através da divisão de antigos. A metodologia difere-se, entretanto, na quantidade de novas funções que são criadas, assim como na continuidade das funções base no contorno dos novos elementos (C^{p-1}). Para uma total equivalência com o refinamento h clássico, deve-se inserir cada novo nó p vezes, para que as funções tornem-se C^0 sobre os novos contornos.

5.2 REFINAMENTO DE CURVAS, SUPERFÍCIES E SÓLIDOS NURBS POR ELEVAÇÃO DE GRAU

Considerando a curva $\mathbf{C}_p^w(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i^w$ de grau p definida sobre um vetor de nós Ξ , o processo de elevação de grau da curva $\mathbf{C}_p^w(\xi)$ de p para $p+1$ consiste em definir novos pontos de controle \mathbf{Q}_i^w e um novo vetor de nós $\hat{\Xi}$, tal que:

$$\mathbf{C}_p^w(\xi) = \mathbf{C}_{p+1}^w(\xi) = \sum_{i=0}^{\hat{n}} N_{i,p+1}(\xi) \mathbf{Q}_i^w \quad (5.4)$$

Nota-se que $\mathbf{C}_p^w(\xi)$ e $\mathbf{C}_{p+1}^w(\xi)$ são a mesma curva, tanto geometricamente como parametricamente. Assim, $\mathbf{C}_{p+1}^w(\xi)$ é apenas $\mathbf{C}_p^w(\xi)$ em um espaço dimensional mais alto.

Para determinação de \hat{n} e $\hat{\Xi}$ assume-se inicialmente que o vetor de nós Ξ tem a seguinte forma:

$$\Xi = [\xi_0, \dots, \xi_{n+p+1}] = \left[\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \underbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\xi_s, \dots, \xi_s}_{m_s}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right] \quad (5.5)$$

sendo m_i a multiplicidade do nó interno i do vetor de nós. Em um nó com multiplicidade m_i , observa-se que a curva $\mathbf{C}_p^w(\xi)$ tem continuidade C^{p-m_i} . Para que $\mathbf{C}_{p+1}^w(\xi)$ mantenha a mesma continuidade, o vetor de nós $\hat{\Xi}$ fica representado da seguinte maneira:

$$\Xi = [\xi_0, \dots, \xi_{\hat{n}+p+1}] = \left[\underbrace{a, \dots, a}_{p+2}, \underbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}_{m_1+1}, \dots, \underbrace{\xi_s, \dots, \xi_s}_{m_s+1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+2} \right] \quad (5.6)$$

Dessa forma \hat{n} é dado pela seguinte relação:

$$\hat{n} = n + s + 1 \quad (5.7)$$

Por fim, para a determinação dos novos pontos de controle \mathbf{Q}_i^w utiliza-se um algoritmo eficiente apresentado em Piegl e Tiller (1997) que consiste em:

a) transformar a curva NURBS em i segmentos de uma curva de Bézier através da inserção de nós. Uma curva *B-spline* pode ser entendida como a generalização de uma curva de Bézier construída sobre um vetor de nós da forma:

$$\Xi = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right]$$

- b) elevação de grau do segmento i da curva de Bézier;
c) Remoção dos nós desnecessários entre os segmentos $i-1$ e i .

O processo de elevação de grau de um segmento da curva de Bézier nesse algoritmo é definido pela metodologia apresentada em Forrest (1972), na qual para elevação de uma curva de grau p para $p+1$ tem-se a seguinte formulação para obtenção dos novos pontos de controle:

$$\mathbf{Q}_i^w = (1 - \alpha_i) \mathbf{B}_i^w + \alpha_i \mathbf{B}_{i-1}^w \quad (5.8)$$

com α_i definido como:

$$\alpha_i = \frac{i}{p+1} \quad i = 0, \dots, p+1 \quad (5.9)$$

Para elevação de grau de p para $p+t$, sendo t a quantidade de vezes que a curva será elevada de grau, tem-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{B}_i^t = \sum_{j=\max(0, i-t)}^{\min(p, i)} \frac{\binom{p}{j} \binom{t}{i-j} \mathbf{B}_j^w}{\binom{p+t}{i}} \quad i = 0, \dots, p+t \quad (5.10)$$

onde os termos dentro dos parênteses definem a seguinte expressão:

$$\frac{a!}{b!(a-b)!} = \binom{a}{b} \quad (5.11)$$

sendo a e b dois inteiros quaisquer. Na Figura 16 é apresentado o resultado da elevação de grau em uma função cúbica definida originalmente pelo vetor de nós $\Xi = [0, 0, 0, 0, 4/10, 7/10, 1, 1, 1, 1]$. Nota-se que a geometria não é modificada após a aplicação desse processo, e que os pontos de controle se aproximam da curva após esse procedimento.

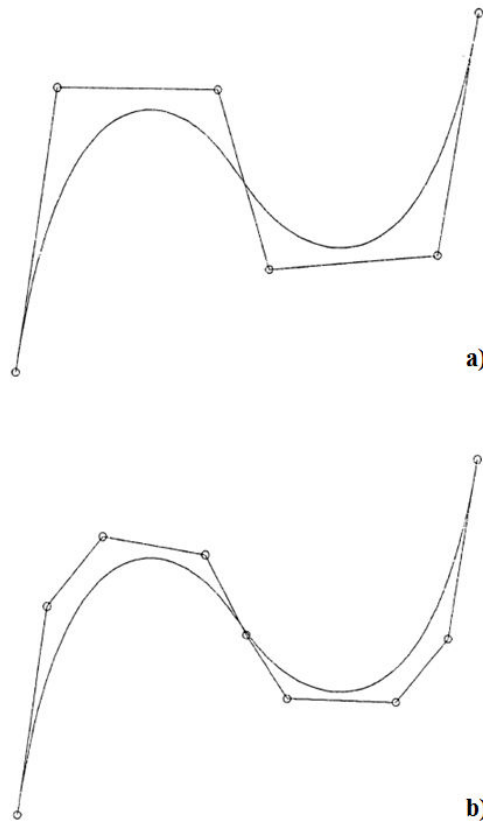


Figura 16: Exemplo de elevação de grau. a) Curva cúbica original definida pelo vetor de nós; b) Curva após o grau da função ser elevado uma vez (Fonte: PIEGL e TILLER et al., 1997).

Na Figura 17 é apresentada uma rede de pontos de controle que descrevem uma superfície (cúbica x quadrática) definida pelos seguintes vetores de nós: $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$ e $H = [0, 0, 0, 1/2, 1, 1, 1]$. Nessa mesma figura é apresentada a rede de pontos de controle após uma elevação de grau por direção.

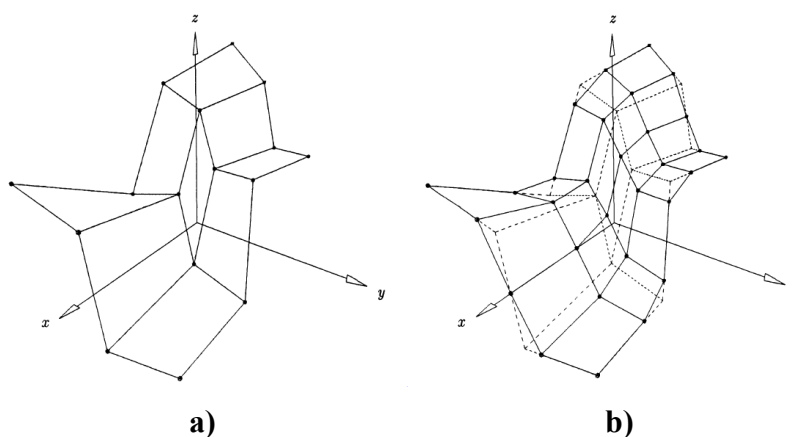


Figura 17: Processo de elevação de grau em uma superfície. a) Rede de pontos de controle que descreve a superfície; b) Rede de pontos de controle após a elevação de grau. (Fonte: PIEGL and TILLER et al., 1997).

Assim como no processo de inserção de nós, essa ferramenta é definida sobre a curva projetiva. Dessa forma, ao término do processo, os valores obtidos devem ser mapeados para a curva racional.

A elevação de grau é claramente muito semelhante ao refinamento p clássico em elementos finitos, no qual se eleva a ordem polinomial das funções base. A maior diferença entre as duas metodologias consiste em que no refinamento p inicia-se sempre o processo com funções que são C^0 em todos os lugares, enquanto que a elevação de ordem é compatível com qualquer continuidade existente nas funções na malha não refinada.

Além do refinamento por elevação de grau e por inserção de nós, existe ainda, apenas no contexto da Análise Isogeométrica, o denominado k -refinamento. Esse refinamento proporciona a elevação de grau concomitantemente com a elevação de continuidade entre elementos. Para mais informações, a cerca desse tipo de refinamento, consultar Cottrell et al., 2009.

5.3 CONSTRUÇÃO DAS MALHAS

5.3.1 Escoamento sobre um cilindro 2d – 1 macro-elemento

Para a simulação de um escoamento incidindo sobre um cilindro 2d construiu-se uma superfície retangular vazada centralmente por uma circunferência. A criação dessa superfície pode ser realizada através de um único macro-elemento bidimensional. O procedimento de

construção consiste na determinação dos vetores de nós para as direções paramétricas ξ e η e de uma rede bidirecional de pontos de controle e pesos adequados. A direção paramétrica ξ corresponde no espaço físico à direção angular da geometria, enquanto que a direção paramétrica η corresponde à direção radial.

O procedimento de obtenção dessa superfície utilizado nesse trabalho pode ser decomposto nos seguintes passos:

- a) obtenção de um vetor de nós na direção paramétrica ξ e um conjunto de pontos de controle baseado na necessidade de representação da circunferência;
- b) ainda na direção paramétrica ξ obtêm-se os pontos de controle que descrevem a curva mais externa nessa direção, ou seja, o retângulo;
- c) refinamento do espaço paramétrico na direção ξ até que se obtenha a quantidade de pontos de controle desejado;
- d) determinação do vetor de nós na direção paramétrica η de acordo com grau das funções base e quantidade de pontos de controle requeridos nessa direção e geração dos demais pontos de controle que definem a geometria, através da discretização radial da reta que liga os pontos de controle da circunferência com os do retângulo.

O **passo a** consiste na determinação de um espaço paramétrico e de pontos de controle necessários à representação exata de uma circunferência. A circunferência é uma curva muito comum em problemas de DFC e existem muitas maneiras de construí-la a partir de curvas NURBS. Neste trabalho será empregada uma metodologia apresentada por Piegl e Tiller (1997), onde uma circunferência completa é obtida através de funções quadráticas e nove pontos de controle.

Um arco quadrático pode ser obtido através de funções base NURBS da seguinte forma:

$$C(\xi) = \frac{N_{0,2}w_0\mathbf{B}_0 + N_{1,2}w_1\mathbf{B}_1 + N_{2,2}\mathbf{B}_2}{N_{0,2}w_0 + N_{1,2}w_1 + N_{2,2}w_2} \quad 0 < \xi < 1 \quad (5.12)$$

que pode ser expresso também por:

$$C(\xi) = R_{0,2}\mathbf{B}_0 + R_{1,2}\mathbf{B}_1 + R_{2,2}\mathbf{B}_2 \quad (5.13)$$

A equação (5.12) é uma cônica, sendo o tipo de cônica determinado através da avaliação do denominador dessa equação. É costumeiro admitir-se que $w_0 = w_2 = 1$, denominada essa de parametrização normal. Dessa forma, \mathbf{B}_0 e \mathbf{B}_2 coincidem com os pontos inicial e final da curva. O tipo de curva fica então definido a partir do valor de w_1 da seguinte maneira (mais detalhes em Piegl e Tiller, 1997):

- a) Se $w_1^2 < 1$ - elipse;
- b) Se $w_1^2 = 1$ - parábola;
- c) Se $w_1^2 > 1$ - hipérbole.

Um arco circular de ângulo menor que 180° também pode ser representado pela equação (5.12), sendo um caso especial de elipse. Por simetria se sabe que $\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ (Figura 18) devem formar um triângulo isósceles, logo $\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ e w_1 é definido de acordo com Piegl e Tiller (1997) através da seguinte relação:

$$w_1 = \cos \theta \quad (5.14)$$

Sendo $\theta = \angle \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\mathbf{M}$, e \mathbf{M} o ponto médio entre a reta que liga os pontos de controle inicial e final da curva ($\mathbf{B}_0\mathbf{B}_2$), conforme pode ser observado também na Figura 18.

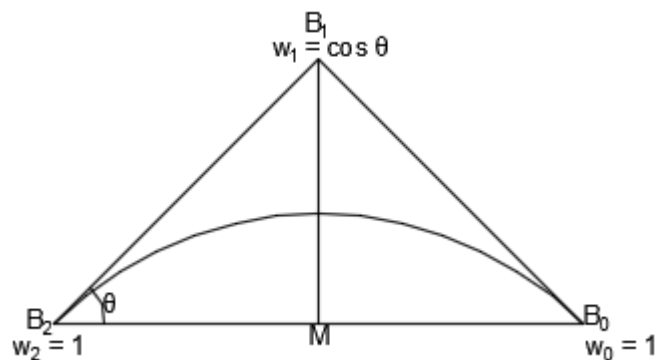


Figura 18: Representação dos pontos de controle para um arco que varre 90° .

Dessa forma, uma circunferência que varre 90° possui $\theta = 45^\circ$ e pode ser representada com funções de forma NURBS de grau dois construídas sobre um vetor de nós

aberto $\Xi = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$. A representação de um círculo completo pode ser realizada unindo quatro arcos de 90° através de múltiplos nós. O vetor de nós fica definido então por $\Xi = [0, 0, 0, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 3/4, 1, 1, 1]$. Os pontos de controle são definidos em função do raio da circunferência adotado.

Na Figura 19 observa-se a distribuição da rede de pontos de controle e a curva resultante na geração de uma circunferência.

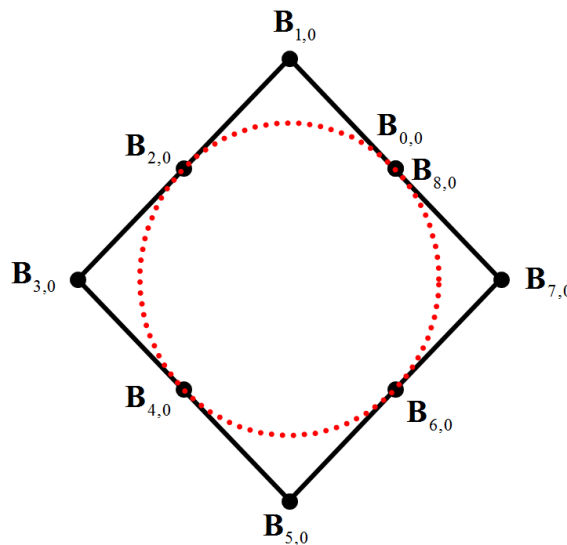


Figura 19: Pontos de controle que descrevem a circunferência.

É importante notar que nesse tipo de parametrização, nos pontos de ligação entre as curvas, devido à multiplicidade maior que um da coordenada paramétrica, reduz-se a continuidade das funções base para C^0 e os pontos de controle se encontram sobre a curva.

O **passo b** consiste em representar a curva correspondente ao retângulo no espaço paramétrico ξ . Deve-se manter o mesmo vetor de nós utilizado para a circunferência e a mesma quantidade e distribuição de pontos de controle.

Os pontos de controle são definidos em função das dimensões do retângulo sendo localizados sobre a própria curva. Os pesos para essa geometria são unitários. Na Figura 20 é indicado o procedimento realizado no passo 2.

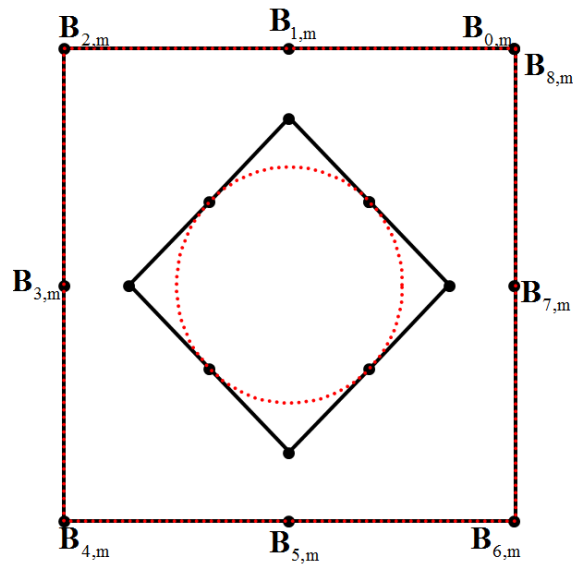


Figura 20: Pontos de controle que descrevem o retângulo.

O **passo c** consiste no refinamento do espaço paramétrico ξ até que se chegue ao a quantidade de pontos de controle requeridos. Este procedimento é realizado com um algoritmo baseado nas equações apresentadas no item 5.1, inserindo-se novas coordenadas paramétricas no centro dos elementos não nulos já existentes. Na Figura 21 observa-se o resultado do procedimento para uma inserção por elemento, que resulta em $n = 12$, ou seja, 13 pontos de controle. Nota-se que apesar do espaço paramétrico estar definido com espaçamentos uniformes, os pontos de controle não se distribuem dessa maneira.

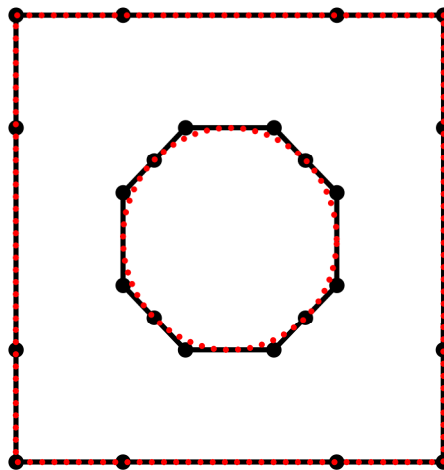


Figura 21: Processo de refinamento.

No **passo d**), por fim, discretiza-se o espaço paramétrico na direção η . Considerando-se o uso de funções base de grau q e o índice do último ponto de controle

nessa direção equivalente a m , tem-se o seguinte vetor de nós $H = [0, 0, 0, \eta_{q+2}, \dots, \eta_m, 1, 1, 1]$. Nesse trabalho utilizou-se uma distribuição uniforme para o vetor de nós.

A obtenção dos demais pontos de controle e pesos é realizada através de uma interpolação linear entre os pontos de controle distribuídos na circunferência e os pontos distribuídos no retângulo, sendo a quantidade de pontos inseridos definida em função do índice do último ponto de controle nessa direção (m).

O espaçamento entre esses pontos pode ser uniforme, através de uma progressão geométrica unidirecional ou ainda através de uma progressão geométrica bidirecional.

No espaçamento definido pela progressão geométrica unidirecional determina-se inicialmente a distância entre os dois primeiros pontos de controle localizados em uma das extremidades de uma dada direção paramétrica e o número de pontos de controle desejado. A localização dos pontos de controle é obtida empregando-se uma progressão geométrica em função da distância entre os pontos de controle extremos nesta direção e a distância dos primeiros dois pontos de controle. No espaçamento determinado pela progressão geométrica bidirecional tem-se um procedimento similar, com exceção à definição da distância entre os dois primeiros pontos de controle, que é feita em relação a ambas as extremidades da direção paramétrica na qual será feita a discretização.

Na Figura 22 pode ser observada a rede de pontos de controle resultantes de uma discretização radial com progressão geométrica unidirecional com $m = 8$ e funções quadráticas.

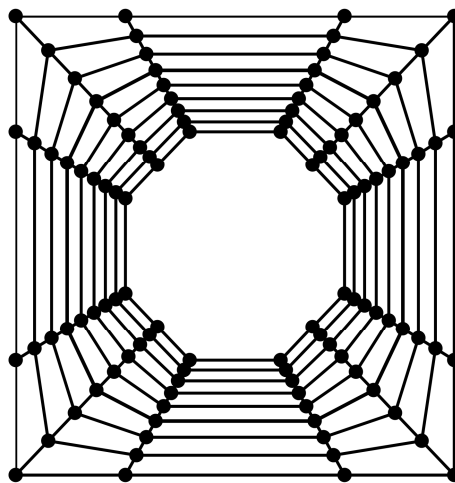


Figura 22: Obtenção da rede de pontos de controle que geram a superfície.

