



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ESTIMAÇÃO E PREVISÃO EM PROCESSOS
 $SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ NA PRESENÇA
DE OUTLIERS

Tese de Doutorado

CLEBER BISOGNIN

Porto Alegre, 20 de dezembro de 2007.

Tese submetida por Cleber Bisognin¹ como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr.^a. Sílvia Regina Costa Lopes

Banca Examinadora:

Dr. Aluísio de Souza Pinheiro

Dr. Artur Oscar Lopes

Dr. Rafael Rigão Souza

Dr. Robin Thomas Clarke

Data da Defesa: 20 de dezembro de 2007.

¹Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

*A dificuldade do dia a dia
nos faz mais fortes se as
enfrentamos de frente.*

Bruno Calil Fonseca

AGRADECIMENTOS

À minha família, principalmente aos meus pais, pelo apoio incondicional, carinho, incentivo, compreensão e confiança.

Especialmente à professora Sílvia Lopes, orientadora e amiga, pela oportunidade, pela excelente orientação e apoio nos estudos.

Aos colegas e professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS.

Aos amigos: “Aqueles que passam por nós, não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós.” Saint-Exupery.

À Rosane, secretária do Programa de Pós-Graduação, pela atenção, paciência e carinho.

Aos bolsista do LCPM, pelo auxílio e amizade.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro.

A Deus, que sempre está ao meu lado em todas as etapas da minha vida.

E a todos que, de alguma maneira, ajudaram ou torceram por mim.

RESUMO

Neste trabalho analisamos alguns processos com a propriedade de longa dependência e sazonalidade. Nosso estudo tem por objetivo principal estudar os processos k -Factor GARMA($p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q$) e SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, onde s é a sazonalidade.

Para os processos k -Factor GARMA($p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q$), baseados no conhecimento das frequências de Gegenbauer, propomos estimadores da classe semiparamétrica para o correspondente parâmetro $\boldsymbol{\lambda}$. Apresentamos importantes resultados envolvendo a função densidade espectral e os coeficientes das representações auto-regressiva e média móvel destes processos.

No estudo dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, demonstramos algumas propriedades destes processos, tais como a expressão da função densidade espectral, o seu comportamento próximo às frequências sazonais, a estacionariedade, as dependências intermediária e longa, a função de autocovariância e a sua expressão assintótica. Investigamos também as condições necessárias e suficientes para a causalidade e a inversibilidade destes processos SARFIMA. Analisamos a ergodicidade e apresentamos a previsão de erro quadrático médio mínimo para estes processos. Apresentamos diversos estimadores na classe dos métodos semiparamétricos para estimar, tanto o parâmetro de diferenciação d , bem como o de diferenciação sazonal D . Na classe paramétrica, apresentamos um método que estima todos os parâmetros do processo. Propomos nova metodologia de estimação para os parâmetros d e D , os chamados estimadores robustos. Introduzimos dois métodos de contaminação por *outliers*, o modelo multi-paramétrico e a contaminação por mistura. Através de simulações de Monte Carlo, analisamos o comportamento dos estimadores das classes semiparamétrica e paramétrica para os parâmetros do processo SARFIMA. Nestas simulações, os processos são considerados com e sem contaminação por *outliers* do tipo aditivo e de inovação. Apresentamos o teste de verossimilhança para detectar e identificar *outliers* em processos SARFIMA. Desenvolvemos um estimador para a magnitude de *outliers* dos tipos aditivo e de inovação. Demonstramos que este estimador é não viciado e normalmente distribuído. Realizamos a análise da série temporal dos níveis mensais do rio Nilo, em Aswan, com e sem contaminação por *outliers* do tipo aditivo.

ABSTRACT

In this work we analyze some processes with long memory and seasonality properties. The main goal is to study the k -Factor GARMA $(p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q)$ and SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ processes, where s is the seasonality.

For the k -Factor GARMA $(p, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, q)$ process, based on the knowledge of the Gegenbauer frequencies, we propose some estimators in the semiparametric class for the corresponding parameter $\boldsymbol{\lambda}$. We present important results related to the spectral density function and to the coefficients of the autoregressive and moving average infinite representations for these processes.

In the study of the SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ processes, we prove several properties, such as its spectral density function expression and its behavior near the seasonal frequencies, the stationarity, the intermediate and long memory, the autocovariance function and its asymptotic expression. We also investigate necessary and sufficient conditions for the causality and the invertibility of SARFIMA processes. We analyze the ergodicity and we present the minimum mean squared error forecasting for these processes. We present several estimators in the semiparametric class to estimate both, the degree of differencing d and the seasonal differencing parameter D . In the parametric class, we introduce one method that estimates all the process parameters. We propose a new estimation methodology for the parameters d and D , based on robustness. We introduce two methods for outliers contamination, the so-called multi-parametric model and the mixing contamination. Through Monte Carlo simulations, we analyze the semiparametric and parametric estimators behavior for the parameters of SARFIMA processes. In these simulations, the process is considered with and without contamination by additive and innovation outliers. We present the likelihood test to detect and to identify outliers in SARFIMA processes. We also develop one estimator for the outlier's magnitude for the additive and innovation types. We show the unbiased property and normal distribution for this estimator. We carry out the analysis on the Nile River monthly flows at Aswan time series, with and without additive outlier contamination.

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas duas décadas, tem ocorrido grande interesse no estudo de séries temporais com a propriedade de longa dependência. O estudo de séries temporais com esta característica foi apresentado, inicialmente, por Hurst (1951) enquanto investigava a série temporal dos níveis mensais do rio Nilo. Em seguida, Mandelbrot e Wallis (1969) definiram o *Ruído Gaussiano Fracionário* que é uma versão do Movimento Browniano Fracionário a tempo discreto, mostrando que este processo também exhibe o efeito Hurst. Mais tarde, Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981 e 1984) definem o *modelo auto-regressivo fracionariamente integrado de média móvel*, denotado por $ARFIMA(p, d, q)$. Neste modelo a função densidade espectral do processo estocástico torna-se ilimitada apenas na frequência zero. Os processos $ARFIMA(p, d, q)$ são uma extensão natural dos *modelos auto-regressivos integrados de média móvel*, denotado por $ARIMA(p, d, q)$, proposto por G.E.P. Box e G.M. Jenkins na década de 70, onde, neste caso, $d \in \mathbb{N}$.

Gray et al. (1988) propõem os *modelos Gegenbauer e auto-regressivo de média móvel Gegenbauer*, denotados, respectivamente, por $Gegenbauer(\lambda, u)$ e $GARMA(p, \lambda, u, q)$, cuja função densidade espectral do processo estocástico torna-se ilimitada em uma frequência arbitrária $G \in (0, \pi]$, chamada de frequência de Gegenbauer, não necessariamente uma frequência de Fourier.

Diversas séries temporais, além da propriedade de longa dependência, apresentam também sazonalidade. Para estudar estas séries temporais Porter-Hudak (1990) propõe o modelo $SARFIMA(0, D, 0)_s$, aplicando o mesmo para analisar a série temporal “US monetary aggregates”. Para a estimação do parâmetro de diferenciação sazonal D , Porter-Hudak (1990) utiliza o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). Ray (1993) analisa uma série temporal que possui comportamento de longa dependência sazonal e em seguida faz uma análise de previsão. Hassler (1994) analisa os modelos rígido e flexível para os processos $SARFIMA(0, D, 0)_s$, com sazonalidade $s = 4$. O autor trabalha com o estimador da função periodograma proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), em torno de todas as frequências sazonais. Ooms (1995) analisa um conjunto de dados reais sazonais utilizando

o estimador baseado na função periodograma, o estimador de máxima verossimilhança aproximado, proposto por Fox e Taquq (1983) e o estimador de máxima verossimilhança exato, proposto por Sowell (1992). Montanari (2000) analisa a série temporal do fluxo mensal do rio Nilo em Aswan, utilizando o estimador de máxima verossimilhança aproximado para estimar os parâmetros do processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s. Peiris e Singh (1996) apresentam alguns resultados de previsão h-passos à frente para alguns casos particulares destes modelo. Brietzke et al. (2005) demonstram diversas propriedades dos processos SARFIMA(0, $D, 0$)_s, incluindo estacionariedade, inversibilidade, funções de autocovariância e autocovariância parcial do processo. Neste artigo apresentam uma fórmula fechada para o algoritmo de Durbin-Levinson o qual relaciona a função de autocorrelação e de autocorrelação parcial do processo estocástico. Bisognin e Lopes (2007) estende o método de geração dos processos ARFIMA(p, d, q), proposto por Hosking (1984), para os processos SARFIMA(0, $D, 0$)_s e apresentam alguns resultados de previsão para os mesmos. Ademais, apresentam a a média e a variância condicionais destes processos as quais, são importantes para a geração e previsão com os processos SARFIMA(0, $D, 0$)_s.

Woodward et al. (1998) generalizam os processos GARMA(p, λ, u, q) propondo os processos k -Factor GARMA(p, λ, u, q). Nos processos k -Factor GARMA a função densidade espectral torna-se ilimitada em k frequências arbitrárias $G_j \in (0, \pi]$, para $j = 1, \dots, k$, chamadas frequências de Gegenbauer. As frequências de Gegenbauer podem ou não coincidir com alguma frequência de Fourier. Estes processos são uma generalização dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s cuja função densidade espectral torna-se ilimitada nas frequências ditas de Fourier, isto é, $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, para $j = 1, \dots, [\frac{s}{2}]$, onde $[x]$ é a parte inteira de x .

A proposta desta tese é estudar os processos k -Factor GARMA(p, λ, u, q) e SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s, suas propriedades, estimação, previsão e contaminação com *outliers*.

No Capítulo 2, apresentamos os processos k -Factor GARMA(p, λ, u, q). Investigamos algumas propriedades dos processos k -Factor GARMA tais como, estacionariedade, inversibilidade, função densidade espectral e estimação das frequências de Gegenbauer. Baseados no conhecimento das frequências de Gegenbauer, propomos estimadores semiparamétricos para o parâmetro λ do processo. Demonstramos o Lema 2.1, o qual é muito importante na estimação paramétrica dos parâmetros dos processos k -Factor GARMA (p, λ, u, q) e SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s. No Lema 2.2 demonstramos uma importante propriedade para a previsão utilizando os processos k -Factor GARMA (p, λ, u, q).

No Capítulo 3, investigamos o mais importante dos casos particulares dos processos k -Factor GARMA(p, λ, u, q). Este processo é chamado de *processo sazonal auto-regressivo fracionalmente integrado de média móvel*, de-

notado por $\text{SARFIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$. Na Seção 3.2, demonstramos os Teoremas 3.1 e 3.2, os quais apresentam a expressão da função densidade espectral do processo estocástico, o seu comportamento próximo às frequências sazonais, a estacionariedade, a dependência intermediária e longa e a função de autocovariância. No Teorema 3.3 mostramos a expressão assintótica da função de autocovariância para os processos $\text{SARFIMA}(0, d, 0) \times (0, D, 0)_s$ e na Proposição 3.1 extendemos esta expressão assintótica para a função de autocovariância dos processos SARFIMA completos. Na Seção 3.3, mostramos as condições necessárias e suficientes para a causalidade e inversibilidade dos processos $\text{SARFIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$. Também demonstramos as convergências em quadrado médio e em quase toda parte das representações auto-regressiva e média móvel infinitas. Na Seção 3.4, analisamos a ergodicidade dos processos $\text{SARFIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$. Na Seção 3.5, apresentamos a previsão de erro quadrático médio mínimo para os processos $\text{SARFIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$. Nesta seção, destacamos o Teorema 3.7 onde demonstramos várias propriedades sobre previsão com estes processos. Na Seção 3.6, apresentamos a seleção de modelo baseada no erro de previsão.

O Capítulo 4 apresenta a contaminação e identificação de *outliers*. Na Seção 4.1, apresentamos a contaminação paramétrica e por mistura por *outliers* aditivos e inovadores, denotados por *AO* e *IO*, respectivamente. Os *outliers* aditivos correspondem a um erro de medição ou gravação afetando uma única observação. No caso dos *outliers* inovadores, ocorre um choque em um determinado período e o efeito se propaga para as observações subseqüentes. Como exemplo de *outlier* inovador podemos citar a série temporal dos retornos do IBovespa. Esta série temporal consiste de 1500 observações durante o período de 03 de janeiro de 1995 a 27 de dezembro de 2000. Durante este período ocorreram várias crises em diversos países que influenciaram o mercado financeiro brasileiro. As principais crises ocorridas foram: México em fevereiro e março de 1995, Ásia em outubro de 1997, moratória da Rússia em agosto de 1998, Brasil em janeiro de 1999 (desvalorização do real) e Nasdaq em abril de 2000. O efeito causado por *outliers* aditivos e inovadores em uma série temporal pode ser observado nas Figuras 4.1 e 4.3, respectivamente. Na Seção 4.2, apresentamos o teste de verossimilhança para detectar e identificar *outliers* em processos SARFIMA completos. Desenvolvemos um estimador para a magnitude de *outliers* do tipo *AO* e *IO*. Demonstramos que este estimador é não viciado e normalmente distribuído. Por último, apresentamos um teste estatístico para identificar o tipo de *outlier*.

No Capítulo 5, apresentamos a estimação e seleção de modelos para os processos $\text{SARFIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$. Na Seção 5.1, apresentamos diversos estimadores na classe dos métodos semiparamétricos para estimar o parâmetro de diferenciação d e de diferenciação sazonal D e um paramétrico para estimar todos os parâmetros do modelo. Propomos nova metodologia de estimação para os parâmetros d e D , os chamados estimadores robustos.

Na Seção 5.2, apresentamos os critérios de seleção de modelos, a citar AIC, SBC e HQC.

No Capítulo 6, descrevemos a geração dos processos SARFIMA completos e apresentamos os resultados de diversas simulações de Monte Carlo realizadas. No Capítulo 7, realizamos a análise da série temporal do nível mensal do rio Nilo em Aswan sem contaminação e contaminada por *outliers* do tipo *AO*. No Capítulo 8, apresentamos as conclusões.

Capítulo 2

Processos Fracionários Generalizados

Neste capítulo apresentamos os processos fracionários generalizados. Estes processos são uma extensão dos processos estocásticos introduzidos por G.E.P. Box e G.M. Jenkins, definidos em termos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes os quais são chamados de *processos auto-regressivos de médias móveis* (ARMA). Mandelbrot (1965) e Mandelbrot e van Ness (1968) utilizando os conceitos de integração e diferenciação fracionária definiram o *Movimento Browniano Fracionário*, que é um processo estocástico estacionário com longa dependência a tempo contínuo, utilizado para explicar o efeito de Hurst. O nome *efeito de Hurst*, é dado ao comportamento de dependência entre as observações, mesmo distantes, divulgado primeiramente pelo hidrologista Harold E. Hurst em 1951 enquanto investigava a série temporal dos níveis do rio Nilo. Em seguida, Mandelbrot e Wallis (1969) definiram o *Ruído Gaussiano Fracionário* que é uma versão do Movimento Browniano Fracionário a tempo discreto, mostrando que este processo também exibe o efeito de Hurst. Mais tarde, Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981) estendem a classe de processos definidos por Box et al. (1994) para os chamados *processos auto-regressivos de médias móveis com integração fracionária*, denotados por $ARFIMA(p, d, q)$, os quais apresentam a *propriedade de longa dependência*.

Em recentes estudos sobre séries temporais, tem-se focado nos processos estocásticos com a característica de longa dependência. A propriedade de longa dependência para um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser definida de diferentes maneiras, podendo ser no domínio do tempo ou no domínio da frequência. A seguir, introduzimos uma definição para a propriedade de *longa dependência*.

Definição 2.1. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário. No domínio do tempo, se existe um número real $u \in (0, 1)$ tal que

$$\rho_x(k) \sim C_1 k^{-u}, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

onde $C_1 \neq 0$ e $\rho_x(\cdot)$ é a função de autocorrelação do processo, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui *longa dependência*. Equivalentemente, no domínio da frequência, se existe um número real $b \in (0, 1)$ tal que

$$f_x(w) \sim C_2 |w|^{-b}, \text{ quando } w \rightarrow 0,$$

onde $C_2 > 0$ e $f_x(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui *longa dependência* (ver Bary, 1964).

Notação: Na Definição 2.1, a notação $f(w) \sim g(w)$, quando $w \rightarrow 0$, significa $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(w)}{g(w)} = 1$. Para maiores detalhes ver Seção A.2.

Observação 2.1. Em relação a Definição 2.1 observamos:

- i) a relação $b = 1 - u$ é verdadeira;
- ii) no domínio do tempo, quando $u \in (0, 1)$, $\rho_x(k)$ tende a zero tão lentamente que $\sum_{k \geq 0} |\rho_x(k)|$ diverge, onde $\rho_x(\cdot)$ é a função de autocorrelação do processo;
- iii) o caso em que $u = 1$ é referido como *curta dependência* por alguns autores.

A seguir apresentamos a propriedade de dependência intermediária.

Definição 2.2. Na Definição 2.1, se $u \in (1, 2)$ dizemos que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estocástico estacionário com *dependência intermediária*.

Observação 2.2. A Definição 2.1 para a propriedade de *longa dependência* não é a única possível. Definições alternativas podem ser encontradas na literatura e elas não são equivalentes. No contexto de processos estocásticos estacionários $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, com variância finita, os itens a seguir são definições comuns de *longa dependência*:

- i) $\sum_{k=-n}^n \gamma_x(k) \sim n^\alpha L_1(n)$, quando $n \rightarrow \infty$ e $0 < \alpha < 1$;
- ii) $\gamma_x(k) \sim k^{-\beta} L_2(k)$, quando $k \rightarrow \infty$ e $0 < \beta < 1$;
- ii) $f_x(w) \sim w^{-\delta} L_3(|w|)$, quando $w \rightarrow 0$ e $0 < \delta < 1$.

As funções $L_1(\cdot)$, $L_2(\cdot)$ são funções de variação suave (ver Definição A.2 e Observação A.1) no infinito enquanto que a função $L_3(\cdot)$ é de variação suave em zero. Para maiores detalhes ver Doukhan et al. (2003).

Utilizando a definição de *longa dependência*, Granger e Joyeux (1980), Hosking (1981, 1984) e Geweke e Porter-Hudak (1983) apresentam os *processos auto-regressivos fracionariamente integrados de média móvel* (denotados por ARFIMA(p, d, q)) como um exemplo de processo com a característica de *longa dependência*. A seguir definimos os processos ARFIMA(p, d, q) porém, antes, precisamos definir os *processos ruído branco*.

Definição 2.3. O processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser um *ruído branco* com média zero e variância $\sigma_\varepsilon^2 < \infty$, denotado por $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$, se

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{e} \quad \gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0, \end{cases}$$

onde $\gamma_\varepsilon(\cdot)$ é a função de autocovariância do processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Definição 2.4. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico satisfazendo a equação

$$\phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad (2.1)$$

onde μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco (ver Definição 2.3), \mathcal{B} é o operador de *defasagem* ou de *retardo*, isto é, $\mathcal{B}^j(X_t) = X_{t-j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são os polinômios de ordem p e q , respectivamente, definidos por

$$\phi(z) = \sum_{\ell=0}^p (-\phi_\ell) z^\ell, \quad \theta(z) = \sum_{m=0}^q (-\theta_m) z^m, \quad (2.2)$$

onde ϕ_ℓ , $1 \leq \ell \leq p$, e θ_m , $1 \leq m \leq q$, são constantes reais e $\phi_0 = -1 = \theta_0$. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo fracionariamente integrado de média móvel de ordem* (p, d, q) com média μ , denotado por ARFIMA(p, d, q), onde d é o *grau de diferenciação*.

Observação 2.3. Na Definição 2.4, quando $d = 0$ temos o chamado *processo auto-regressivo de média móvel de ordem* (p, q), denotado por ARMA(p, q). A função de autocorrelação dos processos ARMA(p, q) possui decaimento exponencial, isto é,

$$|\rho_x(k)| \leq Cr^k, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty,$$

onde $C > 0$ e $r \in (0, 1)$.

Maiores detalhes sobre os processos ARFIMA(p, d, q) podem também ser encontrados em Fox e Taqqu (1986), Brockwell e Davis (1991), Sowell (1992), Beran (1994), Robinson (1995a), Baillie (1996), Peiris e Singh (1996), Reisen e Lopes (1999) e Lopes et al. (2004), Lopes (2007) entre outros.

Embora um número significativo de trabalhos utilizam-se dos processos ARFIMA(p, d, q), é duvidoso acreditar que estes processos sejam suficientes para resolver todos os problemas sobre longa dependência sem alguma generalização.

Um exemplo de generalização, sugerido por Hosking (1981), é o modelo

$$\phi(\mathcal{B})(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

o qual claramente inclui os processos ARFIMA(p, d, q). De fato, quando $u = 1$, temos $d = 2\lambda$.

Devido a complexidade na inversão do fator $(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda$, este modelo só mais recentemente foi estudado. Inicialmente foi investigado por Gray et al. (1989) o qual utilizou as funções geradoras dos polinômios Gegenbauer (ver Definição 2.5). Os processos dados pela expressão (2.3) são mais gerais que os processos ARFIMA(p, d, q).

A seguir, definimos os polinômios Gegenbauer os quais são de grande importância para a definição dos processos GARMA e k -Factor GARMA.

Antes de definir os polinômios de Gegenbauer é conveniente introduzirmos as seguintes notações $\mathbb{Z}_{\geq} = \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 0\}$ e $\mathbb{Z}_{\leq} = \{k \in \mathbb{Z} | k \leq 0\}$.

2.1 Polinômios Gegenbauer

Primeiramente vamos introduzir os polinômios de Gegenbauer. Estes polinômios são muito aplicados na Matemática tanto pela sua ortogonalidade como pelas suas propriedades recursivas.

Definição 2.5. Os *polinômios Gegenbauer* $C_j^{(\lambda)}(u)$ são definidos como os coeficientes na expansão em série de potência da seguinte função

$$(1 - 2uZ + Z^2)^{-\lambda} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} C_j^{(\lambda)}(u)Z^j, \quad (2.4)$$

para $\lambda \neq 0$, $|u| \leq 1$ e $|Z| \leq 1$, onde

$$C_j^{(\lambda)}(u) = \sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda - k + j)(2u)^{j-2k}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(k+1)\Gamma(j-2k+1)}, \quad (2.5)$$

para todo $j \geq 0$, com $\lfloor x \rfloor$ sendo a parte inteira de x , onde $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama definida por

- i) $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0;$
- ii) $\Gamma(x) = \infty, \quad x = 0;$

iii) $\Gamma(x) = x^{-1}\Gamma(x + 1), \quad x < 0;$

iv) $\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi x)}.$

Os polinômios Gegenbauer podem ser aproximados por

$$C_j^{(\lambda)}(u) \sim \frac{\cos[(j + \lambda)G - (\lambda\pi/2)]}{\Gamma(\lambda) \text{sen}^\lambda(G)} \left(\frac{2}{j}\right)^{1-\lambda}, \quad \text{quando } j \rightarrow \infty,$$

onde a constante G é dada por $G = \cos^{-1}(u)$.

Assim, quando $\lambda < 1$, $C_j^{(\lambda)}(\cdot)$ decresce numa taxa hiperbólica, quando $j \rightarrow \infty$.

Computacionalmente, podemos calcular $C_j^{(\lambda)}(\cdot)$ usando a seguinte fórmula recursiva

$$C_j^{(\lambda)}(u) = 2u \left(\frac{\lambda - 1}{j} + 1\right) C_{j-1}^{(\lambda)}(u) - \left(2\frac{\lambda - 1}{j} + 1\right) C_{j-2}^{(\lambda)}(u),$$

para todo $j > 2$, com $C_0^{(\lambda)}(u) = 1$, $C_1^{(\lambda)}(u) = 2\lambda u$, $C_2^{(\lambda)}(u) = 2\lambda(\lambda + 1)u^2 - \lambda$.

Tendo definido os polinômios Gegenbauer podemos definir os processos Gegenbauer e, conseqüentemente, os processos GARMA.

2.2 Processos GARMA

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico dado pela expressão

$$(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda(X_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad (2.6)$$

onde $|u| \leq 1$, μ é a média do processo, \mathcal{B} é o operador de defasagem ou de retardo, isto é, $\mathcal{B}^j(X_t) = X_{t-j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco.

Se o processo é inversível, podemos escrever formalmente

$$X_t = \mu + (1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{-\lambda} \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Utilizando-se a equação (2.4), o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser escrito na sua representação média-móvel infinita

$$X_t = \mu + \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} C_j^{(\lambda)}(u) \varepsilon_{t-j}, \quad (2.7)$$

onde $(C_j^{(\lambda)}(\cdot))_{j \in \mathbb{Z}}$ são os polinômios Gegenbauer definidos na equação (2.5). Assim temos a seguinte definição.

Definição 2.6. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado pela equação (2.7), é chamado de *processo Gegenbauer* com parâmetros u e λ e pode ser escrito pela expressão dada em (2.6).

Podemos notar que se $u = 1$, em (2.6), temos

$$(1 - \mathcal{B})^{2\lambda}(X_t - \mu) = \varepsilon_t. \quad (2.8)$$

Neste caso, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é justamente o processo fracionalmente integrado de grau ou parâmetro de diferenciação 2λ , isto é, um processo ARFIMA(0, 2λ , 0) e suas propriedades podem ser encontradas em Hosking (1981).

Quando $u = -1$, a equação (2.6) torna-se

$$(1 + \mathcal{B})^{2\lambda}(X_t - \mu) = \varepsilon_t.$$

A seguir citamos algumas propriedades dos processos Gegenbauer cujas demonstrações podem ser encontradas em Gray et al. (1989) e Chung (1996).

Observação 2.4. As Definições 2.1 e 2.2 podem ser estendidas para um processo estacionário qualquer.

- i) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estacionário para o qual existe um número real $b \in (0, 1)$, uma constante $C_f > 0$ e uma frequência $G \in [0, \pi]$ (ou um número finito de frequências) tal que

$$f_x(w) \sim C_f |w - G|^{-b}, \quad \text{quando } w \rightarrow G.$$

Então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é chamado processo estacionário com *longa dependência*.

- ii) Quando $b \in (-1, 0)$, dizemos que o processo possui *dependência intermediária*.
- iii) No item i), quando $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processos ARFIMA(0, d , 0), temos que $b = 2d$ e $G = 0$. Assim, os processos ARFIMA(0, d , 0) possuem longa dependência quando $d \in (0, 0.5)$.

Proposição 2.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo Gegenbauer dado na Definição 2.6. Então,*

- a) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se*
- i) $|u| < 1$ e $\lambda < 0.5$; ou
 - ii) $|u| = 1$ e $\lambda < 0.25$;
- b) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível se*

- i) $|u| < 1$ e $\lambda > -0.5$; ou
 ii) $|u| = 1$ e $\lambda > -0.25$;
- c) um processo Gegenbauer estacionário possui a propriedade de longa dependência se $0 < \lambda < 0.5$ e $|u| < 1$ ou $0 < \lambda < 0.25$ e $|u| = 1$;
- d) a função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\begin{aligned} f_X(w) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |1 - 2ue^{iw} + e^{2iw}|^{-2\lambda} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2(\cos(w) - u)]^{-2\lambda}, \quad \text{para todo } w \in (0, \pi], \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $G = \cos^{-1}(u)$ é chamada frequência de Gegenbauer ou frequência G , isto é, a função densidade espectral torna-se ilimitada em G .

Quando $w \rightarrow G$,

$$f_X(w) \sim C_f |w - G|^{-2\lambda}, \quad (2.10)$$

onde $C_f = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2|\sin(G)|]^{-2\lambda} > 0$.

- e) A função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, quando $|u| < 1$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, é dada por

$$\gamma_X(k) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(1-2\lambda) [2 \sin(G)]^{1/2-2\lambda} [P_{k-1/2}^{2\lambda-1/2}(u) + (-1)^k P_{k-1/2}^{2\lambda-1/2}(-u)],$$

onde $P_a^b(\cdot)$ são funções de Legendre (ver Observação 2.6) e pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} \gamma_X(k) &= \frac{2^{1-2\lambda} \sigma_\varepsilon^2}{\pi} \sin^{-2\lambda}(G) \sin(\lambda\pi) \Gamma(1-2\lambda) \cos(kG) \\ &\quad \times \frac{\Gamma(k+2\lambda)}{\Gamma(k+1)} [1 + O(k^{-1})]. \end{aligned}$$

- f) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo Gegenbauer estacionário com longa dependência. Então,

i) quando $u = 1$ e $0 < \lambda < 0.25$, a função de autocorrelação do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\rho_x(k) = \frac{\Gamma(1 - 2\lambda)\Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(k - 2\lambda + 1)}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geqslant}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$, $\rho_x(k) \sim k^{4\lambda-1}$.

ii) quando $u = -1$ e $0 < \lambda < 0.25$, a função de autocorrelação do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\rho_x(k) = (-1)^k \frac{\Gamma(1 - 2\lambda)\Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(k - 2\lambda + 1)}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geqslant}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$, $\rho_x(k) \sim (-1)^k k^{4\lambda-1}$.

iii) quando $|u| < 1$ e $0 < \lambda < 0.5$,

$$\rho_x(k) \sim k^{2\lambda-1} \text{sen}(\pi\lambda - kG), \quad (2.11)$$

quando $k \rightarrow \infty$, onde $G = \cos^{-1}(u)$.

Observação 2.5. A expressão (2.11) acima explica o comportamento senoidal da função de autocorrelação dos processos Gegenbauer. Como exemplo de função de autocorrelação com comportamento senoidal referenciamos o leitor a Figura 7.2(a).

Observação 2.6. As funções de Legendre, associadas a expressão exata da função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada no item e) da Proposição 2.1, podem ser calculadas utilizando a fórmula recursiva

$$P_a^b(x) = \frac{2a-1}{a-b} x P_{a-1}^b(x) - \frac{a+b-1}{a-b} P_{a-2}^b(x). \quad (2.12)$$

A fórmula recursiva (2.12) requer os seguintes termos iniciais

$$P_{-1/2}^{2\lambda-1/2}(u) = \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\lambda-1/4} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - 2\lambda\right)} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - 2\lambda; \frac{1-u}{2}\right),$$

$$P_{1/2}^{2\lambda-1/2}(u) = \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\lambda-1/4} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - 2\lambda\right)} \cdot F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2} - 2\lambda; \frac{1-u}{2}\right),$$

onde $F(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$ é a função hipergeométrica definida por

$$F(a, b; c; x) = \sum_{j \geqslant 1} \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+j)\Gamma(j+1)} \right] x^j.$$

Observação 2.7. Woodward et al. (1998), baseados na equação (2.7), apresentam a função de autocovariância dada por

$$\gamma_x(k) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} C_j^{(\lambda)}(u) C_{j+k}^{(\lambda)}(u), \quad \text{para todo } |u| \leq 1, \quad (2.13)$$

onde $k \in \mathbb{Z}_{\geq}$ e $C_j^{(\lambda)}(\cdot)$ é dado pela expressão (2.5).

Da mesma forma que podemos incluir componentes auto-regressivas e médias móveis aos processos fracionalmente integrados puros obtendo então os processos ARFIMA(p, d, q), podemos estender os processos Gegenbauer combinando-os com os processos ARMA(p, q). Isto nos conduz a seguinte definição.

Definição 2.7. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico que satisfaz a equação

$$\phi(\mathcal{B})(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad (2.14)$$

onde μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são os polinômios de grau p e q , respectivamente, definidos por

$$\phi(z) = \sum_{\ell=0}^p (-\phi_\ell) z^\ell \quad \text{e} \quad \theta(z) = \sum_{m=0}^q (-\theta_m) z^m, \quad (2.15)$$

onde ϕ_ℓ , $1 \leq \ell \leq p$, e θ_m , $1 \leq m \leq q$, são constantes reais e $\phi_0 = -1 = \theta_0$. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo de média móvel Gegenbauer* de ordem (p, u, λ, q) , denotado por GARMA(p, u, λ, q).

As propriedades dos processos GARMA(p, u, λ, q), a seguir apresentadas, encontram-se demonstradas em Gray et al. (1989).

Proposição 2.2. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo GARMA(p, u, λ, q) ($\lambda \neq 0$), dado na Definição 2.7, com todas as raízes das equações $\phi(z) = 0$ e $\theta(z) = 0$ fora do círculo unitário. Então, valem as seguintes afirmações.*

- a) *O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se $\lambda < 0.5$, quando $|u| < 1$, ou $\lambda < 0.25$, quando $|u| = 1$.*
- b) *O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível se $\lambda > -0.5$, quando $|u| < 1$, ou $\lambda > -0.25$, quando $|u| = 1$.*
- c) *Se $0 < \lambda < 0.25$, quando $|u| = 1$ ou $0 < \lambda < 0.5$, quando $|u| < 1$, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo com longa dependência.*
- d) *A função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, denotada por $f_x(\cdot)$, é dada por*

$$f_x(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2} [2(\cos(w) - u)]^{-2\lambda}, \text{ para todo } w \in (0, \pi], \quad (2.16)$$

onde $G = \cos^{-1}(u)$ é a frequência de Gegenbauer.

- i) Se $|u| < 1$, $\lim_{w \rightarrow G} (w - G)^{2\lambda} f_x(w)$ existe e é finito.
 - ii) Se $|u| = 1$, $\lim_{w \rightarrow G} w^{4\lambda} f_x(w)$ existe e é finito.
- e) Quando $k \rightarrow \infty$,
- i) $\rho_x(k) \sim k^{4\lambda-1}$, quando $u = 1$ e $0 < \lambda < 0.25$,
 - ii) $\rho_x(k) \sim (-1)^k k^{4\lambda-1}$, quando $u = -1$ e $0 < \lambda < 0.25$,
 - iii) $\rho_x(k) \sim k^{2\lambda-1} \text{sen}(\pi\lambda - kG)$, quando $|u| < 1$ e $0 < \lambda < 0.5$.

Observação 2.8.

- i) A função densidade espectral dos processos GARMA(p, u, λ, q) não é necessariamente ilimitada na origem, como nos processos ARFIMA(p, d, q), mas para alguma frequência G no intervalo $(0, \pi]$.
- ii) Estamos interessados em encontrar a expressão assintótica da função densidade espectral dos processos GARMA(p, u, λ, q). Para isso, escrevemos a expressão (2.16) como

$$f_x(w) = f_Y(w) \frac{|\theta(e^{-iw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2}, \quad (2.17)$$

onde $f_Y(\cdot)$ é a função densidade espectral de um processo GARMA($0, u, \lambda, 0$), dada pela expressão (2.9), com $G = \cos^{-1}(u)$.

Vamos supor que o processo GARMA(p, u, λ, q) seja causal e inversível. Sabemos que $\lim_{z \rightarrow 0} \cos(z) = 1$, ou seja, $\cos(z) \sim 1$, quando $z \rightarrow 0$ (ver Definição A.5). Pelas expressões (2.17) e (B.5), quando $z \rightarrow 0$, temos que

$$\begin{aligned} f_x(z + G) &= f_Y(z + G) \frac{|\theta(e^{-i(z+G)})|^2}{|\phi(e^{-i(z+G)})|^2} \\ &= f_Y(z + G) \left[\frac{\prod_{m=1}^q (1 - 2\rho_{m,1} \cos(z + G) + \rho_{m,1}^2)}{\prod_{\ell=1}^p (1 - 2\rho_{\ell,2} \cos(z + G) + \rho_{\ell,2}^2)} \right] \end{aligned}$$

$$\sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2|\operatorname{sen}(G)|]^{-2\lambda} |z|^{-2\lambda} \times \left[\frac{\prod_{m=1}^q (1 - 2\rho_{m,1} \cos(G) + \rho_{m,1}^2)}{\prod_{\ell=1}^p (1 - 2\rho_{\ell,2} \cos(G) + \rho_{\ell,2}^2)} \right] \quad (2.18)$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2|\operatorname{sen}(G)|]^{-2\lambda} |z|^{-2\lambda} \frac{|\theta(e^{-iG})|^2}{|\phi(e^{-iG})|^2} \\ = C_f |z|^{-2\lambda}, \quad (2.19)$$

onde $G = \cos^{-1}(u)$ e

$$C_f = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2|\operatorname{sen}(G)|]^{-2\lambda} \frac{|\theta(e^{-iG})|^2}{|\phi(e^{-iG})|^2}. \quad (2.20)$$

A expressão (2.18) é validada pela equação (2.10).

Fazendo a mudança de variável $w = z + G$, na equação (2.19), temos que

$$f_x(w) \sim C_f |w - G|^{-2\lambda}, \quad (2.21)$$

quando $w \rightarrow G$, onde C_f é dada pela expressão (2.20).

A Figura 2.1 apresenta alguns exemplos da função densidade espectral dos processos GARMA(p, u, λ, q), com $\lambda = 0.2$, $\mu = 0$ e diferentes valores para u , G . A expressão da função densidade espectral dos processos GARMA(p, u, λ, q) (apresentada na Figura 2.1(a) com $\lambda = 0.2$, $u = 1$, $p = 0 = q$ e $G = 0$) coincide com a expressão da função densidade espectral dos processos ARFIMA(p, d, q) quando $d = 0.4$, $p = 0 = q$ e $\mu = 0$.

Para maiores detalhes sobre os processos GARMA(p, u, λ, q), ver Chung (1996) e Ferrara e Guégan (1999).

2.3 Processos k -Factor GARMA

Os processos ARFIMA(p, d, q), onde $d \in (-0.5, 0.5)$, podem ser tratados como uma generalização dos processos ARIMA(p, d, q), onde $d \in \mathbb{N}$, para modelar dados com a propriedade de longa dependência, isto é, quando a função densidade espectral é ilimitada na frequência zero. Similarmente, os processos GARMA(p, u, λ, q) são tratados como uma generalização dos processos ARFIMA(p, d, q), na qual a sua função densidade espectral torna-se ilimitada em alguma frequência G no intervalo $(0, \pi]$, não necessariamente

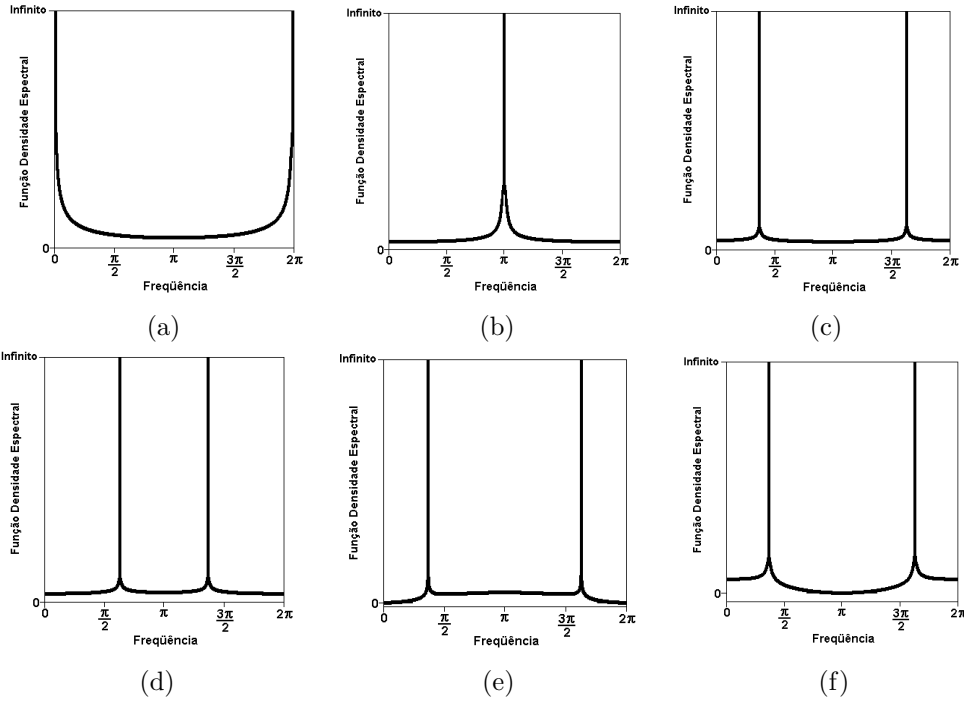


Figura 2.1: Função densidade espectral dos processos $\text{GARMA}(p, u, \lambda, q)$, com $\mu = 0$ e $\lambda = 0.2$: (a) $u = 1$, $p = 0 = q$ e $G = 0$; (b) $u = -1$, $p = 0 = q$ e $G = \pi$; (c) $u = 0.4$, $p = 0 = q$ e $G = 0.369\pi$; (d) $u = -0.4$, $p = 0 = q$ e $G = 0.63\pi$; (e) $u = 0.4$, $p = 1$, $q = 0$, com $\phi_1 = 0.8$ e $G = 0.369\pi$; (f) $u = 0.4$, $p = 1$, $q = 0$, com $\phi_1 = -0.8$ e $G = 0.369\pi$;

a frequência zero. Contudo, uma limitação dos processos $\text{ARFIMA}(p, d, q)$ e do processo mais geral $\text{GARMA}(p, u, \lambda, q)$ é que as suas funções densidade espectral tornam-se ilimitadas em apenas uma frequência do intervalo $(0, \pi]$. Por isso, Gray et al. (1989) sugere a inclusão de mais de um fator Gegenbauer nos modelos GARMA.

Giraitis e Leipus (1995) e, depois, Woodward et al. (1998) estendem os modelos Gegenbauer e GARMA, respectivamente, aos modelos k -Factor Gegenbauer e k -Factor GARMA, para os quais a função densidade espectral é ilimitada para um número finito k de frequências, chamadas de *frequências de Gegenbauer* (ou frequências G), no intervalo $(0, \pi]$.

Definição 2.8. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o processo estocástico que satisfaz a equação

$$\prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{\lambda_j} (X_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad (2.22)$$

onde k é um inteiro finito, $|u_j| \leq 1$ e λ_j é um número fracionário, para $j = 1, \dots, k$, μ é a média do processo e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo k -Factor Gegenbauer* de ordem $(0, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, 0)$, de-

notado por k -Factor Gegenbauer(0, \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}$, 0), onde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)'$ e $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)'$.

A seguir apresentamos algumas propriedades dos processos k -Factor Gegenbauer(0, \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}$, 0). A demonstração destas propriedades pode ser encontrada em Woodward et al. (1998).

Proposição 2.3. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor Gegenbauer(0, \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}$, 0) (ver Definição 2.8). Então,*

- i) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se u_j são distintos e $\lambda_j < 0.5$, quando $|u_j| < 1$ e $\lambda_j < 0.25$, quando $|u_j| = 1$, para $j = 1, \dots, k$;*
- ii) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui longa dependência se o item i) é satisfeito e ainda $\lambda_j > 0$, para $j = 1, \dots, k$;*
- iii) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por*

$$f_x(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - u_j)]^{-2\lambda_j}, \quad \text{para } w \in (0, \pi],$$

onde $f_x(\cdot)$ é ilimitada nas frequências $G_j = \cos^{-1}(u_j)$, $j = 1, \dots, k$.

- iv) *Seja*

$$|\lambda_j| < \begin{cases} 0.5, & \text{se } 0 < u_j < 1; \\ 0.25, & \text{se } |u_j| = 1, \end{cases} \quad (2.23)$$

com $\lambda_j \neq 1$, para $j = 1, \dots, k$. Então, existe uma única solução estacionária, X_t de (2.22) a qual é causal e inversível.

