

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE INVERSA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SOLDAGEM POR FRICÇÃO
LINEAR UTILIZANDO O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO EXTREMA GENERALIZADA

por

Felipe Roman Centeno

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, 04 de abril de 2008.

ANÁLISE INVERSA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SOLDAGEM POR FRICÇÃO
LINEAR UTILIZANDO O MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO EXTREMA GENERALIZADA

por

Felipe Roman Centeno

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Francis Henrique Ramos França

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Fabiano Luis de Sousa

Prof. Dr. José Antônio Esmerio Mazzaferro

Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey

Prof. Dr. Flávio José Lorini

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 04 de abril de 2008.

Aos meus pais, Silvio Johnson Centeno e Sonia Roman Centeno.

Às minhas irmãs e sobrinhos.

À minha grande amiga Stela.

Estes são meus melhores e mais fiéis amigos e companheiros.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço à minha família por todo apoio e compreensão; pela paciência comigo, principalmente naqueles momentos em que os estresses físico e mental criados por conta de altas doses de estudos me tornavam uma pessoa não muito sociável; pelos cuidados da minha mãe sempre que eu chegava em casa para sempre tentar tornar o meu dia um pouco melhor.

Agradeço a minha grande amiga Stela Maris Martins Leal, que sempre me acompanhou e me apoiou, desde quando eu estava na graduação ainda, até chegar no mestrado, mesmo naqueles momentos, que não eram poucos, em que eu não tinha tempo para aproveitar essa amizade tão boa que Deus me proporcionou!

Agradeço ao professor, orientador educacional e, principalmente, amigo, Francis H. R. França, pois certamente sem o empenho e a confiança desta, depositada em mim, este trabalho não teria sido possível. Ao professor Paulo S. Schneider, pelo apoio e incentivo no início desta jornada.

Aos professores da comissão de avaliação, os quais se disponibilizaram a contribuir com este trabalho e com a minha formação.

Aos amigos e colegas, os quais em muitos momentos me incentivaram, auxiliaram e ensinaram. Com certeza o apoio deles me ajudou na realização deste trabalho, em especial ao pessoal do GESTE, entre os quais eu gostaria de mencionar: Anderson Mossi, Darci Savicki, Marcelo Galarça, Guilherme Piccoli, Elizaldo Domingues, José Salvadoretti.

A todos funcionários e professores do PROMEC/UFRGS.

Ao CNPq pela bolsa de estudos.

RESUMO

A estimativa de parâmetros térmicos relacionados à Soldagem por Fricção Linear (também conhecida como Soldagem por Fricção e Mistura Mecânica) de uma placa de alumínio AA 2195-T8 é estudada nesta dissertação. A determinação dos parâmetros é tratada como um problema de otimização, no qual a função objetivo corresponde a uma função erro entre temperaturas medidas numericamente e temperaturas calculadas, para certos valores da taxa de calor gerada pela fricção, do coeficiente de transferência calor por convecção natural e do coeficiente de transferência de calor entre a placa e a base de suporte. A distribuição transiente de temperaturas sobre a placa é determinada pela solução da equação da condução de calor tridimensional transiente, a qual é resolvida pelo método dos volumes finitos. A minimização da função objetivo é realizada com o auxílio do algoritmo Otimização Extrema Generalizada (GEO), um método evolucionário que pode lidar com diversos tipos de problemas de otimização. A avaliação da sensibilidade da leitura de temperatura é feita com relação ao posicionamento dos sensores, com o objetivo de descobrir as melhores posições para aquisição de dados, e também a determinação do parâmetro τ (parâmetro utilizado no método GEO que deve ser ajustado para cada tipo de problema) que melhor se adapta para cada um dos conjuntos de medição de temperatura. Além disso, realiza-se um estudo no qual é analisado um caso em que a fonte de calor possui forma de distribuição desconhecida, sem a utilização de equações para a sua descrição, desta maneira mais parâmetros devem ser estimados pela análise inversa, assim o processo de otimização é mais complexo (cinco valores de taxa de calor e dois coeficientes de transferência de calor, ao invés de uma taxa de calor e dois coeficientes). Ainda, para simular medições de dados reais, os valores de temperatura obtidos a partir da solução numérica para valores específicos da taxa de calor e dos coeficientes de transferência de calor são perturbados com ruídos de acordo com desvios-padrão típicos dessa forma de medição.

Este trabalho demonstra que a aproximação inversa proposta pode ser um modo muito efetivo para avaliar e prever os parâmetros que governam o processo de transferência de calor na Soldagem por Fricção Linear, um importante passo para o seu controle em tempo real.

ABSTRACT

“INVERSE ANALYSIS OF HEAT TRANSFER IN FRICTION STIR WELDING USING THE GENERALIZED EXTREMAL OPTIMIZATION METHOD”

The estimation of thermal parameters related to *Friction Stir Welding* of a AA 2195-T8 plate is studied in this dissertation. The determination of the parameters is carried out by means of an optimization problem, in which the objective function corresponds to an error function between the numerically measured temperature and the temperature computed for each estimated values of the heat rate input, the heat transfer coefficient on the bottom surface, and the natural convection heat transfer coefficient. The time-dependent temperature distribution on the plate is determined by the solution of the three-dimensional transient state conduction equation, which is solved by the control-volume method. The minimization of the objective function is accomplished with the aid of the *Generalized Extremal Optimization* (GEO) method, an evolutionary method that can deal with several types of optimization problems. The evaluation of the temperature reading sensitivity is carried out, in relation to the readers locations on the plate, in order to determine the best positions that can be used to acquire data, and the determination of the τ parameter (this parameter is used in the GEO method and it must be adjusted for each type of problem) that best fits with each one of the temperature readers assembly, allowing the determination of the best temperature readers assembly. In addition, it is executed a study that considers a case where the heat rate input has unknown profile distribution, without using equations for its description, in this manner more parameters have to be estimated by the inverse analysis, so the optimization process is more complicated (five heat rate inputs and two heat transfer coefficients, instead of one heat rate input and two heat transfer coefficients). Furthermore, to simulate real-data measurements, the temperature inputs, obtained from a numerical solution for specific values of the heat rate input and the heat transfer coefficients, were perturbed with noises according to the standard deviation of the measurement procedure.

This work demonstrates that the proposed inverse approach can be a very effective way to evaluate and predict the parameters that govern the heat transfer process in Friction Stir Welding, an important step to real-time control of this process.

ÍNDICE

1. Introdução	1
1.1. Motivação	1
1.2. Revisão Bibliográfica: Soldagem por Fricção Linear	2
1.3. Contribuição do Trabalho	8
1.4. Organização da Dissertação	9
2. Fundamentos da Transferência de Calor em Soldagem por Fricção Linear	10
2.1. Física da Soldagem por Fricção Linear	10
2.1.1. Condições de Contato no Processo de Soldagem por Fricção Linear	12
2.1.2. Determinação Analítica da Geração de Calor no Processo de Soldagem por Fricção Linear	14
2.1.2.1. Aspectos Gerais da Geração de Calor	16
2.1.2.2. Tensão Cisalhante de Contato	19
2.1.3. Transferência de Calor entre a Peça de Trabalho e a Placa de Suporte	22
2.2. O Problema da Condução de Calor Tridimensional Transiente	23
2.2.1. As Propriedades Térmicas da Matéria	23
2.2.2. A Equação da Condução de Calor	25
2.2.3. Condições Iniciais e de Contorno	27
2.3. Discretização Numérica do Problema – O Método dos Volumes Finitos	28
2.3.1. Aproximação da Equação Geral da Condução	28
2.3.2. Linearização do Termo Fonte	31
2.3.3. Condições de Contorno	32
2.3.4. Estrutura da Matriz de Coeficientes	36
2.3.5. Tratamento das Não-Linearidades	37
2.3.6. Solução do Sistema Linear de Equações	38
2.3.7. Cuidados Gerais na Obtenção das Equações Aproximadas	41
3. Solução Inversa (Determinação de Parâmetros)	43
3.1. Discussão sobre Problemas Inversos e Diretos	43
3.2. Estado-da-Arte Geral: Determinação de Parâmetros	44
3.3. Métodos de Solução	46
3.3.1. Programação Linear	47
3.3.2. Programação Não-Linear	47
3.3.2.1. Métodos Determinísticos	47

3.3.2.2. Métodos Estocásticos	48
3.3.3. Aplicações	51
3.4. Otimização Extrema Generalizada	51
3.4.1. Variáveis Discretas e Inteiras	53
3.4.2. Tratamento de Restrições pelo GEO	54
4. Estudo de Caso	56
4.1. Validação do Código de Volumes Finitos	56
4.1.1. Definição do Problema	56
4.1.2. Análise Numérica	57
4.1.3. Análise de Resultados	61
4.2. Estudo da Sensibilidade da Malha	63
4.3. Estudo da Sensibilidade dos Leitores de Temperatura	66
4.4. Determinação do Melhor Parâmetro τ para cada Conjunto de Termopares	75
4.4.1. Metodologia de Solução	76
4.4.2. Análise dos Resultados	79
4.5. Determinação da Melhor Configuração dos Termopares	81
4.5.1 Metodologia de Solução	81
4.5.2. Análise de Resultados	81
4.6. Distribuição de Fonte de Calor Desconhecida	84
5. Conclusões e sugestões para próximos trabalhos	90
Referências Bibliográficas	91
Anexo A	95
Anexo B	96

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área [m ²]
A, B	Coefficientes utilizados no MVF
$A_{mb}, B_{mb}, C_{mb}, D_{mb}, P_{mb}, Q_m$	Coefficientes do método TDMA
c_p	Calor específico do material [J/(kg.K)]
C	Configuração inicial de bits no método GEO
dA	Elemento de área da ferramenta [m ²]
\vec{d}_k	Direção de busca do ponto ótimo
f	Parâmetro da Eq. (2.36)
F	Função objetivo
F	Força [N]
$f(i^*)$	Valor da função objetivo para a melhor solução encontrada (método Busca Tabu)
h	Coefficiente de transferência de calor por convecção [W/(m ² .K)]
h_b	Coefficiente de transferência de calor entre a peça e a placa de suporte [W/(m ² .K)]
h_{conv}	Coefficiente de transferência de calor por convecção natural [W/(m ² .K)]
H_{hb}	Sensibilidade relacionada ao coeficiente de transferência de calor entre a peça e a placa de suporte
H_{hconv}	Sensibilidade relacionada ao coeficiente de convecção natural
H_{pino}	Altura do pino [m]
H_Q	Sensibilidade relacionada à taxa de calor
i	Solução atual no método Busca Tabu
i^*	Melhor solução encontrada (método Busca Tabu)
I	Número de pontos de medição
I_j	Número inteiro obtido na transformação da variável j da sua forma binária para sua representação decimal no GEO
j	Solução seguinte no método Busca Tabu

k	Coeficiente de condução para o ar/vácuo na folga entre a peça e a placa de suporte [W/(m.K)]
k	Condutividade térmica do material [W/(m.K)]
k	Classificação dos bits no método GEO ($k = 1, N$)
l_j	Quantidade de bits em cada variável de projeto no método GEO
L	Quantidade total de espécies (bits) no método GEO
m	Quantidade de bits para variáveis contínuas
M	Torque [N.m]
N	Quantidade de variáveis de projeto no método GEO
NFE	Número de avaliações da função objetivo
$N(i)$	Vizinhança de soluções no método Busca Tabu
Nu_δ	Número de Nusselt
p	Pressão de contato [Pa]
p	Precisão no método GEO
P_i	Probabilidade do bit i
q_0''	Fluxo de calor no ombro da ferramenta [W/m ²]
\dot{q}	Fonte volumétrica de calor [W/m ³]
q_b''	Fluxo de calor entre a peça e a placa de suporte [W/m ²]
q_{sup}''	Fluxo de calor superficial [W/m ²]
q_x''	Fluxo de calor na direção x [W/m ²]
Q	Energia total imposta ao sistema [W]
$Q_{escorregamento, força.de.penetração}$	Calor total gerado pelo atrito para condição de escorregamento, para ombro plano, em termos da força de penetração [W]
Q_{PINO}	Calor total gerado pela lateral do pino da ferramenta [W]
Q_{PONTA}	Calor total gerado pela ponta do pino da ferramenta [W]
Q_{OMBRO}	Calor gerado sob o ombro da ferramenta [W]
Q_{total}	Calor total gerado pela ferramenta [W]
$Q_{total,aderência}$	Calor total gerado pelo atrito para condição de aderência [W]

$Q_{total,escorregamento}$	Calor total gerado pelo atrito para condição de escorregamento [W]
Q_x	Taxa de calor na direção x [W]
r	Coordenada cilíndrica na direção do raio da ferramenta (posição ao longo do raio da ferramenta em relação ao seu eixo) [m]
$RAN, rand$	Número randômico entre 0 e 1
R_{pino}	Raio do pino [m]
R_{OMBRO}	Raio do ombro [m]
s_z	Tensão de contato no eixo z [Pa]
S	Termo fonte [W/m ³]
S_C	Parcela constante do termo fonte, incluindo a condição de contorno de 3ª espécie no MVF [W/m ³]
$S_{C,orig}$	Parcela constante do termo fonte no MVF [W/m ³]
S_P	Parcela variável do termo fonte, incluindo a condição de contorno de 3ª espécie no MVF [W/m ³]
$S_{P,orig}$	Parcela variável do termo fonte no MVF [W/m ³]
$T, T(x,y,z)$	Temperatura da peça [K, °C]
T_1	Temperatura média da peça de trabalho [K]
T_2	Temperatura média da placa de suporte [K]
T'	Temperatura numérico-experimental [K]
T_b	Temperatura não perturbada da placa de suporte [K]
T_{ref}	Temperatura de referência [K]
T_{sup}	Temperatura superficial [K]
T_{∞}	Temperatura na vizinhança [K]
$v_{ferramenta}$	Velocidade da ferramenta [m/s]
v_{matriz}	Velocidade da matriz [m/s]
x	Coordenada retangular [m]
\bar{X}_k	Ponto corrente (ou atual)
y	Coordenada retangular [m]

V	Valor da função objetivo no método GEO
V	Volume [m ³]
z	Coordenada cilíndrica / retangular (ao longo do eixo de rotação) [m]

SÍMBOLOS GREGOS

α	Ângulo de cone do ombro [rad]
α	Difusividade térmica do material [m ² /s]
δ	Variável de estado de contato
δ	Distância de separação entre a peça de trabalho e a placa de suporte [m]
δ_x	Distância entre o centro do volume P e o centro do volume vizinho no MVF [m]
Δx	Dimensão do volume P na direção x no MVF [m]
ϕ	Variável genérica
$\dot{\gamma}$	Taxa de escorregamento
η	Argumento da integral da função erro gaussiana
λ_k	Passo de cálculo
μ	Coefficiente de atrito
ν	Viscosidade cinemática do material [m ² /s]
θ	Coordenada cilíndrica angular [rad]
ρ	Densidade do material [kg/m ³]
σ	Pressão de contato [Pa]
σ	Desvio padrão
$\sigma_{\text{escoamento}}$	Tensão de escoamento [Pa]
$\tau_{\text{escoamento}}$	Tensão cisalhante de escoamento [Pa]
τ_{contato}	Tensão cisalhante de contato [Pa]
$\tau_{\text{fricção}}$	Tensão cisalhante de atrito [Pa]
τ	Parâmetro de ajuste do método GEO
ω	Velocidade angular de rotação [rad/s]
ζ	Integral da função erro gaussiana

ÍNDICES SUBSCRITOS

—	Orientação da superfície da ferramenta: Horizontal (perpendicular ao eixo de rotação, superfície circular)
	Orientação da superfície da ferramenta: Vertical (paralelo ao eixo de rotação, superfície cilíndrica)
\	Orientação da superfície da ferramenta: Cônica (inclinado em relação ao eixo de rotação, superfície cônica)
b	Fronteira de trás do volume P
B	Volume atrás do volume P
best	Melhor valor encontrado para a variável
cal	Valor calculado pelo algoritmo do MVF
e	Fronteira leste do volume P
E	Volume ao leste do volume P
f	Fronteira do Volume
f	Fronteira à frente do volume P
F	Volume à frente do volume P
i	Cada um dos elementos (bits) no método GEO
i	Cada um dos termopares, ou pontos de medição, utilizados no experimento numérico
j	Variável de projeto no método GEO
k	Iteração atual
k+1	Iteração seguinte
n	Quantidade de taxas e de fluxos de calor utilizados Seção 4.6 ($n = 1, 12$)
n	Fronteira norte do volume P
N	Volume ao norte do volume P
P	Volume central no MVF
s	Fronteira sul do volume P
S	Volume ao sul do volume P
w	Fronteira oeste do volume P
W	Volume ao oeste do volume P

ÍNDICES SOBRESCRITOS

0, *	Instante de tempo anterior ao atual no MVF
l	Limite inferior de procura no método GEO
u	Limites superior de procura no método GEO

ABREVIATURAS

AG	Algoritmo Genético
ANN	<i>Artificial Neural Network</i> – Rede Neural Artificial
BFGS	Método de <i>Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno</i>
CFD	Computational Fluid Dynamics – Dinâmica de Fluidos Computacional
FSW	<i>Friction Stir Welding</i> – Soldagem por Fricção Linear
GEO	<i>Generalized Extremal Optimization</i> – Otimização Extrema Generalizada
GTAW	<i>Gas Tungsten Arc Welding</i> - Soldagem a Arco com Proteção Gasosa e Gás Tungstênio
HAZ	Heat Affected Zone – Zona Afetada pelo Calor
MMC	Método de Monte Carlo
MVF	Método dos Volumes Finitos
PL	Programação linear
PNL	Programação Não-Linear
SA	<i>Simulated Annealing</i> – Recozimento Simulado
TDMA	<i>TriDiagonal Matrix Algorithm</i> – Algoritmo de Matriz Tridiagonal
TMAZ	Thermo-mechanically Affected Zone - Zona Termo-mecanicamente Afetada
TS	<i>Tabu Search</i> – Busca Tabu

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - Esquema de montagem e definição de orientações	11
Figura 2.2 - Vista lateral da ferramenta de Soldagem por Fricção Linear mostrando o ombro cônico e o pino com rosca	12
Figura 2.3 - Contribuições na geração de calor em estimativas analíticas	15
Figura 2.4 - Desenho esquemático de orientações de superfícies e segmentos infinitesimais de áreas. (a) Horizontal (vista inferior). (b) Vertical. (c) Cônica/Inclinada. Projeção da área do segmento cônico em segmentos horizontal e vertical	16
Figura 2.5 - Dependência da condutividade térmica com a temperatura para alguns sólidos selecionados	24
Figura 2.6 - Volume elementar e seus vizinhos. Situação tridimensional	29
Figura 2.7 - Função de interpolação no tempo	30
Figura 2.8 - Discretização com meio-volume na fronteira	33
Figura 2.9 - Discretização bidimensional com meios-volumes na fronteira	33
Figura 2.10 - Condições de contorno com volumes fictícios	34
Figura 2.11 - Discretização unidimensional com volumes inteiros	35
Figura 2.12 - Estrutura da matriz de coeficientes para problemas 1D e 2D, respectivamente	37
Figura 2.13 - Linha onde se aplica o método TDMA	39
Figura 3.1 - Variáveis de projeto codificadas em uma string binária	52
Figura 4.1 - Dimensões da peça de trabalho e posição dos termopares	57
Figura 4.2 - Condições de contorno para simulação da Soldagem por Fricção Linear	59
Figure 4.3 - Malha do método dos volumes finitos	60
Figura 4.4 – Campo de temperaturas na peça de trabalho	60
Figure 4.5 - Propriedades térmicas do AA2195	61
Figura 4.6 - Comparação entre os perfis de temperatura ao longo do tempo para a camada superior de termopares: resultados do presente estudo à esquerda; resultados de Chao <i>et al.</i> (2003) à direita	61
Figura 4.7 - Comparação entre os perfis de temperatura ao longo do tempo para a camada do meio de termopares: resultados do presente estudo à esquerda; resultados de Chao <i>et al.</i> (2003) à direita	62

Figura 4.8 - Comparação entre os perfis de temperatura ao longo do tempo para a camada inferior de termopares: resultados do presente estudo à esquerda; resultados de Chao <i>et al.</i> (2003) à direita	62
Figura 4.9 - Perfil de temperaturas na direção transversal: resultados do presente estudo à esquerda; resultados de Chao <i>et al.</i> (2003) à direita	63
Figura 4.10 - Sensibilidade da malha na direção x	65
Figura 4.11 - Sensibilidade da malha na direção y	65
Figura 4.12 - Sensibilidade da malha na direção z	66
Figura 4.13 - Sensibilidade H_Q dos termopares para posição $x = 285$ mm	68
Figura 4.14 - Sensibilidade H_Q dos termopares para posição $y = 13$ mm para a ferramenta na posição $x = 85$ mm	68
Figura 4.15 - Sensibilidade H_Q dos termopares para posição $y = 29$ mm para a ferramenta na posição $x = 85$ mm	69
Figura 4.16 - Sensibilidade H_Q dos termopares para posição $y = 13$ mm para a ferramenta na posição $x = 185$ mm.....	69
Figura 4.17 - Sensibilidade H_Q dos termopares para posição $y = 29$ mm para a ferramenta na posição $x = 185$ mm	70
Figura 4.18 - Sensibilidade H_{hb} dos termopares para posição $x = 285$ mm	71
Figura 4.19 - Sensibilidade H_{hconv} dos termopares para posição $x = 285$ mm	72
Figura 4.20 - Representação esquemática dos volumes de controle sob a ferramenta	85
Figura 4.21 - Valores otimizados de Q_n	89

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1 - Definição da condição de contato, relação entre velocidade, cisalhamento e variável de estado (taxa de escorregamento adimensional)	14
Tabela 2.2 - Condições de contorno para a equação da condução de calor, na superfície	28
Tabela 4.1 - Temperaturas numérico-experimentais, T_i' (em K), para os conjuntos A, B e C de termopares	78
Tabela 4.2 - Temperaturas numérico-experimentais, T_i' (em K), para os conjuntos D, E, F, G e H de termopares	79
Tabela 4.3 - Valores de $F(Q, h_b, h_{conv})$, Q , h_b e h_{conv} para incerteza de 0,0%	80
Tabela 4.4 - Valores de $F(Q, h_b, h_{conv})$, Q , h_b e h_{conv} para incerteza de 1,0%	80
Tabela 4.5 - Taxa de calor Q_{best} (W) obtida com incertezas de 0,0% e 1,0%, para os diferentes conjuntos de termopares	82
Tabela 4.6 - Coeficiente de transferência de calor na superfície inferior da placa $h_{b,best}$ (W/(m ² .K)) obtida com incertezas de 0,0% e 1,0%, para os diferentes conjuntos de termopares	83
Tabela 4.7 - Coeficiente de convecção natural $h_{conv,best}$ (W/m ² .K) obtida com incertezas de 0,0% e 1,0%, para os diferentes conjuntos de termopares	83
Tabela 4.8 - Comparação das temperaturas calculadas com os valores de Q_{best} , $h_{tcb,best}$ e $h_{conv,best}$ em relação aos valores “reais” para o conjunto de termopares D	84
Tabela 4.9 - Raios dos volumes mostrados na Fig. 4.20	86
Tabela 4.10 - Raios médios, fluxos de calor e taxas de calor para os 12 volumes	86
Tabela 4.11 - Valores otimizados de h_b e h_{conv}	88
Tabela 4.12 - Valores otimizados de Q_n	89

1. INTRODUÇÃO

1.1. Motivação

A atual prática de manufatura é amplamente guiada por especificações e procedimentos. Os requisitos de engenharia são traduzidos em especificações de componentes, as quais determinam os padrões de qualidade do componente. A partir daí, um especialista em manufatura interpreta esses padrões de qualidade, traduzindo-os em especificações e procedimentos de processos. As estratégias de controle usadas para fabricar o componente meramente asseguram que as especificações de fabricação serão utilizadas; nenhum mecanismo existe para o controle em tempo real dos padrões de qualidade por si mesmos. Portanto, o resultado de toda atividade de manufatura é avaliado por um ou mais passos de inspeção, os quais verificam que certos atributos da peça estão de acordo com os padrões de qualidade previamente determinados. Os atuais métodos de inspeção tais como radiografia, medição tridimensional, avaliação ultrassônica, inspeção por líquido penetrante, e inspeção por correntes parasitas são feitas após a fabricação da peça. Como resultado, tempo e custo significativos são investidos no componente antes da sua qualidade ser avaliada. Além disso, os possíveis resultados da inspeção tradicional estão limitados em aceitar a peça, rejeitá-la, ou tentar um processo de re-trabalho. Esta análise guiada por procedimentos fornece praticamente nenhuma idéia relacionada às causas dos defeitos e nenhum mecanismo de correção objetivamente definido que impeça a sua recorrência (Amado-Becker, A. F. *et al.*, 2007).

A implementação da avaliação e controle em tempo real do processo de manufatura inclui a solução de problemas inversos. Por exemplo, medidas remotas de temperaturas podem ser utilizadas para determinar a distribuição de fontes de energia em Soldagem por Fricção Linear, também conhecida como Soldagem por Fricção e Mistura Mecânica (do inglês, *Friction Stir Welding*, FSW). Assim, essa distribuição de energia determinada pelo método inverso pode ser utilizada para guiar simulações termo-mecânicas das características da peça soldada, tais como tensões residuais, dureza e micro-estrutura, ou ainda respostas estruturais extremas como vida em fadiga. A avaliação e controle em tempo real deste tipo de soldagem levará à obtenção de características específicas da peça soldada, uma vez que tais características são dependentes do comportamento da fonte de energia, a qual está relacionada com os parâmetros de soldagem que serão avaliados e controlados em tempo real (por exemplo, velocidade de translação da ferramenta).

1.2. Revisão Bibliográfica: Soldagem por Fricção Linear

O interesse em Soldagem por Fricção Linear tem aumentado significativamente ao longo dos últimos anos. Isto se deve ao fato de que o processo tornou possível implementar a vantagem de união de materiais em estado sólido para placas e perfis de alumínio, e mais recentemente também algumas ligas de aço, levando a projetos de novos produtos previamente inviáveis.

A modelagem térmica desse processo tem sido desde o final dos anos de 1990 uma parte central na modelagem de Soldagem por Fricção Linear. Uma razão para isso é que muitas propriedades do material soldado são função direta do histórico de temperaturas da peça de trabalho. Tal modelagem pode ter diferentes abordagens: experimental, analítica e numérica.

Em relação à abordagem analítica, Gould *et al.* (1996) desenvolveram um modelo analítico para Soldagem por Fricção Linear baseado na equação de Rosenthal (Rosenthal e Schemerber, 1938), a qual descrevia o campo de temperatura em estado quasi-permanente em uma placa semi-infinita devido a uma fonte de calor em movimento.

Ainda, uma proposta para expressar analiticamente a geração de calor em um processo de Soldagem por Fricção Linear foi feita por Schmidt *et al.* (2003). Tal expressão incluía contribuições de geração de calor de superfícies específicas da ferramenta. A configuração de ferramenta apresentada consistia em um ombro cônico e um pino cilíndrico, a qual tornou necessária a modificação nas expressões analíticas de geração de calor para Soldagem por Fricção Linear conhecidas previamente da literatura. Nesse trabalho, uma variável de estado do contato foi definida para descrever a condição na interface de contato, relacionando as velocidades do material da peça à velocidade do segmento de superfície da ferramenta que estavam em contato. As condições de escorregamento, de aderência, e de escorregamento / aderência parciais foram descritas, assim como a respectiva geração de calor para cada condição. A variável de estado do contato foi introduzida na expressão analítica para geração de calor para acomodar diferentes condições de contato e a expressão final para a geração de calor demonstrou uma flexibilidade para assumir diferentes condições de contato. A estimativa analítica de geração de calor se correlacionou com a geração de calor experimental, tanto quando se assumia condição de escorregamento quanto de aderência. Para a condição de escorregamento, um coeficiente de atrito que ficava dentro de uma faixa razoável de valores conhecidos para o contato entre metais foi usado para estimar a geração de calor experimental. Assumindo a condição de aderência, uma tensão cisalhante de escoamento, a qual é descritiva para o material da peça soldada em elevadas temperaturas, foi usada para correlacionar os valores. Através desta expressão analítica, concluiu-se que a falta de proporcionalidade entre a força de mergulho experimental da ferramenta e a geração de calor experimental sugere que a condição de

aderência ou uma condição próxima dessa está presente na interface entre a ferramenta e a matriz da peça soldada.

Diferentes autores reportaram estudos térmicos de Soldagem por Fricção Linear com abordagem numérica. Um modelo numérico tridimensional do processo de Soldagem por Fricção Linear foi apresentado em Ulysse (2002) aplicado à soldagem de placas de AA 7050-T7451 com espessura de 19,1 mm, com o objetivo de melhorar a compreensão do processo. Os resultados foram considerados satisfatórios pelo autor, uma vez que as temperaturas medidas experimentalmente (extraídas da literatura publicada) e aquelas previstas pela modelagem baseada no método de elementos finitos ficaram muito próximas, embora as temperaturas medidas tenderam a serem superestimadas pelo modelo. A partir desse estudo, verificou-se que o aumento na velocidade de translação tem o efeito de reduzir as temperaturas do processo e aumentar a magnitude das forças sobre a ferramenta, enquanto o aumento da velocidade de rotação tem o efeito oposto.

Para modelar a transferência de calor tridimensional transiente para a Soldagem por Fricção Linear, Song e Kovacevic (2002) introduziram um sistema de coordenadas em movimento, evitando a necessidade de modelar uma fonte de calor em movimento. Esse sistema de coordenadas foi tratado como estacionário em relação à ferramenta em movimento e o sistema de equações diferenciais foi resolvido numericamente com o método de diferenças finitas. Nesse trabalho, os seguintes períodos durante o processo de Soldagem por Fricção Linear foram considerados: o período de penetração da ferramenta, o período de soldagem, e o período de extração da ferramenta. Além disso, os autores consideraram a entrada de calor no sistema sendo dada por expressões analíticas tanto para o ombro quanto para o pino da ferramenta, e os materiais da peça de trabalho, a qual tinha 12,7 mm de espessura, e da ferramenta eram Al 6061-T6 e aço ferramenta H-13, respectivamente.

Em Kamp *et al.* (2007), os autores utilizaram o *software* de modelagem térmica TS4D (desenvolvido por Mackwood, 2001) para prever os perfis de temperatura ao longo de todo o processo de soldagem. TS4D é um modelo de diferenças finitas que trata a ferramenta de Soldagem por Fricção Linear como uma fonte de calor cujo formato e entrada de calor é calibrado pela comparação entre as previsões do modelo e medidas de termopares. Após a obtenção dos campos de temperatura, foram aplicados modelos de análise micro-estrutural e de resistência mecânica, considerando-se placas de Al 7449 com espessura de 40 mm soldadas por fricção linear, e após a calibragem destes modelos através de dados experimentais, foi possível verificar a validade dos modelos para outras ligas de alumínio da série 7000 e de diferentes espessuras.

A determinação da microestrutura e da dureza de peças de alumínio AA6082 e AA7108 soldados pelo processo de Soldagem por Fricção Linear foi investigada por Frigaard *et al.* (2001). Em seus estudos, um modelo numérico tridimensional de transferência de calor baseado no método de diferenças finitas foi desenvolvido, no qual a imposição de calor na peça sendo soldada era dada analiticamente, sendo as principais variáveis o coeficiente de atrito entre a peça de trabalho, o qual foi considerado constante durante o processo, e a ferramenta, e a rotação da ferramenta. O modelo térmico foi calibrado através da comparação com resultados experimentais e seus resultados foram aplicados aos modelos de determinação da microestrutura e dureza, sendo os resultados também validados experimentalmente.

De acordo com Soundararajan *et al.* (2005), a condutância de contato entre a peça de trabalho e a placa de suporte depende da temperatura e da pressão de contato entre elas, e varia em uma faixa não-uniforme com valores decrescentes a partir da região sob a ferramenta na peça de trabalho. Devido ao movimento da ferramenta, tal condutância varia ao longo da soldagem, uma vez que a tensão de contato também varia, sendo assim um modelo termo-mecânico foi desenvolvido com a ferramenta e a peça de trabalho usando carregamento mecânico e tensões térmicas para prever o desenvolvimento efetivo de tensões na parte inferior da peça de trabalho. Para isso, os autores resolveram o problema térmico, utilizando o método de elementos finitos para solução das equações de condução de calor na ferramenta e na peça de trabalho, realizando validação experimental. Em seguida acoplaram o modelo térmico ao modelo mecânico, o qual fornece as tensões de contato na superfície inferior da placa e permite a determinação da condutância de contato para cada passo de tempo ao longo da soldagem e do movimento da ferramenta. A comparação entre os perfis de temperatura resultante do uso de condutância adaptativa e uniforme e os resultados experimentais mostraram claramente a maior precisão do modelo proposto nesse estudo.

Os elementos básicos da modelagem térmica de Soldagem por Fricção Linear são brevemente apresentados em Schmidt e Hattel (2007), onde foi proposto um novo modelo termo pseudo-mecânico no qual a tensão de escoamento da peça de trabalho, a qual é dependente da temperatura do material de solda, é o parâmetro principal considerado para a geração de calor. Essa modelagem fornece resultados bastante encorajadores quando comparados aos modelos térmicos existentes mais clássicos de Soldagem por Fricção Linear assim como comparados com medidas experimentais de temperatura, fazendo com que a confiança e também a aplicabilidade de modelos unicamente térmicos sejam ampliadas.

Inserido na abordagem numérica está o método de análise inversa do processo de transferência de calor em Soldagem por Fricção Linear. Este tipo de análise leva em

consideração todas as abordagens anteriormente comentadas, ou seja, experimental (medições de temperaturas e de forças, por exemplo), analítica (para modelagem da fonte de calor) e numérica.