Na Figura 23 é apresentado o espaço indicial para o exemplo apresentado nesse item. Trata-se de um espaço onde todas as coordenadas paramétricas são representadas com igual espaçamento entre si. Além disso, nessa mesma figura observam-se os elementos, correspondentes aos espaços hachurados, que são resultantes de subintervalos não nulos do espaço paramétrico.

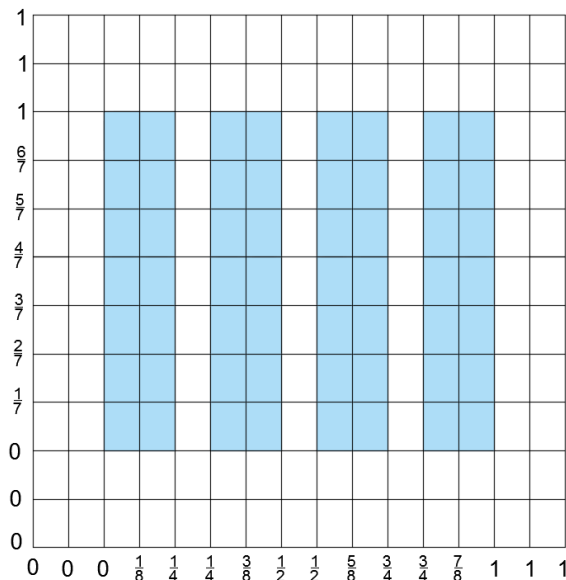


Figura 23: Espaço indicial e a representação dos elementos não nulos nesse espaço.

5.3.2 Escoamento em cavidade 2d

Para a simulação de um escoamento em uma cavidade bidimensional é necessário a geração de uma superfície plana retangular que pode ser obtida através de um único macroelemento bidimensional. O procedimento de construção consiste na determinação dos vetores de nós para as direções paramétricas ξ e η e de uma rede de pontos de controle e pesos adequados. As direções paramétricas ξ e η correspondem no espaço físico às direções horizontal e vertical respectivamente.

O processo de obtenção da geometria pode ser dividido em dois passos:

- a) obtenção do vetor de nós na direção paramétrica ξ e obtenção dos pontos de controle que descrevem as m linhas do espaço paramétrico nessa direção.

- b) obtenção do vetor de nós na direção paramétrica η e obtenção dos pontos de controle que descrevem as n colunas do espaço paramétrico nessa direção.

No **passo a)** obtém-se o vetor de nós na direção ξ de acordo com a necessidade de pontos de controle nessa direção, prescrita pela variável n , e de acordo com o grau definido para as funções nessa direção, definido por p . Dessa forma o vetor fica definido como:

$\Xi = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+2}, \dots, \xi_n, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right]$. O espaçamento entre os nós é definido, nesse estudo, por uma distribuição uniforme.

Os pontos de controle por sua vez são distribuídos ao longo da direção horizontal no espaço físico, com o espaçamento podendo ser realizado através de distribuição uniforme, distribuição com progressão geométrica unidirecional e distribuição com progressão geométrica bidirecional, conforme abordado no item 5.3.1 Além disso, no caso do retângulo, os pesos dos pontos de controle são unitários.

Da mesma forma, no **passo b)** obtém-se o vetor de nós de acordo com a quantidade pontos de controle determinada inicialmente (m) e de acordo com o grau requerido para as funções de forma nessa direção (q), sendo o espaçamento entre os nós definido como

uniforme. Assim, o vetor de nós fica definido como: $H = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+2}, \dots, \eta_m, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right]$. Os pontos

de controle são distribuídos verticalmente no espaço físico de acordo com uma das seguintes distribuições: uniforme, distribuição com progressão geométrica unidirecional, distribuição com progressão geométrica bidirecional, sendo o peso considerado como unitário.

Na Figura 24 é apresentada uma rede de pontos de controle para obtenção de um retângulo, com $n = 20$ e $m = 20$ e funções lineares. Na Figura 25 é apresentado o espaço indicial para o exemplo apresentado nesse item, assim como a representação dos elementos não nulos nesse espaço.

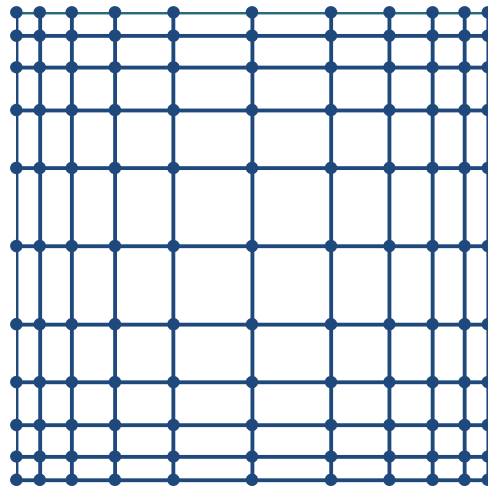


Figura 24: Rede de pontos de controle para uma superfície retangular.

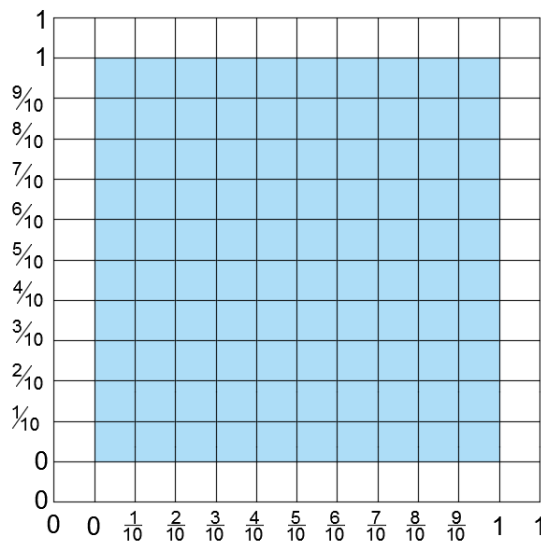


Figura 25: Espaço indicial e a representação dos elementos não nulos nesse espaço.

5.3.3 Escoamento sobre cilindro 2d – múltiplos macro-elementos

Embora o item 5.3.1 se refira a criação de uma superfície retangular com uma circunferência centrada em seu interior com um único macro-elemento, o uso de uma geometria diferente a uma superfície de um quadrado com uma circunferência centrada no seu interior conduz a malhas não uniformes para a análise numérica.

O problema físico que se deseja simular com esse tipo de geometria é de um escoamento incidindo sobre um cilindro. Para isto, é mais adequado que se tenha uma figura retangular, pois é necessária uma dimensão maior na direção horizontal para o desenvolvimento do escoamento do que na direção vertical. Além disso, é mais adequado que o cilindro não se encontre no centro do domínio computacional, visto que a dimensão

horizontal, após a incidência do escoamento no cilindro, tem necessidade de ser superior em relação à dimensão horizontal anterior ao mesmo, em função do surgimento da esteira de vórtices para Reynolds superiores a 40, aproximadamente.

Dessa forma, propõe-se o uso de múltiplos macro-elementos (5 para esse exemplo) para a construção de uma geometria mais adequada à análise do escoamento. Para isso, criou-se uma superfície quadrada com um cilindro centrado em seu interior com o uso de 4 macro-elementos, e ligado a parte direita desse quadrado um retângulo representado por um único macro-elemento.

A superfície quadrada com o cilindro centrado em seu interior com 4 macro-elementos foi obtida analogamente à superfície descrita para apenas 1 macro-elemento. Entretanto, como cada macro-elemento representa apenas $1/4$ da geometria, o vetor de nós na direção ξ foi particionado e, além disso, os pontos de controle nas interfaces entre os macro-elementos devem estar presentes em ambos os lados. Já a superfície do retângulo foi criada analogamente ao apresentado no item 5.3.2, tendo como única ressalva o fato de que o vetor de nós e os pontos de controle na interface dos macro-elementos devem ser coincidentes. Na Figura 26 pode ser observado o resultado do procedimento considerando que os quatro macro-elementos que representam o cilindro possuem $n = 8$ e $m = 12$, distribuição progressiva geométrica unidirecional dos pontos de controle na direção radial do espaço físico, e funções de base quadráticas. O quinto macro-elemento representa o retângulo e foi discretizado com $n = 12$ e $m = 12$ e, da mesma forma, com funções quadráticas. Na Figura 27 pode ser observado o espaço indicial para essa mesma geometria.

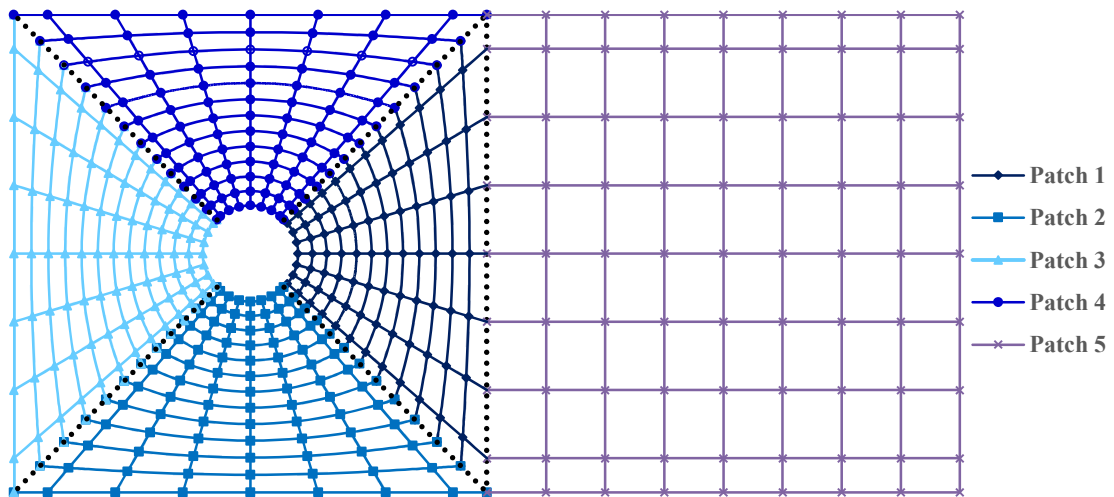


Figura 26: Rede de pontos de controle para uma superfície retangular vazada por uma circunferência em seu interior – Múltiplos macro-elementos.

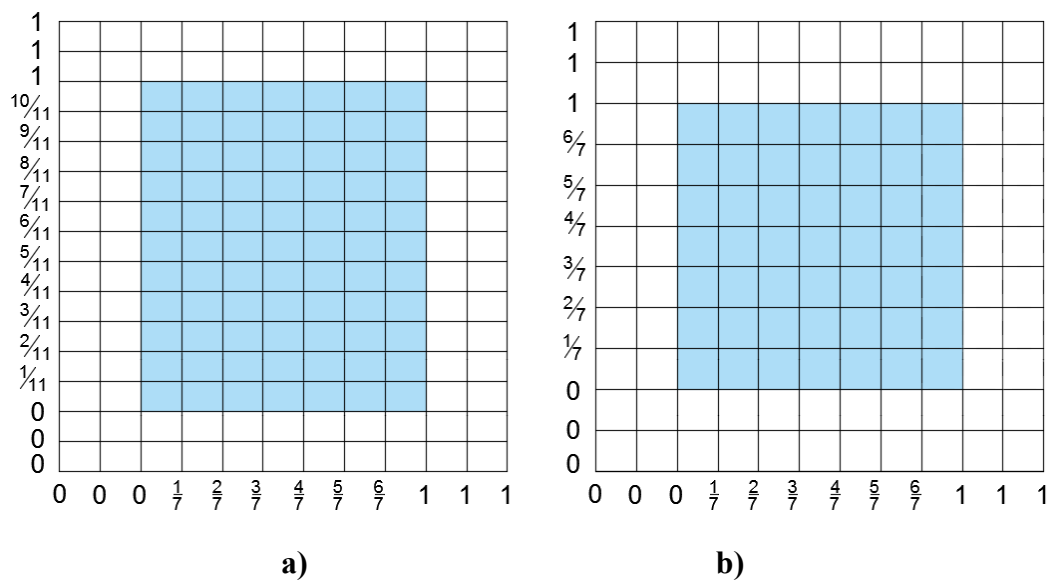


Figura 27: Espaços indicial e representação dos elementos não nulos. a) Macro-elemento 1, 2, 3 e 4; b) Macro-elemento 5.

5.3.4 Canal com Degrau – Múltiplos macro-elementos

Para a simulação de um problema de escoamento incompressível em um canal com um degrau criou-se uma malha com múltiplos macro-elementos retangulares (5 no total). As superfícies retangulares foram criadas exatamente como descritas no item 5.3.2, tendo-se apenas como ressalva a compatibilidade na interface dos macro-elementos.

Na Figura 28 apresenta-se a rede de pontos de controle para o problema em questão, considerando-se funções lineares. Os pontos de controle possuem a seguinte distribuição:

$n = 10$ e $m = 10$ com distribuição do tipo progressiva geométrica bidirecional em ambas as direções para os macro-elementos 1, 4 e 5; $n = 20$ e $m = 10$ com distribuição do tipo progressiva geométrica unidirecional na direção paramétrica ξ e progressiva geométrica bidirecional na direção paramétrica η para os macro-elementos 2 e 3. Nessa figura, os pontos de controle se localizam nos pontos onde as linhas se interceptam. Além disso, na Figura 29 é apresentado para o exemplo em questão o espaço indicial e os elementos não nulos nesse espaço.

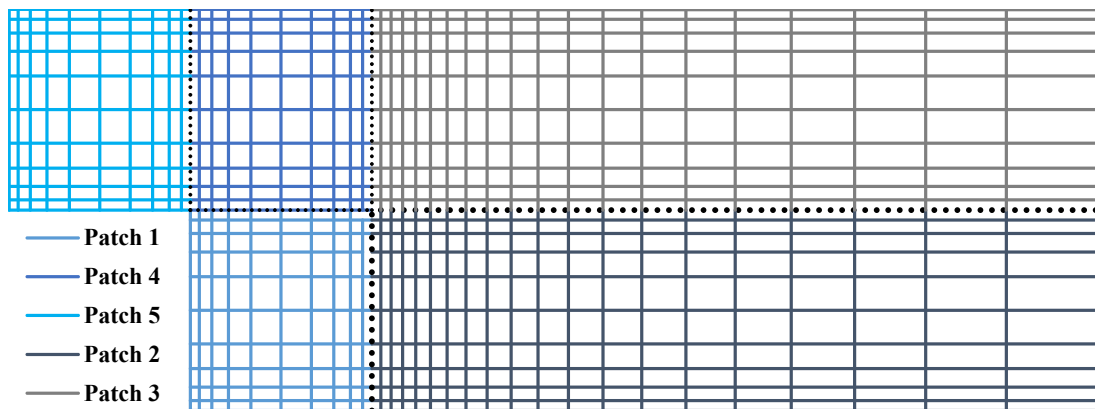


Figura 28: Rede de pontos de controle para um canal com degrau – Múltiplos macro-elementos.

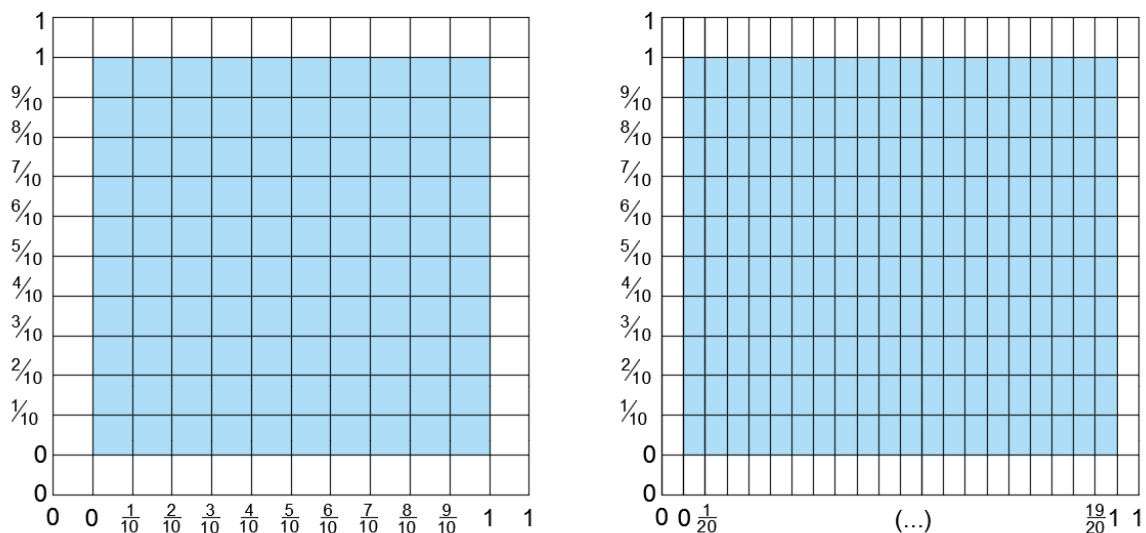


Figura 29: Espaços indicial e representação dos elementos não nulos.
a) Macro-elemento 1,4 e 5; b) Macro-elemento 2 e 3.

6 ETAPAS DA ANÁLISE

O processo de analisar numericamente um escoamento pode ser dividido em três etapas principais: Pré-processamento, Simulação Numérica e Pós-processamento. Nesse item será apresentada a metodologia utilizada em cada uma dessas etapas para a construção desse trabalho.

6.1 PRÉ-PROCESSAMENTO

A etapa de pré-processamento consiste em modelar geometricamente o problema a ser analisado. No contexto da Análise Isogeométrica, a etapa de modelagem geométrica deve resultar na obtenção de uma malha de pontos de controle e vetores de nós necessários à descrição da geometria e das variáveis do problema, assim como uma lista de pontos de controle com condições de contorno prescritas e informações acerca dessas condições.

Devido à metodologia da Análise Isogeométrica ser recente, quando comparada ao método dos elementos finitos, por exemplo, não foram encontrados softwares livres que proporcionam a geração de tais informações necessárias às análises. Dessa forma, optou-se por criar um gerador para as geometrias necessárias às simulações desse estudo. O código foi implementado em linguagem de programação Fortran 90, sendo a metodologia utilizada para a criação das geometrias apresentada no item 5.

6.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Na fase de simulação numérica foram empregados um conjunto de códigos computacionais implementados em linguagem Fortran 90 que representam as operações matemáticas necessárias à solução das equações fundamentais do problema. Nessa fase se faz necessário um conjunto de dados de entrada referentes ao pré-processamento, propriedades do fluido e características do escoamento e obtém-se como resultado um conjunto de dados de saída com o resultado da análise.

No quadro 1 é apresentado uma esquematização da resolução do problema de análise numérica de escoamentos através de uma simplificação do algoritmo utilizado.

Tendo em vista a redução no tempo de processamento computacional das simulações numéricas implementou-se a paralelização em memória compartilhada OpenMP. OpenMP é

uma designação a um conjunto de diretivas de compilação, bibliotecas de rotinas e variáveis de ambiente que podem ser usadas para paralelização em memória compartilhada em linguagem Fortran, C e C++.

O emprego do OpenMP permitiu a paralelização de laços críticos do código computacional, ou seja, a repartição do laço entre os processadores lógicos existentes em uma máquina, reduzindo o tempo final de processamento. Os aspectos de implementação da paralelização podem ser visualizados com mais detalhes em Hermanns (2002).

1. Leitura e armazenamento dos dados de entrada
2. Inicialização das variáveis \mathbf{v}_i e \mathbf{P} em $t = 0$
3. Cálculo das matrizes constantes no tempo
4. Contagem do tempo $t = t + \Delta t$ 4.1 Passo 1 - $t = t + \Delta t/2$ 4.1.1 Cálculo das matrizes variáveis no tempo <i>Se escoamento turbulento:</i> 4.1.1.1 Cálculo da viscosidade cinemática turbulenta ν_t 4.1.2 Cálculo de $\mathbf{v}^{n+1/2}$ através da equação (4.12) 4.1.3 Cálculo de $\mathbf{P}^{n+1/2}$ através da equação (4.19) 4.1.4 Correção de $\mathbf{v}^{n+1/2}$ através da equação (4.13) 4.1.5 Aplicação das condições de contorno em $\mathbf{v}^{n+1/2}$ e em $\mathbf{P}^{n+1/2}$. 4.2 Passo 2 - $t = t + \Delta t$ 4.2.1 Cálculo das matrizes variáveis no tempo <i>Se escoamento turbulento:</i> 4.2.1.1 Cálculo da viscosidade cinemática turbulenta ν_t 4.2.2 Cálculo de \mathbf{v}^{n+1} através da equação (4.8) 4.2.3 Cálculo de \mathbf{P}^{n+1} através da equação (4.17) 4.2.5 Aplicação das condições de contorno em \mathbf{v}^{n+1} e em \mathbf{P}^{n+1} 4.3 Verificar condição de convergência <i>Se Resíduo \leq tolerância ou $t \geq t_{final}$</i> 4.3.1 Ir para o número 6 <i>Se não</i> 4.3.1 Ir para o número 5
5. Fim do laço de tempo: retornar para 4
6. Impressão da saída de dados
7. Fim da análise

Quadro 1 : Algoritmo que esquematiza a solução do problema de escoamentos.