A expressão assintótica da função densidade espectral é dada por

$$f_x(w) \sim D(\ell)|w - G_\ell|^{-2\lambda_\ell}, \quad \text{quando } w \rightarrow G_\ell,$$

para $\ell = 1, \dots, k$, onde

$$D(\ell) = \begin{cases} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |2 \operatorname{sen}(G_\ell)|^{-2\lambda_\ell} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq \ell}}^k [2|\cos(G_\ell) - \cos(G_j)|]^{-2\lambda_j}, & \text{para } 0 < G_\ell < \pi, \\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq \ell}}^k [2|\cos(G_\ell) - \cos(G_j)|]^{-2\lambda_j}, & \text{para } G_\ell = 0 \text{ ou } G_\ell = \pi. \end{cases}$$

A seguir definimos os modelos k -Factor GARMA(p , \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}$, q).

Definição 2.9. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico que satisfaz a equação

$$\phi(\mathcal{B}) \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{\lambda_j} (X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B}) \varepsilon_t, \quad (2.24)$$

onde k é um inteiro finito, $|u_j| \leq 1$ e λ_j é um número fracionário, para $j = 1, \dots, k$, μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco e $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são os polinômios de grau p e q , respectivamente, definidos em (2.15). Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo de média móvel k -Factor Gegenbauer* de ordem $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, denotado por k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), onde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)'$ e $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)'$.

Na proposição a seguir, apresentamos alguns resultados sobre k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) estabelecidos e provados em Giraitis e Leipus (1995) e Woodward et al. (1998).

Proposição 2.4. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) conforme a Definição 2.9. Então,*

- i) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se todas as raízes da equação $\phi(z) = 0$ estão fora do círculo unitário, e além disso, u_j e λ_j , para $1 \leq j \leq k$, satisfazem a condição do item i) da Proposição 2.3;*
- ii) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui longa dependência se satisfaz as condições do item i) desta proposição e, além disso, $\lambda_j > 0$, para $1 \leq j \leq k$;*
- iii) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal se e somente se $\phi(z) \neq 0$, para $|z| \leq 1$;*
- vi) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível se e somente se $\theta(z) \neq 0$, para $|z| \leq 1$;*
- v) *a função densidade espectral do processo k -Factor GARMA, definido pela expressão (2.24), é dada por*

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2} \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - u_j)]^{-2\lambda_j}, \quad (2.25)$$

onde $0 < w \leq \pi$ e $G_j = \cos^{-1}(u_j)$ são as chamadas frequências de Gegenbauer.

A Figura 2.2 apresenta alguns exemplos da função densidade espectral dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2)$, para $k = 2$ e $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2, 0.2)$, para $k = 3$ e diferentes valores para \mathbf{u} e $p, q \in \{0, 1\}$.

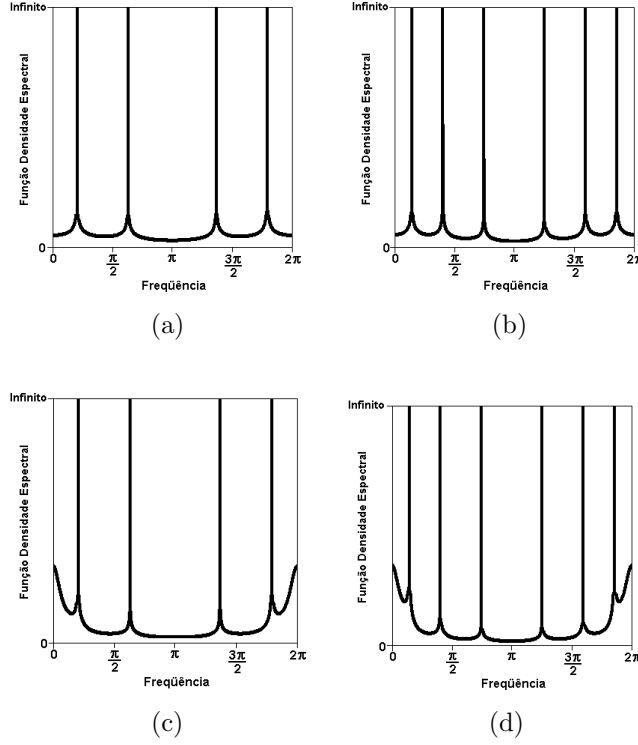


Figura 2.2: Função densidade espectral dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2)$, para $k = 2$ e $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2, 0.2)$, para $k = 3$: (a) $k = 2$, $\mathbf{u} = (-0.4, 0.8)$, $G_1 = 0.631\pi$, $G_2 = 0.204\pi$ e $p = 0 = q$; (b) $k = 3$, $\mathbf{u} = (-0.7, 0.3, 0.9)$, $G_1 = 0.747\pi$, $G_2 = 0.403\pi$, $G_3 = 0.143\pi$ e $p = 0 = q$; (c) $k = 2$, $\mathbf{u} = (-0.4, 0.8)$, $G_1 = 0.631\pi$, $G_2 = 0.204\pi$, $p = 1 = q$, $\phi_1 = 0.8$ e $\theta_1 = 0.5$; (d) $k = 3$, $\mathbf{u} = (-0.7, 0.3, 0.9)$, $G_1 = 0.747\pi$, $G_2 = 0.403\pi$, $G_3 = 0.143\pi$, $p = 1 = q$, $\phi_1 = 0.8$ e $\theta_1 = 0.5$.

Lema 2.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) dado pela Definição 2.9, causal e inversível cuja função densidade espectral $f_x(\cdot)$ é dada pela equação (2.25). Então,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln[f_x(w)] dw = 2\pi \ln\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\right), \quad (2.26)$$

onde $\sigma_\varepsilon^2/2\pi$ é a função densidade espectral do processo ruído branco, denotado por $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) dado pela expressão (2.24), cuja função densidade é dada pela expressão (2.25). Então, podemos reescrever a função densidade espectral $f_x(\cdot)$ da seguinte forma

$$f_x(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-iw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2} \prod_{j=1}^k |1 - 2u_j e^{-iw} + e^{-i2w}|^{-2\lambda_j}. \quad (2.27)$$

De forma semelhante,

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\sigma_\varepsilon^2} f_X(w) &= \frac{|\theta(e^{-iw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2} \prod_{j=1}^k |1 - 2u_j e^{-iw} + e^{-i2w}|^{-2\lambda_j} \\
&= \left| \left[\frac{\theta(e^{-iw})}{\phi(e^{-iw})} \right] \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j e^{-iw} + e^{-i2w})^{-\lambda_j} \right|^2 \\
&= \left| \left[\frac{\theta(z)}{\phi(z)} \right] \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j z + z^2)^{-\lambda_j} \right|^2,
\end{aligned}$$

onde $z = e^{-iw}$, para $w \in (0, \pi]$.

Seja $g(w) = \frac{2\pi}{\sigma_\varepsilon^2} f_X(w)$ e

$$h(z) = \left[\frac{\theta(z)}{\phi(z)} \right] \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j z + z^2)^{-\lambda_j}. \quad (2.28)$$

Então,

$$g(w) = |h(e^{-iw})|^2 = |h(z)|^2, \quad (2.29)$$

onde $z = e^{-iw}$, para $w \in (0, \pi]$.

Temos que $h(0) = 1$ e como o processo é causal e inversível, a função $h(z) \neq 0$, para todo $|z| \leq 1$. Logo, as funções $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ satisfazem as afirmações a-c), dadas pela expressão A.13, temos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(g(w)) dw = 2 \log(h(0)) = 2 \log(1) = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(g(w)) dw &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\frac{2\pi}{\sigma_\varepsilon^2} f_X(w)\right) dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\frac{2\pi}{\sigma_\varepsilon^2}\right) dw + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(f_X(w)) dw \\
&= \log\left(\frac{2\pi}{\sigma_\varepsilon^2}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(f_X(w)) dw.
\end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$\log\left(\frac{2\pi}{\sigma_\varepsilon^2}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(f_X(w)) dw = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \log(f_x(w)) dw &= -2\pi \log\left(\frac{2\pi}{\sigma_\varepsilon^2}\right) \\ &= 2\pi \log\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

□

Maiores detalhes sobre os processos k -Factor Gegenbauer($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) e k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) podem ser encontrados em Giraitis e Leipus (1995), Woodward et al. (1998) e Ferrara e Guégan (2001).

Na seção a seguir, apresentamos um estimador para as frequências de Gegenbauer e diversos estimadores para o parâmetro de longa dependência.

2.4 Estimação

Nesta seção apresentamos diversos métodos de estimação para o parâmetro dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

Na classe paramétrica a estimação de todos os parâmetros do processo ocorre conjuntamente através do estimador de máxima verossimilhança. Dentre os estimadores paramétricos citamos o estimador proposto por Fox e Taquq (1986) o qual utiliza uma aproximação, proposta por Whittle (1951), para a matriz de autocovariância do processo.

No caso dos estimadores semiparamétricos e, conseqüentemente, nos estimadores robustos, apenas o parâmetro de longa dependência é estimado, isto é, estes estimadores necessitam da localização das frequências de Gegenbauer para estimar o parâmetro de longa dependência.

Para os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) teríamos que expandir, em série de potência, o termo $\ln[2(\cos(w) - u_j)]^2$, para cada $j = 1, \dots, k$, que aparece na expressão (2.30) a seguir. Teríamos que truncar cada série em um certo valor m_j , para $j = 1, \dots, k$. Em seguida, aplicaríamos a técnica dos mínimos quadrados para estimar os parâmetros, o que seria extremamente complicado e inviável.

Tendo em mente esta dificuldade, Yajima (1996) propõe um estimador gráfico para as frequências de Gegenbauer. As frequências de Gegenbauer são aquelas em que o periodograma possui um máximo local.

A seguir, apresentamos um estimador para as frequências de Gegenbauer de um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) dado pela expressão (2.24) cuja função densidade espectral possui k singularidades, nas frequências $G_j = \cos^{-1}(u_j)$, para $j = 1, \dots, k$ as quais são chamadas de frequências de Gegenbauer. A função densidade espectral possui a seguinte expressão

$$f_x(w) = f_U(w) \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - u_j)]^{-2\lambda_j}, \quad (2.30)$$

onde

$$f_U(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2}, \quad \text{para todo } w \in (0, \pi].$$

Os parâmetros u_j e λ_j , para todo $j = 1, \dots, k$, satisfazem as condições da Proposição 2.4.

Seja $\{V_\nu\}_{\nu=1}^k$ uma seqüência de intervalos definidos como segue: para todo $\epsilon > 0$ fixado e para todo $\nu = 1, \dots, k$,

$$V_\nu = (G_\nu - a_\nu, G_\nu - \epsilon) \cup (G_\nu + \epsilon, G_\nu + b_\nu),$$

onde $\{a_\nu\}_{\nu=1}^k$ e $\{b_\nu\}_{\nu=1}^k$ são seqüências reais, tais que $\{V_\nu\}_{\nu=1}^k$ é uma cobertura do intervalo $(0, \pi]$ quando $\epsilon \rightarrow 0$, isto é,

$$\bigcup_{\nu=1}^k V_\nu = (0, \pi] \setminus \{G_1, \dots, G_k\}.$$

Definição 2.10. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) dado pela expressão (2.24). Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal obtida a partir do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e seja

$$I(w) := \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-itw} \right|^2, \quad (2.31)$$

a função periodograma. O estimador para as frequências de Gegenbauer G_j , denotado por \hat{G}_j , para $j = 1, \dots, k$ é definido por

$$\hat{G}_j = \frac{2\pi}{n} \operatorname{argmax}_{w \in V_j} I(w). \quad (2.32)$$

Suposição 2.1. As funções $f_x(\cdot)$ e $f_U(\cdot)$ satisfazem as seguintes afirmações:

- i) $f_x(\cdot)$ é uma função par;
- ii) $f_U(\cdot)$ é uma função positiva no intervalo $[0, \pi]$;
- iii) para todo $\nu = 1, \dots, k$ e $w \in V_\nu$, $f_U(\cdot)$ satisfaz

$$\left| \frac{f'_U(w)}{f_U(w)} \right| = \mathcal{O}(|w - G_\nu|^{-1}),$$

para todo $w \in (0, \pi]$. Veja a definição de $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ na Definição A.3.

O seguinte teorema foi estabelecido por Yajima (1996).

Teorema 2.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) com média $\mu = 0$, cuja função densidade espectral satisfaz a equação (2.30). Sob a Suposição 2.1, para todo $\alpha \in (0, 1)$, quando $n \rightarrow \infty$, temos que*

$$n^\alpha (\widehat{G}_j - G_j) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{para cada } j = 1, \dots, k.$$

A seguir, apresentamos os estimadores para o parâmetro de longa dependência $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) com média $\mu = 0$, cuja função densidade espectral é dada pela expressão (2.30).

Os parâmetros $u_j = \cos(G_j)$, para $j = 1, \dots, k$, são previamente estimados por $\widehat{u}_j = \cos(\widehat{G}_j)$, onde \widehat{G}_j , $j = 1, \dots, k$, são dados através da expressão (2.32). Pela expressão (2.30), uma vez estimados os parâmetros u_j , a função densidade espectral para este processo é dada por

$$f_X(w) = f_U(w) \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - \widehat{u}_j)]^{-2\lambda_j}. \quad (2.33)$$

Aplicando a função logarítmica a ambos os lados da equação (2.33) temos

$$\ln(f_X(w)) = \ln(f_U(w)) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \ln[2(\cos(w) - \widehat{u}_j)]^2. \quad (2.34)$$

Adicionando $\ln(f_U(0))$ e $\ln(I(w))$, a ambos os lados da equação (2.34), onde $I(\cdot)$ é a função periodograma dada pela expressão (2.31), obtemos

$$\begin{aligned} \ln(I(w)) &= \ln(f_U(0)) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \ln[2(\cos(w) - \widehat{u}_j)]^2 + \ln \left[\frac{f_U(w)}{f_U(0)} \right] \\ &\quad + \ln \left[\frac{I(w)}{f_X(w)} \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Seja $B = \{0, 1, \dots, g(n) \mid \nu \neq v_j = \operatorname{argmax}_{w \in V_j} I(w), j = 1, \dots, k\}$, onde $g(n)$ é tal que $g(n) \rightarrow \infty$ e $\frac{g(n)}{n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Substituindo a frequência w pelas frequências de Fourier $w_\nu = \frac{2\pi\nu}{n}$, $\nu \in B$, obtemos uma forma aproximada para a equação (2.35), dada por

$$\ln(I(w_\nu)) \sim \ln(f_U(0)) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \ln[2(\cos(w_\nu) - \widehat{u}_j)]^2 + \ln \left[\frac{I(w_\nu)}{f_X(w_\nu)} \right]. \quad (2.36)$$

O termo $\ln \left[\frac{f_U(w)}{f_U(0)} \right]$, que aparece na equação (2.35), é desprezível se comparado com os outros termos daquela equação, sendo então desconsiderado.

Desta forma, podemos observar que a equação (2.36) é uma forma aproximada de uma equação de regressão linear múltipla dada por

$$y_\nu \sim \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{\nu j} + \epsilon_\nu, \quad \text{para todo } \nu \in B, \quad (2.37)$$

onde

$$y_\nu = \ln(I(w_\nu)), \quad x_{\nu j} = \ln[2(\cos(w_\nu) - \hat{u}_j)]^2,$$

$$\epsilon_\nu = \ln \left[\frac{I(w_\nu)}{f_x(w_\nu)} \right] + c, \quad \beta_0 = \ln f_\epsilon(0) - c, \quad c = \mathbb{E} \left(\ln \left[\frac{I(w_\nu)}{f_x(w_\nu)} \right] \right),$$

$$\beta_j = -\lambda_j,$$

com ϵ_ν variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância constante.

Geweke e Porter-Hudak (1983) propõem o estimador semiparamétrico dos mínimos quadrados para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, dado por $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ os quais minimizam a função perda

$$\mathfrak{L}_1(g(n)) = \sum_{\nu \in B} r_\nu^2, \quad (2.38)$$

onde $r_\nu = y_\nu - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j x_{\nu j}$ é o ν -ésimo resíduo.

Denotaremos os estimadores das componentes do parâmetro $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, respectivamente, por

$$\hat{\lambda}_{GPH-MQ}^j, \quad \text{para } j = 1, \dots, k,$$

para indicar os estimadores de λ_j , obtidos através do método de estimação proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983).

Para estimar os parâmetros dos processos ARFIMA(p, d, q), Lopes et al. (2004), Lopes et al. (2006) e Lopes e Mendes (2006) consideram o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), Robinson (1995a), Hurvich e Ray (1995) e o estimador baseado na função periodograma suavizado de covariâncias (ver Seção A.6), utilizando as janelas de Parzen e Bartlett. Além dos estimadores semi-paramétricos, Lopes e Mendes (2006) utilizam as respectivas versões robustas *MM* e *MQP* destes estimadores.

Da mesma forma que estendemos o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983) para os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), podemos estender os outros estimadores utilizados para a estimação nos processos ARFIMA(p, d, q). Maiores detalhes sobre os procedimentos de estimação podem ser encontrados na Seção 5.1.

Na estimação das frequências de Gegenbauer e do parâmetro de longa dependência, Collet et al. (2003) analisa dois casos particulares.

Assumindo que existem dois picos no gráfico da função periodograma de uma série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$, denotam, respectivamente, por G_1 e G_2 as frequências nas quais estes picos ocorrem. Collet et al. (2003) considera um primeiro caso quando os picos estão distantes um do outro, isto é, $|G_1 - G_2| > 0$ e um segundo caso quando os picos estão próximos um do outro, isto é, $|G_1 - G_2| \sim 0$.

Observação 2.9. Para a situação quando $|G_1 - G_2| \sim 0$, Collet et al. (2003), analisa o vício do estimador proposto por Fox e Taqqu (1986), como pode ser visto nos itens a seguir.

i) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) definido através da expressão (2.24). Considere a situação do Caso II e seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal gerada a partir do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Assumimos que ajustamos um processo $(k-1)$ -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) à série temporal. Seja $\hat{\lambda}_j$ o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro λ_j , para $j = 1, \dots, p, p+1, \dots, k$. Então, o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro de longa dependência λ_p é tal que $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_p) > \lambda_p$.

ii) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com frequências de Gegenbauer λ_j , $j = 1, \dots, k$. Assumimos que este processo é um $(k+1)$ -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com λ_j , $j = 1, \dots, k$ e λ_{k+1} frequências de Gegenbauer, tais que $\lambda_{k+1} \neq \lambda_j$, para todo $j = 1, \dots, k$. Então, o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro de longa dependência λ_j , denotado por $\hat{\lambda}_j$, para $j = 1, \dots, k+1$, é tal que $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_j) = \lambda_j$, para $j = 1, \dots, k$ e $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_{k+1}) = 0$.

Observação 2.10. Collet et al. (2003) propõem um procedimento para detectar o número k de picos na função densidade espectral de um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$). Neste mesmo artigo, os autores definem um critério de parada para o procedimento de estimação de k , fornecem o teste de Kolmogorov e Smirnov (ver Brockwell e Davis, 1991) e um teste para decidir se a estimação do parâmetro de longa dependência λ é significativamente diferente de zero ou não (teste de t-Student).

A seguir, apresentamos as representações média móvel infinita e auto-regressiva infinita as quais são de grande importância na demonstração do Lema 2.2 abaixo.

Um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) é dito causal, ver Proposição 2.4, item iii), se existe uma seqüência $\{\psi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ tal que $\sum_{\ell \geq 0} |\psi_\ell| < \infty$ e

$$\psi(z) = \sum_{\ell \geq 0} \psi_\ell z^\ell = \frac{\theta(z)}{\phi(z)} \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{-\lambda_j}. \quad (2.39)$$

Um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) é dito inversível, ver Proposição 2.4, item iv), se existe uma seqüência $\{\pi_l\}_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ tal que $\sum_{l \geq 0} |\pi_l| < \infty$ e

$$\pi(z) = \sum_{l \geq 0} \pi_l z^l = \frac{\phi(z)}{\theta(z)} \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{\lambda_j}. \quad (2.40)$$

O Lema 2.2 a seguir, apresenta um resultado sobre a soma finita do produto entre os coeficientes das representações média móvel infinita e auto-regressiva infinita para os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) causal e inversível. Este resultado será muito importante na previsão utilizando estes processos.

Lema 2.2. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), causal e inversível, dado pela expressão (2.24). Então,*

$$\sum_{l=0}^{\ell} \psi_l \pi_{\ell-l} = 0, \quad (2.41)$$

onde ψ_j e π_j são, respectivamente, os coeficientes da representação média móvel infinita e auto-regressiva infinita dados nas expressões (2.40) e (3.76), respectivamente.

Demonstração: Por hipótese, como o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal e inversível. Logo, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{l=0}^{\ell} \psi_l \pi_{\ell-l} &= \left(\sum_{\ell \geq 0} \psi_{\ell} z^{\ell} \right) \times \left(\sum_{l \geq 0} \pi_l z^l \right) \\ &= \left(\frac{\theta(z)}{\phi(z)} \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{-\lambda_j} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\phi(z)}{\theta(z)} \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{\lambda_j} \right) = 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{\ell \geq 1} \sum_{l=0}^{\ell} \psi_l \pi_{\ell-l} = 0.$$

Ou seja,

$$\sum_{l=0}^{\ell} \psi_l \pi_{\ell-l} = 0, \quad \text{para todo } \ell \geq 1.$$

□

O Lema 2.2 acima nos fornece o comportamento dos coeficientes da série numérica obtida pelo produto das representações média móvel e autorregressiva infinitas dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) causal e inversível. Este resultado será extremamente importante na previsão utilizando estes processos. Maiores detalhes sobre previsão, utilizando os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), podem ser encontrados em Ferrara e Guégan (2001).

Capítulo 3

Processos

SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$

Existem diversos fenômenos reais que possuem a propriedade de longa dependência. Para estudar estes fenômenos foram propostos os processos ARFIMA(p, d, q) (ver Definição 2.4). Estes processos apresentam a propriedade de longa dependência mas, a sua função densidade espectral é ilimitada em apenas uma frequência em $(0, \pi]$, a saber, $w_0 = 0$.

Muitos fenômenos reais, além de possuírem longa dependência, possuem a característica de repetir-se durante um certo período de tempo fixo. A este comportamento denominamos *sazonalidade*.

Para estudar os fenômenos com longa dependência e sazonalidade, Porter-Hudak (1990), Ray (1993), Hassler (1994) e Ooms (1995) propõem os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$. Estes processos são uma extensão dos processos ARFIMA(p, d, q) e, além disso, a sua função densidade espectral é ilimitada em mais de uma frequência w em $(0, \pi]$, chamadas frequências sazonais (ver Figuras 3.1 e 3.2).

Como extensão dos processos ARFIMA(p, d, q) foram propostos os processos GARMA(p, u, λ, q) (ver Definição 2.7), cuja função densidade espectral é ilimitada em apenas uma frequência em $(0, \pi]$, a saber, $G = \cos^{-1}(u)$. Como uma extensão destes processos foram propostos os processos k -Factor GARMA ($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) (ver Definição 2.9), cuja função densidade espectral é ilimitada em k frequências, a saber, $G_j = \cos^{-1}(u_j)$, para $j = 1, \dots, k$.

Queremos encontrar uma relação entre os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ e k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) e analisar algumas propriedades dos primeiros.

Nas seções a seguir apresentamos algumas definições e propriedades para os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$.

3.1 Definições Básicas

Para podermos definir os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ precisamos, primeiramente, introduzir os operadores diferença e diferença sazonal.

Definição 3.1. Para todo $D > -1$, definimos o *operador diferença sazonal* $\nabla_s^D := (1 - \mathcal{B}^s)^D$, onde $s \in \mathbb{N}$ é a sazonalidade, através da expansão binomial

$$\nabla_s^D := (1 - \mathcal{B}^s)^D = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \binom{D}{j} (-\mathcal{B}^s)^j = 1 - D\mathcal{B}^s - \frac{D(1-D)}{2!} \mathcal{B}^{2s} - \dots, \quad (3.1)$$

onde

$$\binom{D}{j} \equiv \frac{\Gamma(D+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(D-j+1)},$$

na qual $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama.

Observação 3.1. Na Definição 3.1, se $s = 1$ e $D = d$, temos o operador diferença, denotado por $\nabla^d := (1 - \mathcal{B})^d$, que aparece na definição de um processo ARFIMA(p, d, q), dado na expressão (2.1).

Os operadores diferença e diferença sazonal são muito importantes para a definição dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ a seguir.

Definição 3.2. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico satisfazendo a equação

$$\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)\nabla^d\nabla_s^D(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t, \quad (3.2)$$

onde μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco (ver Definição 2.3), $s \in \mathbb{N}$ é a sazonalidade, \mathcal{B} é o operador de *defasagem* ou de *retardo*, isto é, $\mathcal{B}^j(X_t) = X_{t-j}$ e $\mathcal{B}^{sj}(X_t) = X_{t-sj}$, para $j, s \in \mathbb{N}$, ∇^d e ∇_s^D são os operadores, respectivamente, diferença e diferença sazonal, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ são os polinômios de ordem P , p , q e Q , respectivamente, definidos por

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{\ell=0}^p (-\phi_\ell) z^\ell, & \theta(z) &= \sum_{m=0}^q (-\theta_m) z^m, \\ \Phi(z) &= \sum_{r=0}^P (-\Phi_r) z^r, & \Theta(z) &= \sum_{l=0}^Q (-\Theta_l) z^l, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde ϕ_ℓ , $1 \leq \ell \leq p$, θ_m , $1 \leq m \leq q$, Φ_r , $1 \leq r \leq P$, e Θ_l , $1 \leq l \leq Q$, são constantes reais e $\phi_0 = \Phi_0 = -1 = \theta_0 = \Theta_0$. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo sazonal auto-regressivo fracionalmente integrado de média móvel de ordem* (p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ com sazonalidade s , denotado por SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, onde d e D são, respectivamente, *o grau de diferenciação e o grau de diferenciação sazonal*.

Observação 3.2. Alguns casos particulares dos processos SARFIMA(p, d, q) $\times (P, D, Q)_s$ são ressaltados a seguir:

- 1) Quando $P = p = 0 = q = Q$ e $d = 0$ temos o chamado *processo sazonal fracionariamente integrado com sazonalidade s* , denotado por SARFIMA($0, D, 0$) $_s$, e é representado por

$$\nabla_s^D(X_t - \mu) \equiv (1 - \mathcal{B}^s)^D(X_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Para maiores detalhes sobre estes processos ver Brietzke et al. (2005) e Bisognin e Lopes (2007).

- 2) Quando $P = 0 = Q$, $D = 0$ e $s = 1$ o processo SARFIMA(p, d, q) $\times (P, D, Q)_s$ se reduz ao processo ARFIMA(p, d, q) (ver Definição 2.4).
- 3) Quando $p = 0 = q$ e $d = 0 = D$, o processo SARFIMA(p, d, q) $\times (P, D, Q)_s$ se reduz ao processo SARMA(P, Q) $_s$, dado pela expressão

$$\Phi(\mathcal{B}^s)(X_t - \mu) = \Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

Observação 3.3. Segundo Giraitis e Leipus (1995) e Arteché e Robinson (2000) podemos expandir o termo $(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} (1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D &= \prod_{j=0}^k [(1 - \mathcal{B}e^{-iw_j})(1 - \mathcal{B}e^{iw_j})]^{d_j} \\ &= \prod_{j=0}^k (1 - 2\mathcal{B} \cos(w_j) + \mathcal{B}^2)^{d_j}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $k = \frac{s}{2}$, para s par, e $k = \frac{s-1}{2}$, para s ímpar, com

$$\begin{cases} w_0 = 0, w_j = \frac{2\pi j}{s}, j = 1, \dots, \frac{s}{2} - 1, w_{\frac{s}{2}} = \pi \\ d_0 = \frac{d+D}{2}, d_j = D, j = 1, \dots, \frac{s}{2} - 1, d_{\frac{s}{2}} = \frac{D}{2} \end{cases} \quad \text{para } s \text{ par}; \quad (3.7)$$

e

$$\begin{cases} w_0 = 0, w_j = \frac{2\pi j}{s}, j = 1, \dots, \frac{s-1}{2}, \\ d_0 = \frac{d+D}{2}, d_j = D, j = 1, \dots, \frac{s-1}{2} \end{cases} \quad \text{para } s \text{ ímpar}. \quad (3.8)$$

Assim, podemos comparar os processos SARFIMA($0, d, 0$) $\times (0, D, 0)_s$ com os processos k -Factor Gegenbauer.

A relação entre os processo SARFIMA($0, d, 0$) $\times (0, D, 0)_s$ e k -Factor Gegenbauer($0, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, 0$) é dada por

- i) $k = \frac{s+2}{2}$, se s par;
- ii) $k = \frac{s+1}{2}$, se s ímpar.

A Observação 3.2 apresenta a relação dos processos SARFIMA completos com os processos SARFIMA(0, D , 0) $_s$, ARFIMA(p , d , q) e SARMA(P , Q) $_s$. A Observação 3.3 fornece a relação entre os processos SARFIMA completos e k -Factor Gegenbauer(0, \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}$, 0).

Bisognin e Lopes (2005) comparam os processos SARFIMA(P , D , Q) $_s$, que são um caso particular dos processos SARFIMA completos, com os processos k -Factor GARMA(p , \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}$, q). Os autores utilizam a função densidade espectral para ilustrar esta comparação.

Através destas relações podemos encontrar algumas propriedades dos processos SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$ mencionadas no Teorema 3.1 a seguir.

Nas seções a seguir apresentamos algumas propriedades dos processos SARFIMA(p , d , q) \times (P , D , Q) $_s$. Sem perda de generalidade, assumimos que $\mu = 0$.

3.2 Estacionariedade

O Teorema 3.1 a seguir, apresenta a expressão da função densidade espectral, seu comportamento próximo às frequências sazonais, a estacionariedade, a dependência intermediária e longa e a função de autocovariância para os processos SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$.

Teorema 3.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, dado pela equação (3.2) quando $P = p = 0 = q = Q$, onde $s \in \mathbb{N}$ é a sazonalidade. Então, valem as seguintes afirmações.*

- i) *Quando $|d + D| < 0.5$ e $|D| < 0.5$, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por*

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{w}{2} \right) \right]^{-2d} \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{sw}{2} \right) \right]^{-2D}, \quad 0 < w \leq \pi. \quad (3.9)$$

- ii) *Quando $d + D < 0.5$ e $D < 0.5$, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estacionário.*
- iii) *Quando $0 < d + D < 0.5$ e $0 < D < 0.5$, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui longa dependência.*
- iv) *Quando $-0.5 < d + D < 0$ e $-0.5 < D < 0$, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui dependência intermediária.*

v) A função de autocovariância de ordem h , $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$ do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq}} \gamma_Z(s\nu) \gamma_Y(h - s\nu), & \text{se } h = sl, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq}; \\ 0, & \text{se } h = sl + \zeta, \quad \zeta \in A, \end{cases}$$

onde $A = \{1, \dots, s-1\}$. O processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um SARFIMA(0, D , 0) $_s$ (ver equação (3.4)) com função de autocovariância de ordem v , $v \in \mathbb{Z}_{\geq}$, dada por

$$\gamma_Z(sv + \xi) = \begin{cases} \frac{(-1)^v \Gamma(1 - 2D)}{\Gamma(v - D + 1) \Gamma(1 - v - D)} = \gamma_X(v), & \text{se } \xi = 0, \\ 0, & \text{se } \xi \in A, \end{cases} \quad (3.10)$$

e $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(p, d, q) (ver equação (2.1), quando $p = 0 = q$) com função de autocovariância de ordem h , $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, é dada por

$$\gamma_Y(h) = \frac{(-1)^h \Gamma(1 - 2d)}{\Gamma(h - d + 1) \Gamma(1 - h - d)}. \quad (3.11)$$

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(0, $d, 0$) \times (0, $D, 0$) $_s$.

i) Pela definição de função densidade espectral de processos estocásticos, para um processo SARFIMA(0, $d, 0$) \times (0, $D, 0$) $_s$, dado pela expressão (3.2), temos que

$$f_X(w) = f_\varepsilon(w) |1 - e^{-iw}|^{-2d} |1 - e^{-isw}|^{-2D}, \quad \text{para } 0 < w \leq \pi,$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco. Como $f_\varepsilon(w) = \sigma_\varepsilon^2/2\pi$, onde σ_ε^2 é a variância do processo ruído branco, temos que

$$\begin{aligned} f_X(w) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |1 - e^{-iw}|^{-2d} |1 - e^{-isw}|^{-2D} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [(1 - e^{-iw})(1 - e^{iw})]^{-d} [(1 - e^{-isw})(1 - e^{isw})]^{-D} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2(1 - \cos(w))]^{-d} [2(1 - \cos(sw))]^{-D} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right|^{-2d} \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{sw}{2}\right) \right|^{-2D}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Como $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(w)}{w} = 1$, temos que $\text{sen}(w) \sim w$, para $w \rightarrow 0$ (ver Definição A.5). Então,

$$\begin{aligned} f_x(w) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \text{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right|^{-2d} \left| 2 \text{sen}\left(\frac{sw}{2}\right) \right|^{-2D} \\ &\sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |w|^{-2(d+D)} s^{-2D} \\ &= C_1 |w|^{-2(d+D)} = C_1 |w - w_0|^{-2(d+D)}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

quando $w \rightarrow 0$, onde $w_0 = 0$ e

$$C_1 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D}. \quad (3.14)$$

Para cada $1 \leq j \leq \lfloor s/2 \rfloor$, quando $\lambda \rightarrow 0$, temos que

$$\begin{aligned} f_x(\lambda + w_j) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \text{sen}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d} \left| 2 \text{sen}\left(\frac{s\lambda}{2} + \frac{sw_j}{2}\right) \right|^{-2D} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \text{sen}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d} \\ &\quad \times \left| 2 \left(\text{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right) \cos\left(\frac{sw_j}{2}\right) + \cos\left(\frac{s\lambda}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{sw_j}{2}\right) \right) \right|^{-2D} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \text{sen}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d} \\ &\quad \times \left| 2 \left(\text{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right) \cos(\pi j) + \cos\left(\frac{s\lambda}{2}\right) \text{sen}(\pi j) \right) \right|^{-2D} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \text{sen}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d} \times \left| (-1)^j 2 \text{sen}\left(\frac{s\lambda}{2}\right) \right|^{-2D} \\ &\sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \text{sen}\left(\frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d} s^{-2D} |\lambda|^{-2D} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$= C_2 |\lambda|^{-2D}, \quad (3.18)$$

onde $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, para $1 \leq j \leq \lfloor s/2 \rfloor$ e

$$C_2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} \left| 2 \text{sen}\left(\frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d}. \quad (3.19)$$

A expressão (3.15) segue pelo fato de $\sin(a + b) = \sin(b)\cos(a) + \cos(b)\sin(a)$. A expressão (3.16) segue ao substituir $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, para $1 \leq j \leq \lfloor s/2 \rfloor$ e a equação (3.17) segue pelo fato de que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} = 1$, isto é, $\sin(\lambda) \sim \lambda$, quando $\lambda \rightarrow 0$ (ver Definição A.5).

Fazendo a mudança de variável $\lambda = w - w_j$, para $1 \leq j \leq \lfloor s/2 \rfloor$, na equação (3.18), temos que

$$f_X(w) \sim C_2 |w - w_j|^{-2D}, \quad (3.20)$$

quando $w \rightarrow w_j$, onde C_2 é dado pela expressão (3.19).

ii) Pelo Teorema de Herglotz (ver Brockwell e Davis, 1991), uma função $f_X(\cdot)$, definida no intervalo $[-\pi, \pi]$, é função densidade espectral de um processo estacionário se e somente se

- (a) $f_X(w) = f_X(-w)$;
- (b) $f_X(w) \geq 0$;
- (c) $\int_{-\pi}^{\pi} f_X(w) dw < \infty$.

Seja $f_X(\cdot)$ a função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada pela equação (3.9). Pelo item i), deste teorema, as condições (a) e (b) estão satisfeitas. Para provarmos que o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário, falta mostrar o item (c), isto é,

$$\gamma_X(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(w) dw = 2 \int_0^{\pi} f_X(w) dw < \infty. \quad (3.21)$$

As singularidades da função densidade espectral ocorrem nas frequências sazonais $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, para $j = 0, 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$.

Pelo item i), temos que

$$f_X(w) \sim C_1 |w|^{-2(d+D)}, \text{ quando } w \rightarrow 0,$$

onde $C_1 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D}$. Logo,

$$C_1 \int_0^{\pi} |w|^{-2(d+D)} dw < \infty,$$

quando $-2(d+D) + 1 > 0$, isto é, quando $d+D < 0.5$.

Da mesma forma,

$$f_X(w) \sim C_2 |w - w_j|^{-2D}, \text{ quando } w \rightarrow w_j,$$

onde $C_2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} |2 \operatorname{sen}(\frac{w_j}{2})|^{-2d}$. Assim,

$$C_2 \int_0^\pi |w - w_j|^{-2D} dw < \infty,$$

quando $-2D + 1 > 0$, isto é, $D < 0.5$.

Observamos que a integral na expressão (3.21) é finita pois o integrando é “bem comportado” em cada vizinhança pequena fixada das singularidades e no restante este integrando é limitado.

Logo, quando $d + D < 0.5$ e $D < 0.5$,

$$\gamma_X(0) = \int_{-\pi}^\pi f_X(w) dw = 2 \int_0^\pi f_X(w) dw < \infty.$$

Portanto, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário quando $d + D < 0.5$ e $D < 0.5$.

- iii) Pelo item i) a expressão assintótica da função densidade espectral dos processos SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$ é dada por

$$f_X(w) \sim C_1 |w - w_0|^{-2(d+D)}, \text{ quando } w \rightarrow w_0,$$

e

$$f_X(w) \sim C_2 |w - w_j|^{-2D}, \text{ quando } w \rightarrow w_j,$$

onde $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, para $j = 0, 1, \dots, [s/2]$ e C_1 e C_2 são dadas, respectivamente, pelas equações (3.14) e (3.19).

Assim, pela Observação 2.4, item i), quando $0 < d + D < 0.5$ e $0 < D < 0.5$, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui longa dependência.

- iv) Da mesma forma que o item anterior, pela Observação 2.4, item ii), o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui dependência intermediária quando $-0.5 < d + D < 0$ e $-0.5 < D < 0$.
- v) Queremos encontrar uma expressão para a função de autocovariância, denotada por $\gamma_X(\cdot)$, dos processos SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, dados pela expressão (3.2), com processo de inovação $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, quando $P = p = 0 = q = Q$.

Seja $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(0, D , 0) $_s$ dado por

$$(1 - \mathcal{B}^s)^D Z_t = \epsilon_t^*,$$

onde $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco com média zero e $\operatorname{Var}(\epsilon_t^*) = \sigma_{\epsilon^*}^2 < \infty$ e $D \in (-0.5, 0.5)$. Assim, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui uma representação média móvel infinita dada por

$$Z_t = (1 - \mathcal{B}^s)^{-D} \epsilon_t^* = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \mathcal{B}^{sj}(\epsilon_t^*) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \epsilon_{t-sj}^*, \quad (3.22)$$

onde ψ_j é dado pela expressão (3.28), a seguir, para todo $j \in \mathbb{Z}_{\geq}$.

Da mesma forma que para o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, podemos encontrar a função de autocovariância do processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ através da sua representação média móvel infinita. Observe que

$$\gamma_Z(h) = \text{Cov}(Z_{t+h}, Z_t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \psi_\tau \gamma_{\epsilon^*}(h - sj + s\tau), \quad (3.23)$$

onde ψ_j é dado pela expressão (3.28), a seguir, e $\gamma_{\epsilon^*}(\cdot)$ é a função de autocovariância do processo $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Através da Definição 2.3, a função de autocovariância do processo $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é tal que se $h - sj + s\tau = 0$, isto é, se $j = \frac{h}{s} + \tau$, então $\gamma_{\epsilon^*}(h) = \sigma_{\epsilon^*}^2$. Portanto, a expressão (3.23) pode ser reescrita por

$$\gamma_Z(h) = \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_{\frac{h}{s} + \tau} \psi_\tau. \quad (3.24)$$

Fazendo $h = s\ell$, para $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq}$, temos que

$$\gamma_Z(s\ell) = \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_{\ell + \tau} \psi_\tau.$$

Na equação (3.24), se $h = s\ell + \zeta$, $\zeta \in A$, onde $A = \{1, \dots, s-1\}$, $\gamma_Z(h) = 0$. Portanto, a função de autocovariância do processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\gamma_Z(h) = \begin{cases} \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_{\ell + \tau} \psi_\tau, & \text{se } h = s\ell, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq}; \\ 0, & \text{se } h = s\ell + \zeta, \zeta \in A. \end{cases} \quad (3.25)$$

Admitindo $d, D \in (-0.5, 0.5)$, seja

$$X_t = (1 - \mathcal{B}^s)^{-D} Y_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (3.26)$$

com processo de inovação $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado por $Y_t = (1 - \mathcal{B})^{-d} \epsilon_t^*$ (isto é, $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(0, d , 0) com processo de inovação

$\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$, o qual é um processo ruído branco com média zero e variância $\sigma_{\epsilon^*}^2$). Logo,

$$\begin{aligned} X_t &= (1 - \mathcal{B}^s)^{-D} Y_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \binom{-D}{j} (-\mathcal{B}^s)^j (Y_t) \\ &= \psi(\mathcal{B}^s) Y_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \mathcal{B}^{sj} (Y_t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j Y_{t-sj}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde

$$\psi_j := \begin{cases} \frac{\Gamma(j+D)}{\Gamma(j+1)\Gamma(D)}, & \text{para } j \in \mathbb{Z}_{\geq}, \\ 0, & \text{para } j \notin \mathbb{Z}_{\geq}. \end{cases} \quad (3.28)$$

Para $D < 0.5$, temos que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| < \infty$ e $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j|^2 < \infty$ (ver Lema 3.1). Quando $d < 0.5$, o processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário, isto é, $\sup_t \mathbb{E}|Y_t|^2 < \infty$. Portanto, a série na expressão (3.27) converge em quadrado médio (ver Brietzke et al., 2005).

Então, a função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) \\ &= \text{Cov}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j Y_{t+h-sj}, \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_\tau Y_{t-s\tau}\right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \psi_\tau \text{Cov}(Y_{t+h-sj}, Y_{t-s\tau}) \\ &= \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \psi_\tau \gamma_Y(h - s(j - \tau)), \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde $\gamma_Y(\cdot)$ é a função de autocovariância do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver equação (3.11)).

