

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS  
CURSO DE FÍSICA

DIEFFERSON RUBENI DA ROSA DE LIMA

ANSATZ DE BETHE APLICADO A MODELOS DE  
CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN

PORTO ALEGRE, JUNHO DE 2008

**DIEFFERSON RUBENI DA ROSA DE LIMA**

**ANSATZ DE BETHE APLICADO A MODELOS DE  
CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
para a obtenção do grau de Bacharel no Curso  
de Física da Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul, UFRGS.

Orientador (a): Prof. Dra. Angela Foerster

**PORTO ALEGRE, JUNHO DE 2008**

## Resumo

Abstract Neste trabalho nós investigamos como o método algébrico do ansatz de Bethe é usado para calcular o espectro de energia de dois modelos integráveis para condensados de Bose-Einstein (CBE). O primeiro modelo descreve o tunelamento Josephson entre dois CBE acoplados. O segundo descreve a interconversão de átomos e moléculas num CBE atômico-molecular. Alguns aspectos matemáticos destes modelos são discutidos. Através da álgebra de Yang-Baxter e do método algébrico do ansatz de Bethe a integrabilidade para os modelos é estabelecida e os autovalores de energia são encontrados. Para ambos os modelos, diferentes versões do método algébrico do ansatz de Bethe são utilizadas.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modelos de Condensados de Bose-Einstein</b>	<b>5</b>
2.1	Um modelo para dois condensados de Bose-Einstein acoplados por tunelamento Josephson (CBE-AA)	5
2.2	Um modelo para um condensado de Bose-Einstein homo-atômico-molecular (CBE-AM)	6
<b>3</b>	<b>Integrabilidade e ansatz de Bethe algébrico</b>	<b>8</b>
3.1	Integrabilidade	8
3.1.1	Exemplos de representações da álgebra $\tau_R$	11
3.2	Método do ansatz de Bethe algébrico	12
<b>4</b>	<b>Mapeamento</b>	<b>14</b>
4.1	Processo de mapeamento	14
4.2	Discussão	16
<b>5</b>	<b>Soluções Exatas para os modelos</b>	<b>17</b>
5.1	Solução exata de um modelo para dois CBE acoplados por tunelamento Josephson	17
5.1.1	Solução exata via ansatz de Bethe I	17
5.1.2	Solução exata via ansatz de Bethe II	19
5.2	Solução exata para um modelo de CBE homo-atômico-molecular	21
5.2.1	Solução exata via ansatz de Bethe I	21
5.2.2	Solução exata via ansatz de Bethe II	23
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>25</b>
6.1	Considerações finais	25
6.2	Perspectivas futuras	25

# Capítulo 1

## Introdução

Modelos exatamente solúveis de sistemas quânticos fornecem importantes informações sobre a natureza quântica dos sistemas físicos reais, sendo o oscilador harmônico simples e o átomo de hidrogênio não relativístico exemplos típicos. Um método para resolver estes modelos consiste em explorar sua estrutura algébrica, como as bem conhecidas álgebras de Lie  $gl(3)$  para o oscilador hamônico e  $so(4)$  para o átomo de hidrogênio [1]. Nesse sentido, os geradores da álgebra de Lie fornecem os estados quânticos do sistema. Uma solução exata conhecida de um modelo quântico de muitos corpos é aquela para o modelo de Heisenberg unidimensional homogêneo, devida a Bethe [2]. A partir deste trabalho desenvolveu-se o conceito do *ansatz de Bethe* para a construção dos autovalores e autovetores de um Hamiltoniano exatamente solúvel. Por este método, uma forma genérica para um autovetor dependente de diversos parâmetros livres é assumida. Restrições são então determinadas sobre os parâmetros para assegurar que o vetor seja de fato um autovetor do Hamiltoniano. As equações de restrição são conhecidas como as *equações do ansatz de Bethe* para o modelo.

Motivado pelo trabalho de Bethe, o campo dos modelos exatamente solúveis floresceu durante a década de 60, recebendo grandes contribuições de McGuire [3], Lieb [4], Sutherland [5], Yang [6], Baxter [7], entre outros. A partir destes trabalhos surgiu a *equação de Yang-Baxter*, cuja solução fornece a condição suficiente para a construção de um modelo exatamente solúvel. Uma característica fundamental da equação de Yang-Baxter é que sempre podemos utilizá-la para construir uma família de matrizes mutuamente comutativas, conhecidas como *matrizes de transferência*, que facilita a aplicação algébrica do ansatz de Bethe. O método do ansatz de Bethe algébrico foi primariamente desenvolvido por Faddeev e um grupo de físicos-matemáticos russos [8 - 12]. Sua aplicabilidade se estende através do estudo das cadeias de spin unidimensionais, teoria quântica de campos [13], sistemas de elétrons correlacionados em redes bi-dimensionais [14], teoria de cordas, além de introduzir a noção de grupos quânticos [15 - 18]. Recentemente, um dos campos

de pesquisa mais ativos é o estudo dos modelos de condensados de Bose-Einstein (CBE) de gases atômicos e moleculares ultra-resfriados [19, 20], tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. A condensação de Bose-Einstein foi prevista em 1925 como uma transição de fase quântica em um gás de bósons na qual todos os bósons passam a ocupar o estado fundamental, formando um gás quântico degenerado. Podemos compreender qualitativamente o fenômeno através de uma argumentação simples: consideremos um gás de átomos fracamente interagentes. A cada átomo desse sistema nós podemos associar um *pacote de onda* com *comprimento de onda de de Broglie*  $\lambda_{dB}$ . À temperatura ambiente,  $\lambda_{dB}$  é muito pequeno, de forma que podemos tratar os átomos como partículas clássicas. Entretanto, à medida que resfriamos o gás, o comprimento de onda de de Broglie aumenta. Quando se atinge a temperatura crítica  $T = T_c$ ,  $\lambda_{dB}$  é comparável com a distância média entre os átomos, ocorrendo o entrelaçamento dos pacotes de onda que caracteriza a condensação de Bose-Einstein. O estado de um CBE é de natureza puramente quântica; portanto, uma análise de campo médio torna-se inadequada devido às grandes flutuações quânticas inerentes aos sistemas de escala atômica e o desenvolvimento de métodos exatos para tratar o problema é ainda mais fundamental.

Muitas propriedades físicas podem ser exploradas no estudo dos modelos de CBE, mas nos concentraremos em dois pontos principais: (i) o fenômeno de *tunelamento Josephson* entre dois CBE acoplados. O efeito Josephson foi primeiramente proposto para explicar o tunelamento de pares de Cooper através de uma barreira isolante separando dois supercondutores (para uma revisão histórica, veja [21]). A realização experimental de CBE em gases atômicos de metais alcalinos possibilitou a observação de tunelamento macroscópico em um sistema acoplado. Uma extensiva discussão sobre este fenômeno pode ser encontrada em [22]; (ii) um CBE composto por uma superposição coerente de estados atômicos e moleculares. Este fenômeno foi predito e estudado por teóricos [23 - 27] e recentemente realizado experimentalmente [28 - 30]. Em particular, para o experimento [30], foi observado que o valor esperado para o número total de átomos apresenta um comportamento oscilatório em sua evolução temporal, indicando que o estado do sistema é uma superposição quântica de estados atômico e molecular, oposto ao esperado de uma mistura clássica, onde as fases atômica e molecular são claramente distinguíveis.