6.3 PÓS-PROCESSAMENTO

A fase de pós-processamento desse estudo pode ser dividida em três partes: obtenção de campos suavizados de pressão, geração de coeficientes aerodinâmicos e visualização dos

resultados de saída através do programa Tecplot 9.0 (2000) da AMTEC ENGINEERING INC. Nesse item serão apresentados os procedimentos utilizados para a obtenção dos campos suavizados e dos coeficientes aerodinâmicos.

6.3.1 Suavização dos campos de pressão

A fim de eliminar oscilações ocasionais no campo de pressão e melhorar a visualização dos resultados é realizada uma suavização neste campo. Para isso, obtém-se inicialmente a pressão nos pontos de integração através da seguinte relação:

$$p(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{n=1}^{nlpc} N_i p_i \quad (6.1)$$

onde $nlpc$ é a quantidade de pontos de controle no elemento, N_i são as funções de base e p_i é a pressão não suavizada em cada ponto de controle desse elemento.

Através do método dos mínimos quadrados obtém-se um funcional em nível local:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (p_s - p)^2 d\Omega \quad (6.2)$$

no qual p_s é a pressão suavizada nos pontos de controle do elemento. A minimização deste funcional é obtida impondo-se que a primeira variação de π seja nula:

$$\delta\pi = \int_{\Omega_e} (p_s - p) \delta p_s d\Omega \quad (6.3)$$

Considerando $p_s = \mathbf{N}\mathbf{p}_s$ e $p = \mathbf{N}\mathbf{p}$ têm-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{M}\mathbf{p}_s = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T (\mathbf{N}\mathbf{p}) d\Omega \quad (6.4)$$

em que \mathbf{M} é a conhecida matriz de massa. Para obtenção de um sistema desacoplado é necessário o uso da matriz de massa discreta \mathbf{M}_d , chegando-se a seguinte relação em nível local para \mathbf{p}_s :

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{M}_d^{-1} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T (\mathbf{N}\mathbf{p}) d\Omega \quad (6.5)$$

A obtenção da pressão suavizada global é realizada da mesma forma ao apresentado para as equações que governam o escoamento.

6.3.2 Obtenção dos Coeficientes Aerodinâmicos

Os coeficientes aerodinâmicos são usados comumente na DFC para a determinação das características aerodinâmicas dos corpos imersos em um escoamento. O coeficiente de arrasto (C_D) está relacionado com o efeito das forças que agem paralelamente ao escoamento, já o coeficiente de sustentação (C_L) diz respeito às forças que agem transversalmente ao escoamento, conforme pode ser observado na Figura 30. A determinação desses coeficientes é dada através das seguintes relações:

$$C_D = \frac{\sum_{i=1}^{npcc} F_x^i}{1/2\rho V^2 HW} \quad (6.6)$$

$$C_L = \frac{\sum_{i=1}^{npcc} F_y^i}{1/2\rho V^2 HW} \quad (6.7)$$

sendo F_x^i a força paralela ao escoamento agindo no ponto de controle i , F_y^i a força transversal ao escoamento, V é a velocidade característica do escoamento, $npcc$ é o número de pontos de controle sobre o contorno do corpo imerso, HW e HL são dimensões apresentadas na Figura 30 e representam as áreas de atuação das forças F_x e F_y .

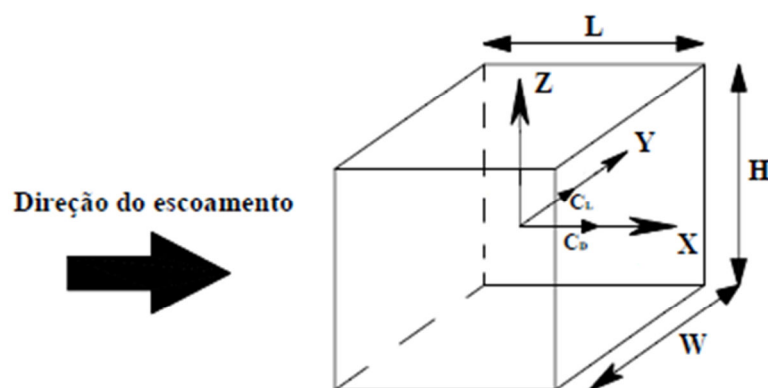


Figura 30: Coeficientes aerodinâmicos em um escoamento (baseado em: BRAUN, 2007)

As forças sobre o contorno são obtidas através da integral de contorno apresentada na equação (4.39).

Outro coeficiente importante é o de pressão (C_p) que mede a pressão exercida pelo escoamento sobre a superfície de corpos imersos e é obtido através da seguinte relação:

$$C_p^i = \frac{p_i - p_0}{1/2\rho V^2} \quad (6.8)$$

com p_i equivalente a pressão no ponto de controle i e p_0 uma pressão de referência, que pode ser a pressão em uma região não perturbada, ou ainda um ponto de estagnação sobre o corpo.

O número de Strouhal (S_t) também é amplamente usado na caracterização de um escoamento sobre corpos imersos, estando relacionado ao fenômeno de formação e desprendimento de vórtices, sendo calculado através da seguinte relação:

$$S_t = \frac{fD}{V} \quad (6.9)$$

sendo f a frequência de desprendimento de vórtices e D a dimensão característica do escoamento.

7 APLICAÇÕES

Nesse capítulo serão apresentados resultados obtidos em análises de problemas clássicos da DFC, comparando-os com resultados obtidos por outros autores com intuito de validar a metodologia proposta.

7.1 ESCOAMENTO LAMINAR EM UMA CAVIDADE 2D

Nesse item será apresentado o estudo de um escoamento de fluido viscoso em uma cavidade 2D, para os seguintes números de Reynolds: 100, 400, 1000. Tem-se como intuito principal validar o método proposto comparando os resultados obtidos para os perfis de velocidade vertical e horizontal no centro da cavidade com os apresentados pela bibliografia de referência. Na Figura 31 são apresentados os dados referentes a geometria do problema e as condições de contorno aplicadas ao mesmo. Na

Tabela 3 são apresentadas as características do fluido, do escoamento e da discretização com funções base NURBS para as simulações realizadas. As malhas foram discretizadas tanto horizontalmente, quanto verticalmente com funções de forma de grau um e com distribuição de pontos de controle do tipo progressiva geométrica bidirecional, ou seja, os pontos de controle encontram-se mais próximos nas regiões das paredes e mais espaçados na região central da cavidade.

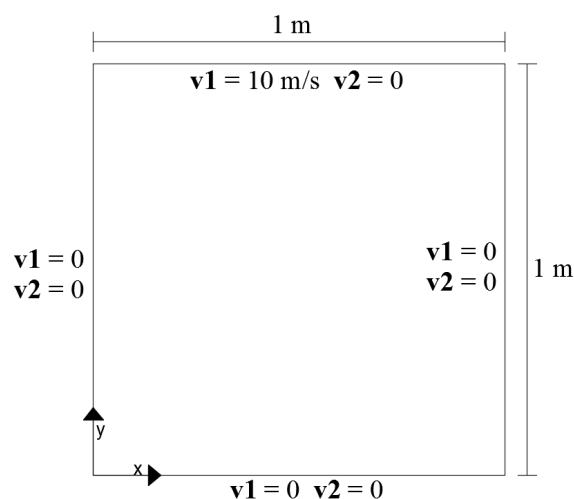


Figura 31: Características geométricas do problema e condições de contorno.

Tabela 3: Características do fluido, do escoamento e da malha com funções NURBS.

Características gerais	Massa específica - ρ	1kg/m ³
	Viscosidade Volumétrica λ	0 Ns/m ²
	Dimensão característica - D	1 m
	Velocidade característica - V	10 m/s
	Velocidade do som no fluido - c	70 m/s
Re 100	Viscosidade dinâmica - μ	0,1 Ns/m ²
	Pontos de controle na direção ξ	60
	Pontos de controle na direção η	60
	Menor distância entre P.C	0.005
	Incremento de tempo - Δt	4,3x10 ⁻⁵ s
	Número de elementos	3600
Re 400	Viscosidade dinâmica - μ	0,025 Ns/m ²
	Pontos de controle na direção ξ	100
	Pontos de controle na direção η	100
	Menor distância entre P.C	0.002
	Incremento de tempo - Δt	2,5x10 ⁻⁵ s
	Número de elementos	10000
Re 1000	Viscosidade dinâmica - μ	0,01 Ns/m ²
	Pontos de controle na direção ξ	120
	Pontos de controle na direção η	120
	Menor distância entre P.C	0.001
	Incremento de tempo - Δt	1,0x10 ⁻⁵ s
	Número de elementos	14400

As malhas foram escolhidas de forma que o espaçamento entre os primeiros pontos de controle descrevessem adequadamente o comportamento do escoamento próximo às paredes e a quantidade total de pontos de controle fosse adequada para descrever o comportamento na região central. Para isso, tomou-se para cada um dos Reynolds em estudo uma malha pouco discretizada como base e se buscou refiná-la, através do processo de aumentar a quantidade de pontos de controle e reduzir o tamanho do primeiro elemento, até que a diferença entre as variáveis resultantes da malha menos refinada e a da malha mais refinada atingisse o seguinte critério:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (\varphi_i - \theta_i)^2}{\sum_{i=1}^n \varphi_i^2} \leq 5 \times 10^{-3} \quad (6.10)$$

sendo φ_i o vetor das variáveis do problema na malha mais refinada no ponto i , θ_i o vetor das variáveis do problema para a malha menos refinada no ponto i , n a quantidade de pontos avaliados.

Da Figura 32 a Figura 37 são apresentados perfis de velocidade V1 e V2 para os diferentes Reynolds, assim como o perfil obtido pela bibliografia de referência Ghia et al. (1982), o qual usa uma malha de 129 x 129 pontos. O perfil de velocidade V1 equivale ao perfil da velocidade horizontal ao longo da reta em que $x = 0,5$, enquanto que o perfil de velocidade V2 corresponde a velocidade vertical ao longo da reta $y = 0,5$.

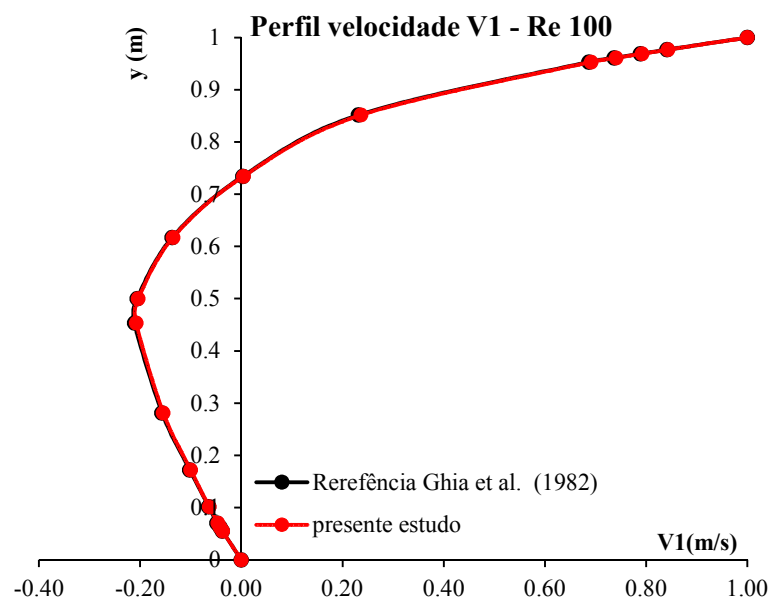


Figura 32: Perfil de velocidade V1 Re 100.

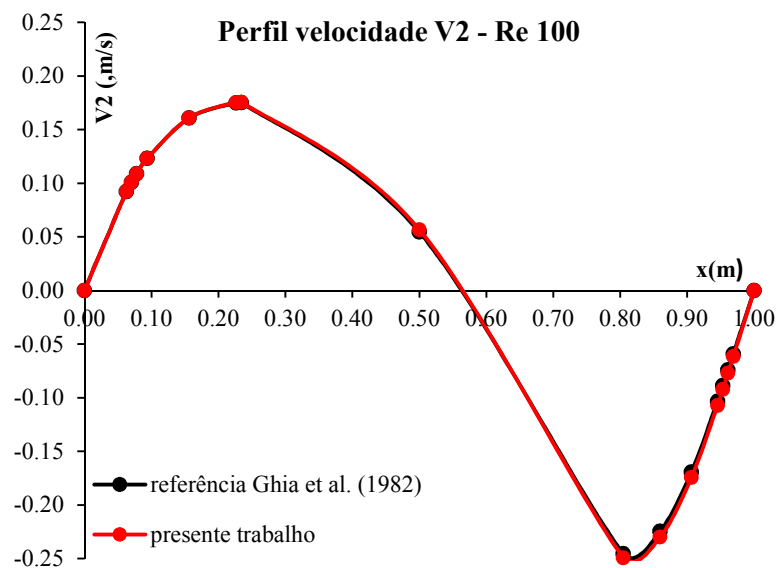


Figura 33: Perfil de velocidade V2 Re 100.

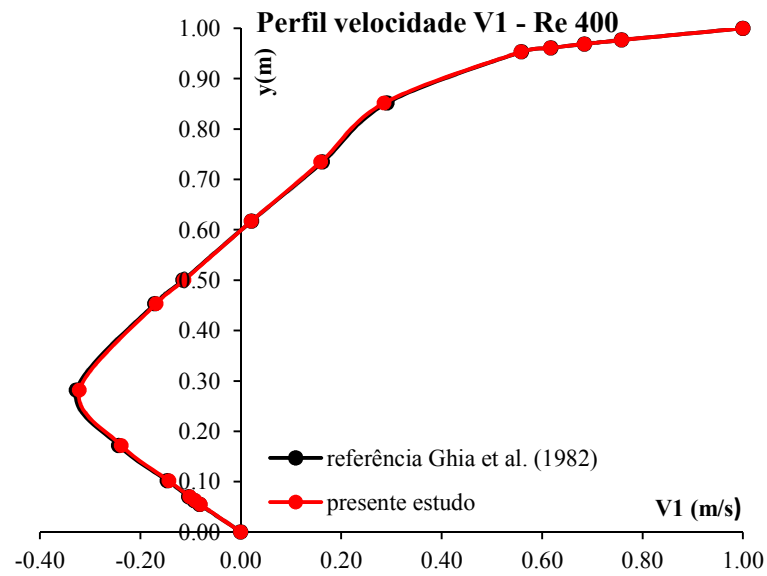


Figura 34: Perfil de velocidade V1 para Re 400.

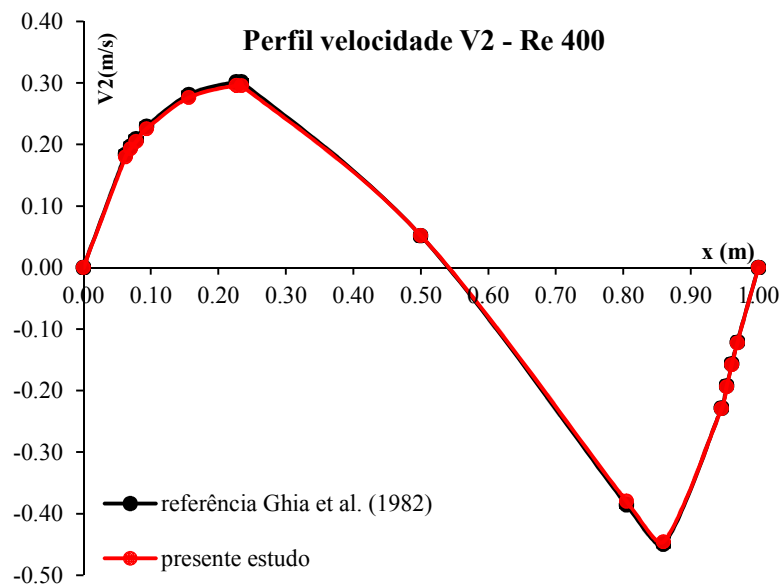


Figura 35: Perfil de velocidade V2 para Re 400.

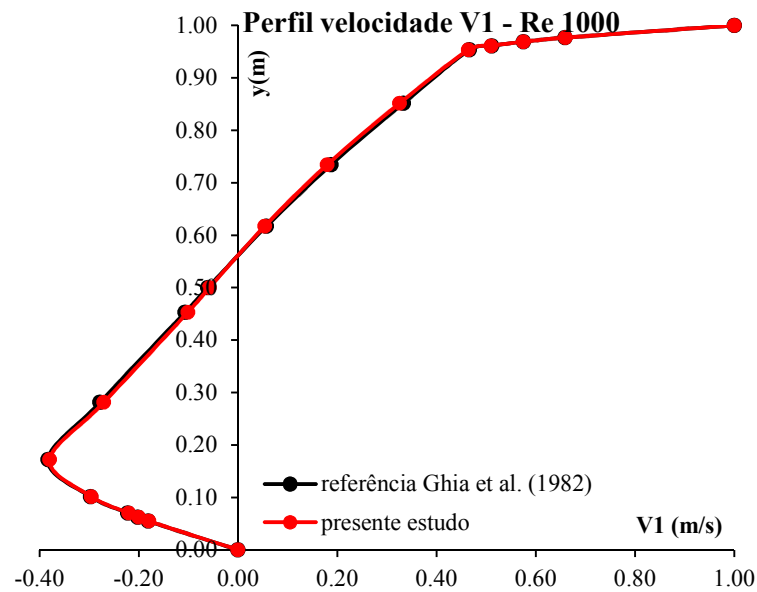


Figura 36: Perfil de velocidade V1 para Re 1000.

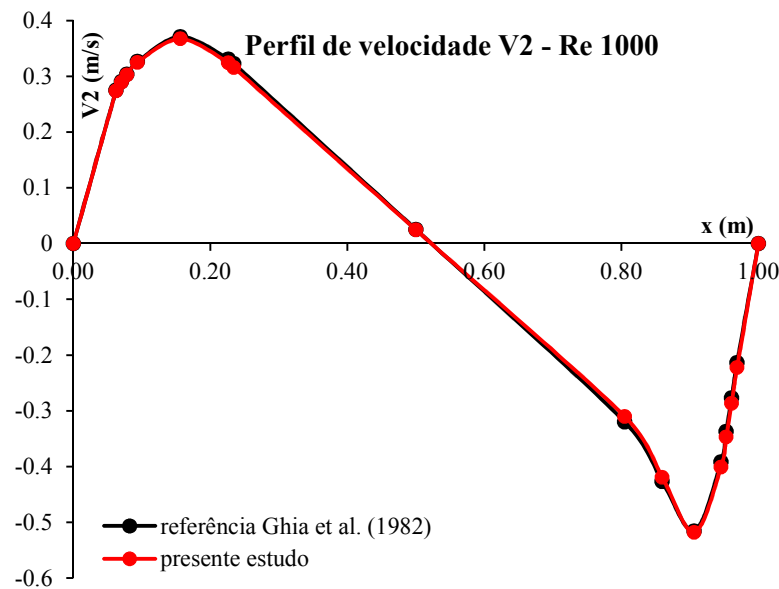


Figura 37: Perfil de velocidade V2 para Re 1000.

Da Figura 38 a Figura 40 são apresentados os campos de pressão e as linhas de corrente respectivos aos diferentes Reynolds dos escoamentos estudados. Nota-se a formação de dois vórtices na parte inferior da cavidade que vão se tornando maiores à medida que o número de Reynolds cresce. Na Figura 41 são apresentadas as linhas de corrente obtidas por Ghia et al. (1982), demonstrando a eficiência do método aplicado.