Fazendo $\nu = j - \tau$, na equação (3.29), temos

$$\gamma_X(h) = \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{\nu \geq -\tau} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_{\nu+\tau} \psi_\tau \gamma_Y(h - s\nu). \quad (3.30)$$

Pela definição dos coeficientes ψ_j 's (ver expressão (3.28)), a equação (3.30) torna-se

$$\gamma_X(h) = \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq}} \sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_{\nu+\tau} \psi_{\tau} \gamma_Y(h - s\nu). \quad (3.31)$$

Substituindo a equação (3.25) na equação (3.31), obtemos

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma_{\epsilon}^2 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq}} \gamma_Z(s\nu) \gamma_Y(h - s\nu), & \text{se } h = s\ell, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq}; \\ 0, & \text{se } h = s\ell + \zeta, \zeta \in A, \end{cases}$$

que é a função de autocovariância do processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, onde $\sigma_{\epsilon}^2 = \sigma_{\epsilon^*}^2 / \sigma_{\epsilon^*}^2$ é a variância do processo ruído branco $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA(0, D , 0) $_s$ e $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(0, d , 0), com $\gamma_Z(\cdot)$ e $\gamma_Y(\cdot)$ dadas, respectivamente, pelas equações (3.10) e (3.11). □

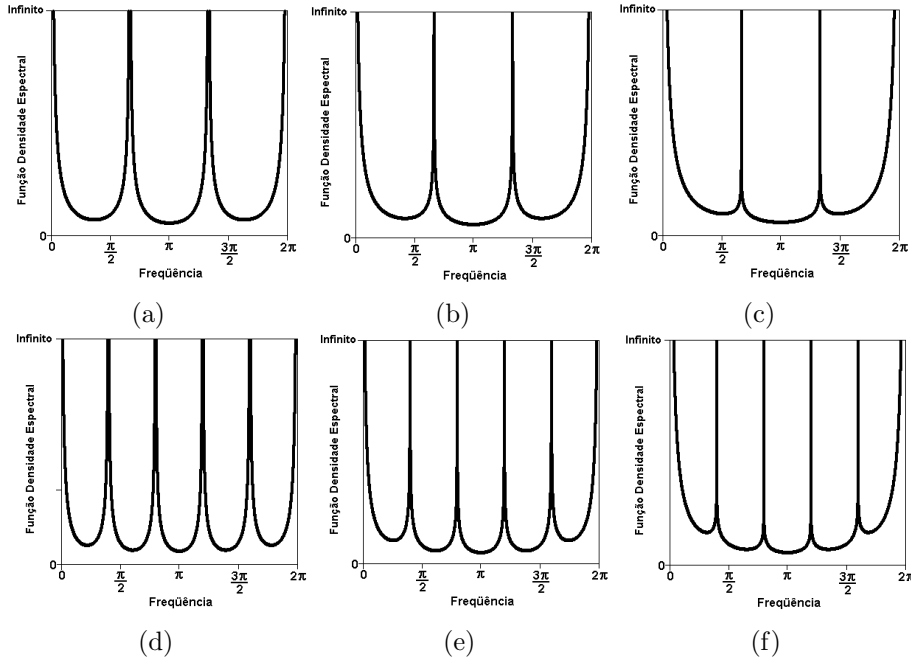


Figura 3.1: Função densidade espectral do processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$: (a) $d = 0.1$, $D = 0.35$ e $s = 3$; (b) $d = 0.2$, $D = 0.2$ e $s = 3$; (c) $d = 0.35$, $D = 0.1$ e $s = 3$; (d) $d = 0.1$, $D = 0.35$ e $s = 5$; (e) $d = 0.2$, $D = 0.2$ e $s = 5$; (f) $d = 0.35$, $D = 0.1$ e $s = 5$.

As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram o comportamento da função densidade espectral dos processos SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, para alguns valores de

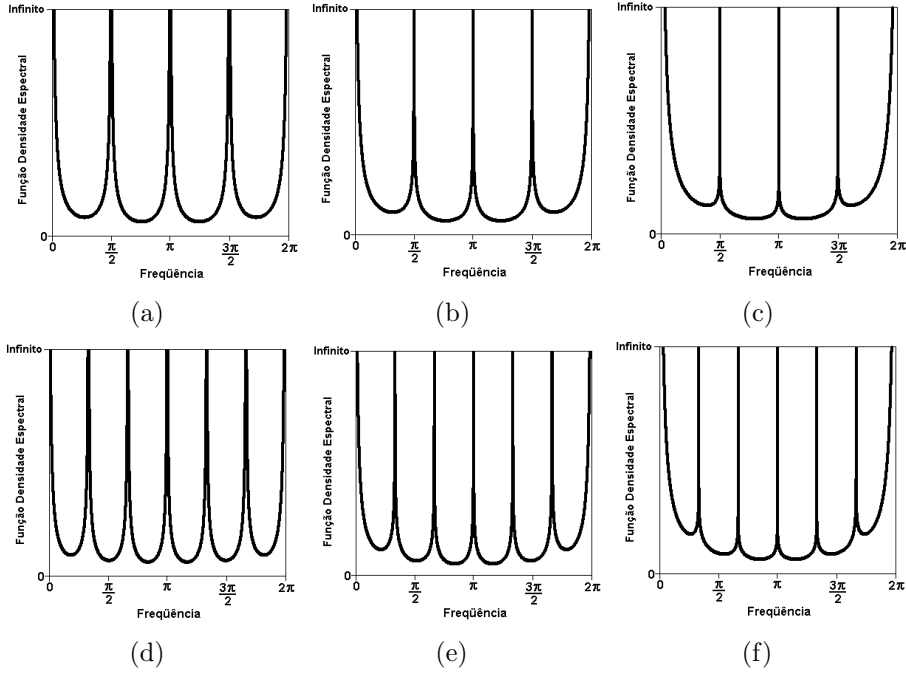


Figura 3.2: Função densidade espectral do processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$: (a) $d = 0.1$, $D = 0.35$ e $s = 4$; (b) $d = 0.2$, $D = 0.2$ e $s = 4$; (c) $d = 0.35$, $D = 0.1$ e $s = 4$; (d) $d = 0.1$, $D = 0.35$ e $s = 6$; (e) $d = 0.2$, $D = 0.2$ e $s = 6$; (f) $d = 0.35$, $D = 0.1$ e $s = 6$.

d , D e s . Podemos notar que existe uma influência do parâmetro fracionário d na forma da função densidade espectral para as frequências próximas das frequências $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, para $j = 0, 1, \dots, [s/2]$.

O próximo teorema apresenta algumas propriedades dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, onde P, p, q, Q são diferentes de zero.

Teorema 3.2. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, dado pela expressão (3.2), onde $s \in \mathbb{N}$ é a sazonalidade. Suponha que as equações $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ e $\theta(z)\Theta(z^s) = 0$ não possuam raízes em comum. Então, valem as seguintes afirmações.*

- i) *Se $|d + D| < 0.5$, $|D| < 0.5$, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por*

$$f_x(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-iw})|^2 |\Theta(e^{-isw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2 |\Phi(e^{-isw})|^2} \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w}{2} \right) \right|^{-2d} \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{sw}{2} \right) \right|^{-2D}, \quad (3.32)$$

onde $0 < w \leq \pi$.

- ii) O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se $d + D < 0.5$, $D < 0.5$ e todas as raízes da equação $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ estão fora do círculo unitário.
- iii) O processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui longa dependência se $0 < d + D < 0.5$, $0 < D < 0.5$ e todas as raízes da equação $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ estão fora do círculo unitário.
- iv) O processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui dependência intermediária se $-0.5 < d + D < 0$, $-0.5 < D < 0$ e todas as raízes da equação $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ estão fora do círculo unitário.
- v) Para $|d + D| < 0.5$, $|D| < 0.5$, a função de autocovariância de ordem h , $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é dada por

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq}} \gamma_Z(s\nu) \gamma_Y(h - s\nu), & h = s\ell, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq}, \\ 0, & h = s\ell + \zeta, \zeta \in A, \end{cases} \quad (3.33)$$

onde $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA(P, D, Q) $_s$, $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(p, d, q), $A = \{1, \dots, s-1\}$ e $\gamma_Z(\cdot)$ e $\gamma_Y(\cdot)$ são, respectivamente, as funções de autocovariância dos processos $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dadas pelas expressões (3.45) e (3.46).

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, dado pela expressão (3.2), onde $s \in \mathbb{N}$ é a sazonalidade.

- i) O resultado segue imediatamente da definição de função densidade espectral e do Teorema 3.1, item i).

Podemos escrever a função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ como

$$f_X(w) = f_Y(w) \frac{|\theta(e^{-iw})|^2 |\Theta(e^{-isw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2 |\Phi(e^{-isw})|^2}, \quad (3.34)$$

onde $f_Y(\cdot)$ é a função densidade espectral de um processo SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$, dada pela expressão (3.9).

Vamos supor que o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seja causal e inversível. Sabemos que $\lim_{w \rightarrow 0} \cos(sw) = 1$, ou seja, $\cos(sw) \sim 1$, quando $w \rightarrow 0$ (ver Definição A.5). Pelas expressões (B.5) e (3.34), quando $w \rightarrow 0$, temos que

$$\begin{aligned}
f_x(w) &= f_Y(w) \left[\frac{|\theta(e^{-iw})|^2 |\Theta(e^{-isw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2 |\Phi(e^{-isw})|^2} \right] \\
&= f_Y(w) \left[\frac{\prod_{m=1}^q (1 - 2\rho_{m,1} \cos(w) + \rho_{m,1}^2)}{\prod_{\ell=1}^p (1 - 2\rho_{\ell,2} \cos(w) + \rho_{\ell,2}^2)} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\prod_{l=1}^Q (1 - 2\rho_{l,3} \cos(sw) + \rho_{l,3}^2)}{\prod_{r=1}^P (1 - 2\rho_{r,4} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2)} \right] \\
&\sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} |w - w_0|^{-2(d+D)} \\
&\quad \times \left[\frac{\prod_{m=1}^q (1 - \rho_{m,1})^2 \prod_{l=1}^Q (1 - \rho_{l,3})^2}{\prod_{\ell=1}^p (1 - \rho_{\ell,2})^2 \prod_{r=1}^P (1 - \rho_{r,4})^2} \right] \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} \left[\frac{\theta(1)\Theta(1)}{\phi(1)\Phi(1)} \right]^2 |w - w_0|^{-2(d+D)} \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} \left| \frac{\theta(e^{-iw_0})\Theta(e^{-iw_0})}{\phi(e^{-iw_0})\Phi(e^{-iw_0})} \right|^2 |w - w_0|^{-2(d+D)} \\
&= C_3 |w - w_0|^{-2(d+D)},
\end{aligned} \tag{3.35}$$

onde a expressão (3.35) é verdadeira, pois $f_Y(w) \sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} |w - w_0|^{-2(d+D)}$, quando $w \rightarrow 0$, $w_0 = 0$ e $1/\rho_{\cdot,\iota}$ são, para cada $1 \leq \iota \leq 4$, respectivamente, as raízes dos polinômios $\theta(\cdot)$, $\phi(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$, definidos na expressão (3.3), com

$$C_3 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} \left| \frac{\theta(e^{-iw_0})\Theta(e^{-iw_0})}{\phi(e^{-iw_0})\Phi(e^{-iw_0})} \right|^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} \left[\frac{\theta(1)\Theta(1)}{\phi(1)\Phi(1)} \right]^2. \tag{3.36}$$

Da mesma forma, para cada $1 \leq j \leq \lfloor s/2 \rfloor$, temos

$$f_x(\lambda + w_j) = f_Y(\lambda + w_j) \left[\frac{|\theta(e^{-i(\lambda+w_j)})|^2 |\Theta(e^{-is(\lambda+w_j)})|^2}{|\phi(e^{-i(\lambda+w_j)})|^2 |\Phi(e^{-is(\lambda+w_j)})|^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= f_Y(\lambda + w_j) \left[\frac{\prod_{m=1}^q (1 - 2\rho_{m,1} \cos(\lambda + w_j) + \rho_{m,1}^2)}{\prod_{\ell=1}^p (1 - 2\rho_{\ell,2} \cos(\lambda + w_j) + \rho_{\ell,2}^2)} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\prod_{l=1}^Q (1 - 2\rho_{l,3} \cos(s(\lambda + w_j)) + \rho_{l,3}^2)}{\prod_{r=1}^P (1 - 2\rho_{r,4} \cos(s(\lambda + w_j)) + \rho_{r,4}^2)} \right] \\
&\sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d} |\lambda|^{-2D} \\
&\quad \times \left[\frac{\prod_{m=1}^q (1 - 2\rho_{m,1} \cos(w_j) + \rho_{m,1}^2)}{\prod_{\ell=1}^p (1 - 2\rho_{\ell,2} \cos(w_j) + \rho_{\ell,2}^2)} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\prod_{l=1}^Q (1 - 2\rho_{l,3} + \rho_{l,3}^2)}{\prod_{r=1}^P (1 - 2\rho_{r,4} + \rho_{r,4}^2)} \right] \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d} |\lambda|^{-2D} \left| \frac{\theta(e^{-iw_j})\Theta(w^{-isw_0})}{\phi(e^{-iw_j})\Phi(w^{-isw_0})} \right|^2 \\
&= C_4 |\lambda|^{-2D}, \tag{3.37}
\end{aligned}$$

quando $\lambda \rightarrow 0$, onde $w_j = \frac{2\pi j}{s}$ e

$$C_4 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d} \left| \frac{\theta(e^{-iw_j})\Theta(e^{-isw_0})}{\phi(e^{-iw_j})\Phi(e^{-isw_0})} \right|^2. \tag{3.38}$$

A expressão (3.37) é verdadeira, pois $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$, por $\cos(s\lambda) \sim 1$, quando $\lambda \rightarrow 0$ e

$$f_Y(\lambda + w_j) \sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} s^{-2D} \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d} |\lambda|^{-2D},$$

quando $\lambda \rightarrow 0$.

Fazendo a mudança de variável $\lambda = w - w_j$, na equação (3.37), temos que

$$f_Y(w) \sim C_4 |w - w_j|^{-2D}, \tag{3.39}$$

quando $w \rightarrow w_j$, para cada $1 \leq j \leq \lfloor s/2 \rfloor$, onde C_4 é dada pela expressão (3.38).

ii) O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser escrito como $X_t = \psi(\mathcal{B})\varepsilon_t$, onde

$$\psi(z) = \frac{\theta(z)\Theta(z^s)}{\phi(z)\Phi(z^s)}(1-z)^{-d}(1-z^s)^{-D}.$$

Se $d + D < 0.5$ e $D < 0.5$ então o Teorema 3.1, item ii) garante que a expansão em série de potências de $(1-z)^{-d}(1-z^s)^{-D}$ converge para todo $|z| < 1$. Temos que $(\phi(z)\Phi(z^s))^{-1}$ converge para todo $|z| < 1$ quando todas as raízes da equação $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ estão fora do círculo unitário.

Portanto a expansão em série de potências de $\psi(z)$ converge para todo $|z| < 1$ e, assim o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário.

iii) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ com todas as raízes da equação $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ fora do círculo unitário, cuja função densidade espectral é dada pela expressão (3.32). Pelo item i), a expressão assintótica da função densidade espectral do processo é dada por

$$f_X(w) \sim C_3|w - w_0|^{-2(d+D)}, \text{ quando } w \rightarrow w_0$$

e

$$f_X(w) \sim C_4|w - w_j|^{-2D}, \text{ quando } w \rightarrow w_j$$

onde $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, para $j = 0, 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$ e C_3 e C_4 são dadas, respectivamente, pelas equações (3.36) e (3.38).

Assim, pela Observação 2.4, item i), o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui longa dependência quando $0 < d + D < 0.5$ e $0 < D < 0.5$, e todas as raízes da equação $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ estão fora do círculo unitário.

iv) Pelo item i) e pela Observação 2.4, item ii), o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui dependência intermediária quando $-0.5 < d + D < 0$ e $-0.5 < D < 0$.

v) Seja $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ dado pela equação (3.2) causal e inversível, com processo de inovação $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Queremos uma expressão para a função de autocovariância, $\gamma_X(\cdot)$.

Seja $\{\tilde{U}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARMA(P, Q) $_s$ estacionário e causal, dado pela equação

$$\Phi(\mathcal{B}^s)\tilde{U}_t = \Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t^*, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\{\varepsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco com média zero e variância $\sigma_{\varepsilon^*}^2$. Então,

$$\tilde{U}_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \mathcal{B}^{sj}(\epsilon_t^*) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \epsilon_{t-sj}^*,$$

onde os coeficientes ψ_j 's são determinados pela relação

$$\psi(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j z^{sj} = \frac{\Theta(z^s)}{\Phi(z^s)}, \quad \text{para } |z| \leq 1. \quad (3.40)$$

Por definição, a função de autocovariância, denotada por $\gamma_{\tilde{V}}(\cdot)$, é dada por

$$\gamma_{\tilde{V}}(h) = \text{Cov}(\tilde{U}_{t+h}, \tilde{U}_t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \sum_{v \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \psi_v \gamma_{\epsilon^*}(h - sj + sv),$$

para todo $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$.

Pela Definição 2.3, a função de autocovariância dos processos $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é tal que se $h - sj + sv = 0$, ou seja, se $j = \frac{h}{s} + v$, então $\gamma_{\epsilon^*}(h) = \sigma_{\epsilon^*}^2$. Logo,

$$\gamma_{\tilde{V}}(h) = \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{v \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_{\frac{h}{s} + v} \psi_v.$$

Fazendo $h = s\nu$, para $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq}$, temos que

$$\gamma_{\tilde{V}}(s\nu) = \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{v \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_{\nu+v} \psi_v. \quad (3.41)$$

Se na equação (3.41), $h = s\nu + \zeta$, onde $\zeta \in A$, então $\gamma_{\tilde{V}}(s\nu + \zeta) = 0$. Portanto, a função de autocovariância do processo $\{\tilde{U}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\gamma_{\tilde{V}}(h) = \begin{cases} \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{v \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_{\nu+v} \psi_v, & \text{se } h = s\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z}_{\geq}; \\ 0, & \text{se } h = s\nu + \zeta, \quad \zeta \in A. \end{cases} \quad (3.42)$$

Seja $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado pela equação

$$Z_t = \frac{\Theta(\mathcal{B}^s)}{\Phi(\mathcal{B}^s)} \tilde{V}_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

com processo de inovação $\{\tilde{V}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado por $\tilde{V}_t = (1 - \mathcal{B}^s)^{-D} \epsilon_t^*$ (ou seja, $\{\tilde{V}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um SARFIMA(0, D, 0)_s com processo de inovação $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o

qual é um processo ruído branco com média zero e $\text{Var}(\epsilon_t^*) = \sigma_{\epsilon^*}^2$. Assim,

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{\Theta(\mathcal{B}^s)}{\Phi(\mathcal{B}^s)} \tilde{V}_t = \Psi(\mathcal{B}^s) \tilde{V}_t \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \mathcal{B}^{sj}(\tilde{V}_t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \tilde{V}_{t-sj}, \end{aligned}$$

onde os coeficientes ψ_j 's são determinados pela relação (3.40).

Sendo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estacionário e causal, pela Proposição 3.2, temos que a função de autocovariância, de ordem h , $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, é dada por

$$\gamma_Z(h) = \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \sum_{v \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \psi_v \gamma_{\tilde{V}}(h - s(j + v)). \quad (3.43)$$

Fazendo $m = j - v$, na equação (3.43), temos

$$\gamma_Z(h) = \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq}} \sum_{v \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_{m+v} \psi_v \gamma_{\tilde{V}}(h - sm). \quad (3.44)$$

Substituindo a equação (3.42) na equação (3.44), obtemos

$$\gamma_Z(h) = \begin{cases} \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq}} \gamma_{\tilde{U}}(sm) \gamma_{\tilde{V}}(h - sm), & \text{se } h = sm, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq}; \\ 0, & \text{se } h = sm + \zeta, \quad \zeta \in A, \end{cases} \quad (3.45)$$

a qual é a função de autocovariância do processo SARFIMA(P, D, Q) $_s$, onde $\sigma_{\epsilon^*}^2 = \sigma_{\epsilon^*}^2 / \sigma_{\epsilon^*}^2$, $\{\tilde{U}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARMA(P, Q) $_s$ sazonal e $\{\tilde{V}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA($0, D, 0$) $_s$.

Seja $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p, d, q) (ver Definição 2.4). Pelo Teorema 13.2.2 item d), de Brockwell e Davis (1991), a função de autocovariância do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\gamma_Y(h) = \sigma_{\epsilon^*}^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \gamma_{\tilde{U}}(j) \gamma_{\tilde{V}}(h - j), \quad (3.46)$$

onde $\{\tilde{U}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARMA(p, q) com processo de inovação $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$, $\{\tilde{V}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA($0, d, 0$) com processo de inovação $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco com média zero e variância $\sigma_{\epsilon^*}^2 = \sigma_{\epsilon^*}^2 / \sigma_{\epsilon^*}^2$.

Através do mesmo método utilizado para encontrar a função de autocovariância dos processos SARFIMA(P, D, Q) $_s$, podemos encontrar a função de autocovariância dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, a qual é dada por

$$\gamma_x(h) = \begin{cases} \sigma_\epsilon^2 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq}} \gamma_z(s\nu) \gamma_y(h - s\nu), & h = s\ell, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq}, \\ 0, & h = s\ell + \zeta, \zeta \in A, \end{cases} \quad (3.47)$$

onde $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA(P, D, Q) $_s$ com processo de inovação $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$, $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(p, d, q) com processo de inovação $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco com média zero e variância $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_{\epsilon^*}^2 / \sigma_{\epsilon^*}^2$. □

Observação 3.4. Utilizando-se a relação dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ com os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) dada pelas equações (3.6) e (3.7) e o Lema 2.1, temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln[f_x(w)] dw = 2\pi \ln \left(\frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \right),$$

onde $f_x(\cdot)$ é a função densidade espectral dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ dada pela equação (3.32).

Observação 3.5. Por questão de notação, definimos a função

$$S_x(w) = f_x(w)g(w), \quad \text{para } 0 < w \leq \pi, \quad (3.48)$$

onde $f_x(\cdot)$ é a função densidade espectral dos processos SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$, dada pela expressão (3.9) e $g : [-\pi, \pi] \rightarrow (0, \pi]$ é uma função real, de variação suave no sentido de Zygmund (ver Definição A.2) nas frequências sazonais $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, $j = 0, 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$ e possui variação limitada no conjunto $(0, \pi] \setminus \bigcup_{j=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} [w_j - \epsilon, w_j + \epsilon]$, para qualquer $\epsilon > 0$ (ver Definições A.1 e A.2).

No caso de $g(w) \equiv 1$, para todo $w \in [-\pi, \pi]$, $S_x(\cdot)$ é a própria função densidade espectral dos processos SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$.

Teorema 3.3. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$ real cuja função densidade espectral é dada pela expressão (3.48). Então, a expressão assintótica da função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ de ordem h , $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, quando $h \rightarrow \infty$, é dada por*

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\delta} \alpha_j |h|^{2\beta_j-1} g\left(\frac{1}{h} + w_j\right) [\text{sen}(\pi\beta_j - w_j h) + o(1)], & \text{se } h = s\ell, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq}, \\ 0, & \text{se } h = s\ell + \zeta, \zeta \in A, \end{cases}$$

onde

$$\delta = \begin{cases} \lfloor \frac{s}{2} \rfloor - 1, & \text{se } s \text{ é par,} \\ \lfloor \frac{s}{2} \rfloor, & \text{se } s \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad \beta_j = \begin{cases} d + D, & \text{se } j = 0, \\ D, & \text{se } j \neq 0, \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\alpha_j = \begin{cases} \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\pi} \Gamma(1 - 2\beta_j) s^{-2D} |2 \text{sen}(\frac{w_j}{2})|^{-2d}, & \text{se } j \neq 0, \\ \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\pi} \Gamma(1 - 2\beta_j) s^{-2D}, & \text{se } j = 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

com $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, para $j = 0, 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$ e $g(\cdot)$ uma função conforme a Observação 3.5.

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico real, cuja função densidade espectral, denotada por $S_X(\cdot)$, é dada pela expressão (3.48).

Por definição, a função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, de ordem $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, é dada por

$$\gamma_X(h) = \int_{-\pi}^{\pi} S_X(\lambda) e^{i\lambda h} d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} S_X(\lambda) \cos(\lambda h) d\lambda, \quad (3.51)$$

onde a última igualdade da equação (3.51) decorre do fato do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ser real.

O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0)_s com processo de inovação cuja função densidade espectral é $g(\cdot)$. Portanto, pela definição da função de autocovariância dos processos SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0)_s, $\gamma_X(h) = 0$, para $h = s\ell + \zeta$, $\zeta \in A$.

Para s par, a função de autocovariância de ordem $h = s\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq}$, é dada por

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} S_X(\lambda) \cos(\lambda h) d\lambda = 2 \int_0^{\pi} S_X(\lambda) \cos(\lambda h) d\lambda \\ &= 2 \sum_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor - 1} \int_{w_j}^{w_{j+1}} S_X(\lambda) \cos(\lambda h) d\lambda \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$= 2 \sum_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor - 1} \int_{w_0}^{w_1} S_X(w + w_j) \cos((w + w_j)h) dw \quad (3.53)$$

$$= 2 \sum_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor - 1} \left[\cos(w_j h) \int_{w_0}^{w_1} S_X(w + w_j) \cos(wh) dw \right. \\ \left. + \sin(w_j h) \int_{w_0}^{w_1} S_X(w + w_j) \sin(wh) dw \right], \quad (3.54)$$

onde $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, para $j = 0, 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$.

A expressão (3.53) segue pela mudança de variável $\lambda = w + w_j$, enquanto que a expressão (3.54) segue do fato que $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$.

Através da expressão e do comportamento assintótico da função densidade espectral dos processos SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$ (ver Teorema 3.1, item i)), o Teorema A.1 com $b(w) = g(w)$ e através das propriedades de funções assintóticas (ver Seção A.3), temos que

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} s^{-2D} \left[\cos(w_0 h) |h|^{2(d+D)-1} g\left(\frac{1}{h} + w_0\right) \Gamma(1 - 2(d+D)) \right. \\ &\quad \times [\sin(\pi(d+D)) + o(1)] - \sin(w_0 h) |h|^{2(d+D)-1} g\left(\frac{1}{h} + w_0\right) \\ &\quad \left. \times \Gamma(1 - 2(d+D)) [\cos(\pi(d+D)) + o(1)] \right] \\ &\quad + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} s^{-2D} \sum_{j=1}^{\lfloor s/2 \rfloor - 1} \left| 2 \sin\left(\frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d} \\ &\quad \times \left[\cos(w_j h) |h|^{2D-1} g\left(\frac{1}{h} + w_j\right) \Gamma(1 - 2D) [\sin(\pi D) + o(1)] \right. \\ &\quad \left. - \sin(w_j h) |h|^{2D-1} g\left(\frac{1}{h} + w_j\right) \Gamma(1 - 2D) [\cos(\pi D) + o(1)] \right] \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} s^{-2D} |h|^{2(d+D)-1} g\left(\frac{1}{h} + w_0\right) \Gamma(1 - 2(d+D)) [\sin(\pi(d+D) - w_0 h) + o(1)] \\ &\quad + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} s^{-2D} \sum_{j=1}^{\lfloor s/2 \rfloor - 1} \left| 2 \sin\left(\frac{w_j}{2}\right) \right|^{-2d} |h|^{2D-1} g\left(\frac{1}{h} + w_j\right) \Gamma(1 - 2D) \quad (3.55) \\ &\quad \times [\sin(\pi D - w_j h) + o(1)], \end{aligned}$$

quando $h \rightarrow \infty$.

Para s ímpar, a função de autocovariância de ordem $h = s\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq}$, é dada por

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= 2 \int_0^\pi S_X(\lambda) \cos(\lambda h) d\lambda \\
&= 2 \sum_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor - 1} \int_{w_j}^{w_{j+1}} S_X(\lambda) \cos(\lambda h) d\lambda + 2 \int_{w_{\lfloor s/2 \rfloor - 1}}^\pi S_X(\lambda) \cos(\lambda h) d\lambda \\
&= 2 \sum_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor - 1} \int_{w_0}^{w_1} S_X(w + w_j) \cos((w + w_j)h) dw \\
&\quad + 2 \int_{w_0}^{\frac{w_1}{2}} S_X(w + w_{\lfloor s/2 \rfloor}) \cos((w + w_{\lfloor s/2 \rfloor})h) dw \tag{3.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor - 1} \left[\cos(w_j h) \int_{w_0}^{w_1} S_X(w + w_j) \cos(wh) dw \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{sen}(w_j h) \int_{w_0}^{w_1} S_X(w + w_j) \operatorname{sen}(wh) dw \right] \\
&\quad + 2 \cos(w_{\lfloor s/2 \rfloor} h) \int_{w_0}^{\frac{w_1}{2}} S_X(w + w_{\lfloor s/2 \rfloor}) \cos(wh) dw \\
&\quad - 2 \operatorname{sen}(w_{\lfloor s/2 \rfloor} h) \int_{w_0}^{\frac{w_1}{2}} S_X(w + w_{\lfloor s/2 \rfloor}) \operatorname{sen}(wh) dw, \tag{3.57}
\end{aligned}$$

com $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, para $j = 0, 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$.

A expressão (3.56) segue pela mudança de variável $\lambda = w + w_j$, enquanto que a expressão (3.57) segue do fato que $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b)$.

Através da expressão e do comportamento assintótico da função densidade espectral dos processos SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$ (ver Teorema 3.1, item i)), o Teorema A.1 com $b(w) = g(w)$ e as propriedades de funções assintóticas (ver Seção A.3), na expressão acima, temos que

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} s^{-2D} \left[\cos(w_0 h) |h|^{2(d+D)-1} g\left(\frac{1}{h} + w_0\right) \Gamma(1 - 2(d + D)) \right. \\
&\quad \times [\operatorname{sen}(\pi(d + D)) + o(1)] - \operatorname{sen}(w_0 h) |h|^{2(d+D)-1} g\left(\frac{1}{h} + w_0\right) \\
&\quad \left. \times \Gamma(1 - 2(d + D)) [\cos(\pi(d + D)) + o(1)] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} s^{-2D} \sum_{j=1}^{\lfloor s/2 \rfloor - 1} \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w_j}{2} \right) \right|^{-2d} \left[\cos(w_j h) |h|^{2D-1} g \left(\frac{1}{h} + w_j \right) \right. \\
& \times \Gamma(1 - 2D) [\operatorname{sen}(\pi D) + o(1)] - \operatorname{sen}(w_j h) |h|^{2D-1} g \left(\frac{1}{h} + w_j \right) \\
& \times \Gamma(1 - 2D) [\cos(\pi D) + o(1)] \left. \right] + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} s^{-2D} \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w_{\lfloor s/2 \rfloor}}{2} \right) \right|^{-2d} \\
& \left[\cos(w_{\lfloor s/2 \rfloor} h) |h|^{2D-1} g \left(\frac{1}{h} + w_{\lfloor s/2 \rfloor} \right) \Gamma(1 - 2D) [\operatorname{sen}(\pi D) + o(1)] \right. \\
& \left. - \operatorname{sen}(w_{\lfloor s/2 \rfloor} h) |h|^{2D-1} g \left(\frac{1}{h} + w_{\lfloor s/2 \rfloor} \right) \Gamma(1 - 2D) [\cos(\pi D) + o(1)] \right] \\
& = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} s^{-2D} |h|^{2(d+D)-1} g \left(\frac{1}{h} + w_0 \right) \Gamma(1 - 2(d+D)) \\
& \times [\operatorname{sen}(\pi(d+D) - w_0 h) + o(1)] \\
& + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} s^{-2D} \sum_{j=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w_j}{2} \right) \right|^{-2d} |h|^{2D-1} g \left(\frac{1}{h} + w_j \right) \Gamma(1 - 2D) \\
& \times [\operatorname{sen}(\pi D - w_j h) + o(1)], \tag{3.58}
\end{aligned}$$

quando $h \rightarrow \infty$.

Comparando as equações (3.55) e (3.58), temos que a expressão assintótica da função de autocovariância dos processos $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ de ordem h , para $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, quando $h \rightarrow \infty$, é dada por

$$\gamma_x(h) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\delta} \alpha_j |h|^{2\beta_j-1} g \left(\frac{1}{h} + w_j \right) [\operatorname{sen}(\pi\beta_j - w_j h) + o(1)], & \text{se } h = s\ell, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq}, \\ 0, & \text{se } h = s\ell + \zeta, \zeta \in A, \end{cases}$$

onde $\alpha_j, \beta_j, \delta$, para $j = 0, 1, \dots, \delta$, são definidos no enunciado do teorema. \square

A seguir, apresentamos a expressão assintótica da função de autocovariância dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$.

Proposição 3.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ real, causal e inversível, dado pela equação (3.2), com p, P, q, Q e s inteiros não negativos finitos. Então, a expressão assintótica da função de autocovariância de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ de ordem h , $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, quando $h \rightarrow \infty$, é dada por*

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\delta} \alpha_j |h|^{2\beta_j - 1} g(w_j) [\text{sen}(\pi\beta_j - w_j h) + o(1)], & \text{se } h = s\ell, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq}, \\ 0, & \text{se } h = s\ell + \zeta, \zeta \in A, \end{cases} \quad (3.59)$$

onde α_j , β_j e δ são dados, respectivamente, pelas equações (3.50) e (3.49), $w_j = \frac{2\pi j}{s}$, para $j = 0, 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$ e

$$g(w) = \left| \frac{\theta(e^{-iw})\Theta(e^{-isw})}{\phi(e^{-iw})\Phi(e^{-isw})} \right|^2. \quad (3.60)$$

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com média zero, dado pela expressão (3.2).

Queremos mostrar que a função real $g(\cdot)$ definida por

$$g(w) := \left| \frac{\theta(e^{-iw})\Theta(e^{-isw})}{\phi(e^{-iw})\Phi(e^{-isw})} \right|^2, \quad \text{para } 0 < w \leq \pi, \quad (3.61)$$

possui derivada limitada e é de variação suave (ver Definição A.2) para qualquer $0 < w \leq \pi$, tal que $g(w) \neq 0$.

Primeiramente, como o processo é causal e inversível (ver Teoremas 3.4 e 3.5, respectivamente), temos que $g(w) \neq 0$ para qualquer $0 < w \leq \pi$.

Temos que

$$\ln(g(w)) = \ln |\theta(e^{-iw})|^2 + \ln |\Theta(e^{-isw})|^2 - \ln |\phi(e^{-iw})|^2 - \ln |\Phi(e^{-isw})|^2. \quad (3.62)$$

Por definição,

$$[\ln(g(w))] \equiv \frac{d}{dw} \ln(g(w)) = \frac{g'(w)}{g(w)},$$

ou seja,

$$g'(w) = g(w) [\ln(g(w))]'. \quad (3.63)$$

Como o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal e inversível, as raízes das equações $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ e $\theta(z)\Theta(z^s) = 0$ estão fora do círculo unitário. Então, estes polinômios podem ser escritos em função de suas raízes. Em particular,

$$\theta(z) = \prod_{m=1}^q (1 - \rho_{m,1} z), \quad (3.64)$$

onde $|\rho_{m,1}| < 1$, para $m = 1, \dots, q$ e $1/\rho_{m,1}$ são as raízes do polinômio.

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\ln |\theta(e^{-iw})|^2 &= \ln \left| \prod_{m=1}^q (1 - \rho_{m,1} e^{-iw}) \right|^2 \\
&= \ln \left(\prod_{m=1}^q (1 - \rho_{m,1} e^{iw}) (1 - \rho_{m,1} e^{-iw}) \right) \\
&= \sum_{m=1}^q \ln \left((1 - \rho_{m,1} e^{iw}) (1 - \rho_{m,1} e^{-iw}) \right) \\
&= \sum_{m=1}^q \ln \left(1 - 2\rho_{m,1} \cos(w) + \rho_{m,1}^2 \right). \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[\ln |\theta(e^{-iw})|^2]' = \sum_{m=1}^q \frac{2\rho_{m,1} \operatorname{sen}(w)}{\left(1 - 2\rho_{m,1} \cos(w) + \rho_{m,1}^2\right)}.$$

Analogamente, segue para os polinômios restantes. Desta forma,

$$\begin{aligned}
[\ln(g(w))]' &= \sum_{m=1}^q \frac{2\rho_{m,1} \operatorname{sen}(w)}{\left(1 - 2\rho_{m,1} \cos(w) + \rho_{m,1}^2\right)} + \sum_{l=1}^Q \frac{2s\rho_{l,3} \operatorname{sen}(sw)}{\left(1 - 2\rho_{l,3} \cos(sw) + \rho_{l,3}^2\right)} \\
&\quad - \sum_{\ell=1}^p \frac{2\rho_{\ell,2} \operatorname{sen}(w)}{\left(1 - 2\rho_{\ell,2} \cos(w) + \rho_{\ell,2}^2\right)} - \sum_{r=1}^P \frac{2s\rho_{r,4} \operatorname{sen}(sw)}{\left(1 - 2\rho_{r,4} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2\right)}. \tag{3.66}
\end{aligned}$$

Substituindo as equações (3.61) e (3.66) na equação (3.63), temos que

$$\begin{aligned}
g'(w) &= \left| \frac{\theta(e^{-iw})\Theta(e^{-isw})}{\phi(e^{-iw})\Phi(e^{-isw})} \right|^2 \times \left[\sum_{m=1}^q \frac{2\rho_{m,1} \operatorname{sen}(w)}{\left(1 - 2\rho_{m,1} \cos(w) + \rho_{m,1}^2\right)} \right. \\
&\quad + \sum_{l=1}^Q \frac{2s\rho_{l,3} \operatorname{sen}(sw)}{\left(1 - 2\rho_{l,3} \cos(sw) + \rho_{l,3}^2\right)} - \sum_{\ell=1}^p \frac{2\rho_{\ell,2} \operatorname{sen}(w)}{\left(1 - 2\rho_{\ell,2} \cos(w) + \rho_{\ell,2}^2\right)} \\
&\quad \left. - \sum_{r=1}^P \frac{2s\rho_{r,4} \operatorname{sen}(sw)}{\left(1 - 2\rho_{r,4} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2\right)} \right]. \tag{3.67}
\end{aligned}$$

Queremos verificar que $g'(w)$ é limitada, isto é, que existe uma constante $M \in \mathbb{R}$, tal que $|g'(w)| < M$, para todo $0 < w \leq \pi$. Da expressão (3.63) observe que

$$|g'(w)| = |g(w)[\ln(g(w))]'| = |g(w)| |[\ln(g(w))]'|.$$

Primeiramente, vamos mostrar que $g(w)$ é limitada.

Como $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal e inversível, segue que

$$|g(w)| = \frac{\prod_{m=1}^q |1 - 2\rho_{m,1} \cos(w) + \rho_{m,1}^2| \prod_{l=1}^Q |1 - 2\rho_{l,3} \cos(sw) + \rho_{l,3}^2|}{\prod_{\ell=1}^p |1 - 2\rho_{\ell,2} \cos(w) + \rho_{\ell,2}^2| \prod_{r=1}^P |1 - 2\rho_{r,4} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2|}.$$

Contudo,

$$\begin{aligned} |1 - 2\rho_{l,3} \cos(sw) + \rho_{l,3}^2| &\leq |1 - 2\rho_{l,3} \cos(sw)| + |\rho_{l,3}^2| \\ &\leq 1 + 2|\rho_{l,3}| |\cos(sw)| + |\rho_{l,3}^2| \\ &< 4, \end{aligned} \tag{3.68}$$

pois $|\cos(sw)| \leq 1$ e $|\rho_{l,3}| < 1$, para todo $l = 1, \dots, Q$.

Agora, temos que verificar se $|1 - 2\rho_{r,4} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2|$ é limitada inferiormente. De fato, para $0 < w \leq \pi$, temos que

$$1 - 2\rho_{r,4} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2 = 1 - 2a\rho_{r,4} + \rho_{r,4}^2, \tag{3.69}$$

onde $a = \cos(sw)$, para todo $r = 1, \dots, P$.

A função dada na expressão (3.69) é linear em $a = \cos(sw)$.

Pelo fato de $|\rho_{r,4}| < 1$, para todo $r = 1, \dots, P$, temos três casos a considerar, $\rho_{r,4} < 0$, $\rho_{r,4} = 0$ e $\rho_{r,4} > 0$.

- i) Se $\rho_{r,4} < 0$, para $r = 1, \dots, P$, a função dada na equação (3.69) é crescente e possui valor mínimo em $a = -1$ dado por

$$1 + 2\rho_{r,4} + \rho_{r,4}^2 = (\rho_{r,4} + 1)^2 > 0. \tag{3.70}$$

- ii) Se $\rho_{r,4} = 0$, para $r = 1, \dots, P$, a função dada na equação (3.69) é constante e igual a 1.

- iii) Se $\rho_{r,4} > 0$, para $r = 1, \dots, P$, a função dada na equação (3.69) é decrescente e possui valor mínimo em $a = 1$ dado por

$$1 - 2\rho_{r,4} + \rho_{r,4}^2 = (\rho_{r,4} - 1)^2 > 0. \tag{3.71}$$

De forma análoga, valem os mesmos resultados i), ii) e iii) para a equação (3.68).

Portanto, pela equação (3.68) e itens i) a iii), temos que $|g(w)| < \infty$, para todo $0 < w \leq \pi$, pois p, P, q, Q e s são finitos. Portanto, $g(w)$ é limitada para todo $0 < w \leq \pi$.

Como próximo passo, vamos mostrar que $[\ln(g(w))]'$ é limitada. Pela equação (3.66), temos que

$$\begin{aligned} |[\ln(g(w))]'| \leq & \sum_{m=1}^q \frac{2|\rho_{m,1}| |\operatorname{sen}(w)|}{|1-2\rho_{m,1} \cos(w) + \rho_{m,1}^2|} + \sum_{l=1}^Q \frac{2s|\rho_{l,3}| |\operatorname{sen}(sw)|}{|1-2\rho_{l,3} \cos(sw) + \rho_{l,3}^2|} \\ & + \sum_{\ell=1}^p \frac{2|\rho_{\ell,2}| |\operatorname{sen}(w)|}{|1-2\rho_{\ell,2} \cos(w) + \rho_{\ell,2}^2|} + \sum_{r=1}^P \frac{2s|\rho_{r,4}| |\operatorname{sen}(sw)|}{|1-2\rho_{r,4} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2|}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Pelos itens i) a iii) e pelo fato de P, p, q, Q e s serem finitos, temos que $[\ln(g(w))]'$ é limitada para $0 < w \leq \pi$.

Portanto, como $g'(w) = g(w)[\ln(g(w))]'$, temos que $g'(w)$ é limitada para $0 < w \leq \pi$.

Agora, temos que verificar que $g(w)$ é uma função de variação suave para qualquer $w \in (0, \pi]$ tal que $g(w) \neq 0$.