Chao *et al.* (2003) estudaram o problema da transferência de calor na Soldagem por Fricção Linear de duas placas de topo de 8,1 mm de espessura primeiramente tratando-o como um problema de valor de contorno padrão e então resolvendo uma aproximação inversa combinando estudos experimentais e numéricos. A essa aproximação inversa, os autores deram a denominação de “melhor ajuste”. Foram considerados dois casos de soldagem: soldagem normal (velocidade de rotação da ferramenta de 240 rpm e velocidade de translação da ferramenta de 2,36 mm/s) e soldagem fria (velocidade de rotação da ferramenta de 240 rpm e velocidade de translação da ferramenta de 3,32 mm/s). Na análise térmica da ferramenta, fabricada de aço ferramenta M2, as temperaturas na sua superfície foram medidas durante a soldagem em cinco posições utilizando termopares tipo K montados sobre anéis de escorregamento. Em seguida, uma análise de elementos finitos em estado permanente foi feita usando condições de contorno estimadas (fluxo de calor na ferramenta devido ao atrito entre a ferramenta e a peça de trabalho, e o coeficiente de convecção), as quais são ajustadas até que as temperaturas calculadas sejam próximas das temperaturas previamente medidas. O conjunto dos valores estimados que fornecem o melhor ajuste para as temperaturas medidas foi considerado como os valores “reais”, os quais são de $10 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ para o coeficiente de convecção em ambos os casos normal e frio, e as taxas de calor gerada pelo atrito entre a ferramenta e a peça de trabalho são 86 W e 85 W, para as soldagens normal e fria, respectivamente. Segundo os autores, o motivo pelo qual a taxa de calor para a soldagem fria é superior àquela para soldagem normal é que a ferramenta se movimenta mais rápido no caso da soldagem a frio e, portanto, existe mais alumínio em volume para absorver o calor dentro de um período fixo de tempo. Já para a peça de trabalho, feitas de alumínio AA2195, um modelo com fonte de calor em movimento com um fluxo de calor constante foi utilizado. O procedimento do “melhor ajuste” utilizado para a ferramenta foi também aplicado para a peça de trabalho. Temperaturas transientes para algumas posições na peça de trabalho foram medidas experimentalmente durante a Soldagem por Fricção Linear usando nove termopares tipo K. Análises de elementos finitos tri-dimensional assumindo diferentes entradas e saídas de calor foram executadas para a peça de trabalho, de tal forma que o conjunto de condições de contorno “melhores ajustadas” com as temperaturas medidas forneceram a taxa de calor imposta pelo atrito entre a ferramenta e a peça de trabalho, o valor de interesse neste estudo. Nesse caso, o coeficiente de convecção utilizado foi de $30 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$, típico para convecção natural entre alumínio e ar. Um aspecto importante desse estudo está na análise da transferência de calor na superfície inferior da peça de trabalho. Naquela região, devido à peça ser fixada a uma placa de suporte feita de aço e ainda pelo suporte da ferramenta

usada na Soldagem por Fricção Linear, algumas resistências condutivas de contato são difíceis de calcular devido à falta de dados físicos relacionados à resistência de contato na interface inferior, assim, a superfície inferior foi modelada com um coeficiente de transferência de calor por convecção fictício, para levar em conta o fluxo de calor através da interface de contato. Pelo procedimento do “melhor ajuste”, o calor imposto ao sistema é de 1740 W na soldagem normal e 1860 W na soldagem fria, e o coeficiente de convecção fictício vale 350 W/(m².K) para ambos os casos. Os autores concluíram o trabalho destacando que pouco menos de 5% do calor total gerado pelo atrito na interface entre a ferramenta e a peça de trabalho flui para a ferramenta e 95% do calor total flui para a peça de trabalho, sendo que alguns dos principais fatores que contribuem para esse comportamento são o fato da condutividade térmica do alumínio ser superior à do aço, 90 versus 20 W/(m.K), logo o calor flui mais rápido para o lado do alumínio a partir da superfície de contato, e também o fato de que a peça de trabalho é muito grande em relação à ferramenta, atuando como um sorvedouro de calor.

Simulações tridimensionais não-lineares térmicas e termomecânicas para a Soldagem por Fricção Linear de aço inoxidável 304L usando a análise de elementos finitos foram realizadas por Zhu e Chao (2003). Nesse estudo, dois casos de soldagens com velocidade de rotação da ferramenta de 300 e 500 rpm foram considerados, ambos com velocidade de translação da ferramenta de 1,693 mm/s. Os autores assumiram um fluxo de calor linearmente distribuído na direção radial do ombro da ferramenta, sendo função dos diâmetros do ombro e do pino da ferramenta, e da energia térmica imposta ao sistema, a qual foi determinada pela análise inversa. Além da taxa de calor, a análise inversa determinou também o coeficiente de transferência de calor na superfície inferior da placa, modelado como um coeficiente de convecção fictício. Baseado em dados experimentais obtidos através de nove termopares do tipo K, o método de análise inversa utilizado nesse trabalho foi feito da seguinte forma: (1) estimou-se um valor para o coeficiente de convecção fictício; (2) estimou-se um valor para a energia térmica imposta ao sistema; (3) resolveu-se a equação da condução do calor tridimensional transiente utilizando o método de elementos finitos; (4) obtiveram-se numericamente as temperaturas durante a soldagem para as mesmas posições nas quais os termopares estavam localizados na análise experimental; (5) compararam-se os valores das temperaturas numéricas com aqueles obtidos experimentalmente; (6) ajustaram-se os valores da energia térmica imposta ao sistema e do coeficiente de convecção fictício, e resolveu-se a equação da condução até que os valores das temperaturas numéricas fossem iguais aos valores das temperaturas experimentais, dentro de um critério de convergência. Após a determinação numérica dos campos de temperatura durante a Soldagem por Fricção Linear, a análise termo-mecânica foi executada, na qual foi empregada a teoria da plasticidade incremental, a qual visa determinar as tensões residuais na peça de

trabalho. Os resultados obtidos mostraram que as maiores temperaturas durante a soldagem estão dentro do ombro da ferramenta e tem o valor entre 1173 e 1430 K, os quais são muito inferiores à temperatura de fusão de 1723 K do aço inoxidável 304L, o que confirmou que a Soldagem por Fricção Linear de aços é também um processo de junção em estado sólido, como geralmente é aceito para Soldagem por Fricção Linear de ligas de alumínio. Através da comparação dos dados obtidos para as diferentes rotações estudadas, 300 e 500 rpm, foi observado um aumento na temperatura máxima para as posições próximas da linha de solda quando a velocidade rotacional da ferramenta também aumentou, e a diferença da temperatura máxima para a mesma posição foi inferior a 100 K. Em relação aos resultados da análise inversa, para o caso com velocidade de rotação de 300 rpm, a energia térmica imposta ao sistema e o coeficiente de convecção fictício, determinados pelo método inverso proposto, foram de 760 W e 100 W/(m².K), respectivamente, enquanto que para a velocidade rotacional de 500 rpm a energia térmica é de 970 W e o coeficiente convectivo apresentou o mesmo valor.

Ainda neste tipo especial de abordagem à solução do problema térmico em Soldagem por Fricção Linear, o estabelecimento de correlações entre parâmetros, tais como velocidade de rotação, velocidade de translação, e força vertical da ferramenta, e a eficiência térmica do processo foram demonstradas por Vilaça *et al.* (2006) através do uso de um código intitulado *iSTIR*, o qual resolve analiticamente o problema da transferência de calor. Esse código foi usado na implementação de uma análise inversa, usando para isso resultados experimentais em conjunto com o modelo analítico. Na formulação no *iSTIR*, o fluxo de calor durante o processo de Soldagem por Fricção Linear é calculado com base em soluções da equação diferencial para condução do calor em um corpo sólido, formulada para uma fonte de calor pontual, considerada como concentrada à meia-espessura da placa, simulando a localização típica do centro da zona de mistura e transladando com uma velocidade linear constante. Nesse trabalho, foi utilizada uma aproximação inversa, na qual os campos térmicos reais resultantes das soldas foram medidos experimentalmente, e então usados como dados de entrada para o código *iSTIR*. Este processo permitiu que fosse determinada a porção da potência mecânica perdida e dissipada como calor, permitindo assim o estabelecimento da eficiência térmica do processo de Soldagem por Fricção Linear, a qual é dependente da velocidade de rotação, da velocidade de translação, e da força vertical da ferramenta. Os principais resultados desse estudo foram: (1) a avaliação da qualidade de juntas soldadas por fricção linear através da estimativa da eficiência térmica do processo em estado-permanente é possível, mas para transferir essas realizações para a prática industrial deverá ser estabelecida sistematicamente uma extensa base de dados de correlações de eficiência térmica para típicas condições industriais, por exemplo os materiais, espessuras, geometrias de ferramenta, e forças verticais para baixo usados mais frequentemente; (2) a

eficiência térmica do processo de Soldagem por Fricção Linear tem valores típicos que variam entre 89% e 95%; (3) a potência mecânica entregue pela ferramenta para as peças durante o processo de soldagem aumenta com a redução da razão do passo de soldagem (velocidade de rotação dividida pela de translação); (4) a taxa de calor perdida nas peças durante a soldagem aumenta conforme a razão do passo de soldagem diminui, ou seja, a entrada de calor aumentou conforme as condições de Soldagem por Fricção Linear se tornaram mais quentes; (5) a potência mecânica e a taxa de calor não mostram qualquer dependência significativa sobre a força vertical da ferramenta, para as faixas de forças testadas.

1.3. Contribuição do Trabalho

O caso particular da Soldagem por Fricção Linear é estudado tendo em vista uma futura aplicação de um processo de avaliação e controle em tempo real, visando a obtenção de determinadas características mecânicas da peça soldada conforme discutido na Seção 1.1 acima. Esta dissertação apresenta como objetivo estudar o mecanismo de transferência de calor durante o processo de Soldagem por Fricção Linear através da utilização de um método numérico para solução das equações governantes do processo, o método dos volumes finitos, em conjunto com um método de otimização, o método de Otimização Extrema Generalizada, tendo dessa forma uma análise inversa do problema. Esta análise inversa será a base para determinação de parâmetros relativos à transferência de calor na peça, tais como a fonte de calor e os coeficientes de transferência de calor. Esta fonte de calor é o parâmetro principal que governa a transferência de calor durante o processo de soldagem, e é implementada de duas formas: através de uma expressão analítica retirada da literatura publicada, e através de implementação discreta em alguns volumes de controle. Um ponto importante no presente trabalho é a análise da sensibilidade relacionada ao posicionamento dos leitores de temperatura, os quais são utilizados como dados de entrada na análise inversa. Esta sensibilidade é calculada através da determinação da variação da temperatura em pontos específicos sobre a peça durante a soldagem, fazendo-se variar o valor da fonte de calor e dos coeficientes de transferência de calor no entorno de um valor médio, dessa forma os pontos com maiores valores de sensibilidade apresentam maior variação na temperatura quando a fonte de calor ou os coeficientes sofrerem alguma alteração. Este cálculo de sensibilidade é de grande importância uma vez que a solução do problema inverso se dá com valores de temperatura como dados de entrada, e com os valores da fonte de calor como os principais dados de saída. Até o momento, os trabalhos publicados na literatura não possuem uma fundamentação precisa da análise inversa do problema, sendo abordados somente problemas inversos com, no máximo, duas variáveis desconhecidas, os quais são

tratados pelo método de “tentativa-e-erro”, diferente do presente estudo que é baseado em uma análise de otimização, uma técnica muito mais flexível e robusta.

1.4. Organização da Dissertação

Esta dissertação divide-se em cinco capítulos. No Capítulo 2 são apresentados os princípios fundamentais da transferência de calor em Soldagem por Fricção Linear, sendo descrita a física relacionada ao processo, os princípios de condução de calor tridimensional transiente e o método de discretização e solução numérica do problema, a saber, o método dos volumes finitos.

No Capítulo 3 são discutidos aspectos relacionados à solução inversa de problemas, incluindo uma discussão sobre problemas inversos e diretos, estado-da-arte em relação à determinação de parâmetros e os métodos de solução, tais como *Recozimento Simulado*, *Algoritmos Genéticos* e *Otimização Extrema Generalizada (GEO)*, sendo este último o método utilizado na solução do problema do presente estudo.

O Capítulo 4 mostra um estudo de caso, o qual apresenta as etapas de (i) validação do código de volumes finitos; (ii) estudo de sensibilidade de malha; (iii) estudo da sensibilidade relacionada ao posicionamento dos leitores de temperatura na peça de trabalho; e por fim (iv) análise inversa utilizando o método de Otimização Extrema Generalizada, a qual é a principal etapa do trabalho, uma vez que nesta seção são mostrados e discutidos todos os resultados referentes à obtenção da distribuição da fonte de calor no ombro da ferramenta.

Para finalizar, no Capítulo 5 estão as conclusões e as perspectivas para trabalhos futuros.

2. FUNDAMENTOS DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM SOLDAGEM POR FRICÇÃO LINEAR

O objetivo deste capítulo é mostrar um aspecto geral da fundamentação teórica que envolve o estudo de transferência de calor através de métodos computacionais da Soldagem por Fricção Linear. Dessa forma, esse capítulo é dividido em três seções: a primeira trata da física da Soldagem por Fricção Linear relacionada ao processo de transferência de calor (Schmidt *et al.*, 2003; Schmidt e Hattel, 2007; Soundararajan *et al.*, 2005); a segunda aborda o processo físico da transferência de calor tridimensional transiente (Özişik, 1990); e a terceira mostra o método dos volumes finitos (Maliska, 1995). Note que este capítulo pode ser considerado um resumo da teoria sobre o estudo da transferência de calor na Soldagem por Fricção Linear, e deve-se observar que nem todas as equações e resultados aqui apresentados são utilizados diretamente no presente trabalho.

2.1. Física da Soldagem por Fricção Linear

Soldagem por Fricção Linear é um processo de junção em estado sólido desenvolvido em 1991 pelo *The Welding Institute*, Cambridge, UK (Thomas *et al.*, 1991). As pesquisas em Soldagem por Fricção Linear na década passada focaram principalmente nas propriedades das juntas soldadas por este processo. Trabalhos experimentais e de modelagem têm sido estabelecidos para caracterizar as diferentes zonas na área da junta, por exemplo, a zona afetada pelo calor (*Heat Affected Zone* - HAZ) conhecida da soldagem a arco convencional. A presença de um núcleo e uma zona termo-mecanicamente afetada (*Thermo-mechanically Affected Zone* - TMAZ) são características específicas do processo de Soldagem por Fricção Linear, o que faz com que a descrição das propriedades de soldagem seja complexa. As propriedades mecânicas de uma junta Soldada por Fricção Linear, ou seja, a resistência mecânica e a dureza, são propriedades relacionadas às diferentes zonas na solda.

As operações durante a Soldagem por Fricção Linear consistem em diversas fases de ação, cada fase pode ser descrita como um período de tempo onde a ferramenta de soldagem e a peça de trabalho estão em movimento relativo. Na primeira operação, a ferramenta é mergulhada verticalmente na linha de junção entre as peças de trabalho, enquanto a ferramenta está em rotação. Em seguida acontece o período de pré-aquecimento, em que a ferramenta é mantida parada em relação à peça de trabalho, mas ainda em rotação. A interação mecânica, devido à diferença de velocidades entre a ferramenta em rotação e a peça estacionária, produz calor através do trabalho de fricção e da deformação plástica. Este calor se dissipa em direção ao

material no entorno, assim, a temperatura aumenta e o material fica mais macio. Após estas duas operações, o processo real de soldagem pode ser iniciado pela movimentação relativa entre a ferramenta e a peça de trabalho ao longo da linha de junção. A velocidade de translação está na faixa entre 1 e 10 mm/s, dependendo dos parâmetros de soldagem, tais como velocidade de rotação, força e profundidade de penetração, ângulo de inclinação da ferramenta, assim como geometria da ferramenta e propriedades da peça. Quando a distância a ser soldada foi percorrida, a ferramenta é extraída da peça de trabalho deixando um furo de saída do pino. Uma representação esquemática da montagem está ilustrada na Fig. 2.1. A Figura 2.2 mostra uma geometria simplificada de ferramenta. Em geral, duas superfícies da ferramenta são necessárias para executar o aquecimento e o processo de movimentação de material na Soldagem por Fricção Linear. A superfície do ombro é a área onde a maior parte do calor é gerado, assim como a superfície do pino é onde as peças de trabalho são unidas e somente uma pequena fração do calor total é gerada. Em segundo lugar, o ombro retém o material sobressalente, evitando a formação de vazios e de porosidades. O ombro cônico da ferramenta ajuda a estabelecer uma pressão sob o ombro, mas também atua como um volume de escape para o material deslocado pelo pino durante a ação de penetração (Fig. 2.2). Projetos mais novos de ferramentas, por exemplo, com multifaces roscadas, produzem condições mais vantajosas para ajudar na junção dos materiais, mas o formato cilíndrico simples do pino tem se provado satisfatório. A altura do pino é limitada pela espessura da peça de trabalho; o topo do pino não deve penetrar até a parte inferior da peça de trabalho, podendo danificar a placa de suporte (Schmidt *et al.*, 2003).

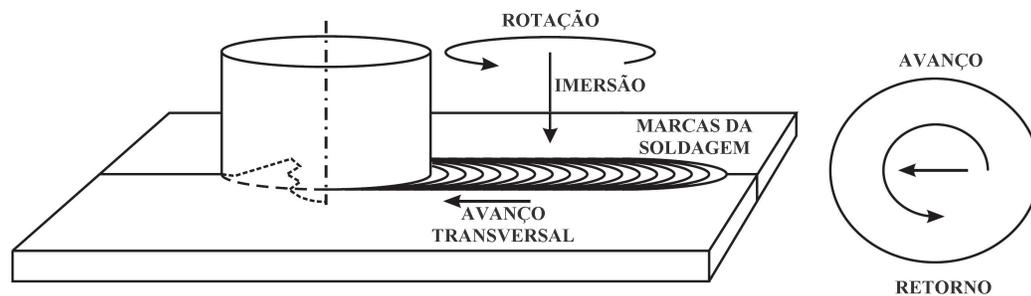


Figura 2.1. Esquema de montagem e definição de orientações (adaptado de Schmidt *et al.*, 2003).

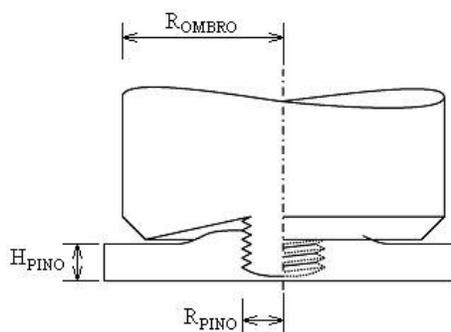


Figura 2.2. Vista lateral da ferramenta de Soldagem por Fricção Linear mostrando o ombro cônico e o pino com rosca (adaptado de Schmidt *et al.*, 2003).

O processo de Soldagem por Fricção Linear por si só é altamente afetado pela geração e fluxo de calor. De um ponto de vista de modelagem, a modelagem térmica de Soldagem por Fricção Linear pode ser considerada a base de todos os outros modelos dos processos, seja este micro-estrutural, dinâmica de fluidos computacional (CFD), ou termomecânico. No processo de Soldagem por Fricção Linear os parâmetros de soldagem são todos escolhidos de tal forma que o amaciamento do material permita a deformação mecânica e o escoamento de material. Entretanto, diferente de muitos outros processos termomecânicos, os mecanismos de Soldagem por Fricção Linear são completamente acoplados, i.e., a geração de calor está relacionada ao escoamento de material e às condições de atrito/contato e vice-versa. Em teoria, um modelo térmico sozinho não pode prever a distribuição ou o histórico de temperatura sem conhecimento prévio da geração de calor, uma vez que os mecanismos fundamentais da Soldagem por Fricção Linear não fazem parte de um modelo térmico puro. Por esta razão, diversas expressões analíticas tem sido dadas na literatura para a geração de calor como uma função da geometria da ferramenta e dos parâmetros de soldagem, tais como o raio da ferramenta e a velocidade de rotação (Schmidt e Hattel, 2007). Nas próximas seções (Seção 2.1.1 e Seção 2.1.2) serão discutidos aspectos relacionados à determinação de expressões para geração de calor, usando para isso as condições de contato entre a ferramenta e a peça de trabalho.

Um outro aspecto importante a ser considerado na análise numérica da transferência de calor em Soldagem por Fricção Linear é a transferência de calor entre a peça de trabalho e a placa de suporte, a qual será discutida da Seção 2.1.3.

2.1.1. Condições de Contato no Processo de Soldagem por Fricção Linear (Schmidt *et al.*, 2003)

A parte mais crítica na modelagem numérica do processo de Soldagem por Fricção Linear é a condição de contato. Neste caso, a lei de atrito de Coulomb é aplicada para descrever as forças

cisalhantes entre as superfícies da ferramenta e da peça. Em geral, a lei estima a tensão cisalhante de atrito como

$$\tau_{\text{fricção}} = \mu p = \mu \sigma \quad (2.1)$$

onde μ é o coeficiente de atrito, p e σ são as pressões de contato. Analisando a condição de contato de duas superfícies infinitesimais em contato, a lei de Coulomb predita o movimento mútuo entre os dois segmentos, ou seja, se eles escorregam ou se aderem. A superfície superior do segmento se origina da ferramenta e se move com velocidade ωr , onde ω é a velocidade de rotação e r é a distância da superfície do segmento até o eixo de rotação. A superfície inferior do segmento se origina da matriz (peça de trabalho), e a velocidade é parte da solução. Assume-se que a matriz está estacionária, e o contato será iniciado. Aplicando um deslocamento normal na ferramenta, produz-se uma resposta de pressão mútua da matriz e da ferramenta, a qual altera a pressão de contato a partir de zero até uma pressão dependente do estado.

As seguintes condições de contato podem ser consideradas:

- *Condição de aderência:* A superfície da matriz irá aderir à superfície da ferramenta em movimento, se a tensão cisalhante de atrito exceder a tensão cisalhante de escoamento da matriz. Neste caso, o segmento da matriz irá acelerar ao longo da superfície da ferramenta (finalmente recebendo a velocidade da ferramenta), até que um estado de equilíbrio seja estabelecido entre a tensão cisalhante de contato e a tensão cisalhante interna na matriz. Neste ponto, a condição de aderência total estacionária é cumprida. Em termos da lei de Coulomb convencional, o coeficiente de atrito estático relaciona as tensões reativas entre as superfícies.

- *Condição de escorregamento:* Se a tensão cisalhante de contato for menor do que a tensão cisalhante de escoamento da matriz, o segmento da matriz irá cisalhar suavemente até uma deformação elástica estacionária, onde a tensão de cisalhamento se iguala à tensão cisalhante de contato dinâmico. Este estado é referido como condição de escorregamento.

- *Escorregamento e Aderência Parciais:* O último estado possível entre as condições de escorregamento e aderência é um estado misto destes dois. Neste caso, o segmento da matriz se acelera para uma velocidade inferior à velocidade da superfície da ferramenta, onde se estabiliza. O equilíbrio se estabelece quando a tensão cisalhante de contato “dinâmico” se iguala à tensão interna cisalhante de escoamento devido a uma taxa de deformação plástica quasi-estacionária.

Esta é referida como condição parcial de escorregamento e aderência. Neste modelo, não existe diferença entre os coeficientes de atrito dinâmico e estático.

É conveniente definir um variável de estado de contato, δ , a qual relaciona a velocidade dos pontos de contato na superfície da matriz em relação ao ponto em contato com a ferramenta. Este parâmetro é um taxa de escorregamento adimensional definida como

$$\delta = \frac{v_{matriz}}{v_{ferramenta}} = 1 - \frac{\dot{\gamma}}{v_{ferramenta}} \quad (2.2)$$

$$\dot{\gamma} = v_{ferramenta} - v_{matriz} \quad (2.3)$$

onde $\dot{\gamma}$ é a taxa de escorregamento e $v_{ferramenta}$ é a velocidade da ferramenta dependente da posição ωr . A Tabela 2.1. resume a relação entre as diferentes condições de contato. Como visto, δ age como um parâmetro de estado para a condição de contato na interface.

Tabela 2.1. Definição da condição de contato, relação entre velocidade, cisalhamento e variável de estado (taxa de escorregamento adimensional).

Condição	Velocidade da matriz	Velocidade da ferramenta	Tensão de cisalhamento	Variável de estado
Escorregamento	$v_{matriz} = v_{ferramenta}$	$v_{ferramenta} = \omega r$	$\tau_{fricção} > \tau_{escoamento}$	$\delta = 1$
Escorr. / Ader.	$v_{matriz} < v_{ferramenta}$	$v_{ferramenta} = \omega r$	$\tau_{fricção} \geq \tau_{escoamento}$	$0 < \delta < 1$
Aderência	$v_{matriz} = 0$	$v_{ferramenta} = \omega r$	$\tau_{fricção} < \tau_{escoamento}$	$\delta = 0$

2.1.2. Determinação Analítica da Geração de Calor no Processo de Soldagem por Fricção Linear (Schmidt et al., 2003)

Três estimativas analíticas diferentes serão sugeridas, todas elas baseadas na hipótese de tensão cisalhante de contato uniforme $\tau_{contato}$, e mais adiante sendo distinguidas assumindo uma condição de contato específica. Na primeira estimativa, uma condição de aderência ($\delta = 0$) é assumida e na segunda estimativa uma condição de escorregamento puro na interface ($\delta = 1$) descrita pela lei de Coulomb é considerada. No caso da condição de aderência, considera-se que o cisalhamento ocorre em uma camada muito próxima da interface e na condição de

escorregamento ele ocorre na interface de contato. Estes dois tipos de estimativas são distinguidos pelas hipóteses sob as quais a tensão cisalhante de contato $\tau_{contato}$ é introduzida. A terceira estimativa é usada no caso onde a condição de escorregamento e aderência parciais é assumida.

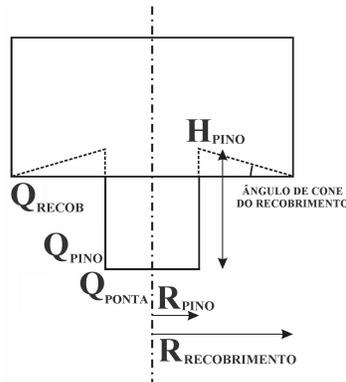


Figura 2.3. Contribuições na geração de calor em estimativas analíticas
(adaptado de Schmidt *et al*, 2003).

Durante o processo de Soldagem por Fricção Linear, calor é gerado próximo ou nas superfícies de contato, as quais possuem geometrias complexas de acordo com a geometria da ferramenta (veja Fig. 2.2), mas para a estimativa analítica, um projeto simplificado de ferramenta com uma superfície do ombro cônica ou horizontal, uma superfície cilíndrica na lateral do pino e uma superfície horizontal plana na ponta do pino é assumida. A superfície cônica do ombro é caracterizada pelo ângulo de cone α , o qual no caso de um ombro plano, é zero. O projeto simplificado da ferramenta é mostrado na Fig. 2.3, onde Q_{OMBRO} é o calor gerado sob o ombro da ferramenta, Q_{PINO} na lateral do pino da ferramenta e Q_{PONTA} na ponta do pino da ferramenta, assim a geração total de calor é $Q_{total} = Q_{OMBRO} + Q_{PINO} + Q_{PONTA}$. Para derivar as diferentes quantidades, a superfície sob investigação é caracterizada como sendo ambas cônica, vertical ou horizontal, e as orientações das superfícies em relação ao eixo de rotação são decisivas para as expressões. As expressões para cada orientação de superfície são diferentes, mas são baseadas na mesma equação para a geração de calor, a qual é originada da Primeira Lei da Termodinâmica:

$$dQ = \omega dM = \omega r dF = \omega r \tau_{contato} dA \quad (2.4)$$

2.1.2.1. Aspectos Gerais da Geração de Calor

As seguintes derivações são estimativas analíticas do calor gerado na interface de contato entre a ferramenta de Soldagem por Fricção Linear em rotação em uma peça de trabalho estacionária. A força mecânica devido ao movimento transversal não é considerada, uma vez que esta quantidade é negligenciável comparada à força de rotação.

Orientações das superfícies

Uma dada superfície da ferramenta em contato com a matriz é caracterizada pela sua posição e orientação em relação ao eixo de rotação da ferramenta (Fig. 2.4). Se o eixo de rotação da ferramenta é vertical (ao longo do eixo z), então uma superfície plana do ombro seria horizontal ou no plano $\theta - r$. Uma superfície cilíndrica na ferramenta seria vertical ou no plano $\theta - z$. Os seguintes subscritos foram usados para caracterizar a orientação da superfície:

- = Horizontal (perpendicular ao eixo de rotação, superfície circular)
- | = Vertical (paralelo ao eixo de rotação, superfície cilíndrica)
- \ = Cônica (inclinado em relação ao eixo de rotação, superfície cônica)

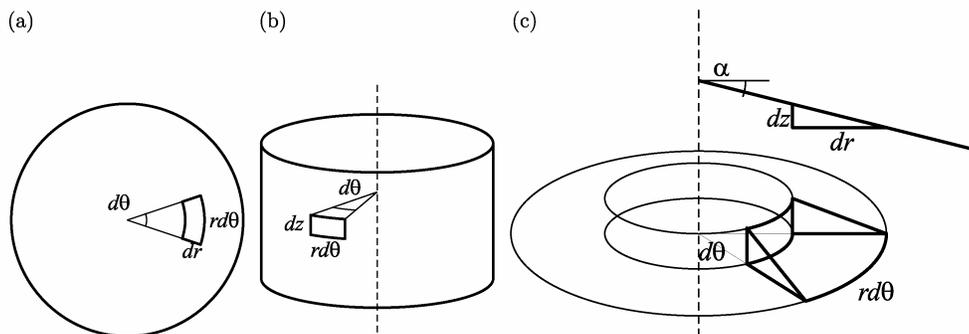


Figura 2.4. Desenho esquemático de orientações de superfícies e segmentos infinitesimais de áreas. (a) Horizontal (vista inferior). (b) Vertical. (c) Cônica/Inclinada. Projeção da área do segmento cônico em segmentos horizontal e vertical (adaptado de Schmidt *et al*, 2003).

Superfície horizontal: a fim de calcular a geração de calor a partir de uma superfície circular horizontal da ferramenta em rotação em torno do seu eixo central, um segmento infinitesimal desta superfície é investigado. A área do segmento infinitesimal $dA_{-} = rd\theta dr$ é exposta a uma

tensão cisalhante de contato uniforme $\tau_{contato}$. Este segmento contribui com uma força infinitesimal de $dF_{-} = \tau_{contato} dA_{-}$ e um torque de $dM_{-} = rdF_{-}$. A geração de calor deste segmento é

$$dQ_{-} = \omega rdF_{-} = \omega r^2 \tau_{contato} d\theta dr \quad (2.5)$$

onde r é a distância da área investigada até o centro de rotação, ω é a velocidade angular e $rd\theta$ e dr são as dimensões do segmento.

Superfície vertical: para uma superfície cilíndrica na ferramenta, a geração de calor de um segmento de superfície infinitesimal com a área de $dA_{|} = rd\theta dz$ é

$$dQ_{|} = \omega rdF_{|} = \omega r^2 \tau_{contato} d\theta dz \quad (2.6)$$

onde dz é a dimensão do segmento ao longo do eixo de rotação.

Superfície cônica: no caso de um segmento de superfície cônico, uma aproximação similar é adaptada como no caso horizontal e vertical. De fato, a contribuição do torque e da força do segmento inclinado é dividida pela contribuição de um segmento horizontal e um vertical, uma vez que a área do segmento inclinado é projetada nos planos principais em relação ao eixo de rotação da ferramenta. A orientação da inclinação é caracterizada pelo ângulo de cone α , o qual é o ângulo entre o plano horizontal ($r - \theta$) e a orientação do segmento no plano r - z .

$$dF_{\setminus} = dF_{-} + dF_{|} \quad (2.7)$$

A projeção da área do segmento inclinado é dada por

$$dz = \tan \alpha dr$$

$$dA_{\setminus} = rd\theta dz = rd\theta \tan \alpha dr \quad (2.8)$$

$$dA_{-} = rd\theta dr$$

Inserindo as Eqs. (2.8) na Eq. (2.7) fica

$$dF_{\setminus} = \tau_{\text{contato}} dA_{-} + \tau_{\text{contato}} dA_{\setminus} = \tau_{\text{contato}} r d\theta dr (1 + \tan \alpha) \quad (2.9)$$

Uma interpretação desta é que a área do segmento é ampliada pela fração de $\tan \alpha$ comparado a um segmento horizontal. A modificação do calor gerado para um segmento inclinado é

$$dQ_{\setminus} = \omega r dF_{\setminus} = \omega r^2 \tau_{\text{contato}} d\theta dr (1 + \tan \alpha) \quad (2.10)$$

É possível caracterizar uma rotação simétrica das superfícies do ombro e do pino da ferramenta de Soldagem por Fricção Linear por estes três tipos de orientações de superfícies. A limitação para descrever ferramentas modernas de Soldagem por Fricção Linear com múltiplas roscas, faces, e entradas é reconhecida.