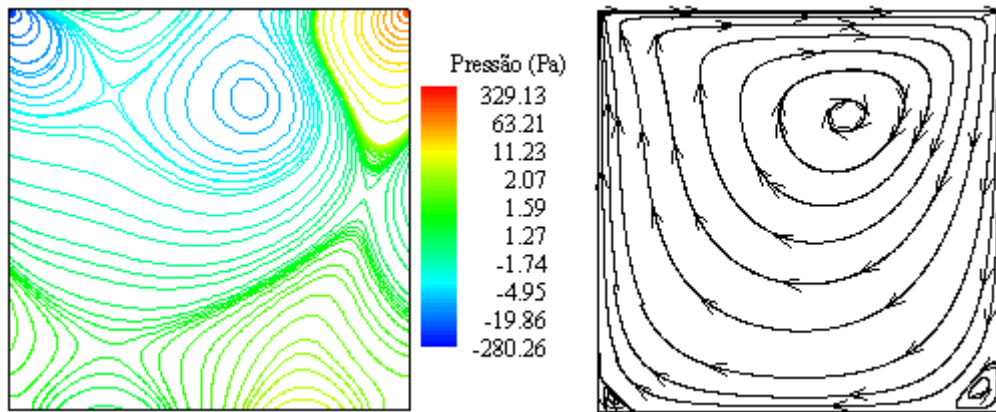


Figura 38: Campos de pressão e linhas de corrente para $Re = 100$.

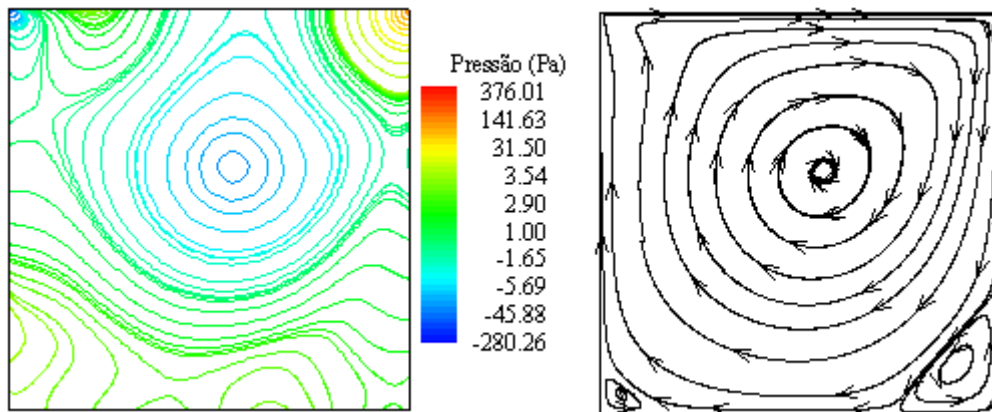


Figura 39: Campos de pressão e linhas de corrente para $Re = 400$.

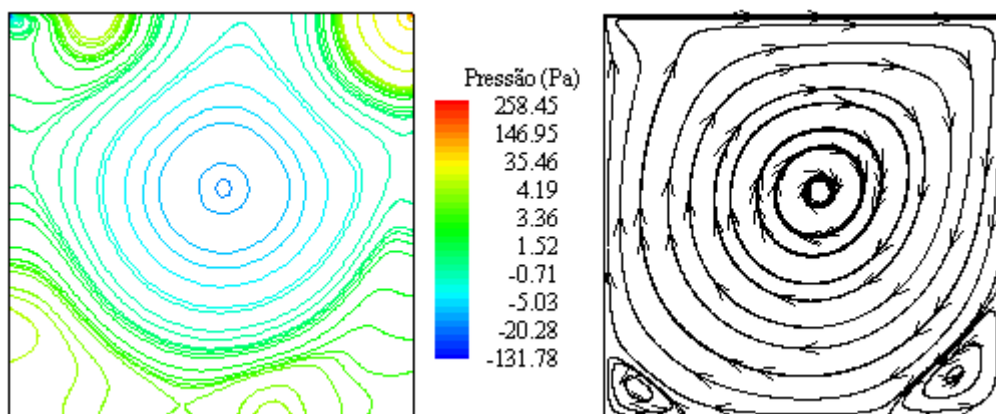


Figura 40: Campos de pressão e linhas de corrente para $Re = 1000$.

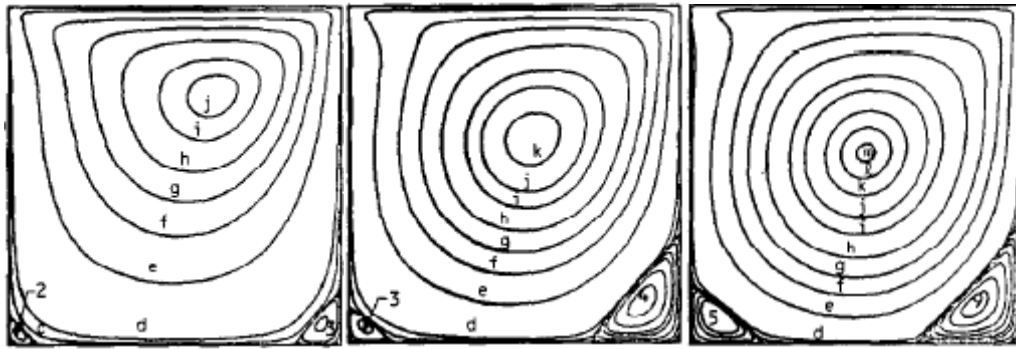


Figura 41: Linhas de corrente para Re 100, 400 e 1000 (Fonte: GHIA et al., 1982)

7.2 ESCOAMENTO TURBULENTO EM UMA CAVIDADE 2D

Nesse item será apresentado o estudo de um escoamento viscoso em cavidade para Reynolds 10000. Por se tratar de um número de Reynolds que conduz a um escoamento turbulento, utilizou-se para essa análise a simulação semelhante a LES, em um espaço bidimensional, com modelo sub-malha de Smagorinsky clássico conforme apresentado nesse trabalho.

Teve-se como intuito realizar uma comparação entre o uso de funções lineares e quadráticas nos problemas envolvendo turbulência e a validação do método proposto através da comparação do valor médio do perfil ao longo do tempo com a referência de Ghia et al. (1982) que utiliza o método das diferenças finitas com uma malha de 257 x 257 pontos.

Tabela 4: Propriedades do fluido, do escoamento e da discretização com funções NURBS.

Massa específica - ρ	1 kg/m ³
Viscosidade volumétrica - λ	0 Ns/m ²
Viscosidade dinâmica - μ	0,01 Ns/m ²
Coefficiente de Smagorinsky C_s	0,15
Dimensão característica - D	1 m
Velocidade característica - V	10 m/s
Velocidade do som no fluido - c	70 m/s
Pontos de controle na direção ξ	100
Pontos de controle na direção η	100
Menor distância entre P.C	0,0025
Incremento de tempo - Δt	1,0x10 ⁻⁵ s
Número de elementos – funções grau 1	10000
Número de elementos – funções grau 2	9801

A geometria fica definida conforme a Figura 31 apresentada no item anterior, sendo a discretização dos pontos de controle na direção horizontal e vertical realizado através da

progressão geométrica bidirecional. As propriedades do fluido, do escoamento e da malha NURBS utilizadas no estudo com funções lineares e quadráticas são as apresentadas na Tabela 4.

Na Figura 42 é apresentado o perfil para a velocidade horizontal na reta em que $x = 0,5$ para Reynolds 10000 usando-se funções de forma lineares, funções de forma quadráticas e o perfil apresentado pela referência. Pode-se notar que apesar de ser uma malha muito menos refinada que a da referência em questão os resultados apresentados estão muito satisfatórios. Com relação ao uso de funções quadráticas não se observou uma notória diferença entre os resultados. Entretanto, o uso de funções quadráticas levou a convergência mais acelerada para o problema.

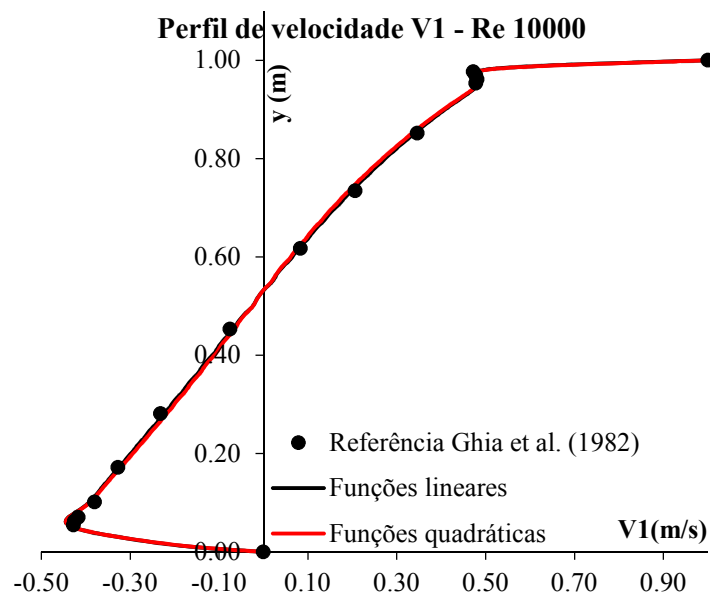


Figura 42: Perfil de velocidade V1 para Re 10000.

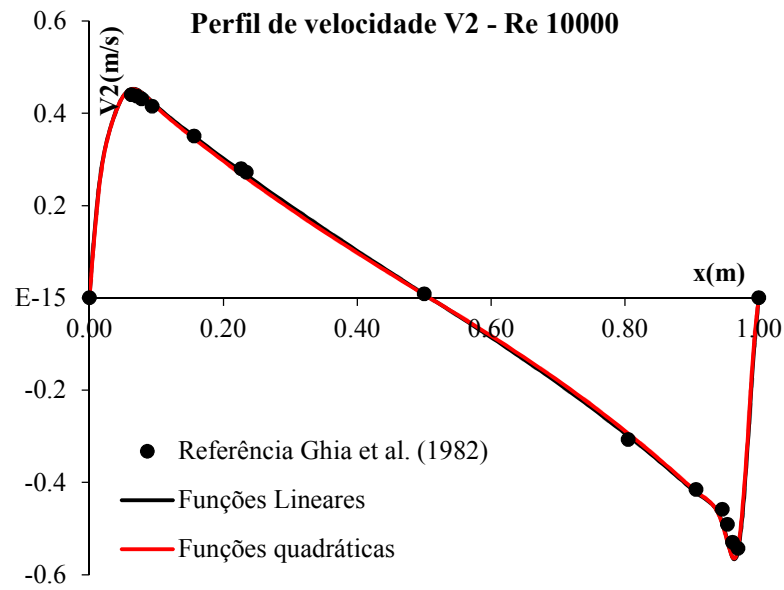


Figura 43: Perfil de velocidade V2 para Re 10000.

Na Figura 44 são apresentadas as linhas de corrente obtidas com o Reynolds 10000 e na Figura 45 as obtidas pela referência em questão. Observa-se novamente que a metodologia aplicada é capaz de representar muito bem os vórtices formados ao longo do escoamento.

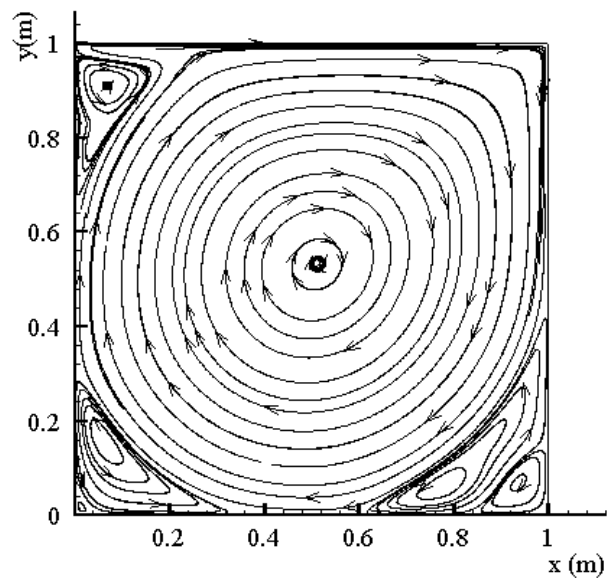


Figura 44: Linhas de corrente para Re 10000.

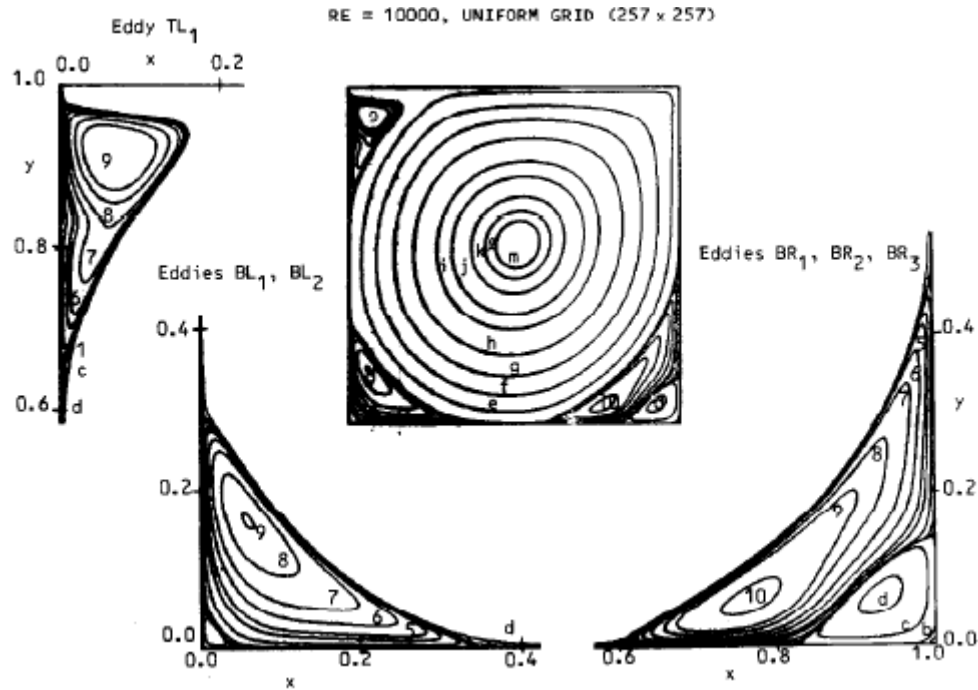


Figura 45: Linhas de corrente V2 para Re 10000 (Fonte: GHIA et al., 1982)

Por fim, fez-se uma análise da influência da constante de Smagorinsky nos resultados dos perfis de velocidade, adotando para isso as funções lineares. Foram comparados os resultados para $C_s = 0,15$ e $C_s = 0,20$. Pode-se notar nas Figura 46 e Figura 47 que o aumento dessa constante levou ao afastamento da solução da referência em questão.

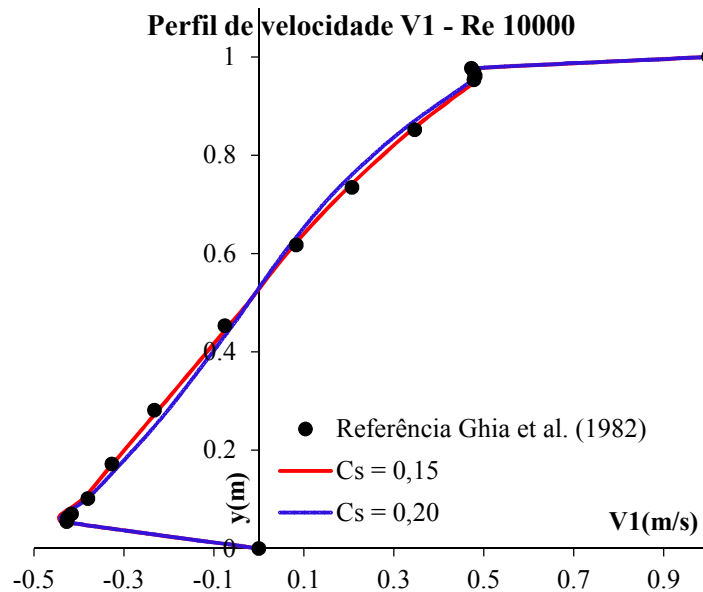


Figura 46: Perfil de velocidade V1 para Re 10000 e diferentes valores de C_s .

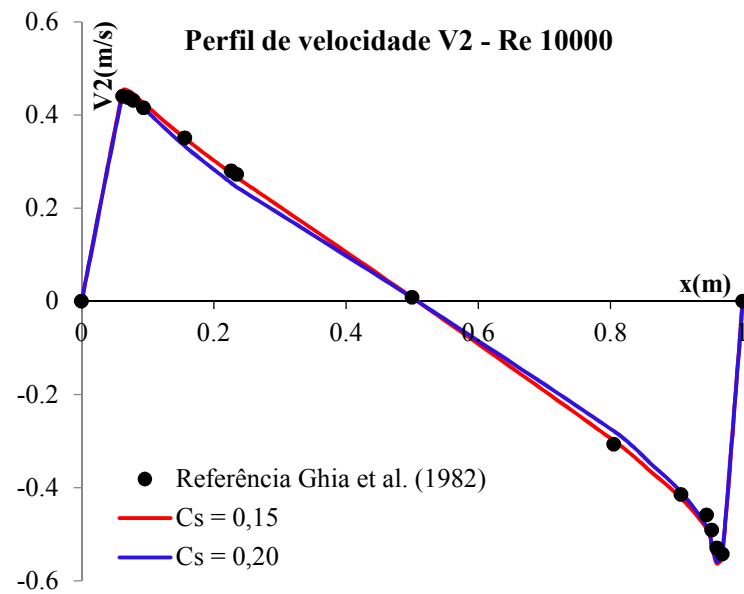


Figura 47: Perfil de velocidade V2 para Re 10000 e diferentes valores de Cs.

7.3 ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL EM UM CANAL COM DEGRAU

Nesse item será apresentado o estudo de um escoamento em um canal com um degrau, conforme apresentado na Figura 48, para os Reynolds 100, 200, 400, 600, 800 e 1000. O objetivo dessa análise é a validação do modelo proposto com o uso de múltiplos macroelementos em virtude de existir na literatura uma série de resultados experimentais e numéricos acerca desse problema que possibilitam a comparação.

O escoamento sobre um degrau é caracterizado por produzir áreas de recirculação onde o fluido se separa e forma vórtices. A distância entre o degrau e ponto de recolamento do vórtice principal (x_r) é denominada de comprimento de recolamento e é uma das principais características verificadas nesse estudo.

As dimensões utilizadas para o canal foram $h = 1,0$ m, $s = 0,94$ m, $x_e = 1$ m e $x_r = 30$ m. Como condições de contorno do escoamento consideraram-se nas paredes do canal velocidades nulas ($v_1 = v_2 = 0$), na entrada do canal um perfil de velocidade parabólico ($v_1 = v(y)$ e $v_2 = 0$), e na saída do canal pressão nula ($p = 0$). A função $v(y)$ é definida através da seguinte relação:

$$v(y) = V_{1M\acute{a}x} \left(1 - \left(\frac{(y-s) - h/2}{h/2} \right)^2 \right) \quad (6.11)$$

Sendo $V_{1M\acute{a}x}$ a velocidade máxima apresentada no perfil e y representa a coordenada cartesiana vertical. O número de Reynolds foi calculado de acordo com o apresentado em Armaly et al.(1984) :

$$Re = \frac{\rho \left(\frac{2V_{1max}}{3} \right) 2h}{\mu} \quad (6.12)$$

Para a discretizaao do problema foram usados 5 macro-elementos (*patches*), conforme são indicados na Figura 48, sendo utilizados em todos eles funoes de forma de grau 1. Os pontos de controle dos macro-elementos 1, 4 e 5 são discretizados verticalmente e horizontalmente baseados na metodologia de progressão geométrica bidirecional e os macro-elementos 2 e 3 são discretizados verticalmente através da progressão geométrica bidirecional e horizontalmente com o uso da progressão geométrica unidirecional. As dimensões dos macro-elementos foram definidas em funao da dimensão x_r , apresentada nas bibliografias de referência. As demais características do escoamento, do fluido e das malhas são apresentadas na Tabela 5.

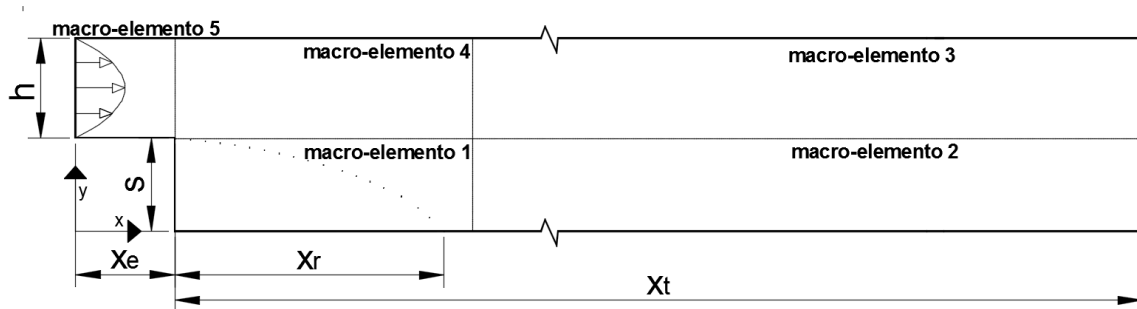


Figura 48: Domínio e dimensões características do escoamento sobre o degrau.