Segundo Bingham et al. (1987), uma condição suficiente para uma função $f(\cdot)$ ser de variação suave em $w = 0$, no sentido de Zygmund, é a existência da derivada $f'(\cdot)$, tal que

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{wf'(w)}{f(w)} = 0.$$

Vamos verificar se $g(\cdot)$ é de variação suave. Pela equação (3.63), temos que mostrar que

$$\lim_{w \rightarrow 0} w[\ln(g(w))]' = 0.$$

Pela equação (3.66), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} w[\ln(g(w))]' &= \lim_{w \rightarrow 0} w \left[\sum_{m=1}^q \frac{2\rho_{m,1} \operatorname{sen}(w)}{(1-2\rho_{m,1} \cos(w) + \rho_{m,1}^2)} \right. \\ &+ \sum_{l=1}^Q \frac{2s\rho_{l,3} \operatorname{sen}(sw)}{(1-2\rho_{l,3} \cos(sw) + \rho_{l,3}^2)} - \sum_{\ell=1}^p \frac{2\rho_{\ell,2} \operatorname{sen}(w)}{(1-2\rho_{\ell,2} \cos(w) + \rho_{\ell,2}^2)} \\ &\left. - \sum_{r=1}^P \frac{2s\rho_{r,4} \operatorname{sen}(sw)}{(1-2\rho_{r,4} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} \sum_{r=1}^P \frac{2s\rho_{r,4} \operatorname{sen}(sw)}{\left(1 - 2\rho_{r,4} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2\right)} &= \sum_{r=1}^P \frac{2s\rho_{r,4} \lim_{w \rightarrow 0} \operatorname{sen}(sw)}{\left(1 - 2\rho_{r,4} \lim_{w \rightarrow 0} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2\right)} \\ &= \sum_{r=1}^P \frac{0}{(1 - \rho_{r,4})^2} = 0, \end{aligned}$$

pois $\lim_{w \rightarrow 0} \operatorname{sen}(sw) = 0$, $\lim_{w \rightarrow 0} \cos(sw) = 1$ e $(1 - \rho_{r,4})^2 \neq 0$ já que $|\rho_{r,4}| < 1$.

De forma análoga, calculando o limite para as demais parcelas da expressão (3.73), segue que

$$\lim_{w \rightarrow 0} w [\ln(g(w))]' = 0.$$

Portanto, $g(w)$ é de variação suave em $w = 0$.

Queremos verificar se $g(w)$ é de variação suave no intervalo $0 < w \leq \pi$. Para isto, temos que verificar se

$$\lim_{w \rightarrow \pi} w [\ln(g(w))]' = \lim_{w \rightarrow \pi} \frac{wg'(w)}{g(w)} = 0. \quad (3.74)$$

Observamos que

$$\lim_{w \rightarrow \pi} \sum_{r=1}^P \frac{2s\rho_{r,4} \operatorname{sen}(sw)}{\left(1 - 2\rho_{r,4} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2\right)} = \sum_{r=1}^P \frac{2s\rho_{r,4} \lim_{w \rightarrow \pi} \operatorname{sen}(sw)}{\left(1 - 2\rho_{r,4} \lim_{w \rightarrow \pi} \cos(sw) + \rho_{r,4}^2\right)} = 0,$$

pois $\lim_{w \rightarrow \pi} \operatorname{sen}(sw) = 0$, $|\cos(sw)| < 1$ e $|\rho_{r,4}| < 1$, para $r = 1, \dots, P$.

Usando a expressão (3.73) quando $w \rightarrow \pi$ e tendo em vista que o limite para cada uma das parcelas vai à zero, quando $w \rightarrow \pi$, segue a expressão (3.74). Portanto, $g(w)$ é de variação suave em qualquer ponto no intervalo $0 < w \leq \pi$, tal que $g(w) \neq 0$.

Como próximo passo, temos que verificar se $g(w)$ é de variação limitada no intervalo $(0, \pi]$ (ver Definição A.1). Para isto, seja $0 < x_0 < x_1 < \dots < x_k \leq \pi$, uma partição do intervalo $(0, \pi]$. Temos que,

$$\sum_{j=1}^k |g(x_j) - g(x_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^k (|g(x_j)| + |g(x_{j-1})|) < \infty, \quad (3.75)$$

pois $g(w)$ é limitada, para todo $w \in (0, \pi]$.

Logo, $g(w)$ é de variação limitada no intervalo $(0, \pi]$.

Tendo em vista que $\lim_{h \rightarrow \infty} g\left(\frac{1}{h} + w\right) = g(w)$, pelo Teorema 3.3 acima, temos que a expressão assintótica da função de autocovariância dos processos

SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ é dada pela expressão (3.59), onde $g(\cdot)$ é dada pela expressão (3.60). □

3.3 Causalidade e Inversibilidade

Nesta seção apresentamos as propriedades de causalidade e invertibilidade dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$.

A causalidade e a inversibilidade não são propriedades somente do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, neste caso um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$. Estas propriedades informam uma relação entre dois processos, o $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e o processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ que é um processo ruído branco. A seguir definimos as propriedades de causalidade e inversibilidade para um processos estocástico qualquer.

Definição 3.3. Um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser *causal* (ou mais especificamente ser uma *função causal* do processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$) se existe uma seqüência de constantes $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ tal que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| < \infty$ e

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Definição 3.4. Um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser *inversível* se existe uma seqüência de constantes $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ tal que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| < \infty$ e

$$\varepsilon_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j X_{t-j}, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

O Teorema 3.4 a seguir apresenta as condições necessárias e suficientes para um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ ser causal.

Teorema 3.4. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ (ver Definição 3.2). Supondo que $d < 0.5$, $D < 0.5$ e que as equações $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ e $\theta(z)\Theta(z^s) = 0$ não possuam raízes em comum. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal se e somente se $\phi(z)\Phi(z^s) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Os coeficientes $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ da representação média móvel infinita são determinados pela relação*

$$\psi(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)\Theta(z^s)}{\phi(z)\Phi(z^s)} (1-z)^{-d} (1-z^s)^{-D}, \quad |z| \leq 1. \quad (3.76)$$

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com média zero, dado pela expressão

$$\phi(z)\Phi(z^s)(1-z)^d(1-z^s)^D X_t = \theta(z)\Theta(z^s)\varepsilon_t, \quad (3.77)$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco. Demonstraremos inicialmente que se $\phi(z)\Phi(z^s) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$, então o processo é causal.

Pelo Teorema 13.2.2 de Brockwell e Davis (1991), os processos ARFIMA(p, d, q) são causais quando $d < 0.5$ se e somente se $\phi(z) \neq 0$, para todo $|z| \leq 1$. Portanto, podemos reescrever a equação (3.77) na seguinte forma

$$\Phi(z^s)(1 - z^s)^D X_t = \Theta(z^s) \frac{\theta(z)(1 - z)^{-d}}{\phi(z)} \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$\Phi(z^s)(1 - z^s)^D X_t = \Theta(z^s) Y_t, \quad (3.78)$$

onde $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(p, d, q). Pelo Teorema 2.1 de Brietzke et al. (2005), os processos SARFIMA($0, D, 0$)_s são causais quando $D < 0.5$. Logo, a equação (3.78) pode ser escrita da seguinte forma

$$\Phi(z^s) X_t = \Theta(z^s) (1 - z^s)^{-D} Y_t,$$

ou seja,

$$\Phi(z^s) X_t = \Theta(z^s) Z_t, \quad (3.79)$$

onde $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA($0, D, 0$)_s.

Devemos verificar se o processo dado pela expressão (3.79) é causal.

Por hipótese, temos que $\Phi(z^s) \neq 0$, para todo $|z| \leq 1$. Portanto, $1/\Phi(z^s)$ é função analítica e pode ser expressa na forma de uma série de potências. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{\Phi(z^s)} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \xi_j z^j = \xi(z), \quad \text{para todo } |z| < 1 + \epsilon.$$

Como a série acima converge para $|z| < 1 + \epsilon$, converge para $|z| < 1 + \frac{\epsilon}{2}$. Logo, $\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_j \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) = 0$, isto é, a seqüência $\{\xi_j \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ converge e é limitada. Portanto, existe uma constante $K > 0$ finita tal que, para todo $j \in \mathbb{Z}_{\geq}$,

$$\left| \xi_j \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^j \right| < K, \quad \text{ou seja, } |\xi_j| < K \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^{-j}.$$

Assim,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\xi_j| < K \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^{-j} < \infty \quad \text{e} \quad \xi(z)\Phi(z^s) \equiv 1, \quad \text{para } |z| \leq 1.$$

Pela Proposição 3.1.2 de Brockwell e Davis (1991), o operador $\xi(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \xi_j z^j$, com $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\xi_j| < \infty$, quando aplicado a processos estacionários,

não somente expressa mas também herda as propriedades algébricas das séries de potências. Logo, podemos aplicar o operador $\xi(z)$ a ambos os lados da expressão (3.79) para obtermos $X_t = \xi(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)Z_t$.

Assim, temos a representação desejada

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j Z_{t-j}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde a seqüência $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ é determinada pela expressão (3.76), quando $p = q = 0$ e $d = D = 0$. Portanto, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal.

Demonstraremos, a seguir, que se $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal então, $\phi(z)\Phi(z^s) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Para isto, basta mostrar que se o processo dado pela expressão (3.79) é causal então, $\Phi(z^s) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$.

Vamos assumir que o processo seja causal, isto é, que $X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j Z_{t-j}$, para alguma seqüência $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$, tal que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| < \infty$. Então,

$$\Theta(\mathcal{B}^s)Z_t = \Phi(\mathcal{B}^s)X_t = \Phi(\mathcal{B}^s) \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j Z_{t-j} = \Phi(\mathcal{B}^s)\psi(\mathcal{B})Z_t. \quad (3.80)$$

Fazendo $\eta(z) = \Phi(z^s)\psi(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \eta_j z^j$, para todo $|z| \leq 1$, podemos escrever a equação (3.80) como

$$\sum_{l=0}^Q \Theta_l Z_{t-sl} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \eta_j Z_{t-j}. \quad (3.81)$$

Aplicando o produto interno em cada um dos lados da equação (3.81) com $Z_{t-s\nu}$, onde $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$, para quaisquer X, Y variáveis aleatórias, temos que

$$\sum_{l=0}^Q \Theta_l \mathbb{E}(Z_{t-sl} Z_{t-s\nu}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \eta_j \mathbb{E}(Z_{t-j} Z_{t-s\nu}),$$

onde $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo com distribuição $\mathcal{N}(0, \tau^2)$. Assim,

$$\tau^2 \sum_{\nu=0}^Q \Theta_\nu = \tau^2 \sum_{\substack{j=0 \\ j=s\ell}}^{sQ} \eta_j, \quad (3.82)$$

com $\eta_j = 0$, para todo $j > sQ$ e $j \neq s\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq}$. Fazendo $\nu = j/s$, no segundo membro da equação (3.82), temos que

$$\sum_{l=0}^Q \Theta_l = \sum_{\nu=0}^Q \eta_\nu.$$

Então,

$$\Theta(z^s) = \eta(z) = \Phi(z^s)\psi(z), \quad \text{para } |z| \leq 1. \quad (3.83)$$

Como $\Theta(z^s)$ e $\Phi(z^s)$ não possuem raízes em comum, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| < \infty$ e $\Theta(z^s) \neq 0$, para $|z| \leq 1$, pela equação (3.83), concluímos que $\Phi(z^s)$ não pode ser zero para $|z| \leq 1$. □

A seguir, demonstraremos a convergência da soma dos coeficientes ao quadrado da representação média móvel infinita dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s. Este resultado é muito importante para a obtenção da convergência em quadrado médio da soma destes coeficientes.

Lema 3.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s causal, dado pela expressão (3.2). Então, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j^2 < \infty$, onde $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação média móvel infinita do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dados na expressão (3.76).*

Demonstração: Por hipótese, como o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal, quando $d < 0.5$, $D < 0.5$, $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ e $\theta(z)\Theta(z^s) = 0$ não possuem raízes em comum e $\phi(z)\Phi(z^s) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Então, existe uma seqüência $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ tal que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| < \infty$ e

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco e $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação média móvel infinita determinados pela relação (3.76).

Pelo Teorema A.3, como $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| < \infty$, então $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j|^2 < \infty$. Logo, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j^2 < \infty$ e segue o resultado. □

A Proposição 3.2 a seguir, fornece a convergência em quadrado e quase certamente (ou com probabilidade um) da soma dos coeficientes da representação média móvel infinita. Este resultado é importante para a obtenção da função de autocovariância dos processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s.

Proposição 3.2. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s causal e estacionário, dado pela expressão (3.2). Então, a série*

$$\psi(\mathcal{B})\varepsilon_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad (3.84)$$

converge absolutamente com probabilidade um (isto é, quase certamente) e em quadrado médio para o mesmo limite.

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s causal e estacionário. Queremos provar a convergência em quadrado médio da série

$$\psi(\mathcal{B})\varepsilon_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \mathcal{B}^j(\varepsilon_t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

onde os coeficientes $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são determinados pela relação (3.76).

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$ e defina $S_m = \sum_{j=0}^m \psi_j \varepsilon_{t-j}$. Então,

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|^2 &= \mathbb{E} \left[\sum_{\nu=0}^n \psi_\nu \varepsilon_{t-\nu} - \sum_{j=0}^m \psi_j \varepsilon_{t-j} \right]^2 = \mathbb{E} \left[\sum_{j=m+1}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right]^2 \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=m+1}^n \psi_j^2 \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{\substack{\nu, j=m+1 \\ \nu \neq j}}^n \psi_\nu \psi_j \varepsilon_{t-\nu} \varepsilon_{t-j} \right] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=m+1}^n \psi_j^2, \end{aligned}$$

pois $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco (ver Definição 2.3).

Então, é suficiente mostrar que $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_\nu^2 < \infty$. Contudo, como o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal e estacionário, pelo Lema 3.1, temos que $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_\nu^2 < \infty$. Portanto, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N(\epsilon) > 0$, tal que $\sum_{j=m+1}^n \psi_j^2 < \epsilon$, para todo $n > m > N(\epsilon)$ e pelo critério de Cauchy (ver Rudin, 1976, Teorema 3.22), temos que a série (3.84) converge em quadrado médio.

Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}(|\varepsilon_t|^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t)^2 = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Assim, $\mathbb{E}(|\varepsilon_t|) < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\sup_t \mathbb{E}(|\varepsilon_t|) < \infty$. Logo, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| |\varepsilon_{t-j}| \right) &= \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\psi_j| |\varepsilon_{t-j}| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^n |\psi_j| |\varepsilon_{t-j}| \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\psi_j| \mathbb{E}(|\varepsilon_{t-j}|) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\psi_j| \sup_t \mathbb{E}(|\varepsilon_t|) \\ &= C < \infty, \end{aligned}$$

pois $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| < \infty$ e $\sup_t \mathbb{E}(|\varepsilon_t|) < \infty$. Assim, pelo Teorema A.2 (ver Apêndice A), $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\psi_j| |\varepsilon_{t-j}|$ e $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ são ambas convergentes com probabilidade um (isto é, quase certamente).

Se \mathcal{S} denota o limite em quadrado médio, isto é, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que para todo $n \geq N$,

$$\left\| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right\|^2 = \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right|^2 \right) < \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right|^2 \right) = 0.$$

Portanto, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{S} - \psi(\mathcal{B})\varepsilon_t \right\|^2 &= \mathbb{E} (|\mathcal{S} - \psi(\mathcal{B})\varepsilon_t|^2) = \mathbb{E} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right|^2 \right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \psi_j \varepsilon_{t-j} \right|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Assim, o limite \mathcal{S} e $\psi(\mathcal{B})\varepsilon_t$ são iguais com probabilidade um (isto é, quase certamente).

□

Como a causalidade, a propriedade de invertibilidade não é uma propriedade do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ somente, mas uma relação entre os dois processos $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ que é um processo ruído branco. O Teorema 3.5 a seguir, fornece as condições necessárias e suficientes para a invertibilidade.

Teorema 3.5. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ (ver Definição 3.2). Suponha que $d > -0.5$, $D > -0.5$ e que as equações $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ e $\theta(z)\Theta(z^s) = 0$ não possuam raízes em comum. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível se e somente se $\theta(z)\Theta(z^s) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Os coeficientes $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ da representação auto-regressiva infinita são determinados pela relação*

$$\pi(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j z^j = \frac{\phi(z)\Phi(z^s)}{\theta(z)\Theta(z^s)} (1-z)^d (1-z^s)^D, \quad |z| \leq 1. \quad (3.85)$$

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com média zero, dado pela expressão

$$\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)(1-\mathcal{B})^d(1-\mathcal{B}^s)^D X_t = \theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t, \quad (3.86)$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco. Demonstraremos, inicialmente, que se $\theta(z)\Theta(z^s) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$, então o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível.

Pelo Teorema 13.2.2 de Brockwell e Davis (1991), os processos ARFIMA(p, d, q) são inversíveis quando $d > -0.5$ se e somente se $\theta(z) \neq 0$, para todo $|z| \leq 1$. Portanto, podemos reescrever a equação (3.86) na seguinte forma

$$\Phi(\mathcal{B}^s)(1 - \mathcal{B}^s)^D \frac{\phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d}{\theta(\mathcal{B})} X_t = \Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t,$$

ou seja,

$$\Phi(\mathcal{B}^s)(1 - \mathcal{B}^s)^D Y_t = \Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t, \quad (3.87)$$

onde $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(p, d, q), com processo de inovação $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Da mesma forma, pelo Teorema 2.1 de Brietzke et al. (2005), os processos SARFIMA($0, D, 0$)_s são inversíveis quando $D > -0.5$. Assim, a equação (3.87) pode ser escrita na forma

$$\Phi(\mathcal{B}^s)Z_t = \Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t, \quad (3.88)$$

onde $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA($0, D, 0$)_s, com processo de inovação $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Devemos verificar se o processo dado pela expressão (3.88) é inversível.

Por hipótese, temos que $\Theta(z^s) \neq 0$, para todo $|z| \leq 1$. Portanto, $1/\Theta(z^s)$ é analítica e possui uma expansão em série de potências, dada por

$$\frac{1}{\Theta(z^s)} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \eta_j z^j = \eta(z), \quad |z| < 1 + \epsilon, \quad (3.89)$$

para algum $\epsilon > 0$.

Pelos mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 3.5, temos que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\eta_j| < \infty$. Pela Proposição 3.1.2 de Brockwell e Davis (1991) podemos aplicar o filtro $\eta(\mathcal{B})$ a ambos os lados da equação (3.88). Logo,

$$\eta(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)Z_t = \eta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t = \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Desta forma, obtemos a representação

$$\varepsilon_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j Z_{t-j},$$

onde a seqüência $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ é determinada pela expressão (3.85). Portanto o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível.

A seguir, demonstraremos que se o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível, então $\theta(z)\Theta(z^s) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Para isto, basta mostrar que se o processo dado pela equação (3.88) é inversível, então $\Theta(z^s) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$.

Por hipótese, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível, então $\varepsilon_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j Z_{t-j}$ para alguma seqüência $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ tal que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| < \infty$. Então,

$$\Phi(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t = \pi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)Z_t = \pi(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t. \quad (3.90)$$

Fazendo $\xi(z) = \pi(z)\Theta(z^s) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \xi_j z^j$, para $|z| \leq 1$, podemos reescrever a equação (3.90) como

$$\sum_{r=0}^P \Phi_r \varepsilon_{t-sr} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \xi_j \varepsilon_{t-j}. \quad (3.91)$$

Aplicando o produto interno em ambos os lados da equação (3.91) com ε_{t-sl} , temos que

$$\sum_{r=0}^P \Phi_r \mathbb{E}(\varepsilon_{t-sr} \varepsilon_{t-sl}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \xi_j \mathbb{E}(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-sl}),$$

ou seja,

$$\sigma_\varepsilon^2 \sum_{l=0}^P \Phi_l = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{\substack{j=0 \\ j=sl}}^{sP} \xi_j, \quad (3.92)$$

com $\xi_j = 0$, para todo $j > sP$ e $j \neq sl$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq}$. Fazendo $v = j/s$, no segundo membro da equação (3.92), temos que

$$\sum_{l=0}^P \Phi_l = \sum_{v=0}^P \xi_v.$$

Então,

$$\Phi(z^s) = \xi(z) = \pi(z)\Theta(z^s), \quad \text{para } |z| \leq 1. \quad (3.93)$$

Como $\Phi(z^s)$ e $\Theta(z^s)$ não possuem raízes em comum, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| < \infty$ e $\Phi(z^s) \neq 0$, para $|z| \leq 1$, pela equação (3.93), concluímos que $\Theta(z^s)$ não pode ser zero para $|z| \leq 1$. □

A seguir, demonstraremos a convergência da soma dos coeficientes ao quadrado da representação auto-regressiva infinita dos processos SARFI-MA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$. Este resultado é muito importante para a obtenção da convergência em quadrado médio da soma destes coeficientes.

Lema 3.2. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ inversível, dado pela expressão (3.2). Então, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j^2 < \infty$, onde $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação auto-regressiva infinita do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dados pela expressão (3.85).*

Demonstração: Por hipótese, como o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível, quando $d > -0.5$, $D > -0.5$, $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ e $\theta(z)\Theta(z^s) = 0$ não possuem zeros em comum e $\theta(z)\Theta(z^s) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \leq 1$. Então, existe uma seqüência $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ tal que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| < \infty$ e

$$\varepsilon_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j X_{t-j}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco e $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação auto-regressiva infinita dados pela equação (3.85).

Pelo Teorema A.3, como $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| < \infty$, então $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j|^2 < \infty$. Logo, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j^2 < \infty$ e segue o resultado. \square

A Proposição 3.3 a seguir, fornece a convergência em quadrado e quase certamente (ou com probabilidade um) da soma dos coeficientes da representação auto-regressiva infinita. Este resultado é muito importante na previsão para os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ (ver Seção 3.5).

Proposição 3.3. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ estacionário e inversível, dado pela expressão (3.2). Então, a série*

$$\pi(\mathcal{B})X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j \mathcal{B}^j(X_t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j X_{t-j}, \quad (3.94)$$

converge absolutamente com probabilidade um (isto é, quase certamente) e em quadrado médio para o mesmo limite.

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ causal e estacionário. Queremos provar a convergência em quadrado médio da série na equação (3.94).

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m < n$ e defina $S_m = \sum_{j=0}^m \pi_j X_{t-j}$. Então,

$$\|S_n - S_m\|^2 = \mathbb{E} \left(\left| \sum_{\nu=0}^n \pi_\nu X_{t-\nu} - \sum_{j=0}^m \pi_j X_{t-j} \right|^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left(\left[\sum_{\nu=0}^n \pi_\nu X_{t-\nu} - \sum_{j=0}^m \pi_j X_{t-j} \right]^2 \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{\nu=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \pi_\nu \bar{\pi}_j X_{t-\nu} \bar{X}_{t-j} \right) \\
&= \sum_{\nu=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \pi_\nu \bar{\pi}_j \mathbb{E}(X_{t-\nu} \bar{X}_{t-j}).
\end{aligned}$$

Como $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário, $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\sup_t \mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$. Logo,

$$\|S_n - S_m\|^2 \leq \sup_t \mathbb{E}(|X_t|^2) \sum_{j=m+1}^n |\pi_j|^2.$$

Como o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível, temos que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j|^2 < \infty$. Portanto, para todo $\epsilon > 0$, existe um $N(\epsilon) > 0$, tal que $\sum_{j=m+1}^n \pi_j^2 < \epsilon$, para todo $n > m > N(\epsilon)$ e pelo critério de Cauchy (ver Rudin, 1976, Teorema 3.22), temos que a série (3.94) converge em quadrado médio.

Pela estacionariedade, temos que $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$. Logo, $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\sup_t \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| |X_{t-j}| \right) &= \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\pi_j| |X_{t-j}| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^n |\pi_j| |X_{t-j}| \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\pi_j| \mathbb{E}(|X_{t-j}|) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n |\pi_j| \sup_t \mathbb{E}(|X_t|) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

pois $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| < \infty$ e $\sup_t \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$. Desta forma, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} |\pi_j| |X_{t-j}|$ e $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_j X_{t-j}$ são ambas convergentes com probabilidade um (isto é, quase certamente).

Se \mathcal{S} denota o limite em quadrado médio, isto é, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que para todo $n \geq N$,

$$\left\| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \pi_j X_{t-j} \right\|^2 = \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \pi_j X_{t-j} \right|^2 \right) < \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \pi_j X_{t-j} \right|^2 \right) = 0.$$

Portanto, pelo Lema de Fatou, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S} - \pi(\mathcal{B})X_t\|^2 &= \mathbb{E} (|\mathcal{S} - \pi(\mathcal{B})X_t|^2) = \mathbb{E} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \pi_j X_{t-j} \right|^2 \right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{S} - \sum_{j=0}^n \pi_j X_{t-j} \right|^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Assim, o limite \mathcal{S} e $\pi(\mathcal{B})X_t$ são iguais com probabilidade um (isto é, quase certamente). □

3.4 Ergodicidade

Nesta seção analisamos a ergodicidade dos processos fracionariamente integrados do tipo ARFIMA(p, d, q), SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s e GARMA(p, u, λ, q). Esta propriedade é muito importante nas simulações de Monte Carlo que envolvem estes processos (ver Capítulo 6).

Teorema 3.6. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo fracionariamente integrado, como na Definição 2.4, com média $\mu = 0$, onde $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco, dado na Definição 2.3. Se $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estacionário e causal então, é ergódico.*

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo fracionariamente integrado. Por hipótese, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal, isto é,

$$X_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j \xi_{j-t}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são os coeficientes da representação média móvel infinita do processo e $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco (ver Definição 2.3).

Para que o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seja ergódico, pelo Lema A.1, devemos mostrar que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j^2 < \infty$. Lembrando que o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário e causal, então temos que

$$\gamma_x(0) = \mathbb{E}(X_t^2) = \sigma_\xi^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j^2 < \infty,$$

isto é, $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_j^2 < \infty$. Portanto, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é ergódico. \square

Como conseqüência do Teorema 3.6, temos os Corolários 3.1 e 3.2 abaixo, os quais apresentam, respectivamente, a ergodicidade dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ e GARMA(p, u, λ, q).

Corolário 3.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ (ver Definição 3.2), estacionário e causal. Então, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é ergódico.*

Corolário 3.2. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo GARMA(p, u, λ, q) (ver Definição 2.7), estacionário e causal. Então, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é ergódico.*

Observação 3.6. O Teorema A.3 fornece a ergodicidade do processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ relaxando a hipótese de estacionariedade.

3.5 Previsão

O principal objetivo em se estudar uma série temporal com longa dependência, é encontrar um modelo matemático que nos possibilite prever os futuros valores desta série.

Nesta seção, apresentamos alguns resultados de previsão utilizando os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ causal e inversível definido na equação (3.2), com média igual a zero e sazonalidade $s \in \mathbb{N}$. Assumimos, inicialmente, que os parâmetros do processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ são conhecidos.

Pelas equações (3.76) e (3.85), o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser considerado um processo linear. Segundo Priestley (1981), para um processo linear, a *previsão de erro quadrático médio mínimo* é dada por

$$\hat{X}_t(h) := \mathbb{E}(X_{t+h} | X_\ell, \ell \leq t), \quad (3.95)$$

supondo conhecidas as observações $\{X_\ell, \ell \leq t\}$, até o instante t , que é chamado origem da previsão. A notação $\hat{X}_t(h)$ indica a previsão de origem t e horizonte $h \geq 1$. Este valor minimiza o erro quadrático médio de previsão dado por $\mathbb{E}(X_{t+h} - \hat{X}_t(h))$. Neste caso, o *erro de previsão* é dado por

$$e_t(h) = X_{t+h} - \hat{X}_t(h). \quad (3.96)$$

Para calcularmos as previsões usamos os seguintes fatos

$$\text{a) } \mathbb{E}(X_{t+h} | X_\ell, \ell \leq t) = \begin{cases} X_{t+h}, & \text{se } h \leq 0, \\ \hat{X}_t(h), & \text{se } h > 0, \end{cases}$$

$$\text{b) } \mathbb{E}(\varepsilon_{t+h} | X_\ell, \ell \leq t) = \begin{cases} \varepsilon_{t+h}, & \text{se } h \leq 0, \\ 0, & \text{se } h > 0. \end{cases}$$

Assim, para calcularmos as previsões, temos que

- a) substituir esperanças passadas (quando $h \leq 0$) por valores conhecidos, X_{t+h} e ε_{t+h} ;
- b) substituir esperanças futuras (quando $h > 0$) por previsões $\hat{X}_t(h)$ e 0.

O teorema a seguir, apresenta alguns resultados para previsão em processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, dado pela expressão (3.2).

Teorema 3.7. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ causal e inversível definido na equação (3.2), com média igual a zero e sazonalidade $s \in \mathbb{N}$. Então, para todo $h \geq 1$, valem as seguintes afirmações.*

- i) *A previsão de erro quadrático médio mínimo é dada por*

$$\hat{X}_n(h) = - \sum_{k \in \mathbb{N}} \pi_k \hat{X}_n(h - k), \quad (3.97)$$

onde os coeficientes $\{\pi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ são determinados pela relação (3.85).

- ii) *O erro de previsão é dado por*

$$e_n(h) = \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k}, \quad (3.98)$$

onde os coeficientes $\{\psi_k\}_{k=0}^{h-1}$ são determinados pela relação (3.76).

- iii) *As variâncias teórica e amostral do erro de previsão são dadas, respectivamente, por*

$$\text{Var}(e_n(h)) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2, \quad \hat{\text{Var}}(e_n(h)) = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \hat{\psi}_k^2,$$

onde os coeficientes $\{\psi_k\}_{k=0}^{h-1}$ são determinados pela relação (3.76), os coeficientes $\{\hat{\psi}_k\}_{k=0}^{h-1}$ são obtidos quando substituímos os parâmetros teóricos no modelo pelos seus respectivos valores estimados e σ_ε^2 e $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ são, respectivamente, a variância e a variância estimada do processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

- iv) *O vício e o percentual de vício, denotado por pervício, ao estimar a variância teórica do erro de previsão, são dados, respectivamente, por*

$$vício(h) = \widehat{Var}(e_n(h)) - Var(e_n(h)),$$

$$pervício(h) = \frac{|\widehat{Var}(e_n(h)) - Var(e_n(h))|}{Var(e_n(h))} \times 100 \text{ \%}.$$

v) O erro quadrático médio de previsão é dado por

$$eqmp_n = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h e_n^2(k),$$

onde o erro de previsão $e_n(\cdot)$ é dado na expressão (3.98).

vi) Suponha que o processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seja Gaussiano com $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ e $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_k) = 0$, para todo $t \neq k$. O intervalo de previsão a $100(1-\gamma)\%$ de confiança para X_{n+h} é dado por

$$\widehat{X}_n(h) - z_{\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_\varepsilon \left(\sum_{k=0}^{h-1} \widehat{\psi}_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq X_{n+h} \leq \widehat{X}_n(h) + z_{\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_\varepsilon \left(\sum_{k=0}^{h-1} \widehat{\psi}_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $z_{\frac{\gamma}{2}}$ é o valor tal que $\mathbb{P}(Z \geq z_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2}$, com $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, e $\{\widehat{\psi}_k\}_{k=0}^{h-1}$ e $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ são dados no item iii) deste teorema.

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ causal e inversível definido na equação (3.2), com média igual a zero e sazonalidade $s \in \mathbb{N}$.

i) Estamos interessados em obter a previsão de erro quadrático médio mínimo, denotada por $\widehat{X}_n(h)$, para todo $h \geq 1$.

Pelos Teoremas 3.4 e 3.5, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui representação média móvel e auto-regressiva infinitas dadas, respectivamente, pelas relações

$$X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_k \varepsilon_{t-k} \quad \text{e} \quad \varepsilon_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_k X_{t-k}. \quad (3.99)$$

Reescrevendo a equação (3.99) no tempo $t + h$, temos

$$X_{t+h} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_k \varepsilon_{t+h-k}, \quad (3.100)$$

$$\varepsilon_{t+h} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}} \pi_k X_{t+h-k}, \quad (3.101)$$

ou equivalentemente,

$$X_{t+h} = \varepsilon_{t+h} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k \varepsilon_{t+h-k}, \quad (3.102)$$

$$\varepsilon_{t+h} = X_{t+h} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \pi_k X_{t+h-k}. \quad (3.103)$$

Considere a origem $t = n$. Pela definição de previsão de erro quadrático médio mínimo, dado na equação (3.95), e pela equação (3.103), temos que

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(h) &\equiv \mathbb{E}(X_{n+h} | X_\ell, \ell \leq n) = \mathbb{E}(\varepsilon_{n+h} - \sum_{k \in \mathbb{N}} \pi_k X_{n+h-k} | X_\ell, \ell \leq n) \\ &= \mathbb{E}(\varepsilon_{n+h} | X_\ell, \ell \leq n) - \sum_{k \in \mathbb{N}} \pi_k \mathbb{E}(X_{n+h-k} | X_\ell, \ell \leq n) \\ &= - \sum_{k \in \mathbb{N}} \pi_k \hat{X}_n(h-k), \quad \text{para } h \geq 1, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{E}(\varepsilon_{n+h} | X_\ell, \ell \leq n) = 0$ e $\hat{X}_n(j) = X_{n+j}$, para $j \in \mathbb{Z}_{\leq}$.

Portanto, vale a expressão (3.97).

- ii) Estamos interessados em obter a expressão para o erro de previsão, denotado por $e_n(h)$, para todo $h \geq 1$. Pela definição de previsão de erro quadrático médio mínimo e pela equação (3.100), temos que

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(h) &\equiv \mathbb{E}(X_{n+h} | X_\ell, \ell \leq n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} | X_\ell, \ell \leq n\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_k \mathbb{E}(\varepsilon_{n+h-k} | X_\ell, \ell \leq n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_k \hat{\varepsilon}_n(h-k) \\ &= \sum_{k \geq h} \psi_k \varepsilon_{n+h-k}, \quad \text{para } h \geq 1, \end{aligned} \quad (3.104)$$

onde $\hat{\varepsilon}_n(j) = 0$, para $j \in \mathbb{N}$ e $\hat{\varepsilon}_n(j) = \varepsilon_{n+j}$, para $j \in \mathbb{Z}_{\leq}$.

Pela definição do erro de previsão, na origem n e horizonte $h \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} e_n(h) &= X_{n+h} - \hat{X}_n(h) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} - \sum_{k \geq h} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} \\ &= \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k}. \end{aligned}$$

Portanto, vale a expressão (3.98).

iii) A variância teórica do erro de previsão é dada por

$$\text{Var}(e_n(h)) = \text{Var}\left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k}\right) = \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2 \text{Var}(\varepsilon_{n+h-k}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2.$$

Pelo Lema 3.1, temos que

$$\text{Var}(e_n(h)) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2 < \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}} \psi_k^2 < \infty,$$

para todo $h \geq 1$.

Os cálculos acima foram feitos assumindo-se que os parâmetros do modelo são conhecidos. Na prática, utilizamos o modelo estimado para fazer as previsões. Assim, a variância amostral do erro de previsão, denotada por $\widehat{\text{Var}}(e_n(h))$ é obtida substituindo-se $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ e σ_ε^2 pelos seus respectivos valores estimados $\{\widehat{\psi}_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ (ver item iii) deste teorema) e $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$. Desta forma,

$$\widehat{\text{Var}}(e_n(h)) = \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \widehat{\psi}_k^2, \quad \text{para todo } h \geq 1.$$

iv) Denotados, respectivamente, por $\text{vício}_n(h)$ e $\text{pervício}_n(h)$, o vício e o percentual de vício cometidos ao se estimar a variância teórica h -passos à frente, são dados pelas relações

$$\text{vício}_n(h) = \widehat{\text{Var}}(e_n(h)) - \text{Var}(e_n(h)),$$

e

$$\text{pervício}_n(h) = \frac{|\widehat{\text{Var}}(e_n(h)) - \text{Var}(e_n(h))|}{\text{Var}(e_n(h))} \times 100 \text{ \%}.$$

v) Por definição, o erro quadrático médio de previsão na origem n , denotado por eqmp_n , é dado por

$$\text{eqmp}_n = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h e_n^2(k),$$

o qual é a média aritmética dos quadrados dos h erros de previsão. Ou seja,

$$eqmp_n = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \left(\sum_{\ell=0}^{h-1} \psi_\ell \varepsilon_{n+h-\ell} \right)^2.$$

vi) Dados os valores passados e presentes da série $\{X_\ell, \ell \leq n\}$, a distribuição condicional de X_{n+h} será $\mathcal{N}(\hat{X}_n(h), Var(e_n(h)))$. Logo,

$$Z = \frac{X_{n+h} - \hat{X}_n(h)}{[Var(e_n(h))]^{1/2}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Fixando o coeficiente de confiança γ , podemos encontrar um valor $z_{\frac{\gamma}{2}}$ tal que $\mathbb{P}(Z \geq z_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2}$. Ou seja, com probabilidade $1 - \gamma$,

$$\hat{X}_n(h) - z_{\frac{\gamma}{2}} [Var(e_n(h))]^{\frac{1}{2}} \leq X_{n+h} \leq \hat{X}_n(h) + z_{\frac{\gamma}{2}} [Var(e_n(h))]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.105)$$

Substituindo-se $Var(e_n(h))$ por $\hat{V}ar(e_n(h))$ em (3.105), temos que

$$\hat{X}_n(h) - z_{\frac{\gamma}{2}} \hat{\sigma}_\varepsilon \left(\sum_{k=0}^{h-1} \hat{\psi}_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq X_{n+h} \leq \hat{X}_n(h) + z_{\frac{\gamma}{2}} \hat{\sigma}_\varepsilon \left(\sum_{k=0}^{h-1} \hat{\psi}_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.106)$$

Observe que a variância aumenta com h (ver Observação 3.7 abaixo). Nesse caso, as amplitudes dos intervalos (3.106) aumentarão à medida que nos afastamos da origem n , caracterizando com isso o aumento da incerteza das previsões para h -passos à frente, quando h assume valor grande.

□

Observação 3.7. Conforme o comentário acima, considerando-se $s = 2$, as variâncias do erro de previsão a um e dois passos à frente são dadas por

$$Var(e_n(1)) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{e} \quad Var(e_n(2)) = \sigma_\varepsilon^2.$$

No entanto, a variância do erro de previsão a três passos à frente será

$$Var(e_n(3)) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \psi_1^2) \geq \sigma_\varepsilon^2.$$

Desta forma, a variância do erro de previsão a três passos à frente será, em geral, maior do que a variância do erro de previsão a um e dois passos à frente. Isto ilustra que a variância aumenta com h .

Observação 3.8. Vamos verificar algumas propriedades do erro de previsão $e_n(\cdot)$ dado no item iii) do Teorema 3.7.

a) Podemos observar que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e_n(h) | X_\ell, \ell \leq n) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} | X_\ell, \ell \leq n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \mathbb{E}(\varepsilon_{n+h-k} | X_\ell, \ell \leq n) = 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e_n^2(h) | X_\ell, \ell \leq n) &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} \right)^2 | X_\ell, \ell \leq n \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2 \varepsilon_{n+h-k}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{k,j=0 \\ k \neq j}}^{h-1} \psi_k \psi_j \varepsilon_{n+h-k} \varepsilon_{n+h-j} \right) | X_\ell, \ell \leq n \right] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k^2.\end{aligned}$$

ii) Pelas equações (3.102) e (3.104), o erro de previsão à um passo é dado por

$$\begin{aligned}e_n(1) &= X_{n+1} - \hat{X}_n(1) \\ &= \varepsilon_{n+1} + \sum_{k \geq 1} \psi_k \varepsilon_{n+1-k} - \sum_{k \geq 1} \psi_k \varepsilon_{n+1-k} \\ &= \varepsilon_{n+1},\end{aligned}$$

o que nos indica que os erros de previsão à um passo são não-correlacionados. Isto implica que $\hat{X}_n(1)$ é realmente o melhor preditor de X_{n+1} .

iii) Pela equação (3.98), para $\nu > 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(e_n(h), e_n(h + \nu)) &= \text{Cov}\left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k}, \sum_{\ell=0}^{h+\nu-1} \psi_\ell \varepsilon_{n+h+\nu-\ell}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} \times \sum_{\ell=0}^{h+\nu-1} \psi_\ell \varepsilon_{n+h+\nu-\ell}\right) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \psi_{\nu+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, para $\nu > 1$, os erros de previsão são correlacionados.

iv) Pela equação (3.98), para $j \in \mathbb{Z}_{\geq}$, temos que

$$e_{n-j}(h) = \sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n-j+h-k}. \quad (3.107)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(e_n(h), e_{n-j}(h)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{h-1} \psi_k \varepsilon_{n+h-k} \times \sum_{\ell=0}^{h-1} \psi_\ell \varepsilon_{n-j+h-\ell}\right) \\
&= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=j}^{h-1} \psi_k \psi_{k-j}, & \text{se } 0 \leq j < h \\ 0, & \text{se } j \geq h. \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto, os erros de previsão para o mesmo passo h , mas diferentes origens n e $n - j$ são não-correlacionados se $j \geq h$ e são correlacionados se $0 \leq j < h$.

Na seção a seguir, apresentamos alguns critérios de seleção de modelos baseados no erro de previsão.

3.6 Seleção de Modelos Baseada no Erro de Previsão

Na análise de séries temporais, é bastante comum que existam vários modelos que podem ser utilizados para representar um conjunto de dados. Escolher

o melhor modelo nem sempre é fácil. Um modo bastante útil de selecionar um bom modelo para uma série temporal é, utilizar os critérios de seleção mencionados na Seção 5.2 do Capítulo 5. O principal objetivo em ajustar um modelo à uma serie temporal é podermos prever os seus futuros valores. Com isso, foram criados critérios de seleção de modelos baseados no erro de previsão.

O erro de previsão é dado por

$$e_t(h) = X_{n+h} - \hat{X}_n(h),$$

onde $h \geq 1$ é o número de passos à frente que queremos encontrar e n é a origem da previsão.

A seleção do modelo é baseada nas seguintes estatísticas.

1) *Percentual médio de erro*, o qual também pode ser referenciado como vício já que ele mede o vício de previsão,

$$MPE = \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \frac{e_n(k)}{X_{n+k}} \right) \times 100\%.$$

2) *Erro médio absoluto de previsão*

$$MAE = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h |e_n(k)|.$$

3) *Percentual médio absoluto de erro*

$$MAPE = \left(\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \left| \frac{e_n(k)}{X_{n+k}} \right| \right) \times 100\%.$$

Além dos critérios acima mencionados, pode-se utilizar o erro quadrático médio de previsão (ver item v) do Teorema 3.7) e também a raiz quadrada do erro quadrático médio de previsão.

Capítulo 4

Contaminação e Identificação de *Outliers*

Freqüentemente são encontradas em séries temporais observações que são discordantes comparadas às restantes. Algumas, devem-se a erros grosseiros de medição, outras podem ser resultantes de influências externas, tais como greves, alterações súbitas na estrutura de mercado, entre outras. Como resultado destas influências externas surgem observações discordantes que são classificadas como *outliers*. Existem várias definições para *outliers*, entre elas citamos duas: “*outliers* are observations that do not follow the pattern of the majority of the data” [Rousseeuw e Zomeren (1990), pág. 633]; “We shall define an *outlier* in a set of data to be an observation (or subset of observations) which appears to be inconsistent with the remainder of that set of data” [Barnett e Lewis (1994), pág. 7]. Quando estudamos os *outliers*, a primeira questão que surge é sobre a sua classificação. Fox (1972) introduziu os conceitos de *outliers* do tipo I e tipo II, conhecidos na literatura, respectivamente, como *outliers* aditivos e inovadores e denotados, respectivamente, por *AO* e *IO*. Os *outliers* aditivos correspondem a um erro grosseiro de medição ou gravação afetando uma única observação. No caso dos *outliers* inovadores, ocorre um choque em um determinado período e o efeito se propaga para as observações subseqüentes. Uma segunda questão refere-se ao tipo de modelo gerador dos *outliers*. Denby e Martin (1979) e Bustos e Yohai (1986), entre outros, consideram o modelo de contaminação por mistura, isto é, os *outliers* *AO* e *IO* são gerados por uma dada distribuição de probabilidade.