Geração de Calor no Ombro

A superfície do ombro de uma ferramenta de Soldagem por Fricção Linear moderna é em muitos casos em forma cônica ou convexa. O propósito desta característica geométrica é agir como um volume de escape de material quando o pino for submergido na matriz durante a operação de penetração, secundariamente melhorando a extrusão e a consolidação do material durante a operação de soldagem. Expressões analíticas anteriores para geração de calor incluem um ombro circular plano, em muitos casos omitindo a contribuição do pino. As expressões mostradas a seguir incluem ombros cônicos e superfícies de pinos cilíndricos. Um modelo analítico para a geração de calor que inclua distribuição de pressão não-uniforme ou taxas de deformação dependentes das tensões cisalhantes de escoamento, escoamento de material gerado por roscas, não é levado em conta.

Integrando a Eq. (2.10) sobre a área do ombro a partir de R_{pino} até R_{OMBRO} fornece a geração de calor no ombro, Q_{OMBRO}

$$Q_{\text{OMBRO}} = \int_0^{2\pi} \int_{R_{\text{pino}}}^{R_{\text{OMBRO}}} \omega \tau_{\text{contato}} r^2 (1 + \tan \alpha) dr d\theta = \frac{2}{3} \pi \tau_{\text{contato}} \omega (R_{\text{OMBRO}}^3 - R_{\text{pino}}^3) (1 + \tan \alpha) \quad (2.11)$$

Geração de Calor do Pino

O pino é simplificado para uma superfície cilíndrica com um raio de R_{pino} e uma altura de H_{pino} . O calor gerado pelo pino consiste de duas contribuições: Q_{PINO} da superfície lateral e Q_{PONTA} da ponta do pino. A integração de dQ , ou seja, a Eq. (2.6), sobre a área lateral do pino fornece

$$Q_{PINO} = \int_0^{2\pi} \int_0^{H_{pino}} \omega \tau_{contato} R_{pino}^2 dz d\theta = 2\pi \tau_{contato} \omega R_{pino}^2 H_{pino} \quad (2.12)$$

e integrando o fluxo de calor baseado na Eq. (2.5) sobre a superfície da ponta do pino, assumindo uma ponta plana, fornece

$$Q_{PONTA} = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{pino}} \omega \tau_{contato} r^2 dr d\theta = \frac{2}{3} \pi \tau_{contato} \omega R_{pino}^3 \quad (2.13)$$

As três contribuições são combinadas para dar a geração total de calor estimada Q_{total}

$$Q_{total} = Q_{OMBRO} + Q_{PINO} + Q_{PONTA} = \frac{2}{3} \pi \tau_{contato} \omega \left((R_{ombro}^3 - R_{pino}^3)(1 + \tan \alpha) + R_{pino}^3 + 3R_{pino}^2 H_{pino} \right) \quad (2.14)$$

No caso de um ombro plano, a geração de calor simplifica-se para

$$Q_{total} = \frac{2}{3} \pi \tau_{contato} \omega \left(R_{OMBRO}^3 + 3R_{pino}^2 H_{pino} \right) \quad (2.15)$$

2.1.2.2. Tensão Cisalhante de Contato

A Equação (2.14) é baseada na hipótese geral de uma tensão cisalhante de contato constante conforme mencionado antes, mas os mecanismos por trás da tensão cisalhante de contato dependem se condição de aderência ou de escorregamento está presente.

Tensão Cisalhante para Condição de Aderência

Se a condição de aderência na interface é assumida, a matriz mais próxima à superfície da ferramenta se adere a ela. A camada entre os pontos de material estacionário e o material que se move junto com a ferramenta tem que acomodar a diferença de velocidade por cisalhamento. Usando a formulação do limite superior para calcular a tensão cisalhante para esta deformação acontecer, segue que a tensão é independente da largura da camada de deformação. Isto permite que a camada de deformação, que começa na interface da ferramenta e se estende mais adiante na matriz de solda, seja tratada como uma linha ou uma superfície cisalhante. A posição desta linha ou superfície cisalhante é muito próxima da interface de contato, portanto, a geometria da ferramenta é usada para descrevê-la. A tensão cisalhante de escoamento $\tau_{escoamento}$ é estimada sendo $\sigma_{escoamento}/\sqrt{3}$, onde $\sigma_{escoamento}$ é a tensão de escoamento do material. Este resultado é prontamente obtido comparando o critério de escoamento de von Mises em tensão uniaxial e cisalhamento puro. A tensão cisalhante de contato é então

$$\tau_{contato} = \tau_{escoamento} = \frac{\sigma_{escoamento}}{\sqrt{3}} \quad (2.16)$$

É bem conhecido que a tensão de escoamento é independente da pressão, mas altamente dependente da temperatura. Se a mesma tensão cisalhante de escoamento é aplicada sobre toda a superfície, a hipótese de uma interface isotérmica segue. Isto fornece uma expressão modificada para a Eq. (2.14), assumindo a condição de aderência

$$Q_{total,aderência} = \frac{2}{3} \pi \frac{\sigma_{escoamento}}{\sqrt{3}} \omega \left((R_{OMBRO}^3 - R_{pino}^3) (1 + \tan \alpha) + R_{pino}^3 + 3R_{pino}^2 H_{pino} \right) \quad (2.17)$$

Tensão Cisalhante para Condição de Escorregamento

Assumindo uma condição de atrito na interface onde a superfície da ferramenta e o material soldado estão escorregando um em relação ao outro, a tensão cisalhante de atrito $\tau_{fricção}$ é introduzida na equação geral, Eq. (2.14). A escolha da lei de atrito de Coulomb para descrever a tensão cisalhante estima a tensão crítica de atrito para uma condição de escorregamento como

$$\tau_{contato} = \tau_{fricção} = \mu p = \mu \sigma \quad (2.18)$$

onde μ é o coeficiente de atrito, p e σ são as pressões de contato. Assim, para a condição de escorregamento, a geração total de calor é dada por

$$Q_{total,escorregamento} = \frac{2}{3} \pi \mu p \omega \left((R_{OMBRO}^3 - R_{pino}^3) (1 + \tan \alpha) + R_{pino}^3 + 3R_{pino}^2 H_{pino} \right) \quad (2.19)$$

Tensão Cisalhante para Condição de Aderência e Escorregamento Parciais

A solução analítica para a geração de calor para a condição de escorregamento e aderência parciais é simplesmente uma combinação das duas soluções, respectivamente, com um tipo de função peso. Note que isso só é possível devido à hipótese de uma distribuição uniforme da variável de estado de contato δ sobre toda a superfície de contato. Da condição de escorregamento e aderência parcial segue que a taxa de escorregamento entre as superfícies é uma fração de ωr , reduzindo a geração de calor pela fricção de escorregamento. Isto é contrabalanceado pela dissipação plástica adicional devido à deformação de material. É conveniente definir o parâmetro da função peso como sendo idêntico à variável da condição de contato ou taxa de escorregamento adimensional δ , a qual foi descrita anteriormente neste trabalho. Isto permite uma combinação linear das expressões para escorregamento e aderência

$$Q_{total} = \delta Q_{total,aderência} + (1 - \delta) Q_{total,escorregamento} = \frac{2}{3} \pi (\delta \tau_{escoamento} + (1 - \delta) \mu p) \dots \omega \left((R_{OMBRO}^3 - R_{pino}^3) (1 + \tan \alpha) + R_{pino}^3 + 3R_{pino}^2 H_{pino} \right) \quad (2.20)$$

onde δ é a variável de estado de contato (taxa de escorregamento adimensional), $\tau_{escoamento}$ é a tensão cisalhante de escoamento do material na temperatura de soldagem, μ é o coeficiente de atrito, p é a pressão uniforme na interface de contato, ω é a velocidade angular de rotação, α é o ângulo de cone, R_{OMBRO} é o raio do ombro, R_{pino} é o raio do pino e H_{pino} é a altura do pino. Esta expressão final pode estimar a geração de calor para $0 \leq \delta \leq 1$, correspondendo a escorregamento quando $\delta = 0$, aderência quando $\delta = 1$, e escorregamento e aderência parciais quando $0 < \delta < 1$.

No caso especial onde a condição de escorregamento e o ombro plano são assumidos, a Eq. (2.19) é expressa em termos da força de penetração como

$$Q_{\text{escorregamento, força de penetração}} = \frac{2}{3} \mu \omega F \left(R_{\text{OMBRO}} + 3 \frac{R_{\text{pino}}^2 H_{\text{pino}}}{R_{\text{OMBRO}}^2} \right) \quad (2.21)$$

usando a relação que a pressão é igual força dividido pela área projetada.

2.1.3. Transferência de Calor entre a Peça de Trabalho e a Placa de Suporte (Soundararajan et al., 2005)

A condutância de contato na interface entre a peça de trabalho e a placa de suporte tem uma variação não-uniforme dependente da temperatura e pressão em várias zonas em contato. A tensão de contato ou pressão na interface varia lateralmente e longitudinalmente, pois existe uma força vertical transferida da ferramenta em movimento para a peça de trabalho, uma força horizontal devido ao movimento da ferramenta no eixo x positivo e as braçadeiras nos dois lados da peça de trabalho, e também devido ao desenvolvimento de tensões térmicas na peça de trabalho durante o processo. A superposição do carregamento mecânico sobre a peça de trabalho com a tensão térmica amplifica o componente vertical da tensão durante a soldagem.

A condutância de contato entre a peça de trabalho e a placa de suporte é assumida como sendo uma função da tensão de contato entre elas.

$$h_b = f(s_z) \quad (2.22)$$

em que h_b é o coeficiente de transferência de calor entre a superfície inferior da peça de trabalho e a placa de suporte, e s_z é a tensão de contato no eixo z .

As peças de trabalho são fixadas em seus lados e somente a ferramenta exerce uma pressão na superfície superior. Devido à falta de forças de fixação na superfície superior, existirão áreas de tensões positivas e negativas exibindo a formação de folgas ou grandes decréscimos na pressão de contato na interface da peça de trabalho e da placa de suporte. Isto conduz a uma grande resistência térmica através da interface. Tal resistência térmica irá dominar o processo de transferência de calor quando os corpos em contato forem bons condutores e/ou meio gasoso intersticial (ou vácuo) tiver uma condutividade térmica muito baixa. O coeficiente de convecção equivalente para a interface entre a peça de trabalho e a placa de suporte é calculado baseado na equação:

$$q_b'' = h_b(T_1 - T_2) = Nu_\delta \frac{k}{\delta} (T_1 - T_2) \quad (2.23)$$

em que Nu_δ é o número de Nusselt (igual a 1 quando a transferência de calor se dá somente por condução), k é o coeficiente de condução para o ar/vácuo na folga, δ é a distância de separação entre as placas, T_1 é a temperatura média da peça de trabalho e T_2 é a temperatura da placa de suporte.

2.2. O Problema da Condução de Calor Tridimensional Transiente

Condução é o modo de transferência de calor em que a troca de energia tem lugar da região de alta temperatura para a de baixa temperatura pelo movimento cinético ou pelo impacto direto de moléculas, no caso de fluidos em repouso, e pelo movimento de elétrons, no caso de metais. Em um sólido que seja bom condutor elétrico, um grande número de elétrons livres se move através de uma rede; por isso, materiais bons condutores de eletricidade são bons condutores de calor (por exemplo, cobre, prata, etc).

A lei empírica da condução de calor baseada em observações experimentais foi enunciada por Biot, mas recebe geralmente o nome do matemático e físico francês Joseph Fourier (Fourier, 1822) que a utilizou em sua teoria analítica do calor. Esta lei estabelece que a taxa do fluxo de calor por condução, em uma dada direção, é proporcional à área normal do fluxo e ao gradiente de temperatura naquela direção. Com o fluxo de calor na direção x , por exemplo, a *lei de Fourier* é dada por

$$Q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.24)$$

ou

$$q_x'' = \frac{Q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (2.25)$$

onde Q_x , W, é a *taxa de fluxo de calor* através da área A , m², no sentido positivo dos x , e q_x'' , W/m², é o *fluxo de calor* no sentido positivo dos x . A constante de proporcionalidade k , W/(m.K), é a chamada *condutividade térmica* do material (Özişik, 1990).

2.2.1. As Propriedades Térmicas da Matéria

O uso da lei de Fourier tem como requisito o conhecimento da condutividade térmica. Essa propriedade, classificada como uma das *propriedades de transporte* da matéria, fornece uma indicação da taxa segundo a qual a energia é transferida pelo processo de condução. Ela depende

da estrutura física da matéria, a níveis atômico e molecular, que por sua vez, está relacionada ao seu estado físico.

A partir da lei de Fourier, Eq. (2.25), a condutividade térmica é definida por

$$k \equiv -\frac{q_x}{(\partial T/\partial x)} \quad (2.26)$$

onde se verifica que, para um dado gradiente de temperatura, o fluxo térmico condutivo aumenta com o aumento da condutividade térmica. A condutividade térmica de um sólido é maior do que a de um líquido, que, por sua vez, é maior do que a de um gás. No caso da Soldagem por Fricção Linear, a condutividade de interesse será de materiais sólidos, a saber, a peça de trabalho.

A dependência do valor de k com a temperatura é mostrada na Fig. 2.5 para alguns sólidos metálicos e não-metálicos representativos.

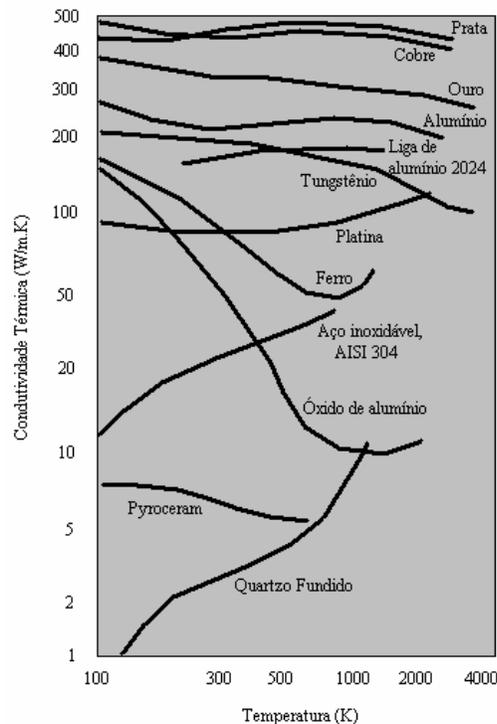


Figura 2.5. Dependência da condutividade térmica com a temperatura para alguns sólidos selecionados (Incropera e Dewitt, 1998).

Além da *condutividade térmica*, durante a análise de problemas de transferência de calor, será necessário o uso de várias outras propriedades da matéria. Essas propriedades são

geralmente conhecidas por propriedades *termofísicas* e incluem duas categorias distintas: as propriedades de *transporte* e as propriedades *termodinâmicas*. As propriedades de transporte incluem os coeficientes das taxas de difusão, como k , a condutividade térmica (usada na transferência de calor); e ν , a viscosidade cinemática (usada na transferência de momento). As propriedades termodinâmicas, por outro lado, dizem respeito ao estado de equilíbrio de um sistema. A densidade (ρ) e o calor específico (c_p) são duas dessas propriedades usadas extensamente na análise termodinâmica. O produto $\rho \cdot c_p$ ($\text{J}/\text{m}^3 \cdot \text{K}$), comumente chamado de *capacidade calorífica volumétrica*, mede a capacidade de um material armazenar energia térmica. Uma vez que substâncias que possuem densidade elevada são tipicamente caracterizadas por reduzidos calores específicos, muitos sólidos e líquidos, que são considerados meios bons para o armazenamento de energia, possuem capacidades caloríficas de magnitude comparável ($\rho \cdot c_p > 1 \text{MJ}/\text{m}^3 \cdot \text{K}$). Ao contrário, devido às suas baixas densidades, os gases são muito pouco adequados para o armazenamento de energia térmica ($\rho \cdot c_p \approx 1 \text{kJ}/\text{m}^3 \cdot \text{K}$).

Na análise da transferência de calor, a razão entre a condutividade térmica e a capacidade calorífica volumétrica é uma importante propriedade termofísica da matéria chamada *difusividade térmica* α , que possui como unidade no SI m^2/s :

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (2.27)$$

Ela mede a capacidade do material de conduzir a energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la. Materiais com valores elevados de α responderão rapidamente nas condições térmicas a eles impostas, enquanto materiais com valores reduzidos de α responderão mais lentamente, levando mais tempo para atingir a uma nova condição de equilíbrio.

2.2.2. A Equação da Condução de Calor

Um dos objetivos principais da análise da condução de calor é determinar o *campo de temperatura* em um meio resultante da imposição de condições em suas fronteiras. Ou seja, deseja-se conhecer a *distribuição de temperatura*, que representa como a temperatura varia com a posição no meio. Uma vez conhecida essa distribuição, o fluxo de calor por condução (fluxo térmico condutivo) em qualquer ponto do meio ou na sua superfície pode ser determinado através da lei de Fourier. Outras importantes grandezas de interesse também podem ser determinadas. Para um sólido, o conhecimento da distribuição de temperatura pode ser usado

para verificar a sua integridade estrutural, através da determinação de tensões térmicas, expansões e deflexões. A distribuição de temperatura também pode ser usada para otimizar a espessura de um material isolante, ou mesmo para determinar a compatibilidade entre revestimentos especiais ou adesivos e a superfície sobre a qual são aplicados.

O procedimento para determinação da distribuição de temperatura segue uma metodologia de se aplicar a exigência de conservação da energia. Ou seja, define-se um volume de controle diferencial, identificam-se os processos de energia que são relevantes, e substituem-se as equações das taxas de transferência de calor apropriadas. O resultado é uma equação diferencial, cuja solução, para um dado conjunto de condições de contorno, fornece a distribuição de temperatura no meio.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.28)$$

A Equação (2.28) é a forma geral, em coordenadas cartesianas, da *equação da condução de calor*. Essa equação, usualmente conhecida como a *equação do calor*, fornece a ferramenta básica para a análise da condução de calor. A partir de sua solução, podemos obter a distribuição de temperatura $T(x,y,z)$ como uma função do tempo. A aparente complexidade dessa expressão não deve obscurecer o fato de que ela descreve uma condição física importante, qual seja, a conservação da energia. Assim deve-se ter uma clara compreensão do significado físico de cada uma das parcelas que aparecem nessa equação. Por exemplo, a parcela $\partial(k \partial T / \partial x) / \partial x$ está relacionada ao fluxo *líquido* de calor por condução *para o interior* do volume de controle na direção da coordenada do eixo x (um processo similar ocorre nos eixos y e z), \dot{q} é a taxa na qual a energia é gerada por unidade de volume do meio, e $\rho c_p \partial T / \partial t$ é a taxa de variação com o tempo da energia sensível (térmica) do meio, por unidade de volume. Portanto, em palavras, a equação do calor, Eq. (2.28), postula que *em qualquer ponto do meio, a taxa líquida de transferência de energia por condução para o interior de um volume unitário somada à taxa volumétrica de geração de energia térmica deve ser igual à taxa de variação da energia térmica armazenada no interior deste volume*.

Com freqüência é possível trabalhar com versões simplificadas da Eq. (2.28). Por exemplo, se a condutividade térmica for constante, a equação do calor transforma-se em

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.29)$$

2.2.3. Condições Iniciais e de Contorno

Para determinar a distribuição de temperatura em um meio, é necessário resolver a forma apropriada da equação do calor. No entanto, tal solução depende das condições físicas existentes nas *fronteiras* do sistema, e, se a situação muda ao longo do tempo (processo transiente), a solução também depende das condições existentes no sistema em um dado *instante inicial*. Com relação às condições nas fronteiras, ou *condições de contorno*, existem várias possibilidades usuais que são expressas de maneira simples em termos matemáticos. Uma vez que a equação do calor é de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais, duas condições de contorno devem ser fornecidas para cada coordenada espacial necessária para descrever o sistema. Como a equação é de primeira ordem em relação ao tempo, apenas uma condição de contorno, chamada *condição inicial*, precisa ser especificada nesta coordenada.

Os três tipos de condições de contorno freqüentemente encontradas em processos de transferência de calor estão resumidos na Tab. 2.2, onde estão especificados para a superfície $x = 0$, em um sistema unidimensional. A transferência de calor se dá na direção positiva do eixo x , com a distribuição de temperatura, que pode ser função do tempo, designada por $T(x,t)$. A primeira condição corresponde a uma situação onde a superfície é mantida a uma temperatura fixa T_{sup} . Essa condição é comumente chamada de *condição de Dirichlet* ou de contorno de *primeira espécie*. Na prática, a situação descrita por esta condição ocorre de forma aproximada quando, por exemplo, a superfície está em contato íntimo com um sólido em fusão ou um líquido em ebulição. Em ambos os casos, existe uma transferência de calor na superfície, que permanece à temperatura do processo de mudança de fase. A segunda condição corresponde à existência de um fluxo térmico fixo ou constante q''_{sup} na superfície. Esse fluxo térmico está relacionado ao gradiente de temperatura na superfície segundo a lei de Fourier, Eq. (2.25). Esta relação é representada por

$$q''_{sup}(0) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{sup} \quad (2.30)$$

em que n representa uma coordenada normal à superfície sendo analisada.

Essa condição é conhecida por *condição de Neumann* ou de contorno de *segunda espécie*, e pode ser obtida através da fixação de um aquecedor elétrico (película fina ou manta) junto à

superfície. Um caso particular dessa condição corresponde a uma superfície *perfeitamente isolada*, ou *adiabática*, para a qual $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\text{sup}} = 0$. A condição de contorno de *terceira espécie* (*condição de Robin*) descreve a existência na superfície de um aquecimento (ou resfriamento) por convecção, e a sua representação matemática é obtida através de um balanço de energia na superfície.

Tabela 2.2. Condições de contorno para a equação da condução de calor, na superfície.

1. Temperatura da superfície constante	
$T(0,t) = T_{\text{sup}}$	(Eq. 2.31)
2. Fluxo térmico na superfície constante	
(a) Fluxo térmico finito	
$-k \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right _{\text{sup}} = q_{\text{sup}}''$	(Eq. 2.32)
(b) Superfície adiabática ou isolada	
$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right _{\text{sup}} = 0$	(Eq. 2.33)
3. Condição de convecção na superfície	
$-k \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right _{\text{sup}} = h[T_{\infty} - T(0,t)]$	(Eq. 2.34)

2.3. Discretização Numérica do Problema – O Método dos Volumes Finitos

O método utilizado na solução da equação do calor para o problema da Soldagem por Fricção Linear é o método de volumes finitos, por se tratar de uma metodologia bastante difundida no estudo de transferência de calor, e será brevemente descrito nesta seção do trabalho.

2.3.1. Aproximação da Equação Geral da Condução

A obtenção das equações aproximadas para problemas tridimensionais (assim como para aqueles uni e bidimensionais) é feita através da integração da equação na forma conservativa no espaço e no tempo (Maliska, 1995). A Figura 2.6 mostra, para a situação tridimensional, o

volume elementar P e seus vizinhos. A equação da condução em três dimensões para regime transiente com termo fonte tem a forma mostrada na Eq. (2.28).

A integração no tempo e no espaço da Eq. (2.28) é feita considerando uma expansão do termo fonte como uma função linear da temperatura. É lógico que tal relação é a de mais alta ordem possível, uma vez que, com a integração das equações, forma-se um sistema linear. Se o termo fonte tiver termos da temperatura ao quadrado, ou outra potência maior, o mesmo requererá iterações para ser atualizado. Considerações sobre a linearização do termo fonte serão fornecidas na Seção 2.3.2, ainda neste capítulo.

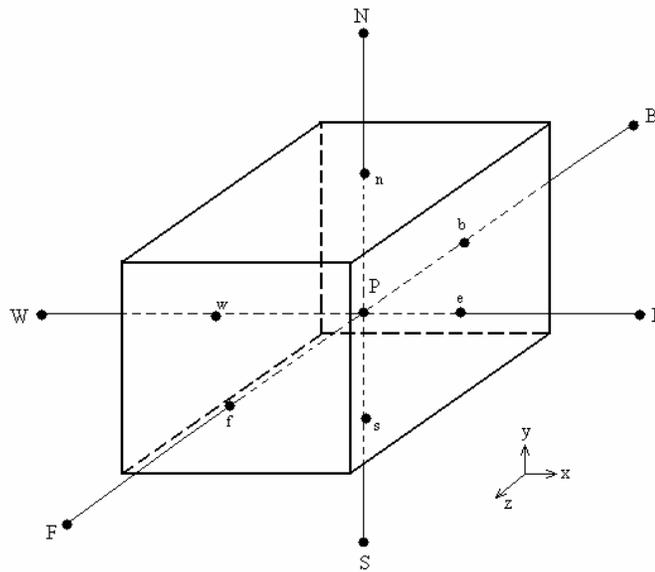


Figura 2.6. Volume elementar e seus vizinhos. Situação tridimensional (Maliska, 1995).

Além disso, para efetuar tal integração, é necessário determinar o comportamento do fluxo de calor nas seis faces do volume elementar (norte, sul, leste, oeste, frente, atrás) ao longo do intervalo de tempo Δt para que a integração possa ser realizada. Dependendo da função escolhida para o comportamento do fluxo no intervalo de tempo, têm-se as formulações implícita e explícita. Assim, a função de interpolação no tempo é dada por (Vielmo, 2006)

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi_p dt = [f\phi_p + (1-f)\phi_p^0]\Delta t \quad (2.35)$$

onde ϕ é uma variável genérica (nesse caso ϕ é a temperatura na face do volume de controle), f é um parâmetro que vale 1 para formulação totalmente implícita e 0 para explícita, o super-índice

0 representa o valor da variável genérica no instante de tempo anterior. A Figura 2.7 mostra três funções de interpolação possíveis, que podem ser representadas pela função. Além da formulação totalmente implícita ($f = 1$) e a explícita ($f = 0$), existem outras funções de interpolação, como, por exemplo, aquela mostrada pela linha tracejada na Fig. 2.7. São funções que podem ser usadas, caso se deseje usar maiores intervalos de tempo e, concomitantemente, seguir o transiente com mais fidelidade. Existe ainda a formulação implícita (f qualquer), na qual, por exemplo, para $f = 0,5$, obtém-se o método de Crank-Nicolson (Maliska, 1995). A diferença principal entre as formulações totalmente implícita e a explícita está no fato de que a primeira sempre atende a regra da positividade dos coeficientes (esse assunto será abordado mais adiante na Seção 2.3.7) enquanto que a segunda necessita de uma relação específica entre a malha espacial e a temporal para que esta regra seja atendida.

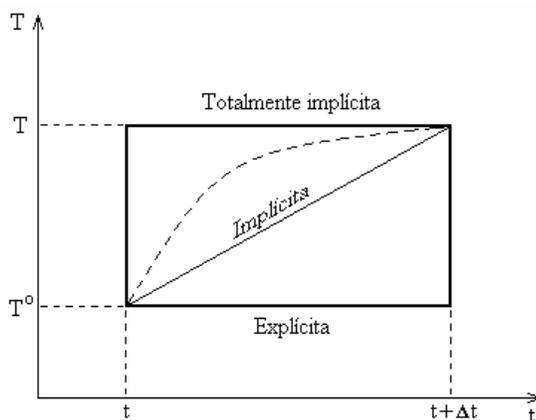


Figura 2.7. Função de interpolação no tempo.

Deve-se, também, escolher uma função de interpolação espacial para a temperatura, uma vez que a mesma precisa ter sua derivada avaliada nas interfaces do volume de controle. Para esse problema físico, onde se têm apenas efeitos de difusão, é natural escolher uma função linear (por exemplo, diferenças centrais) entre os pontos nodais.

A integração da Eq. (2.28) no espaço e no tempo, considerando $\rho c_p = const$ e que T seja constante dentro do volume P , aproximando as derivadas nas interfaces do volume elementar por diferenças centrais e usando uma formulação totalmente implícita, resulta em (Vielmo, 2006):

$$A_p T_p = A_e T_e + A_w T_w + A_n T_n + A_s T_s + A_f T_f + A_b T_b + B \quad (2.36)$$

onde os coeficientes são dados por

$$A_e = \frac{k_e \Delta y_p \Delta z_p}{\Delta x_e} \quad (2.37)$$

$$A_w = \frac{k_w \Delta y_p \Delta z_p}{\Delta x_w} \quad (2.38)$$

$$A_n = \frac{k_n \Delta x_p \Delta z_p}{\Delta y_n} \quad (2.39)$$

$$A_s = \frac{k_s \Delta x_p \Delta z_p}{\Delta y_s} \quad (2.40)$$

$$A_b = \frac{k_b \Delta x_p \Delta y_p}{\Delta z_b} \quad (2.41)$$

$$A_t = \frac{k_t \Delta x_p \Delta y_p}{\Delta z_t} \quad (2.42)$$

$$B = A_p^o T_p^o + S_C \Delta x_p \Delta y_p \Delta z_p \quad (2.43)$$

$$A_p^o = \frac{\rho c_p}{\Delta t} \Delta x_p \Delta y_p \Delta z_p \quad (2.44)$$

$$A_p = A_e + A_w + A_n + A_s + A_f + A_b + A_p^o - S_p \Delta x_p \Delta y_p \Delta z_p \quad (2.45)$$

2.3.2. Linearização do Termo Fonte

A representação das equações de conservação muitas vezes desloca termos importantes para o termo fonte. Nestes casos, cuidados especiais devem ser tomados para que o processo de solução iterativo dos sistemas de equações não divirja.

A primeira regra a ser seguida é procurar fazer com que o termo fonte seja levado em consideração o mais implicitamente possível. Isso significa não mantê-lo constante ao longo do passo iterativo ou passo de tempo. Uma forma de fazer isso é linearizá-lo, tal que a variável em questão, presente no termo fonte, atue implicitamente e não seja apenas substituída pelo seu último valor disponível. Muitas vezes, dependendo da importância do termo fonte, apenas a

linearização não é suficiente, sendo necessário atualizá-lo mais freqüentemente do que o restante dos coeficientes.

O objetivo é obter uma linearização do tipo:

$$S = S_P T_P + S_C \quad (2.46)$$

onde o coeficiente S_P seja negativo. Observa-se pela Eq. (2.46) que S_P é a inclinação da reta $S \times T$. Considerando a função $S \times T$, existem duas possibilidades de comportamento de S com T . A primeira é aquela na qual a tangente é naturalmente negativa, característica da grande maioria dos problemas físicos. Neste caso, o método recomendado de linearização é expandir o termo fonte em série de Taylor como

$$S = S^* + \left. \frac{dS^*}{dT} \right|_P (T_P - T_P^*) \quad (2.47)$$

e determinar S_P e S_C . A segunda é aquela cujo comportamento de $S \times T$ tem derivada positiva. Neste caso, é necessário criar artificialmente uma linearização com S_P negativo. Não é difícil de entender que este processo só é possível através de um aumento, também artificial, em S_C , o que implicará menor velocidade de convergência (Maliska, 1995). Neste trabalho o termo fonte é nulo, uma vez que a imposição da calor gerado pela fricção é implementado como um fluxo de calor na fronteira, desse forma a linearização mostrada acima não é utilizada, ficando como referência da metodologia aplicada ao termo fonte apenas.

2.3.3. Condições de Contorno

A Equação (2.36), que é a equação aproximada para um volume elementar genérico, foi deduzida para um volume interno. Todos os outros volumes internos possuem equações aproximadas idênticas. Para se obter o sistema de equações algébricas completo é também necessário obter as equações para os volumes que estão na fronteira. Existem diversas formas de aplicação das condições de contorno. Uma delas é criar uma malha na qual o ponto central do volume de controle fique sobre a fronteira. Este procedimento dá origem a meio volume de controle perto da fronteira e volumes internos inteiros, conforme pode ser visto na Fig. 2.8.

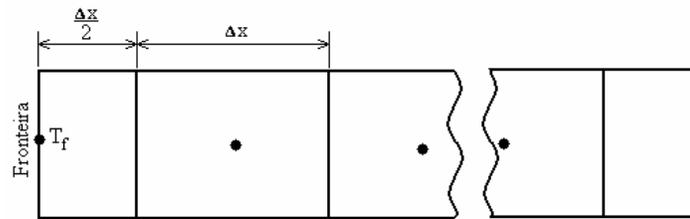


Figura 2.8. Discretização com meio-volume na fronteira.

Dois problemas aparecem com este procedimento. O primeiro deles é a não-uniformidade dos volumes. Para problemas unidimensionais isto não se traduz em maiores dificuldades, pois temos apenas dois meios-volumes. Entretanto, para problemas bidimensionais e tridimensionais teremos volumes inteiros, quarto de volumes e oitavo de volumes. Em uma estrutura computacional mais geral, este fato traz problemas para a uniformidade das sub-rotinas de cálculo dos coeficientes. O segundo problema aparece quando a temperatura de fronteira é conhecida, isto é, T_f é um dado do problema. Neste caso, a aparente vantagem em não ser necessário criar uma equação para o volume de fronteira, uma vez que T_f é conhecida, traduz-se na não-observância dos balanços de conservação, pois para os meios-volumes da fronteira, a conservação da energia (no caso deste problema de condução) não estará sendo observada. Em um problema bidimensional / tridimensional teremos toda uma faixa de volumes de controle não respeitando os princípios de conservação, conforme pode ser visto na Fig. 2.9 para a situação 2D.

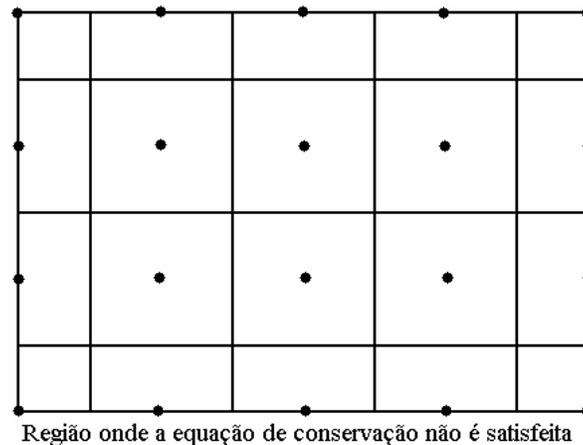


Figura 2.9. Discretização bidimensional com meios-volumes na fronteira.