Tabela 5: Propriedades do fluido, do escoamento e da malha de funoes NURBS

Características gerais	Massa específica - ρ	1 kg/m ³
	Viscosidade Volumétrica - λ	0 Ns/m ²
	Velocidade máxima no perfil - $V_{1m\acute{a}x}$	10 m/s
	Velocidade do som no fluido - c	70 m/s
Re 100	Viscosidade dinâmica - μ	0,1333 Ns/m ²
	Incremento de tempo - Δt	$2,6 \times 10^{-4}$ s

	Menor elemento	0,03
	Número de elementos	10800
Macro-elemento 1	Pontos de controle na direção ξ	60
	Pontos de controle na direção η	20
Macro-elemento 2	Pontos de controle na direção ξ	200
	Pontos de controle na direção η	20
Macro-elemento 3	Pontos de controle na direção ξ	200
	Pontos de controle na direção η	20
Macro-elemento 4	Pontos de controle na direção ξ	60
	Pontos de controle na direção η	20
Macro-elemento 5	Pontos de controle na direção ξ	20
	Pontos de controle na direção η	20
<hr/>		
Re 200	Viscosidade dinâmica	0,0666Ns/m ²
	Incremento de tempo - Δt	2,6x10 ⁻⁴ s
	Menor elemento	0,03
	Número de elementos	11600
Macro-elemento 1	Pontos de controle na direção ξ	100
	Pontos de controle na direção η	20
Macro-elemento 2	Pontos de controle na direção ξ	180
	Pontos de controle na direção η	20
Macro-elemento 3	Pontos de controle na direção ξ	180
	Pontos de controle na direção η	20
Macro-elemento 4	Pontos de controle na direção ξ	100
	Pontos de controle na direção η	20
Macro-elemento 5	Pontos de controle na direção ξ	20
	Pontos de controle na direção η	20
<hr/>		
Re 400	Viscosidade dinâmica	0,03333 Ns/m ²
	Incremento de tempo - Δt	1,7x10 ⁻⁴ s
	Menor elemento	0,020
	Número de elementos	20736
Macro-elemento 1	Pontos de controle na direção ξ	200
	Pontos de controle na direção η	24
Macro-elemento 2	Pontos de controle na direção ξ	220
	Pontos de controle na direção η	24
Macro-elemento 3	Pontos de controle na direção ξ	220
	Pontos de controle na direção η	24
Macro-elemento 4	Pontos de controle na direção ξ	200
	Pontos de controle na direção η	24
Macro-elemento 5	Pontos de controle na direção ξ	24
	Pontos de controle na direção η	24
<hr/>		
Re 600	Viscosidade dinâmica	0,02222 Ns/m ²
	Incremento de tempo - Δt	1,7x10 ⁻⁴ s
	Menor elemento	0,020
	Número de elementos	23328

Macro-elemento 1	Pontos de controle na direção ξ	274
	Pontos de controle na direção η	24
Macro-elemento 2	Pontos de controle na direção ξ	200
	Pontos de controle na direção η	24
Macro-elemento 3	Pontos de controle na direção ξ	200
	Pontos de controle na direção η	24
Macro-elemento 4	Pontos de controle na direção ξ	274
	Pontos de controle na direção η	24
Macro-elemento 5	Pontos de controle na direção ξ	24
	Pontos de controle na direção η	24
<hr/>		
Re 800 e 1000	Viscosidade dinâmica – Re 800	0,01666 Ns/m ²
	Viscosidade dinâmica – Re 1000	0,010 Ns/m ²
	Incremento de tempo - Δt	1,3x10 ⁻⁴ s
	Menor elemento	0,015
	Número de elementos	38340
Macro-elemento 1	Pontos de controle na direção ξ	400
	Pontos de controle na direção η	30
Macro-elemento 2	Pontos de controle na direção ξ	224
	Pontos de controle na direção η	30
Macro-elemento 3	Pontos de controle na direção ξ	224
	Pontos de controle na direção η	30
Macro-elemento 4	Pontos de controle na direção ξ	400
	Pontos de controle na direção η	30
Macro-elemento 5	Pontos de controle na direção ξ	30
	Pontos de controle na direção η	30
<hr/>		

Na Figura 49 são apresentados os resultados obtidos para o comprimento de recolamento do vórtice adimensionalizado, juntamente com os resultados apresentados em Armaly et al. (1983) de ensaios experimentais e os resultados de Williams e Baker (1997) obtidos através de simulações numéricas bidimensionais. O valor de X_r/S até Reynolds 400 ficou muito próximo aos das referências apresentadas. Entretanto, para Reynolds superiores nota-se que o valor do presente trabalho, afasta-se da curva experimental. A defasagem entre os valores experimentais e os de simulações bidimensionais é esperado à medida que o Reynolds cresce, visto que o escoamento vai se tornando tridimensional.

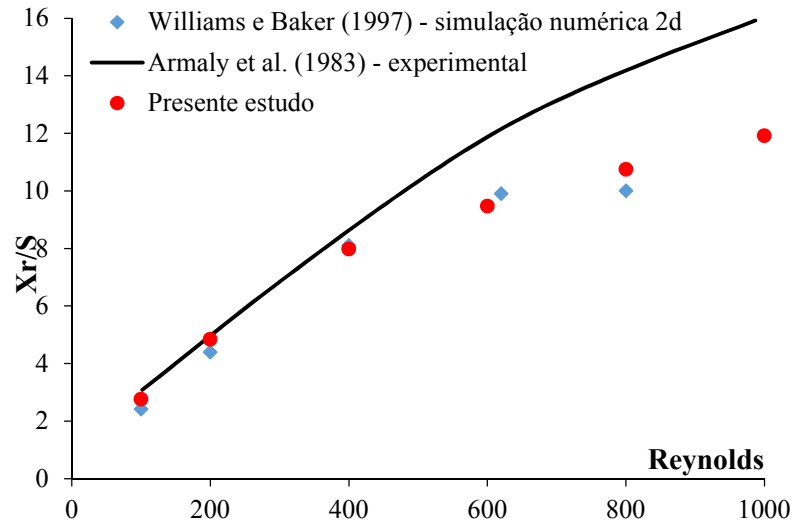
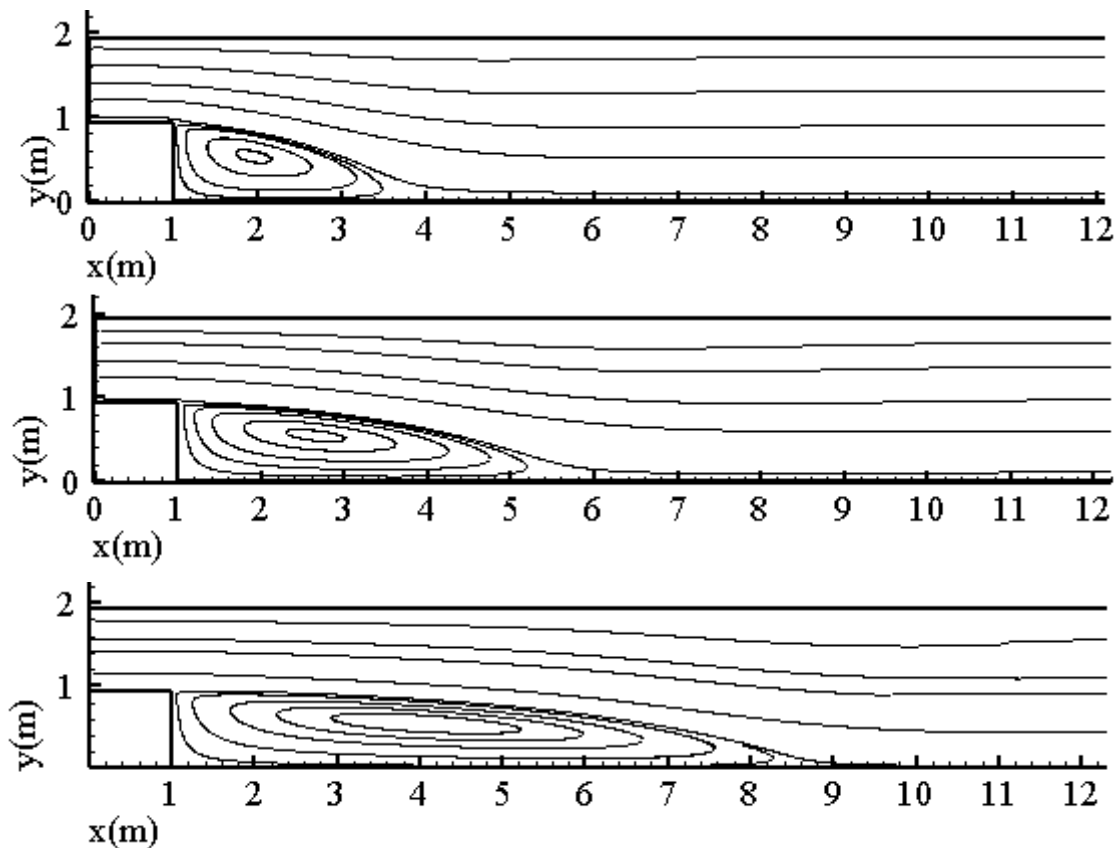


Figura 49: Comprimento de recolamento do vórtice principal.

Na Figura 50 observam-se os detalhes do vórtice principal formado atrás do degrau para os diferentes Reynolds estudados. Além disso, na Figura 51 é apresentado o vórtice secundário que se forma para os Reynolds 600, 800 e 1000. Os tamanhos adimensionalizados pela altura do degrau do canal (S) para o vórtice secundário foram de: 5,50, 7,45, 8,50 para os Reynolds 600, 800 e 1000 respectivamente. Armaly et. al. obtiveram os valores de 5,87, 9,17, 10,4 para esses mesmos Reynolds.



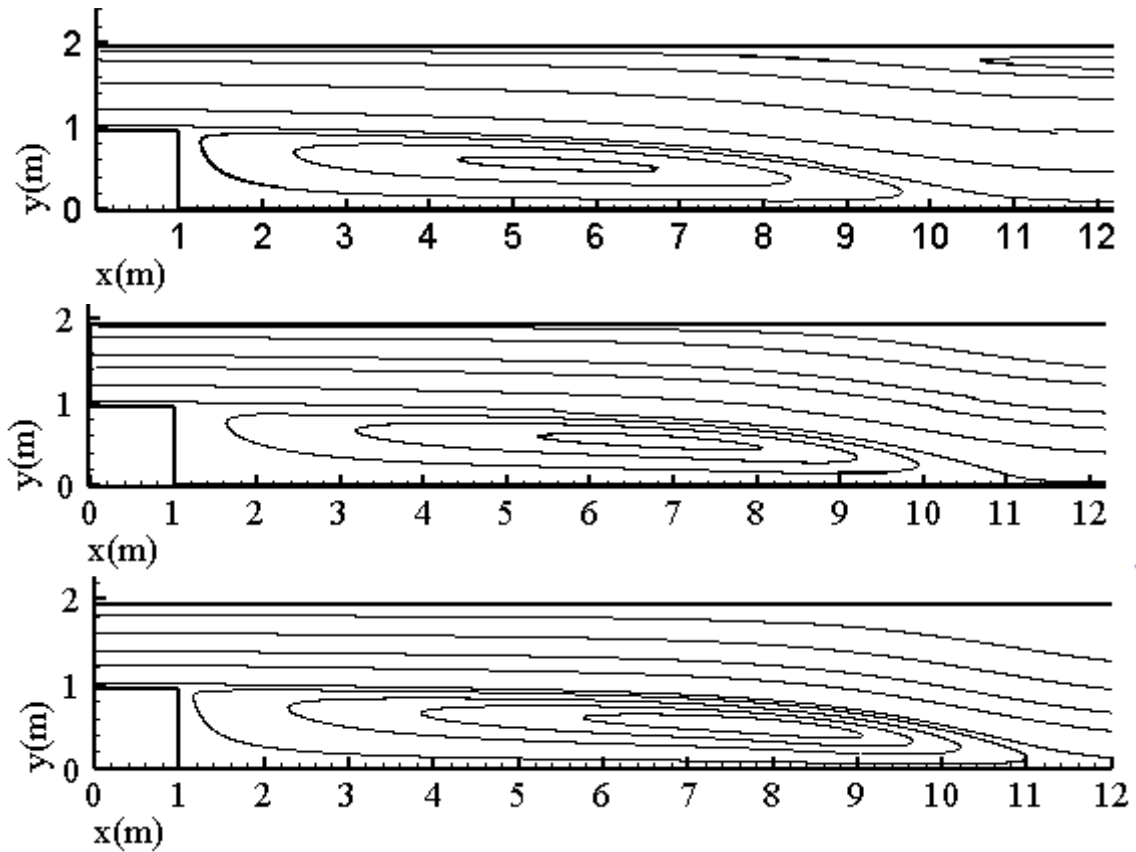


Figura 50: Detalhe das linhas de corrente no vórtice principal para Reynolds 100, 200, 400, 600, 800 e 1000.

Na Figura 52 são apresentadas as Isolinhas de pressão para os Reynolds em estudo. É importante ressaltar que as linhas de corrente e as Isolinhas de pressão para Re 600, 800 e 1000 são obtidos através da média temporal realizada a partir da metade do tempo do escoamento. A média permite amenizar as perturbações que começam a ocorrer ao longo da parede à medida que o Reynolds aumenta.

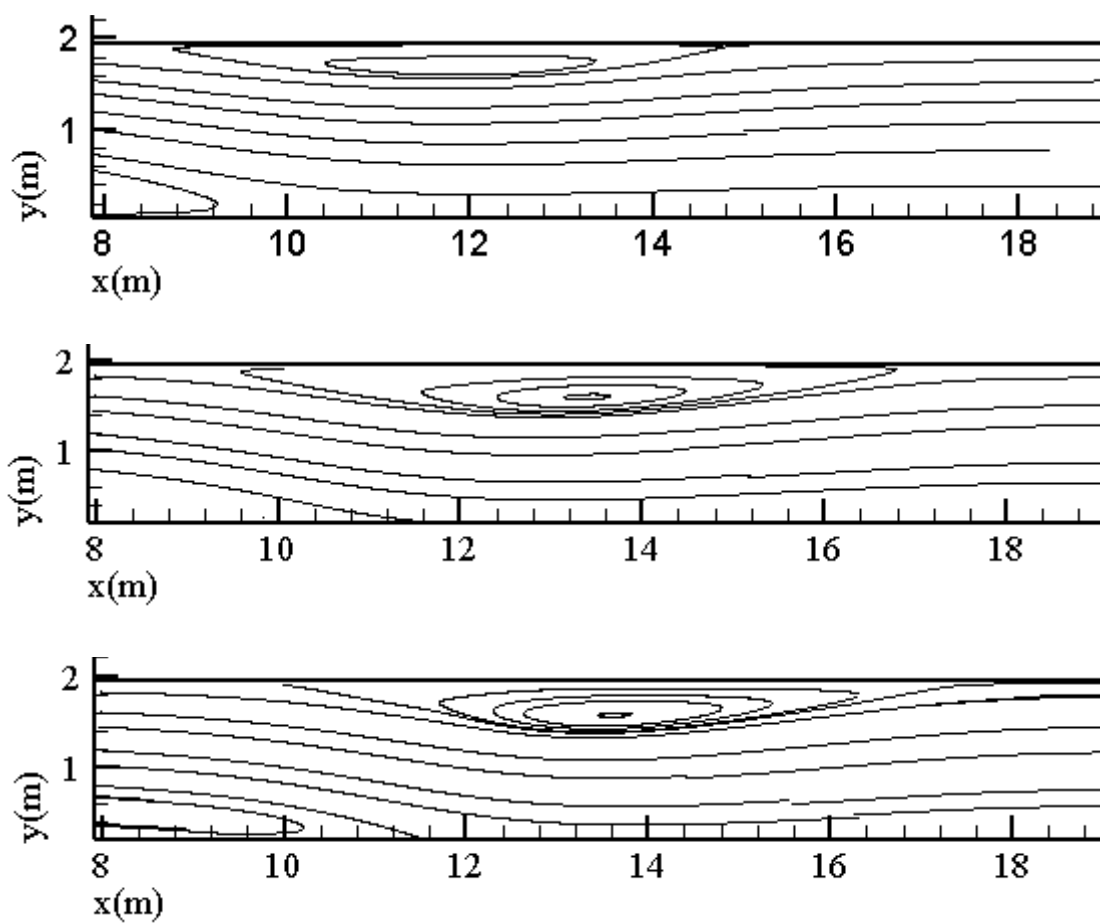


Figura 51: Detalhe das linhas de corrente no vórtice secundário para Reynolds 600, 800 e 1000.

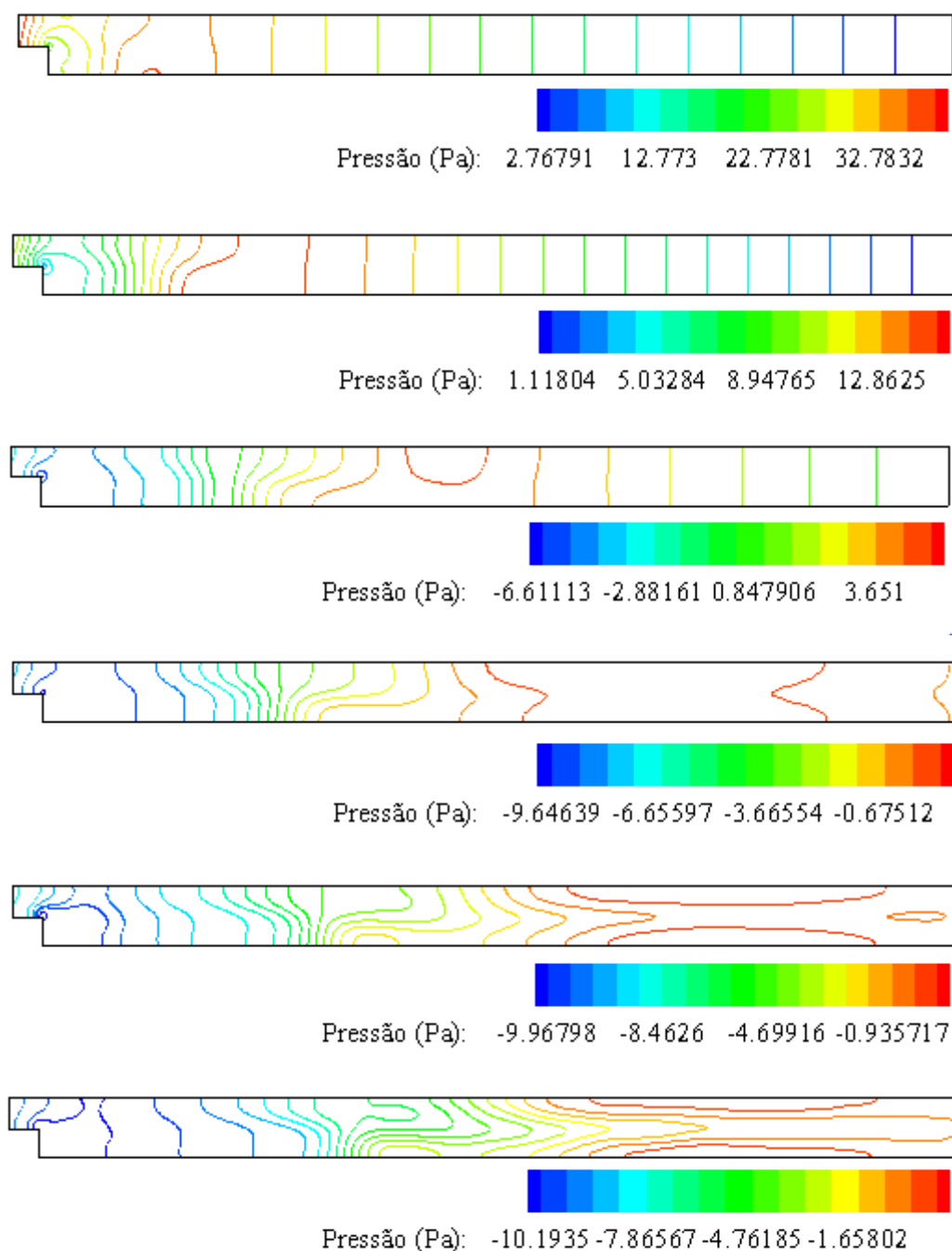


Figura 52: Isolinhas de pressão para Reynolds 100, 200, 400, 600, 800 e 1000.