Hotta e Neves (1992) e Palma (1998) consideram o modelo de contaminação paramétrico, isto é, os *outliers* são alocados em uma posição pré-determinada na série temporal.

A detecção de *outliers* em séries temporais é um dos mais importantes problemas da estatística atual. Para tentar sanar um pouco este problema existem, na literatura, diversos testes estatísticos para detectar *outliers*, independentemente do seu tipo (*AO* ou *IO*).

Neste capítulo, apresentamos os modelos de contaminação por *outliers* paramétricos e por mistura, testes para identificar *outliers* e estimação dos parâmetros dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s através de amostras geradas por processos contaminados, isto é, séries temporais contaminadas.

4.1 Modelos de Contaminação

Nesta seção introduzimos os modelos de contaminação por *outliers*. Apresentaremos o modelo multi-paramétrico introduzido por Denby e Martin (1979) e Bustos e Yohai (1986) e o modelo de contaminação por mistura introduzido por Box e Tiao (1975). Estes modelos de contaminação serão utilizados para contaminar os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s.

4.1.1 Multi-Paramétrico

Nesta seção apresentamos os modelos multi-paramétricos de contaminação para os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s.

Definição 4.1. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s (ver Definição 3.2). O processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito seguir o *modelo paramétrico de contaminação* se é dado pela seguinte representação

$$Z_t = X_t + wf(\mathcal{B})I_t(T), \quad (4.1)$$

onde $w \in \mathbb{R}$ representa a *magnitude do outlier*, $f(\mathcal{B})$ é uma *função de intervenção* e

$$I_t(T) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = T, \\ 0, & \text{se } t \neq T, \end{cases} \quad (4.2)$$

é uma variável indicadora do tempo T em que ocorre a perturbação.

A seguir, definimos os *outliers* aditivos e inovadores para os modelos paramétricos.

Definição 4.2. Seja $f(\mathcal{B})$ a função de intervenção (veja expressão (4.1)), dada por

$$f(\mathcal{B}) = 1. \quad (4.3)$$

Então, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ está contaminado por um *outlier aditivo*, denotado por AO .

Um *outlier* aditivo pode ser considerado um exemplo de erro grosseiro já que apenas a T -ésima variável aleatória do processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é afetada. Podemos notar, de acordo com a Definição 4.1, que apenas o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ sofre o impacto do *outlier*. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ não sofre alteração. Para exemplo de processo contaminado por *outlier* aditivo, ver Figura 4.1.

Definição 4.3. Seja $f(\mathcal{B})$ a função de intervenção (veja expressão (4.1)), dada por

$$f(\mathcal{B}) = \frac{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)}{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D, \quad (4.4)$$

isto é, $f(\mathcal{B})$ é a representação auto-regressiva infinita do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Então, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ está contaminado por um *outlier inovador*, denotado por IO .

Um *outlier inovador* representa uma perturbação máxima no tempo T e transmite o seu efeito para as observações posteriores, através da função de intervenção (4.4). Para exemplo de *outlier inovador*, ver Figura 4.3.

A seguir, definimos os modelos multi-paramétricos, isto é, quando um processo é contaminado por m *outliers*, todos iguais ou de diferentes tipos.

Definição 4.4. O processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito seguir o *modelo multi-paramétrico de contaminação* se é dado pela seguinte representação

$$Z_t = X_t + \sum_{j=1}^m w_j f_j(\mathcal{B}) I_t(T_j), \quad (4.5)$$

onde w_j representa a *magnitude do j -ésimo outlier*, $I_t(T_j)$, dada pela expressão (4.2), é uma variável indicadora do j -ésimo tempo T_j em que ocorre a j -ésima perturbação e $f_j(\mathcal{B})$ é a *função de intervenção*, associada ao j -ésimo *outlier*, dada pela expressão (4.3) ou pela expressão (4.4).

No modelo multi-paramétrico podemos ter três casos:

- 1) somente *outliers* aditivos;
- 2) somente *outliers* inovadores;
- 3) *outliers* aditivos e inovadores conjuntamente.

Para cada um destes casos, apresentamos a seguir o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado na expressão (4.5), quando $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$.

Caso 1: Todos os *outliers* são aditivos. Neste caso, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz a expressão

$$Z_t = \frac{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)}(1 - \mathcal{B})^{-d}(1 - \mathcal{B}^s)^{-D}\varepsilon_t + \sum_{j=1}^m w_j I_t(T_j), \quad (4.6)$$

ou seja,

$$\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)(1-\mathcal{B})^d(1-\mathcal{B}^s)^D Z_t = \theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s) \left(\varepsilon_t + \frac{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)(1-\mathcal{B})^d(1-\mathcal{B}^s)^D}{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)} \times \sum_{j=1}^m w_j I_t(T_j) \right).$$

Caso 2: Todos os *outliers* são inovadores. Neste caso, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz a expressão

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)} (1-\mathcal{B})^{-d}(1-\mathcal{B}^s)^{-D} \varepsilon_t \\ &\quad + \sum_{j=1}^m w_j \frac{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)} (1-\mathcal{B})^{-d}(1-\mathcal{B}^s)^{-D} I_t(T_j) \\ &= \frac{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)} (1-\mathcal{B})^{-d}(1-\mathcal{B}^s)^{-D} \left(\varepsilon_t + \sum_{j=1}^m w_j I_t(T_j) \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ou seja, processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz a equação

$$\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)(1-\mathcal{B})^d(1-\mathcal{B}^s)^D Z_t = \theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s) \left(\varepsilon_t + \sum_{j=1}^m w_j I_t(T_j) \right).$$

Caso 3: Existem ℓ *outliers* aditivos e $m - \ell$ *outliers* inovadores. Neste caso, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz a expressão

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)} (1-\mathcal{B})^{-d}(1-\mathcal{B}^s)^{-D} \varepsilon_t \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\ell} w_j I_t(T_j) \\ &\quad + \frac{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)} (1-\mathcal{B})^{-d}(1-\mathcal{B}^s)^{-D} \sum_{j=\ell+1}^m w_j I_t(T_j), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D Z_t = & \theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s) \left(\varepsilon_t + \sum_{j=\ell+1}^m w_j I_t(T_j) \right. \\ & \left. + \frac{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D}{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)} \sum_{j=1}^{\ell} w_j I_t(T_j) \right). \end{aligned}$$

4.1.2 Contaminação por Mistura

Nesta seção, apresentamos o modelo de contaminação por mistura, proposto por Denby e Martin (1979), Bustos e Yohai (1986) e Beran (1994). Este modelo de contaminação será utilizado para contaminar os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$.

1) *Outlier* Aditivo

Um primeiro modelo de contaminação por mistura para os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ é aquele contendo *outliers* aditivos, definidos a seguir.

Definição 4.5. Seja $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico satisfazendo a equação

$$Z_t := X_t + V_t, \quad (4.8)$$

onde $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com processo de inovação $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver Definição 3.2). O processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é constituído de variáveis aleatórias dadas por $V_t = \chi_t^c V_t^*$, onde $\{\chi_t^c\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo de Bernoulli com variáveis aleatórias independentes com probabilidade de sucesso c e $\{V_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estocástico arbitrário com distribuição G . Então, $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser um *processo com contaminação por mistura por outliers aditivos*.

Este modelo de contaminação é o mais geral onde podemos contaminar os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ com um processo estocástico $\{V_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ arbitrário. Para maiores detalhes sobre este modelo de contaminação ver Beran (1994). Neste trabalho, utilizamos um modelo de contaminação semelhante o qual é definido a seguir.

Definição 4.6. Seja $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico satisfazendo a equação

$$Z_t := X_t + V_t, \quad (4.9)$$

onde $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com processo de inovação $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver Definição 3.2). O processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é constituído de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição dada por

$$H_V = (1 - c)\delta_0 + cG, \quad (4.10)$$

onde $0 \leq c \leq 1$, δ_0 uma distribuição degenerada na origem, isto é, a esperança e a variância de uma variável aleatória com esta distribuição são ambas nulas e G uma distribuição arbitrária. Além disso, os processos $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são independentes. Então, $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser um *processo com contaminação por mistura por outliers aditivos*.

Neste caso, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, que é um processo contaminado com *AO*, é igual ao processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ com probabilidade $1 - c$, e tem probabilidade c de ser igual ao processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ adicionado de um erro $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Então, no caso *AO* uma componente aleatória adicional sobrepõe-se ocasionalmente ao processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Esta observação exibe um comportamento de *outlier*. Se $c = 0$, não temos contaminação, isto é, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é idêntico ao processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Neste trabalho, vamos considerar que a função de distribuição de probabilidade G como sendo uma distribuição $\mathcal{N}(0, \tau_V^2)$. Assim, podemos calcular a variância e a esperança das variáveis aleatórias V_t , para todo $t \in \mathbb{Z}$.

A Figura 4.1 abaixo, apresenta uma série temporal de tamanho $n = 100$, gerada a partir de um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, onde $d = 0.2$, $D = 0.25$, $P = p = 0 = q = Q$ e $s = 2$, com e sem contaminação por mistura por *outliers* aditivos. Neste caso, consideramos a função de distribuição de probabilidade G como sendo uma distribuição $\mathcal{N}(0, 10)$.

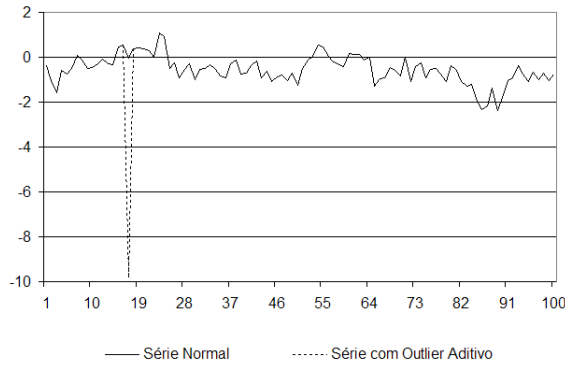


Figura 4.1: Série gerada a partir de um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado pela expressão (4.9), com $d = 0.2$, $D = 0.25$, $P = p = 0 = q = Q$ e $s = 2$ e G dada por uma distribuição $\mathcal{N}(0, 10)$.

Sejam v_t e ν_t variáveis aleatórias com distribuição, respectivamente, $F_\nu = \delta_0$ e $G_\nu = \mathcal{N}(0, \tau_V^2)$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dH(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x d((1-c)F_\nu(x) + cG_\nu(x)) \\
&= (1-c) \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\nu(x) + c \int_{-\infty}^{\infty} x dG_\nu \\
&= (1-c)\mathbb{E}(v_t) + c\mathbb{E}(\nu_t) = 0.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos calcular a variância. Então,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(V_t) &= \mathbb{E}(V_t^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dH(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d((1-c)F_\nu(x) + cG_\nu(x)) \\
&= (1-c) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_\nu(x) + c \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG_\nu \\
&= (1-c)\mathbb{E}(v_t^2) + c\mathbb{E}(\nu_t^2) \\
&= (1-c)\text{Var}(v_t^2) + c\text{Var}(\nu_t^2) = c\tau_V^2.
\end{aligned}$$

Como os processos $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são independentes, a função densidade espectral do processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$f_z(w) = f_x(w) + f_v(w), \text{ para } w \in (0, \pi],$$

onde $f_x(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ (ver equação (3.32)) e $f_v(w) = \frac{c\tau_V^2}{2\pi}$ é a função densidade espectral do processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Logo,

$$f_z(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2 |\Theta(e^{-isw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2 |\Phi(e^{-isw})|^2} \left| 2 \sin\left(\frac{w}{2}\right) \right|^{-2d} \left| 2 \sin\left(\frac{sw}{2}\right) \right|^{-2D} + \frac{c\tau_V^2}{2\pi}. \quad (4.11)$$

A Figura 4.2 abaixo, apresenta a função densidade espectral de um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver Definição 4.6), denotada por $f_z(\cdot)$, onde $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com $d = 0.2$, $D = 0.25$, $P = p = 0 = q = Q$ e $s = 2$. A distribuição de probabilidade G é uma $\mathcal{N}(0, 10)$. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral denotada por $f_x(\cdot)$, dada pela equação (3.32). O processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por $f_v(w) = \frac{c\tau_V^2}{2\pi}$.

Por definição, a função de autocovariância de ordem h , $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, do processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é dada por

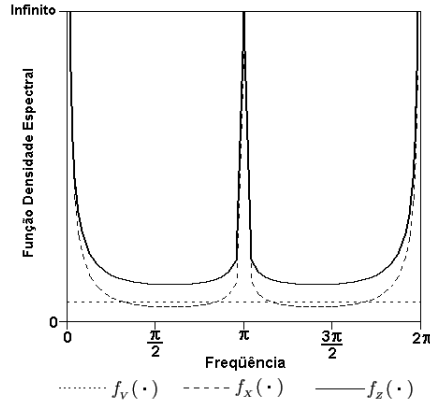


Figura 4.2: Função densidade espectral de um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver expressão (4.11)), denotada por $f_Z(\cdot)$ (linha contínua), com $d = 0.2$, $D = 0.25$, $P = p = 0 = q = Q$, $s = 2$. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral denotada por $f_X(\cdot)$ (em linha tracejada), dada pela equação (3.32). O processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por $f_V(\cdot)$ (em linha pontilhada), onde $c = 0.2$ e G é a distribuição $\mathcal{N}(0, 10)$.

$$\gamma_V(h) = 2 \int_0^\pi f_V(w) \cos(hw) dw = \begin{cases} c\tau_V^2, & \text{se } h = 0, \\ 0, & \text{se } h \neq 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Desta forma, a função de autocovariância de ordem h , $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, do processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é dada por

$$\gamma_Z(h) = \begin{cases} \gamma_X(0) + \gamma_V(0), & \text{se } h = 0, \\ \gamma_X(h), & \text{se } h \neq 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

onde $\gamma_X(\cdot)$ é a função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ que é um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ (ver item v) do Teorema 3.2).

2) *Outlier Inovador*

Um segundo modelo de contaminação por mistura é aquele contendo *outlier* inovador, definido a seguir.

Definição 4.7. Seja $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ (ver Definição 3.2) que satisfaz a seguinte expressão

$$\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D Z_t = \theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)\xi_t, \quad (4.14)$$

onde $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo que tem uma distribuição F_ξ com cauda pesada aproximadamente normal, isto é, uma distribuição normal contaminada, dada por

$$F_\xi = (1 - c)F_\varepsilon + cG, \quad (4.15)$$

onde $0 \leq c \leq 1$ é o parâmetro de mistura, F_ε uma distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ e G uma distribuição arbitrária com uma dispersão superior a σ_ε^2 . Então, $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ de acordo com o modelo IO.

As observações do processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ cujas variáveis aleatórias de inovação possuem distribuição G , são consideradas *outliers*.

Exemplo 4.1. Um exemplo de distribuição com cauda pesada pode ser obtida quando $G = \mathcal{N}(0, \tau_\nu^2)$ com $\tau_\nu^2 \geq \sigma_\varepsilon^2$, na expressão (4.15). Isto significa que as variáveis ξ_t , para todo $t \in \mathbb{Z}$, possuem distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, com probabilidade $(1 - c)$ e, com probabilidade c , possuem distribuição arbitrária G com uma dispersão superior.

Neste trabalho, vamos considerar $G = \mathcal{N}(0, \tau_\nu^2)$, com $\tau_\nu^2 \geq \sigma_\varepsilon^2$, na expressão (4.15) e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ruído branco (ver Definição 2.3). Desta forma, podemos calcular a esperança e a variância das variáveis aleatórias ξ_t 's.

A Figura 4.3 abaixo, apresenta uma série temporal de tamanho $n = 100$, gerada a partir de um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, onde $d = 0.2$, $D = 0.25$, $P = p = 0 = q = Q$ e $s = 2$, com e sem contaminação por mistura por *outliers* inovadores. Neste caso, consideramos a distribuição de probabilidade G como sendo uma distribuição $\mathcal{N}(0, 10)$.

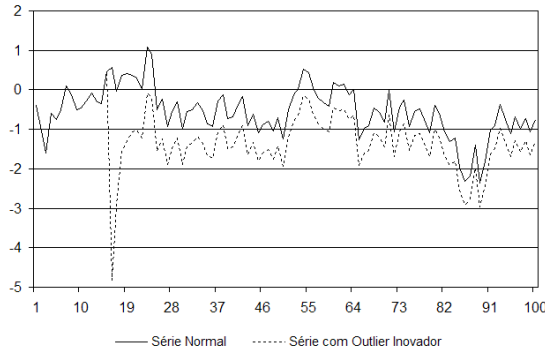


Figura 4.3: Série gerada a partir de um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver expressão (4.14)), com $d = 0.2$, $D = 0.25$, $P = p = 0 = q = Q$ e $s = 2$ e G é a distribuição $\mathcal{N}(0, 10)$. A série sem contaminação está indicada pela linha contínua enquanto a série contaminada está indicada pela linha tracejada.

Sejam ε_t e ν_t variáveis aleatórias, para todo $t \in \mathbb{Z}$, com distribuição, respectivamente, $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ e $\mathcal{N}(0, \tau_\nu^2)$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x d((1-c)F_{\varepsilon}(x) + cG_{\nu}(x)) \\
&= (1-c) \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\varepsilon}(x) + c \int_{-\infty}^{\infty} x dG_{\nu}(x) \\
&= (1-c)\mathbb{E}(\varepsilon_t) + c\mathbb{E}(\nu_t) = 0.
\end{aligned}$$

Da mesma forma podemos calcular a variância, isto é,

$$\begin{aligned}
Var(\xi_t) &= \mathbb{E}(\xi_t^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d((1-c)F_{\varepsilon}(x) + cG_{\nu}(x)) \\
&= (1-c) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{\varepsilon}(x) + c \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG_{\nu}(x) \\
&= (1-c)\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) + c\mathbb{E}(\nu_t^2) \\
&= (1-c)Var(\varepsilon_t) + cVar(\nu_t) \\
&= (1-c)\sigma_{\varepsilon}^2 + c\tau_{\nu}^2. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Pela definição de função densidade espectral e pela expressão (??) a função densidade espectral do processo $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$f_{\xi}(w) = \frac{(1-c)\sigma_{\varepsilon}^2 + c\tau_{\nu}^2}{2\pi}, \quad \text{para } w \in (0, \pi]. \tag{4.17}$$

Sendo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ com ruído $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ a sua função densidade espectral é dada por

$$f_z(w) = f_{\xi}(w) \left| \frac{\theta(e^{-iw})\Theta(e^{-isw})}{\phi(e^{-iw})\Phi(e^{-isw})} \right|^2 \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{w}{2} \right) \right]^{-2d} \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{sw}{2} \right) \right]^{-2D}, \tag{4.18}$$

onde $f_{\xi}(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada pela expressão (4.17).

A Figura 4.4 abaixo, apresenta a função densidade espectral de um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver Definição 4.6), denotada por $f_z(\cdot)$, onde $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com $d = 0.2$, $D = 0.25$, $P = p = 0 = q = Q$ e $s = 2$. O processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é independente de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ com função de distribuição de probabilidade G sendo uma distribuição $\mathcal{N}(0, 10)$. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral denotada por $f_x(\cdot)$, dada pela equação (3.32).

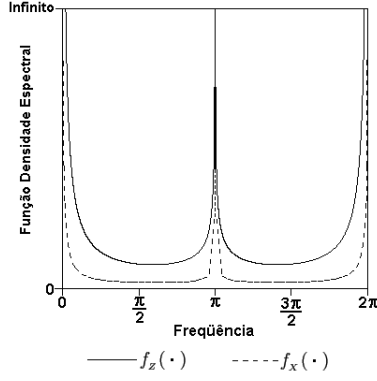


Figura 4.4: Função densidade espectral de um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver expressão (4.18)), com $d = 0.2$, $D = 0.25$, $P = p = 0 = q = Q$ e $s = 2$, G sendo uma distribuição $\mathcal{N}(0, 10)$ e $c = 0.2$. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral denotada por $f_x(\cdot)$, dada pela equação (3.32). A função $f_z(\cdot)$ está representada pela linha contínua e $f_x(\cdot)$ está representada pela linha tracejada.

Pelo item v) do Teorema 3.2, para $|d + D| < 0.5$, $|D| < 0.5$, a função de autocovariância de ordem h , $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é dada por

$$\gamma_z(h) = \begin{cases} ((1 - c)\sigma_\varepsilon^2 + c\tau_\nu^2) \sum_{\nu \geq 0} \gamma_w(s\nu)\gamma_y(h - s\nu), & \text{se } h = s\ell, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq}; \\ 0, & \text{se } h = s\ell + \zeta, \zeta \in A, \end{cases}$$

onde $\{W_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA(P, D, Q) $_s$, $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(p, d, q) e $A = \{1, \dots, s - 1\}$.

4.2 Identificação

Nesta seção apresentamos o teste da razão de verossimilhança para detectar e identificar *outliers* em processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ contaminados por *outliers*.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ (ver Definição 3.2) contaminado com *outlier*.

4.2.1 Teste da Razão de Verossimilhança

O teste da razão de verossimilhança é utilizado para detectar e identificar *outliers*. Inicialmente este teste foi proposto por Fox (1972) para detectar *outliers* em processos auto-regressivos puros, isto é, em processos AR(p). Este teste foi utilizado para os processos ARMA(p, q) por Chang e Tiao

(1983) e Tsay (1986). Chang et al. (1988) estenderam o teste para os processos ARIMA e utilizaram-no em um procedimento iterativo para detecção de múltiplos *outliers* e estimação dos parâmetros do modelo.

Primeiramente, consideramos $m = 1$, na Definição 4.4, isto é, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ está contaminado por um único *outlier* no tempo T . Vamos supor que os parâmetros do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, inclusive a posição do *outlier* e a variância $\sigma_\varepsilon^2 = \text{Var}(\varepsilon_t)$ sejam conhecidos, onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o processo de inovação do processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Vamos estudar a estimação da magnitude do *outlier* que está contaminando o processo.

1) *Outlier* Aditivo

Queremos estimar a perturbação, denotada por w , provocada por um *outlier* AO . Para isto vamos considerar os resíduos do modelo ajustado como base para detectar a perturbação de um *outlier* e derivar estatísticas para testar a hipótese de presença de *outlier*.

Considere o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado pela equação (4.6), com $m = 1$. Então,

$$Z_t = \frac{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)}(1 - \mathcal{B})^{-d}(1 - \mathcal{B}^s)^{-D}\varepsilon_t + wI_t(T). \quad (4.19)$$

Logo,

$$\frac{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)}{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D Z_t = \varepsilon_t + w \frac{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)}{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D I_t(T). \quad (4.20)$$

Defina

$$\mathcal{Y}_t := \frac{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)}{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D Z_t. \quad (4.21)$$

Desta forma a equação (4.20) reduz-se a

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_t &= \varepsilon_t + w \frac{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)}{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D I_t(T) \\ &= \varepsilon_t + w \sum_{j \geq 0} \pi_j \mathcal{B}^j(I_t(T)) \\ &= \varepsilon_t + w\pi(\mathcal{B})(I_t(T)). \end{aligned}$$

Ou seja, o \mathcal{Y}_t é dado por

$$\mathcal{Y}_t = \begin{cases} \varepsilon_t, & \text{se } t < T, \\ \varepsilon_t + w\pi_{t-T}, & \text{se } t \geq T. \end{cases} \quad (4.22)$$

Assumindo $1 \leq t \leq n$, podemos escrever a equação (4.22), na forma de um sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_{T-1} \\ \mathcal{Y}_T \\ \mathcal{Y}_{T+1} \\ \mathcal{Y}_{T+2} \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_n \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_{n-T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{T-1} \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{T+1} \\ \varepsilon_{T+2} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Como o processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz as hipóteses

$$\begin{aligned} \text{i) } & \mathbb{E}(\varepsilon_j) = 0, \\ \text{ii) } & \text{Var}(\varepsilon_j) = \sigma_\varepsilon^2, \\ \text{iii) } & \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_k) = 0, \text{ se } t \neq k, \end{aligned} \quad (4.24)$$

pela teoria dos mínimos quadrados, o estimador da magnitude do *outlier*, denotado por \hat{w}_{AO} , é dado por

$$\hat{w}_{AO} = \frac{\sum_{j=T}^n \pi_{j-T} \mathcal{Y}_j}{\sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2} = \rho_{AO}^2 \sum_{j=T}^n \pi_{j-T} \mathcal{Y}_j, \quad (4.25)$$

onde $\rho_{AO}^2 = \left(\sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2 \right)^{-1}$ e $\pi_0 = 1$.

Para construir as seqüências $\{\mathcal{Y}_t\}_{t=1}^n$ e $\{\pi_j\}_{j=0}^{n-T}$ precisamos estimar os parâmetros do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ que é um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s.

Os Lemas 4.1 e 4.2 abaixo, mostram que o estimador \hat{w}_{AO} é não viciado e ainda apresentam a sua variância.

Lema 4.1. *O estimador \hat{w}_{AO} , dado pela expressão (4.25), é não viciado.*

Demonstração: Seja \hat{w}_{AO} dado pela expressão (4.25), onde $\{\mathcal{Y}_t\}_{t=1}^n$ é dado pela expressão (4.22). Então, a esperança de \hat{w}_{AO} é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{w}_{AO}) &= \mathbb{E}\left(\rho_{AO}^2 \sum_{j=T}^n \pi_{j-T} \mathcal{Y}_j\right) = \rho_{AO}^2 \mathbb{E}\left(\sum_{j=T}^n \pi_{j-T} \mathcal{Y}_j\right) \\
&= \rho_{AO}^2 \mathbb{E}\left(\sum_{j=T}^n \pi_{j-T} (\varepsilon_j + w\pi_{j-T})\right) \\
&= \rho_{AO}^2 \sum_{j=T}^n (\pi_{j-T} \mathbb{E}(\varepsilon_j) + w\pi_{j-T}^2) \\
&= w\rho_{AO}^2 \sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2 = w,
\end{aligned}$$

pois $\rho_{AO}^2 = \left(\sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2\right)^{-1}$.

Portanto, o estimador \hat{w}_{AO} é não viciado. □

Lema 4.2. *O estimador da magnitude de um outlier AO, \hat{w}_{AO} , dado pela expressão (4.25), possui variância dada por*

$$\text{Var}(\hat{w}_{AO}) = \sigma_\varepsilon^2 \rho_{AO}^2.$$

Demonstração: Seja \hat{w}_{AO} o estimador da magnitude de um outlier AO, dado pela expressão (4.25), onde $\{\mathcal{Y}_t\}_{t=1}^n$ é dado pela expressão (4.22). Então, a variância de \hat{w}_{AO} , é dada por

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{w}_{AO}) &= (\rho_{AO}^2)^2 \text{Var}\left(\sum_{j=T}^n \pi_{j-T} \mathcal{Y}_j\right) = (\rho_{AO}^2)^2 \text{Var}\left(\sum_{j=T}^n \pi_{j-T} \varepsilon_j + w\pi_{j-T}^2\right) \\
&= (\rho_{AO}^2)^2 \sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2 \text{Var}(\varepsilon_j) = (\rho_{AO}^2)^2 \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2 = (\rho_{AO}^2)^2 \sigma_\varepsilon^2 (\rho_{AO}^2)^{-1} \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \rho_{AO}^2.
\end{aligned}$$

□

Definimos

$$\mathcal{W}_j := \rho_{AO}^2 \pi_{j-T} \mathcal{Y}_j, \text{ para todo } j = T, \dots, n. \quad (4.26)$$

As variáveis aleatórias \mathcal{W}_j são importantes na demonstração do Teorema 4.1, onde provamos que o estimador \hat{w}_{AO} tem distribuição normal.

O Lema 4.3, a seguir, fornece a esperança e a variância das variáveis aleatórias \mathcal{W}_j .

Lema 4.3. *Seja \mathcal{W}_j a variável aleatória dada pela expressão (4.26), para todo $j = T, \dots, n$. Então, \mathcal{W}_j , para $j = T, \dots, n$, são variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas cuja esperança e variância são dadas por*

$$\mathbb{E}(\mathcal{W}_j) = w\rho_{AO}^2 \pi_{j-T}^2, \quad e \quad \text{Var}(\mathcal{W}_j) = (\rho_{AO}^2)^2 \pi_{j-T}^2 \sigma_\varepsilon^2,$$

$$\text{onde } \rho_{AO}^2 = \left(\sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2 \right)^{-1}.$$

Demonstração: Sejam \mathcal{W}_j , ver expressão (4.26), para todo $j = T, \dots, n$. Como as variáveis aleatórias \mathcal{W}_j são uma combinação linear das variáveis do processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, elas são variáveis aleatórias independentes, para todo $j = T, \dots, n$. A esperança de \mathcal{W}_j é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{W}_j) &= \rho_{AO}^2 \pi_{j-T} \mathbb{E}(r_j) = \rho_{AO}^2 \pi_{j-T} \mathbb{E}(w\pi_{j-T} + \varepsilon_j) \\ &= \rho_{AO}^2 \pi_{j-T} (w\pi_{j-T} + \mathbb{E}(\varepsilon_j)) = w\rho_{AO}^2 \pi_{j-T}^2. \end{aligned}$$

A variância de \mathcal{W}_j , para $j = T, \dots, n$, é dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathcal{W}_j) &= (\rho_{AO}^2)^2 \pi_{j-T}^2 \text{Var}(w\pi_{j-T} + \varepsilon_j) = (\rho_{AO}^2)^2 \pi_{j-T}^2 \text{Var}(\varepsilon_j) \\ &= (\rho_{AO}^2)^2 \pi_{j-T}^2 \sigma_\varepsilon^2, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \rho_{AO}^2 = \left(\sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2 \right)^{-1}.$$

Então, as variáveis aleatórias \mathcal{W}_j são normalmente distribuídas com

$$\mathbb{E}(\mathcal{W}_j) = w\rho_{AO}^2 \pi_{j-T}^2 \quad e \quad \text{Var}(\mathcal{W}_j) = (\rho_{AO}^2)^2 \pi_{j-T}^2 \sigma_\varepsilon^2,$$

para $j = T, \dots, n$.

□

No Teorema 4.1, a seguir, provamos a normalidade exata do estimador \hat{w}_{AO} .

Teorema 4.1. *O estimador \hat{w}_{AO} , dado pela expressão (4.25), tem distribuição $\mathcal{N}(w, \sigma_\varepsilon^2 \rho_{AO}^2)$.*

Demonstração: Vamos verificar que o estimador \hat{w}_{AO} possui distribuição normal. Seja $r_j = w\pi_{j-t} + \varepsilon_t$, para $j = T, \dots, n$. Então, r_j possui distribuição $\mathcal{N}(w\pi_{j-t}, \sigma_\varepsilon^2)$, para $j = T, \dots, n$, pois ε_t possui distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Queremos verificar se

$$Y_n := \frac{\hat{w}_{AO} - \mathbb{E}(\hat{w}_{AO})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{AO})}}$$

é uma variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$, isto é, se \hat{w}_{AO} tem distribuição $\mathcal{N}(w, \sigma_\varepsilon^2 \rho_{AO}^2)$.

Vamos inicialmente encontrar a função característica das variáveis aleatórias Y_n , isto é,

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{itY_n}) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{it \frac{\hat{w}_{AO} - \mathbb{E}(\hat{w}_{AO})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{AO})}}\right\}\right) \\ &= \exp\left\{\frac{-it\mathbb{E}(\hat{w}_{AO})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{AO})}}\right\} \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{it\hat{w}_{AO}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{AO})}}\right\}\right) \\ &= \exp\left\{\frac{-it\mathbb{E}(\hat{w}_{AO})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{AO})}}\right\} \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{it}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{AO})}} \sum_{j=T}^n \mathcal{W}_j\right\}\right) \\ &= \exp\left\{\frac{-it\mathbb{E}(\hat{w}_{AO})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{AO})}}\right\} \prod_{j=T}^n \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{it\mathcal{W}_j}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{AO})}}\right\}\right) \\ &= \exp\left\{\frac{-it\mathbb{E}(\hat{w}_{AO})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{AO})}}\right\} \prod_{j=T}^n \varphi_{\mathcal{W}_j}\left(\frac{t}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{AO})}}\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Como as variáveis aleatórias \mathcal{W}_j , para $j = T, \dots, n$, possuem distribuição normal $\mathcal{N}(w\rho_{AO}^2\pi_{j-T}^2, (\rho_{AO}^2)^2\pi_{j-T}^2\sigma_\varepsilon^2)$, a sua função característica é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{W}_j}\left(\frac{t}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{AO})}}\right) &= \exp\left\{\frac{itw\rho_{AO}^2\pi_{j-T}^2}{\rho_{AO}\sigma_\varepsilon} - \frac{t^2(\rho_{AO}^2)^2\pi_{j-T}^2\sigma_\varepsilon^2}{2\rho_{AO}^2\sigma_\varepsilon^2}\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{itw\rho_{AO}\pi_{j-T}^2}{\sigma_\varepsilon} - \frac{t^2\rho_{AO}^2\pi_{j-T}^2}{2}\right\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

para $j = T, \dots, n$.

Substituindo a equação (4.28) na equação (4.27), temos

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_n}(t) &= \exp\left\{\frac{-itw}{\sigma_\varepsilon\rho_{AO}}\right\} \prod_{j=T}^n \exp\left\{\frac{itw\rho_{AO}\pi_{j-T}^2}{\sigma_\varepsilon} - \frac{t^2\rho_{AO}^2\pi_{j-T}^2}{2}\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{-itw}{\sigma_\varepsilon\rho_{AO}}\right\} \exp\left\{\frac{itw\rho_{AO}}{\sigma_\varepsilon} \sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2 - \frac{t^2\rho_{AO}^2}{2} \sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{itw\rho_{AO}^2}{\sigma_\varepsilon\rho_{AO}} \sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2 - \frac{t^2\rho_{AO}^2}{2} \sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2 - \frac{itw}{\sigma_\varepsilon\rho_{AO}}\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{itw}{\sigma_\varepsilon\rho_{AO}} - \frac{t^2}{2} - \frac{itw}{\sigma_\varepsilon\rho_{AO}}\right\} = e^{-t^2/2},
\end{aligned}$$

pois $\rho_{AO}^2 = \left(\sum_{j=T}^n \pi_{j-T}^2\right)^{-1}$.

Portanto,

$$\varphi_{Y_n}(t) = e^{-t^2/2}. \quad (4.29)$$

Pelos Lemas 4.1 e 4.2, concluimos de (4.29) que o estimador \hat{w}_{AO} tem distribuição $\mathcal{N}(w, \sigma_\varepsilon^2\rho_{AO}^2)$. □

2) *Outlier Inovador*

Queremos estimar a perturbação, denotada por w , provocada por um *outlier IO*. Para isto vamos considerar os resíduos do modelo ajustado como base para detectar a perturbação de um *outlier* e derivar estatísticas para testar a hipótese de presença de *outlier*.

Considere o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dado pela equação (4.7), com $m = 1$. Então,

$$Z_t = \frac{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)}(1 - \mathcal{B})^{-d}(1 - \mathcal{B}^s)^{-D}(\varepsilon_t + wI_t(T)). \quad (4.30)$$

Logo,

$$\frac{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)}{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D Z_t = \varepsilon_t + wI_t(T). \quad (4.31)$$

Defina

$$\mathcal{Y}_t := \frac{\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)}{\theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)}(1 - \mathcal{B})^d(1 - \mathcal{B}^s)^D Z_t,$$

onde $\{\mathcal{Y}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ diferenciado pelo processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s.

Dessa forma, a equação (4.31) reduz-se a

$$\mathcal{Y}_t = \varepsilon_t + wI_t(T),$$

ou seja, o processo $\{\mathcal{Y}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz

$$\mathcal{Y}_t = \begin{cases} \varepsilon_T + w, & \text{se } t = T, \\ \varepsilon_t, & \text{se } t \neq T. \end{cases} \quad (4.32)$$

Assumindo $1 \leq t \leq n$, a equação (4.32), pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_{T-1} \\ \mathcal{Y}_T \\ \mathcal{Y}_{T+1} \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_n \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{T-1} \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_{T+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Como o processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz as hipóteses dadas pela expressão (4.24), pela teoria dos mínimos quadrados, o estimador da magnitude do *outlier* inovador, denotado por \hat{w}_{IO} , é dado por

$$\hat{w}_{IO} = \mathcal{Y}_T, \quad (4.34)$$

onde $\{\mathcal{Y}_t\}_{t=1}^n$ é dada pela equação (4.32).

Para construir a seqüência $\{\mathcal{Y}_t\}_{t=1}^n$ necessitamos estimar os parâmetros do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o qual é um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s.

Os parâmetros do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são estimados utilizando os procedimentos de estimação descritos no Capítulo 5.

Nos Lemas 4.4 e 4.5 a seguir, demonstramos que o estimador \hat{w}_{IO} é não viciado e apresentamos a sua variância.

Lema 4.4. *O estimador \hat{w}_{IO} , dado pela expressão (4.34), é não viciado.*

Demonstração: Seja \hat{w}_{IO} dado pela expressão (4.34), onde os resíduos $\{\mathcal{Y}_t\}_{t=1}^n$ são dados pela expressão (4.32). Então, a esperança de \hat{w}_{IO} é dada por

$$\mathbb{E}(\hat{w}_{IO}) = \mathbb{E}(\mathcal{Y}_T) = \mathbb{E}(\varepsilon_T + w) = w + \mathbb{E}(\varepsilon_T) = w.$$

Portanto, o estimador \hat{w}_{IO} é não-viciado. \square

Lema 4.5. *O estimador da magnitude de um outlier IO, \hat{w}_{IO} , dado pela expressão (4.34), possui variância dada por*

$$\text{Var}(\hat{w}_{IO}) = \sigma_\varepsilon^2.$$

Demonstração: Seja \hat{w}_{IO} o estimador da magnitude de um outlier IO, dado pela expressão (4.34), onde os resíduos $\{\mathcal{Y}_t\}_{t=1}^n$ são dados pela expressão (4.32). Então, a variância de \hat{w}_{IO} , é dada por

$$\text{Var}(\hat{w}_{IO}) = \text{Var}(\mathcal{Y}_T) = \text{Var}(\varepsilon_T + w) = \sigma_\varepsilon^2.$$

□

No Teorema 4.2 abaixo, apresenta-se a normalidade exata do estimador \hat{w}_{IO} .

Teorema 4.2. *O estimador \hat{w}_{IO} , dado pela expressão (4.34), tem distribuição $\mathcal{N}(w, \sigma_\varepsilon^2)$.*

Demonstração: Para verificarmos a normalidade do estimador \hat{w}_{IO} , temos que verificar se

$$\frac{\hat{w}_{IO} - w}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{IO})}}$$

é uma variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$.

Observe que,

$$\frac{\hat{w}_{IO} - w}{\sqrt{\text{Var}(\hat{w}_{IO})}} = \frac{\mathcal{Y}_T - w}{\sigma_\varepsilon} = \frac{\varepsilon_T}{\sigma_\varepsilon},$$

pois $\mathcal{Y}_T = \varepsilon_T + w$.

A função característica da variável aleatória $\frac{\varepsilon_T}{\sigma_\varepsilon}$, calculada quando $t = T$, é dada por

$$\varphi_{\frac{\varepsilon_T}{\sigma_\varepsilon}}(t) = \mathbb{E} \left(\exp \left[\frac{it\varepsilon_T}{\sigma_\varepsilon} \right] \right) = \varphi_{\varepsilon_T} \left(\frac{t}{\sigma_\varepsilon} \right) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (4.35)$$

onde $\varphi_{\varepsilon_T}(t) = e^{-\frac{\sigma_\varepsilon^2 t^2}{2}}$, pois o processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaz as hipóteses dadas pela expressão (4.24).

Pelos Lemas 4.4 e 4.5, concluímos de (4.35) que o estimador \hat{w}_{IO} tem distribuição $\mathcal{N}(w, \sigma_\varepsilon^2)$.

□

3) O teste estatístico

Quando a posição do possível outlier, σ_ε^2 e os parâmetros do modelo são conhecidos testar a presença do outlier (sob certas condições) é equivalente

a testar a significância do parâmetro w nos modelos dados pelas expressões (4.19) e (4.30).

Sejam as hipóteses

$$\begin{aligned} H_0 & : w = 0 \text{ nas equações (4.19) e (4.30),} \\ H_1^1 & : w \neq 0 \text{ na equação (4.19),} \\ H_1^2 & : w \neq 0 \text{ na equação (4.30).} \end{aligned}$$

Assim os testes da razão de verossimilhança para testar uma hipótese contra as outras são dados por

$$\text{Teste 1: } H_0 : w = 0 \text{ versus } H_1^1 : w \neq 0, \quad (4.36)$$

com estatística do teste para AO

$$\lambda_{AO,T} = \frac{\hat{w}_{AO}}{\sigma_\varepsilon \rho_{AO}};$$

$$\text{Teste 2: } H_0 : w = 0 \text{ versus } H_1^2 : w \neq 0, \quad (4.37)$$

com estatística do teste para IO

$$\lambda_{IO,T} = \frac{\hat{w}_{IO}}{\sigma_\varepsilon};$$

$$\text{Teste 3: } H_1^1 : w \neq 0 \text{ versus } H_1^2 : w \neq 0 \quad (4.38)$$

com estatística do teste para AO e IO

$$\lambda_{AI,T} = \frac{\rho_{AO}^{-2} w_{AO}^2 - w_{IO}^2}{2\sigma_\varepsilon^2 \sqrt{(1 - \rho_{AO}^2)}},$$

onde $\lambda_{AI,T}$ significa a estatística do Teste 3 quando levamos em conta os *outliers* aditivo e inovador simultaneamente.

Sob a hipótese H_0 , ambas as estatísticas $\lambda_{AO,T}$ e $\lambda_{IO,T}$, possuem distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$.

Numa determinada posição T , o possível *outlier* é classificado como IO , se $|\lambda_{IO,T}| > |\lambda_{AO,T}|$ e é classificado como AO se $|\lambda_{IO,T}| < |\lambda_{AO,T}|$.

Quando a exata posição do *outlier* não é conhecida, o teste da razão de verossimilhança fornece o seguinte teste

$$\lambda_{AO} = \max_{T=1, \dots, n} |\lambda_{AO,T}| \quad \text{e} \quad \lambda_{IO} = \max_{T=1, \dots, n} |\lambda_{IO,T}|. \quad (4.39)$$

A hipótese nula é rejeitada se pelo menos uma das estatísticas acima é maior que um certo valor C . Quando ambas as estatísticas são maiores

que C , Chang et al. (1988) não usa o teste da razão de verossimilhança, mas segue uma regra simples mencionada por Fox (1972) o qual considera o *outlier* como um IO se $|\lambda_{IO}| > |\lambda_{AO}|$ e um AO se $|\lambda_{IO}| < |\lambda_{AO}|$.