O principal objetivo deste trabalho é demonstrar como o método do *ansatz* de Bethe algébrico pode ser empregado no estudo de modelos exatamente solúveis, de forma rica e elegante, com variadas aplicações. Em particular, mostraremos como a teoria se aplica a sistemas de condensados de Bose-Einstein. Os modelos estudados são de especial interesse por duas razões: primeiramente, ambos são modelos integráveis que admitem solução exata via *ansatz* de Bethe; segundo, porque ambos os modelos explicam qualitativamente propriedades físicas como o tunelamento e a interconversão de átomos e moléculas. Em

cada caso, resolveremos exatamente os modelos, ou seja, encontraremos o espectro de energia do Hamiltoniano, por variações distintas do método do ansatz de Bethe. A primeira solução consiste em utilizar as realizações bosônicas da álgebra de Yang-Baxter, desenvolvidas no trabalho de Kuznetsov e Tsiganov [31]. A segunda solução será obtida pelo mapeamento dos geradores da álgebra do sistema em operadores diferenciais, gerando equações diferenciais de segunda ordem para o cálculo dos autovalores, com soluções polinomiais.

O formato deste trabalho é o seguinte: começaremos no capítulo 2 com a descrição dos modelos que serão estudados. O capítulo 3 fará uma breve revisão sobre as principais características do método do ansatz de Bethe algébrico para a construção de modelos exatamente solúveis. O aspecto central é a introdução da *álgebra de Yang-Baxter*. No capítulo 4, faremos uma conexão entre o método do ansatz de Bethe e a equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo. Essa conexão é justificada, uma vez que são problemas equivalentes encontrar os autovalores de energia para Hamiltoniano e resolver a equação de Schrödinger independente do tempo com um potencial adequado para o sistema em estudo. No capítulo 5 retornaremos ao cálculo das soluções explícitas para os modelos apresentados no capítulo 2. Parte desses resultados é original e constitui a contribuição do autor para a área. As conclusões e perspectivas são apresentadas no capítulo 6.

# Capítulo 2

## Modelos de Condensados de Bose-Einstein

Agora vamos apresentar e descrever dois modelos de condensados de Bose-Einstein. Nosso principal objetivo é estabelecer que cada modelo é exatamente solúvel através do ansatz de Bethe algébrico.

### 2.1 Um modelo para dois condensados de Bose-Einstein acoplados por tunelamento Josephson (CBE-AA)

Considere o seguinte Hamiltoniano geral que descreve o tunelamento Josephson entre dois CBE acoplados (denotados por 1 e 2)

$$H = U_{11}N_1^2 + U_{12}N_1N_2 + U_{22}N_2^2 + \mu_1N_1 + \mu_2N_2 - \frac{\epsilon_j}{2} (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1), \quad (2.1)$$

onde  $a_i, a_i^\dagger$  são os operadores destruição e criação de átomos, respectivamente, associados às álgebras de Heisenberg

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad [N_i, a_j] = -\delta_{ij}a_i, \quad [N_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}a_i^\dagger,$$

e  $N_i = a_i^\dagger a_i$ ,  $i = 1, 2$ , são os operadores número de átomos em cada condensado. O espaço de Hilbert dos estados quânticos é gerado pelos vetores

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} |0, 0\rangle, \quad (2.2)$$

onde  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  e  $|0, 0\rangle$  é o vácuo do espaço de Fock. Como o Hamiltoniano (2.1) não depende explicitamente do tempo e comuta com o operador número total de átomos



$N = N_1 + N_2$ , temos que  $N$  é conservado. Os parâmetros  $U_{ij}$  denotam os termos de interação do tipo átomo-átomo nos condensados. Os  $\mu_i$ 's são os potenciais externos e  $\epsilon_j$  é a amplitude de tunelamento dos átomos entre um condensado e outro.

Embora o Hamiltoniano (2.1) represente um modelo matemático geral, podemos trabalhar com uma versão simplificada deste modelo, que já descreve qualitativamente propriedades físicas experimentais relevantes, através da seguinte escolha de parâmetros  $U$ 's e  $\mu$ 's:

$$U_{11} = U_{22} = -\frac{U_{12}}{2} = \frac{K}{8},$$

$$\mu_1 = \mu_2 = -\frac{\Delta\mu}{2},$$

podemos reescrever o Hamiltoniano (2.1) como

$$H = \frac{K}{8} (N_1 - N_2)^2 - \frac{\Delta\mu}{2} (N_1 - N_2) - \frac{\epsilon_j}{2} (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1), \quad (2.3)$$

com  $K > 0$  indicando uma interação repulsiva.

O Hamiltoniano (2.3), apesar de muito simples, descreve qualitativamente propriedades físicas importantes dos CBE, como por exemplo os fenômenos de tunelamento e auto-aprisionamento [37]. O modelo foi proposto em por Legget em [22], que discute em detalhe o Hamiltoniano canônico de Josephson para a descrição destes efeitos.

## 2.2 Um modelo para um condensado de Bose-Einstein homo-atômico-molecular (CBE-AM)

Agora vamos voltar nossa atenção para um modelo de dois modos para um CBE atômico-molecular com átomos idênticos. O Hamiltoniano tem a forma

$$H = U_{aa}N_a^2 + U_{ac}N_aN_c + U_{cc}N_c^2 + \mu_aN_a + \mu_cN_c + \Omega (a^\dagger a^\dagger c + c^\dagger aa). \quad (2.4)$$

Aqui,  $a(a^\dagger)$  é o operador aniquilação(criação) de um modo atômico enquanto que  $c(c^\dagger)$  aniquila(cria) um modo molecular. O número de átomos não ligados e o número de moléculas são representados por  $N_a = a^\dagger a$  e  $N_c = c^\dagger c$ , respectivamente. Os parâmetros  $U_{xy}$ ,  $x, y = a, c$  denotam os termos de interação do tipo átomo-átomo, átomo-molécula ou molécula-molécula, e os  $\mu_x$ 's são os potenciais químicos. O parâmetro  $\Omega$  é a amplitude de interconversão de átomos em moléculas. O Hamiltoniano comuta com o operador número total de átomos,  $N = N_a + 2N_c$ , sendo esta uma constante de movimento do sistema.