7.4 ESCOAMENTO SOBRE UM CILINDRO 2D

Neste item será apresentado um estudo sobre escoamento de um fluido viscoso em torno de um cilindro colocado transversalmente ao escoamento principal para diferentes números de Reynolds: 10, 20, 30, 40, 50, 100, 300, 500, 700, 1000. Teve-se como intuito a

obtenção dos coeficientes aerodinâmicos medidos ao longo do tempo: coeficiente de arrasto C_D , coeficiente de sustentação C_L , coeficiente de pressão C_p ao redor do cilindro, assim como o número de Strouhal St . Além disso, procurou-se verificar se o modelo é capaz de reproduzir fenômenos relacionados à formação e desprendimento de vórtices. Para esses exemplos foi utilizado um único macro-elemento na descrição da geometria e funções quadráticas em ambas as direções.

Por fim, nesse item serão apresentados ainda resultados obtidos para Reynolds 100 utilizando-se múltiplos macro-elementos na descrição da geometria, e para Reynolds 40 utilizando-se um único macro-elemento, porém com funções quadráticas na direção paramétrica ξ e funções lineares na direção paramétrica η .

A discretização radial dos pontos de controle foi efetuada através da progressão geométrica unidirecional, sendo a distância entre dois primeiros pontos de controle igual à distância média entre os pontos de controle que descrevem a curva da circunferência.

O número de Reynolds (Re) para esse problema é obtido através da seguinte relação:

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (6.13)$$

onde D é a dimensão característica, sendo nesse caso o diâmetro do cilindro.

Na Figura 53 são apresentadas as características geométricas do problema, assim como as condições de contorno usadas para os Reynolds de 10, 20, 40, 50. Para os demais Reynolds apenas foram alteradas as dimensões do retângulo que passa a ter 20 diâmetros a partir do centro do cilindro nas direções horizontal (positiva e negativa) e vertical (negativa e positiva). Essas características dizem respeito ao uso de apenas um macro-elemento. Na Figura 54 são apresentadas as características geométricas do problema para múltiplos macro-elementos, sendo que as condições de contorno são as mesmas apresentadas para um único macro-elemento.

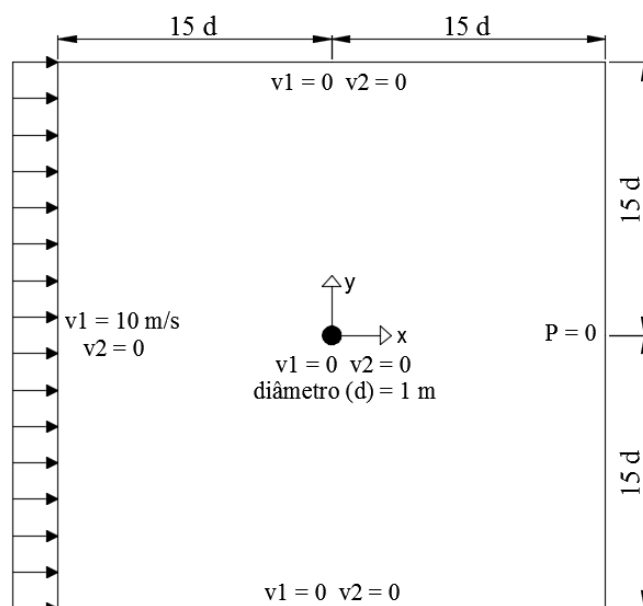


Figura 53: Características geométricas do problema e condições de contorno – 1 macro-elemento.

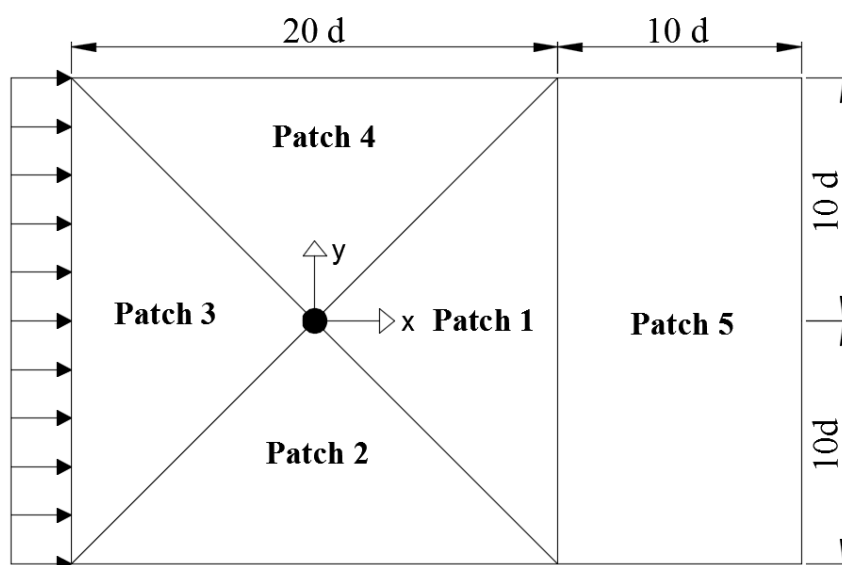


Figura 54: Características geométricas do problema e condições de contorno – múltiplos macro-elementos.

Na Tabela 6 são apresentados os dados referentes a discretização com funções NURBS e incrementos de tempo para os diferentes números de Reynolds avaliados para as geometrias discretizadas com apenas um macro-elemento. Na Tabela 7 são apresentadas essas mesmas características para o caso resolvido com múltiplos macro-elementos.

Tabela 6: Dados da discretização com funções NURBS e incremento temporal – 1 macro-elemento.

Re: 10,20,30,40,50	Pontos de controle na direção ξ	100
	Pontos de controle na direção η	70
	Grau das funções na direção ξ	2
	Grau das funções na direção η	2
	Número de elementos	6624
	Incremento de tempo - Δt	$1,5 \times 10^{-4}$ s
Re: 100,300	Pontos de controle na direção ξ	120
	Pontos de controle na direção η	90
	Grau das funções na direção ξ	2
	Grau das funções na direção η	2
	Número de elementos	10324
	Incremento de tempo - Δt	$2,2 \times 10^{-4}$ s
Re: 500	Pontos de controle na direção ξ	152
	Pontos de controle na direção η	110
	Grau das funções na direção ξ	2
	Grau das funções na direção η	2
	Número de elementos	16132
	Incremento de tempo - Δt	$1,8 \times 10^{-4}$ s
Re: 700,1000	Pontos de controle na direção ξ	168
	Pontos de controle na direção η	120
	Grau das funções na direção ξ	2
	Grau das funções na direção η	2
	Número de elementos	19516
	Incremento de tempo - Δt	$9,3 \times 10^{-5}$ s
Re: 40	Pontos de controle na direção ξ	100
	Pontos de controle na direção η	70
	Grau das funções na direção ξ	2
	Grau das funções na direção η	1
	Número de elementos	6720
	Incremento de tempo - Δt	$1,5 \times 10^{-4}$ s

Tabela 7: Dados da discretização com funções NURBS e incremento temporal – Múltiplos Macro-elementos.

Macro-elemento 1, 2, 3, 4		
	Pontos de controle na direção ξ	25
	Pontos de controle na direção η	70
Macro-elemento 5		
Re: 100 Múltiplos macro-elementos	Pontos de controle na direção ξ	25
	Pontos de controle na direção η	25
	Número de elementos	7200
	Incremento de tempo - Δt	$2,2 \times 10^{-4}$ s

Na Tabela 8 podem ser visualizadas as características gerais referentes ao fluido e ao escoamento usados nesse estudo.

Tabela 8: Características do fluido e do escoamento

Massa específica - ρ	1 kg/m ³
Viscosidade volumétrica - λ	0 Ns/m ²
Velocidade do som no fluido - c	70 m/s
Velocidade característica - V	10 m/s
Dimensão característica - D	1 m
Viscosidade dinâmica Re 10 - μ	1,000 Ns/m ²
Viscosidade dinâmica Re 20 - μ	0,500 Ns/m ²
Viscosidade dinâmica Re 30 - μ	0,333 Ns/m ²
Viscosidade dinâmica Re 40 - μ	0,250 Ns/m ²
Viscosidade dinâmica Re 50 - μ	0,200 Ns/m ²
Viscosidade dinâmica Re 100 - μ	0,100 Ns/m ²
Viscosidade dinâmica Re 300 - μ	0,033 Ns/m ²
Viscosidade dinâmica Re 700 - μ	0,014 Ns/m ²
Viscosidade dinâmica Re 1000 - μ	0,001 Ns/m ²

Na Figura 55 são apresentados o campo de pressões e as linhas de corrente para um escoamento de Re 40 com funções em ambas as direções quadráticas. Pode-se observar a formação de dois vórtices simétricos e estacionários na região de recirculação logo após o cilindro, sendo esse o comportamento esperado para valores de Reynolds entre 5 e 50, aproximadamente. As características dos vórtices formados são apresentadas na Tabela 9 e comparados com os apresentados em Wanderley e Levi (2002) para uma malha com 200 x 200 elementos usando diferenças finitas e com os de Braun (2007) que utiliza o MEF com uma malha de 6800 elementos isoparamétricos e funções de forma lineares. Nota-se que a

metodologia aplicada é capaz de representar adequadamente o processo de formação de vórtices.

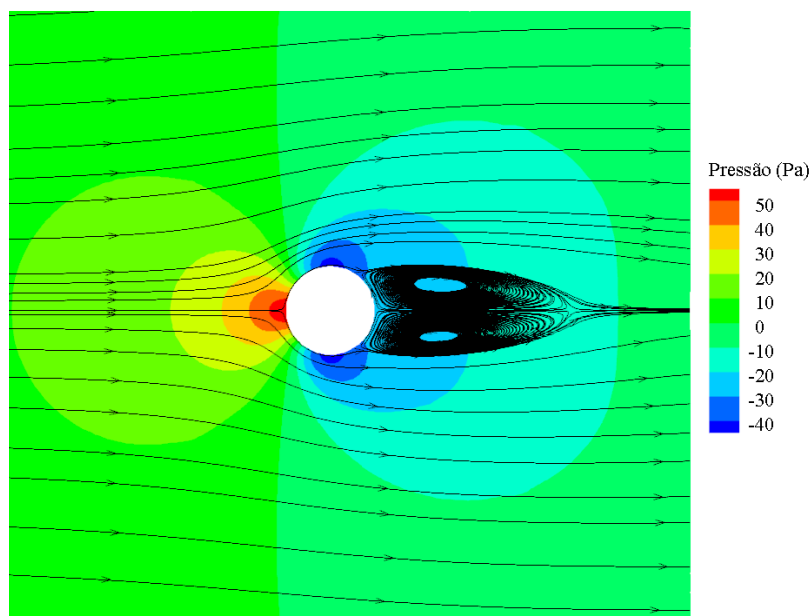
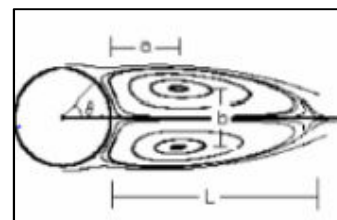


Figura 55: Campos de pressão e linhas de corrente para Re 40.

Tabela 9: Característica dos vórtices formados na região de recirculação para Re 40.

Grandeza	Referência 1	Referência 2	Presente trabalho
C_D	1,6	1,77	1,58
L/D	2,10	2,10	2,21
a/D	0,69	0,71	0,71
b/D	0,58	0,58	0,59
θ	53,2	53,2	52,1

Referência 1 - Wanderley e Levi (2002)/Referência 2 - Braun (2007)



Na Tabela 10 são apresentadas as características dos vórtices para Reynolds 40 com o uso de funções quadráticas nas duas direções paramétricas (Avaliação 1) e com o uso de funções quadráticas na direção ξ e funções lineares na direção η (Avaliação 2). Essas simulações tiveram como objetivo demonstrar a versatilidade que a Análise Isogeométrica proporciona quanto à escolha de grau de funções de forma. Além disso, ao observar os resultados das análises nota-se que o uso de funções quadráticas nas duas direções proporcionou resultados ligeiramente melhores.

Na Figura 56, podem ser visualizados as linhas de corrente e campos de pressão para os Reynolds 10, 20, 30 e 50. Nota-se que o comprimento do par de vórtices estacionário aumenta conforme se eleva o número de Reynolds.

Tabela 10: Características dos vórtices formados na região de recirculação para Re 40

Grandeza	Avaliação 1	Avaliação 2
C_D	1,58	1,62
L/D	2,21	2,23
a/D	0,71	0,71
b/D	0,59	0,59
θ	52,1	51,5

Na Figura 58 são apresentados os campos de pressão e as linhas de corrente no tempo de 30 segundos para os de Reynolds 100, 300, 500, 700 e 1000 com o uso de um único macro-elemento. Na Figura 57 é apresentado o campo de pressões juntamente com linhas de corrente para Reynolds 100 usando para a descrição da geometria múltiplos macro-elementos. Nota-se nessas imagens que o par de vórtices se quebra e passa a existir uma esteira de vórtices, denominada de esteira de Von Kármán, que ocorre devido à formação de vórtices de maneira alternada entre as regiões superior e inferior da superfície do cilindro. O comportamento da esteira vai se tornando turbulento à medida que o Reynolds do escoamento é elevado, embora o regime do escoamento ainda seja laminar para essa faixa de Reynolds. Na Figura 59 visualiza-se esse mesmo comportamento apresentado nos estudos de Lienhard (1966).

Na Figura 60 são apresentados os coeficientes aerodinâmicos C_D para os diferentes números de Reynolds, obtidos no presente estudo. Nota-se que até aproximadamente Reynolds 100 o coeficiente de arrasto decresce conforme se aumenta o número de Reynolds, sendo essa redução mais acentuada nos Reynolds menores. Após isso, têm-se um período entre os Reynolds 100 e 300 que a curva que descreve o coeficiente de arrasto mantém-se praticamente constante. Por fim, acontece um leve aumento no coeficiente de arrasto com o aumento do número de Reynolds que coincide com a formação da esteira de vórtices de Von Kármán. Nessa mesma figura têm-se uma curva apresentada em Henderson (1997) que é ajustada por dados de simulações bidimensionais, a partir da qual se pode comprovar que o

modelo apresentado é capaz de representar adequadamente o coeficiente de arrasto resultante de um escoamento incidindo sobre corpo cilíndrico.

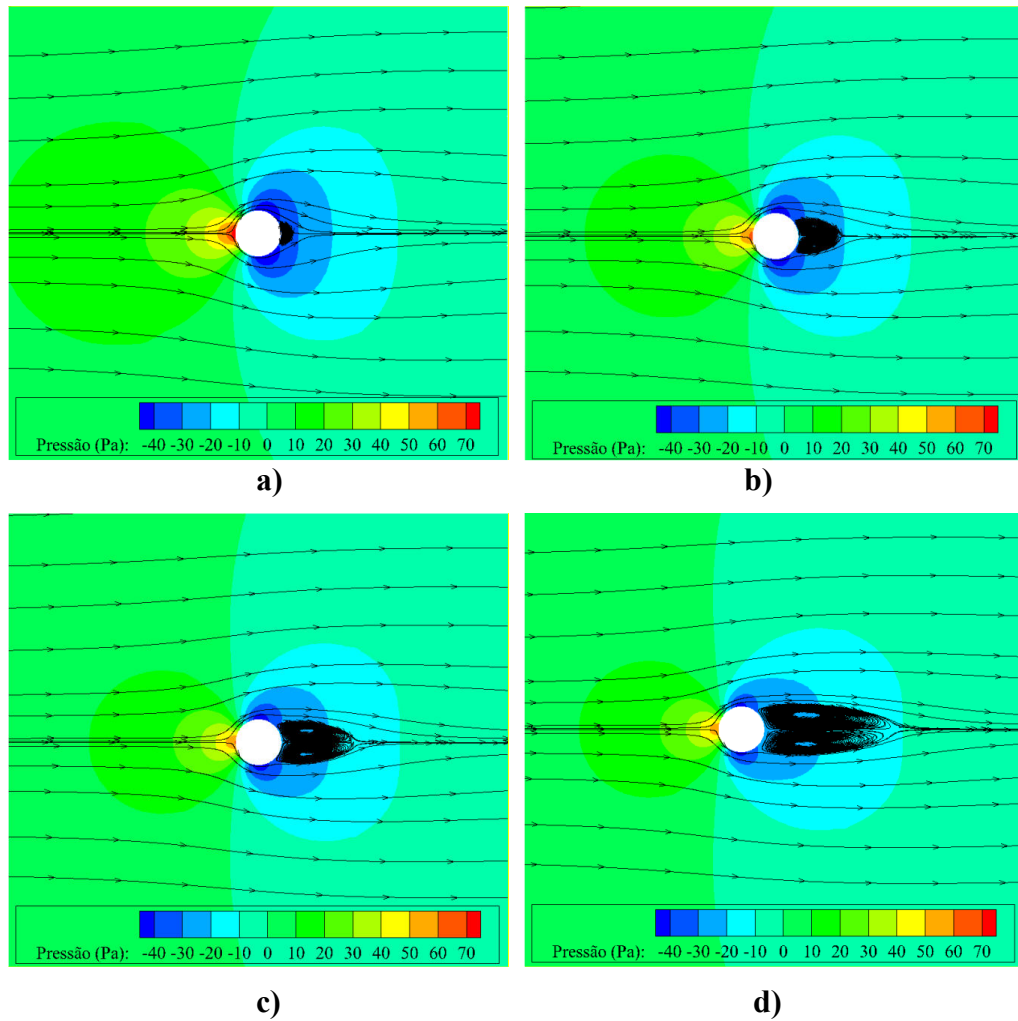


Figura 56: Campos de pressão e linhas de corrente. a) Reynolds 10; b) Reynolds 20; c) Reynolds 30; d) Reynolds 50.