A seguir, dois procedimentos que respeitam a conservação para todos os volumes são apresentados. O segundo deles é o recomendado por ter mais consistência física e generalidade, sendo o procedimento utilizado no presente trabalho.

O uso de volumes fictícios, conforme mostra a Fig. 2.10, consiste em outra forma de aplicar as condições de contorno. É uma prática atraente e de fácil aplicação, que usa volumes inteiros para todos os volumes, respeitando, portanto, os princípios de conservação para todo o domínio. Todos os volumes do domínio, inclusive os de fronteira, são interpretados como internos, uma vez que são criados os volumes fictícios. A desvantagem é a criação de novas incógnitas, aumentando o tamanho do sistema linear, situação que vai se agravando quando a dimensão do problema aumenta. Em um problema unidimensional com 1.000 incógnitas temos apenas dois volumes fictícios, representando, portanto, 0,5% dos volumes. Na situação bidimensional, também com 1.000 incógnitas, em uma malha de 33×33 , aproximadamente, teremos 132 fictícios, representado 13,2%. Em três dimensões a malha será de $10 \times 10 \times 10$, com 600 volumes fictícios, um aumento expressivo no número de equações do sistema linear. Para uma situação prática comum de uma malha 3D com $30 \times 30 \times 30$ elementos teríamos um aumento de 20% no número de equações.

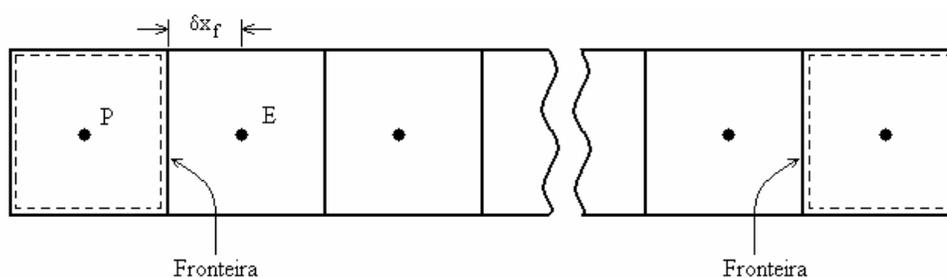


Figura 2.10. Condições de contorno com volumes fictícios.

O procedimento utilizado no presente trabalho, o qual é considerado o mais adequado para implementação das condições de contorno, devido ao seu embasamento físico e à possibilidade de generalização para sistemas coordenados mais complexos, é realizar a integração das equações de conservação também para os volumes de fronteira, da mesma forma realizada para os volumes internos, respeitando a condição de contorno existente. Desta forma, não existe aumento no número de equações e as condições de contorno ficam embutidas nas equações para os volumes de fronteira. Apesar desse método ser apresentado para o sistema cartesiano de coordenadas em um problema unidimensional, sua aplicação é geral.

Neste procedimento, a discretização do domínio é feita com volumes elementares inteiros. Assim, nunca teremos uma variável sobre a fronteira, sendo sempre necessário realizar os balanços para todos os volumes, independentemente do tipo de condição de contorno (Maliska, 1995).

Considere-se a Fig. 2.11, onde o volume de fronteira P é mostrado. O procedimento de obtenção da equação aproximada para o volume P é idêntico àquele usado para os volumes internos, isto é, devemos integrar a equação diferencial no volume. Lembrando que o nosso problema é de condução transiente, a equação que rege este problema é a Eq. (2.36).

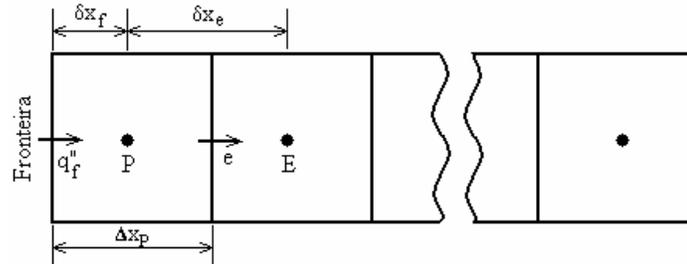


Figura 2.11. Discretização unidimensional com volumes inteiros.

Conforme já visto na Seção 2.2.3, três tipos de condições de contorno são possíveis, as quais são utilizadas no MVF conforme descrito a seguir (Vielmo, 2006):

1. Temperatura prescrita: neste caso tem-se que a temperatura na fronteira, T_f , é a temperatura especificada.

Nos próximos dois casos de condições de contorno, usa-se a seguinte técnica para acelerar a convergência:

- Elimina-se a conexão entre T_p e T_f , fazendo $A_f = 0$.
 - Computa-se no termo fonte o fluxo de calor trocado através da fronteira.
 - Depois de obtida a solução, calcula-se a temperatura da fronteira para pós-processamento.
2. Fluxo prescrito: Nesta situação, o valor de q_f'' é acrescentado ao valor de S_C . Para pós-processar a temperatura da fronteira após a obtenção de T_p , usa-se a seguinte equação:

$$T_f = \frac{q_f'' \Delta x_f}{k_p} \quad (2.48)$$

3. Convecção: Para esta situação física, devemos igualar o calor que chega por convecção com o calor por condução para dentro do volume de fronteira. Desta forma, temos:

$$q_f'' = h(T_\infty - T_f) = k \frac{T_f - T_p}{\Delta x_f} \quad (2.49)$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor por convecção, o qual pode ser também combinado com a forma linearizada do coeficiente de transferência de calor por radiação. Com isso, o novo termo fonte fica:

$$S_C = S_{C,orig} + \frac{T_\infty}{\left(\frac{1}{h} + \frac{\delta x_f}{k_p}\right) \Delta x} \quad (2.50)$$

$$S_P = S_{P,orig} - \frac{1}{\left(\frac{1}{h} + \frac{\delta x_f}{k_p}\right) \Delta x} \quad (2.51)$$

Deve-se observar que as condições de contorno acima descritas são baseadas na Fig. 2.11, ou seja, para a direção x , porém para as direções y e z as condições de contorno são aplicadas de forma análoga.

2.3.4. Estrutura da Matriz de Coeficientes

A estrutura da matriz de coeficientes obtida na aproximação numérica é de fundamental importância na escolha do método de solução do sistema linear.

Em primeiro lugar, é bom lembrar que, seja o problema uni, bi ou tridimensional, o resultado é sempre a obtenção de um sistema linear que, logicamente, sempre pode ser escrito na forma matricial. A matriz dos coeficientes é que muda sua estrutura de acordo com a dimensão do problema. Nas formulações mostradas, a matriz tem a forma tridiagonal para problemas unidimensionais, pentadiagonal para problemas em duas dimensões, e heptadiagonal para situações tridimensionais.

Para entender a razão desta estrutura, basta lembrar que, na discretização da equação da condução, a conexão do ponto P com os vizinhos apareceu no momento de aproximar numericamente os fluxos na interface. Como usamos uma aproximação em diferenças centrais, apenas os volumes adjacentes participaram desta aproximação. Logo, se o problema é 1D, apenas dois vizinhos tomam parte, resultando em uma equação com três termos apenas. Se o problema tiver, por exemplo, 100 incógnitas, teremos 97 termos nulos na equação que relaciona

o volume P com os demais do domínio. A Figura 2.12 mostra estas estruturas para as situações uni e bidimensional.

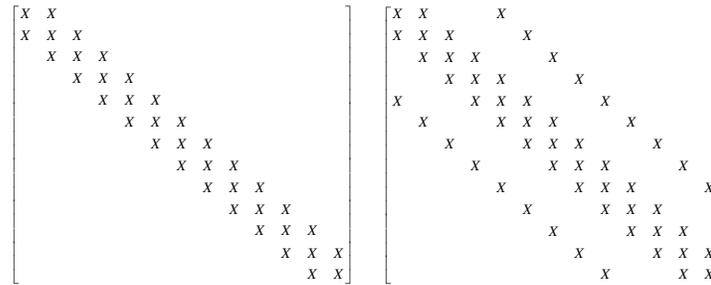


Figura 2.12. Estrutura da matriz de coeficientes para problemas 1D e 2D, respectivamente.

É possível usar mais pontos vizinhos para estabelecer a ligação com o volume P , se desejado. Muitos métodos usando diferenças finitas aproximam os fluxos usando polinômios que envolvem mais pontos. Se assim for feito, o número de não-zeros naquela linha da matriz se altera. O limite seria usar uma aproximação na qual o volume P é conectado com todos os outros volumes do domínio, o que originaria uma matriz de coeficientes cheia. A maioria das metodologias numéricas adota o procedimento empregado, ou seja, o de envolver apenas os vizinhos mais próximos, criando uma matriz de estrutura a mais simples possível.

As estruturas discutidas até agora são originárias de aproximações numéricas usando malhas estruturadas, isto é, malhas cujos volumes possuem sempre o mesmo número de vizinhos. Em discretizações não-estruturadas, como as encontradas em elementos finitos ou volumes finitos não-estruturados, podemos ter diferentes números de vizinhos para cada volume, originando matrizes que não são tri, penta ou heptadiagonais, mas sim com uma banda diagonal variável (Maliska, 1995).

2.3.5. Tratamento das Não-Linearidades

A aproximação numérica de uma equação diferencial parcial linear dá origem a um sistema linear de equações cuja matriz tem coeficientes constantes. Quando o problema é não linear, novamente a aproximação dá origem a um sistema linear de equações, mas, desta feita, a matriz contém coeficientes dependentes da variável e deve, portanto, ser atualizada ao longo das iterações.

No caso dos problemas de condução discutidos neste capítulo, as não-linearidades comuns são a dependência de k com T e uma possível não-linearidade no termo fonte. Em problemas de convecção, que envolvem a solução das equações de Navier-Stokes, uma série de não-

linearidades importantes aparece. Em todos os casos, a equação é linearizada, transferindo para a matriz dos coeficientes a não-linearidade.

Observe-se que, mesmo considerando-se um problema de condução (uma única equação diferencial presente) e resolvendo-se o sistema linear através de um método direto, a não-linearidade introduz um nível iterativo a mais no processo, que é justamente a atualização da matriz. Quando o método de solução do sistema linear é iterativo, podemos confundir as iterações devido às não-linearidades com aquelas do método de solução. Como em geral se usam métodos iterativos, costuma-se afirmar que as não-linearidades não introduzem dificuldades nas formulações numéricas. Do ponto de vista de implementação, é verdade, pois incluir no algoritmo o tratamento de uma não-linearidade significa apenas atualizar a matriz dos coeficientes. Quando sistemas de equações estão sendo resolvidos, vale a mesma observação, ainda com mais razões, pois existem outros níveis iterativos nos quais a atualização da matriz poderá ser realizada.

Do ponto de vista de convergência, poderá ser diferente, pois, dependendo da natureza da não-linearidade, a obtenção da solução poderá ser mais lenta. A experiência do analista e sua familiaridade com o problema físico permitirão que o mesmo decida sobre o número de vezes de atualização da matriz comparado com as iterações do método de solução (Maliska, 1995).

2.3.6. Solução do Sistema Linear de Equações

Após ter sido apresentado o método dos volumes finitos para a aproximação de equações diferenciais parciais e diversos aspectos da formulação, esta seção descreve alguns métodos de solução do sistema de equações algébricas lineares. Os métodos de solução podem ser classificados em **diretos** e **iterativos**. Os métodos diretos são todos aqueles que necessitam da inversão da matriz completa, incluindo os não-zeros. Neste trabalho, apenas métodos iterativos serão discutidos, uma vez que são eles os largamente empregados, pelas razões já discutidas na seção anterior.

Os métodos iterativos podem se classificar em iterativos **ponto a ponto**, **linha a linha** ou **plano a plano**. É lógico que um método iterativo ponto a ponto é um método direto se a malha tiver apenas um volume elementar. Da mesma forma, o método linha a linha é um método direto quando o problema é unidimensional, e o plano a plano é direto para um problema bidimensional. Os métodos iterativos mais empregados são: *Método de Jacobi*, *Método de Gauss-Seidel*, *Método de Sobre-Relaxações Sucessivas – S.O.R.*, *Método Linha por Linha* (o qual o mais conhecido é o algoritmo de Thomas ou TDMA, sendo esse o método utilizado nesse trabalho e será apresentado a seguir), e o *Modified Strongly Implicit – MSI*.

Método Linha por Linha (Maliska, 1995)

O mais conhecido método desta natureza é o algoritmo de Thomas ou TDMA (*TriDiagonal Matrix Algorithm*). Esse é o método de solução do sistema linear de equações utilizado no presente estudo. Como se deduz pelo nome, os métodos linha por linha resolvem diretamente uma linha, ou seja, um problema unidimensional. Para problemas bi e tridimensionais são iterativos, com a varredura se processando linha por linha e coluna por coluna. Para exemplificar, considera-se um problema bidimensional usando a Eq. (2.36) não considerando os termos na direção z . Considere a Fig. 2.13, onde está mostrada uma linha na qual será aplicado o método TDMA. A equação a ser resolvida é dada por

$$A_p T_p = A_e T_e + A_w T_w + A_n T_n + A_s T_s + B \quad (2.52)$$

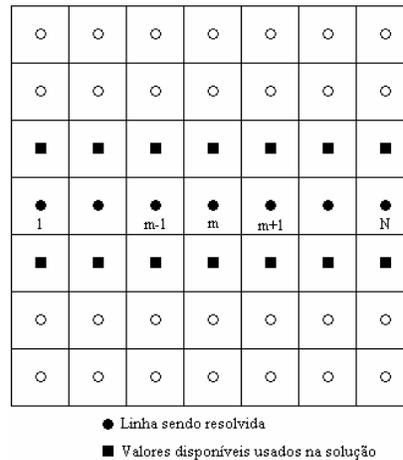


Figura 2.13. Linha onde se aplica o método TDMA.

Escrevendo a Eq. (2.52) em uma forma mais conveniente para procedimentos recursivo, temos:

$$A_m T_m + B_m T_{m+1} + C_m T_{m-1} = D_m \quad (2.53)$$

O interesse é determinar uma relação recursiva da forma:

$$T_m = P_m T_{m+1} + Q_m \quad (2.54)$$

que permita, com o uso das condições de contorno, varrer a linha em um sentido, determinando os coeficientes P e Q , e voltar, determinando os valores da variável, que, no caso, estamos chamando de T . Decrescendo um índice da Eq. (2.54), encontra-se

$$T_{m-1} = P_{m-1}T_m + Q_{m-1} \quad (2.55)$$

Substituindo a Eq. (2.55) na Eq. (2.53) e comparando o resultado com a Eq. (2.54), encontra-se as seguintes expressões para os coeficientes P e Q :

$$P_m = \frac{-B_m}{A_m + C_m P_{m-1}} \quad (2.56)$$

$$Q_m = \frac{D_m - C_m Q_{m-1}}{A_m + C_m P_{m-1}} \quad (2.57)$$

As Equações (2.56) e (2.57) são relações recursivas que permitem, depois de conhecidos P_I e Q_I , determinar todos os valores de P e Q . Para o nosso problema, dado pela Eq. (2.52), quando a marcha for conforme na Fig. 2.13, temos

$$A_m = A_p \quad ; \quad B_m = -A_e \quad ; \quad C_m = -A_w \quad (2.58)$$

e

$$D_m = A_n T_N + A_s T_S + B \quad (2.59)$$

Quando a varredura se der por colunas, teremos as seguintes expressões para os coeficientes:

$$A_m = A_p \quad ; \quad B_m = -A_n \quad ; \quad C_m = -A_s \quad (2.60)$$

e

$$D_m = A_w T_W + A_e T_E + B \quad (2.61)$$

A determinação de P_I e Q_I é fácil de inferir, inspecionando as Eqs. (2.56) e (2.57). Imaginando que os índices crescem como mostrado na Fig. 2.13, a equação aproximada para o

volume de fronteira (volume 1) não poderá depender de valores da variável à esquerda. Logo, C_1 deverá ser zero, resultando em:

$$P_1 = -\frac{B_1}{A_1} \quad ; \quad Q_1 = \frac{D_1}{A_1} \quad (2.62)$$

Para o outro volume de fronteira (volume N), sabemos que a equação aproximada não poderá depender da variável à direita. Logo, B_N deverá ser zero, pela Eq. (2.56), o que resulta, pela Eq. (2.54), em:

$$T_N = Q_N \quad (2.63)$$

Para três dimensões, basta somar ao coeficiente D_m a contribuição dos outros dois volumes vizinhos. Logicamente, agora, teremos mais uma direção para executar as varreduras do domínio. O TDMA é um método usado intensivamente na área numérica, dada a sua facilidade de implementação e boas características de convergência.

O algoritmo para aplicar o método TDMA pode ser resumido por:

- Estimar campo inicial da variável.
- Calcular P_1 e Q_1 através da Eq. (2.62).
- Calcular todos os P_m e Q_m com m de 2 até N usando as Eqs. (2.56) e (2.57).
- Fazer $T_N = Q_N$.
- Calcular as variáveis para os pontos $N-1$ até 1 usando a Eq. (2.55).
- Checar a convergência. Não sendo satisfeito o critério, repetir ou alternar a direção.

Também no método TDMA é importante observar as condições de contorno dominantes para realizar o processo, principalmente nesta direção.

2.3.7. Cuidados Gerais na Obtenção das Equações Aproximadas

Positividade dos Coeficientes

A positividade dos coeficientes é de fundamental importância para que a solução obtida seja fisicamente coerente (Maliska, 1995). Para auxiliar neste raciocínio, considere-se um problema bidimensional cujas temperaturas dos volumes vizinhos sejam maiores do que a temperatura do volume P . Imagine-se, agora, que os coeficientes e conexão de P com seus vizinhos sejam negativos e A_P positivo. A física correta do problema requer o aumento de T_P . Pela expressão:

$$A_p T_p = A_e T_e + A_w T_w + A_n T_n + A_s T_s + B \quad (2.64)$$

que é a equação aproximada para o ponto P , não existe esta garantia, se os coeficientes forem negativos. Uma regra fundamental, portanto, é procurar manter, sempre, a positividade dos coeficientes. Isto ajuda muito a performance global do método. É importante destacar, também, que nem sempre a existência de coeficientes negativos indica que a solução será incorreta ou fisicamente inconsistente. É possível ter aproximações numéricas com coeficientes negativos convergindo para soluções corretas, desde que a aproximação seja consistente, conforme já definido. Nestes casos, a penalidade vem pela necessidade de métodos mais robustos para a solução do sistema linear. A possibilidade da divergência da solução está, portanto, também fortemente relacionada com o uso de métodos não robustos o suficiente para determinadas matrizes de coeficientes. Mantendo os coeficientes positivos, teremos dominância diagonal, sendo permitido o uso de qualquer método iterativo, o que é desejável.

Conservação dos Fluxos nas Interfaces

Em se tratando do método dos volumes finitos, este cuidado parece trivial, pois significa requerer que o fluxo da propriedade (convectivo ou difusivo), deixando um determinado volume de controle, deve ser calculado tal qual quando visto como um fluxo entrando no volume de controle vizinho. Se isto não acontecer, teremos geração da propriedade na interface, obviamente alterando o valor da função localmente. Quando são empregadas funções de interpolação que não usam os mesmos pontos de ajuste polinomial para o fluxo que deixa e que entra no volume vizinho, a não-conservação na fronteira aparece (Maliska, 1995).

Linearização do Termo Fonte com S_p Negativo

A importância de termos S_p negativo na linearização do termo fonte já foi discutida com razoável profundidade (Maliska, 1995). Basta aqui lembrar que o S_p negativo aumenta o valor de A_p , conferindo à matriz dominância diagonal, o que é extremamente benéfico para a convergência. Por outro lado, a necessidade de S_p negativo vem ao encontro da realidade, uma vez que os processos físicos são sempre limitados, o que não aconteceria com um S_p positivo. A expressão do coeficiente A_p , abaixo, mostra que o S_p negativo ajuda na dominância diagonal,

$$A_p = \sum A_{nb} - S_p \Delta V \quad (2.65)$$

3. SOLUÇÃO INVERSA (DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS)

3.1. Discussão sobre Problemas Inversos e Diretos

O que são problemas inversos? Esta é uma questão clássica e a resposta pode ser simples: um problema inverso determina as causas desconhecidas baseado na observação de seus efeitos.

Muitos modelos de processos físicos são modelos “diretos”. Por exemplo, em um modelo de Soldagem por Fricção Linear as propriedades do material, a fonte de calor, a velocidade de soldagem, etc., são especificadas, e as características da solda são então previstas pelo modelo. Para o desenvolvimento de algoritmos de controle, entretanto, a solução do problema inverso é desejada; isto é, para dadas características desejáveis da solda, deve-se conhecer qual fonte de calor e velocidade de soldagem são necessárias para produzir tal junta soldada. As características matemáticas de solução de problemas inversos são interessantes, e difíceis. Por exemplo, é possível especificar requisitos da junta soldada para os quais nenhuma combinação de fonte de calor e velocidade de soldagem possa produzi-la, dentro de uma determinada tolerância. Ou seja, é possível que um problema inverso não possua nenhuma solução satisfatória. Por outro lado, podem existir múltiplas soluções físicas que atendam a junta soldada desejada (Howell, 2007).

Silva Neto e Moura Neto (2005) apresentaram uma discussão interessante sobre o assunto em questão, a qual será parcialmente mostrada e comentada a seguir.

Você é capaz de prever a forma de um tambor pelo som que ele emite? (Kac, 1966; Protter, 1987). Este talvez seja o mais famoso problema inverso para a comunidade matemática. O problema direto correspondente é determinar o som emitido por um tambor de forma conhecida. A solução deste problema está bem estabelecida. Já o problema inverso resistiu durante muito tempo, tendo sido, recentemente, resolvida pela negativa: existem dois tambores com formas distintas, mas que emitem o mesmo som (Gordon *et al.*, 1992).

Paralelamente aos aspectos matemáticos referentes à resolução de problemas inversos, surgiu uma quantidade imensa de aplicações relevantes da metodologia de problemas inversos na engenharia, medicina, geofísica e astrofísica, bem como a outros ramos da ciência. Esta é uma área interdisciplinar que compatibiliza a análise matemática de problemas aos dados experimentais, sendo então uma interface entre a teoria e a prática.

Como exemplos de aplicação prática de problemas inversos, pode-se citar a detecção de materiais não-metálicos no subsolo a partir da radiação refletida, a determinação da intensidade de fontes térmicas com dependência funcional no espaço e/ou no tempo, em problemas de transferência de calor, a partir de medidas transientes de temperatura e a estimação da condição inicial de problemas transientes em transferência de calor por condução.

A estimação de propriedades utilizadas na modelagem matemática de sistemas físicos constitui, por si só, uma classe especial de problemas inversos. É usual estimar a condutividade e a difusividade térmica de materiais com e sem dependência na temperatura, em processos difusivos, bem como propriedades radiantes (função albedo de espalhamento, espessura óptica e função de fase de espalhamento) em transferência de calor por radiação térmica em meios participantes. O estudo de combustão em fornos é uma das áreas de aplicação de problemas inversos em radiação térmica.

O desenvolvimento de novos materiais é uma área de pesquisa e desenvolvimento tecnológico que tem recebido uma demanda crescente. Utilizados tanto em engenharia quanto em medicina, a tendência recente tem sido o desenvolvimento de materiais específicos, visando ao atendimento de novas aplicações, com estas sendo criadas em primeiro lugar. Fica óbvia, portanto, a necessidade do uso de técnicas adequadas para a caracterização destes novos materiais, através da determinação de suas propriedades. Usualmente, procura-se controlar os vários graus de liberdade durante o desenvolvimento e a operação de um aparato experimental, de forma a poder estimar as propriedades desejadas, o que, com frequência, impõe limitações de ordem prática, que podem levar ao aproveitamento de apenas uma fração da potencialidade do experimento. Neste caso, problemas inversos têm sido usados na determinação de propriedades, bem como no projeto de experimentos.

3.2. Estado-da-Arte: Determinação de Parâmetros

O tema de investigação inversa para determinação de parâmetros tem se difundido muito nos últimos anos e diversos trabalhos na área tem sido publicados.

Gonçalves *et al.* (2006) estudaram o problema térmico para determinar a fonte de calor e o raio médio da poça de metal fundido durante o processo de Soldagem a Arco com Proteção Gasosa e Gás Tungstênio (GTAW). Para isso, foram utilizadas medidas experimentais de temperatura realizadas por meio de quatro termopares tipo K fixados na face inferior da placa a ser soldada, a qual era feita de aço AISI304. Dois modelos diferentes de transferência de calor foram utilizados, assim como uma técnica inversa distinta para cada um deles. Em ambas técnicas inversas, o objetivo era minimizar uma equação de mínimos quadrados dependente das temperaturas medidas experimentalmente e aquelas calculadas pelos diferentes modelos. O primeiro modelo era baseado na Equação de Rosenthal, o qual constituía um problema em regime permanente, onde se visava determinar o valor da fonte de calor, considerada pontual, através da técnica inversa chamada Recozimento Simulado. Nesse problema, a equação diferencial foi resolvida por meio de separação de variáveis, chegando-se a uma expressão para a

determinação das temperaturas na placa soldada. O segundo modelo era baseado em um trabalho anterior de Al-Khalidy (1995), o qual resolveu o problema transiente, considerando a mudança de fase e determinando a forma da poça de metal fundido. Por esse motivo, o sistema de equações gerado por esse modelo foi resolvido pelo método de volumes finitos. A técnica inversa utilizada nesse caso foi o método *Golden Section*, e o objetivo era determinar o raio médio da poça fundida.

Uma comparação de quatro técnicas de solução de problemas inversos (*Golden Section*, *Function Specification*, *Recozimento Simulado* e *Dynamics Observers baseada na equação de Green*) foi proposta por Santos *et al.* (2007), com o objetivo de estimar o fluxo de calor e, conseqüentemente, a temperatura na interface entre a ferramenta de corte e o cavaco, durante um processo de usinagem. Uma que vez que a medição de temperatura na região da interface de corte é bastante complicada, utilizaram-se medições de temperatura em regiões acessíveis da ferramenta de corte e de seu suporte, as quais foram utilizadas pelos diferentes métodos inversos na minimização de uma função de erro quadrático baseada na diferença entre valores calculados de temperatura (via equação da condução do calor) e os valores determinados experimentalmente. Segundo os autores, após a determinação deste fluxo de calor na interface entre a ferramenta e o cavaco, é possível determinar o campo de temperatura naquela região, o qual pode ser usado para minimizar o desgaste da ferramenta de corte e, assim, reduzir custos de produção, através do desenvolvimento de processos mais eficientes de resfriamento.

Binda *et al.* (2004) propuseram um modelo térmico semi-empírico para predizer o campo de temperaturas durante a soldagem a laser de penetração profunda de aços inoxidáveis de grandes espessuras. O modelo térmico para determinação do campo de temperaturas era baseado na teoria de fonte de calor em movimento apresentada por Rosenthal, a qual foi modificada para levar em conta o aquecimento não homogêneo ao longo da espessura da peça de trabalho. Este estudo visava determinar o comportamento da fonte de calor na direção da espessura da peça. Para isso, essa fonte de calor foi descrita por uma Série de Co-senos, na qual os seus coeficientes foram determinados por método inverso isolando-os na equação de Rosenthal modificada, e utilizando medidas experimentais de temperatura, para determinadas posições na peça, velocidade de soldagem, e propriedades térmicas. Após a obtenção destes coeficientes, obteve-se então a função que descreve a fonte de calor. Com isso, pôde-se determinar o campo de temperaturas na peça, o qual era a base para a avaliação de outras quantidades relevantes, tais como a forma do cordão, as mudanças micro-estruturais, as distorções da peça de trabalho, e as tensões residuais.

Conforme descrito na Seção 1.2 deste trabalho, existem alguns trabalhos na literatura publicada que tratam sobre análise do processo de Soldagem por Fricção Linear através de

métodos inversos. O procedimento denominado “melhor ajuste” é um deles, no qual Chao *et al.* (2003) variaram os valores da taxa de calor e do coeficiente de transferência de calor na face inferior da placa até que os valores de temperaturas determinados numericamente fossem iguais àqueles determinados experimentalmente. Zhu e Chao (2003) resolveram o problema de forma semelhante, porém o material das placas era aço inoxidável 304L, e não alumínio AA2195, o que dificulta o processo de soldagem, devido a alguns fatores, tais como condutividade térmica e resistência mecânica. Ainda, Vilaça *et al.* (2006) determinaram a relação entre a potência mecânica imposta pela máquina de Soldagem por Fricção Linear e a parte que é transformada em calor, ou seja, determinaram a eficiência térmica do processo de Soldagem por Fricção Linear; para isso valores de temperatura obtidos experimentalmente foram utilizados na análise inversa, juntamente com um modelo analítico da transferência de calor.

3.3. Métodos de Solução

Atualmente vive-se em completa imersão em conceitos como desempenho, custos e demais parâmetros que devem ser obedecidos para que se obtenha sucesso em uma sociedade extremamente competitiva. Como exemplo, pode-se citar o engenheiro que busca sempre o máximo de desempenho de seu produto, sem contrariar as especificações de mínimo custo do projeto. Outro exemplo é o da dona de casa, que vai às compras maximizando o número de produtos adquiridos com um mínimo de gasto possível.

Estes processos de maximização e minimização podem ser, grosso modo, chamados de otimização. Otimizar significa buscar a melhor solução para um determinado problema.

Existem muitos métodos de otimização e cada um deles alcança um melhor resultado em determinados tipos de problemas. A escolha do método depende de uma série de características do problema a ser otimizado, principalmente do comportamento da função que o representa, a qual muitas vezes é de difícil determinação. Faz-se necessário também um bom conhecimento das ferramentas de otimização.

De acordo com as características dos problemas, podem-se classificar as ferramentas de otimização em dois grandes grupos: programação linear e programação não-linear.

As técnicas para programação não-linear podem ser subdivididas em dois subgrupos: métodos determinísticos e estocásticos. Os métodos determinísticos normalmente são baseados no cálculo de derivadas, ou em aproximações destas. Necessitam, portanto, de alguma informação do vetor gradiente, seja procurando o ponto onde ele se anula ou usando a direção para a qual aponta. Os métodos estocásticos utilizam um conjunto de ações que buscam o ótimo

de maneira “aleatória orientada”, sem necessitar de qualquer informação de derivadas ou sobre o comportamento do problema (Ávila *et al.*, 2003).

3.3.1. Programação Linear

A programação linear (PL) tem como objetivo obter a solução ótima de problemas que sejam perfeitamente representados por um conjunto de equações lineares. O propósito da PL está em minimizar ou maximizar uma função linear, chamada função objetivo, respeitando-se um sistema linear de equações denominadas restrições. As restrições do conjunto determinam um semi-espaço chamado de conjunto de soluções viáveis. A melhor das soluções viáveis, isto é, aquela que minimiza a função objetivo (ou maximiza, se o problema é formulado em termos de maximização), é chamada solução ótima.

A descrição de vários modelos e métodos, como o clássico *Simplex*, pode ser encontrada em Bazaraa *et al.* (1990), dentre outros. Um exemplo de problema clássico resolvido através de PL é o de minimização de distância, ou seja, problemas como o do “caixeiro viajante” ou de entrega de encomendas. Estes problemas podem ser descritos por equações lineares e o objetivo é minimizar a distância total percorrida (Ávila *et al.*, 2003).

3.3.2. Programação Não-Linear

Para problemas que são descritos por sistemas de equações não-lineares utiliza-se a Programação Não-Linear (PNL). Pode-se dividir a PNL em três grandes famílias de métodos: os Determinísticos, os Estocásticos e os Enumerativos.

3.3.2.1. Métodos Determinísticos

Os Métodos Determinísticos são baseados na busca sucessiva de pontos no espaço de otimização, necessitando para esta busca o conhecimento de um vetor direção de decrescimento da função no caso de problemas de minimização, o qual depende do gradiente da função a ser minimizada, logo, a função objetivo deve ser continuamente diferenciável. A procura pelo ponto ótimo usa o ponto corrente ou atual (\bar{X}_k) como ponto de partida para a próxima iteração ($k+1$). Existem muitas maneiras de realizar estas iterações, uma das quais é dada por:

$$\bar{X}_{k+1} = \bar{X}_k + \lambda_k \bar{d}_k \quad (3.1)$$

onde λ_k é o passo de cálculo e \vec{d}_k é a direção de busca do ponto ótimo.

O passo de cálculo controla a evolução e a precisão da solução. O valor deste passo de cálculo pode ser obtido por métodos do tipo *Golden Section*, *Fibonacci*, dentre outros. Já a direção de busca pode ser determinada por muitos métodos, dentre os quais, pode-se citar os métodos de *Newton*, de *Fletcher-Reeves* e de *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)*.

O método *Fletcher-Reeves* utiliza a informação do gradiente da função. Já o método de *Newton*, que se caracteriza pela rápida convergência, além da informação do gradiente da função, utiliza o cálculo da matriz Hessiana inversa. O método *BFGS* utiliza a mesma metodologia do método de *Newton*, mas substitui a matriz Hessiana por uma aproximação desta.

O método *Golden Section* consiste em reduzir os limites do universo de busca da função na direção de busca \vec{d}_k até que o intervalo formado pelos limites seja menor que um erro admissível (Ávila *et al.*, 2003).

3.3.2.2. Métodos Estocásticos

Os métodos estocásticos têm como principal característica a busca pelo ótimo através de regras de probabilidade, trabalhando de maneira “aleatória orientada”. Tais métodos utilizam apenas as informações contidas na função de otimização, não requerendo informações sobre suas derivadas ou possíveis descontinuidades.