Uma base para o Hamiltoniano (2.4) é dada por

$$|n_a, n_c\rangle = \frac{(a^\dagger)^{n_a} (c^\dagger)^{n_c}}{\sqrt{n_a! n_c!}} |0, 0\rangle, \quad (2.5)$$

onde  $n_a, n_c \in \mathbb{N}$ . Por simplicidade matemática, estamos particularmente interessados no limite  $U_a = U_c = U_{ac} = 0$  e  $\mu_c = 0$ ,

$$H = \mu_a N_a + \Omega (a^\dagger a^\dagger c + c^\dagger a a), \quad (2.6)$$

com o potencial externo  $\mu_a$  sendo considerado como a energia de ligação entre os átomos. Essa forma simplificada para o Hamiltoniano (2.6) foi proposta em [26] e estudada numericamente em [32] com base na solução via ansatz de Bethe e descreve o fenômeno de interconversão entre átomos e moléculas num CBE atômico-molecular, discutido experimentalmente em [28 - 30].

# Capítulo 3

## Integrabilidade e ansatz de Bethe algébrico

### 3.1 Integrabilidade

Começaremos discutindo o conceito de integrabilidade. Na mecânica clássica, é bem conhecido o conceito de integrabilidade devido a Liouville: o Hamiltoniano clássico de um sistema de dimensão finita é dito integrável se possui um conjunto de integrais de movimento independentes e comutativas com respeito aos parênteses de Poisson

$$\{I_j, I_k\} = 0.$$

O número total de integrais de movimento (incluindo o Hamiltoniano) deve ser igual a metade da dimensão do espaço de fase. Vamos estender essa definição para o domínio quântico: nós desejamos construir um operador  $t(u)$ , onde  $u \in \mathbb{C}$  é chamado *parâmetro espectral*, que age sobre algum espaço vetorial que representa o espaço de Hilbert dos estados físicos. Além do mais, nós esperamos que

$$[t(u), t(v)] = 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Existem duas consequências importantes de (3.1): a primeira é que  $t(u)$  pode ser diagonalizado independentemente de  $u$ , tal que os autovetores de  $t(u)$  não dependem de  $u$ . Esta é a característica que torna o método algébrico do ansatz de Bethe viável. Segundo,  $t(u)$  comuta com todas as suas derivadas, ou seja, tomando a expansão em série,

$$t(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i u^i,$$

segue que

$$[\zeta_i, \zeta_j] = 0, \quad \forall i, j.$$

Então, para todo Hamiltoniano expresso somente como uma função dos operadores  $\zeta_i$ , cada  $\zeta_i$  representa uma constante de movimento, uma vez que ele comutará com o Hamiltoniano. Quando o número de quantidades independentes conservadas é igual ao número de graus de liberdade do sistema, o modelo é dito integrável.

A teoria dos sistemas quânticos exatamente solúveis começa com a definição de uma álgebra  $\tau_R$ , chamada *álgebra de Yang-Baxter*, descrita em termos dos geradores  $T_i^j(u)$ ,  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ , que podem ser considerados os elementos de uma matriz quadrada  $d \times d$   $T(u)$  chamada *matriz de monodromia*. A álgebra  $\tau_R$  é gerada pelas relações quadráticas

$$\sum_{j,l=1}^d R_{jl}^{ik}(u-v) T_p^j(u) T_q^l(v) = \sum_{j,l=1}^d T_j^k(v) T_l^i(u) R_{pq}^{lj}(u-v),$$

onde  $R_{jl}^{ik}$  dá as constantes de estrutura da álgebra e podem ser consideradas os elementos de uma matriz quadrada  $d^2 \times d^2$  chamada *matriz-R*. Usando notação matricial,

$$T_1(u) = T(u) \otimes I; T_2(u) = I \otimes T(u),$$

temos, compactamente,

$$R_{12}(u-v) T_1(u) T_2(v) = T_2(v) T_1(u) R_{12}(u-v). \quad (3.2)$$

Impondo que  $\tau_R$  seja uma álgebra associativa, as constantes de estrutura devem satisfazer a relação de consistência

$$\sum_{i,j,k=1}^d R_{lm}^{ij}(u-v) R_{pk}^{in}(u-\omega) R_{qr}^{jk}(v-\omega) = \sum_{i,j,k=1}^d R_{jk}^{mn}(v-\omega) R_{ir}^{lk}(u-\omega) R_{pq}^{in}(u-v),$$

ou, abreviadamente,

$$R_{12}(u-v) R_{13}(u-\omega) R_{23}(v-\omega) = R_{23}(v-\omega) R_{13}(u-\omega) R_{12}(u-v), \quad (3.3)$$

conhecida como *equação de Yang-Baxter*. Portanto, a equação de Yang-Baxter surge naturalmente ao impormos a associatividade da álgebra  $\tau_R$ . Esta equação também aparece em diversos contextos, como na mecânica estatística clássica bi-dimensional [7] e teoria do espalhamento [33].

Pode-se demonstrar que o traço  $t(u)$  da matriz  $T(u)$ ,

$$t(u) = \sum_{i=1}^d T_i^i(u), \quad (3.4)$$

cria uma família comutativa de operadores, de forma que (3.1) é satisfeita. Portanto, essa família pode ser considerada como as integrais de movimento de algum sistema quântico integrável. Então, dada uma solução  $R(u)$  da equação de Yang-Baxter, nós definimos a álgebra quadrática  $\tau_R$ . Dada uma representação da álgebra  $\tau_R$ , nós obtemos um sistema quântico integrável cujo espaço quântico é o espaço de representação de  $\tau_R$  e as integrais comutativas de movimento são  $t(u)$ .

Vamos trabalhar com uma matriz-R invariante  $gl(2)$  na forma [38]

$$R(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ 0 & c(u) & b(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde  $b(u) = \frac{u}{u+\eta}$ ,  $c(u) = \frac{\eta}{u+\eta}$  e  $\eta$  é um parâmetro complexo arbitrário. A matriz é invariante  $gl(2)$  no sentido que

$$[R(u), g \otimes g] = 0,$$

onde  $g$  é qualquer matriz  $2 \times 2$ . Nesse caso, a matriz de monodromia é uma matriz  $2 \times 2$

$$T(u) = \begin{pmatrix} T_1^1(u) & T_2^1(u) \\ T_1^2(u) & T_2^2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

e o operador  $t(u)$  pode ser escrito como

$$t(u) = A(u) + D(u). \quad (3.7)$$

A conexão entre o modelo para um sistema quântico e o método algébrico do ansatz de Bethe é feita por meio da escolha de uma representação para os geradores da álgebra  $\tau_R$ . No método algébrico do ansatz de Bethe, as representações da álgebra  $\tau_R$  atuam sobre um espaço vetorial  $V$ , o espaço dos estados físicos, são denotadas por  $\pi$  e chamadas *operadores-L* ou *operadores-Lax*:

$$L(u) = \pi(T(u)) = \begin{pmatrix} \pi(A(u)) & \pi(B(u)) \\ \pi(C(u)) & \pi(D(u)) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Portanto, podemos representar o operador  $t(u)$  como