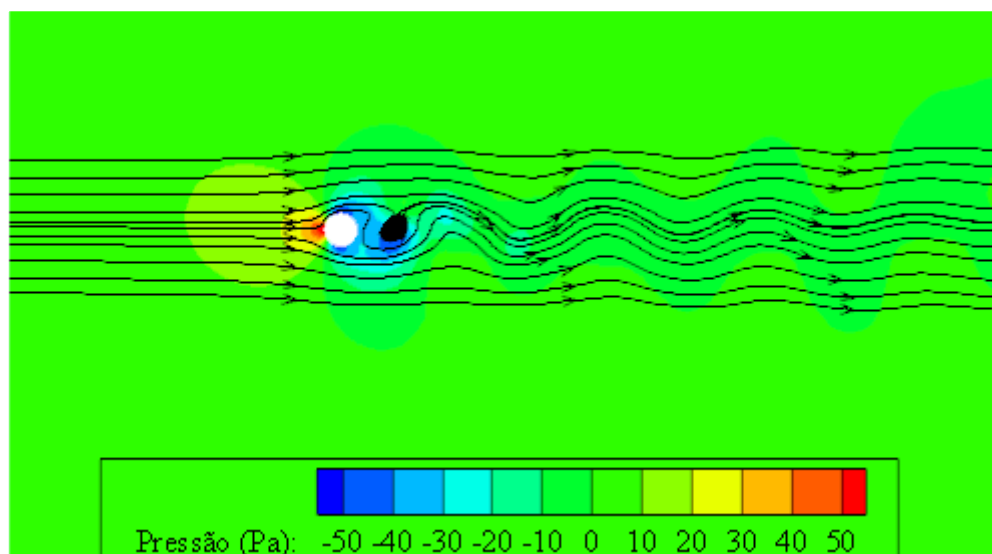


Figura 57: Campos de pressão para $Re\ 100$ – Múltiplos macro-elementos

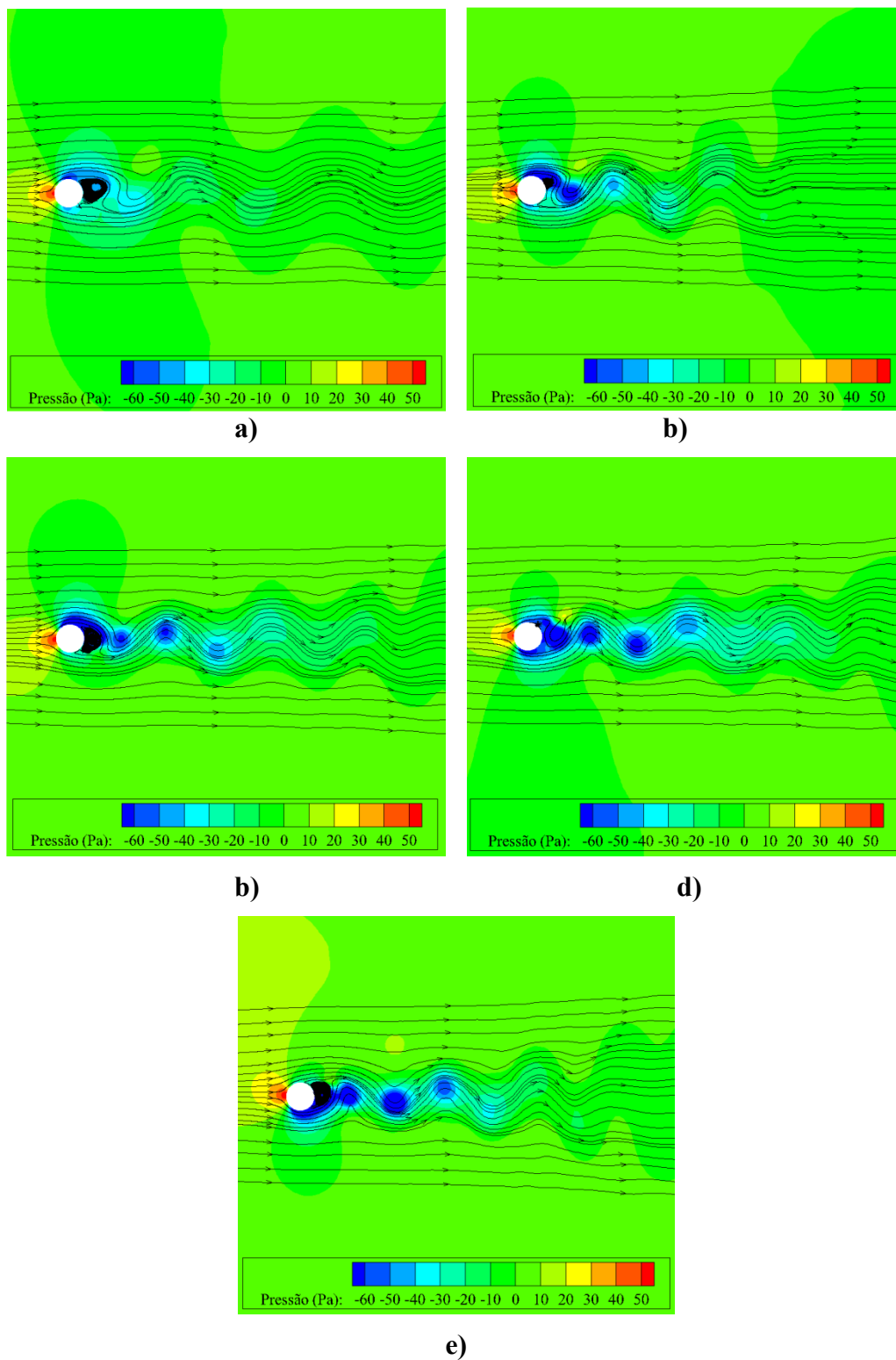


Figura 58: Campos de pressão. a) Reynolds 100; b) Reynolds 300; c) Reynolds 500; d) Reynolds 700; e) Reynolds 1000.

Na Tabela 11 são apresentados os valores RMS (valor quadrático médio) obtidos para o coeficiente de sustentação C_L , nota-se que esses valores crescem com o aumento do número de Reynolds. Na Figura 61 são mostrados os valores apresentados em Norberg (2001), na qual se pode notar que esse comportamento de elevação do coeficiente é o comportamento esperado para simulações bidimensionais.

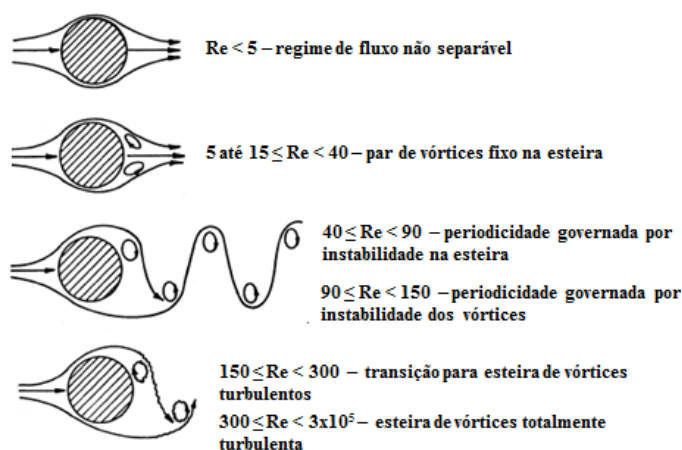


Figura 59: Comportamento do escoamento incidindo sobre um cilindro (Fonte: LIENHARD, 1966)

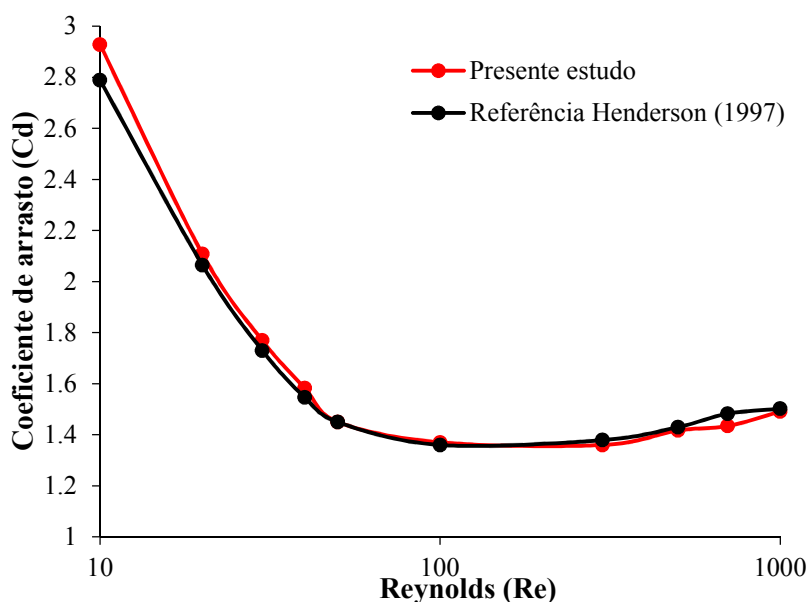


Figura 60: Coeficiente C_D para os Reynolds em estudo.

Na Figura 62 é apresentado o número de Strouhal para o Reynolds superiores a 100, além disso, são mostrados os valores apresentados em Henderson (1997) ajustados com dados de simulações bidimensionais. Nota-se que em simulações bidimensionais o número de

Strouhal, e conseqüentemente a frequência de desprendimento de vórtices, cresce suavemente com o aumento do número de Reynolds. Além disso, a curva descreve um escoamento periódico perfeito. Todavia, esse mesmo comportamento não é observado em simulações tridimensionais. De acordo com Henderson (1997), para Reynolds superiores a 190 têm-se uma transição para escoamento tridimensional e a frequência de desprendimento de vórtices passa a oscilar dentro de uma ampla banda de frequências. Os coeficientes C_L , C_D e S_t obtidos para um único macro-elemento foram aproximadamente os mesmos do que os obtidos com múltiplos macro-elementos.

Tabela 11: Coeficiente CI-RMS

Reynolds	CI-RMS
100	0,24952
300	0,66859
500	0,83063
700	0,89514
1000	1,05442

Na Figura 63 podem ser visualizados os históricos de coeficiente de arrasto para os Reynolds de 10, 20, 30, 40, 50. Pode-se notar que o valor de C_D têm grandes oscilações até que o escoamento esteja totalmente desenvolvido. Após isso, o escoamento se torna estacionário e os valores permanecem constantes ao longo do tempo.

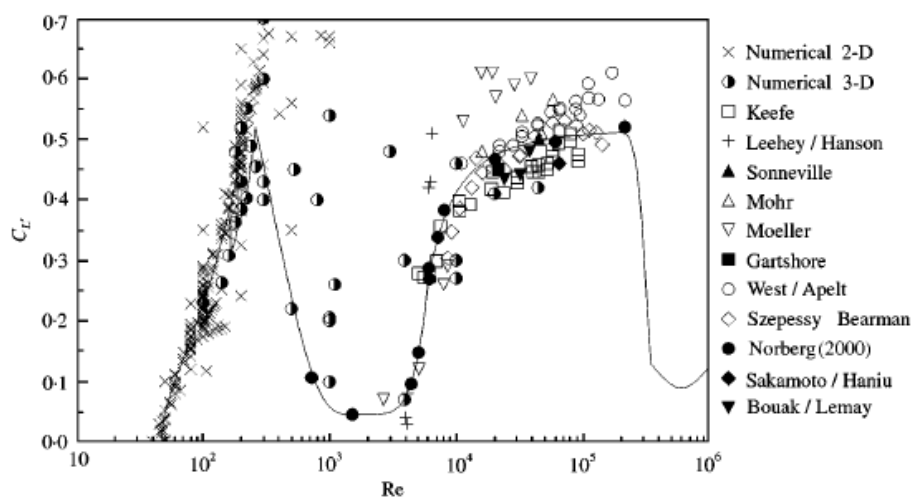


Figura 61: Coeficiente C_{L-RMS} versus número de Reynolds (Fonte: NORBERG, 2001).

Na Figura 64 são apresentados os históricos do coeficiente de arrasto para os Reynolds 100, 300, 500, 700 e 1000. Nota-se, assim como nos Reynolds mais baixos, uma oscilação inicial alta até o escoamento tornar-se estatisticamente permanente. Entretanto, após isso, devido ao fenômeno de desprendimento de vórtices, o coeficiente C_D não se torna constante, e sim, oscilante dentro de uma faixa de valores menores, sendo essa faixa maior com o aumento dos valores de Reynolds.

Na Figura 65 são apresentados os valores de registro ao longo do tempo para o coeficiente de sustentação. Por fim, são apresentados na Figura 66 os coeficientes de pressão para os Reynolds 40, 100, 500 e 1000 e sua variação conforme o número de Reynolds é incrementado.

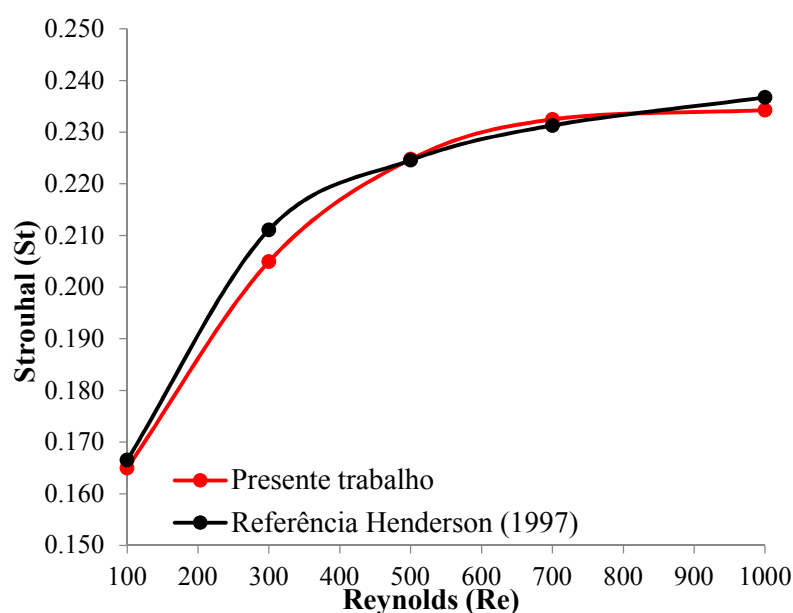


Figura 62: Número de Strouhal (St) para os Reynolds 100, 300, 500, 700 e 1000.

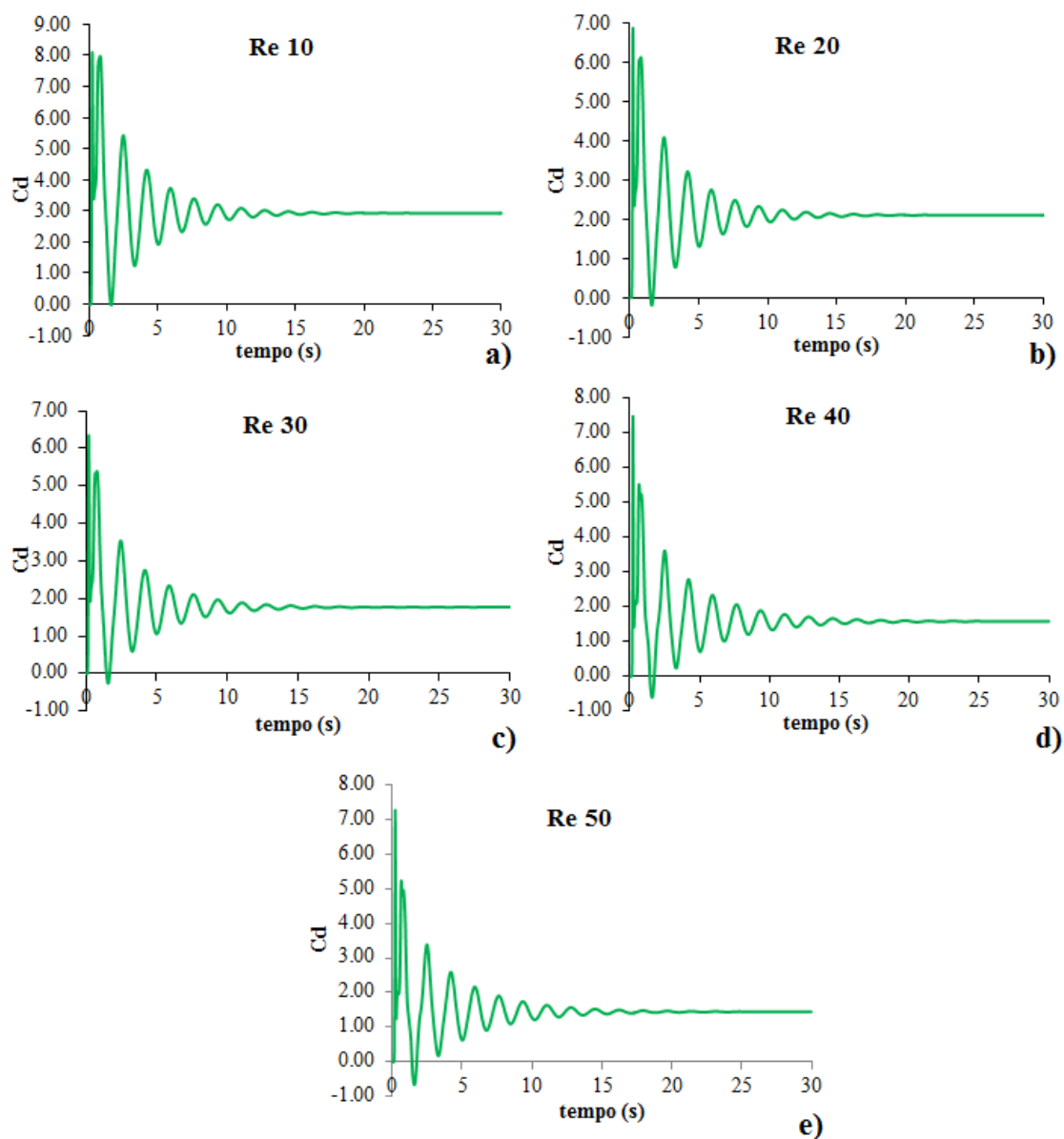


Figura 63: Registro ao longo do tempo para os coeficientes C_D a) Reynolds 10; b) Reynolds 20; c) Reynolds 30; d) Reynolds 40; e) Reynolds 50.

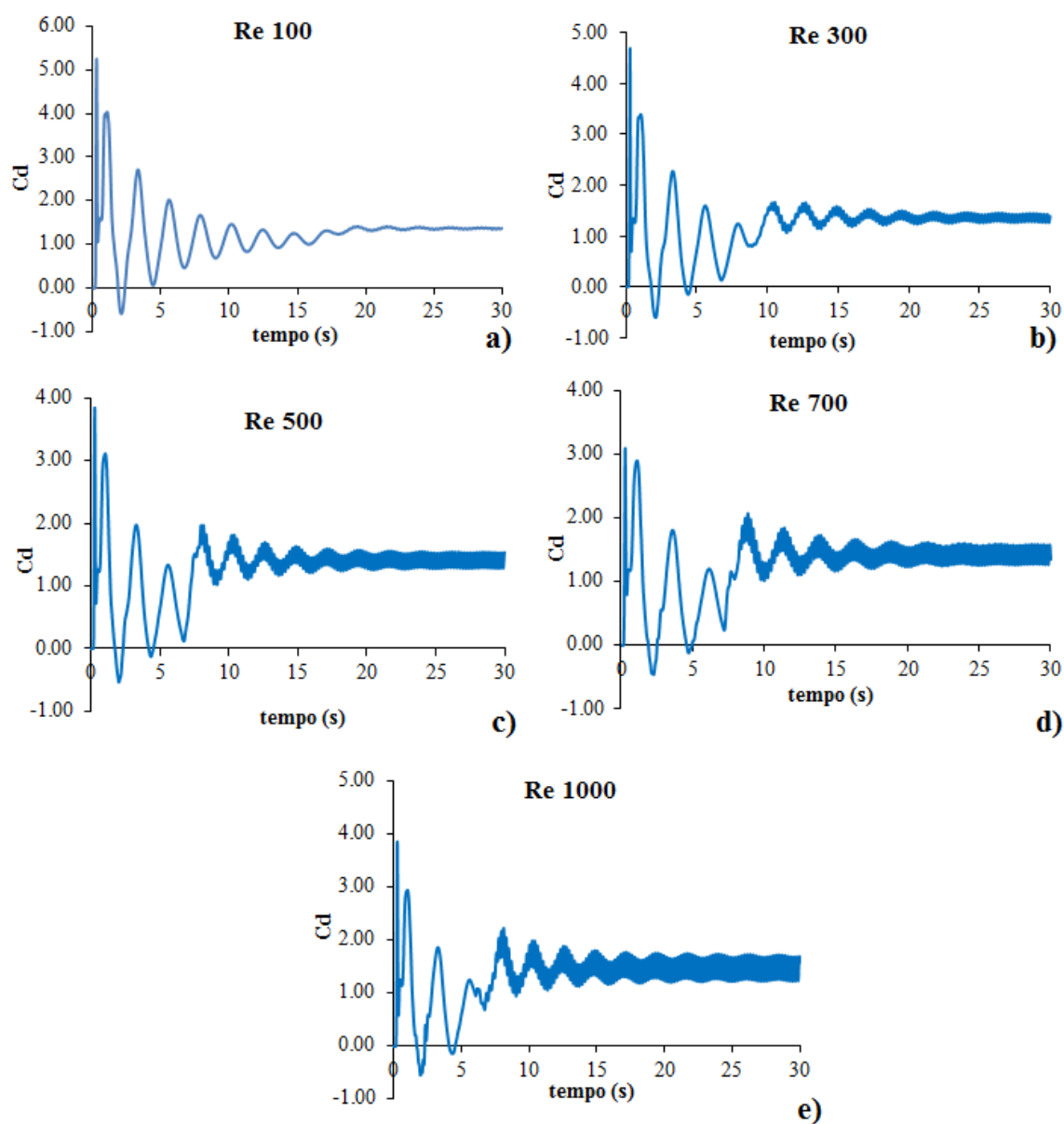


Figura 64: Registro ao longo do tempo para os coeficientes C_D . a) Reynolds 100; b) Reynolds 300; c) Reynolds 500; d) Reynolds 700; e) Reynolds 1000.