Observação 4.1. Na prática, os parâmetros do modelo não são conhecidos. Neste caso podemos estimar estes parâmetros. Chang et al. (1988) provou que se usarmos o estimador de máxima verossimilhança as novas estatísticas são assintoticamente equivalente às estatísticas teste dadas nas equações (4.36) a (4.38).

Capítulo 5

Estimação e Seleção de Modelo

Uma *série temporal*, denotada por $\{X_t\}_{t=1}^n$, é uma seqüência de n observações de um fenômeno aleatório, medido ao longo do tempo, gerada a partir de um processo estocástico. O objetivo das investigações estatísticas é inferir, à partir de uma amostra, ou seja, de uma série temporal, propriedades e características para a população. Por exemplo, fazer previsões dos futuros valores desta série temporal. Para isto, necessitamos de modelos que sejam capazes de descrever adequadamente esta série temporal.

A metodologia do estudo destes processos consiste em identificar (estimar) os parâmetros utilizando estimadores propostos na literatura de séries temporais com longa dependência. Em seguida, verificamos se o modelo ajustado é o mais adequado para a série temporal em estudo. Para isto, utilizamos alguns critérios de seleção de modelo.

Na Seção 5.1 apresentamos os métodos de estimação clássicos e robustos e na Seção 5.2 os critérios de seleção de modelo.

5.1 Estimação Clássica e Robusta

Na literatura de processos estocásticos existem diversos métodos de estimação propostos para estimar seus parâmetros. Estes métodos podem ser semiparamétricos, paramétricos e não-paramétricos. Neste trabalho consideramos diversos estimadores na classe dos métodos semiparamétricos e paramétricos. Nesta seção apresentamos quatro estimadores semiparamétricos para estimar os parâmetros de diferenciação d e diferenciação sazonal D e um estimador paramétrico para estimar, não somente os parâmetros d e D como também o restante dos parâmetros do modelo. Também propomos nova metodologia de estimação para os parâmetros d e D , os chamados *estimadores robustos*.

A seguir, descrevemos os procedimentos de estimação através do método dos mínimos quadrados e da metodologia robusta. Inicialmente, definimos o modelo de regressão linear geral com l variáveis independentes X_k , $1 \leq k \leq l$, e uma variável aleatória Y dependente, o qual possui a seguinte forma

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_l X_l + \epsilon. \quad (5.1)$$

Assumindo $g(n)$ independentes observações de Y associadas aos valores x_k , para $k \in \{1, \dots, l\}$, o modelo (5.1) apresenta-se como

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \cdots + \beta_l X_{1l} + \epsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \cdots + \beta_l X_{2l} + \epsilon_2 \\ &\vdots \\ Y_{g(n)} &= \beta_0 + \beta_1 X_{g(n)1} + \cdots + \beta_l X_{g(n)l} + \epsilon_{g(n)}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde os erros ϵ_j , satisfazem as seguintes suposições, para todo $j \in \{1, \dots, g(n)\}$,

- i) $\mathbb{E}(\epsilon_j) = 0$,
- ii) $\text{Var}(\epsilon_j) = \sigma_\epsilon^2$,
- iii) $\text{Cov}(\epsilon_\iota, \epsilon_k) = 0$, se $\iota \neq k$.

Em notação matricial, o sistema (5.2) é dado por

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{g(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1l} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{g(n)1} & X_{g(n)2} & \cdots & X_{g(n)l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{g(n)} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

ou seja,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

onde \mathbf{Y} é uma matriz $g(n) \times 1$, \mathbf{X} é uma matriz $g(n) \times (l + 1)$, $\boldsymbol{\beta}$ é uma matriz $(l + 1) \times 1$ e $\boldsymbol{\epsilon}$ é uma matriz $g(n) \times 1$.

O estimador de $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)'$ pelo método dos mínimos quadrados, denotado neste trabalho por MQ , é o valor $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_l)' \in \mathbb{R}^{l+1}$ que minimiza a função perda

$$\mathfrak{L}_1(g(n)) = \sum_{j=1}^{g(n)} r_j^2, \quad (5.4)$$

onde os resíduos r_j são dados por

$$r_j = y_j - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{j1} - \cdots - \hat{\beta}_l x_{jl}. \quad (5.5)$$

Pela teoria de regressão linear, se a matriz \mathbf{X} possui posto completo, isto é, quando $(l + 1) \leq g(n)$, o estimador dos mínimos quadrados de $\boldsymbol{\beta}$, é dado por

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}, \quad (5.6)$$

cuja esperança e variância são dadas por

$$\mathbb{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} \quad \text{e} \quad \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma_\epsilon^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

Portanto, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é um estimador não viciado.

Para maiores detalhes sobre regressão linear múltipla referenciamos o leitor a Draper e Smith (1981).

Os estimadores obtidos através do procedimento *MQ*, sob a hipótese de normalidade dos erros, são consistentes e tem mínima variância entre todos os estimadores não viciados. A presença de *outliers* e pontos de alavanca, ou mesmo a perda da hipótese de normalidade dos erros são responsáveis por um considerável vício e ineficiência dos estimadores *MQ* (ver Huber, 1981 e Rousseeuw e Leroy, 2003).

Outro procedimento utilizado para estimar o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)$ são os procedimentos de estimação robusta, os quais apresentam estimadores que não são fortemente afetados por *outliers*.

Os procedimentos de estimação robusta são indicados quando os dados contém uma certa porcentagem de *outliers*. Por isso, definimos o *ponto de ruptura* destes estimadores. Esta definição é um versão finita do conceito de ponto de ruptura, introduzido por Donaho e Huber (1983).

Seja \mathbf{Z} uma amostra de tamanho $g(n)$, dada por

$$\mathbf{Z} = \{(1, x_{11}, \dots, x_{1l}, y_1), \dots, (1, x_{g(n)1}, \dots, x_{g(n)l}, y_{g(n)})\},$$

e \mathbf{T} um estimador dos coeficientes de regressão $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)$, isto é, $\mathbf{T}(\mathbf{Z}) = \hat{\boldsymbol{\beta}}$.

Supomos que \tilde{m} valores arbitrários (aberrantes ou *outliers*) substituam \tilde{m} observações originais de \mathbf{Z} , produzindo uma amostra contaminada \mathbf{Z}' .

Denotamos por $\text{vício}(\tilde{m}; \mathbf{T}, \mathbf{Z})$ o vício máximo causado por tal contaminação, isto é,

$$\text{vício}(\tilde{m}; \mathbf{T}, \mathbf{Z}) = \sup_{\mathbf{Z}'} \|\mathbf{T}(\mathbf{Z}') - \mathbf{T}(\mathbf{Z})\|,$$

onde o supremo é sobre todas as possíveis amostras \mathbf{Z}' e $\|\cdot\|$ representa a norma Euclideana. Se o $\text{vício}(\tilde{m}; \mathbf{T}, \mathbf{Z})$ é infinito, isto significa que os \tilde{m} *outliers* podem ter um efeito arbitrariamente grande sobre \mathbf{T} .

Assim, para amostras de tamanho $g(n)$ finitas, o *ponto de ruptura* do estimador \mathbf{T} , utilizando a amostra \mathbf{Z} , é definido como

$$\epsilon^* := \epsilon^*(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) = \min \left\{ \frac{m}{g(n)}; \text{vício}(\tilde{m}; \mathbf{T}, \mathbf{Z}) \text{ é infinito} \right\}.$$

Em outras palavras, o *ponto de ruptura* é a menor porcentagem de dados contaminados que pode fazer com que o estimador tome um valor alto e arbitrariamente anormal (ver Hampel, 1974). No caso dos estimadores *MQ*, Rousseeuw e Leroy (2003) observaram que um *outlier* é suficiente para que o estimador tenha um alto vício. Portanto, seu *ponto de ruptura* é igual a

$$\epsilon^* = \frac{1}{g(n)},$$

o qual converge a zero, quando o tamanho da amostra cresce. Assim, podemos dizer que os estimadores obtidos pelo método *MQ* possuem ponto de ruptura de 0%. Isto novamente reflete a extrema sensibilidade destes estimadores na presença de algum ponto atípico.

Em vista deste problema, apresentamos os procedimentos de estimação robusta.

No procedimento de estimação robusta para $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)$, ao invés de minimizarmos a soma dos quadrados dos resíduos (ver equação (5.4)), minimizamos uma versão robusta da dispersão dos resíduos. Um estimador pode ser considerado robusto se

- (i) ele é altamente eficiente sob a verdadeira distribuição dos dados e razoavelmente eficiente numa vizinhança da mesma;
- (ii) se possui alto (0.5) ponto de ruptura e portanto não fornece estimativas distorcidas sob a presença de alguns pontos atípicos;
- (iii) se ele possui uma função de influência contínua e limitada.

Um procedimento de estimação robusta é o dos *mínimos quadrados podados* (denotados aqui por *MQP*), proposto por Rousseeuw (1984). Os estimadores baseados na regressão (5.3) e obtidos através do procedimento *MQP* são os valores $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_l) \in \mathbb{R}^{l+1}$ que minimizam a função perda

$$\mathfrak{L}_2(g(n)) = \sum_{j=1}^{m^*} (r^2)_{j:m}, \quad (5.7)$$

onde $(r^2)_{1:m} \leq \dots \leq (r^2)_{m^*:m}$ são os resíduos ao quadrado ordenados e m^* é o número de pontos usados no procedimento de otimização. A equação (5.7) é muito similar à equação (5.4), a diferença é que os resíduos são ao quadrado. A constante m^* é responsável pelo ponto de ruptura e eficiência. O estimador *MQP* foi utilizado por Taqqu et al. (1995) e por Lopes e Mendes (2006) para a estimação do parâmetro de longa dependência dos processos

ARFIMA(p, d, q). Segundo Lopes e Mendes (2006), quando $m^* = \lfloor g(n)/2 \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x , o ponto de ruptura é de aproximadamente 50%. Rousseeuw (1984) afirma que o ponto de ruptura é $(\lfloor g(n)/2 \rfloor - (l+1) + 2)/g(n)$, quando $m^* = \lfloor g(n)/2 \rfloor + 1$ e $(\lfloor (g(n) - (l+1))/2 \rfloor + 1)/g(n)$, quando $m^* = \lfloor g(n)/2 \rfloor + \lfloor ((l+1) + 1)/2 \rfloor$, ambos para $l+1 > 1$, onde $l+1$ é a dimensão do vetor de parâmetros a serem estimados, a saber, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l)$.

Yohai (1987) introduziu outra classe de estimadores robustos baseados na regressão (5.3). Os estimadores baseados nesse procedimento serão denotados aqui por MM , e possuem as seguintes propriedades

- (i) são altamente eficientes quando os erros possuem distribuição normal;
- (ii) são qualitativamente robustos;
- (iii) possuem alto ponto de ruptura.

Os estimadores MM são definidos por um procedimento de três estágios e podem ser descritos da seguinte forma. No primeiro estágio, um estimador inicial é calculado o qual é qualitativamente robusto e tem alto ponto de ruptura mas não é necessariamente eficiente. No segundo estágio, um estimador M da escala de erros é calculado utilizando os resíduos baseados na estimação inicial. Finalmente, no terceiro estágio, um estimador M dos parâmetros de regressão é calculado baseado em uma função apropriada.

Os estimadores baseados na regressão dada por (5.3) e no procedimento MM são definidos como a solução $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_l) \in \mathbb{R}^{l+1}$ a qual minimiza a função perda

$$\mathcal{L}_3(g(n)) = \sum_{j=1}^{g(n)} \rho_2 \left(\frac{r_j}{\kappa} \right)^2, \quad (5.8)$$

sujeita a restrição

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{g(n)} \rho_1 \left(\frac{r_j}{\kappa} \right) \leq b, \quad (5.9)$$

onde $\rho_1(\cdot)$ e $\rho_2(\cdot)$ são funções simétricas, limitadas e não decrescentes em $[0, \infty)$, com $\rho_v(0) = 0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \rho_v(u) = 1$, para $v = 1, 2$, κ é um parâmetro de escala, b é definido por $\mathbb{E}_\phi(\rho_1(u)) = b$, onde ϕ denota a função de distribuição acumulada da normal padrão e r_j são os resíduos dados pela equação (5.5), para todo $j = 1, \dots, g(n)$. O ponto de ruptura dos estimadores MM depende somente da função $\rho_1(\cdot)$ e é dado por $\min\{b, 1-b\}$. Os estimadores baseados no procedimento MM são consistentes e assintoticamente normais.

1) Estimador *GPH* Clássico e Robusto

Nesta seção, apresentamos o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), o qual baseia-se no método de regressão utilizando a função periodograma. A seguir, descrevemos o procedimento.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com $d, D \in (-0.5, 0.5)$, dado pela expressão (3.2), cuja função densidade espectral é dada pela expressão (3.32). Podemos reescrever a expressão (3.32) da seguinte forma

$$f_x(w) = f_U(w) \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right|^{-2d} \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{sw}{2}\right) \right|^{-2D}, \quad (5.10)$$

onde

$$f_U(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2 |\Theta(e^{-isw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2 |\Phi(e^{-isw})|^2}, \quad (5.11)$$

para todo $0 < w \leq \pi$.

Aplicando a função logarítmica a ambos os lados da equação (5.10) temos

$$\ln[f_x(w)] = \ln[f_U(w)] - d \ln \left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right]^2 - D \ln \left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{sw}{2}\right) \right]^2. \quad (5.12)$$

Adicionando $\ln[f_U(0)]$ e $\ln[I(w)]$, a ambos os lados da equação (5.12), onde $I(\cdot)$ é a função periodograma (ver expressão (2.31)) e fazendo uso das propriedades da função logarítmica, obtemos

$$\begin{aligned} \ln[I(w)] &= \ln[f_U(0)] - d \ln \left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right]^2 - D \ln \left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{sw}{2}\right) \right]^2 \\ &\quad + \ln \left[\frac{f_U(w)}{f_U(0)} \right] + \ln \left[\frac{I(w)}{f_x(w)} \right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Substituindo w , na equação (5.13), pelas frequências de Fourier $w_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j \in \{0, 1, \dots, g(n) \mid j \neq \frac{vn}{s}\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \ln[I(w_j)] &= \ln[f_U(0)] - d \ln \left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{w_j}{2}\right) \right]^2 - D \ln \left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{sw_j}{2}\right) \right]^2 \\ &\quad + \ln \left[\frac{f_U(w_j)}{f_U(0)} \right] + \ln \left[\frac{I(w_j)}{f_x(w_j)} \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Considerando o limite máximo de j igual a $g(n)$, o qual é escolhido de tal forma que $g(n) \rightarrow \infty$ e $g(n)/n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, e $w_j \leq w_{g(n)}$,

onde $w_{g(n)}$ é pequeno, o termo $\ln \left[\frac{f_U(w_j)}{f_U(0)} \right]$ é desprezível se comparado com os outros termos da equação (5.14) (ver Geweke e Porter-Hudak, 1983). Assim, obtemos uma forma aproximada para a equação (5.14), dada por

$$\begin{aligned} \ln[I(w_j)] &\simeq \ln[f_U(0)] - d \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{w_j}{2} \right) \right]^2 - D \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{sw_j}{2} \right) \right]^2 \\ &\quad + \ln \left[\frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Podemos observar que a equação (5.15) é uma forma aproximada da equação de regressão múltipla dada por

$$y_j \simeq \beta_0 + \beta_1 x_{j1} + \beta_2 x_{j2} + \epsilon_j, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, g(n), \quad (5.16)$$

onde

$$y_j = \ln[I(w_j)], \quad x_{j1} = \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{w_j}{2} \right) \right]^2, \quad x_{j2} = \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{sw_j}{2} \right) \right]^2, \quad (5.17)$$

$$\epsilon_j = \ln \left[\frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right] + c, \quad \beta_0 = \ln[f_U(0)] - c, \quad c = \mathbb{E} \left(\ln \left[\frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right] \right), \quad (5.18)$$

$$\beta_1 = -d \quad e \quad \beta_2 = -D, \quad (5.19)$$

onde ϵ_j são variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância constante.

Os estimadores semiparamétricos pelo método dos mínimos quadrados, são os valores $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \in \mathbb{R}^3$ que minimizam a função perda dada pela expressão (5.4), baseado na equação (5.16), com $l = 2$, onde as variáveis aleatórias são dadas pelas expressões (5.17) e (5.18). Portanto, $\hat{d} = -\hat{\beta}_1$ e $\hat{D} = -\hat{\beta}_2$.

Desta forma, encontramos os estimadores para os parâmetros d e D pelo método proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), denotados, respectivamente, por $\hat{d}_{GPH.MQ}$ e $\hat{D}_{GPH.MQ}$.

Os estimadores para d e D baseados na regressão dada por (5.16) e no procedimento de estimação robusta são denotados, respectivamente, por $\hat{d}_{GPH.MQP}$, $\hat{d}_{GPH.MM}$, $\hat{D}_{GPH.MQP}$ e $\hat{D}_{GPH.MM}$. Relembramos que, para a obtenção dos estimadores robustos MQP , utilizamos a função perda $\mathfrak{L}_2(\cdot)$, dada pela equação (5.7), enquanto que para os estimadores MM utilizamos a função perda $\mathfrak{L}_3(\cdot)$, dada pela equação (5.8).

2) Estimador R Clássico e Robusto

Proposto por Robinson (1995), este estimador semiparamétrico é baseado na função periodograma, de forma similar ao estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). Este estimador é obtido aplicando o método dos mínimos quadrados em (5.16) mas considerando as frequências de Fourier w_j , para $j = \ell, \ell + 1, \dots, g(n)$, onde $\ell > 1$ é o valor de corte (“trimming”), que tende para o infinito de forma mais lenta do que $g(n)$. Denotamos estes estimadores de d e D , respectivamente, por $\hat{d}_{R.MQ}$ e $\hat{D}_{R.MQ}$.

Analogamente aos estimadores anteriores, utilizamos a metodologia robusta para obtermos os estimadores robustos para os parâmetros d e D denotados, respectivamente, por $\hat{d}_{R.MQP}$, $\hat{d}_{R.MM}$, $\hat{D}_{R.MQP}$ e $\hat{D}_{R.MM}$.

3) Estimador SR Clássico e Robusto

Este estimador é obtido substituindo-se a função periodograma pela função periodograma suavizado de covariâncias (ver expressão (5.20)) no estimador proposto por Robinson (1995). Denotaremos estes estimadores de d e D , respectivamente, por $\hat{d}_{SR.MQ}$ e $\hat{D}_{SR.MQ}$.

Analogamente aos estimadores semiparamétricos anteriores, utilizamos a metodologia robusta para obtermos os estimadores robustos para os parâmetros d e D denotados, respectivamente, por $\hat{d}_{SR.MQP}$, $\hat{d}_{SR.MM}$, $\hat{D}_{SR.MQP}$ e $\hat{D}_{SR.MM}$.

4) Estimador SPR Clássico e Robusto

Este estimador é baseado no uso da função periodograma suavizado de covariâncias (ver expressão (A.6)) em vez da função periodograma no estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). Essa alteração decorre do fato de que a função periodograma é um estimador não viciado, mas inconsistente para a função densidade espectral de um processo. No entanto, a função periodograma suavizado de covariâncias é um estimador não viciado e consistente para ela, cuja expressão é dada por

$$I_{smooth}(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq m_p} \Lambda\left(\frac{k}{m_p}\right) \hat{\gamma}_x(k) e^{-ikw}, \quad \text{para todo } w \in (0, \pi], \quad (5.20)$$

onde $\hat{\gamma}_x(\cdot)$ denota a função de autocovariância amostral dada pela expressão (A.5). A função $\Lambda(\cdot)$ é a função peso ou núcleo, a qual satisfaz as condições A.i)-A.iii), onde m_p é o *ponto de truncamento* da função, que depende do tamanho amostral n .

O estimador SPR é obtido substituindo-se a função periodograma pela

função periodograma suavizado de covariâncias, dado em (5.20). Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \ln[I_{smooth}(w_j)] &\simeq \ln[f_U(0)] - d \ln\left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{w_j}{2}\right)\right]^2 - D \ln\left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{sw_j}{2}\right)\right]^2 \\ &\quad + \ln\left[\frac{I_{smooth}(w_j)}{f_x(w_j)}\right], \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde $w_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j \in \{0, 1, \dots, g(n) | j \neq \frac{\nu n}{s}\}$ são as frequências de Fourier e $f_U(\cdot)$ é dada pela equação (5.11).

Neste trabalho, utilizamos a função peso (ou núcleo) de Parzen, cuja expressão é dada por

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - 6x^2 + 6|x|^3, & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1 - |x|)^3, & \text{se } \frac{1}{2} < |x| \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Maiores detalhes sobre a função periodograma suavizado de covariâncias e janelas espectrais podem ser encontrados em Brockwell e Davis (1991), Morettin e Tolo (2004) e Koopmans (1974).

A equação (5.21) pode ser vista como uma equação de regressão linear múltipla. Assim, podemos compará-la com a equação (5.16), apenas substituindo a função periodograma pela função periodograma suavizado de covariâncias nas equações (5.17)-(5.18). Este estimador foi proposto por Reisen (1994) o qual define como *ponto de truncamento* da Janela de Parzen o valor $m_p = n^\beta$, $0 < \beta < 1$. Aqui, consideramos $\beta = 0.9$ (veja Reisen, 1994 para maiores detalhes sobre o valor de β).

Os estimadores para os parâmetros d e D , pelo método dos mínimos quadrados, utilizando a função periodograma suavizado de covariâncias, são denotados, respectivamente, por $\hat{d}_{SPR.MQ}$ e $\hat{D}_{SPR.MQ}$. Estes estimadores são não viciados. Da mesma forma que o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), aplicando as metodologias robustas *MQP* e *MM* à equação de regressão (5.21), obtemos os estimadores, baseados na metodologia robusta, para os parâmetros d e D denotados, respectivamente, por $\hat{d}_{SPR.MQP}$, $\hat{d}_{SPR.MM}$, $\hat{D}_{SPR.MQP}$ e $\hat{D}_{SPR.MM}$.

5) Estimador *GPHT* Clássico e Robusto

Consideramos o estimador proposto por Hurvich e Ray (1995) e Velasco (1999) que é um estimador semiparamétrico baseado na função periodograma modificado dada pela expressão

$$I_{mod}(w) = \frac{1}{\sum_{t=0}^{n-1} g(t)^2} \left| \sum_{t=0}^{n-1} g(t) X_t e^{-itw} \right|^2, \quad \text{para todo } w \in (0, \pi], \quad (5.22)$$

onde $g(\cdot)$ é a janela espectral dada pela expressão

$$g(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi(t + 0.5)}{n} \right) \right]. \quad (5.23)$$

Neste caso, a janela espectral $g(\cdot)$ é aplicada diretamente ao processo estocástico e o estimador é denotado por *GPHT*.

Os estimadores $\hat{d}_{GPHT.MQ}$ e $\hat{D}_{GPHT.MQ}$ são obtidos aplicando a metodologia *MQ* à equação de regressão (5.16) com $I_{mod}(\cdot)$ a função periodograma modificado, dada pela expressão (5.22). Analogamente, consideramos os estimadores $\hat{d}_{GPHT.MQP}$, $\hat{d}_{GPHT.MM}$, $\hat{D}_{GPHT.MQP}$ e $\hat{D}_{GPHT.MM}$ através das metodologias robustas *MQP* e *MM*.

6) Estimador *W*

O estimador de máxima verossimilhança, proposto por Fox e Taquq (1986), utiliza uma aproximação para a matriz de autocovariância sugerida por Whittle (1951). Fox e Taquq (1986) apresentam condições que permitem que este estimador, para uma seqüência com forte dependência, seja consistente e tenha distribuição assintoticamente normal. Sowell (1992) propõe o estimador de máxima verossimilhança exata. As condições necessárias para a consistência e normalidade assintótica do estimador de máxima verossimilhança exato foram apresentadas por Dahlhaus (1989). Ooms (1995) apresenta alguns resultados para modelos com longa dependência sazonais onde compara os estimadores de máxima verossimilhança exata, proposto por Sowell (1992), com os de máxima verossimilhança aproximada, proposto por Fox e Taquq (1986) e ainda com o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983).

A seguir, apresentamos uma breve explicação sobre os estimadores de máxima verossimilhança.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s (ver Definição 3.2) com função densidade espectral $f_X(\cdot)$ dada pela expressão (3.32).

Seja $Q(\boldsymbol{\eta})$ a função dada por

$$Q(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(w)}{f_X(w; \boldsymbol{\eta})} dw, \quad (5.24)$$

onde $f_X(\cdot; \boldsymbol{\eta})$ é a função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada em (5.10) e $\boldsymbol{\eta}$ é o vetor de parâmetros desconhecidos que desejamos estimar. No caso dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s, $\boldsymbol{\eta}$ é dado por $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p,$

$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_P, d, D, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_Q, \sigma_\varepsilon^2$), onde $I(\cdot)$ é a função periodograma dada pela expressão (2.31). Então, o estimador de máxima verossimilhança aproximado, denotado por W , é o valor de $\boldsymbol{\eta}$ que minimiza a função $Q(\cdot)$ (ver Whittle, 1951).

Computacionalmente, o estimador de máxima verossimilhança aproximado é obtido minimizando a seguinte função (na forma discreta)

$$\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2n} \sum_{j \in B} \left(\ln f_X(w_j, \boldsymbol{\eta}) + \frac{I(w_j)}{f_X(w_j, \boldsymbol{\eta})} \right), \quad (5.25)$$

a qual é uma aproximação da função $Q(\cdot)$, onde $w_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j \in B = \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \mid j \neq \frac{vn}{s}\}$, são as frequências de Fourier e $[x]$ é a parte inteira de x .

Pela Observação 3.4, temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln[f_x(w)] dw = 2\pi \ln \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \right),$$

onde $f_x(\cdot)$ é a função densidade espectral dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s dada pela equação (3.32).

Portanto, o estimador de máxima verossimilhança aproximado consiste em encontrar o valor de $\boldsymbol{\eta}$ que minimiza a função

$$\mathcal{L}_n(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2n} \sum_{j \in B} \frac{I(w_j)}{f_X(w_j, \boldsymbol{\eta})}. \quad (5.26)$$

Um estudo completo desse estimador pode ser encontrado em Fox e Taqqu (1986) e em Bisognin e Lopes (2007) para o caso dos processos SARFIMA(0, D , 0)_s.

5.2 Seleção de Modelo

Em análise de séries temporais, diversos modelos podem ser ajustados ao conjunto de dados. Nem sempre escolher o modelo é uma tarefa fácil. Mas entre os diversos modelos que se ajustam aos dados, a escolha do melhor é feita através de critérios de seleção de modelos. Assim, diversos critérios para comparação de modelos têm sido introduzidos na literatura de seleção de modelos. Nesta seção, apresentamos o Critério de Informação de Akaike (AIC), o Critério Bayesiano de Schwartz (SBC), o Critério de Hannan e Quinn (HQC) e suas versões robustas, para determinar as ordens dos polinômios $\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$, $\theta(\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s, dados na expressão (3.3), que melhor se ajustam à série temporal.

Um critério de seleção deve satisfazer

$$\max_m \mathbb{P}(X_t | \text{modelo}),$$

que é o máximo entre as probabilidades condicionais de X_t dado um modelo específico, onde m é o número máximo de parâmetros no modelo. Em nosso caso, estamos considerando os modelos $\text{SARFIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ e queremos determinar o máximo sobre todos os parâmetros m , neste caso, $m = p + P + q + Q + 3$. O valor m recebeu a adição de 3 pois também estimamos os parâmetros d, D e a variância σ_ε^2 do ruído branco. Para encontrarmos o estimador de σ_ε^2 , isto é, a variância dos erros estimados, denotada por $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$, diferenciamos a série temporal pelo modelo ajustado obtendo os erros estimados, denotados por $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$ em seguida calculamos a sua variância.

Em geral, é difícil determinar o valor m sob todos os possíveis inteiros. Por isso, é indicado determinar à priori, o valor máximo M . O espaço de procura para o valor m é então $m \in \{0, 1, \dots, M\}$.

O cálculo da probabilidade $\mathbb{P}(X_t|\text{modelo})$ não é trivial. Muitas aproximações para esta probabilidade foram desenvolvidas na literatura. Todas as aproximações envolvem uma constante c^* multiplicando a função de máxima log-verossimilhança dado o modelo, denotada por $\ln(\mathbb{P}(X_t|\text{modelo}, \hat{\boldsymbol{\eta}}))$, onde $\hat{\boldsymbol{\eta}} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \dots, \hat{\Phi}_P, \hat{d}, \hat{D}, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q, \hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \dots, \hat{\Theta}_Q, \hat{\sigma}_\varepsilon^2)$ é o vetor de parâmetros estimados do modelo mais uma função penalizadora, denotada por \mathcal{L} , isto é,

$$\ln(\mathbb{P}(X_t|\text{modelo})) \simeq c^* \ln(\mathbb{P}(X_t|\text{modelo}, \hat{\boldsymbol{\eta}})) + \mathcal{L}. \quad (5.27)$$

Se assumirmos que os erros são independentes e identicamente distribuídos com distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, temos que

$$\begin{aligned} \ln(\mathbb{P}(X_t|\text{modelo}, \hat{\boldsymbol{\eta}})) &= \ln \left(\prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp \left[-\frac{\hat{\varepsilon}_t^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right] \right) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma_\varepsilon^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2, \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde $\{\hat{\varepsilon}_t\}_{t=1}^n$ são os erros estimados.

Tendo os erros estimados, o estimador de σ_ε^2 , denotado por $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$, pode ser calculado por

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2. \quad (5.29)$$

Portanto,

$$\ln(\mathbb{P}(X_t|\text{modelo}, \hat{\boldsymbol{\eta}})) = -\frac{n}{2} \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) - \frac{n}{2} (1 + \ln(2\pi)). \quad (5.30)$$

Substituindo a equação (5.30) na equação (5.27) e eliminando os termos constantes, temos que

$$\ln(\mathbb{P}(X_t|\text{modelo})) \simeq -c^* \frac{n}{2} \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + \mathcal{L}. \quad (5.31)$$

1) Critério de Informação de Akaike (AIC)

Akaike (1973) utilizou a aproximação dada pela expressão (5.31) com $c^* = -2$ e função penalizadora $\mathcal{L} = 2m$.

Desta forma, temos

$$\text{AIC}(m) = n \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + 2m. \quad (5.32)$$

A melhor ordem para o modelo é escolhida para o valor $m = p + P + q + Q + 3$, tal que $\text{AIC}(m)$ é mínimo.

2) Critério Bayesiano de Schwartz (SBC)

Schwartz (1978), utilizando a aproximação dada pela expressão (5.31) com $c^* = 1$ e função penalizadora $\mathcal{L} = -\frac{m}{2} \ln(n)$ sugere escolher o modelo cuja ordem minimiza o critério

$$\text{SBC}(m) = n \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + m \ln(n), \quad (5.33)$$

onde $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ é dado pela expressão (5.29).

3) Critério de Hannan e Quinn (HQC)

Hannan e Quinn (1979), fazendo uso da aproximação dada pela expressão (5.31) com $c^* = 1$ e função penalizadora $\mathcal{L} = -m \ln(\ln(n))$ sugerem minimizar a quantidade

$$\text{HQC}(m) = n \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + \frac{2m \ln(\ln(n))}{n}, \quad (5.34)$$

onde $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ é dado pela expressão (5.29).

Observação 5.1. Para tamanhos amostrais n pequenos, os critérios BIC e HQC penalizam menos um parâmetro adicional do modelo do que o critério AIC. No entanto, para tamanhos amostrais grandes, os critérios BIC e HQC penalizam mais quando um parâmetro adicional é acrescido ao modelo. Isto mostra que o critério AIC tende a selecionar um maior valor de m do que os critérios BIC e HQC. De fato, o critério AIC é não consistente e viciado, selecionando valores maiores da ordem m .

A presença de *outliers* em um processo afeta o desempenho dos critérios de seleção de modelos. Para limitar este efeito, Le et al. (1996) introduziram um critério de seleção de modelo robusto chamado filtro de Kalman robusto. Os autores demonstram que este critério comporta-se bem quando *outliers* aditivos estão presentes mas não testam estes critérios para *outliers* inovadores.

Palardy (2002), considerando apenas os processos $AR(p)$, estabelece um critério de seleção alternativo quando *outliers* estão presentes no processo. Este autor utiliza um estimador robusto ao invés dos estimadores semiparamétricos e paramétricos para a estimação da variância do erro. O estimador utilizado por Palardy (2002) é o estimador MM , proposto por Yohai (1987).

Os critérios de seleção de modelos robustos, propostos por Palardy (2002) para os processos $AR(p)$, são aqui estendidos para os processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ e são dados por

$$AICR(m) = n \ln(S^2) + 2m$$

$$BICR(m) = n \ln(S^2) + m \ln(n)$$

$$HQCR(m) = \ln(S^2) + \frac{2m \ln(\ln(n))}{n},$$

onde S^2 é o estimador robusto para a variância do erro, isto é, é a variância dos erros estimados obtidos diferenciando-se a série temporal pelo modelo cujos parâmetros foram estimados utilizando-se as metodologias robustas MM e MQP .

Capítulo 6

Simulação

Neste capítulo apresentamos o método de simulação dos processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ e a estimação dos seus parâmetros para dados simulados.

Para gerarmos realizações dos processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ podemos utilizar a representação média móvel infinita (ver expressão (3.76)) com apropriado ponto de truncamento. Por ser um processo complexo, este ponto de truncamento da expressão em (3.76) deve ser muito grande. Gray et al. (1989) utilizam a representação média móvel infinita dos processos Gegenbauer (ver Definição 2.6) para gerar realizações dos mesmos, truncando esta representação em 290.000 valores. Esta forma de gerar as realizações de um processo estocástico consome muito tempo computacional e a precisão depende de quão rápido os coeficientes da representação média móvel infinita convergem à zero.

Ramsey (1974) mostra que, para algum processo linear generalizado $Y_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j \mathcal{B}^j(\varepsilon_t)$ com média zero, onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco, a esperança e a variância condicionais de $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dadas as observações passadas até o tempo $t - 1$, Y_k , $k < t$, são dadas por

$$m_t \equiv \mathbb{E}(Y_t | Y_k, k < t) = \sum_{h=1}^t \phi_Y(t, h) Y_{t-h} \quad (6.1)$$

$$v_t \equiv \text{Var}(Y_t | Y_k, k < t) = \gamma_Y(0) \prod_{j=1}^t (1 - \phi_Y(j, j))^2, \quad (6.2)$$

onde $\gamma_Y(\cdot)$ é a função de autocovariância e $\phi_Y(\cdot, \cdot)$ é a função de autocorrelação parcial do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

A função de autocorrelação parcial do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser obtida utilizando o algoritmo recursivo de Durbin-Levinson, dado por

$$\phi_Y(t, t) = \frac{N_t}{D_t}, \quad (6.3)$$

$$\phi_Y(t, j) = \phi_Y(t-1, j) - \phi_Y(t, t)\phi_Y(t-1, t-j), \quad j = 1, \dots, t-1, \quad (6.4)$$

onde

$$N_0 = 0, \quad D_0 = 1,$$

$$N_t = \rho_Y(t) - \sum_{j=1}^{t-1} \phi_Y(t-1, j)\rho_Y(t-j)$$

e

$$D_t = D_{t-1} - \frac{N_{t-1}^2}{D_{t-1}},$$

com $\rho_Y(\cdot)$ a função de autocorrelação do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver Box e Jenkins, 1994 e Brockwell e Davis, 1991).

Hosking (1984), sugere outro procedimento para gerar realizações de um processo ARFIMA(p,d,q) baseado no algoritmo (6.3)-(6.4). Ford (1991) adapta este procedimento para os processos Gegenbauer e depois Woodward et al. (1998) o fazem para os processos k -Factor GARMA. Para gerarmos as realizações dos processos SARFIMA $(0, d, 0) \times (0, D, 0)_s$ utilizamos a técnica sugerida por Woodward et al. (1998), para os processos k -Factor GARMA. Calculamos a função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ dos processos SARFIMA $(0, d, 0) \times (0, D, 0)_s$ através da transformada de Fourier da função densidade espectral, isto é,

$$\gamma_Y(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f_Y(w) \cos(kw) dw, \quad (6.5)$$

onde $f_Y(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo SARFIMA $(0, d, 0) \times (0, D, 0)_s$, dada pela equação (3.9) e a integral em (6.5) é obtida numericamente.

Os itens v) dos Teoremas 3.1 e 3.2 fornecem expressões para as funções de autocovariância dos processos SARFIMA $(0, d, 0) \times (0, D, 0)_s$ e SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, respectivamente, baseadas na representação média móvel infinita. Utilizar estas expressões para calcular a função de autocovariância destes processos consumiria tempo computacional muito alto. Por este motivo utilizamos a transformada de Fourier dada em (6.5).

A seguir, descrevemos o procedimento utilizado para gerar as realizações de um processo SARFIMA $(0, d, 0) \times (0, D, 0)_s$.

Passo 1. Obtemos a função de autocovariância calculando a transformada de Fourier da função densidade espectral do processo (ver equação (6.5)).

Passo 2. Geramos um processo ruído branco com distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Passo 3. Utilizamos o algoritmo recursivo de Durbin-Levinson, dado em (6.3)-(6.4), para obter a função de autocorrelação parcial baseada na função de autocorrelação. Então, calculamos m_t e v_t dados nas expressões (6.1) e (6.2), respectivamente.

Passo 4. Geramos, para cada $t \in \{1, \dots, n\}$, o valor Y_t com distribuição $\mathcal{N}(m_t, v_t)$.

As realizações de um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ podem ser geradas usando o mesmo procedimento descrito anteriormente. Neste caso, necessitamos calcular a transformada de Fourier da expressão (3.32). Este método não deve ser preferível pois, segundo Ford (1991), o algoritmo recursivo de Durbin-Levinson pode acumular erros causados pelas funções de autocorrelações. Neste caso, para gerarmos realizações dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, usamos a técnica sugerida por Hosking (1984) a qual decompõe o processo em uma componente com longa dependência e longa dependência sazonal e um componente ARMA sazonal. Em termos dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com este método de decomposição, o processo pode ser reescrito como

$$\Phi(\mathcal{B}^s)\phi(\mathcal{B})X_t = \Theta(\mathcal{B}^s)\theta(\mathcal{B})Y_t,$$

onde $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$ dado pela equação (3.2), o qual é gerado pelo procedimento anterior. As realizações do processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ podem então ser simuladas usando a equação recursiva

$$X_t = \sum_{l=0}^Q \sum_{m=0}^q \Theta_l \theta_m \mathcal{B}^{sl+m}(Y_t) - \sum_{r=1}^P \sum_{j=0}^p \Phi_r \phi_j \mathcal{B}^{sr+j}(X_t) - \sum_{j=1}^p \phi_j \mathcal{B}^j(X_t),$$

onde $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$.

A seguir, apresentamos os resultados de simulação de Monte Carlo para os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ (ver Definição 3.2) com média $\mu = 0$, para diferentes valores de d, D, P, p, Q, q , tamanho amostral e sazonalidade s . A variância do processo ruído branco é considerada $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ em todas as simulações. Comparamos o desempenho dos estimadores semiparamétricos *GPH*, *R*, *SR*, *SPR* e *GPHT* segundo a metodologia *MQ* e suas versões robustas *MM* e *MQP* com o estimador paramétrico *W* proposto por Fox e Taqqu (1986).

Os resultados são baseados em 1000 replicações, com séries sazonais geradas utilizando o algoritmo de Durbin-Levinson dado nas equações (6.3)-(6.4).

Para os estimadores semiparamétricos consideramos $g(n) = n^\alpha$, com $\alpha \in \{0.74, 0.76, \dots, 0.88, 0.8996\}$. Consideramos o valor $\alpha = 0.8996$, pois neste caso estamos considerando todas as frequências na estimação semiparamétrica.

6.1 Estimação sem Contaminação

Nesta seção, apresentamos os resultados da estimação dos parâmetros dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ gerados a partir do procedimento mencionado anteriormente. Nesta seção os processos não possuem contaminação por *outliers*.

Resultados da Estimação dos Processos

SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$

Apresentamos os resultados da estimação para os processos SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$ sem contaminação por *outliers*.

Por questão de espaço, estamos incluindo apenas as Tabelas 6.1 a 6.6 nesta seção. Estas tabelas referem-se aos casos $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s \in \{4, 7, 12\}$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\alpha = 0.8996$. Diversos outros casos foram considerados e as tabelas apresentando os resultados encontram-se no Anexo C. Foram calculados os valores empíricos da média, do vício e do erro quadrático médio (eqm). O vício e o erro quadrático médio de menor valor absoluto estão apresentados em negrito nas tabelas.

Analisando as Tabelas 6.1 a 6.6 e as Figuras 6.1 a 6.3 observamos que, aumentando o tamanho amostral de $n = 500$ para $n = 1000$, o erro quadrático médio dos estimadores diminui e ocorre uma sensível melhora nos seus desempenhos, isto é, o vício diminui.

O estimador com menor erro quadrático médio é o *SPR*, tanto para estimar o verdadeiro valor de D como para estimar d , independente do tamanho amostral e do valor de α . Para o estimador *SPR*, a metodologia MQ apresenta menor erro quadrático médio, seguida pela metodologia robusta MQP e por último a MM.

O estimador *SR*, sob todas as metodologias, é bastante competitivo com o estimador *SPR*, do ponto de vista de menor erro quadrático médio para ambos os tamanhos amostrais e todos os valores de s .

Quanto a estimativa do parâmetro de longa dependência sazonal, denotado por D , os estimadores *SR*, *SPR* e *GPHT*, superestimam bastante o verdadeiro valor, em todas as metodologias (isto é, MQ, MM e MQP) e para todos os valores de $s \in \{4, 5, 6, 7, 12\}$. Os estimadores *GPH* e *R*, utilizando as metodologias MQ e MQP, superestimam o verdadeiro valor de D enquanto que, utilizando a metodologia MM, subestimam o verdadeiro valor de D para todos os valores de s .

Analisando as estimativas para o parâmetro de longa dependência, denotado por d , todos os estimadores, utilizando a metodologia MM, subestimam o seu verdadeiro valor, para $n \in \{500, 1000\}$ e $s \in \{4, 5, 6, 7, 12\}$. O estimador *SPR*, independente da metodologia utilizada (isto é, MQ, MM e MQP), subestima o verdadeiro valor de d em todos os casos analisados. Para $n = 500$ e $s \in \{4, 5, 6\}$, os estimadores *GPH*, *R* e *GPHT*, utilizando a metodologia MQ, superestimam o verdadeiro valor. Utilizando a metodologia MQP, os estimadores *GPH*, *R* e *GPHT* superestimam o parâmetro enquanto que o estimador *SR* subestima o verdadeiro valor do parâmetro. O estimador *SR*, utilizando a metodologia MQ, superestima o verdadeiro valor de d para $s \in \{4, 5\}$ e subestima quando $s = 6$. Para $s \in \{7, 12\}$, apenas o estimador *GPHT*, utilizando a metodologia MQ, superestimou o verdadeiro valor de d , todos os outros estimadores subestimaram o parâmetro d . Para $n = 1000$, os estimadores *GPH*, *R* e *GPHT*, utilizando a metodologia MQ, superestimaram o verdadeiro valor de d para todos os valores de s , com exceção do estimador *GPHT* quando $s = 7$.