Estratégias estocásticas são de simples implementação e entendimento. Por trabalharem com regras de probabilidade, têm menos chances de convergirem para mínimos locais se comparadas com os métodos determinísticos. Estas técnicas ganharam popularidade com a evolução dos computadores, já que requerem um grande número de avaliações da função objetivo. Isto é necessário para que se dê chance ao método de explorar devidamente todas as regiões do domínio de busca em que está contida a solução ótima (Ávila *et al.*, 2003).

Entre as técnicas estocásticas mais conhecidas, destacam-se: Método de Monte Carlo (MMC), Algoritmos Genéticos (AGs), Recozimento Simulado (*Simulated Annealing* – SA), Redes Neurais Artificiais (ANNs), Busca Tabu (*Tabu Search* – TS), e o recente Otimização Extrema Generalizada (*Generalized Extremal Optimization* - GEO).

Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo (MMC) é um método estatístico utilizado em simulações estocásticas com diversas aplicações em áreas como a física, matemática e biologia. O método de Monte Carlo tem sido utilizado há bastante tempo como forma de obter aproximações

numéricas de funções complexas. Este método tipicamente envolve a geração de observações de alguma distribuição de probabilidades e o uso da amostra obtida para aproximar a função de interesse. As aplicações mais comuns são em computação numérica para avaliar integrais. A idéia do método é escrever a integral que se deseja calcular como um valor esperado. Existem três classes de algoritmos Monte Carlo: Erro-Unilateral, Erro-Bilateral e Erro-Não-Limitado (Hromkovic, 2001).

Algoritmos Genéticos

Um algoritmo genético (AG) é uma técnica de procura utilizada na ciência da computação para achar soluções aproximadas em problemas de otimização e busca. Algoritmos genéticos são uma classe particular de algoritmos evolutivos que usam técnicas inspiradas pela biologia evolutiva como hereditariedade, mutação, seleção natural e recombinação (ou *crossing over*). Algoritmos genéticos são implementados como uma simulação de computador em que uma população de representações abstratas de solução é selecionada em busca de soluções melhores. A evolução geralmente se inicia a partir de um conjunto de soluções criado aleatoriamente e é realizada através de gerações. A cada geração, a adaptação de cada solução na população é avaliada, alguns indivíduos são selecionados para a próxima geração, e recombinados ou mutados para formar uma nova população. A nova população então é utilizada como entrada para a próxima iteração do algoritmo (Goldberg, 1989).

Recozimento Simulado

O Recozimento Simulado (SA) é um método estocástico de otimização global que se originou na reprodução computacional do processo térmico de recozimento, onde um material é aquecido e resfriado lentamente com o objetivo de atingir um estado de energia mínima. No método SA, começando a partir de uma configuração inicial, uma nova configuração é gerada aleatoriamente. Se esta nova configuração tiver um valor menor da função objetivo (em um contexto de minimização), então esta nova configuração se tornará a configuração atual. Caso contrário, um teste estocástico é aplicado para indicar se a nova configuração será aceita ou não. Este processo de movimento e aceitação é repetido, e conforme o número de alternativas analisadas aumenta, a probabilidade de aceitação de uma configuração pior é gradualmente reduzida. Devido à possibilidade de executar movimentos “em direções erradas”, a busca pode se mover de um ponto ótimo local em direção a um ótimo global para evitar que seja apanhado em um ótimo local (Santos *et al.*, 2007).

Redes Neurais Artificiais

Redes Neurais Artificiais (ANNs) são um conceito da computação que visa trabalhar no processamento de dados de maneira semelhante ao cérebro humano. O cérebro é tido como um processador altamente complexo e que realiza processamentos de maneira paralela. Para isso, ele organiza sua estrutura, ou seja, os neurônios, de forma que eles realizem o processamento necessário. Isso é feito em uma velocidade extremamente alta e não existe qualquer computador no mundo capaz de realizar o que o cérebro humano faz.

Nas redes neurais artificiais, a idéia é realizar o processamento de informações tendo como princípio a organização de neurônios do cérebro. Como o cérebro humano é capaz de aprender e tomar decisões baseadas na aprendizagem, as ANNs devem fazer o mesmo. Assim, uma rede neural pode ser interpretada como um esquema de processamento capaz de armazenar conhecimento baseado em aprendizagem (experiência) e disponibilizar este conhecimento para a aplicação em questão (Hagan *et al.*, 1996).

Busca Tabu

Busca Tabu (*Tabu Search* - TS) é uma estratégia para resolver problemas de otimização combinatorial. A fim de melhorar a eficiência do processo de exploração, necessita-se não somente manter-se a par das informações locais (como o valor atual da função objetivo), mas também de algumas informações relacionadas ao processo de exploração. Este uso sistemático de *memória* é uma característica essencial do TS. Enquanto que muitos métodos de exploração mantêm na memória essencialmente o valor $f(i^*)$ da melhor solução i^* visitada até então, TS também manterá informações sobre o caminho pelas últimas soluções visitadas. Tal informação será utilizada para guiar o movimento de i para a próxima solução j a ser escolhida na sua vizinhança $N(i)$. A função da memória será restringir a escolha de alguns subconjuntos de $N(i)$ proibindo por exemplo movimentos para algumas soluções vizinhas (Glover, 1989).

Otimização Extrema Generalizada

O método Otimização Extrema Generalizada será discutido na Seção 3.4 deste trabalho.

3.3.3. Aplicações

A quantidade de publicações sobre otimização em revistas e congressos mundiais tem crescido não só em número, mas também na diversidade das áreas em que são aplicadas. É comum encontrar métodos de otimização sendo usados em computação, tecnologia da informação, engenharia, física, química, biologia, bioquímica, medicina, economia, finanças e negócios, etc. Para exemplificar, pode-se citar:

- Controle de processos: determinação de parâmetros para controle ótimo;
- Robótica: projeto de controle de robôs;
- Modelos econômicos: modelos de processos de inovação, estratégias de concorrência;
- Modelos ecológicos: relações de simbiose, hospedeiro-parasita;
- Modelos de sistemas sociais: comunicação;
- Estudo de aprendizagem e evolução;
- Otimização de forma de dispositivos eletromagnéticos.

3.4. Otimização Extrema Generalizada

O algoritmo de Otimização Extrema Generalizada (*Generalized Extremal Optimization - GEO*) (Sousa *et al.*, 2003) é um novo algoritmo evolucionário desenvolvido para melhorar o método Otimização Extrema (Boettcher e Percus, 2001) de tal forma que ele possa ser facilmente aplicável a diversos tipos de problemas de otimização. Ambos algoritmos foram inspirados pelo modelo evolucionário de Bak e Sneppen (1993). Seguindo o modelo de Bak e Sneppen (1993), no GEO L espécies são nomeadas e para cada espécie é nomeado um valor de adaptabilidade que irá determinar quais espécies estão mais propensas a sofrer mutação. Podemos pensar nestas espécies como bits que podem assumir valores de 0 ou de 1. Assim, a população completa consistiria em uma única *string* binária. As variáveis de projeto do problema de otimização estão codificadas nesta string a qual é similar a um cromossomo em um Algoritmo Genético (GA) com representação binária (veja Fig. 3.1).

Para cada espécie (bit) é nomeado um número de adaptabilidade que é proporcional ao ganho (ou perda) no valor da função objetivo para mutar (*flipping*) o bit. Todos os bits são classificados de 1, para o bit menos adaptado, até N para o melhor adaptado. Um bit então sofre mutação (*flipped*) de acordo com a distribuição de probabilidade. Este processo é repetido até que um dado critério de parada seja atingido e a melhor configuração de bits (aquela que fornece o melhor valor da função objetivo) seja encontrada.

A implementação do algoritmo canônico GEO para um problema de otimização de função é como segue (Sousa *et al.*, 2003):

1. Inicialize randomicamente uma string binária de comprimento L que codifique N variáveis de projeto de comprimento de bit l_j ($j = 1, N$). Para configuração inicial C de bits, calcule o valor da função objetivo V e ajuste $C_{best} = C$ e $V_{best} = V$.
2. Para cada bit i da string, para uma dada iteração:
 - a) inverta o bit (de 0 para 1 ou de 1 para 0) e calcule o valor da função objetivo V_i da string com configuração C_i ;
 - b) Fixe o ajuste do bit como $\Delta V_i = (V_i - V_{REF})$. Ele indica o ganho relativo (ou perda) em inverter o bit, comparado com um valor de referência da função objetivo, o qual pode ser 0;
 - c) retorne o bit para o seu valor original.
3. Classifique os bits de acordo com os seus valores de adaptabilidade, de $k = 1$ para o bit pior adaptado, até $k = L$ para o melhor adaptado. Em um problema de minimização, maiores valores de ΔV_i terão maiores classificações, e do contrário para problemas de maximização. Se dois ou mais bits possuem o mesmo ajuste, classifique-os randomicamente com distribuição uniforme.
4. Escolha com probabilidade uniforme um bit candidato a sofrer mutação (inverter de 0 para 1 ou de 1 para 0). Gere um número randômico RAN com distribuição uniforme na faixa $[0,1]$. Se $P_i(k) = k^{-\tau}$ for igual ou maior que RAN o bit sofrerá a mutação. Caso contrário, escolha um novo bit candidato e repita o processo até que um bit seja confirmado para sofrer mutação.
5. Ajuste $C = C_i$ e $V = V_i$, com i sendo o bit confirmado para sofrer mutação no passo 4.
6. Repita os passos 2 até 6 até que um dado critério de parada seja alcançado.
7. Retorne C_{best} e V_{best} encontrados durante o processo de busca.

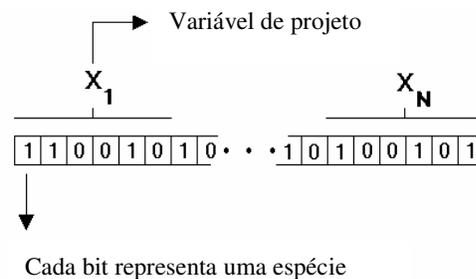


Figura 3.1. Variáveis de projeto codificadas em uma string binária.

Note que no passo 4 qualquer bit pode ser escolhido para sofrer mutação, mas a probabilidade de ser confirmada a mutação para um dado bit escolhido é dependente da sua posição de classificação. Aqueles mais adaptados (com maiores valores de classificação) são menos propensos de ter sua mutação confirmada e somente o bit menos adaptado (classificação = 1) é sempre confirmado a sofrer mutação, se escolhido. A probabilidade do bit escolhido sofrer mutação é regulada pelo parâmetro ajustável τ . Quanto maior o valor de τ , menor será a chance de um bit (com classificação superior a 1) sofrer mutação. A possibilidade de fazer movimentos que não melhorem o valor da função objetivo é o que permite o algoritmo de escapar de ótimos locais.

Em uma aplicação prática do algoritmo GEO, a primeira decisão a ser feita é sobre a definição do número de bits que representarão cada variável de projeto. Isto pode ser feito simplesmente ajustando para cada variável o número de bits necessários para assegurar uma dada precisão desejável para cada um deles. Para variáveis contínuas o número mínimo (m) de bits necessário para alcançar uma certa precisão é dado por:

$$2^m \geq \left\lceil \frac{(x_j^u - x_j^l)}{p} + 1 \right\rceil \quad (3.2)$$

onde x_j^l e x_j^u são os limites inferior e superior, respectivamente, da variável j (com $j = 1, N$), e p é a precisão desejada. O valor físico de cada variável de projeto é obtido através da equação:

$$x_j = x_j^l + (x_j^u - x_j^l) \frac{I_j}{(2^m - 1)} \quad (3.3)$$

onde I_j é o número inteiro obtido na transformação da variável j da sua forma binária para uma representação decimal (Sousa *et al.*, 2003).

3.4.1. Variáveis Discretas e Inteiras

Como visto acima, variáveis contínuas são representadas em forma binária no GEO, com precisão p (Sousa *et al.*, 2003). Variáveis inteiras possuem precisão $p = 1$ e devem ser tratadas tal como tratado em Lin e Hajela (1992) para um código binário GA. Se a relação $(x_j^u - x_j^l) = 2^N - 1$ for satisfeita, existe uma *string* de bits que irá codificar todas as variáveis biunivocamente. Se não existir uma correspondência direta entre uma seqüência de bits e as variáveis, o menor

número m que satisfaz $2^m > (x_j^u - x_j^l) + 1$ é calculado e para cada uma das N variáveis é associada uma seqüência de bits. Para as $2^m - N$ strings restantes, são atribuídos inteiros fora da faixa de variáveis, os quais são tratados como soluções inviáveis. (A abordagem das restrições pelo GEO é tratada na próxima sub-seção.) Inteiros dentro do intervalo possível podem ser também utilizados. Neste caso, uma ou mais variáveis serão associadas com mais de uma seqüência de bits. Embora esta última opção evite a necessidade de impor restrições adicionais ao problema, ela implica, no caso do GEO, em uma probabilidade não-uniforme para o processo de seleção de um bit sofrer mutação do passo 4 (Sousa *et al.*, 2003).

Variáveis discretas devem ser tratadas da mesma forma que as variáveis inteiras. O processo é executado em dois passos: primeiro, para cada variável discreta um número inteiro é associado e, segundo, uma das aproximações descritas anteriormente é usada para codificá-las para a forma binária (Sousa *et al.*, 2003).

3.4.2. Tratamento de Restrições pelo GEO

Restrições em otimização podem ser manuseadas por maneiras diferentes. Um modo simples, e provavelmente o mais comum, de lidar com restrições em algoritmos, tais como o GA e SA, é incorporá-las dentro da função objetivo através de penalizações. Em algoritmos evolucionários a aproximação da função penalidade tem sido extensivamente usada em diferentes tipos de implementações. Métodos que lidam diretamente com restrições têm também sido propostos a fim de evitar o processo de ajuste dos parâmetros de penalização, uma vez que seus valores são altamente dependentes do problema e se não forem propriamente ajustados podem levar a resultados sub-ótimos. Alternativamente, esquemas adaptativos de penalidades têm sido propostos de tal forma que os parâmetros são ajustados automaticamente, sem a necessidade de refinamento do ajuste para uma aplicação particular (Sousa *et al.*, 2003).

Para o GEO, as restrições laterais (os limites das variáveis de projeto) são diretamente incorporadas quando as variáveis de projeto são codificadas na forma binária. Restrições de igualdade e desigualdade são facilmente incorporadas dentro dos algoritmos simplesmente dando um valor de adaptabilidade alto (para um problema de minimização) ou baixo (para um problema de maximização) para o bit que, quando invertido, leva a configuração para uma região inviável do espaço de projeto. Por exemplo, em um problema de minimização, quando os valores de adaptabilidade são atribuídos aos bits no passo 2, aquele que quando invertido resulta em uma configuração inviável recebe um alto valor para ΔV_i (o mesmo valor é atribuído para todos bits em que isto ocorre). Isto significa que aqueles bits serão considerados bem adaptados e terão uma baixa probabilidade de serem invertidos no passo 4. Entretanto, eles não são proibidos de

serem invertidos, o que faz o algoritmo apto a andar através de regiões inviáveis do espaço de projeto. Isto dá ao algoritmo uma grande flexibilidade que pode, por exemplo, ser aplicada a espaços de projeto que apresentam regiões viáveis descontínuas. De fato, o GEO pode até mesmo começar de uma solução inviável. Neste caso, um valor qualquer é atribuído a V_{REF} na inicialização do algoritmo, a qual é substituída pelo primeiro valor viável de V encontrado durante a busca (Sousa *et al.*, 2003).

Outras formas de levar em conta restrições no GEO podem também ser facilmente implementadas incluindo a aproximação de função penalidade. Entretanto, a aproximação descrita acima é bastante simples de aplicar e não introduz nenhum novo parâmetro ajustável ao algoritmo (Sousa *et al.*, 2003).

4. ESTUDO DE CASO

Nesta parte do trabalho será feito um estudo de caso, iniciando pela validação de um código de volumes finitos, utilizando os resultados publicados por Chao *et al.* (2003). Em seguida será feita a análise da sensibilidade da malha, a fim de tornar o código de volumes finitos o mais rápido possível, uma vez que o algoritmo de otimização GEO calcula a função objetivo milhares de vezes, a qual é dada através do cálculo das temperaturas obtidas por este código. Em seguida, é avaliada a sensibilidade dos sensores de temperatura, com o objetivo de descobrir as melhores posições para fazer as aquisições de dados, passando então para a determinação do parâmetro τ que melhor se adapta para cada um dos conjuntos de medição de temperatura, podendo assim selecionar o melhor posicionamento para os sensores. Como última etapa deste capítulo, é feito um estudo de caso, no qual são utilizados os resultados obtidos nas etapas anteriores. Este estudo de caso consiste na análise de um problema em que se devem determinar mais parâmetros pelo método de otimização, tornando o processo mais complexo.

4.1. Validação do Código de Volumes Finitos

4.1.1. Definição do Problema

O processo modelado considera a soldagem de duas placas de AA 2195-T8 usando o processo de Soldagem por Fricção Linear. Cada placa tem 610 mm em comprimento, 102 mm em largura, e 8,13 mm em espessura. O ombro da ferramenta tem 25,4 mm de diâmetro. A ferramenta de soldagem inicia com o seu centro a 12,7 mm da borda da placa, e pára após uma translação de 584,6 mm ao longo da linha de solda. A velocidade de rotação da ferramenta é de 240 rpm, e a sua velocidade de translação é de 2,36 mm/s. Nesta velocidade, atribui-se a nomenclatura de *soldagem normal* para fins de comparação com os resultados de Chao *et al.* (2003), desta forma, o tempo total de soldagem é de 248 s. Existe um pré-aquecimento (*dwell period*) durante 5 segundos, no qual a ferramenta permanece a 12,7 mm da borda da placa antes que comece a translação (em linguagem computacional, para o passo de tempo de 1 s, ocorrerão 5 iterações com o fluxo de calor parado no início da placa e 248 iterações em movimento).

As medições de temperatura durante o processo de soldagem foram feitas em nove posições, sendo estas as mesmas posições dos termopares tipo K usados por Chao *et al.* (2003). A Figura 4.1 mostra um desenho esquemático das posições dos termopares. Três fileiras de termopares estão posicionadas aproximadamente no centro da placa ao longo da direção de soldagem. Os termopares em cada fileira estão localizados em uma certa profundidade na placa. A fileira

superior está a 2 mm e a fileira do meio está a 4 mm da superfície superior, respectivamente, e a fileira inferior está na superfície traseira da placa. Cada fileira tem três termopares localizados a 5 mm, 12,7 mm e 25,4 mm a partir da linha de centro da solda.

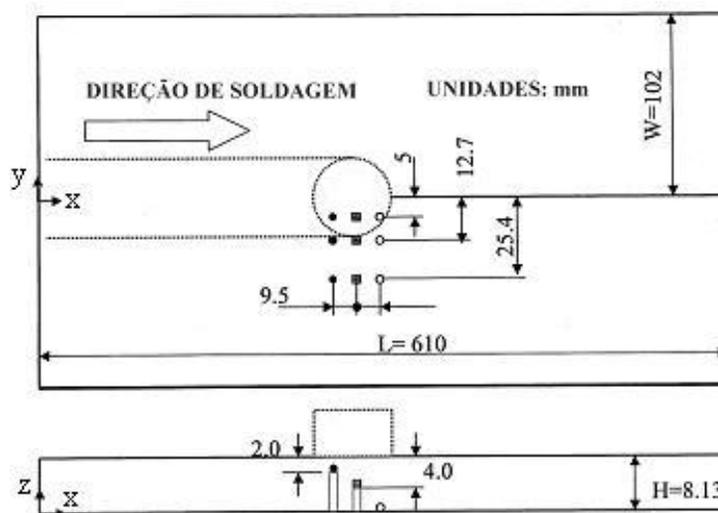


Figura 4.1. Dimensões da peça de trabalho e posição dos termopares
(adaptado de Chao *et al.*, 2003).

4.1.2. Análise Numérica

A distribuição transiente de temperaturas T depende do tempo t e das coordenadas espaciais (x, y, z) , e é determinada pela solução da equação da condução tridimensional, semelhante à Eq. (2.28):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (4.1)$$

onde k é a condutividade térmica, $W/(m.K)$, c_p é o calor específico, $J/(kg.K)$, e ρ é a densidade do material, kg/m^3 . Esta equação é resolvida através do método dos volumes finitos, conforme mostrado na Seção 2.3.

A Soldagem por Fricção Linear é tratada como uma fonte de calor se movendo ao longo da linha de soldagem. O calor produzido pelo atrito entre o ombro da ferramenta e a placa é concentrado localmente, e se propaga em direção a outras regiões da placa por condução, além das perdas de calor por convecção para a vizinhança e perda de calor pela superfície inferior da peça de trabalho para a placa de suporte. Assumindo uma geometria simples da ferramenta com

um ombro plano e negligenciando a contribuição do pino na geração de calor, uma vez que esta pode ser considerada aproximadamente 2% segundo Russell e Sheercliff (1999), considera-se o fluxo de calor q_0'' (em W/m²) linearmente distribuído no ombro da ferramenta, o qual é representado por (Schmidt e Hattel, 2007; Chao *et al.*, 2003):

$$q_0''(r) = \frac{3Qr}{2\pi R_{OMBRO}^3} \quad (4.2)$$

onde Q é a energia total imposta ao sistema. Deve-se observar que a Eq. (4.2) é uma forma simplificada da Eq. (2.15), negligenciando a contribuição do pino na geração de calor, pelo motivo comentado acima, e considerando a relação existente entre q_0'' , ω , r , e $\tau_{contato}$, dada pela Eq. (2.4).

Além da imposição do fluxo térmico na região sob o ombro da ferramenta, existem ainda outras três condições de contorno na peça de trabalho. A primeira delas é a consideração de condição adiabática na face de simetria (coincidente com a linha de soldagem), Eq. (2.33). A segunda é a perda de calor por convecção natural nas demais superfícies expostas da peça, a qual é dada pela Eq. (2.34).

A última condição de contorno a ser considerada é a perda de calor pela superfície inferior da peça de trabalho devido à condução de calor para a base de suporte, a qual depende da geometria da base assim como da resistência térmica de contato. Uma avaliação mais precisa para esta perda de calor não é uma tarefa simples, conforme descrito na Seção 2.1.3, mas ela pode ser descrita por uma relação um tanto simples que é similar àquela utilizada para a transferência de calor por convecção, ou seja:

$$q_b'' = h_b(T - T_b) \quad (4.3)$$

onde h_b é o coeficiente de transferência de calor, em W/(m²K), entre a placa e a base, e T_b é a temperatura não perturbada da base (ou seja, não afetada pelo contato com a placa), sendo assumida aqui tendo o mesmo valor da temperatura ambiente, $T_b = 298$ K. A relação simples para a perda de calor para a base exige o conhecimento do coeficiente de transferência de calor entre a placa e a base de suporte, h_b . Nestes cálculos, consideram-se $Q = 1740$ W, $T_\infty = 298$ K, $h_{conv} = 30$ W/(m²K), e $h_b = 350$ W/(m²K) para descrever o processo. Estes valores dos parâmetros, assim como geometria e material da placa e da ferramenta são aqueles utilizados no estudo feito por Chao *et al.* (2003). Estas condições de contorno estão representadas na Fig. 4.2.

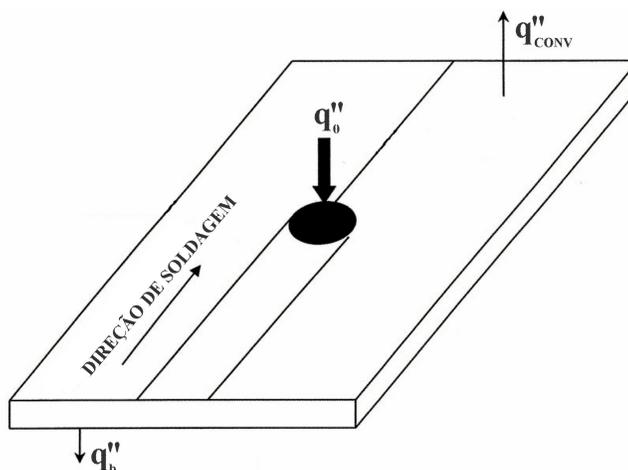


Figura 4.2. Condições de contorno para simulação da Soldagem por Fricção Linear (adaptado de Chao *et al.*, 2003).

Além disso, na simulação numérica de Soldagem por Fricção Linear para AA 2195, assume-se que as duas placas são soldadas simetricamente durante e após o processo de soldagem. A linha de soldagem se encontra ao longo da linha de simetria, e então somente uma metade da placa soldada é modelada.

A vista superior da malha utilizada no método de volumes finitos (MVF) está mostrada na Fig. 4.3. Esta malha apresenta 122, 40 e 10 volumes nas direções x , y e z . A malha é não-uniforme na direção y : ela possui 32 volumes nos primeiros 30 mm na direção y , e a largura restante da placa é dividida em 8 volumes, os quais obedecem uma equação tipo tangente-hiperbólica de refinamento. A utilização de malha não-uniforme na direção y foi feita para reduzir o tempo computacional, sendo que o refinamento da malha é feito na zona próxima à linha de solda devido ao fato de que os maiores gradientes de temperatura estão nessa região, conforme pode ser visto nas Figs. 4.4 e 4.9. Deve-se observar que a escolha desta malha se deve ao fato de que os resultados obtidos pelo MVF devem ser comparados àqueles obtidos da análise experimental apresentada por Chao *et al.* (2003), dessa forma, é possível realizar o pós-processamento das temperaturas simuladas para os mesmos pontos nos quais estão localizados os termopares da Fig. 4.1. Ainda, um passo de tempo de 1,0 segundo foi utilizado em todas simulações.

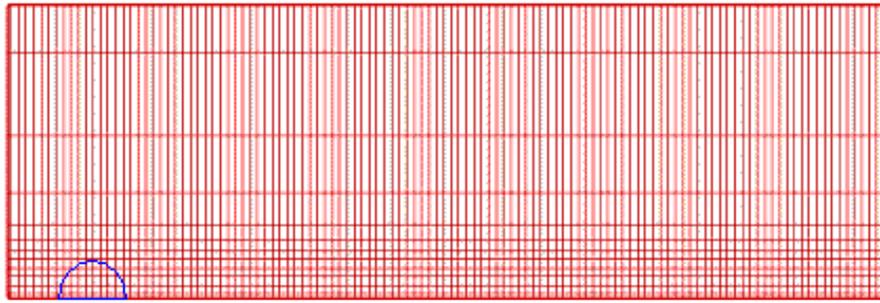


Figura 4.3. Malha do método dos volumes finitos.

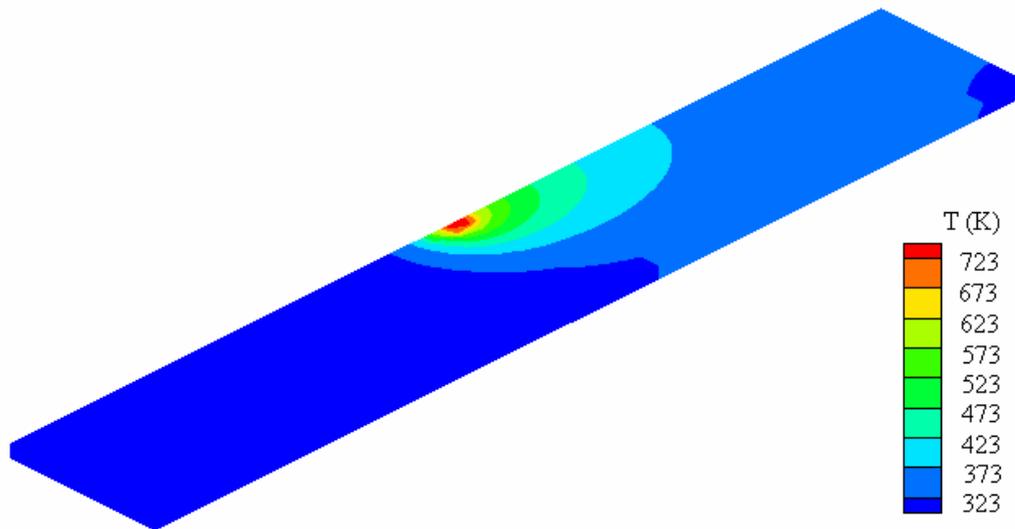


Figura 4.4. Campo de temperaturas na peça de trabalho (somente uma metade da peça está mostrada devido a simetria).

As propriedades térmicas do material AA 2195 utilizadas nesta simulação são determinadas pelas seguintes relações (temperatura T em $^{\circ}\text{C}$):

$$k(T) = 89,643 + 0,201T \quad (4.4)$$

$$c_p(T) = 131,643 + 0,118T \quad (4.5)$$

Nas Equações (4.4) e (4.5) acima, a condutividade térmica, k , é dada em $\text{W}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$ e o calor específico, c_p , é dado em $\text{J}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$, respectivamente, as quais foram ajustadas das curvas mostradas na Fig. 4.5:

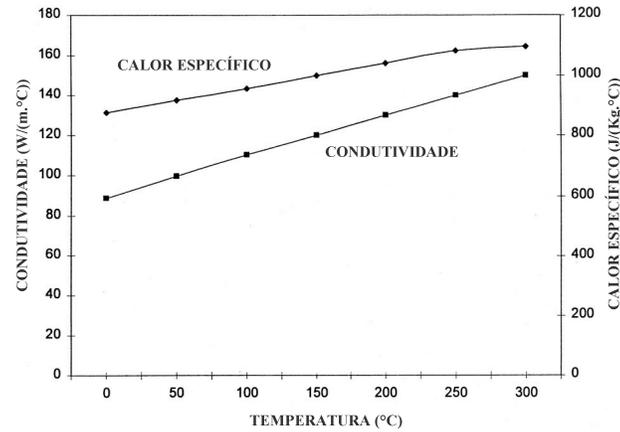


Figura 4.5. Propriedades térmicas do AA2195 (Chao *et al.*, 2003).

4.1.3. Análise de Resultados

As Figuras 4.6 a 4.9 mostram os resultados obtidos pelo código desenvolvido no presente estudo utilizando o MVF, ao lado daqueles publicados por Chao *et al.* (2003).

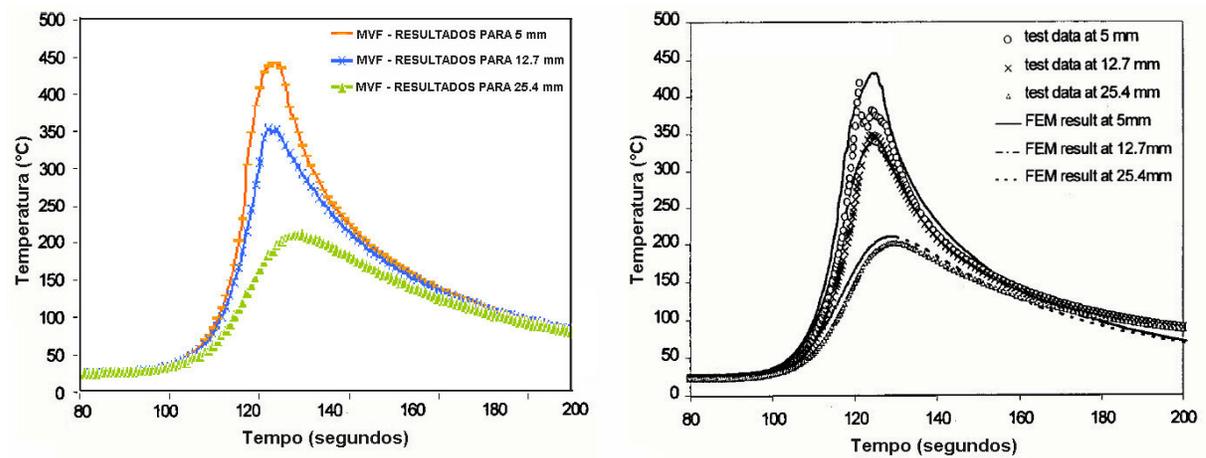


Figura 4.6. Comparação entre os perfis de temperatura ao longo do tempo para a camada superior de termopares: resultados do presente estudo à esquerda; resultados de Chao *et al.* (2003) à direita.

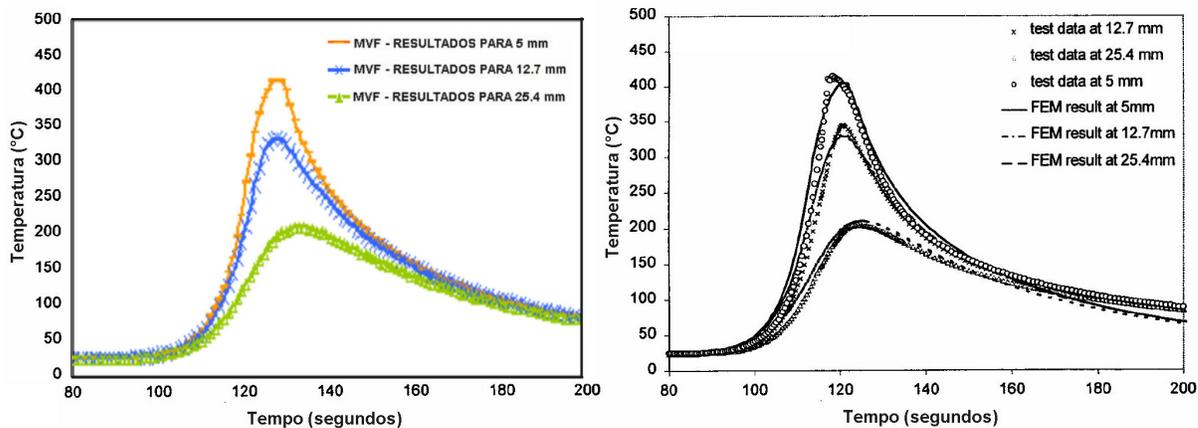


Figura 4.7. Comparação entre os perfis de temperatura ao longo do tempo para a camada do meio de termopares: resultados do presente estudo à esquerda; resultados de Chao *et al.* (2003) à direita.