$$t(u) = \pi(\text{tr}T(u)) = \pi(A(u) + D(u)) = \text{tr}L(u). \quad (3.9)$$

Chamaremos a representação do operador  $t(u)$  como *matriz de transferência*. Em termos da representação  $\pi$ , reescrevemos (3.2) como

$$R_{12}(u-v)L_1(u)L_2(v) = L_2(v)L_1(u)R_{12}(u-v). \quad (3.10)$$

A partir da relação (3.10) podemos deduzir uma importante propriedade da álgebra  $\tau_R$  chamada *co-multiplicação*: se  $L^U(u)$  e  $L^W(u)$  são duas representações<sup>1</sup> de  $\tau_R$  nos espaços  $U$  e  $W$ , então a matriz

$$L(u) = L^U(u)L^W(u)$$

também é uma representação de  $\tau_R$  no espaço  $U \otimes W$  chamado *produto tensorial* das representações  $L^U(u)$  e  $L^W(u)$ , ou seja,  $L(u) = L^U(u)L^W(u)$  satisfaz a equação (3.10). Fica claro que se  $L(u)$  é um operador-L, então  $L(u+\alpha)$ , para qualquer constante  $\alpha$ , também será, já que a matriz-R depende somente da diferença entre os parâmetros espectrais.

### 3.1.1 Exemplos de representações da álgebra $\tau_R$

Para construirmos um modelo específico, devemos determinar algumas representações da álgebra  $\tau_R$ . No caso específico dos modelos integráveis para condensados de Bose-Einstein, as seguintes realizações podem ser utilizadas. Em particular, todas elas satisfazem a álgebra (3.10).

- Uma representação em termos dos operadores bosônicos  $(a, a^\dagger)$  sujeitos à álgebra de Heisenberg

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad [N_i, a_j] = -\delta_{ij}a_i, \quad [N_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}a_i^\dagger,$$

onde  $N_i = a_i^\dagger a_i$  é dada por [31]:

$$L_i^a(u) = \begin{pmatrix} u + \eta N_i & a_i \\ a_i^\dagger & \eta^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

- Também existe uma realização em termos dos geradores  $(S^z, S^\pm)$  sujeitos à álgebra de Lie  $su(2)$

$$[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm, \quad [S^+, S^-] = 2S^z,$$

dada por [8 - 12]:

$$L_i^S(u) = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} u - \eta S_i^z & -\eta S_i^+ \\ -\eta S_i^- & u + \eta S_i^z \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

---

<sup>1</sup>Cada representação para a álgebra  $\tau_R$  satisfaz, individualmente, a equação (3.10).

- Outra representação é dada em termos dos geradores  $(K^z, K^\pm)$  sujeitos à álgebra de Lie  $su(1, 1)$

$$[K^z, K^\pm] = \pm K^\pm, \quad [K^+, K^-] = -2K^z,$$

dada por [34]:

$$L_i^K(u) = \begin{pmatrix} u + \eta K_i^z & \eta K_i^- \\ -\eta K_i^+ & u - \eta K_i^z \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

No capítulo 5, mostraremos explicitamente como utilizar combinações destas realizações para a construção dos modelos CBE-AA e CBE-AM.

## 3.2 Método do ansatz de Bethe algébrico

Um passo fundamental para aplicarmos com sucesso o método do ansatz de Bethe algébrico consiste em encontrar um pseudo-vácuo adequado,  $|0\rangle$ , tal que sejam respeitadas as propriedades

$$A(u)|0\rangle = a(u)|0\rangle, \quad B(u)|0\rangle = 0, \quad C(u)|0\rangle \neq 0, \quad D(u)|0\rangle = d(u)|0\rangle, \quad (3.14)$$

onde  $a(u)$  e  $d(u)$  são funções escalares. A partir de (3.2), (3.5) e (3.6) podemos derivar as relações

$$\begin{aligned} [C(u), C(v)] &= 0, \\ A(u)C(v) &= \frac{u-v+\eta}{u-v}C(v)A(u) - \frac{\eta}{u-v}C(u)A(v), \\ D(u)C(v) &= \frac{u-v-\eta}{u-v}C(v)D(u) + \frac{\eta}{u-v}C(u)D(v). \end{aligned} \quad (3.15)$$

A seguir, observando que  $C(v)$  atua como um 'operador de criação' sobre o pseudo-vácuo de Fock, definimos o *estado de Bethe*

$$|\vec{v}\rangle \equiv |v_1, v_2, \dots, v_n\rangle = \prod_{i=1}^n C(v_i)|0\rangle. \quad (3.16)$$

Observe que, devido a primeira relação de (3.15), o ordenamento não é importante no produto (3.16). Agora, vamos determinar a ação de  $t(u)$  sobre  $|\vec{v}\rangle$ ,

$$t(u)|\vec{v}\rangle = \pi(A(u))|\vec{v}\rangle + \pi(D(u))|\vec{v}\rangle.$$

Por (3.14) e (3.15),

$$A(u) |\vec{v}\rangle = a(u) \prod_{i=1}^M \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} |\vec{v}\rangle - \sum_{i=1}^M \frac{\eta}{u - v_i} \left( a(v_i) \prod_{j \neq i}^M \frac{v_i - v_j + \eta}{v_i - v_j} \right) C(u) |\vec{v}_i\rangle, \quad (3.17)$$

$$D(u) |\vec{v}\rangle = d(u) \prod_{i=1}^M \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i} |\vec{v}\rangle + \sum_{i=1}^M \frac{\eta}{u - v_i} \left( d(v_i) \prod_{j \neq i}^M \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j} \right) C(u) |\vec{v}_i\rangle, \quad (3.18)$$

onde  $|\vec{v}_i\rangle \equiv |v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_M\rangle$ . Portanto,

$$t(u) |\vec{v}\rangle = \Lambda(u) |\vec{v}\rangle + \sum_{i=1}^M \frac{\eta}{u - v_i} \left( d(v_i) \prod_{j \neq i}^M \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j} - a(v_i) \prod_{j \neq i}^M \frac{v_i - v_j + \eta}{v_i - v_j} \right) C(u) |\vec{v}_i\rangle, \quad (3.19)$$

sendo

$$\Lambda(u) = a(u) \prod_{i=1}^M \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} + d(u) \prod_{i=1}^M \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i}. \quad (3.20)$$

Portanto,  $\Lambda(u)$  será um autovalor para a matriz de transferência  $t(u)$  sempre que as equações

$$\frac{a(v_i)}{d(v_i)} = \prod_{j \neq i}^M \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}, \quad (3.21)$$

conhecidas como *equações do ansatz de Bethe* (EAB) são satisfeitas. Neste procedimento exigimos o cancelamento dos termos indesejados (segundo e terceiro termos do lado direito da equação (3.19)), uma vez que estes termos não são capazes de produzir um autovetor da matriz de transferência. Agora, dependendo da realização utilizada (ou do modelo estudado), teremos diferentes expressões para  $a(v_i)$  e  $d(v_i)$  na equação (3.21). Explicitaremos esta discussão no capítulo 5 para cada um dos modelos analisados.