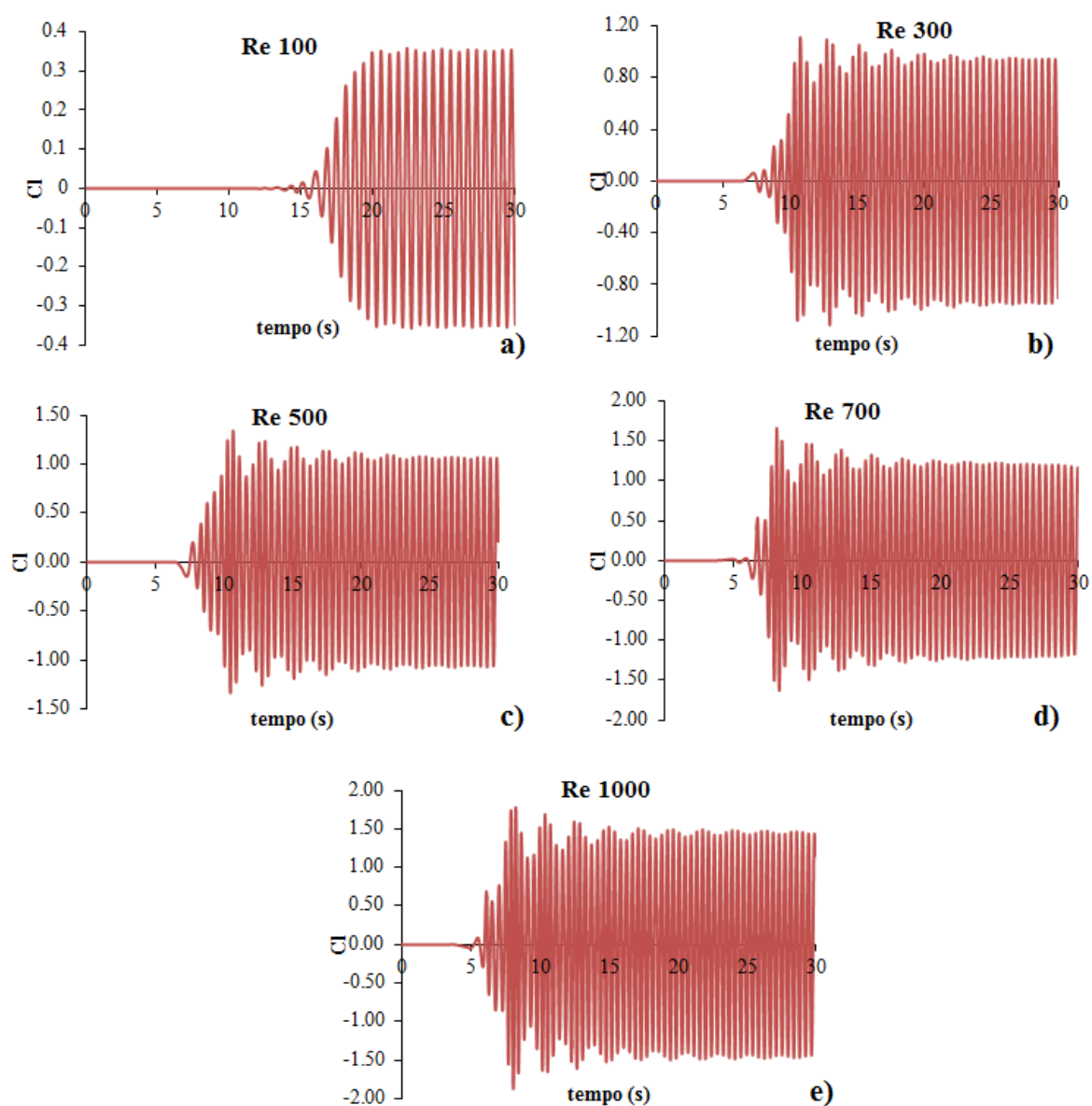


Figura 65: Registro ao longo do tempo para os coeficientes C_L . a) Reynolds 100; b) Reynolds 300; c) Reynolds 500; d) Reynolds 700; e) Reynolds 1000.

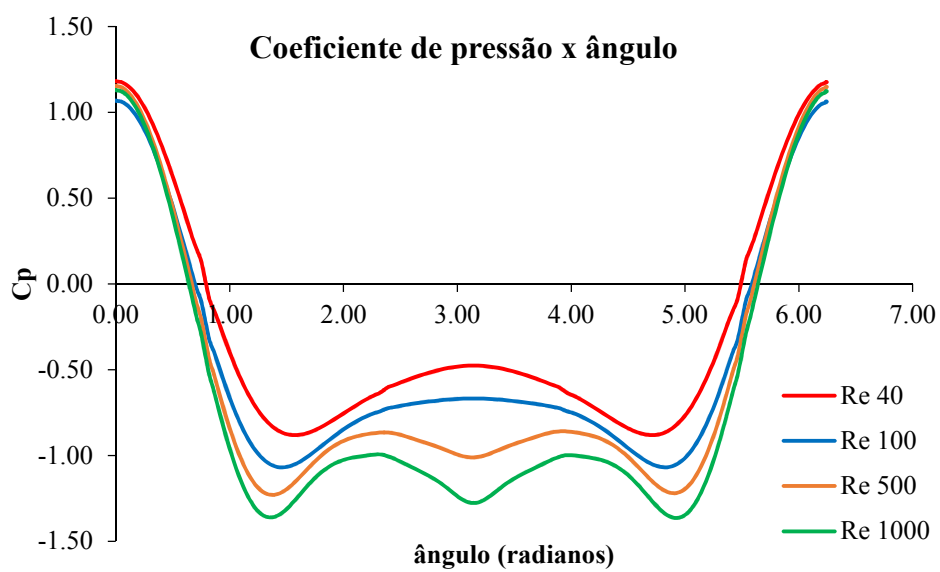


Figura 66: Variação do C_p para os Reynolds de 40, 100, 500 e 1000.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi apresentada uma formulação numérica isogeométrica para a análise de escoamentos incompressíveis de fluidos viscosos em regime laminar e turbulento. Para a validação do modelo através do estudo de problemas clássicos da DFC, foi necessário o desenvolvimento de ferramentas de pré e pós-processamento baseadas na estrutura de dados da Análise Isogeométrica para a geração de malhas e visualização de resultados. Por fim, foram comparados os resultados obtidos nesse estudo com os de referências bibliográficas. Tais comparações demonstraram que a metodologia aplicada apresenta bons resultados e uma grande versatilidade no que se refere aos procedimentos de discretização espacial.

As principais conclusões a respeito da aplicação do modelo isogeométrico na DFC podem ser resumidas em:

- a) Os resultados obtidos no estudo de exemplos clássicos da DFC apresentaram-se consistentes com os fenômenos envolvidos nos respectivos escoamentos;
- b) O uso de funções base NURBS permitiu que as geometrias apresentadas nesse estudo fossem representadas de forma exata, mesmo utilizando malhas grosseiras em algumas vezes. Dessa forma, o nível de refinamento das malhas dependeu exclusivamente da necessidade de maior discretização das variáveis do problema;
- c) Obtiveram-se funções com continuidade superior a C^0 entre os elementos facilmente, sendo que o uso de funções com continuidade superior conduziu a resultados ligeiramente melhores no estudo do escoamento sobre o cilindro, além de proporcionar taxa de convergência mais elevada em todos os problemas;
- d) Os procedimentos de refinamento em isogeometria (h , p e k) são muito mais eficientes em relação aos processos realizados em elementos finitos, pois introduzem-se facilmente elementos sem que a geometria original seja modificada, além de manter a ordem de continuidade das funções de base.
- e) O uso de vários macro-elementos na discretização do problema pode conduzir a malhas mais adequadas do ponto de vista da análise numérica, mesmo quando não exista a necessidade em função da geometria a ser descrita. É importante destacar que o uso de macro-elementos é de vital importância, pois possibilita o estudo de aplicações caracterizadas por espaços computacionais de geometria mais complexa,

como por exemplo, na análise de escoamentos com um ou vários objetos imersos e problemas de interação fluido-estrutura;

- f) Como as matrizes de elemento da formulação foram avaliadas usando-se integração completa, a paralelização do código em memória compartilhada, através da utilização da biblioteca OpenMP, permitiu reduzir o tempo de simulação significativamente;

A partir dessa primeira avaliação sobre a formulação proposta neste trabalho, são indicadas as sugestões para futuros trabalhos:

- a) Investigar escoamentos turbulentos através da metodologia LES em geometrias 3d, visto que esse fenômeno é caracterizado por sua tridimensionalidade, observando a influência do grau das funções de base e da ordem de continuidade na descrição das escalas de turbulência;
- b) Estudar problemas de engenharia do vento envolvendo turbulência na corrente incidente, onde esquemas de geração artificial de flutuações são empregados. Nestes casos, poderia ser empregada uma malha na região de entrada com funções de grau mais elevado a fim de manter as características de turbulência geradas na corrente incidente.
- c) Analisar a influência do uso de vetores de nós não uniformes e da distribuição dos pesos nos pontos de controle sobre os resultados da análise numérica, uma vez que neste trabalho foram usados apenas vetores de nós uniformes e a utilização de pesos não unitários foi feita apenas no problema de escoamento sobre cilindro;
- d) Estudar o efeito da ordem de continuidade das funções de base ao longo das interfaces entre macro-elementos e nas interfaces de domínios paramétricos periódicos, já que nestas regiões a ordem de continuidade é necessariamente C^0 ;
- e) Implementar um esquema de integração otimizado para Análise Isogeométrica similar ao proposto por Hughes et al. (2010), evitando altos custos computacionais na avaliação das matrizes de elementos do modelo;
- f) Estender a formulação para o estudo de escoamentos com transporte de calor e massa;
- g) Estender a formulação para a análise de problemas de interação fluido-estrutura;

REFERÊNCIAS

ARMALY, B. F.; DURST, F. J.; PEREIRA, C. F.; SCHÖNUNG, B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. **Journal Fluid Mechanics**, v.127, pp. 473-496, 1983.

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos**. 2ª ed., Editora Unicamp, 2003.

AKKERMAN, I.; BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; HUGHES, T. J. R.; HULSHOFF, S. The role of continuity in residual-based variational multiscale modeling of turbulence. **Computational Mechanics**, v.41, pp.371-378, 2008.

AKKERMAN, I.; BAZILEVS, Y.; KEES, C. E.; FARTHING, M. W. Isogeometric analysis of free-surface flow. **Journal of Computational Physics**, v.230, pp. 4137-4152, 2011.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Prentice Hall, 1996.

BAZILEVS, Y.; AKKERMAN, I. Large eddy simulation of turbulent Taylor-Couette flow using isogeometric analysis and the residual-based variational multiscale method. **Journal of Computational Physics**, v.229, pp.3402-3414, 2010.

BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SCOVAZZI, G. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 197, pp.173-201, 2007.

BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; HSU, M.; KOSTOV, N.; MCINTYRE, S. Aerodynamic and FSI analysis of wind turbines with the ALE-VMS and ST-VMS methods. **Archives of Computational Methods of Engineering**, vol.21, pp.359-398, 2014.

BLOCKEN, B. 50 years of computational wind engineering: past, present and future. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, Pages 69–102, 2014.

BRAUN, A. L.; AWRUCH, A. M. Aerodynamic and aeroelastic analyses on the CAARC standard tall building model using numerical simulation. **Computer and Structures**, vol. 87, pp.564-581, 2009.

BRAUN, A. L. **Simulação Numérica na Engenharia do Vento Incluindo Efeitos de Interação Fluido- Estrutura**. Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2007.

BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multiplier. **RAIRO**, vol.8, pp. 129-151, 1974.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. R. Streamline upwind/ Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis in the incompressible Navier-Stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.32, pp. 199-259, 1982.

CHORIN, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. **Journal of Computational Physics**, vol.2, pp. 12-26, 1967.

CHRISTIE, L.; GRIFFITHS, F.; MITCHELL, A. R.; ZIENKIEWICZ, O. C. Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 10, pp. 1389-1396, 1976.

CLARK, R. A.; FERZIGER, J. H.; REYNOLDS, W. C. Evaluation of sub-grid scale turbulence models using an accuracy simulated turbulence flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 91, pp. 1-16, 1979.

COLOMÉS, O.; BADIA, S.; PRINCIPE, J. Mixed finite element methods with convection stabilization for the large eddy simulation of incompressible turbulent flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.304, pp. 294–318, 2016.

COTTRELL, J. A.; REALI, A.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric analysis of structural vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.195, pp. 5257–5296, 2006.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA**. Wiley, 2009.

COX, M. The numerical evaluation of b-spline. **Institute for Mathematics and its Applications**, vol. 10 (1), pp. 134-149, 1972.

DEARDOFF, J. M. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number. **Journal of Fluid Mechanics**, vol.41, pp.453-480, 1970.

DEBOOR, C. On calculating with b-spline. *Approximation Theory*, vol. 6(1), pp. 50-72, 1972.

DONEA, J. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 20, pp. 101-119, 1984.

DONEA, J.; GIULIANI, S.; LAVAL, H.; QUARTAPELLE, L. Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 33, pp. 53-73, 1982.

ELSHAER, A.; ABOSHOSHA H.; BITSUAMLAK, G.; DAMATTY A. LES evaluation of wind-induced responses for an isolated and surrounded tall building. **Engineering Structures**, vol. 115, pp. 179-195, 2015.

ESPATH, L.F.R. **Otimização de forma de cascas via deformação livre de forma baseado em NURBS**. Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2009.

FINDIKAKIS, A. N.; STREET, R. L. Mathematical description of turbulent flows. *Journal of Hydraulics Division – ASCE*, vol. 108 (HY8), pp. 887-903, 1982.

FORREST, A. R., Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials. **The Computational Journal**, vol. 15 (1), pp.71-79, 1972.

GOMEZ, H.; HUGHES, T. J. R.; NOGUEIRA, X.; CALO, V. M. Isogeometric analysis of the isothermal Navier-Stokes-Korteweg equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.199, pp. 1828-1840, 2010.

GRESHO, P. M.; CHAN, S. T.; LEE, R.L.; UPSON, C. D. A modified finite element method for solving the time-dependent, incompressible Navier-Stokes equations. Part I : theory. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol.4, pp.557-598,1984.

GRESHO, P. M.; SANI, R. L. Incompressible Flow and the Finite Element Method. Advection-Diffusion and Isothermal Laminar Flow. John Wiley & Sons Ltd, 1999.

GRIFFITHS, D. F.; LORENZ, J. An analysis of the Petrov-Galerkin finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 14, pp. 39-64, 1978.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, T. High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, vol. 48, pp. 378-411, 1982.

HEINRICH, J. C.; HUYAKORN, P.S.; ZIENKIEWICZ, O. C.; MITCHELL, A. R. An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 11, pp. 131-143, 1977.

HENDERSON, R. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 352, pp. 65-112, 1997.

HERMANNNS, M. **Parrallel Programming in Fortran 95 using OpenMP**. School of Aeronautical Engineering, Spain, 2002.

HINZE, J. O. **Turbulence**. New York: McGraw-Hill Inc., 2^a ed., 1975.

HOOD, P.; TAYLOR, C. **Navier-Stokes equations using mixed-formulation, in Finite Element Methods in Flow Problems**, pp. 57-66, UAH Press, 1974.

HOSSEINI, S.; REMMERS, J. J. C.;VERHOOSSEL, C. V.;BORST R. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 271, pp. 1–22, 2013.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 194, pp. 4135–4195, 2005.

HUGHES, T. J. R.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin-least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 73, pp. 173-189, 1989.

HUGHES, T. J. R.; REALI, A.; SANGALLI, G. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 199, pp. 301-313, 2010.

HSU, M.; KAMENSKY, D.; BAZILEVS, Y.; SACKS, M. S.; HUGHES, T. J. R. Fluid-structure interaction analysis of bioprosthetic heart valves: significance of arterial wall deformation. **Computational Mechanics**, vol. 54, pp. 1055-1071, 2014.

KAWARA, M.; HIRANO, H. A finite element method for high Reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 3, pp. 137-163, 1983.

KIENDL, J.; BLETZINGER, K. U.; LINHARD, J.; WÜCHNER, R. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 198 (49-52), pp. 3902–3914, 2009.

LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. The numerical computation of turbulent flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 3, pp. 269-289, 1974.

LAX, P. D.; WENDROFF, B. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, vol. 17, pp. 381-398, 1964.

LEONARD, A. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent flows. **Advances in Geophysics**, vol. 18A, pp. 237-248, 1974.

LESIEUR, M. **Turbulence in Fluids**. Springer, 4^a ed., 2008.

LIENHARD, J. H. **Synopsis of Lift, Drag and Vortex Frequency Data for Rigid Circular Cylinders**. Washington State University, College of Engineering, Research Division Bulletin 300, 1966.

MADALOZZO, D. M. S. **Simulação Numérica da Dispersão de Poluentes em Zonas Urbanas Considerando Efeitos Térmicos**. Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2012.

MURAKAMI, S. Computational wind engineering. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 36 (1), pp. 517–538, 1990.

MURAKAMI, S. Current status and future trends in computational wind engineering. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol. 67-68, pp. 3–34, 1997.

NITHIARASU, P.; MATHUR, J. S.; WEATHERILL, N. P.; MORGAN, K. Three-dimensional incompressible flow calculations using the characteristic based split (CBS) scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 44, pp. 1207-1229, 2004.

NGUYEN, M. N.; BUI, T. Q.; YU, T.; HIROSE, S. Isogeometric analysis for unsaturated flow problems. **Computers and Geotechnics**, vol. 62, pp.257-267, 2014.

NORBERG, C. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. **Journal of Fluids and Structures**, vol. 17, pp.57-96, 2003.

PETRY, A. P.; Análise Numérica de Escoamentos Turbulentos Tridimensionais Empregando o Método dos Elementos Finitos e Simulação de Grandes Escalas. Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2002.

PETRY, A. P.; AWRUCH, A. M. Simulação de escoamentos turbulentos pelo método dos elementos finitos através da simulação direta de grandes vórtices. **In: ENIEF 97 – Mecânica Computacional**, E. Dari, C. Pedra e R. Saliba (eds.), San Carlos de Bariloche, Argentina, vol. XVIII, pp. 113-122, 1997.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS Book**. Springer, 2^a ed., 1997.

RAMASWAMY, B. Theory and implementation of a semi-implicit finite element method for viscous incompressible flow. **Computer & fluids**, vol.22(6), pp.725-747, 1993.

REDDY, J. N; GARTLING, D. K. **The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics**. CRC Press, 1994.

SCHLICHTING, H. **Boundary-Layer Theory**. McGraw-Hill Inc, 2^a ed., 1979.

SCHNEIDER, G. E.; RAITHBY, G. D.; YOVANOVICH, M. M. Finite-element solution procedures for solving the incompressible, Navier-Stokes equations using equal order variable interpolation. **Numerical Heat Transfer**, vol. 1, pp. 433-451, 1978.

SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with primitive equations. I, the basic experiment, **Monthly Weather Review**, vol. 91, pp. 99-135, 1963.

TABARROK, B.; SU, J. Semi-implicit Taylor-Galerkin finite element methods for incompressible viscous flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol 117, pp.391-410, 1994.

TEIXEIRA, P. R. F. **Simulação Numérica da Interação de Escoamentos Tridimensionais de Fluidos Compressíveis e Incompressíveis e Estruturas Deformáveis Usando o Método de Elementos Finitos**. Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2001.

TEMIZER, I.; WRIGGERS, P.; HUGHES, T. J. R. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol 200, pp.1100-1112, 2010.

TRAN, L. V.; FERREIRA, A. J. M.; NGUYEN-XUAN, H. Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory. **Composites: Part B**, vol.51, p. 368-383, 2013.

WANDERLEY, L. B. V.; LEVI, C. A. Validation of a finite difference method for the simulation of vortex-induced vibrations on a circular cylinder. **Ocean Engineering**, vol. 29, pp. 445-460, 2002.

WILLIAMS, P. T.; BAKER, A. J. Numerical simulations of laminar flow over a 3D backward-facing step. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.24, p. 1159-1183, 1997.

WHITE, F. M.; **Viscous Fluid Flow**. New York: McGraw Hill, 2^a ed, 1991.

ZIENCKIEWICZ, O. C.; CODINA, R. A general algorithm for compressible and incompressible flow. Part I. The split, characteristic-based scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.20, p. 869-885, 1995.

ZIENCKIEWICZ, O. C.; GALLAGHER, R. H.; HOOD P. Newtonian and non-Newtonian viscous incompressible flow. Temperature induced flows and finite solutions. **The mathematics of Finite Elements and Applications**, vol. 2. Academic Press, 1976.

ZIENCKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, p. **The Finite Element Method for Fluid Dynamics**. 6^a ed. , Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

ZIENCKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis & Fundamentals**. 6^a ed , Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005a.