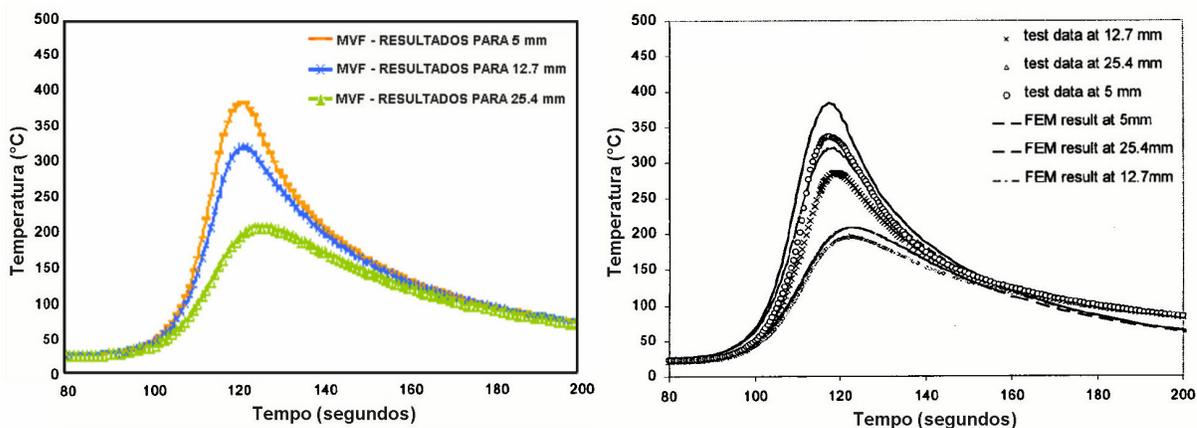


Figura 4.8. Comparação entre os perfis de temperatura ao longo do tempo para a camada inferior de termopares: resultados do presente estudo à esquerda; resultados de Chao *et al.* (2003) à direita.

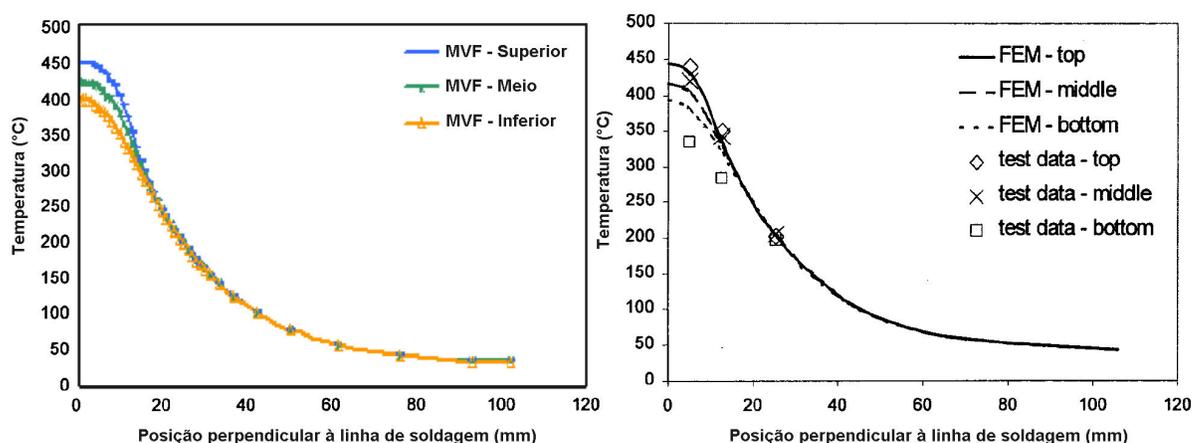


Figura 4.9. Perfil de temperaturas na direção transversal: resultados do presente estudo à esquerda; resultados de Chao *et al.* (2003) à direita.

Observa-se que todos os padrões de comportamento da temperatura para os diferentes casos analisados estão de acordo com os resultados de Chao *et al.* (2003). As Figuras 4.6 a 4.8 mostram os perfis de temperatura transientes para as posições nas quais estão localizados os termopares, para as camadas superior, mediana, e inferior, respectivamente. Na Figura 4.9, o objetivo é mostrar o decaimento da temperatura na direção transversal à linha de soldagem, para as três camadas de termopares na direção da espessura.

A Figura 4.4 mostra o campo de temperaturas na peça de trabalho, somente para um de seus lados devido à simetria, onde se observa que a temperatura máxima durante o processo de Soldagem por Fricção Linear da liga AA 2195 é de 727 K (450 °C), valor abaixo da temperatura de fusão do alumínio, que é 932 K (659 °C), comprovando desta forma que a Soldagem por Fricção Linear, para o caso em estudo, é um processo que ocorre em estado sólido (sem troca de fase). A Figura 4.9 também mostra esse resultado sobre a temperatura máxima, e ainda outras observações podem ser feitas a partir da sua análise: as diferenças de temperaturas entre as superfícies superior e inferior da peça é próxima de 60 °C próximo do centro da soldagem, esta diferença de temperaturas diminui conforme a posição se move para longe da linha de centro da solda; e para 25 mm da linha de centro da solda, o que é próximo de duas vezes o raio do ombro da ferramenta, a temperatura se torna uniforme na direção da espessura (justificando o uso de malha mais refinada na proximidade de linha de soldagem).

4.2. Estudo da Sensibilidade da Malha

As Figuras 4.10, 4.11 e 4.12 mostram a distribuição de temperatura ao longo das direções longitudinal, transversal e na espessura, respectivamente, após a ferramenta ter se deslocado

304,44 mm (129 segundos de deslocamento). Deve-se observar que em cada um dos casos, o número de volumes nas outras duas direções além daquela de interesse, se manteve constante, ou seja, para o estudo da sensibilidade de malha na direção x , varia-se a quantidade de volumes nesta direção, mantendo-se constante o número de volumes nas direções y e z (para o estudo nas demais direções repete-se de forma análoga).

A Figura 4.10 considera a análise da sensibilidade de malha na direção x . Foram utilizados 25 volumes na direção y e 4 volumes na direção z , sendo que a quantidade de volumes na direção x variou entre 50 e 120 volumes, com passos de 10 volumes. Já a Fig. 4.11 considera a análise da sensibilidade de malha na direção y , na qual foram utilizados 50 volumes na direção x e 4 volumes na direção z , sendo que a quantidade de volumes na direção y variou entre 15 e 45 volumes, lembrando que em todos os casos foi utilizada a função tangente-hiperbólica de refinamento de malha; por exemplo, para o caso de 15 volumes na direção y , foram considerados 10 volumes distribuídos uniformemente nos primeiros 30 mm da placa, e os 5 volumes restantes de acordo com aquela função de refinamento. Para os demais casos analisados na direção y , a análise é similar, ou seja, 21 volumes na direção y devem ser considerados como 15 uniformes e 6 de acordo com a função, e assim por diante. Por último, a Fig. 4.12 considera a análise da sensibilidade de malha na direção z , sendo utilizados 50 volumes na direção x e 25 (15+10) volumes na direção y , sendo que a quantidade de volumes na direção z variou entre 4 e 10 volumes, com passos de 1 volume.

Os resultados mostram que uma malha com 50 volumes na direção x , 15 (10 + 5) na direção y , e 4 na direção z é o suficiente para descrever os campos de temperatura. A malha escolhida para ser utilizada será de 61×21 (15+6) \times 4, uma vez que esta não apresenta aumento significativo no tempo de processamento e facilita o posicionamento dos leitores de temperatura (a sensibilidade do posicionamento dos leitores de temperatura será mostrada na próxima seção deste trabalho).

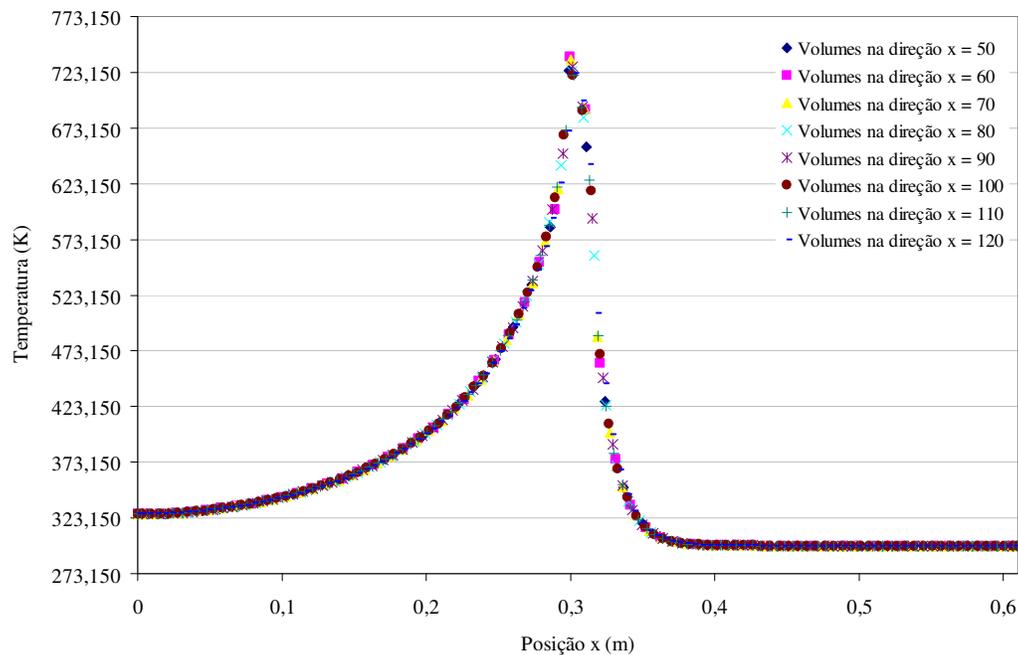


Figura 4.10. Sensibilidade da malha na direção x .

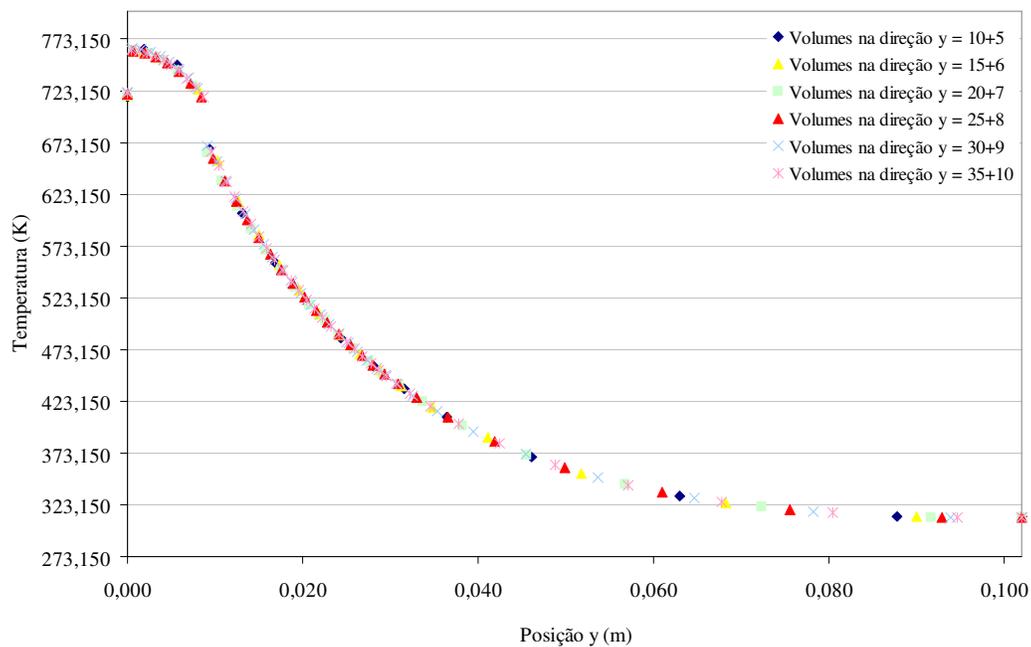


Figura 4.11. Sensibilidade da malha na direção y .

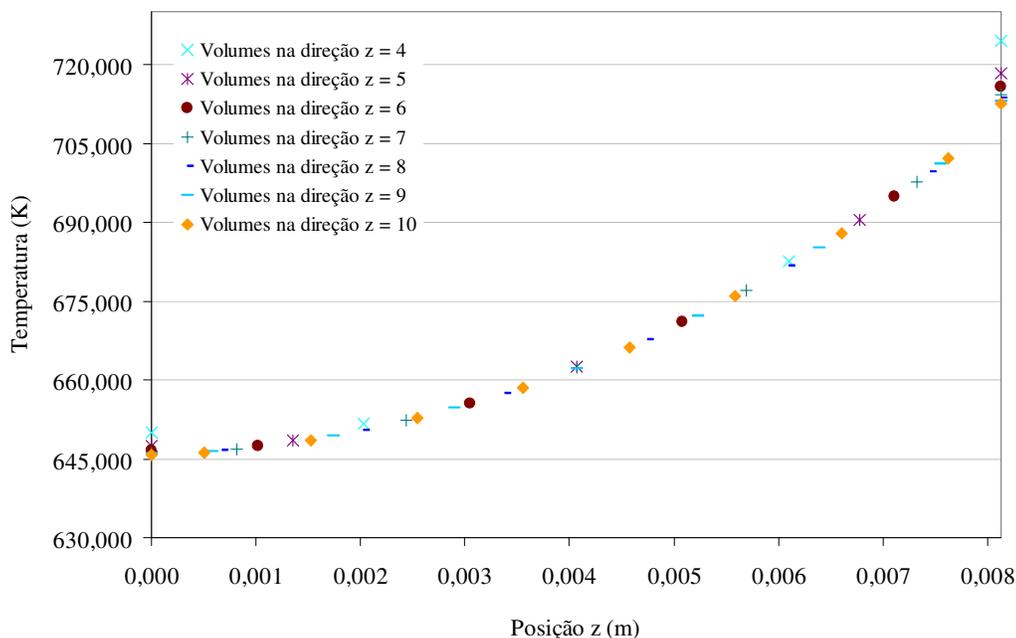


Figura 4.12. Sensibilidade da malha na direção z.

4.3. Estudo da Sensibilidade dos Leitores de Temperatura

Com o objetivo de avaliar a melhor posição para a instalação dos sensores de temperatura, será feito um estudo levando em conta a sensibilidade da medição da temperatura para diferentes posições na peça de trabalho. O papel da análise da sensibilidade é indicar os melhores pontos de medição de temperatura, uma vez que os valores de temperatura serão considerados dados de entrada na análise inversa, enquanto que os valores da fonte de calor e dos coeficientes de transferência de calor serão considerados dados de saída. Os pontos sobre a placa que apresentarem maiores valores de sensibilidade fornecerão melhores resultados da análise inversa, como será verificado nas próximas seções do presente trabalho. Neste estudo, *sensibilidade* significa a taxa na qual a medida de temperatura seria afetada decorrente de uma variação na taxa de calor imposta ao sistema, ou em cada um dos coeficientes de transferência de calor. Ou seja, a sensibilidade H_Q , a qual considera a variação da temperatura devido a variação na taxa de calor, pode ser expressa pela seguinte expressão:

$$H_Q = \frac{Q}{T_{ref}} \left(\frac{\partial T}{\partial Q} \right)_i \quad (4.6)$$

em que i representa cada um dos termopares, Q é a taxa de calor, em W, e T_{ref} representa uma temperatura de referência, em K, utilizada para adimensionalizar o valor de H_Q ($T_{ref} = 298$ K). Dessa forma, a sensibilidade H_Q é adimensional e pode ser determinada utilizando *diferenças finitas centrais*. Assim, a Eq. (4.6) fica da seguinte forma:

$$H_Q = \frac{Q}{T_{ref}} \left(\frac{T(Q + \Delta Q) - T(Q - \Delta Q)}{2\Delta Q} \right)_i \quad (4.7)$$

em que ΔQ é o incremento dado ao valor da taxa de calor, o qual no presente estudo foi de 10%, ou seja, 174 W.

Além da sensibilidade acima descrita, existe ainda a possibilidade da utilização da sensibilidade relacionada aos coeficientes de transferência de calor entre a superfície inferior da peça de trabalho e a base de suporte, h_b , e por convecção natural, h_{conv} , as quais serão denominadas H_{hb} e H_{hconv} , respectivamente. Essas sensibilidades são determinadas de forma análoga à H_Q , porém devendo alterar o valor de Q por h_{conv} , e h_b na Eq. (4.7), também fazendo-se a adimensionalização.

Nesta etapa do trabalho, a posição inicial da ferramenta e a sua velocidade de translação foram ligeiramente alteradas para 15 mm (até a fase anterior era 12,7 mm) e 2,50 mm/s (até a fase anterior, era 2,36 mm/s), respectivamente. O motivo destas alterações se dá pelo fato de termos uma melhor combinação entre o movimento da ferramenta e a medida de temperatura (a qual se dá no momento em que a ferramenta passa por uma posição x correspondente a posição de um volume). Para a malha utilizada temos $\Delta x = 10$ mm, dessa forma a posição $x = 15$ mm é o ponto 3 da malha (2º volume), $x = 35$ mm é o ponto 5 na malha (4º volume), $x = 85$ mm é o ponto 10 na malha (9º volume), e assim por diante. Com a velocidade de 2,50 mm/s (2,50 mm/iteração já que $\Delta t = 1$ segundo) o número de iterações para atingir as posições acima citadas serão dadas por números inteiros, fornecendo leituras precisas dos termopares no exato momento em que a ferramenta (fluxo de calor) cruza por eles. Por exemplo, para $x = 35$ mm temos $iter = 13$, para $x = 85$ mm temos $iter = 33$, para $x = 135$ mm temos $iter = 53$, e assim por diante (lembrando que nas 5 primeiras iterações – ou 5 primeiros segundos – a ferramenta permanece na posição $x = 15$ mm).

As posições escolhidas para que seja feito tal estudo são as seguintes (considerando a origem do sistema de coordenadas na superfície inferior da placa, no canto onde a linha de solda inicia):

- Na direção x : 35, 85, 135, 185, 235, 285, 335, 385, 435, 485, 535 e 585 mm
- Na direção y : 13, 17, 21, 25 e 29 mm

- Na direção z : 0, 4,065 e 8,13 mm

Dessa forma, combinando-se estas coordenadas, foram analisadas 180 diferentes posições para “instalar” os termopares (ou pseudo-termopares no caso do experimento-numérico).

As Figuras 4.13 até 4.17 mostram os resultados obtidos na análise da sensibilidade H_Q dos termopares quando posicionados em diferentes locais na placa durante o processo de soldagem. Deve-se observar que somente alguns resultados são mostrados uma vez que o comportamento característico se repete para as demais posições como será discutido a seguir.

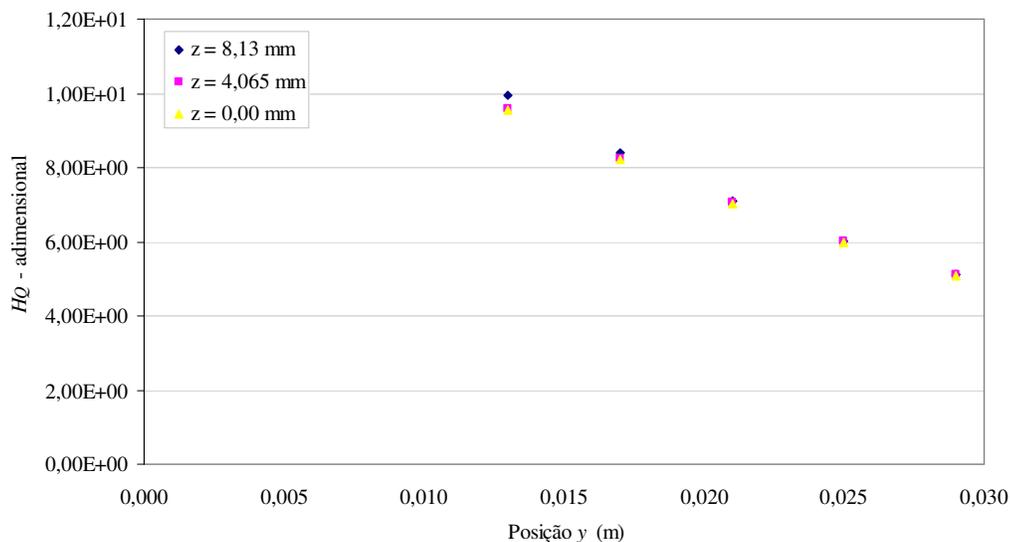


Figura 4.13. Sensibilidade H_Q dos termopares para posição $x = 285$ mm.

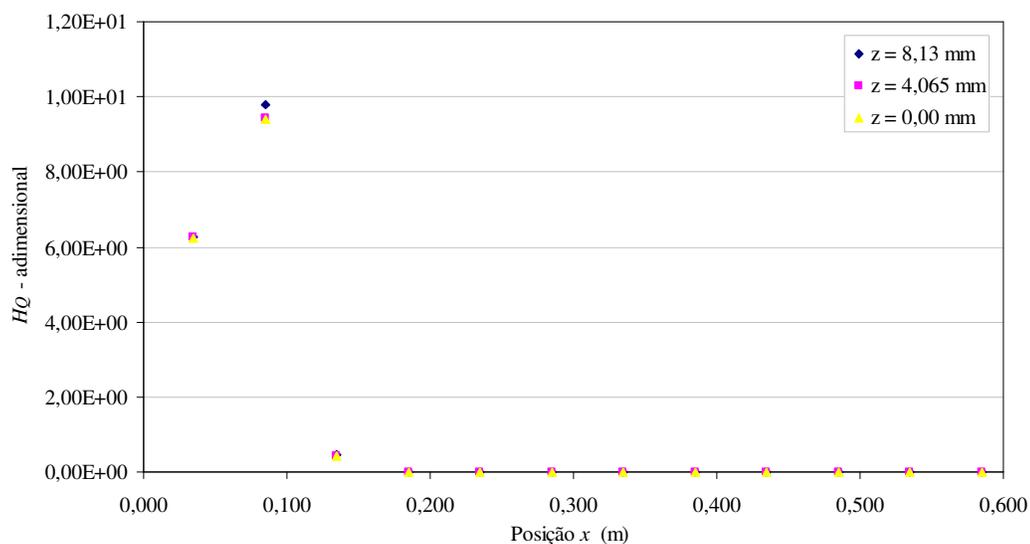


Figura 4.14. Sensibilidade H_Q dos termopares para posição $y = 13$ mm para a ferramenta na posição $x = 85$ mm.

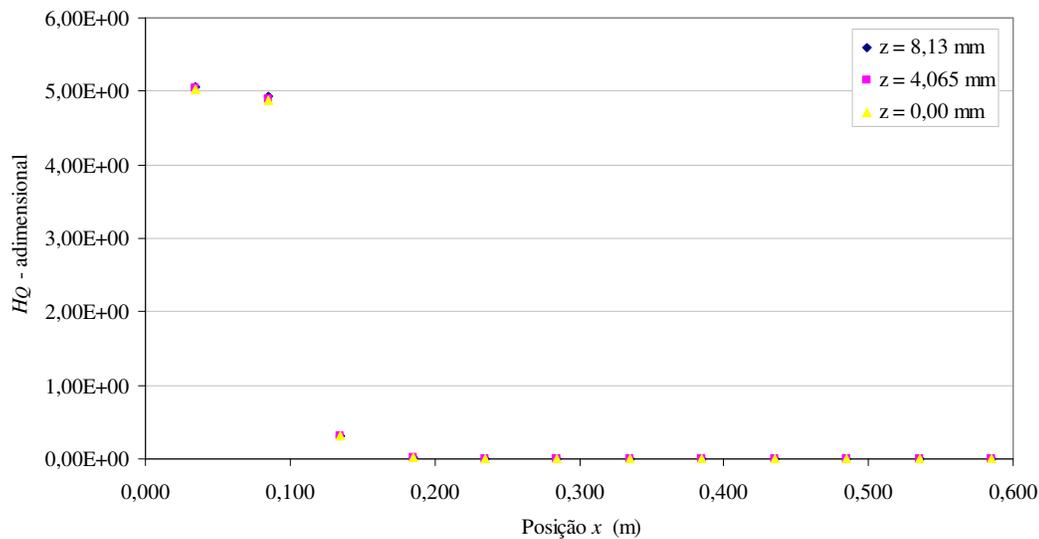


Figura 4.15. Sensibilidade H_Q dos termopares para posição $y = 29$ mm para a ferramenta na posição $x = 85$ mm.

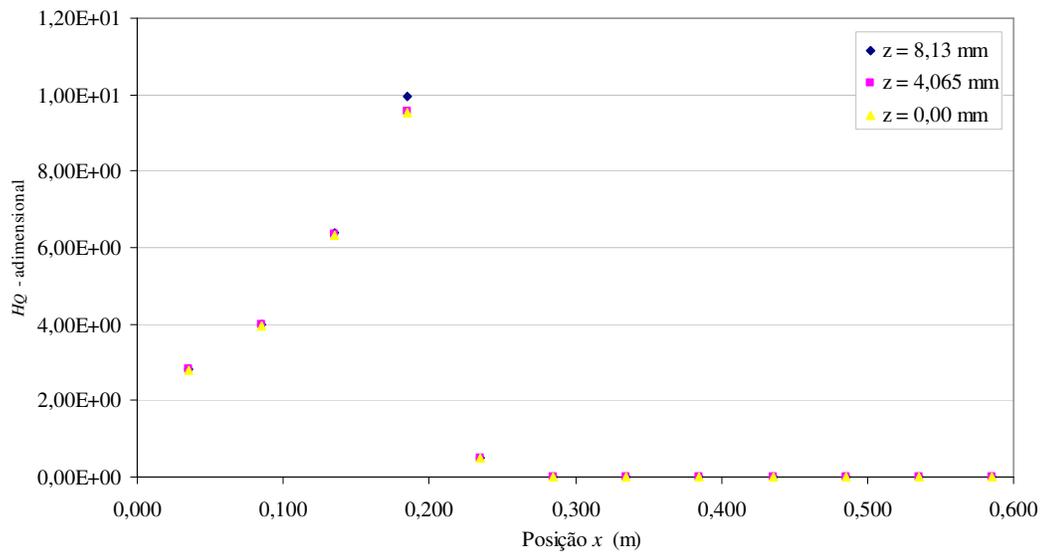


Figura 4.16. Sensibilidade H_Q dos termopares para posição $y = 13$ mm para a ferramenta na posição $x = 185$ mm.

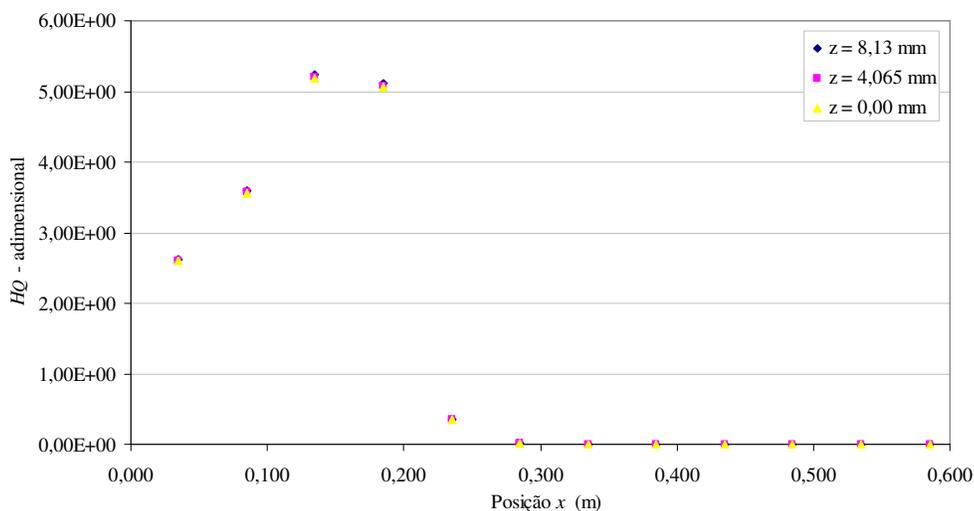


Figura 4.17. Sensibilidade H_Q dos termopares para posição $y = 29$ mm para a ferramenta na posição $x = 185$ mm.

A Figura 4.13 mostra a variação da sensibilidade H_Q para a posição $x = 285$ mm (neste caso, tanto os leitores de temperaturas estão localizados nesta posição, assim como a leitura é feita no momento em que fonte de calor – ou a ferramenta – está nesta posição), tendo no eixo da abscissa a posição em y e no gráfico as diferentes posições em z , ficando o eixo das ordenadas reservado para mostrar os valores da sensibilidade H_Q . Para as demais posições na direção x (35, 85, 135, 185, 235, 335, 385, 435, 485, 535 e 585 mm) os resultados são similares e apresentam o mesmo comportamento com decréscimo da sensibilidade com o aumento da coordenada y , pois os valores de temperatura decrescem com aumento de y , por serem menos afetados pela fonte de calor, ou pela sua variação, resultando em valores menores de sensibilidade.

Nas Figuras 4.14 até 4.17 estão apresentados os resultados relacionados à variação da sensibilidade para diferentes posições na direção y , tendo no eixo da abscissa a posição em x e no gráfico as diferentes posições em z , ficando o eixo das ordenadas reservado para mostrar os valores da sensibilidade H_Q . Note que essas temperaturas são lidas no momento em que o centro da ferramenta está passando pela posição x indicada no gráfico. Mais uma vez, os resultados para as demais posições na direção y (17, 21 e 25 mm) e para outros pontos de medição na direção x são similares aos mostrados, com o mesmo padrão de comportamento. Analisando as Figs. 4.14 até 4.17 pode-se observar que os valores de sensibilidade decaem com o aumento de y , assim como observado também na Fig. 4.13. Além disso, a sensibilidade à jusante do ponto onde está a ferramenta apresenta um grande decaimento, pois a fonte de calor ainda não passou por aquelas posições e os valores de temperatura são menores, logo a sua variação também é pequena

quando se varia o valor da taxa de calor.

As Figuras 4.18 e 4.19 mostram os resultados obtidos para as sensibilidades H_{hb} e H_{hconv} , respectivamente. Tais sensibilidades são calculadas com relação à variação da temperatura decorrente da variação dos coeficientes de transferência de calor entre a superfície inferior da peça e a base, h_b , e por convecção, h_{conv} . Observa-se que o comportamento das sensibilidades H_{hconv} e H_{hb} é semelhante àquele mostrado na Fig. 4.13 para a sensibilidade H_Q , porém as ordens de grandeza são bastante inferiores, ou seja, $H_Q \approx 10^1$, enquanto $H_{hb} \approx 10^{-2}$ e $H_{hconv} \approx 10^{-4}$. Logo, pode-se concluir que o campo de temperatura é governado principalmente pelo valor da fonte de calor, sendo pouco alterado pelos coeficientes de transferência de calor. Desta forma, daqui pra frente o termo *sensibilidade* será utilizado para descrever a taxa na qual a medida de temperatura seria afetada decorrente de uma variação na taxa de calor imposta ao sistema, ou seja, será considerada somente a sensibilidade H_Q .

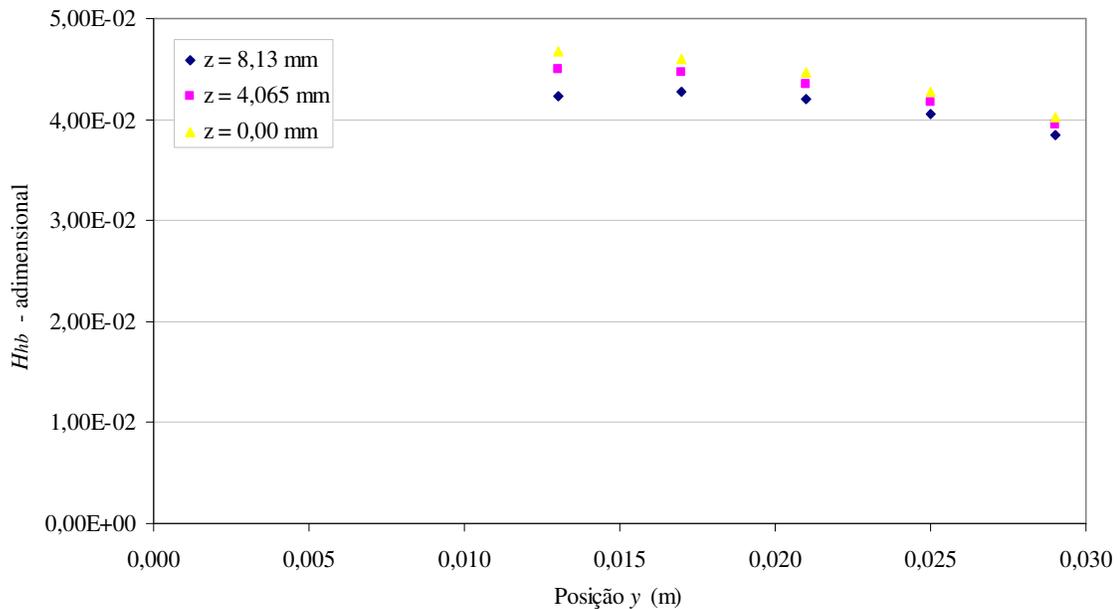


Figura 4.18. Sensibilidade H_{hb} dos termopares para posição $x = 285$ mm.