# Capítulo 4

## Mapeamento

Neste capítulo vamos investigar o processo de mapeamento entre estruturas algébricas distintas, buscando conexões entre as diferentes formas de representar um sistema físico. Isso nos possibilita encontrar uma expressão alternativa para as equações do ansatz de Bethe dos modelos.

### 4.1 Processo de mapeamento

As auto-energias de um sistema quântico são determinadas pela equação de Schrödinger independente do tempo (em uma dimensão):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

Adotando as unidades naturais  $\hbar = 1$  e  $m = 1/2$ , podemos escrever

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (4.1)$$

Vamos adotar o seguinte *ansatz de Bethe* para a função  $\psi(x)$  [39]:

$$\psi(x) = e^{v(x)}Q(u(x)), \quad (4.2)$$

onde

$$Q(u(x)) = \prod_{j=1}^M (u - v_j),$$

sendo " $v_j$ " as raízes do polinômio  $Q$ . Desta forma,  $\psi(x)$  satisfaz, por construção, a equação (4.1). O termo " $e^{v(x)}$ " é utilizado para facilitar os cálculos. Substituindo o ansatz (4.2) na equação (4.1), obtemos

$$\alpha(u)Q''(u) + \beta(u)Q'(u) + \gamma(u)Q(u) = EQ(u), \quad (4.3)$$

com

$$\alpha(u) = - \left( \frac{du(x)}{dx} \right),$$

$$\beta(u) = -2 \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} - \frac{d^2u(x)}{dx^2},$$

$$\gamma(u) = V(x) - \left( \frac{dv(x)}{dx} \right)^2 - \frac{d^2v(x)}{dx^2}.$$

Uma vez que

$$Q(u(x)) = \prod_{j=1}^M (u - v_j),$$

segue que

$$Q'(u(x)) = \sum_{i=1}^M \prod_{j \neq i}^M (u - v_j),$$

$$Q''(u(x)) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^M \prod_{j \neq i, j \neq k}^M (u - v_j).$$

Portanto,

$$\lim_{u \rightarrow v_i} Q(u(x)) = 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow v_i} Q'(u(x)) = \prod_{j \neq i}^M (u - v_j),$$

$$\lim_{u \rightarrow v_i} Q''(u(x)) = 2 \sum_{k \neq i}^M \prod_{j \neq i, j \neq k}^M (u - v_j).$$

Assim, a partir de (4.3), temos

$$\alpha(v_i) 2 \sum_{k \neq i}^M \prod_{j \neq i, j \neq k}^M (v_i - v_j) + \beta(v_i) \prod_{j \neq i}^M (v_i - v_j) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\beta(v_i)}{\alpha(v_i)} = \sum_{j \neq i}^M \frac{2}{v_j - v_i} \quad (4.4)$$

Podemos identificar as equações (4.4) como as *equações alternativas do ansatz de Bethe* para os parâmetros " $v_i$ ".

## 4.2 Discussão

São formas equivalentes para encontrar as auto-energias de um sistema quântico: (i) resolver a equação de auto-valores no espaço de estados

$$H(P_x, X) |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (4.5)$$

onde  $H$  denota o operador Hamiltoniano como uma função dos operadores *momentum e posição* (explícita ou implicitamente) para o modelo, e (ii) resolver a equação de Schrödinger independente do tempo para um potencial adequado  $V(x)$  - equação (4.1). Essa equivalência deve-se ao fato de que a equação de Schrödinger (4.1) é a projeção sobre o espaço de coordenadas da equação (4.5):

$$\langle x | H(P_x, X) |\psi\rangle = \langle x | E |\psi\rangle \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

ou, em outras palavras, a equação de Schrödinger é uma *realização* da equação de operadores (4.5). De forma geral, sempre que for possível expressar uma equação de operadores no espaço de estados em termos de operadores diferenciais num espaço de coordenadas ou polinômios, estamos trabalhando com uma realização da equação. Uma vez feita uma realização sobre a equação (4.5), podemos solucioná-la supondo uma auto-função polinomial  $Q(u)$  dependente de parâmetros " $v_i$ " sujeitos a uma equação de restrição. Se conseguirmos expressar nossa equação de autovalores na forma (4.3),  $Q(u)$  será uma auto-função do Hamiltoniano sempre que os parâmetros obedecerem a equação (4.4), as *equações alternativas do ansatz de Bethe* para o sistema. Assim, encontramos as auto-energias do sistema resolvendo uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Note que, dependendo do modelo em questão, teremos diferentes expressões para  $\alpha(v_i)$  e  $\beta(v_i)$  em (4.4), como ficará explícito no próximo capítulo para os dois modelos de CBE exatamente solúveis discutidos neste trabalho.

# Capítulo 5

## Soluções Exatas para os modelos

Neste capítulo vamos derivar as equações do ansatz de Bethe e as energias dos modelos de condensados de Bose-Einstein discutidos no capítulo 2 através de dois métodos diferentes.

### 5.1 Solução exata de um modelo para dois CBE acoplados por tunelamento Josephson

O Hamiltoniano que descreve o sistema formado por dois CBE acoplados por tunelamento Josephson é dado por<sup>1</sup>

$$H = \frac{K}{8} (N_1 - N_2)^2 - \frac{\Delta\mu}{2} (N_1 - N_2) - \frac{\epsilon_j}{2} (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1).$$

A seguir, apresentaremos a solução deste modelo através do método do ansatz de Bethe apresentado em duas formulações diferentes.

#### 5.1.1 Solução exata via ansatz de Bethe I

Seguindo o capítulo 3, escolhemos a seguinte representação para a álgebra de Yang-Baxter  $\tau_R$

$$L(u) = L_1^a(u + \omega)L_2^a(u - \omega), \tag{5.1}$$

em termos da representação bosônica do *operador*  $-L$  dada em (3.11), onde  $\omega \in \mathbb{C}$ . Explicitamente,