Na metodologia *MQP*, quando $s = \{4, 7, 12\}$, todos os estimadores subestimaram o verdadeiro valor de d . Para $s = 5$ somente o estimador *GPH* superestimou o verdadeiro valor. Para $s = 6$ somente os estimadores *GPH*, *R* e *GPHT* superestimaram o verdadeiro valor de d .

Quando s aumenta, o erro quadrático médio dos estimadores semiparamétricos sofre um pequeno aumento, ocorrendo o mesmo com o vício.

O erro quadrático médio dos estimadores semiparamétricos diminui com o aumento do valor de $\alpha \in \{0.74, 0.76, \dots, 0.88, 0.8996\}$. Analisando o vício em função dos valores de α , quando $\alpha \in \{0.74, 0.76, \dots, 0.80\}$, quanto maior o valor de α , menor o vício. Para $\alpha \in \{0.80, 0.82, \dots, 0.8996\}$, o vício sofre pouca variação.

Tabela 6.1: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SAR-FIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 4$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

n = 500						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3042	0.1012	0.2955	0.0970	0.3008	0.1020
vício	0.0042	0.0012	-0.0045	-0.0030	0.0008	0.0020
eqm	0.0029	0.0023	0.0058	0.0048	0.0034	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3036	0.1003	0.2951	0.0975	0.3008	0.1016
vício	0.0036	0.0003	-0.0049	-0.0025	0.0008	0.0016
eqm	0.0031	0.0030	0.0061	0.0057	0.0036	0.0033
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3150	0.0997	0.3114	0.0962	0.3131	0.0965
vício	0.0150	-0.0003	0.0114	-0.0038	0.0131	-0.0035
eqm	0.0022	0.0018	0.0039	0.0031	0.0031	0.0025
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3100	0.0923	0.3080	0.0940	0.3110	0.0940
vício	0.0100	-0.0077	0.0080	-0.0060	0.0110	-0.0060
eqm	0.0020	0.0015	0.0035	0.0027	0.0029	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3129	0.1024	0.3006	0.0963	0.3085	0.1015
vício	0.0129	0.0024	0.0006	-0.0037	0.0085	0.0015
eqm	0.0043	0.0036	0.0078	0.0063	0.0048	0.0041
n = 1000						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3030	0.1008	0.2969	0.0974	0.3011	0.0996
vício	0.0030	0.0008	-0.0031	-0.0026	0.0011	-0.0004
eqm	0.0013	0.0011	0.0027	0.0027	0.0015	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3027	0.1004	0.2952	0.0972	0.3004	0.1000
vício	0.0027	0.0004	-0.0048	-0.0028	0.0004	0.0000
eqm	0.0013	0.0013	0.0032	0.0031	0.0017	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3095	0.0986	0.3064	0.0986	0.3077	0.0986
vício	0.0095	-0.0014	0.0064	-0.0014	0.0077	-0.0014
eqm	0.0010	0.0008	0.0017	0.0016	0.0013	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3071	0.0951	0.3053	0.0974	0.3069	0.0964
vício	0.0071	-0.0049	0.0053	-0.0026	0.0069	-0.0036
eqm	0.0009	0.0007	0.0017	0.0014	0.0013	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3071	0.1002	0.2996	0.0953	0.3064	0.0983
vício	0.0071	0.0002	-0.0004	-0.0047	0.0064	-0.0017
eqm	0.0020	0.0019	0.0038	0.0037	0.0023	0.0021

Tabela 6.2: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	n = 500		n = 1000	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.2731	0.0957	0.2882	0.0970
vício	-0.0269	-0.0043	-0.0118	-0.0030
eqm	0.0040	0.0015	0.0017	0.0007

Tabela 6.3: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SAR-FIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 7$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3019	0.0985	0.2972	0.0946	0.3020	0.0958
vício	0.0019	-0.0015	-0.0028	-0.0054	0.0020	-0.0042
eqm	0.0031	0.0023	0.0065	0.0047	0.0034	0.0029
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.3020	0.0987	0.2970	0.0933	0.3028	0.0956
vício	0.0020	-0.0013	-0.0030	-0.0067	0.0028	-0.0044
eqm	0.0033	0.0029	0.0070	0.0065	0.0038	0.0038
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3236	0.0971	0.3231	0.0958	0.3228	0.0967
vício	0.0236	-0.0029	0.0231	-0.0042	0.0228	-0.0033
eqm	0.0026	0.0020	0.0042	0.0033	0.0034	0.0028
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3177	0.0880	0.3202	0.0927	0.3213	0.0931
vício	0.0177	-0.0120	0.0202	-0.0073	0.0213	-0.0069
eqm	0.0022	0.0018	0.0041	0.0031	0.0033	0.0024
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3168	0.1004	0.3068	0.0946	0.3146	0.0981
vício	0.0168	0.0004	0.0068	-0.0054	0.0146	-0.0019
eqm	0.0049	0.0037	0.0084	0.0064	0.0055	0.0042
$n = 1000$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3013	0.1007	0.2988	0.0966	0.3015	0.0996
vício	0.0013	0.0007	-0.0012	-0.0034	0.0015	-0.0004
eqm	0.0014	0.0012	0.0029	0.0026	0.0016	0.0014
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.3012	0.1006	0.2980	0.0971	0.3013	0.0985
vício	0.0012	0.0006	-0.0020	-0.0029	0.0013	-0.0015
eqm	0.0015	0.0014	0.0031	0.0031	0.0018	0.0017
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3155	0.0992	0.3142	0.0977	0.3157	0.0977
vício	0.0155	-0.0008	0.0142	-0.0023	0.0157	-0.0023
eqm	0.0011	0.0009	0.0018	0.0016	0.0014	0.0012
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3124	0.0945	0.3129	0.0958	0.3140	0.0963
vício	0.0124	-0.0055	0.0129	-0.0042	0.0140	-0.0037
eqm	0.0010	0.0008	0.0018	0.0014	0.0014	0.0011
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3122	0.0993	0.3084	0.0955	0.3099	0.0983
vício	0.0122	-0.0007	0.0084	-0.0045	0.0099	-0.0017
eqm	0.0022	0.0017	0.0036	0.0032	0.0024	0.0020

Tabela 6.4: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFI-MA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$.

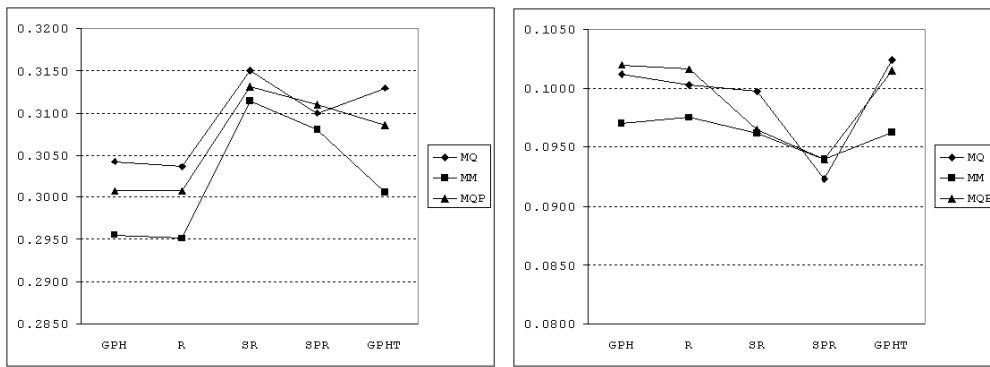
	$n = 500$		$n = 1000$	
	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W
média	0.2518	0.0922	0.2892	0.0952
vício	-0.0482	-0.0078	-0.0108	-0.0048
eqm	0.0050	0.0015	0.0011	0.0007

Tabela 6.5: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SAR-FIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 12$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

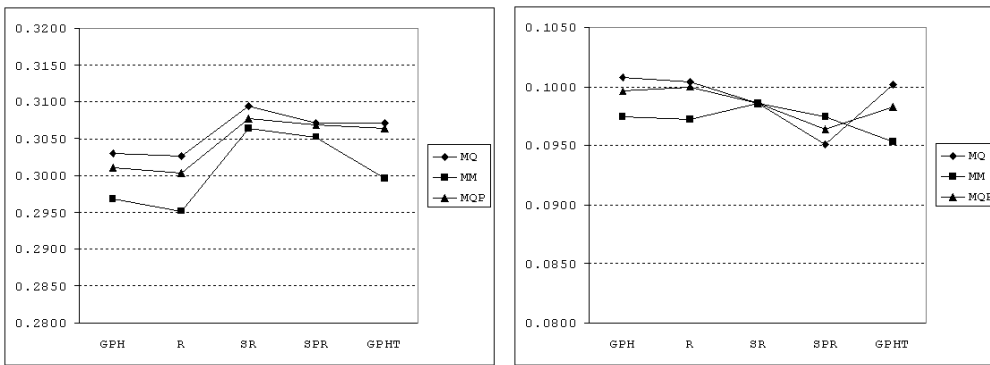
$n = 500$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3027	0.0997	0.2966	0.0954	0.3018	0.0989
vício	0.0027	-0.0003	-0.0034	-0.0046	0.0018	-0.0011
eqm	0.0038	0.0022	0.0074	0.0046	0.0042	0.0025
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.3024	0.0995	0.2971	0.0948	0.3018	0.0985
vício	0.0024	-0.0005	-0.0029	-0.0052	0.0018	-0.0015
eqm	0.0040	0.0031	0.0081	0.0057	0.0044	0.0034
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3326	0.0988	0.3337	0.0979	0.3337	0.0989
vício	0.0326	-0.0012	0.0337	-0.0021	0.0337	-0.0011
eqm	0.0034	0.0019	0.0054	0.0033	0.0048	0.0026
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3262	0.0887	0.3314	0.0939	0.3311	0.0941
vício	0.0262	-0.0113	0.0314	-0.0061	0.0311	-0.0059
eqm	0.0029	0.0016	0.0051	0.0028	0.0044	0.0022
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3285	0.1009	0.3204	0.0921	0.3265	0.0981
vício	0.0285	0.0009	0.0204	-0.0079	0.0265	-0.0019
eqm	0.0063	0.0036	0.0101	0.0063	0.0068	0.0040
$n = 1000$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3033	0.1016	0.2974	0.0969	0.3025	0.0998
vício	0.0033	0.0016	-0.0026	-0.0031	0.0025	-0.0002
eqm	0.0015	0.0011	0.0034	0.0025	0.0017	0.0012
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.3030	0.1012	0.2973	0.0976	0.3030	0.0993
vício	0.0030	0.0012	-0.0027	-0.0024	0.0030	-0.0007
eqm	0.0015	0.0014	0.0036	0.0028	0.0019	0.0016
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3219	0.0998	0.3205	0.0990	0.3225	0.0986
vício	0.0219	-0.0002	0.0205	-0.0010	0.0225	-0.0014
eqm	0.0015	0.0008	0.0025	0.0015	0.0020	0.0011
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3188	0.0948	0.3193	0.0971	0.3207	0.0966
vício	0.0188	-0.0052	0.0193	-0.0029	0.0207	-0.0034
eqm	0.0013	0.0007	0.0024	0.0013	0.0018	0.0010
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3155	0.1013	0.3077	0.0980	0.3135	0.0998
vício	0.0155	0.0013	0.0077	-0.0020	0.0135	-0.0002
eqm	0.0024	0.0017	0.0041	0.0032	0.0027	0.0021

Tabela 6.6: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFI-MA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W
média	0.2271	0.0886	0.2889	0.0953
vício	-0.0729	-0.0114	-0.0111	-0.0047
eqm	0.0079	0.0015	0.0014	0.0007



(a)



(b)

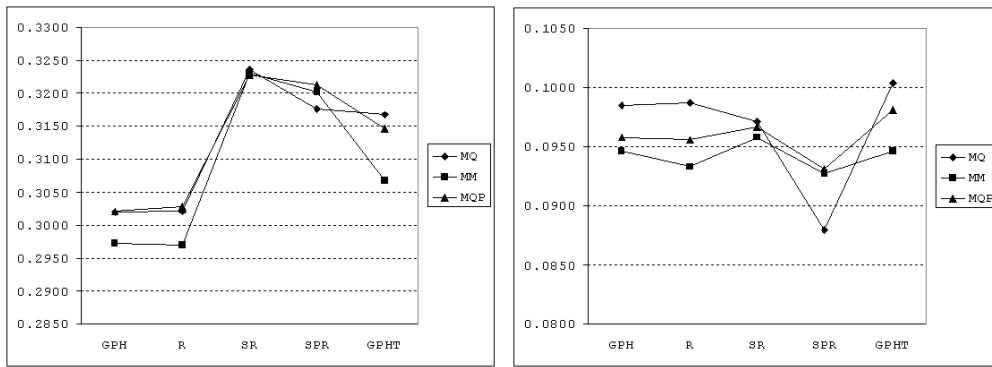
Figura 6.1: Vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP), $s = 4$ e $\ell = 5$. Os gráficos da esquerda são para $D = 0.3$ e os da direita para $d = 0.1$: (a) $n = 500$ e (b) $n = 1000$.

Os estimadores semiparamétricos de D possuem maiores vício e erro quadrático médio em comparação aos estimadores semiparamétricos de d , independentemente da metodologia utilizada.

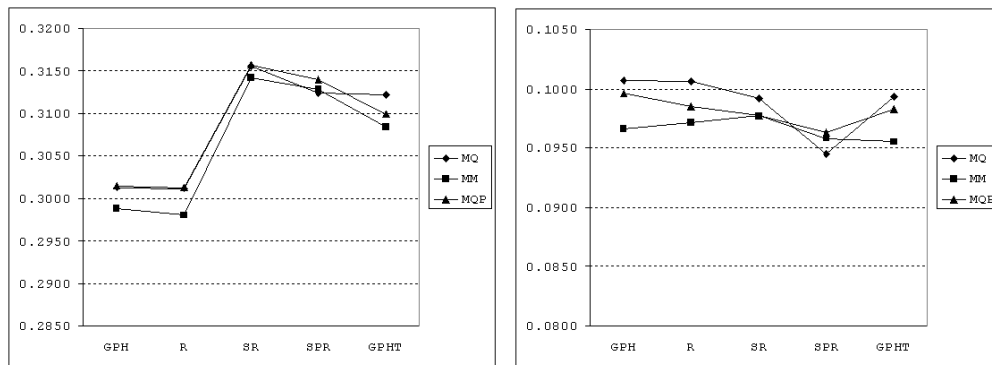
O estimador $GPHT$ possui maior erro quadrático médio ao estimar os verdadeiros valores de d e D , em todas as metodologias. Em geral, o estimador SR possui maior vício também independente da metodologia utilizada (isto é, MQ, MM e MQP).

Analisando o estimador paramétrico W , notamos que quando o tamanho amostral aumenta, o erro quadrático médio e o vício diminuem. Para $n = 500$, o erro quadrático médio do estimador W para D aumenta quando s aumenta. Já o erro quadrático médio do estimador W para d sofre pouca alteração quando a sazonalidade s aumenta.

Comparando o estimador paramétrico W com os estimadores semiparamétricos, quanto ao erro quadrático médio, para $n = 500$ este estimador possui maior erro quadrático médio do que os estimadores GPH , R , SR e



(a)

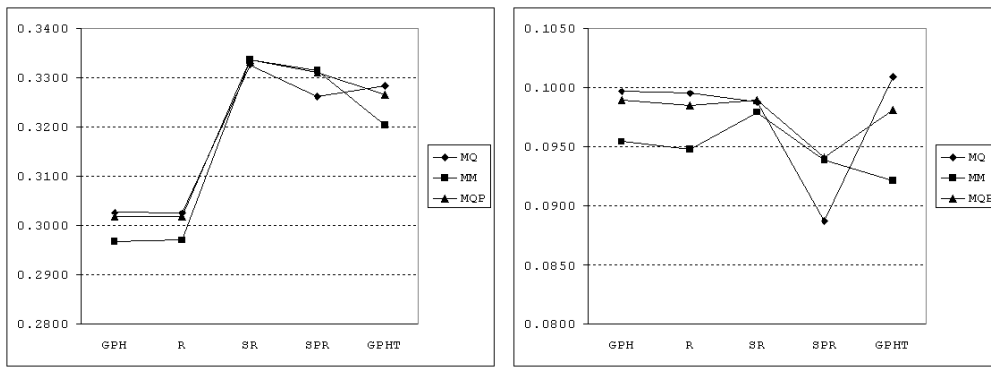


(b)

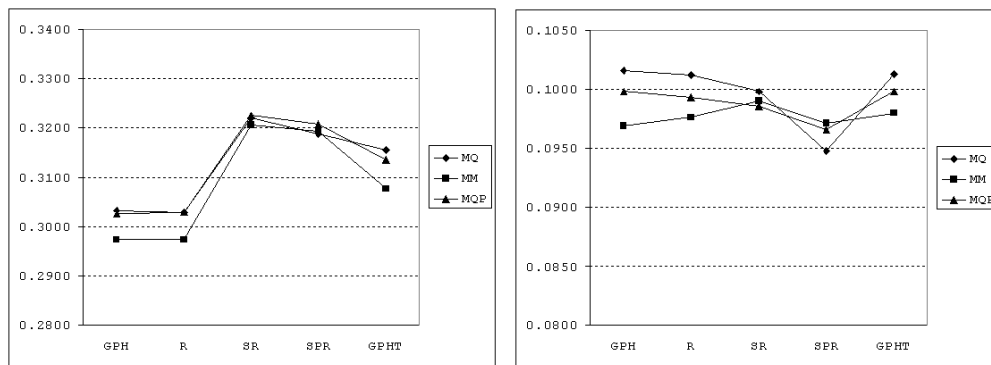
Figura 6.2: Vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP), $s = 7$ e $\ell = 5$. Os gráficos da esquerda são para $D = 0.3$ e os da direita para $d = 0.1$: (a) $n = 500$ e (b) $n = 1000$.

SPR utilizando as metodologias MQ e MQP. O estimador W possui menor erro quadrático médio em relação a todos os estimadores semiparamétricos, utilizando a metodologia robusta MM e em relação ao estimador $GPHT$ (com as metodologias MQ e MQP). Quando a sazonalidade s aumenta, o estimador GPH (MQ e MQP) tende a diminuir o erro quadrático médio passando assim a ter menor erro quadrático médio que o estimador W . Nas estimativas de d , o estimador W possui menor erro quadrático médio quando comparado com todos os estimadores semiparamétricos aqui considerados. Para $n = 1000$, apenas o estimador SPR com a metodologia MQ é competitivo com o estimador W . O restante dos estimadores possui maior erro quadrático médio, independente da sazonalidade s aqui considerada.

No caso do vício, para $n = 500$, o estimador W como estimativas para D possui maior vício quando comparado com todos os estimadores semiparamétricos. Nas estimativas de d , o estimador W possui maior vício do que os estimadores GPH , R , SR e $GPHT$, independente da metodologia utilizada.



(a)



(b)

Figura 6.3: Vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP), $s = 12$ e $\ell = 5$. Os gráficos da esquerda são para $D = 0.3$ e os da direita para $d = 0.1$: (a) $n = 500$ e (b) $n = 1000$.

Nos caso do estimador SPR , para o valor de s pequeno, apenas na metodologia MQ ele possui maior vício do que o estimador W . Quando a sazonalidade s aumenta o estimador SPR nas metodologias MM e MQP tende a aumentar o vício tornando-se, assim, mais viciado do que o estimador W .

Para $n = 1000$, nas estimativas de D , apenas os estimadores GPH e R , independente da metodologia, e o estimador $GPHT$, na metodologia MM, possuem menor vício do que o estimador W . Todos os outros possuem maior vício. Nas estimativas de d , para sazonalidade pequena, apenas o estimador SPR , nas metodologias MQ e MQP, possui maior vício do que o estimador W . Os demais estimadores possuem menor vício quando comparados com o estimador W . Quando a sazonalidade aumenta, $s \in \{7, 12\}$, o estimador SPR , na metodologia MQP, tem seu vício diminuído passando, assim, a ter menor vício do que W .

Bisognin e Lopes (2007) obtiveram resultados simulares para os processos SARFIMA(0, D , 0) $_s$, enquanto Reisen e Lopes (1999) encontraram resulta-

dos similares para os processos ARFIMA(p, d, q). Estes trabalhos utilizam estimadores semiparamétricos apenas com a metodologia MQ. Os resultados aqui mencionados também estão de acordo com aqueles encontrados por Palma (2007) para os processos SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$. Palma (2007) utiliza o estimador de máxima verossimilhança exato W e o estimador baseado no Filtro de Kalman. Lopes e Mendes (2006), obtém resultados semelhantes, utilizando as metodologias robustas MM e MQP, para os processos ARFIMA(p, d, q).

Resultados da Estimação dos Processos

SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$

Nesta seção, apresentamos os resultados de simulação dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$. Investigamos o efeito na estimação dos parâmetros quando os coeficientes auto-regressivos e média móvel estão presente no modelo. Nestas simulações, assumimos que a ordem do modelo é conhecida e somente os parâmetros necessitam ser estimados. Consideramos o caso onde $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$ e $\theta_1 = 0.2$. Nestas simulações os estimadores semiparamétricos, em todas as metodologias (isto é, MQ, MM e MQP) apresentaram um grande vício. Isto se deve ao fato de que todos os estimadores necessitam que o modelo seja bem especificado. Hassler (1994) observou este fato com os processos SARFIMA($0, D, 0$) $_s$, com $s = 4$. este autor gerou um processo SARFIMA($1, D, 0$) $_s$, com $s = 4$ e $\Phi_1 = 0.5$, e observou que o vício do estimador semiparamétrico proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), denotado aqui por GPH , apresentou um vício muito grande.

Reisen et al. (2002) observaram o mesmo resultado para os processos ARFIMA(p, d, q). Ao analisarem os processos ARFIMA($1, d, 0$), ARFIMA($0, d, 1$) e ARFIMA($1, d, 1$), com os coeficientes ϕ_1 e θ_1 próximos da região de não-estacionariedade, os estimadores semiparamétricos apresentaram vício muito grande.

Ressaltamos aqui que os processos SARFIMA completos são de estrutura mais complexa com diversos parâmetros envolvidos no processo de estimação. Por este motivo, nas simulações envolvendo os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com coeficientes auto-regressivos e média móvel presentes no modelo, utilizamos somente o estimador paramétrico proposto por Fox e Taqqu (1986). O mesmo ocorre quando contaminamos as séries temporais com *outliers* do tipo AO e IO .

As Tabelas 6.7 a 6.12 apresentam o erro quadrático médio e o vício dos parâmetros de curta e longa dependência.

Processos SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$

Nesta seção apresentamos os resultados de simulação para os modelos SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$, com $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s \in \{4, 7, 12\}$ e

$n \in \{500, 1000\}$. No Anexo C encontram-se os resultados das simulações para a sazonalidade $s \in \{5, 6\}$.

Analisando as Tabelas 6.7 a 6.9, concluímos que o erro quadrático médio do estimador W , para todos os parâmetros, diminuem quando o tamanho amostral aumenta. Para o parâmetro de longa dependência d , o vício é sempre negativo, isto é, o estimador subestima o real valor do parâmetro. À medida que a sazonalidade e o tamanho amostral aumentam, o seu vício diminui. Para o parâmetro de longa dependência sazonal D , o estimador superestima o verdadeiro valor do parâmetro quando s é pequeno. Quando a sazonalidade s cresce, o estimador passa a subestimar o verdadeiro valor de D . Nas estimativas do parâmetro ϕ_1 , o estimador sempre superestima o verdadeiro valor do parâmetro. À medida que o tamanho amostral aumenta o erro quadrático médio e o vício diminuem. As estimativas de D possuem menor erro quadrático médio, seguidas pelas estimativas de ϕ_1 e por último as estimativas de d .

As estimativas dos parâmetros D e d , possuem maior erro quadrático médio nos resultados de simulação dos processos SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$ do que nos resultados de simulação dos processos aqui considerados.

Na maioria dos casos analisados, o vício dos parâmetros d e D é parcialmente compensado pelo vício do parâmetro ϕ_1 .

Tabela 6.7: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(1, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.2141	0.1358	0.7383	0.2299	0.1585	0.7227
vício	0.0141	-0.0642	0.0383	0.0299	-0.0415	0.0227
eqm	0.0039	0.0167	0.0109	0.0025	0.0073	0.0047

Tabela 6.8: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(1, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1906	0.1438	0.7299	0.2329	0.1467	0.7355
vício	-0.0094	-0.0562	0.0299	0.0329	-0.0533	0.0355
eqm	0.0044	0.0183	0.0127	0.0025	0.0081	0.0051

Processos SARFIMA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$

Nesta seção apresentamos os resultados de simulação para os modelos SARFIMA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$, com $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s \in \{4, 7, 12\}$ e $n \in \{500, 1000\}$. Os resultados das simulações quando a sazonalidade $s \in \{5, 6\}$ encontram-se no Anexo C.

Tabela 6.9: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(1, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1414	0.1695	0.7088	0.1902	0.1730	0.7144
vício	-0.0586	-0.0305	0.0088	-0.0098	-0.0270	0.0144
eqm	0.0092	0.0175	0.0134	0.0028	0.0093	0.0071

Analisando as Tabelas 6.10 a 6.12, observamos que, o aumento no tamanho amostral causa uma diminuição no erro quadrático médio. Isto ocorre nas estimativas de todos os parâmetros. Na maioria dos casos analisados o erro quadrático médio é maior para a sazonalidade $s = 7$, com exceção das estimativas dos parâmetros D , para $n = 500$, e ϕ_1 , para $n = 1000$, onde o erro quadrático médio é maior para $s = 12$. As estimativas de D possuem menor erro quadrático médio, seguida das estimativas de ϕ_1 e θ_1 , respectivamente e por último pela de d . Este resultado também foi observado para o vício.

Quanto ao vício, na maioria dos casos analisados, ele diminui quando o tamanho amostral aumenta. A exceção da estimativa de D , para $s = 4$.

O vício das estimativas de D , d e ϕ_1 é maior nos processos SARFIMA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$ do que nos processos SARFIMA(1, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$. Nas estimativas do parâmetro ϕ_1 , o estimador W superestima o verdadeiro valor do parâmetro enquanto que, nas estimativas dos demais parâmetros o estimador subestima o verdadeiro valor do parâmetro que está sendo estimado. As estimativas do parâmetro d apresentam maior vício.

Podemos dizer que, na grande maioria dos casos, o vício dos parâmetros d e D é parcialmente compensado pelo vício do parâmetro ϕ_1 e θ_1 .

Tabela 6.10: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1935	0.0289	0.8063	0.1477	0.2099	0.1033	0.7651	0.1723
vício	-0.0065	-0.1711	0.1063	-0.0523	0.0099	-0.0967	0.0651	-0.0277
eqm	0.0035	0.1283	0.0368	0.0930	0.0017	0.0705	0.0159	0.0525

Tabela 6.11: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFI-MA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1738	0.0132	0.8084	0.1314	0.2154	0.0907	0.7771	0.1725
vício	-0.0262	-0.1868	0.1084	-0.0686	0.0154	-0.1093	0.0771	-0.0275
eqm	0.0038	0.1267	0.0214	0.0739	0.0015	0.0723	0.0168	0.0512

Tabela 6.12: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFI-MA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1311	0.0429	0.7841	0.1369	0.1784	0.1079	0.7597	0.1728
vício	-0.0689	-0.1571	0.0841	-0.0631	-0.0216	-0.0921	0.0597	-0.0272
eqm	0.0088	0.1218	0.0366	0.0759	0.0021	0.0676	0.0178	0.0439

6.2 Estimação com Contaminação por Mistura

Nesta seção apresentamos os resultados de simulação para a estimação dos parâmetros dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ contaminados por *outliers*.

Comparamos o desempenho dos estimadores semiparamétricos *GPH*, *R*, *SR*, *SPR*, *GPHT* segundo a metodologia *MQ* e suas versões robustas *MM* e *MQP* com o estimador paramétrico *W* proposto por Fox e Taqqu (1986). A comparação é realizada quando os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ são contaminados utilizando o modelo de contaminação por mistura com *outliers*.

Os resultados são baseados em 1000 replicações, com séries sazonais geradas utilizando o algoritmo de Durbin-Levinson e contaminadas pelo modelo de contaminação por mistura com *outliers* dos tipos *AO* e *IO* (ver Definições 4.3 e 4.4, respectivamente).

***Outlier* Aditivo**

Resultados da Estimação dos Processos

SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) _{s}

Apresentamos os resultados de estimação para os processos SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) _{s} com contaminação por mistura por *outlier* do tipo *AO*.

As Tabelas 6.13 a 6.18 referem-se aos casos em que $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s \in \{4, 7, 12\}$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\alpha = 0.8996$, isto é, todas as frequências de Fourier são selecionadas na estimação semiparamétrica. Diversos outros casos foram considerados e as tabelas apresentando os resultados encontram-se no Anexo C. As séries temporais foram contaminadas por dois *outliers* *AO*. O aumento do número de *outliers* na série temporal causa uma significativa piora na estimação dos parâmetros d e D , isto é, um aumento no vício e no erro quadrático médio.

Crato e Ray (2006), Sun e Phillips (2003) e Arteche (2006) detectam que o vício dos estimadores semiparamétricos é grande em séries temporais com longa dependência não sazonais quando contaminadas por um ruído adicional se este não for levado em consideração durante a estimação dos parâmetros do modelo. Por este motivo, consideramos séries temporais contaminadas com poucos *outliers*.

Analisando as Tabelas 6.13 a 6.18 e as Figuras 6.4 a 6.6 observamos que, quando ocorre um aumento no tamanho amostral n , o erro quadrático médio e o vício diminuem.

O estimador de menor erro quadrático médio é o *SPR*, tanto para estimar o parâmetro D , como para o parâmetro d , independente do tamanho amostral n e dos valores de s e α . Para o estimador *SPR*, a metodologia MQ apresenta menor erro quadrático médio, seguida pela metodologia robusta MQP e por último a MM.

O estimador *SR*, independente da metodologia utilizada, e o estimador *GPH*, utilizando as metodologias MQ e MQP, são competitivos com o estimador *SPR*, do ponto de vista de menor erro quadrático médio, independente do tamanho amostral e dos valores da sazonalidade s .

Estes resultados foram observados nas estimativas dos parâmetros d e D quando os processos não possuíam contaminação por *outliers*.

Quando as séries temporais são contaminadas por *outliers* do tipo *AO* o erro quadrático médio dos estimadores semiparamétricos aumenta. Este aumento é maior para as estimativas do parâmetro D do que para as estimativas do parâmetro d . Este aumento ocorre em ambos os tamanhos amostrais analisados e para todos os valores da sazonalidade s aqui considerados.

Quanto as estimativas do parâmetro de longa dependência sazonal, denotado por D , a maioria dos estimadores subestima o seu verdadeiro valor com exceção do estimador *SR*, utilizando as metodologias MQ e MQP.

Tabela 6.13: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 4$, $n \in \{500, 1000\}$, $\ell = 5$ com contaminação por *outlier AO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2655	0.0925	0.2545	0.0900	0.2658	0.0918
vício	-0.0345	-0.0075	-0.0455	-0.0100	-0.0342	-0.0082
eqm	0.0048	0.0025	0.0092	0.0049	0.0051	0.0029
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2621	0.0867	0.2522	0.0845	0.2624	0.0881
vício	-0.0379	-0.0133	-0.0478	-0.0155	-0.0376	-0.0119
eqm	0.0055	0.0035	0.0103	0.0064	0.0058	0.0039
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2794	0.0861	0.2709	0.0868	0.2746	0.0867
vício	-0.0206	-0.0139	-0.0291	-0.0132	-0.0254	-0.0133
eqm	0.0034	0.0022	0.0066	0.0034	0.0046	0.0029
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2768	0.0828	0.2715	0.0882	0.2745	0.0883
vício	-0.0232	-0.0172	-0.0285	-0.0118	-0.0255	-0.0117
eqm	0.0032	0.0019	0.0060	0.0031	0.0042	0.0024
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2622	0.0878	0.2489	0.0786	0.2606	0.0845
vício	-0.0378	-0.0122	-0.0511	-0.0214	-0.0394	-0.0155
eqm	0.0071	0.0038	0.0123	0.0065	0.0076	0.0043
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2817	0.0973	0.2758	0.0925	0.2804	0.0971
vício	-0.0183	-0.0027	-0.0242	-0.0075	-0.0196	-0.0029
eqm	0.0020	0.0011	0.0041	0.0026	0.0023	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2803	0.0952	0.2748	0.0901	0.2803	0.0945
vício	-0.0197	-0.0048	-0.0252	-0.0099	-0.0197	-0.0055
eqm	0.0021	0.0013	0.0045	0.0031	0.0024	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2903	0.0928	0.2881	0.0927	0.2903	0.0918
vício	-0.0097	-0.0072	-0.0119	-0.0073	-0.0097	-0.0082
eqm	0.0012	0.0009	0.0021	0.0017	0.0017	0.0013
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2889	0.0909	0.2882	0.0931	0.2897	0.0921
vício	-0.0111	-0.0091	-0.0118	-0.0069	-0.0103	-0.0079
eqm	0.0012	0.0008	0.0021	0.0015	0.0016	0.0011
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2796	0.0934	0.2737	0.0880	0.2789	0.0924
vício	-0.0204	-0.0066	-0.0263	-0.0120	-0.0211	-0.0076
eqm	0.0029	0.0018	0.0053	0.0036	0.0032	0.0021

Tabela 6.14: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.2377	0.0888	0.2669	0.0939
vício	-0.0623	-0.0112	-0.0331	-0.0061
eqm	0.0082	0.0016	0.0029	0.0008

Tabela 6.15: Resultados da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 7$, $n \in \{500, 1000\}$, $\ell = 5$ com contaminação por *outlier AO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2600	0.0902	0.2526	0.0809	0.2628	0.0867
vício	-0.0400	-0.0098	-0.0474	-0.0191	-0.0372	-0.0133
eqm	0.0056	0.0024	0.0083	0.0048	0.0053	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2573	0.0854	0.2539	0.0791	0.2612	0.0871
vício	-0.0427	-0.0146	-0.0461	-0.0209	-0.0388	-0.0129
eqm	0.0062	0.0033	0.0090	0.0069	0.0059	0.0034
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2833	0.0857	0.2809	0.0858	0.2808	0.0842
vício	-0.0167	-0.0143	-0.0191	-0.0142	-0.0192	-0.0158
eqm	0.0032	0.0022	0.0048	0.0038	0.0041	0.0029
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2791	0.0795	0.2793	0.0838	0.2799	0.0830
vício	-0.0209	-0.0205	-0.0207	-0.0162	-0.0201	-0.0170
eqm	0.0031	0.0019	0.0046	0.0033	0.0038	0.0024
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2650	0.0829	0.2530	0.0725	0.2643	0.0808
vício	-0.0350	-0.0171	-0.0470	-0.0275	-0.0357	-0.0192
eqm	0.0070	0.0034	0.0127	0.0082	0.0075	0.0040
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2814	0.0950	0.2775	0.0900	0.2807	0.0944
vício	-0.0186	-0.0050	-0.0225	-0.0100	-0.0193	-0.0056
eqm	0.0019	0.0012	0.0038	0.0029	0.0023	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2805	0.0934	0.2763	0.0897	0.2806	0.0928
vício	-0.0195	-0.0066	-0.0237	-0.0103	-0.0194	-0.0072
eqm	0.0020	0.0014	0.0042	0.0033	0.0024	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2950	0.0920	0.2918	0.0912	0.2928	0.0923
vício	-0.0050	-0.0080	-0.0082	-0.0088	-0.0072	-0.0077
eqm	0.0012	0.0010	0.0022	0.0017	0.0016	0.0013
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2930	0.0891	0.2914	0.0907	0.2925	0.0917
vício	-0.0070	-0.0109	-0.0086	-0.0093	-0.0075	-0.0083
eqm	0.0012	0.0009	0.0021	0.0015	0.0016	0.0011
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2811	0.0906	0.2747	0.0852	0.2829	0.0890
vício	-0.0189	-0.0094	-0.0253	-0.0148	-0.0171	-0.0110
eqm	0.0028	0.0018	0.0053	0.0039	0.0030	0.0021

Tabela 6.16: Resultados da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.2097	0.0844	0.2595	0.0919
vício	-0.0903	-0.0156	0.0008	-0.0081
eqm	0.0117	0.0017	0.0030	0.0008

Tabela 6.17: Resultados da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 12$, $n \in \{500, 1000\}$, $\ell = 5$ com contaminação por *outlier AO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2646	0.0847	0.2671	0.0755	0.2644	0.0866
vício	-0.0354	-0.0153	-0.0329	-0.0245	-0.0356	-0.0134
eqm	0.0057	0.0026	0.0088	0.0066	0.0060	0.0028
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2622	0.0793	0.2645	0.0752	0.2657	0.0819
vício	-0.0378	-0.0207	-0.0355	-0.0248	-0.0343	-0.0181
eqm	0.0063	0.0039	0.0097	0.0077	0.0064	0.0040
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2954	0.0832	0.2967	0.0841	0.2979	0.0837
vício	-0.0046	-0.0168	-0.0033	-0.0159	-0.0021	-0.0163
eqm	0.0033	0.0024	0.0051	0.0035	0.0042	0.0030
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2906	0.0760	0.2950	0.0807	0.2963	0.0820
vício	-0.0094	-0.0240	-0.0050	-0.0193	-0.0037	-0.0180
eqm	0.0031	0.0021	0.0049	0.0031	0.0040	0.0027
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2749	0.0784	0.2667	0.0738	0.2752	0.0767
vício	-0.0251	-0.0216	-0.0333	-0.0262	-0.0248	-0.0233
eqm	0.0069	0.0038	0.0122	0.0065	0.0067	0.0042
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2832	0.0927	0.2800	0.0901	0.2826	0.0923
vício	-0.0168	-0.0073	-0.0200	-0.0099	-0.0174	-0.0077
eqm	0.0020	0.0011	0.0041	0.0025	0.0023	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2824	0.0914	0.2791	0.0897	0.2818	0.0910
vício	-0.0176	-0.0086	-0.0209	-0.0103	-0.0182	-0.0090
eqm	0.0021	0.0013	0.0042	0.0030	0.0024	0.0018
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3016	0.0910	0.2989	0.0882	0.3006	0.0898
vício	0.0016	-0.0090	-0.0011	-0.0118	0.0006	-0.0102
eqm	0.0013	0.0009	0.0023	0.0017	0.0018	0.0012
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2990	0.0870	0.2981	0.0876	0.2997	0.0884
vício	-0.0010	-0.0130	-0.0019	-0.0124	-0.0003	-0.0116
eqm	0.0012	0.0008	0.0022	0.0014	0.0017	0.0011
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2856	0.0882	0.2814	0.0833	0.2852	0.0876
vício	-0.0144	-0.0118	-0.0186	-0.0167	-0.0148	-0.0124
eqm	0.0028	0.0018	0.0055	0.0034	0.0031	0.0020

Tabela 6.18: Resultados da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1921	0.0774	0.2547	0.0876
vício	-0.1079	-0.0226	-0.0453	-0.0124
eqm	0.0148	0.0019	0.0033	0.0007

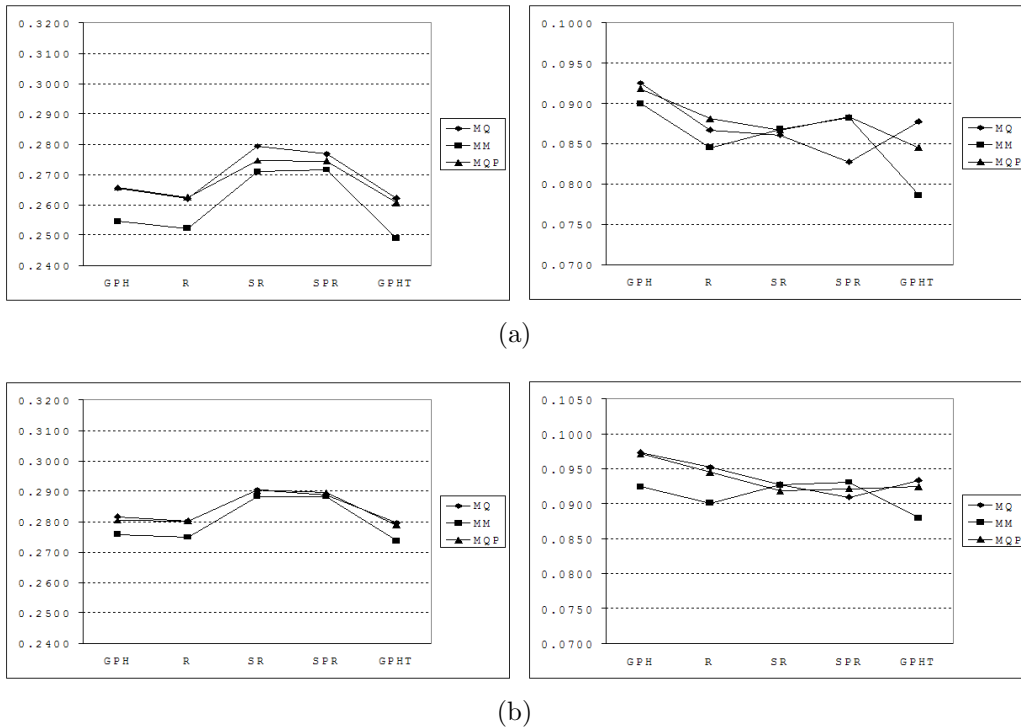


Figura 6.4: Vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, com contaminação por mistura com *outliers* do tipo AO, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP), $s = 4$ e $\ell = 5$. Os gráficos da esquerda são para $D = 0.3$ e os da direita para $d = 0.1$: (a) $n = 500$ e (b) $n = 1000$.

Os estimadores SR e SPR possuem menor vício ao estimar o verdadeiro valor do parâmetro D , independente do tamanho amostral e do valor de s .

Investigando as metodologias, a metodologia MM possui maior vício, com exceção para o estimador SPR , quando $n = 500$ e $s = 12$.

Analisando as estimativas do parâmetro de longa dependência, denotado por d , todos os estimadores subestimam o seu verdadeiro valor, independente da metodologia utilizada.

O estimador com menor vício é o estimador GPH , utilizando as metodologias MQ e MQP. Por outro lado, o estimador com maior vício é o estimador $GPHT$ com a metodologia MM.

Os estimadores semiparamétricos de D possuem maior vício e erro quadrático médio em comparação aos estimadores semiparamétricos de d , independente da metodologia utilizada.