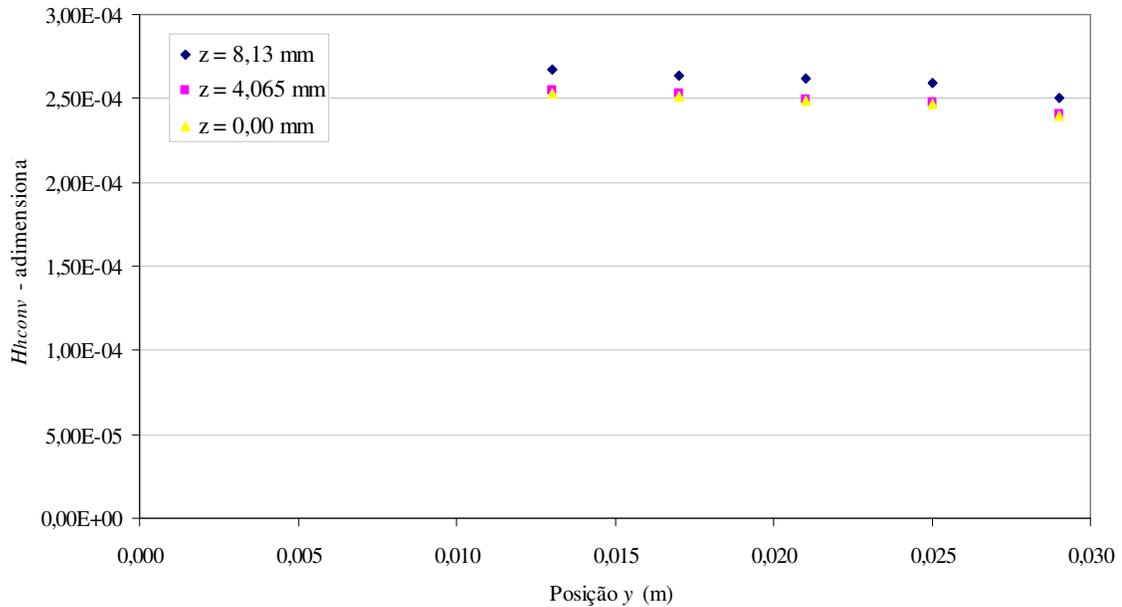


Figura 4.19. Sensibilidade H_{hconv} dos termopares para posição $x = 285$ mm.

Pela análise dos resultados obtidos no estudo da sensibilidade acima, podemos selecionar algumas posições para efetuarmos as medições de temperatura, as quais serão usadas futuramente na implementação do método de análise inversa:

- Na direção x : para configurações de termopares posicionados paralelamente a linha de soldagem, utiliza-se $x = 35, 85$ e 135 mm, para a medição ocorrendo quando a ferramenta está na posição $x = 85$ mm. Conforme observado nas Figs. 4.14 a 4.17, os valores da sensibilidade decaem rapidamente em relação com a distância do ponto de medição, então usa-se um ponto central (exatamente na posição de medição, onde se tem as maiores sensibilidades) e dois ao lado da medição; para aquelas configurações perpendiculares a linha de soldagem, utilizam-se três posições na direção x : $85, 135, 185$ mm. Apesar da sensibilidade não ser alterada para estas posições (veja as Figs. 4.14 e 4.17), elas foram escolhidas com o objetivo de comparar os resultados que serão obtidos pela metodologia inversa com os valores de sensibilidade.

- Na direção y : $13, 17, 21, 25$ e 29 mm. De acordo com a Fig. 4.13, a sensibilidade decai bastante na direção y , porém todas as posições serão utilizadas com o objetivo de testarmos se o método de escolha das posições dos termopares através desse cálculo de sensibilidade é válido – os termopares com maior sensibilidade deverão fornecer resultados de otimização com menores erros relativos.

- Na direção z : indiferente, conforme visto nas Figs. 4.13 a 4.19. Porém, serão escolhidas as posições relativas às superfícies superior e inferior da placa, pelas seguintes razões: facilitar a

programação; facilitar a próxima etapa do trabalho na qual é empregada o método GEO; e facilitar uma possível montagem experimental do processo.

Destas posições selecionadas, serão escolhidas oito combinações para serem utilizadas na Seção 4.4, a qual consiste na determinação dos parâmetros de ajuste do método GEO, sendo 3 delas com 10 termopares e as demais com 6. São elas:

Conjunto A (medição das temperaturas quando o centro da ferramenta estiver na posição $x = 85$ mm)

Termopar	Posição x (mm)	Posição y (mm)	Posição z (mm)
1	85,00	13,00	8,13
2	85,00	17,00	8,13
3	85,00	21,00	8,13
4	85,00	25,00	8,13
5	85,00	29,00	8,13
6	85,00	13,00	0,00
7	85,00	17,00	0,00
8	85,00	21,00	0,00
9	85,00	25,00	0,00
10	85,00	29,00	0,00

Conjunto B (medição das temperaturas quando o centro da ferramenta estiver na posição $x = 135$ mm)

Termopar	Posição x (mm)	Posição y (mm)	Posição z (mm)
1	135,00	13,00	8,13
2	135,00	17,00	8,13
3	135,00	21,00	8,13
4	135,00	25,00	8,13
5	135,00	29,00	8,13
6	135,00	13,00	0,00
7	135,00	17,00	0,00
8	135,00	21,00	0,00
9	135,00	25,00	0,00
10	135,00	29,00	0,00

Conjunto C (medição das temperaturas quando o centro da ferramenta estiver na posição $x = 185$ mm)

Termopar	Posição x (mm)	Posição y (mm)	Posição z (mm)
1	185,00	13,00	8,13
2	185,00	17,00	8,13
3	185,00	21,00	8,13
4	185,00	25,00	8,13
5	185,00	29,00	8,13
6	185,00	13,00	0,00
7	185,00	17,00	0,00
8	185,00	21,00	0,00
9	185,00	25,00	0,00
10	185,00	29,00	0,00

Conjunto D (medição das temperaturas quando o centro da ferramenta estiver em $x= 85$ mm)

Termopar	Posição x (mm)	Posição y (mm)	Posição z (mm)
1	35,00	13,00	8,13
2	85,00	13,00	8,13
3	135,00	13,00	8,13
4	35,00	13,00	0,00
5	85,00	13,00	0,00
6	135,00	13,00	0,00

Conjunto E (medição das temperaturas quando o centro da ferramenta estiver em $x= 85$ mm)

Termopar	Posição x (mm)	Posição y (mm)	Posição z (mm)
1	35,00	17,00	8,13
2	85,00	17,00	8,13
3	135,00	17,00	8,13
4	35,00	17,00	0,00
5	85,00	17,00	0,00
6	135,00	17,00	0,00

Conjunto F (medição das temperaturas quando o centro da ferramenta estiver em $x= 85$ mm)

Termopar	Posição x (mm)	Posição y (mm)	Posição z (mm)
1	35,00	21,00	8,13
2	85,00	21,00	8,13
3	135,00	21,00	8,13
4	35,00	21,00	0,00
5	85,00	21,00	0,00
6	135,00	21,00	0,00

Conjunto G (medição das temperaturas quando o centro da ferramenta estiver em $x= 85$ mm)

Termopar	Posição x (mm)	Posição y (mm)	Posição z (mm)
1	35,00	25,00	8,13
2	85,00	25,00	8,13
3	135,00	25,00	8,13
4	35,00	25,00	0,00
5	85,00	25,00	0,00
6	135,00	25,00	0,00

Conjunto H (medição das temperaturas quando o centro da ferramenta estiver em $x= 85$ mm)

Termopar	Posição x (mm)	Posição y (mm)	Posição z (mm)
1	35,00	29,00	8,13
2	85,00	29,00	8,13
3	135,00	29,00	8,13
4	35,00	29,00	0,00
5	85,00	29,00	0,00
6	135,00	29,00	0,00

4.4. Determinação do Melhor Parâmetro τ para cada Conjunto de Termopares

Para cada um dos conjuntos de termopares selecionados na Seção 4.3, ou seja, os oito possíveis posicionamentos para os leitores de temperatura, o algoritmo de otimização GEO irá determinar qual o melhor parâmetro τ (ou seja, aquele que fornece o menor valor da função objetivo) a ser utilizado na obtenção dos valores da taxa de calor (Q , W), do coeficiente de

convecção natural (h_{conv} , W/(m²K)), e do coeficiente de transferência de calor na superfície inferior da placa (h_b , W/(m²K)) pela análise inversa. Para tal análise, o MVF (descrito no Cap. 2) será utilizado em conjunto com o método GEO (descrito no Cap. 3), juntamente com um procedimento denominado “experimento numérico”, conforme descrito a seguir.

4.4.1. Metodologia de Solução

A primeira etapa para determinar o valor de τ consiste em simular o processo de Soldagem por Fricção Linear conforme descrito na Seção 4.1.2 e, para dados valores de Q , h_{conv} e h_b , obter as temperaturas nos pontos de medição descritos na Seção 4.3 para os oito conjuntos de termopares. Deste modo, a análise inversa é executada para verificar se os valores de Q , h_{conv} e h_b podem ser corretamente recuperados, utilizando diversos valores de τ no método GEO. Para considerar uma situação mais realística, quando as medidas de temperatura são afetadas por erros, os valores das temperaturas obtidos das simulações numéricas (para dados valores de Q , h_{conv} e h_b) serão perturbados por um ruído de acordo com um desvio padrão σ prescrito. O objetivo é avaliar como esses ruídos podem afetar a estimação de Q , h_{conv} e h_b . No processo de perturbação, os valores numéricos de temperatura serão denominados valores numérico-experimentais.

O procedimento do método numérico-experimental é descrito como segue:

1. Especificar um valor para o coeficiente de transferência de calor entre a peça e a base, h_b . Este valor será considerado $h_b = 350$ W/(m²K);
2. Especificar um valor para o coeficiente de convecção natural, h_{conv} . Este valor será considerado $h_{conv} = 30$ W/(m²K);
3. Especificar um valor para a energia total imposta, Q , produzida pelo atrito entre a ferramenta de soldagem e as placas. Este valor será considerado $Q = 1740$ W;
4. Resolver a equação diferencial tridimensional da condução do calor transiente, conforme descrito na Seção 4.1.2. Deve-se observar que o critério de convergência utilizado neste estudo é de 10^{-6} , calculado em relação ao campo de temperaturas obtidos em iterações subsequentes;
5. Determinar e armazenar os valores de temperaturas, T_i , para as posições relativas aos conjuntos de termopares mostrados na Seção 4.3;
6. Gerar um número randômico para cada posição de termopar ($rand_i$) entre 0 e 1;
7. Calcular: $\zeta_i = 0,5 - rand_i$. Com o valor de ζ_i , correspondente ao valor da integral da função erro gaussiana, selecionar o valor de η_i , argumento da integral da função erro

gaussiana, de uma tabela para esse tipo de integrais (veja Anexo A);

8. Escolher o valor da incerteza de medição : 0,0% (ou seja, considera-se a leitura das temperatura sem ruído de medição) e 1,0% (valor típico de incerteza de instrumentos de medição do tipo termômetro infravermelho). Considera-se que o valor da incerteza associada ao instrumento de medição é igual à 3σ , sendo σ o desvio padrão, dessa forma a confiança da medição numérica é de 99,73%.
9. Calcular os valores das temperaturas numérico-experimentais: $T_i' = T_i + \eta_i 3\sigma T_i$.

Os passos 5 ao 8 simulam erros de medição seguindo uma função de distribuição gaussiana com desvio padrão σ . Deve-se ressaltar que os valores do desvio padrão, σ , devem ser multiplicados pelo valor de T_i no passo 9 pois eles estão apresentados no passo 8 com valores percentuais, assim o produto (σT_i), no passo 9, é o valor do desvio padrão em K. Ainda no passo 9 acima, o produto (σT_i) é multiplicado por 3 para que se tenha um maior intervalo de confiança (99,73%). As Tabelas 4.1 e 4.2 mostram os valores das temperaturas numérico-experimentais, T_i' (em K), para os conjuntos de termopares A, B, C, D, E, F, G e H.

Uma vez que as temperaturas numérico-experimentais foram determinadas, a “análise de otimização” pode ser executada seguindo os passos abaixo (os valores dos parâmetros utilizados neste trabalho estão descritos junto com os passos):

1. Especificar a faixa na qual os parâmetros irão variar durante o processo de otimização:
 - a. Calor total gerado pelo atrito: $200 \text{ W} \leq Q \leq 2000 \text{ W}$;
 - b. Coeficiente de transferência de calor na superfície inferior da placas: $100 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}) \leq h_b \leq 500 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$;
 - c. Coeficiente de convecção natural: $10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}) \leq h_{conv} \leq 50 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$;
2. Especificar o número de avaliações da função objetivo (NFE) para cada τ : $NFE = 1000$, para $0.00 \leq \tau \leq 2.0$ (τ é alterado em passos de 0,25);
3. Especificar a função objetivo como $F(Q, h_b, h_{conv}) = \left[\sum_{i=1}^I (T_i' - T_{i,cal})^2 \right]^{1/2}$, onde $T_{i,cal}$ é a temperatura calculada no ponto i para dados valores de Q , h_b e h_{conv} durante o processo de otimização, e I é igual ao número de pontos de medição, $I = 10$ para os conjuntos A, B e C, e $I = 6$ para os conjuntos D, E, F, G e H;
4. Executar o algoritmo GEO e obter o valor de τ_{best} que retorna o valor mínimo de $F(Q, h_b, h_{conv})$ (este deve fornecer as melhores estimativas para Q , h_b e h_{conv});

As faixas de variação dos valores de Q , h_b e h_{conv} apresentadas na etapa 1 acima foram

escolhidas levando em consideração valores que fossem viáveis para estas variáveis; por exemplo, sabe-se que o coeficiente de convecção natural entre o ar e uma placa de alumínio é da ordem de $10^1 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$, logo não faria sentido estabelecer uma faixa de busca entre 1 e $1000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$. Seguindo a Eq. (3.2), foram utilizados quinze bits para representar cada uma das variáveis de projeto, ou seja, $m = 15$, considerando que o algoritmo GEO utilizado considera o mesmo número de bits para todas as variáveis, embora estas tenham limites de busca que diferem em ordem de grandeza, assim como a precisão requerida nos resultados da otimização, o que poderia levar ao uso de diferentes m para cada variável de projeto.

Deve ser observado que o número de avaliações da função objetivo (NFE) é igual ao número de vezes em que o código de volumes finitos é executado para cada τ , o que significa que o código de volumes finitos deve ser o mais rápido possível a fim de acelerar o processo de otimização, que é lento devido a sua natureza evolucionária.

Tabela 4.1. Temperaturas numérico-experimentais, T_i' (em K), para os conjuntos

A, B e C de termopares.

Termopar	Conjunto A		Conjunto B		Conjunto C	
	$3\sigma = 0,0\%$	$3\sigma = 1,0\%$	$3\sigma = 0,0\%$	$3\sigma = 1,0\%$	$3\sigma = 0,0\%$	$3\sigma = 1,0\%$
1	578,540	577,105	581,744	580,293	582,468	581,014
2	522,942	523,766	526,358	527,194	527,131	527,970
3	480,710	478,157	484,287	481,690	485,098	482,491
4	447,232	450,000	450,923	453,750	451,764	454,604
5	420,283	419,783	424,046	423,533	424,907	424,391
6	563,235	566,281	566,472	569,552	567,204	570,292
7	517,581	519,976	520,988	523,417	521,759	524,196
8	478,153	480,388	481,706	483,98	482,512	484,794
9	445,586	444,758	449,248	448,403	450,081	449,232
10	419,029	418,898	422,760	422,625	423,613	423,478

Tabela 4.2. Temperaturas numérico-experimentais, T_i' (em K), para os conjuntos D, E, F, G e H de termopares.

Conjunto		Termopar					
		1	2	3	4	5	6
D	$3\sigma = 0,0\%$	469,975	578,540	307,762	468,360	563,235	307,656
	$3\sigma = 1,0\%$	469,050	579,548	307,337	471,464	562,249	308,018
E	$3\sigma = 0,0\%$	461,895	522,942	307,122	460,346	517,581	307,023
	$3\sigma = 1,0\%$	461,008	523,766	306,705	463,322	516,750	307,378
F	$3\sigma = 0,0\%$	452,361	480,710	306,399	450,891	478,153	306,307
	$3\sigma = 1,0\%$	451,519	481,395	305,990	453,717	477,456	306,656
G	$3\sigma = 0,0\%$	441,758	447,232	305,632	440,376	445,586	305,549
	$3\sigma = 1,0\%$	440,966	447,806	305,233	443,034	445,000	305,889
H	$3\sigma = 0,0\%$	430,462	420,283	304,856	429,175	419,029	304,781
	$3\sigma = 1,0\%$	429,723	420,769	304,466	431,656	418,533	305,113

4.4.2. Análise dos Resultados

As Tabelas 4.3 e 4.4 mostram os valores obtidos, pela análise de otimização descrita na seção anterior, do calor total gerado pelo atrito, Q (em W), do coeficiente de transferência de calor entre a peça e a base, h_b (em $W/(m^2.K)$), e do coeficiente de convecção natural, h_{conv} (em $W/(m^2.K)$), para todos os conjuntos de termopares (A, B, C, D, F, G, H) e para as incertezas de medição (3σ) de 0,0% e 1,0%. Cada tabela está disposta de forma a mostrar os valores dos parâmetros obtidos (Q , h_b e h_{conv}) para o valor de τ que resultou no menor valor da função objetivo $F(Q, h_b, h_{conv})$, ou seja, o valor de τ mostrado é aquele denominado τ_{best} . Ainda, os valores mostrados entre parênteses nessas tabelas correspondem ao erro relativo para cada um dos parâmetros determinados pelo método de otimização. No Anexo B estão mostrados os resultados obtidos de Q , h_b e h_{conv} , para todos os valores de τ (o qual variou entre 0,0 e 2,0 em passos de 0,25). Deve-se observar que a determinação de τ_{best} foi feita pela comparação entre os valores da função objetivo mostradas em cada tabela do Anexo B para cada um dos oito conjuntos de termopares. Note que a função objetivo é diferente para cada conjunto de termopares, pois a mesma é função das temperaturas calculadas e medidas experimentalmente, as quais variam suas posições para cada conjunto, dessa forma a comparação do valor da função objetivo entre conjuntos distintos não pode ser feita, por se tratarem de funções diferentes.

Tabela 4.3. Valores de $F(Q, h_b, h_{conv})$, Q , h_b e h_{conv} para incerteza de 0,0%.

Conjunto	τ	F (K)	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
A	1,75	5,152	1775,084 (2,016 %)	418,650 (19,614 %)	12,023 (59,923 %)
B	2,00	5,318	1775,004 (2,012 %)	415,623 (18,750 %)	10,151 (66,165 %)
C	1,25	3,452	1718,082 (1,260 %)	307,019 (12,280 %)	44,631 (48,770 %)
D	1,25	2,500	1748,844 (0,508 %)	353,894 (1,113 %)	34,631 (15,437 %)
E	1,25	2,024	1749,722 (0,559 %)	360,144 (2,898 %)	39,475 (31,583 %)
F	1,25	1,662	1755,876 (0,912 %)	372,644 (6,470 %)	18,381 (38,730 %)
G	1,25	1,452	1717,204 (1,310 %)	317,175 (9,378 %)	44,631 (48,770 %)
H	1,00	1,196	1714,456 (1,468 %)	310,147 (11,386 %)	49,944 (66,479 %)
Valores Alvo	-	0,000	1740,000	350,000	30,000

Tabela 4.4. Valores de $F(Q, h_b, h_{conv})$, Q , h_b e h_{conv} para incerteza de 1,0%.

Conjunto	τ	F (K)	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
A	1,25	15,988	1790,144 (2,882 %)	400,682 (14,480 %)	49,504 (65,013 %)
B	1,75	16,244	1790,142 (2,882 %)	400,096 (14,313 %)	47,023 (56,744 %)
C	2,00	16,315	1794,072 (3,107 %)	400,004 (14,287 %)	49,506 (65,020 %)
D	1,25	6,962	1728,628 (0,653 %)	361,707 (3,345 %)	38,381 (27,937 %)
E	1,25	6,240	1755,874 (0,912 %)	361,707 (3,345 %)	38,775 (29,249 %)
F	1,25	5,786	1756,754 (0,963 %)	310,144 (11,387 %)	39,631 (32,104 %)
G	1,50	6,390	1713,578 (1,518 %)	307,022 (12,279 %)	48,742 (62,475 %)
H	1,25	4,904	1662,494 (4,454 %)	257,631 (26,391 %)	49,631 (65,437 %)
Valores Alvo	-	0,000	1740,000	350,000	30,000

Os resultados mostrados nas Tabs. 4.3 e 4.4 estão de acordo com a análise da sensibilidade mostrada na Seção 4.3. Os conjuntos A, B e C apresentam valores próximos de F , Q , h_b e h_{conv} , o que está de acordo com os resultados de sensibilidade mostrados nas Figs. 4.14 a 4.17, na qual as sensibilidades para as posições referentes a estes conjuntos apresentam valores próximos também. De acordo com a Fig. 4.13, para os conjuntos D, E, F, G e H os resultados obtidos de Q , h_b e h_{conv} deve se distanciar do valor considerado alvo, ou seja, o erro relativo deve aumentar com o aumento da distância à linha de soldagem, uma vez que os valores da sensibilidade decrescem nessa direção - esse comportamento pode ser verificado nas Tabs. 4.3 e 4.4.

Deve-se observar que o computador utilizado no processamento do código possui processador ATHLON 2600 e memória de 512MB, o qual necessitou de aproximadamente 27 minutos para realizar 1000 iterações.

4.5. Determinação da Melhor Configuração dos Termopares

Nesta etapa será determinada a melhor configuração de termopares, considerando os oito conjuntos descritos na Seção 4.3 e os valores de τ_{best} determinados na Seção 4.4 para cada uma das configurações. A melhor configuração será aquela que fornecer os valores da taxa de calor (Q), do coeficiente de convecção natural (h_{conv}), e do coeficiente de transferência de calor entre a peça e a base (h_b) mais próximos de seus valores considerados como “alvo”.

4.5.1 Metodologia de Solução

O procedimento para determinar a melhor configuração dos termopares é semelhante ao processo “análise de otimização” descrito na Seção 4.4.1. O passo 2 é alterado como segue:

1. Especificar a faixa na qual os parâmetros serão variados durante o processo de otimização:
 - a. Calor total gerado pelo atrito: $200 \text{ W} \leq Q \leq 2000 \text{ W}$;
 - b. Coeficiente na superfície inferior da placas: $100 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}) \leq h_b \leq 500 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$;
 - c. Coeficiente de convecção natural: $10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}) \leq h_{conv} \leq 50 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$;
2. **Especificar o número de avaliações da função objetivo (NFE), utilizando o valor de τ_{best} de cada conjunto (descrito nas Tabs. 4.3 e 4.4): $NFE = 10000$;**
3. Especificar a função objetivo como $F(Q, h_b, h_{conv}) = \left[\sum_{i=1}^I (T_i' - T_{i,cal})^2 \right]^{1/2}$, onde $T_{i,cal}$ é a temperatura calculada no ponto i para dados valores de Q , h_b e h_{conv} e I é igual ao número de pontos de medição, $I = 10$ para os conjuntos A, B e C, e $I = 6$ para os conjuntos D, E, F, G e H;
4. Executar o algoritmo GEO e obter os valores ótimos de Q_{best} , $h_{b,best}$ e $h_{conv,best}$.

4.5.2. Análise de Resultados

As Tabelas 4.5 a 4.7 mostram os resultados obtidos para Q_{best} , $h_{b,best}$ e $h_{conv,best}$ para os oito conjuntos de termopares. Nestas tabelas estão apresentados os valores obtidos utilizando o método numérico-experimental, para incertezas de medição de 0,0% e 1,0%. Analisando essas

tabelas, observa-se que os resultados ótimos estão de acordo com aquele que seria esperado após a análise da sensibilidade apresentada previamente na Seção 4.3. Assim, os conjuntos A, B e C (note que estes conjuntos estão posicionados perpendicularmente à linha de soldagem) fornecem aproximadamente os mesmos resultados, uma vez que a sensibilidade para estes conjuntos possuem o mesmo comportamento apresentado na Fig. 4.13. Para os conjuntos D, E, F, G e H observa-se que os resultados mostrados nas Tabs. 4.5 a 4.7 apresentam um aumento no erro relativo conforme os termopares se afastam da linha de solda (note que estes conjuntos estão posicionados paralelamente à linha de soldagem); tais resultados são também os esperados uma vez que a sensibilidade (conforme Figs. 4.13 a 4.17) decresce com o afastamento da linha de soldagem.

Portanto o conjunto D de termopares é aquele que apresenta os menores erros, sendo que para incerteza de 0,0% estes erros são iguais a 0,118%, 0,799% e 4,240%, para Q , h_b e h_{conv} , respectivamente, e para o caso com incerteza de 1,0% estes erros são iguais a 0,424% e 1,559% para Q e h_b , respectivamente, e de aproximadamente 25,437% para h_{conv} . O menor erro na estimação da taxa de calor indica que seu efeito sobre a distribuição de temperaturas na placa é mais importante do que o efeito dos coeficientes de transferência de calor. Mais uma vez, deve-se enfatizar que este resultado está de acordo com o esperado, uma vez os valores da sensibilidade relacionada a taxa de calor é muito maior do que aquela relacionada a ambos coeficientes de transferência de calor conforme mostrado nas Figs. 4.13, 4.18 e 4.19, assim os resultados obtidos pelo método inverso tendem a apresentar menores erros relativos.

Tabela 4.5. Taxa de calor Q_{best} (W) obtida com incertezas de 0,0% e 1,0%, para os diferentes conjuntos de termopares.

Conjunto	$3\sigma = 0,0\%$	Erro % *	$3\sigma = 1,0\%$	Erro % *
A	1769,084	1,671	1781,144	2,365
B	1769,521	1,697	1781,236	2,370
C	1765,082	1,441	1778,625	2,220
D	1742,052	0,118	1732,628	0,424
E	1742,089	0,120	1752,874	0,740
F	1745,652	0,325	1754,754	0,848
G	1717,204	1,310	1715,578	1,404
H	1718,526	1,234	1704,750	2,026

* o valor do erro é calculado em relação à 1740 W, o qual é o valor considerado como alvo.

Tabela 4.6. Taxa de transferência de calor na superfície inferior da placa $h_{b,best}$ (W/(m².K)) obtida com incertezas de 0,0% e 1,0%, para os diferentes conjuntos de termopares.

Conjunto	$3\sigma = 0,0\%$	Erro % *	$3\sigma = 1,0\%$	Erro % *
A	409,750	17,071	398,762	13,932
B	410,012	17,146	398,765	13,933
C	311,019	11,137	399,816	14,233
D	352,797	0,799	355,456	1,559
E	354,724	1,350	358,524	2,435
F	365,525	4,436	321,952	8,014
G	319,054	8,842	309,085	11,690
H	312,476	10,721	274,652	21,528

* o valor do erro é calculado em relação à 350 W/m²K, o qual é o valor considerado como alvo.

Tabela 4.7. Coeficiente de convecção natural $h_{conv,best}$ (W/m².K) obtida com incertezas de 0,0% e 1,0%, para os diferentes conjuntos de termopares.

Conjunto	$3\sigma = 0,0\%$	Erro % *	$3\sigma = 1,0\%$	Erro % *
A	14,375	52,083	49,499	64,997
B	12,648	57,840	47,023	56,743
C	41,738	39,127	49,512	65,040
D	31,272	4,240	37,631	25,437
E	31,906	6,353	37,942	26,473
F	21,395	28,683	39,412	31,373
G	42,747	42,490	44,542	48,473
H	48,958	63,193	49,056	63,520

* o valor do erro é calculado em relação à 30 W/m²K, o qual é o valor considerado como alvo.

Deve-se observar que a determinação da melhor configuração de termopares é feita com base na análise do erro relativo entre os valores alvo dos parâmetros e aqueles obtidos pelo GEO, e não pela análise do valor da função objetivo, uma vez que esta função é diferente para cada um dos oito conjuntos.

A Tabela 4.8 mostra os valores das temperaturas obtidas nas posições referentes aos termopares do conjunto D, utilizando os valores de Q_{best} , $h_{b,best}$ e $h_{conv,best}$ dados nas Tabs. 4.5 a 4.7 para o conjunto D. Nota-se que as temperaturas calculadas estão bastante próximas daquelas consideradas como reais (temperaturas numérico-experimentais), uma vez que os erros são

sempre menores que 0,8%, sendo que em alguns casos tais temperaturas apresentam erros relativos inferiores a 0,1%.

Tabela 4.8. Comparação das temperaturas calculadas com os valores de Q_{best} , $h_{tcb,best}$ e $h_{conv,best}$ em relação aos valores “reais” para o conjunto de termopares D.

Termopar	$3\sigma = 0,0\%$			$3\sigma = 1,0\%$		
	$T_{i,calc,best} (K)$	$T_i' (K)$	Erro %	$T_{i,calc,best} (K)$	$T_i' (K)$	Erro %
1	470,040	469,975	0,014	469,402	469,050	0,075
2	579,216	578,540	0,117	579,459	579,548	0,015
3	307,771	307,762	0,003	307,738	307,337	0,130
4	468,410	468,360	0,011	467,791	471,464	0,779
5	563,843	563,235	0,108	564,057	562,249	0,322
6	307,663	307,656	0,002	307,632	308,018	0,125

Dessa forma, pode-se concluir que a melhor configuração para posicionar os termopares na placa é aquela denominada “conjunto D”, e o valor do parâmetro τ a ser utilizado na análise inversa deverá ser 1,25.

4.6. Distribuição de Fonte de Calor Desconhecida

Nesta seção será feito o estudo considerando a fonte de calor com distribuição desconhecida, ou seja, ela não será regida pela Eq. (4.2), mas para cada volume de controle que estiver “dentro” do ombro da ferramenta (ou seja, a distância entre o centro da ferramenta e o centro do volume de controle for menor do que o raio do ombro) será atribuído um determinado valor de fluxo de calor. O objetivo da análise mostrada na presente seção do trabalho é utilizar a metodologia proposta e os resultados obtidos até então para testar um caso diferente, e mais complexo, determinando dessa forma a robustez do método. Além disso, deve-se lembrar que a utilização de fonte de calor aplicada em diferentes pontos da malha, sem a utilização de equação que descreva o seu perfil de distribuição, também pode ser vista como uma forma de determinar o perfil da distribuição da fonte de calor através do método inverso, uma vez que as equações que descrevem a fonte de calor, conforme mostrado no Capítulo 2, são obtidas através de deduções e análises que implicam no uso de hipóteses simplificativas, as quais podem estar descrevendo de forma distorcida o comportamento da fonte de calor. Além disso, pode-se ainda empregar a metodologia inversa proposta neste trabalho para outras fontes de calor além daquela gerada pelo

atrito na Soldagem por Fricção Linear, como por exemplo, a fonte de calor no processo de soldagem laser.

A Figura 4.20 mostra uma representação esquemática dos volumes de controle que se encontram “dentro” do ombro da ferramenta. Deve-se observar que para esta etapa do trabalho foi alterado o passo de tempo (de 1 para 4 segundos), dessa forma a cada passo de tempo a ferramenta (e os fluxos de calor) desloca-se uma distância referente a Δx , o que torna a implementação do método dos volumes finitos mais simples. Além disso, observe que o presente estudo de caso com fonte de calor desconhecida é implementado para o caso específico da malha previamente descrita na Seção 4.2; dessa forma uma alteração na malha acarretaria na necessidade de alterar a implementação dos fluxos de calor em cada volume, pois mais volumes estariam dentro do raio do ombro da ferramenta, para o caso de uma malha mais refinada, e o contrário aconteceria para uma malha menos refinada do que a atualmente utilizada. Os raios referentes aos volumes numerados de 1 até 12 na Fig. 4.20 estão mostrados na Tab. 4.9.

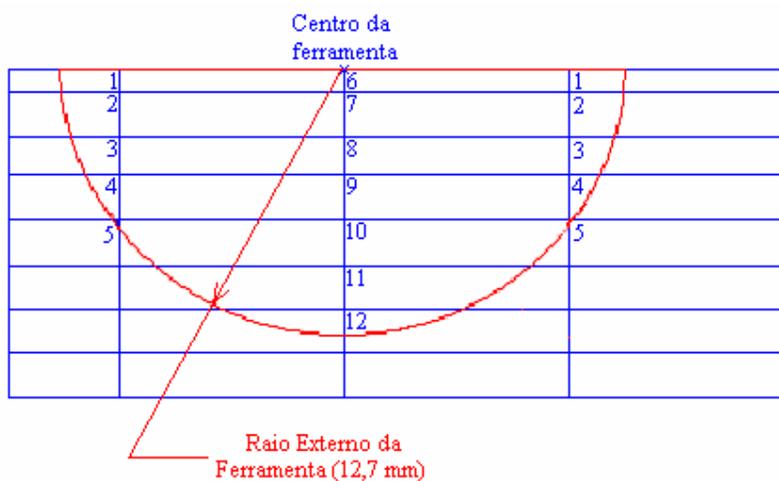


Figura 4.20. Representação esquemática dos volumes de controle sob a ferramenta.