---

<sup>1</sup>veja a seção 2.1

$$L(u) = \begin{pmatrix} (u + \omega + \eta N_1)(u - \omega + \eta N_2) + a_2^\dagger a_1 & (u + \omega + \eta N_1) a_2 + \eta^{-1} a_1 \\ (u - \omega + \eta N_2) a_1^\dagger + \eta^{-1} a_2^\dagger & a_1^\dagger a_2 + \eta^{-2} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Uma vez que  $L(u)$  satisfaz a relação

$$R_{12}(u-v)L_1(u)L_2(v) = L_2(v)L_1(u)R_{12}(u-v),$$

é fácil verificar que as relações da álgebra de Yang-Baxter (3.2) são obedecidas. De (5.2), identificamos:

$$\pi(A(u)) = u^2 - \omega^2 + u\eta N + \eta^2 N_1 N_2 + \eta\omega(N_1 - N_2) + a_2^\dagger a_1,$$

$$\pi(B(u)) = ua_2 + \omega a_2 + \eta N_1 a_2 + \eta^{-1} a_1,$$

$$\pi(C(u)) = ua_1^\dagger - \omega a_1^\dagger + \eta N_2 a_1^\dagger + \eta^{-1} a_2^\dagger,$$

$$\pi(D(u)) = a_1^\dagger a_2 + \eta^{-2}.$$

A partir da definição (3.9) para a matriz de transferência,

$$t(u) = u^2 + u\eta N + \eta^2 N_1 N_2 + \eta\omega(N_1 - N_2) + a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2 + \eta^{-2} - \omega^2. \quad (5.3)$$

É imediato, a partir de (5.3), que  $[t(u), t(v)] = 0$ , isto é, o modelo é integrável. Agora, é direto mostrar que o Hamiltoniano (2.3) para dois CBE acoplados pode ser expresso a partir da matriz de transferência  $t(u)$  e sua derivada como

$$H = -\kappa \left( t(u) - \frac{1}{4} (t'(0))^2 - ut'(0) - \eta^2 + \omega^2 - u^2 \right), \quad (5.4)$$

onde usamos

$$t'(0) = \frac{dt}{du} \Big|_{u=0} = \eta N,$$

e a seguinte identificação entre os parâmetros foi feita

$$\frac{K}{4} = \frac{\kappa\eta^2}{2}, \quad \frac{\Delta\mu}{2} = -\kappa\eta\omega, \quad \frac{\epsilon_j}{2} = \kappa.$$

Aplicando o método do ansatz de Bethe algébrico, nós encontramos

$$\pi(A(u)) |0, 0\rangle = (u^2 - \omega^2) |0, 0\rangle,$$

$$\pi(B(u))|0,0\rangle = 0,$$

$$\pi(C(u))|0,0\rangle = (u-w)|1,0\rangle + \eta^{-1}|0,1\rangle,$$

$$\pi(D(u))|0,0\rangle = \eta^{-2}|0,0\rangle,$$

ou seja,

$$a(u) = u^2 - \omega^2, \quad d(u) = \eta^{-2}.$$

Nesse caso, as equações do ansatz de Bethe (3.21) ficam

$$\eta^2 (v_i^2 - \omega^2) = \prod_{j \neq i}^n \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta}, \quad (5.5)$$

e o espectro de autovalores para o Hamiltoniano (2.3) é

$$E = -\kappa \left( \eta^{-2} \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\eta}{v_i - u} \right) - (u^2 - \omega^2) \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\eta}{v_i - u} \right) - u\eta N - u^2 - \eta^{-2} + \omega^2 \right). \quad (5.6)$$

Cada conjunto  $\{v_i, i = 1, \dots, n\}$ , solução da equação do ansatz de Bethe (5.5) parametriza um autovetor da matriz de transferência e, conseqüentemente, do Hamiltoniano (2.3) com energia dada pela equação (5.6). Assim, resolver o problema de autovalores da matriz de transferência fica reduzido a resolver as equações do ansatz de Bethe.

### 5.1.2 Solução exata via ansatz de Bethe II

Começamos com as realizações de Jordan-Schwinger para a álgebra  $su(2)$

$$S^+ = a_1^\dagger a_2, \quad S^- = a_2^\dagger a_1, \quad S^z = \frac{1}{2}(N_1 - N_2),$$

onde  $N = N_1 + N_2$  é o número fixo de partículas do sistema. Em termos desta realização, o Hamiltoniano (2.3) pode ser expresso como

$$H = \frac{K}{2} (S^z)^2 - \Delta\mu (S^z) - \frac{\epsilon_j}{2} (S^+ + S^-). \quad (5.7)$$

Uma representação equivalente da álgebra  $su(2)$  é dada pelo mapeamento nos operadores diferenciais<sup>2</sup>

$$S^+ = \frac{d}{du}, \quad S^- = nu - u^2 \frac{d}{du}, \quad S^z = \frac{n}{2} - u \frac{d}{du},$$

agindo sobre um espaço de polinômios com base  $\{1, u, u^2, \dots, u^n\}$ . Nós podemos representar (5.7) em sua forma diferencial com

$$\begin{aligned} H &= \frac{K}{2} \left( \frac{n^2}{4} + (1-n)u \frac{d}{du} + u^2 \frac{d^2}{du^2} \right) - \Delta\mu \left( \frac{n}{2} - u \frac{d}{du} \right) - \frac{\epsilon_j}{2} \left( nu + (1-u^2) \frac{d}{du} \right) \\ &= \frac{K}{2} u^2 \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{2} \left( (K(1-n) + 2\Delta\mu)u - \epsilon_j(1-u^2) \right) \frac{d}{du} - \frac{\epsilon_j n}{2} u + \frac{Kn^2}{8} - \frac{\Delta\mu n}{2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Agora, encontrar o espectro do Hamiltoniano (2.3) é equivalente a resolver a equação de autovalores

$$HQ(u) = EQ(u), \quad (5.9)$$

onde  $H$  é dado por (5.8) e  $Q(u)$  é uma função polinomial em  $u$  de ordem  $n$ . Podemos expressar  $Q(u)$  em termos de suas raízes  $\{v_j\}$ :

$$Q(u) = \prod_{j=1}^n (u - v_j).$$

Depois de reagruparmos, a equação (5.9) fica na forma

$$\alpha(u)Q''(u) + \beta(u)Q'(u) + \gamma(u)Q(u) = EQ(u),$$

onde

$$\alpha(u) = \frac{K}{2}u^2,$$

---

<sup>2</sup>Obtemos uma realização do operador  $\Gamma(X, P)$  estudando sua ação sobre um vetor qualquer  $|\psi\rangle$  do espaço de estados quânticos escrito como uma combinação linear da base  $|m, n\rangle$  para o Hamiltoniano e a mapeando *isomorficamente* em um espaço de polinômios. Esquemáticamente, se

$$|\psi\rangle = \sum_n \alpha_n |m, n\rangle \rightarrow \psi = \sum_j \alpha_j u^j,$$

então,

$$|\psi'\rangle = \Gamma(X, P) |\psi\rangle = \sum_{n'} \alpha_{n'} |m', n'\rangle \rightarrow \sum_{j'} \alpha_{j'} u^{j'} = \Gamma\left(u, \frac{d}{du}\right) \psi = \psi'.$$