Com o objetivo de discretizar o fluxo de calor para os volumes mostrados na Fig. 4.20, calcula-se o valor do raio médio para os volumes que possuem valores de raio próximos. Os seguintes volumes são considerados no cálculo deste raio médio: (1, 2 e 3), (4, 5 e 12), (6), (7, 8 e 9), (10 e 11). Após o cálculo do raio médio, utiliza-se a Eq. (4.2) para calcular o valor do fluxo de calor que deve ser imposto nos volumes de controle. Dessa forma serão cinco valores de raio médio e, conseqüentemente, cinco valores de fluxo de calor. A Tabela 4.10 mostra os valores dos raios médios e dos fluxos de calor (q_n , $n = 1, 12$) calculados para os 12 volumes descritos anteriormente. Observa-se na terceira coluna da Tab. 4.10 que os valores dos fluxos de calor variam entre 0,0 e 5×10^6 W/m², dessa forma, como a área de cada volume de controle é

conhecida, é utilizado o valor da taxa de calor (Q_n , $n = 1, 12$) em cada um desses volumes, conforme mostra a quarta coluna dessa mesma tabela, para que a faixa de busca destes parâmetros pelo método de otimização seja reduzida.

Tabela 4.9. Raios dos volumes mostrados na Fig. 4.20.

Volume	Raio (m)
1	0,01000
2	0,01005
3	0,01044
4	0,01118
5	0,01221
6	0,00000
7	0,00100
8	0,00300
9	0,00500
10	0,00700
11	0,00900
12	0,00110

Tabela 4.10. Raios médios, fluxos de calor e taxas de calor para os 12 volumes.

Volume	Raio médio (m)	q_n'' (W/m ²)	Q_n (W)
6	0,00000	0,000	0,000
7	0,00300	$1,217 \times 10^6$	24,335
8			
9			
10	0,00800	$3,245 \times 10^6$	64,893
11			
1	0,01016	$4,122 \times 10^6$	82,414
2			
3			
4	0,01146	$4,649 \times 10^6$	92,959
5			
12			

O procedimento para determinar os valores dos fluxos de calor e dos coeficientes de transferência de calor através do método GEO é semelhante ao processo descrito na Seção 4.4.1, porém com algumas alterações, pois agora têm-se cinco valores de taxas de calor, enquanto anteriormente se tinha somente um valor para a taxa de calor (a qual era utilizada na Eq. (4.2) para determinar o fluxo de calor). Dessa forma tem-se o seguinte procedimento:

1. Especificar a faixa na qual os parâmetros irão variar durante o processo de otimização:
 - a. Calor total gerado pelo atrito em cada volume de controle:

$$0,00 \text{ W} \leq Q_6 \leq 5,00 \text{ W};$$

$$5,30 \text{ W} \leq Q_{7,8,9} \leq 59,00 \text{ W};$$

$$18,70 \text{ W} \leq Q_{10,11} \leq 116,00 \text{ W};$$

$$30,40 \text{ W} \leq Q_{1,2,3} \leq 135,00 \text{ W};$$

$$39,10 \text{ W} \leq Q_{4,5,12} \leq 148,00 \text{ W};$$
 - b. Coeficiente na superfície inferior da placa: $100 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{K}) \leq h_b \leq 500 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{K})$;
 - c. Coeficiente de convecção natural: $10 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{K}) \leq h_{conv} \leq 50 \text{ W}/(\text{m}^2.\text{K})$;
2. Especificar o número de avaliações da função objetivo (*NFE*): $NFE = 20000$;
3. Especificar a função objetivo como:

$$F(Q_n, h_b, h_{conv}) = \left[\sum_{i=1}^I (T_i' - T_{i,cal})^2 \right]_{t=28seg}^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^I (T_i' - T_{i,cal})^2 \right]_{t=32seg}^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^I (T_i' - T_{i,cal})^2 \right]_{t=36seg}^{1/2}$$

onde $T_{i,cal}$ é a temperatura calculada no ponto i para dados valores de Q_n , h_b e h_{conv} e I é igual ao número de pontos de medição, $I = 6$ (referentes ao conjunto D). Note que neste caso as leituras de temperatura são feitas em três diferentes instantes de tempo, diferente dos casos anteriores onde foi feita somente uma leitura no tempo $t = 32 \text{ s}$ (conforme mostrado na Seção 4.5.1), porém os pontos de medição permanecem os mesmos (conjunto D). Os resultados obtidos com a utilização da função objetivo mostrada na Seção 4.5.1 apresentaram erros relativos elevados, dessa forma foi feita uma alteração na função objetivo, levando a um aumento na quantidade de parâmetros de entrada no método de otimização, os quais são necessários devido ao aumento no número de parâmetros a serem determinados.

4. Executar o algoritmo GEO e obter os valores ótimos de Q_n , h_b e h_{conv} .

As Tabelas 4.11 e 4.12 mostram os valores otimizados de Q_n , h_b e h_{conv} obtidos pelo procedimento acima descrito, onde os valores que aparecem entre parênteses ao lado dos resultados são os erros relativos percentuais em relação ao valor considerado alvo. Observe que

os valores de T_i' , utilizados na etapa 3 do procedimento acima, são obtidos da mesma forma mencionada na Seção 4.4.1, incluindo o procedimento denominado “numérico-experimental”.

Tabela 4.11. Valores otimizados de h_b e h_{conv} .

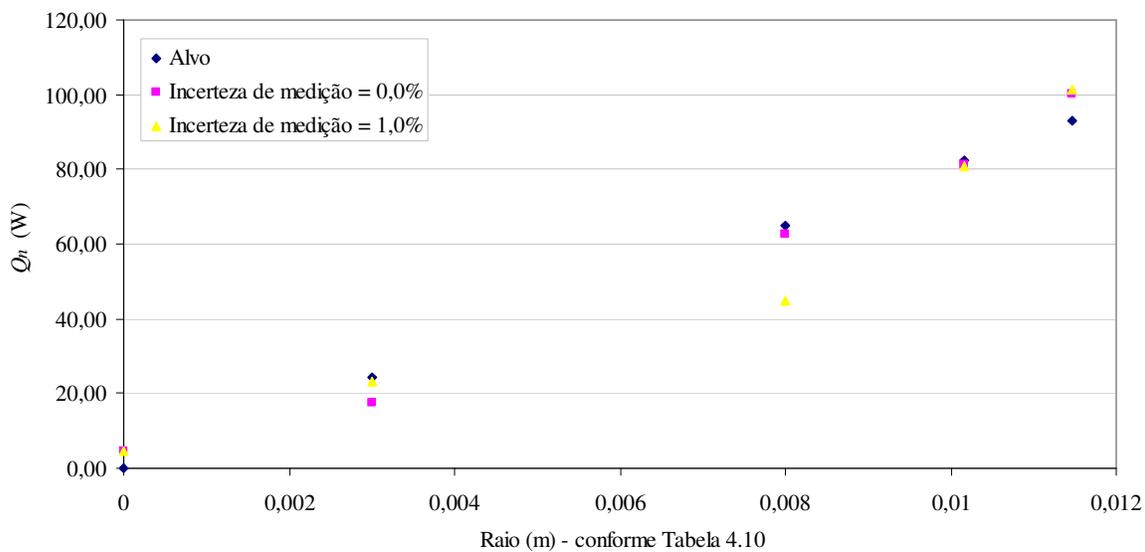
	Alvo	$3\sigma = 0,0\%$	$3\sigma = 1,0\%$
h_b (W/(m ² .K))	350,000	353,504 (1,001 %)	375,612 (7,317 %)
h_{conv} (W/(m ² .K))	30,000	22,352 (25,493 %)	11,983 (60,056 %)

Pela análise das Tabs. 4.11 e, principalmente, 4.12, nota-se que o método inverso proposto e utilizado neste trabalho apresenta bons resultados, mesmo com o aumento do número de variáveis a serem determinadas. Os resultados obtidos para as taxas de calor Q_n apresentaram erros relativos entre 1,0% e 28,0 %, para o caso com incerteza de 0,0%, e entre 2,0 e 31,0% para o caso com incerteza de 1,0%. Apesar dos erros relativos serem altos em alguns casos ($\approx 30,0\%$), o comportamento da fonte de calor foi recuperado pelo método de otimização conforme mostrado na Fig. 4.21, onde os resultados da Tab. 4.12 estão representados graficamente. Deve-se observar que os valores dos erros relativos para as taxas de calor Q_6 (taxa de calor no volume de controle localizado no centro da ferramenta) não foram calculados e não estão mostrados na Tab. 4.12, pois o seu valor alvo é de 0,0 W. Para o coeficiente de transferência de calor entre a peça de trabalho e a sua base, h_b , os erros relativos foram de 1,001% e 7,317%, para os casos com incertezas de 0,0% e 1,0%, respectivamente, sendo estes resultados considerados bons em relação aqueles mostrados na Tab. 4.6, onde o método GEO precisava determinar apenas três parâmetros desconhecidos. Já para o coeficiente de transferência de calor natural, h_{conv} , esses erros relativos foram de 25,493% (para incerteza de 0,0%) e de 60,056% (para incerteza de 1,0%), o que confirma a afirmação de que os coeficientes de transferência de calor (e em especial o de convecção natural) possuem uma baixa influência na determinação do campo de temperaturas em relação ao calor gerado pelo atrito entre a ferramenta de soldagem e a peça de trabalho, o que pode ser verificado pelo estudo de sensibilidade apresentado nas Figs. 4.13, 4.18 e 4.19 na Seção 4.3.

Deve-se enfatizar que os resultados acima discutidos podem ser melhorados refazendo as Seções 4.4 e 4.5, pois, por exemplo, existe a possibilidade de que τ_{best} para este caso de fonte de calor desconhecida não seja o mesmo que aquele determinado para fonte de calor linear, uma vez que τ é o parâmetro de ajuste no método GEO.

Tabela 4.12. Valores otimizados de Q_n .

Volume	Q_n (W) (Alvo)	Q_n (W) ($3\sigma = 0,0\%$)	Q_n (W) ($3\sigma = 1,0\%$)
6	0,000	4,679	4,679
7 8 9	24,335	17,596 (27,693 %)	23,132 (4,943 %)
10 11	64,893	62,514 (3,666 %)	44,985 (30,678 %)
1 2 3	82,414	81,405 (1,224 %)	80,711 (2,066 %)
4 5 12	92,959	100,148 (7,733 %)	101,568 (9,261 %)

Figura 4.21. Valores otimizados de Q_n .

5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DESTE TRABALHO

A metodologia proposta neste trabalho foi capaz de fornecer uma estimativa satisfatória para todos os parâmetros desconhecidos. Para os cinco valores discretos da taxa de transferência de calor o erro variou entre 1,0 e 28%, para o caso com incerteza de medição de 0,0%, e entre 2,0 e 31% para o caso com incerteza de medição de 1,0%. Já para o coeficiente de transferência de calor por convecção natural, o erro ficou na faixa entre 25 e 60%, e para o coeficiente de transferência de calor na superfície inferior da placa foi na faixa entre 1,0 e 7,0%. O menor erro na estimativa da taxa de calor indica que seu efeito sobre o campo de temperaturas na placa é mais importante do que o efeito dos coeficientes de transferência de calor, o que pôde ser verificado na análise da sensibilidade relacionada com a posição dos termopares, uma vez que esta sensibilidade quando calculada para a taxa de calor apresentou valores da ordem de 10^1 , enquanto que para os coeficientes de transferência de calor na superfície inferior da peça e de convecção natural foi da ordem de 10^{-2} e de 10^{-4} , respectivamente, concordando com os valores de erro relativo dos resultados obtidos pelo método de otimização. Deve-se lembrar que os erros relativos foram significativamente mais baixos para o caso que foi considerada a fonte sendo representada por uma equação, onde se tinham três parâmetros desconhecidos, e não sete parâmetros conforme os dados acima mostrados, o que tornou o problema de otimização muito mais complexo. Para este caso com menos parâmetros desconhecidos, para a taxa de transferência de calor o erro relativo foi de 0,118 e 0,424%, para o coeficiente de transferência de calor por convecção natural o erro foi de 4,240% e 25,437%, e para o coeficiente de transferência de calor na superfície inferior da placa foi de 0,799 e 1,559% (para o caso com incerteza de medição de 0,0% e 1,0%, respectivamente).

Como próximos passos na pesquisa, sugerem-se (i) a utilização dos atuais resultados para implementação de problemas inversos tendo como ponto de partida microestrutura, dureza ou tensões residuais da peça soldada, uma vez que estas características são dependentes da distribuição transiente de temperaturas aqui determinada; (ii) a comparação entre os diferentes métodos de otimização, com o objetivo de determinar na prática qual o melhor método a ser utilizado neste tipo de problema, ou seja aquele que fornece os menores erros, com os menores tempos de processamento; (iii) a determinação de parâmetros diretamente ligados ao processo de soldagem, por exemplo, velocidade de soldagem e rotação da ferramenta, ao invés das taxas de calor; e ainda (iv) conforme mencionado no Capítulo 4, sugere-se fazer um estudo relacionado à obtenção do perfil da fonte de calor empregando a metodologia inversa utilizada neste trabalho, podendo assim realizar um comparativo entre os resultados dos perfis de fonte de calor obtidos pela metodologia inversa e aqueles obtidos analiticamente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Al-Khalidy, N., 1995. “Enthalpy Technique for Solution of Stefan Problems: Application of the Keyhole Plasma Arc Welding Process Involving Moving Heat Source”, **International Communication in Heat and Mass Transfer**, vol. 22, pp. 779 – 790.
- Amado-Becker, A. F., Amorim, H., Anflor, C., Backlund, P., Bourne, K., Castanheira do Nascimento, V., Coutinho Vieira, L., Fleming, P., Galarça, M., Guimarães Naves, V. T., Lee, J., Mascarenas, D., Mossi, A., Neis, P. D., Pacheco, A., Reich, A., Rivas, S., Rykaczewski, K., Shah, S., Siddharth, A., Sobczyk Sobrinho, M., Viegas Wentz, A., Ward, S., White, W., Wolf, M. A., Zañartu-Apara, G. J., 2007. “Predictive Process Dynamics in Manufacturing”, **Submitted to ASME Journal of Manufacturing Engineering**.
- Ávila, S. L., Lima, C. B., Carpes Junior, W. P., Vasconcelos, J. A., 2003. “Otimização – Conceitos Básicos, Ferramentas e Aplicações”, **Revista de Automação e Tecnologia da Informação**, SENAI Florianópolis, Brasil, vol. 2, n. 1, pp 70-75.
- Bak, P., Sneppen, K., 1993. “Punctuated Equilibrium and Criticality in a Simple Model of Evolution”, **Physical Review Letters**, vol. 71, n. 24, pp. 4083-4086.
- Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., Sherali, H. D., 1990. “**Linear Programming and Network Flows**”, 2^a ed., John Wiley & Sons, New York.
- Binda, B., Capello, E., Previtali, B., 2004. “A Semi-Empirical Model of the Temperature Field in the AISI 304 Laser Welding”, **Journal of Materials Processing Technology**, vol. 155, pp. 1235 – 1241.
- Boettcher, S., Percus, A.G., 2001. “Optimization with Extremal Dynamics”, **Physical Review Letters**, vol. 86, pp. 5211-5214.
- Chao, Y. J., Qi, X., Tang, W., 2003. “Heat Transfer in Friction Stir Welding – Experimental and Numerical Studies”, **Journal of Manufacturing Science and Engineering**, vol. 125, pp. 138 – 145.

- Fourier, J. B., 1822. “**Theorie analytique de la chaleur**”, Paris (traduzido para inglês por A. Freeman, Dover Publications Inc., New York, 1955)
- Frigaard, O., Grong, O., Midling, O. T., 2001. “A Process Model for Friction Stir Welding of Age Hardening Aluminum Alloys”, **Metallurgical and Materials Transactions**, vol. 32A, pp. 1189 – 1200.
- Glover, F., 1989. “Tabu Search – Part I”, **ORSA Journal on Computing**, vol. 1, pp. 190 - 206.
- Goldberg, D. E., 1989. “**Genetic Algorithms in Search – Optimization and Machine Learning**”, Addison-Wesley, New York.
- Gonçalves, C. V., Vilarinho, L. O., Scotti, A., Guimarães, G., 2006. “Estimation of Heat Source and Thermal Efficiency in GTAW Process Using Inverse Techniques”, **Journal of Materials Processing Technology**, vol. 172, pp. 42 - 51.
- Gordon, C., Webb, D. L., Wolpert, S., 1992. “One can not hear the shape of a drum.”, **Bull. Amer. Math. Soc.**, vol. 27, pp. 134 – 138.
- Gould, J. E., Feng, Z., Ditzel, P., 1996. “Preliminary Modeling of the Friction Stir Welding Process”, **Conference on Joining of High Performance Materials**, sponsored by ICAWT (International Conference on Advances in Welding Technology), pp. 297.
- Hagan, M. T., Demuth, H. B., Beale, M., 1996. “**Neural Network Design**”, PWS Publishing Company, Boston, MA.
- Howell, J., 2007. “Methods for Treating Inverse Problems in Heat Transfer”, **Proceedings of the Pan American Advance Study Institute**, Porto Alegre, Brazil.
- Hromkovic, J., 2001. “**Algorithms for hard problems: introduction to combinatorial optimization, randomization, approximation, and heuristics**”, Springer-Verlag London Berlin Heidelberg New York.
- Incropera, F. P., DeWitt, D. P., 1998. “**Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**”, LTC Editora.

- Kac, M., 1966. "Can you hear the shape of a drum?", **Amer. Matr. Monthly**, vol. 73, pp. 1 -23.
- Kamp, N., Sullivan A., Robson, J. D., 2007. "Modelling of Friction Stir Welding of 7xxx Aluminium Alloys", **Materials Science & Engineering**, vol. 466, p. 246 – 255.
- Lin, C.Y., Hajela, P., 1992. "Genetic algorithms in optimization problems with discrete and integer design variables", **Engineering Optimization**. vol. 19, pp. 309-327.
- Mackwood, A., 2001. **TS4D User Guide**, University of Essex, UK.
- Maliska, C. R., 1995. "**Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**", LTC Editora.
- Özişik, M. N., 1990. "**Transferência de Calor – Um Texto Básico**", Editora Guanabara.
- Pan American Advance Study Institute, Proceedings**, Porto Alegre, Brazil, 2007.
- Protter, M. H., 1987. "**Can you hear the shape of a drum?**", Revisited. **SIAM Rev.**, vol. 29, pp. 185 – 197.
- Rosenthal, D., Schemerber, R., 1938. "Thermal Studying of Arc Welding", **Journal of Welding**, vol. 17, pp. 208.
- Russell, M. J., Sheercliff, H. R., 1999. "Analytic Modeling of Microstructure Development in Friction Stir Welding", **1st International Symposium on Friction Stir Welding**, Thousand Oaks, CA, USA.
- Santos, M. R. dos, Sousa, P. F. B. de, Guimarães, G., Carvalho, S. R. de, Lima e Silva, S. M. M. de, 2007. "Comparison of Inverse Methods in the Determination of Heat Flux and Temperature in Cutting Tools During a Machining Process", **19th International Congress of Mechanical Engineering**, Brasília, DF.
- Schmidt, H., Hattel, J., Wert, J., 2003. "An Analytical Model for the Heat Generation in Friction Stir Welding", **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, vol. 12, pp. 143 – 157.

Schmidt, H., Hattel, J., Scripta Mater. (2007). doi: 10.1016/j.scriptamat.2007.10.008

Silva Neto, A. J., Moura Neto, F. D., 2005. “**Problemas Inversos: Conceitos Fundamentais e Aplicações**”, Editora UERJ.

Song, M., Kovacevic, R., 2002. “Thermal Modeling of Friction Stir Welding in a Moving Coordinate System and its Validation”, **International Journal of Machine Tools & Manufacture**, vol. 43, pp. 605 - 615.

Soundararajan, V., Zekivic, S., Kovacevic, R., 2005. “Thermo-mechanical Model with Adaptive Boundary Conditions for Friction Stir Welding of Al 6061”, **International Journal of Machine Tools & Manufacture**, vol. 45, pp. 1577 - 1587.

Sousa, F. L., Ramos, F.M., Paglione, P., Girardi, R. M., 2003. “New Stochastic Algorithm for Design Optimization”, **AAIA Journal**, vol. 41., n. 9, pp. 1808-1818.

Thomas, W. M., Nicholas, E. D. Thomas, W.M.; Nicholas, E. D.; Needham, J. C.; Murch, M. G.; Temple-Smith, P.; Dawes, C. J., 1991. “**Friction stir butt welding**”, GB Patent No. 9125978.8, International Patent No. PCT/GB92/02203.

Ulysse, P., 2002. “Three-dimensional Modeling of the Friction Stir Welding Process”, **International Journal of Machine Tools & Manufacture**, vol. 42, pp. 1549 – 1557.

Vilaça, P., Quintino, L., dos Santos, J. F., Zettler, R., Sheikhi, S., 2006. “Quality Assessment of Friction Stir Welding Joints via an Analytical Thermal Model, iSTIR”, **Materials Science and Engineering**, vol. 445, pp. 501 – 508.

Vielmo, H. A., 2006. “Notas de aula da disciplina: Transferência de Calor de Mecânica dos Fluidos Computacional I – MEC046”, **Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica**.

Zhu, X. K., Chao, Y. J., 2003. “Numerical Simulation of Transient Temperature and Residual Stresses in Friction Stir Welding of 304L Stainless Steel”, **Journal of Materials Processing Technology**, vol. 146, pp. 263 – 272.

ANEXO B

Resultados obtidos de Q , h_b e h_{conv} , para todos os valores de τ (o qual variou entre 0,0 e 2,0 em passos de 0,25), para o oito conjuntos de termopares e incertezas de 0,0 e 1,0%. Os valores entre parênteses representam os erros relativos (%) calculados com base nos valores alvo apresentados na última linha de cada tabela.

Conjunto A – Incerteza de medição (3σ) de 0,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	6,727	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,587 (21,957)
0,25	6,719	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	6,719	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,75	7,781	1789,334 (2,835)	424,902 (21,401)	32,919 (9,729)
1,00	8,059	1790,268 (2,889)	421,777 (20,508)	32,919 (9,729)
1,25	5,561	1775,106 (2,018)	403,027 (15,151)	30,258 (0,859)
1,50	5,243	1704,688 (2,029)	281,251 (19,642)	45,005 (50,017)
1,75	5,152	1775,084 (2,016)	418,650 (19,614)	12,023 (59,923)
2,00	5,243	1704,688 (2,029)	281,250 (19,643)	45,001 (50,003)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto B – Incerteza de medição (3σ) de 0,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	9,760	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,587 (21,957)
0,25	9,742	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	8,602	1792,618 (3,024)	424,902 (21,401)	30,497 (1,657)
0,75	8,659	1792,904 (3,040)	424,902 (21,401)	30,419 (1,396)
1,00	8,478	1790,212 (2,886)	421,777 (20,508)	32,919 (9,730)
1,25	8,019	1789,080 (2,821)	420,214 (20,061)	30,219 (0,729)
1,50	6,267	1776,738 (2,111)	403,025 (15,150)	32,004 (6,681)
1,75	8,062	1789,106 (2,822)	418,750 (19,643)	30,022 (0,074)
2,00	5,318	1775,004 (2,012)	415,623 (18,750)	10,151 (66,165)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto C – Incerteza de medição (3σ) de 0,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	11,101	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,587 (21,957)
0,25	11,081	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	8,828	1792,616 (3,024)	418,652 (19,615)	32,997 (9,990)
0,75	8,866	1792,904 (3,040)	421,777 (20,508)	32,919 (9,730)
1,00	5,054	1714,456 (1,468)	310,095 (11,401)	43,381 (44,604)
1,25	3,452	1718,082 (1,260)	307,019 (12,280)	44,631 (48,770)
1,50	6,774	1780,254 (2,313)	402,244 (14,927)	32,004 (6,681)
1,75	8,130	1789,080 (2,821)	418,261 (19,503)	30,023 (0,078)
2,00	8,132	1789,086 (2,821)	418,261 (19,503)	30,022 (0,074)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto D – Incerteza de medição (3σ) de 0,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	9,232	1704,244 (2,054)	281,740 (19,503)	36,587 (21,957)
0,25	9,227	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	9,227	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,75	8,934	1795,540 (3,192)	410,824 (17,378)	13,075 (56,416)
1,00	4,967	1756,644 (0,957)	360,095 (2,884)	48,381 (61,270)
1,25	2,500	1748,844 (0,508)	353,894 (1,113)	34,631 (15,437)
1,50	5,495	1775,978 (2,069)	401,049 (14,585)	10,062 (66,459)
1,75	5,344	1775,106 (2,018)	400,292 (14,369)	10,062 (66,459)
2,00	5,314	1775,052 (2,014)	400,097 (14,313)	10,022 (66,590)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto E – Incerteza de medição (3σ) de 0,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	8,397	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,587 (21,957)
0,25	8,388	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	7,743	1792,616 (3,024)	424,902 (21,401)	12,841 (57,197)
0,75	8,388	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
1,00	5,238	1778,842 (2,232)	409,274 (16,935)	10,414 (65,287)
1,25	2,024	1749,722 (0,559)	360,144 (2,898)	39,475 (31,583)
1,50	4,252	1775,978 (2,068)	401,049 (14,585)	10,062 (66,459)
1,75	4,111	1775,106 (2,018)	400,097 (14,313)	10,023 (66,589)
2,00	4,120	1775,106 (2,018)	400,097 (14,313)	10,100 (66,332)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto F – Incerteza de medição (3σ) de 0,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	7,803	1662,048 (4,480)	281,740 (19,503)	36,587 (21,957)
0,25	7,713	1662,488 (4,455)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	6,242	1792,670 (3,027)	424,902 (21,401)	12,841 (57,197)
0,75	7,808	1662,048 (4,480)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
1,00	4,832	1792,904 (3,040)	409,274 (16,935)	12,919 (56,937)
1,25	1,662	1755,876 (0,912)	372,644 (6,470)	18,381 (38,730)
1,50	3,201	1775,320 (2,030)	400,268 (14,362)	10,027 (66,577)
1,75	3,223	1776,204 (2,081)	400,292 (14,369)	10,022 (66,593)
2,00	3,212	1775,326 (2,030)	400,292 (14,369)	10,100 (66,332)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto G – Incerteza de medição (3σ) de 0,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	5,804	1662,048 (4,480)	281,740 (19,502)	36,587 (21,957)
0,25	5,783	1662,488 (4,455)	281,740 (19,502)	36,626 (22,087)
0,50	5,101	1792,670 (3,027)	424,902 (21,401)	12,841 (57,197)
0,75	5,808	1662,048 (4,480)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
1,00	4,834	1793,782 (3,091)	421,777 (20,508)	12,919 (56,937)
1,25	1,452	1717,204 (1,310)	317,175 (9,378)	44,631 (48,770)
1,50	2,482	1777,956 (2,181)	400,024 (14,292)	10,023 (66,589)
1,75	2,468	1775,326 (2,030)	400,048 (14,299)	10,023 (66,589)
2,00	2,467	1775,326 (2,030)	400,024 (14,292)	10,028 (66,573)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto H – Incerteza de medição (3σ) de 0,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	4,466	1662,048 (4,480)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,25	4,378	1662,488 (4,455)	283,302 (19,056)	36,626 (22,087)
0,50	4,466	1662,048 (4,480)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,75	4,466	1662,048 (4,480)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
1,00	1,196	1714,456 (1,468)	310,1473 (11,386)	49,944 (66,479)
1,25	1,202	1714,236 (1,481)	310,925 (11,164)	48,694 (62,312)
1,50	2,872	1793,782 (3,091)	407,714 (16,490)	12,763 (57,458)
1,75	3,142	1793,782 (3,091)	388,573 (11,021)	32,606 (8,688)
2,00	2,880	1789,168 (2,826)	382,037 (9,153)	35,009 (16,696)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto A – Incerteza de medição (3σ) de 1,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	17,885	1704,244 (2,055)	281,740 (19,503)	31,587 (5,290)
0,25	17,900	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	16,360	1792,666 (3,027)	412,402 (17,829)	32,997 (9,990)
0,75	17,610	1812,074 (4,142)	444,519 (27,006)	43,381 (44,604)
1,00	16,404	1793,782 (3,091)	415,527 (18,722)	32,919 (9,730)
1,25	15,988	1790,144 (2,882)	400,682 (14,480)	49,504 (65,013)
1,50	16,246	1794,318 (3,122)	412,547 (17,871)	47,317 (57,722)
1,75	16,248	1794,536 (3,134)	412,596 (17,884)	47,494 (58,314)
2,00	16,245	1794,346 (3,123)	412,522 (17,864)	47,494 (58,314)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto B – Incerteza de medição (3σ) de 1,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	18,211	1704,244 (2,055)	281,740 (19,503)	31,587 (5,290)
0,25	18,217	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	18,217	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,75	16,593	1792,904 (3,040)	412,402 (17,829)	32,919 (9,730)
1,00	16,548	1793,782 (3,091)	409,277 (16,936)	32,919 (9,730)
1,25	16,249	1790,376 (2,894)	400,291 (14,369)	47,003 (56,678)
1,50	16,253	1792,780 (3,033)	400,291 (14,369)	49,504 (65,014)
1,75	16,244	1790,142 (2,882)	400,096 (14,313)	47,023 (56,744)
2,00	16,484	1793,782 (3,091)	407,714 (16,490)	37,606 (25,355)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto C – Incerteza de medição (3σ) de 1,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	18,302	1704,244 (2,055)	281,740 (19,503)	31,587 (5,290)
0,25	18,305	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	16,647	1792,670 (3,027)	412,402 (17,830)	32,997 (9,990)
0,75	16,634	1795,410 (3,184)	402,635 (15,038)	37,006 (23,353)
1,00	16,604	1793,782 (3,091)	409,277 (16,936)	32,919 (9,729)
1,25	16,340	1795,418 (3,185)	400,682 (14,480)	49,504 (65,013)
1,50	16,321	1794,538 (3,134)	400,096 (14,313)	49,504 (65,014)
1,75	16,318	1794,536 (3,134)	400,095 (14,313)	49,992 (66,640)
2,00	16,315	1794,072 (3,107)	400,004 (14,287)	49,506 (65,020)
Valores Alvo	-	1740,000	350,00	30,00

Conjunto D – Incerteza de medição (3σ) de 1,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	8,896	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,587 (21,957)
0,25	8,887	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	8,887	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,75	8,887	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
1,00	7,516	1714,456 (1,468)	310,095 (11,401)	43,381 (44,604)
1,25	6,962	1728,628 (0,653)	361,707 (3,345)	38,381 (27,937)
1,50	7,045	1718,744 (1,222)	299,965 (14,296)	49,986 (66,619)
1,75	7,045	1718,744 (1,222)	299,989 (14,289)	49,986 (66,619)
2,00	7,045	1718,744 (1,222)	299,989 (14,289)	49,995 (66,651)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto E – Incerteza de medição (3σ) de 1,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	8,273	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,587 (21,957)
0,25	8,264	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	8,264	1704,236 (2,055)	281,740 (19,5030)	36,626 (22,087)
0,75	8,264	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
1,00	6,388	1714,456 (1,468)	310,095 (11,401)	43,381 (44,604)
1,25	6,240	1755,874 (0,912)	361,707 (3,345)	38,775 (29,249)
1,50	6,914	1690,622 (2,838)	276,527 (20,992)	39,204 (30,681)
1,75	6,996	1690,624 (2,838)	278,858 (20,326)	36,783 (22,610)
2,00	6,996	1690,624 (2,838)	278,858 (20,326)	36,783 (22,610)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto F – Incerteza de medição (3σ) de 1,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	7,823	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,587 (21,957)
0,25	7,814	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	7,814	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,75	7,814	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
1,00	7,806	1770,706 (1,765)	360,144 (2,898)	43,381 (44,604)
1,25	5,786	1756,754 (0,963)	310,144 (11,387)	39,631 (32,104)
1,50	6,495	1775,428 (2,036)	406,933 (16,267)	10,140 (66,198)
1,75	6,464	1775,436 (2,036)	406,542 (16,155)	10,140 (66,198)
2,00	6,951	1775,986 (2,068)	412,524 (17,864)	10,009 (66,638)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto G – Incerteza de medição (3σ) de 1,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	7,745	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,587 (21,957)
0,25	7,732	1704,236 (2,055)	281,740 (19,503)	36,626 (22,087)
0,50	6,730	1662,054 (4,480)	256,740 (26,646)	36,315 (21,050)
0,75	6,697	1662,048 (4,480)	256,740 (26,646)	36,626 (22,087)
1,00	6,432	1662,048 (4,480)	256,740 (26,646)	39,126 (30,421)
1,25	6,410	1662,500 (4,454)	257,422 (26,451)	38,755 (29,184)
1,50	6,390	1713,578 (1,518)	307,022 (12,279)	48,742 (62,475)
1,75	6,432	1662,048 (4,480)	256,740 (26,646)	39,126 (30,421)
2,00	6,432	1662,048 (4,480)	256,740 (26,646)	39,126 (30,421)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000

Conjunto H – Incerteza de medição (3σ) de 1,0%

τ	<i>Função Objetivo (K)</i>	Q (W)	h_b (W/(m ² .K))	h_{conv} (W/(m ² .K))
0,00	6,390	1646,676 (5,363)	256,740 (26,646)	31,587 (5,290)
0,25	6,613	1648,426 (5,263)	256,740 (26,646)	36,626 (22,087)
0,50	5,630	1662,496 (4,454)	285,646 (18,387)	11,315 (62,283)
0,75	5,742	1662,048 (4,480)	256,740 (26,646)	36,626 (22,087)
1,00	5,116	1662,048 (4,480)	260,647 (25,529)	36,863 (22,877)
1,25	4,904	1662,494 (4,454)	257,631 (26,391)	49,631 (65,437)
1,50	5,076	1662,048 (4,480)	257,521 (26,423)	39,829 (32,764)
1,75	5,097	1662,488 (4,455)	260,917 (25,452)	36,862 (22,872)
2,00	5,116	1662,050 (4,480)	260,649 (25,529)	36,863 (22,876)
Valores Alvo	-	1740,000	350,000	30,000