Portanto

$$\Gamma(X, P) \rightarrow \Gamma\left(u, \frac{d}{du}\right).$$

$$\beta(u) = \frac{(u^2 - 1)\epsilon_j}{2} + \frac{(2\Delta\mu - K(n-1))}{2}u,$$

$$\gamma(u) = \frac{Kn^2}{8} - \frac{n\Delta\mu}{2} - \frac{n\epsilon_j u}{2}.$$

Seguindo a discussão do capítulo 4, efetuando (5.9) nos pontos  $u = v_i$ , os parâmetros devem satisfazer as *equações do ansatz de Bethe (EAB)*

$$\frac{(u^2 - 1)\epsilon_j + (2\Delta\mu - K(n-1))v_i}{Kv_i^2} = \sum_{j \neq i}^n \frac{2}{v_j - v_i}. \quad (5.10)$$

Escrevendo a expansão assintótica  $Q(u) \sim u^n - u^{n-1} \sum_{j=1}^n v_j$  e considerando os termos de ordem  $n$  em (5.8), os autovalores de energia encontrados são

$$E = \frac{Kn^2}{8} - \frac{\Delta\mu n}{2} + \frac{\epsilon_j}{2} \sum_{j=1}^n v_j. \quad (5.11)$$

Assim, encontramos agora as EAB na forma aditiva, conforme (5.11). O problema de mapear as equações (5.5) e (5.6) nas equações (5.10) e (5.11) permanece uma questão em aberto [40].

## 5.2 Solução exata para um modelo de CBE homo-atômico-molecular

O Hamiltoniano que descreve o fenômeno de interconversão entre átomos e moléculas num CBE atômico-molecular é dado por

$$H = \mu_a N_a + \Omega (a^\dagger a^\dagger c + c^\dagger a a).$$

Novamente, vamos apresentar a solução deste modelo através do método do ansatz de Bethe apresentado em duas formulações diferentes.

### 5.2.1 Solução exata via ansatz de Bethe I

Para esta solução, escolhemos uma realização em termos dos geradores da álgebra de bósons (3.11) e dos geradores da álgebra  $su(1,1)$  (3.13):

$$L(u) = \eta^{-1} G L^a (u - \delta - \eta^{-1}) L^K (u), \quad (5.12)$$



onde a matriz  $G$  é dada por

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se verificar que (5.11) satisfaz a equação de Yang-Baxter (3.10), de forma que a álgebra (3.3) é obedecida. As realizações explícitas da álgebra  $\tau_R$  são dadas por

$$\begin{aligned} \pi(A(u)) &= \eta^{-1}(u + \eta K^z)(u - \delta - \eta^{-1} + \eta N_c) + K^+ c, \\ \pi(B(u)) &= -K - (u - \delta - \eta^{-1} + N_c) - \eta^{-1} c(u - \eta K^z), \\ \pi(C(u)) &= \eta^{-1} c^\dagger (u + \eta K^z) - \eta^{-1} K^+, \\ \pi(D(u)) &= c^\dagger K^- + \eta^{-2}(u - \eta K^z). \end{aligned}$$

e

$$t(u) = -\eta^{-1}u^2 + (\eta^{-1}\delta + 2\eta^{-2})u + (\delta - u)K^z - uN_c - \eta K^z N_c + K^+ c + K^- c^\dagger. \quad (5.13)$$

É fácil verificar que  $[t(u), t(v)] = 0$ ; portanto, modelo é integrável. Além disso,

$$t(0) = \delta K^z - \eta K^z N_c + K^+ c + K^- c^\dagger. \quad (5.14)$$

Observando as realizações canônicas da álgebra  $su(1,1)$  em termos dos operadores bosônicos<sup>3</sup>

$$K^+ = \frac{a^\dagger a^\dagger}{2}, \quad K^- = \frac{aa}{2}, \quad K^z = \frac{a^\dagger a + 1}{4},$$

é imediato que o Hamiltoniano (2.6) para um modelo de CBE homo-atômico-molecular está relacionado com a matriz de transferência (5.13) como

$$H = \lim_{\eta \rightarrow 0} \Omega \left( t(0) - \frac{\delta}{4} \right), \quad (5.15)$$

onde fizemos a identificação  $\mu_a = \frac{\delta}{2}$ . Seja  $|0\rangle$  o estado que denota o vácuo de Fock e  $|k\rangle$  o estado de menor energia da álgebra  $su(1,1)$  com peso  $k$ , isto é,  $K^z |k\rangle = k |k\rangle$ . Definindo o estado  $|\Psi\rangle = |0\rangle |k\rangle$ , é claro que  $B(u) |\Psi\rangle = 0$  e

$$a(u) = -\eta^{-1}(u + \eta k)(u - \delta - \eta^{-1}), \quad d(u) = \eta^{-2}(u - \eta k).$$

As equações do ansatz de Bethe ficam

---

<sup>3</sup>Veja a sub-seção 3.1.1

$$\frac{(v_i + \eta k)(1 - \eta v_i + \eta \delta)}{(v_i - \eta k)} = \prod_{j \neq i}^n \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta} \quad (5.16)$$

e o espectro de energia para o Hamiltoniano (2.6) é

$$E = \Omega \left( k(\delta + \eta^{-1}) \prod_{i=1}^M \frac{v_i - \eta}{v_i} + \eta^{-1} k \prod_{i=1}^M \frac{v_i + \eta}{v_i} - \frac{\mu_a}{2} \right) \quad (5.17)$$

### 5.2.2 Solução exata via ansatz de Bethe II

Começamos definindo os operadores  $(Q^\pm, Q^z)$  geradores da álgebra  $Q$

$$Q^+ = a^\dagger a^\dagger c, \quad Q^- = c^\dagger a a, \quad Q^z = \frac{1}{4} \left( N_a - 2N_c + \frac{1}{2} \right), \quad \mathcal{L}_Q = \frac{1}{4} \left( N_a - 2N_c + \frac{1}{2} \right),$$

com  $N_x = x^\dagger x$ , sujeitos à álgebra quadrática

$$[Q^z, Q^\pm] = \pm Q^\pm,$$

$$[Q^+, Q^-] = 3(Q^z)^2 + (2\mathcal{L}_Q - 1)Q^z + (\mathbb{C}_K - \mathcal{L}_Q(\mathcal{L}_Q + 1)),$$

onde

$$\mathbb{C}_K = K^+ K^- - K^z (K^z - 1) = K^- K^+ - K^z (K^z + 1)$$

é um operador de Casimir e  $\mathcal{L}_Q$  é um elemento central da álgebra, pois

$$[\mathcal{L}_Q, Q^{z,\pm}] = 0.$$

Em termos destes operadores, podemos escrever o Hamiltoniano (2.6) como

$$H = 2\mu_a \left( \mathcal{L}_Q + Q^z - \frac{1}{4} \right) + \Omega (Q^+ + Q^-). \quad (5.18)$$

Podemos representar (5.18) pelo mapeamento nos operadores diferenciais<sup>4</sup>

$$Q^+ = \frac{d}{du}, \quad Q^- = n(n-1)u + 2(3+2n)u^2 \frac{d}{du} + 4u^3 \frac{d^2}{du^2}, \quad Q^z = \frac{1}{4}(n+1) - u \frac{d}{du}$$

e

---

<sup>4</sup>Veja a nota de rodapé na página 20.

$$\mathcal{L}_Q = \frac{1}{4}(n+1),$$

agindo sobre um espaço de polinômios com base  $\{1, u, u^2, \dots, u^n\}$ . Assim,

$$H = 4u^3\Omega \frac{d^2}{du^2} + \Omega \left( 2(3+2n)u^2 - \frac{2\mu_a}{\Omega}u + 1 \right) \frac{d}{du} + \Omega n(n-1)u + \mu_a n. \quad (5.19)$$

Novamente, recaímos sobre o problema de resolver a equação

$$HQ(u) = EQ(u), \quad (5.20)$$

onde

$$Q(u) = \prod_{j=1}^n (u - v_j).$$

Nossa equação de autovalores fica

$$\alpha(u)Q''(u) + \beta(u)Q'(u) + \gamma(u)Q(u) = EQ(u),$$

sendo

$$\alpha(u) = 4\Omega u^3,$$

$$\beta(u) = \Omega (1 + 2(3-2n)u^2) - 2\mu_a u,$$

$$\gamma(u) = \Omega n(n-1)u + \mu_a n.$$

No limite  $u \rightarrow v_i$ , os parâmetros  $v_i$  devem satisfazer as *equações do ansatz de Bethe*

$$\frac{\Omega (1 + 2(3-2n)v_i^2) - 2\mu_a v_i}{4\Omega v_i^3} = \sum_{j \neq i}^n \frac{2}{v_j - v_i}. \quad (5.21)$$

Tomando a expansão assintótica  $Q(u) \sim u^n - u^{n-1} \sum_{j=1}^n v_j$  e considerando os termos de ordem  $n$  em (5.20), os autovalores de energia encontrados são

$$E = -\mu_a n - \Omega (n-1)(n-2) \sum_{j=1}^n v_j \quad (5.22)$$

# Capítulo 6

## Conclusões

### 6.1 Considerações finais

Neste trabalho nós apresentamos o método algébrico do ansatz de Bethe para o cálculo dos espectros de energia de dois modelos exatamente solúveis de condensados de Bose-Einstein: um modelo para dois CBE acoplados (CBE-AA) e um modelo para um condensado onde há inter-conversão entre átomos e moléculas (CBE-AM). Realizamos um estudo algébrico detalhado, trabalhando com os conceitos de álgebra polinomial e mapeamento isomórfico em estruturas diferenciais. Em particular, encontramos as equações do ansatz de Bethe e as energias para os dois modelos. Os resultados apresentados na sub-seção 5.2.2 são inéditos e fruto deste trabalho.

### 6.2 Perspectivas futuras

Dando continuidade ao estudo dos modelos de CBE, nós pretendemos investigar:

1. Equivalências entre as equações do ansatz de Bethe e as energias obtidas;
2. Generalização dos modelos de CBE através das álgebras polinomiais;
3. Fenômeno de *emaranhamento* dos modelos;

# Referências Bibliográficas

- [1] Wybourne B G 1974 *Classical Groups for Physicists*
- [2] Bethe H 1931 *Z. Phys.* 71 205
- [3] McGuire J B 1964 *J. Math. Phys.* 5 622
- [4] Lieb E H 1967 *Phys. Rev. Lett.* 18 692
- [5] Sutherland B 1967 *Phys. Rev. Lett.* 19 103
- [6] Yang C N 1967 *Phys. Rev. Lett.* 19 1312
- [7] Baxter R J 1982 *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*
- [8] Faddeev L D, Sklyanin E K e Takhtajan L A 1979 *Theor. Math. Phys.* 40 194
- [9] Kulish P P e Sklyanin E K 1982 *Lec. Notes Phys.* 151 61
- [10] Takhtajan L A 1990 *Lect. Notes Phys.* 370 3
- [11] Korepin V E, Bogoliubov N M e Izergin A G 1993 *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*
- [12] Faddeev L D 1995 *Int. J. Mod. Phys. A* 10 1845
- [13] Bazhnov V, Lukyanov S e Zamolodchikov A B 1996 *Commun. Math. Phys.* 177 381
- [14] Essler F H L e Korepin V E 1994 *Exactly Solvable Models of Strongly Correlated Electrons*
- [15] Jimbo M 1985 *Lett. Math. Phys.* 10 63
- [16] Jimbo M 1986 *Lect. Notes Phys.* 246 335
- [17] Drinfeld V G 1986 Quantum groups *Proc. Int. Congress of Mathematicians*
- [18] Reshetikhin N Yu, Takhtajan L A e Faddeev L D 1990 *Leningrad Math. J.* 1 193

- [19] Cornell E A e Wieman C E 2002 *Rev. Mod. Phys.* 74 875
- [20] Anglin J R e Ketterle W 2002 *Nature* 416 211
- [21] McDonald D G 2001 *Phys. Today* 54 46
- [22] Leggett A J 2001 *Rev. Mod. Phys.* 73 307
- [23] Drummond P D, Kheruntsyan K V e He H 1998 *Phys. Rev. Lett.* 81 3055
- [24] Javanainen J e Mackie M 1999 *Phys. Rev. A* 59 R 3186
- [25] Heizen D J, Wynar R, Drummond P D e Kheruntsyan K V 2000 *Phys. Rev. Lett.* 84 5029
- [26] Vardi A, Yurovsky V A e Anglin J R 2001 *Phys. Rev. A* 64 063611
- [27] Cusack B J, Alexander T J, Ostrovskaya E A e Kivshar Y S 2002 *Phys. Rev. A* 65 013609
- [28] Wynar R, Freeland R S, Han D J, Ryu C e Heinzen D J 2000 *Science* 287 1016
- [29] Zoller P 2002 *Nature* 417 493
- [30] Donley E A, Claussen N R, Thomson S T e Wieman C E 2002 *Nature* 417 529
- [31] Kuznetsov V B e Tsiganov A V 1989 *J. Phys. A: Math. Gen.* 22 L73
- [32] Zhou H-Q, Links J e Mckenzie R H 2002 *Preprint cond-mat/0211249*
- [33] Zamolodchikov A B e Zamolodchikov Al B 1979 *Ann. Phys. NY* 120 253
- [34] Jurco B 1989 *J. Math. Phys.* 301739
- [35] Kumar V S, Bambah B A e Jagannathan R 2001 *J. Phys. A: Math. Gen.* 34 8583
- [36] Kumar V S, Bambah B A 2002 *arXiv:math-ph/0205005v2*
- [37] Albiez M et al. *Phys. Rev. Lett.* 95 010402
- [38] Foester A, Links J e Zhou H-Q *arXiv:nlin.SI/0305050v1*
- [39] Dunning C, Hibberd K E e Links J *J. Stat. Mech.* P11005 (2006)
- [40] Links J e Hibberd K E *arXiv:nlin./0612063v1 [nlin.SI] (2006)*