Quando s aumenta, o vício dos estimadores semiparamétricos de d , sofrem um pequeno aumento enquanto que o erro quadrático médio permanece inalterado. Nas estimativas do parâmetro D , quando s aumenta, o erro quadrático médio permanece praticamente constante. Quanto ao vício, para os estimadores GPH , R e $GPHT$, independente da metodologia utilizada, há

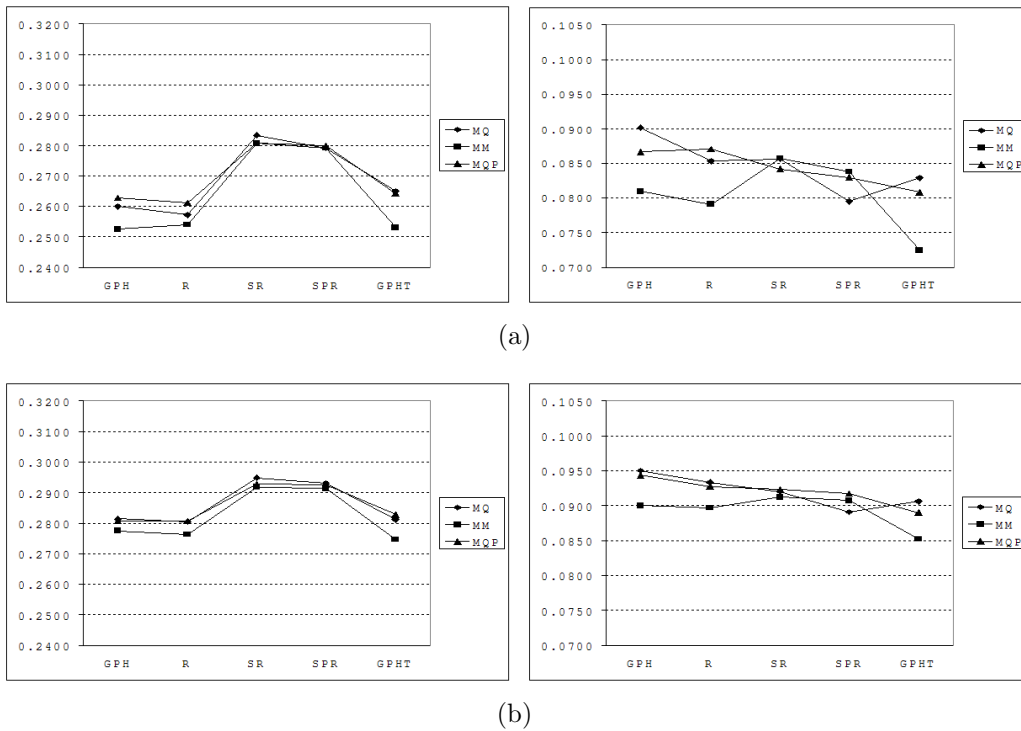


Figura 6.5: Vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, com contaminação por mistura com *outliers* do tipo *AO*, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP), $s = 7$ e $\ell = 5$. Os gráficos da esquerda são para $D = 0.3$ e os da direita para $d = 0.1$: (a) $n = 500$ e (b) $n = 1000$.

pouca variação mas, para os estimadores SR e SPR , o vício diminui.

O erro quadrático médio dos estimadores semiparamétricos diminui com o aumento do valor de α , quando $\alpha \in \{0.76, 0.78, \dots, 0.88, 0.8996\}$. Analisando o vício em função dos valores de α , quando $\alpha \in \{0.76, 0.78, 0.80\}$, o vício diminui quanto maior for o valor de α . Para $\alpha \in \{0.80, 0.82, \dots, 0.88, 0.8996\}$, o vício sofre pouca influência por parte do valor de α .

Quando há contaminação por *outliers* do tipo *AO*, o vício e o erro quadrático médio dos estimadores semiparamétricos aumentam. Estes resultados já haviam sido mencionados por Crato e Ray (2006), Sun e Phillips (2003) e Arteché (2006) em processos com longa dependência.

Analisando o estimador paramétrico W , quando o tamanho amostral aumenta, o erro quadrático médio e o vício diminuem. Quando s aumenta, o erro quadrático médio e o vício aumentam.

Nas estimativas do parâmetro D , comparando o estimador W com os estimadores semiparamétricos aqui analisados, quanto ao erro quadrático médio, para $n = 500$ e s pequeno, os estimadores GPH , R e $GPHT$, utilizando a metodologia robusta MM possuem maior erro quadrático médio do que o estimador paramétrico. Quando s aumenta, o estimador GPH , independente

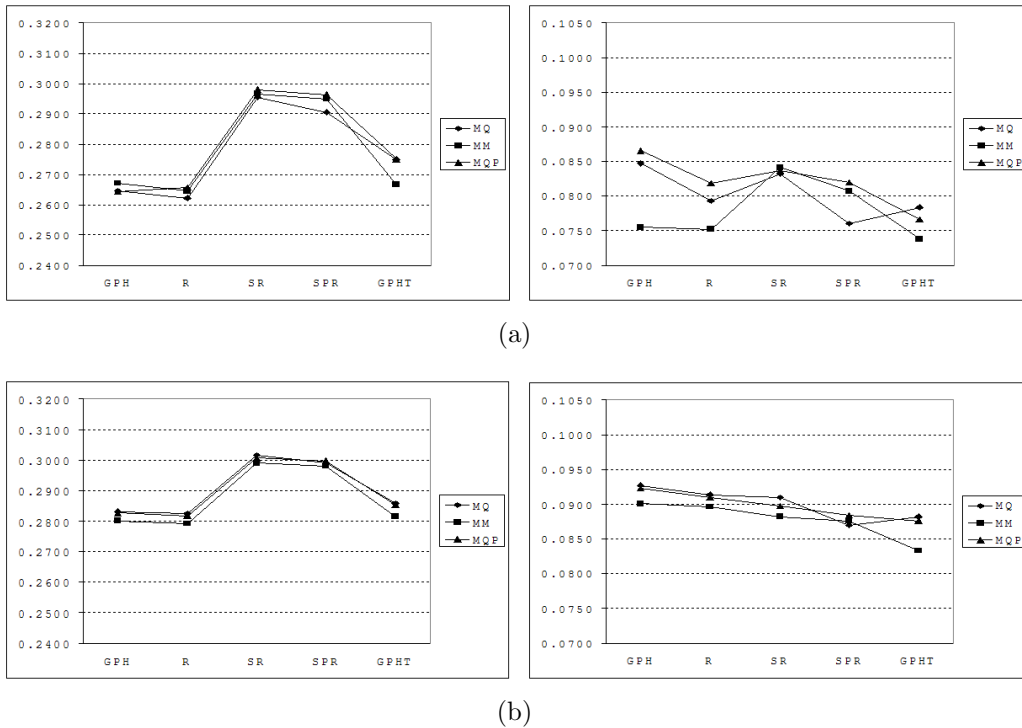


Figura 6.6: Vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, com contaminação por mistura com *outliers* do tipo AO, considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP), $s = 12$ e $\ell = 5$. Os gráficos da esquerda são para $D = 0.3$ e os da direita para $d = 0.1$: (a) $n = 500$ e (b) $n = 1000$.

da metodologia utilizada, e o estimador R , com a metodologia MM, tendem a diminuir o erro quadrático médio e passando a ter assim menor erro quadrático médio do que o estimador W . Para $n = 1000$, os estimadores GPH , R e $GPHT$, utilizando a metodologia MM, possuem maior erro quadrático médio do que o estimador W , independente do valor de s .

Nas estimativas de d , o estimador W possui menor erro quadrático médio do que a maioria dos estimadores semiparamétricos. Apenas os estimador SPR , utilizando a metodologia MQ e MQP, e o estimador R , com a metodologia MQ, são competitivos com o estimador W .

O vício do estimador W , para a estimação do parâmetro D , é maior do que os estimadores semiparamétricos. Quanto a estimação do parâmetro d , para s pequeno e $n = 500$, o estimador W possui maior vício do que o estimador GPH , independente da metodologia utilizada. Para $n = 1000$, além do estimador GPH , o estimador R , nas metodologias MQ e MQP, possam a ter menor vício que o estimador W . Quando s aumenta, o vício do estimador W aumenta e passa assim a ser maior do que o vício da maioria dos estimadores semiparamétricos. A exceção, para $n = 500$, é para os estimadores GPH , na metodologia MM, R , na metodologia MM, SPR , na metodologia

MQ e *GPHT*, nas metodologias MM e MQP. Para $n = 1000$, o vício do estimador W é maior do que a maioria dos estimadores semiparamétricos, com exceção dos estimadores *SPR*, nas metodologias MQ e MM e *GPHT*, nas metodologias MM e MQP.

Quando as série temporais possuem contaminação por *outliers* do tipo *AO*, o erro quadrático médio e o vício do estimador W aumentam.

Resultados da Estimação dos Processos

SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$

Resultados da simulações para os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ com contaminação por mistura com *outliers* do tipo *AO*.

Processos SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$

Nesta seção apresentamos os resultados de simulação para os modelos SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$ contaminados por *outliers* do tipo *AO*, com $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s \in \{4, 7, 12\}$ e $n \in \{500, 1000\}$. No Anexo C encontram-se os resultados de simulação para a sazonalidade $s \in \{5, 6\}$.

Analisando as Tabelas 6.19 a 6.21, observamos que o erro quadrático médios das estimativas dos parâmetros diminui quando o tamanho amostral aumenta. Quando contaminamos as séries temporais com *outliers* do tipo *AO*, o erro quadrático médio e o vício aumentam. Este resultado foi observado nas simulações dos processos SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$ com o mesmo tipo de contaminação.

Nas estimativas dos parâmetros D e d , o estimador W subestima o verdadeiro valor do parâmetro enquanto que, nas estimativas do parâmetro ϕ_1 , o estimador superestima o verdadeiro valor, independente do valor amostral e da sazonalidade s .

Nas estimativas de D , quando s aumenta, o erro quadrático médio e o vício aumentam. Nas estimativas de d , o erro quadrático médio e o vício diminuem. Para as estimativas de ϕ_1 , o erro quadrático médio permanece praticamente constante enquanto que o vício diminui.

Tabela 6.19: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1685	0.0095	0.7981	0.1860	0.0357	0.7842
vício	-0.0315	-0.1905	0.0981	-0.014	-0.1643	0.0842
eqm	0.0045	0.0626	0.0305	0.0017	0.0471	0.0234

Tabela 6.20: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(1, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1595	0.0283	0.7775	0.2049	0.0379	0.7804
vício	-0.0405	-0.1717	0.0775	0.0049	-0.1621	0.0804
eqm	0.0056	0.0586	0.0290	0.0013	0.0431	0.0199

Tabela 6.21: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(1, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1220	0.0779	0.7355	0.1709	0.0712	0.7520
vício	-0.0780	-0.1221	0.0355	-0.0291	-0.1288	0.0520
eqm	0.0113	0.0511	0.0307	0.0033	0.0417	0.0234

Os vícios dos parâmetros D e d são compensados pelo vício do parâmetro ϕ_1 , o que já havíamos observado nos resultados da estimação nos processos SARFIMA(1, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$ sem contaminação.

Processos SARFIMA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$

Nesta seção apresentamos os resultados de simulação para os modelos SARFIMA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$ contaminados por *outliers* do tipo *AO*, com $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s \in \{4, 7, 12\}$ e $n \in \{500, 1000\}$. Os resultados de simulação para a sazonalidade $s \in \{5, 6\}$ encontram-se no Anexo C.

O vício e o erro quadrático médio dos parâmetros são maiores quando as séries temporais são contaminadas por *outliers* do tipo *AO* do que quando não há contaminação. Há uma diminuição dos seus valores quando o tamanho amostral aumenta. As estimativas de D possuem menor erro quadrático médio, seguida das estimativas de ϕ_1 e θ_1 , respectivamente, e por último pela de d .

O estimador W subestima o verdadeiro valor dos parâmetros D e d e superestima para os parâmetros ϕ_1 e θ_1 . Com exceção do parâmetro θ_1 , para o caso em que $s = 7$.

Tabela 6.22: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1601	0.0235	0.8153	0.2083	0.1776	0.1050	0.7763	0.2426
vício	-0.0399	-0.1765	0.1153	0.0083	-0.0224	-0.0950	0.0763	0.0426
eqm	0.0048	0.1354	0.0484	0.0922	0.0020	0.0731	0.0195	0.0526

Tabela 6.23: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1460	0.0162	0.8149	0.1973	0.1901	0.1040	0.7749	0.2405
vício	-0.0540	-0.1838	0.1149	-0.0027	-0.0099	-0.0960	0.0749	0.0405
eqm	0.0059	0.1393	0.0392	0.0839	0.0012	0.0712	0.0182	0.0526

Tabela 6.24: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1164	0.0605	0.7833	0.2087	0.1581	0.1320	0.7510	0.2439
vício	-0.0836	-0.1395	0.0381	0.0087	-0.0419	-0.0680	0.0510	0.0439
eqm	0.0111	0.1253	0.0833	0.0861	0.0034	0.0620	0.0177	0.0468

Quando a sazonalidade s aumenta, o erro quadrático médio e o vício das estimativas de D diminuem e de ϕ_1 permanecem praticamente constante. Nas estimativas de d e ϕ_1 , quando s varia de 4 para 7, o erro quadrático médio e o vício aumentam. Quando s varia de 7 para 12, o erro quadrático médio e o vício diminuem. Sendo que para $s = 12$ eles possuem o seu menor valor.

***Outlier* Inovador**

Resultados da Estimação dos Processos

SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$

Nesta seção apresentamos os resultados de estimação para os processos SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$ com contaminação por mistura por *outlier* do tipo *IO*.

As Tabelas 6.25 a 6.30 referem-se aos casos em que $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s \in \{4, 7, 12\}$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\alpha = 0.8996$ (isto é, todas as frequências de Fourier são selecionadas para realizar os diversos métodos de estimação da classe semiparamétrica). Diversos outros casos foram considerados e as tabelas apresentando os resultados encontram-se no Anexo C.

As séries temporais foram geradas utilizando o algoritmo mencionado no início deste capítulo, com uma modificação no Passo 2. Nesta situação de *outliers* inovadores, geramos um processo ruído branco utilizando a expressão (4.15). Nestas simulações de Monte Carlo, utilizamos $c = 0.2$, $G = \mathcal{N}(0, 10)$ e $F_\varepsilon = \mathcal{N}(0, 1)$. Para maiores detalhes sobre contaminação por mistura ver Seção 4.1.

A contaminação das séries temporais por *outliers* do tipo *IO*, praticamente não influenciou na estimação dos parâmetros do processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0)_s. Rousseeuw e Leroy (2003), considerando contaminação nos processos ARMA(p , q), comentam que este tipo de *outlier* causa pouca ou nenhuma influência na estimação dos parâmetros dos processos.

Analisando as Tabelas 6.25 a 6.30 e as Figuras 6.7 a 6.9, quando o tamanho amostral aumenta, o erro quadrático médio e o vício dos estimadores diminuem. Quando a sazonalidade aumenta o erro quadrático médio e o vício das estimativas do parâmetro de longa dependência sazonal D aumentam mas, para o parâmetro de longa dependência d sofrem pouca influência.

O estimador *SPR* possui menor erro quadrático médio, tanto na estimação do parâmetro D , como na do parâmetro d , independente do tamanho amostral e do valor da sazonalidade. Dentre as metodologias, a MQ possui menor erro quadrático médio, seguida pela metodologia robusta MQP e por último a metodologia robusta MM. Estes resultados foram observados na estimação dos parâmetros d e D com séries temporais não contaminadas e com séries temporais contaminadas por *outliers* do tipo *AO*.

Analisando ainda o erro quadrático médio, na estimação do parâmetro D , para $n = 500$, o estimador *SR*, independente da metodologia utilizada, é competitivo com o estimador *SPR*. Para $n = 1000$, os estimadores *SR*, nas três metodologias, *GPH* e *R*, nas metodologias MQ e MQP, são competitivos com o estimador *SPR*.

Na estimação do parâmetro d , para $n = 500$, o estimador *SR*, nas três metodologias, e o estimador *GPH*, nas metodologias MQ e MQP, são competitivos com o estimador *SPR*, quando comparamos o erro quadrático médio. Quando $s \in \{7, 12\}$, o estimador *R*, nas metodologias MQ e MQP passa a ser competitivo também. Para $n = 1000$, o estimador *SR*, nas três metodologias, e os estimadores *GPH* e *R*, nas metodologias MQ e MQP, são competitivos com o estimador *SPR*.

Analisando o vício dos estimadores, quanto as estimativas do parâmetro D , os estimadores com menor vício são *GPH* e *R*. Para pequenos valores de s , as metodologias MQ e MQP apresentam menor vício.

Tabela 6.25: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 4$, $n \in \{500, 1000\}$, $\ell = 5$ com contaminação por *outlier IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3005	0.1010	0.2889	0.0971	0.2994	0.1024
vício	0.0005	0.0010	-0.0111	-0.0029	-0.0006	0.0024
eqm	0.0029	0.0024	0.0064	0.0049	0.0031	0.0027
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3001	0.1004	0.2892	0.0950	0.2985	0.1009
vício	0.0001	0.0004	-0.0108	-0.0050	-0.0015	0.0009
eqm	0.0031	0.0032	0.0065	0.0070	0.0036	0.0036
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3145	0.0992	0.3093	0.0964	0.3126	0.0970
vício	0.0145	-0.0008	0.0093	-0.0036	0.0126	-0.0030
eqm	0.0021	0.0019	0.0035	0.0032	0.0029	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3093	0.0915	0.3077	0.0937	0.3111	0.0953
vício	0.0093	-0.0085	0.0077	-0.0063	0.0111	-0.0047
eqm	0.0019	0.0016	0.0032	0.0027	0.0028	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3131	0.1006	0.2968	0.0957	0.3080	0.0988
vício	0.0131	0.0006	-0.0032	-0.0043	0.0080	-0.0012
eqm	0.0042	0.0038	0.0077	0.0064	0.0046	0.0042
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3017	0.1007	0.2969	0.0986	0.2994	0.1003
vício	0.0017	0.0007	-0.0031	-0.0014	-0.0006	0.0003
eqm	0.0012	0.0012	0.0031	0.0027	0.0015	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3017	0.1008	0.2968	0.0981	0.3004	0.1016
vício	0.0017	0.0008	-0.0032	-0.0019	0.0004	0.0016
eqm	0.0013	0.0014	0.0032	0.0034	0.0016	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3094	0.0998	0.3068	0.0992	0.3081	0.0992
vício	0.0094	-0.0002	0.0068	-0.0008	0.0081	-0.0008
eqm	0.0010	0.0008	0.0017	0.0015	0.0014	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3066	0.0958	0.3056	0.0984	0.3077	0.0978
vício	0.0066	-0.0042	0.0056	-0.0016	0.0077	-0.0022
eqm	0.0009	0.0007	0.0015	0.0014	0.0013	0.0011
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3063	0.1015	0.3003	0.1006	0.3049	0.1009
vício	0.0063	0.0015	0.0003	0.0006	0.0049	0.0009
eqm	0.0020	0.0018	0.0037	0.0032	0.0022	0.0020

Tabela 6.26: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.2691	0.0962	0.2875	0.0980
vício	-0.0309	-0.0038	-0.0125	-0.0020
eqm	0.0041	0.0015	0.0016	0.0007

Tabela 6.27: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 7$, $n \in \{500, 1000\}$, $\ell = 5$ com contaminação por *outlier IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3003	0.1033	0.2929	0.0929	0.2992	0.1003
vício	0.0003	0.0033	-0.0071	-0.0071	-0.0008	0.0003
eqm	0.0030	0.0022	0.0060	0.0049	0.0035	0.0024
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2998	0.1023	0.2918	0.0914	0.2973	0.0987
vício	-0.0002	0.0023	-0.0082	-0.0086	-0.0027	-0.0013
eqm	0.0032	0.0030	0.0065	0.0064	0.0038	0.0032
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3228	0.0995	0.3177	0.0960	0.3196	0.0989
vício	0.0228	-0.0005	0.0177	-0.0040	0.0196	-0.0011
eqm	0.0025	0.0018	0.0040	0.0034	0.0033	0.0025
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3175	0.0916	0.3155	0.0938	0.3189	0.0963
vício	0.0175	-0.0084	0.0155	-0.0062	0.0189	-0.0037
eqm	0.0022	0.0015	0.0038	0.0026	0.0031	0.0019
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3163	0.1019	0.3039	0.0940	0.3144	0.0995
vício	0.0163	0.0019	0.0039	-0.0060	0.0144	-0.0005
eqm	0.0046	0.0033	0.0076	0.0062	0.0051	0.0035
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3005	0.1016	0.2965	0.0994	0.3008	0.1013
vício	0.0005	0.0016	-0.0035	-0.0006	0.0008	0.0013
eqm	0.0014	0.0011	0.0030	0.0022	0.0016	0.0013
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3001	0.1010	0.2971	0.0992	0.2992	0.1029
vício	0.0001	0.0010	-0.0029	-0.0008	-0.0008	0.0029
eqm	0.0015	0.0013	0.0030	0.0027	0.0017	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3145	0.0998	0.3121	0.0985	0.3127	0.0992
vício	0.0145	-0.0002	0.0121	-0.0015	0.0127	-0.0008
eqm	0.0011	0.0008	0.0018	0.0014	0.0015	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3117	0.0956	0.3115	0.0968	0.3119	0.0985
vício	0.0117	-0.0044	0.0115	-0.0032	0.0119	-0.0015
eqm	0.0010	0.0007	0.0018	0.0012	0.0014	0.0009
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3113	0.1012	0.3037	0.0948	0.3095	0.1012
vício	0.0113	0.0012	0.0037	-0.0052	0.0095	0.0012
eqm	0.0021	0.0016	0.0037	0.0032	0.0023	0.0019

Tabela 6.28: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier IO*.

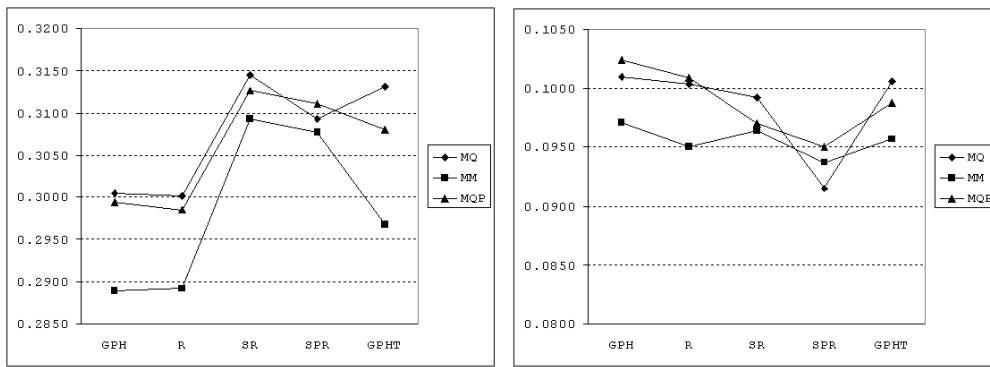
	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.2481	0.0959	0.2792	0.0977
vício	-0.0519	-0.0041	-0.0208	-0.0023
eqm	0.0053	0.0013	0.0016	0.0006

Tabela 6.29: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 12$, $n \in \{500, 1000\}$, $\ell = 5$ com contaminação por *outlier IO*.

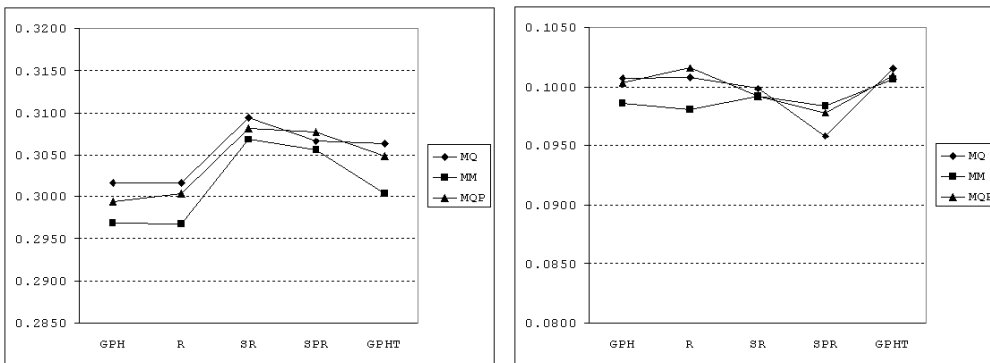
$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3052	0.1003	0.2991	0.0924	0.3032	0.0984
vício	0.0052	0.0003	-0.0009	-0.0076	0.0032	-0.0016
eqm	0.0037	0.0022	0.0075	0.0044	0.0044	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3055	0.1010	0.3022	0.0953	0.3042	0.0999
vício	0.0055	0.0010	0.0022	-0.0047	0.0042	-0.0001
eqm	0.0039	0.0032	0.0078	0.0064	0.0046	0.0035
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3363	0.1002	0.3368	0.0990	0.3377	0.0989
vício	0.0363	0.0002	0.0368	-0.0010	0.0377	-0.0011
eqm	0.0038	0.0020	0.0053	0.0033	0.0049	0.0027
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3297	0.0896	0.3323	0.0945	0.3347	0.0943
vício	0.0297	-0.0104	0.0323	-0.0055	0.0347	-0.0057
eqm	0.0033	0.0016	0.0052	0.0030	0.0046	0.0023
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3337	0.1015	0.3274	0.0938	0.3341	0.0997
vício	0.0337	0.0015	0.0274	-0.0062	0.0341	-0.0003
eqm	0.0064	0.0033	0.0092	0.0056	0.0067	0.0035
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3010	0.0988	0.3005	0.0949	0.3015	0.0985
vício	0.0010	-0.0012	0.0005	-0.0051	0.0015	-0.0015
eqm	0.0015	0.0011	0.0033	0.0024	0.0018	0.0013
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3008	0.0985	0.2997	0.0954	0.3024	0.0971
vício	0.0008	-0.0015	-0.0003	-0.0046	0.0024	-0.0029
eqm	0.0016	0.0014	0.0035	0.0030	0.0018	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3230	0.0975	0.3234	0.0962	0.3232	0.0965
vício	0.0230	-0.0025	0.0234	-0.0038	0.0232	-0.0035
eqm	0.0015	0.0009	0.0025	0.0016	0.0019	0.0012
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3197	0.0923	0.3214	0.0944	0.3221	0.0947
vício	0.0197	-0.0077	0.0214	-0.0056	0.0221	-0.0053
eqm	0.0013	0.0008	0.0024	0.0014	0.0018	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3152	0.0984	0.3122	0.0964	0.3155	0.1002
vício	0.0152	-0.0016	0.0122	-0.0036	0.0155	0.0002
eqm	0.0024	0.0018	0.0041	0.0033	0.0027	0.0018

Tabela 6.30: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.2281	0.0899	0.2594	0.0949
vício	-0.0719	-0.0101	-0.0406	-0.0051
eqm	0.0077	0.0014	0.0027	0.0007



(a)



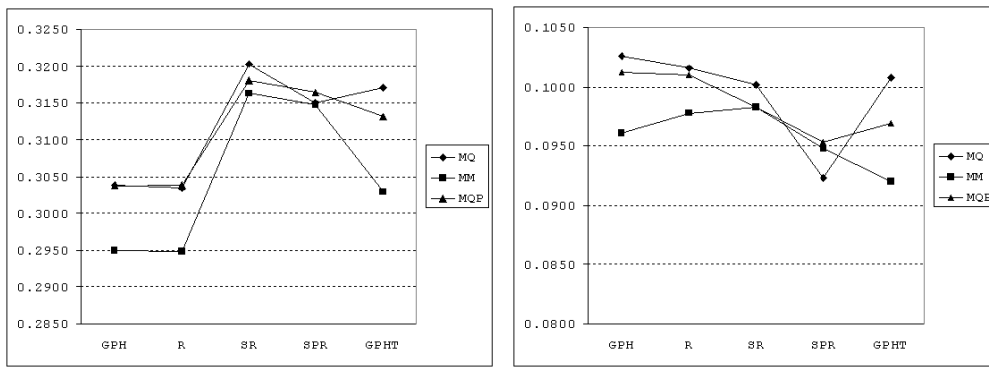
(b)

Figura 6.7: Vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, com contaminação por mistura pelo modelo IO , considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP), $s = 4$ e $\ell = 5$. Os gráficos da esquerda são para $D = 0.3$ e os da direita para $d = 0.1$: (a) $n = 500$ e (b) $n = 1000$.

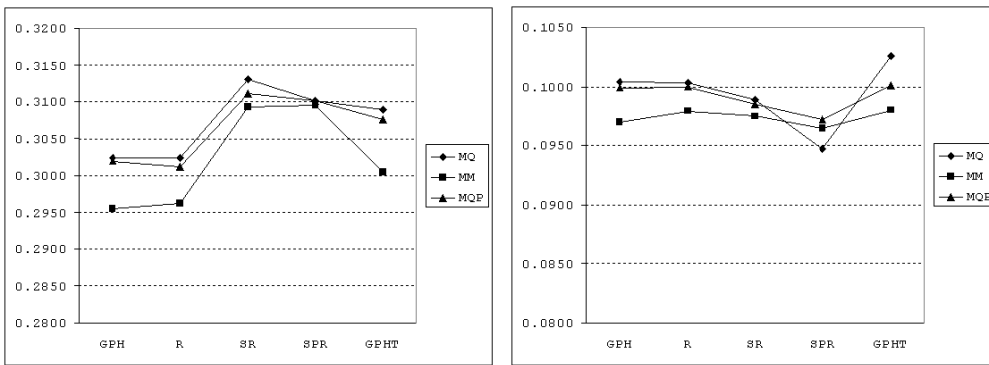
Quando s aumenta, a metodologia robusta MM torna-se competitiva com as metodologias MQ e MQP. Quanto ao restante dos estimadores semiparamétricos, o estimador SR possui maior vício, seguido do estimador SPR e por último $GPHT$, independente do tamanho amostral. Além disso, os estimadores SR , SPR e $GPHT$, sempre superestimam o verdadeiro valor do parâmetro D . Para $s = 12$, os estimadores GPH e R superestimam o verdadeiro valor de D , em todas as metodologias. A exceção ocorre para o estimador GPH , na metodologia MM, para $n = 500$.

Para as estimativas de d , os estimadores GPH , R , SR e $GPHT$ utilizando as metodologias MQ e MQP, possuem menor vício. Todos os estimadores utilizando a metodologia MM subestimam o verdadeiro valor do parâmetro d .

O estimador SPR , independente da metodologia utilizada, é aquele com menor variação no vício quando s aumenta, independente do tamanho amostral. Além disso, este estimador possui o maior vício.



(a)



(b)

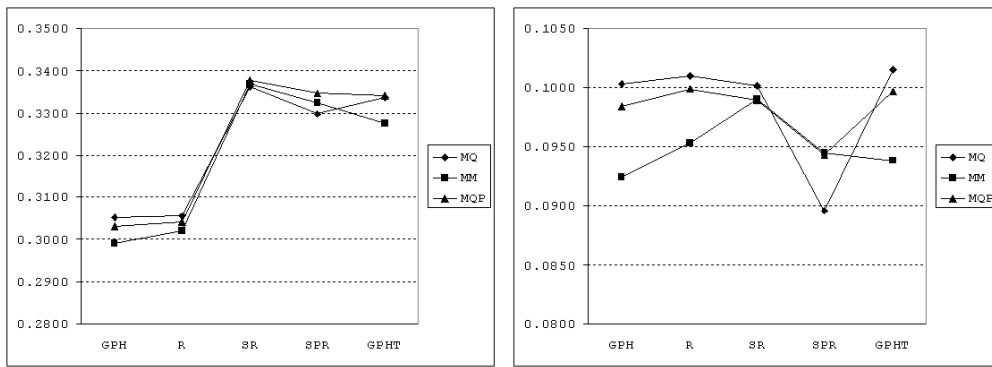
Figura 6.8: Vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, com contaminação por mistura pelo modelo IO , considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP), $s = 5$ e $\ell = 5$. Os gráficos da esquerda são para $D = 0.3$ e os da direita para $d = 0.1$: (a) $n = 500$ e (b) $n = 1000$.

Os estimadores semiparamétricos possuem menor vício quando a série temporal está contaminada por *outliers* do tipo IO do que quando há contaminação por *outliers* do tipo AO .

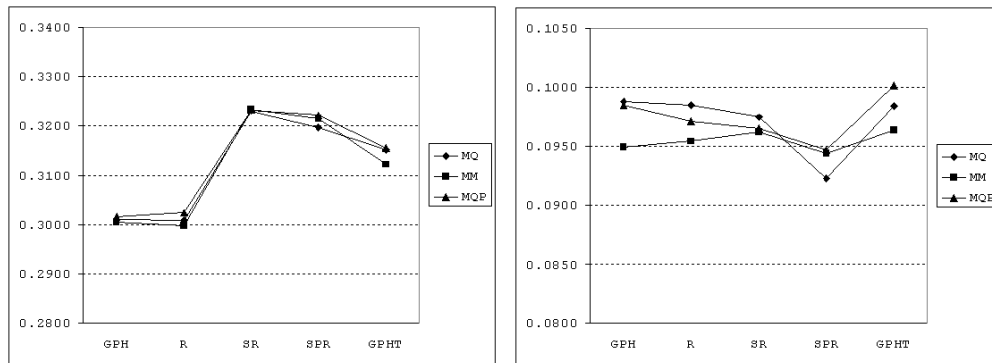
Analisando o estimador paramétrico W , quando o tamanho amostral aumenta, o erro quadrático médio e o seu vício diminuem.

Nas estimativas do parâmetro D , o estimador W possui maior vício do que os estimadores semiparamétricos. Na maioria dos casos, o seu erro quadrático médio também é maior, com exceção dos estimadores R e $GPHT$, na metodologia MM.

Nas estimativas do parâmetro D , para $n = 500$, o estimador paramétrico W possui vício menor do que todos os estimadores semiparamétricos utilizando a metodologia MM e do estimador SPR , independente da metodologia utilizada. Para $n = 1000$, apenas o estimador SPR , nas metodologias MQ e MQP, possuem maior vício do que o estimador W .



(a)



(b)

Figura 6.9: Vício dos estimadores semiparamétricos para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, com contaminação por mistura pelo modelo IO , considerando os métodos clássico (MQ) e robustos (MM e MQP), $s = 12$ e $\ell = 5$. Os gráficos da esquerda são para $D = 0.3$ e os da direita para $d = 0.1$: (a) $n = 500$ e (b) $n = 1000$.

Para as estimativas do parâmetro D , o estimador paramétrico W possui maior erro quadrático médio do que a maioria dos estimadores semiparamétricos. A exceção ocorre para os estimadores GPH , R e $GPHT$, utilizando a metodologia MM. Nas estimativas do parâmetro d , o estimador W possui menor erro quadrático médio do que os estimadores semiparamétricos, independente do tamanho amostral aqui utilizado e do valor de s .

O erro quadrático médio e o vício dos estimadores semiparamétricos diminui com o aumento do valor de $\alpha \in \{0, 74, 0.76, \dots, 0.80\}$. Para $\alpha \in \{0.80, 0.82, \dots, 0.88, 0.8996\}$, o vício e o erro quadrático médio sofrem pouca influência por parte do valor de α .

Comparando estes resultados com os resultados obtidos quando as séries temporais não são contaminadas, o erro quadrático médio e o vício sofrem pouca influência quando há contaminação por *outliers* do tipo IO . Estes resultados já haviam sido mencionados por Rousseeuw e Leroy (2003), para

os processos ARMA(p, q).

Resultados da Estimação dos Processos

SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$

Resultados da simulações para os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ com contaminação por mistura com *outliers* do tipo *IO*.

Processos SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$

Nesta seção apresentamos os resultados de simulação para os modelos SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$ contaminados por *outliers* do tipo *IO*, com $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s \in \{4, 7, 12\}$ e $n \in \{500, 1000\}$. No Anexo C encontram-se os resultados de simulação para a sazonalidade $s \in \{5, 6\}$.

Quando há contaminação por *outliers* do tipo *IO*, o estimador paramétrico W , possui um comportamento semelhante quando as séries temporais não são contaminadas por *outliers*. Este resultado foi observado nas simulações com os processos SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$.

O erro quadrático médio e o vício sofrem pouca influência quando contaminamos as séries temporais por *outliers* do tipo *IO*.

As estimativas com maior vício e erro quadrático médio são as do parâmetro d enquanto que, as estimativas do parâmetro D possuem menor vício e erro quadrático médio.

O vício e o erro quadrático médio diminuem quando o tamanho amostral aumenta.

O estimador W subestima o verdadeiro valor dos parâmetros D e d e superestima o parâmetro ϕ_1 .

Quando a sazonalidade aumenta, o erro quadrático médio das estimativas de D diminuem, enquanto que o vício aumenta. Para o parâmetro d , o vício diminui e o erro quadrático médio aumenta. Nas estimativas de ϕ_1 o vício diminui, quando s aumenta, e o erro quadrático médio permanece praticamente inalterado.

Tabela 6.31: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1685	0.0095	0.7981	0.1860	0.0357	0.7842
vício	-0.0315	-0.1905	0.0981	-0.0140	-0.1643	0.0842
eqm	0.0045	0.0626	0.0305	0.0017	0.0471	0.0234

Tabela 6.32: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(1, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1595	0.0283	0.7775	0.1849	0.0478	0.7716
vício	-0.0405	-0.1717	0.0775	-0.0151	-0.1522	0.0716
eqm	0.0056	0.0586	0.0290	0.0017	0.0449	0.0229

Tabela 6.33: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(1, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1220	0.0779	0.7355	0.1709	0.0712	0.7520
vício	-0.0780	-0.1221	0.0355	-0.0291	-0.1288	0.0520
eqm	0.0113	0.0511	0.0307	0.0033	0.0417	0.0234

Processos SARFIMA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$

Nesta seção apresentamos os resultados de simulação para os modelos SARFIMA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$ contaminados por *outliers* do tipo *IO*, com $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s \in \{4, 7, 12\}$ e $n \in \{500, 1000\}$. Os resultados de simulação para a sazonalidade $s \in \{5, 6\}$ encontram-se no Anexo C.

Da mesma forma que para os processos SARFIMA(1, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando há contaminação por *outliers* do tipo *IO*, o estimador paramétrico W , possui um comportamento semelhante quando as séries temporais não são contaminadas por *outliers*.

Quando $n = 500$, o vício das estimativas do parâmetro θ_1 é menor do que para $n = 1000$. Para os demais parâmetros, o vício é maior quando $n = 500$ do que quando $n = 1000$. Quando o tamanho amostral aumenta o erro quadrático médio diminui.

As estimativas para o parâmetro θ_1 possuem menor vício quando $n = 500$ e as estimativas de D isso ocorre quando $n = 1000$. As estimativas de D possuem menor erro quadrático médio, seguida das estimativas de ϕ_1 e θ_1 , respectivamente, e por último a de d .

Quando s aumenta, o vício e o erro quadrático médio das estimativas de D e ϕ_1 diminuem. Quando s varia de 4 à 7, o vício das estimativas de d e θ_1 aumentam, mas quando s varia de 7 à 12, o vício diminui.

Tabela 6.34: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFI-MA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1601	0.0251	0.8150	0.2094	0.1776	0.1050	0.7763	0.2426
vício	-0.0399	-0.1749	0.1150	0.0094	-0.0224	-0.0950	0.0763	0.0426
eqm	0.0048	0.1355	0.0485	0.0933	0.0020	0.0731	0.0195	0.0526

Tabela 6.35: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFI-MA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1458	0.0105	0.8153	0.1918	0.1731	0.1153	0.7687	0.2453
vício	-0.0542	-0.1895	0.1153	-0.0082	-0.0269	-0.0847	0.0687	0.0453
eqm	0.0059	0.1390	0.0394	0.0802	0.0020	0.0740	0.0197	0.0548

Tabela 6.36: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFI-MA(1, d , 1) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1108	0.0445	0.7790	0.1881	0.1581	0.1320	0.7510	0.2439
vício	-0.0892	-0.1555	0.0790	-0.0119	-0.0419	-0.0680	0.0510	0.0439
eqm	0.0118	0.1230	0.0389	0.0724	0.0034	0.0620	0.0177	0.0468

Capítulo 7

Aplicação

Neste capítulo analisamos uma série temporal real utilizando a metodologia desenvolvida ao longo deste trabalho.

Série Temporal dos Níveis Mensais do Rio Nilo

Consideramos a série temporal dos níveis mensais do Rio Nilo, em Aswan, cordialmente cedida pelo Professor Dr. A. Montanari (Università di Bologna, Itália). Esta série temporal consiste de 1466 observações, durante o período de agosto de 1872 a setembro de 1994 (ver Figura 7.1). A análise desta série pode ser encontrada em Montanari et al. (2000) e Bisognin e Lopes (2007). Neste capítulo, esta série temporal é contaminada por mistura com *outliers* do tipo *AO*, onde $c = 0.2\%$, isto é, três *outliers* do tipo *AO* são inseridos na série temporal com função de distribuição de probabilidade G dada por uma distribuição $\mathcal{N}(0, 10)$. As Figuras 7.2(a) e 7.2(b) referem-se, respectivamente, as suas funções de autocorrelação amostral e periodograma.

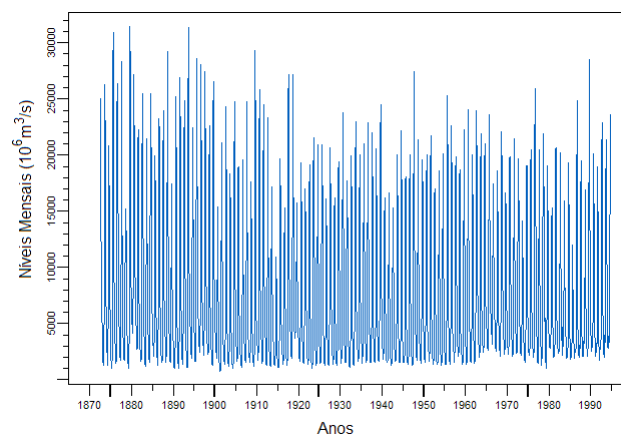


Figura 7.1: Série Temporal dos Níveis Mensais do Rio Nilo, em Aswan (Período: Agosto de 1872 a Setembro de 1994; $n = 1466$).

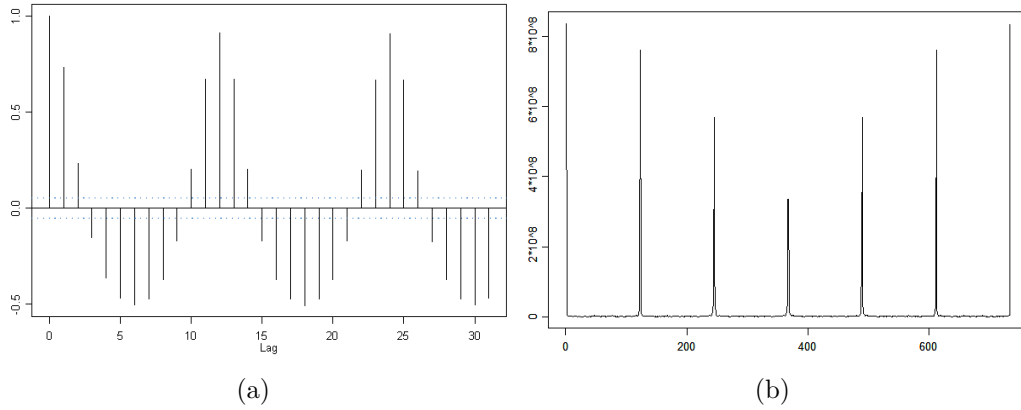


Figura 7.2: Série Temporal dos Níveis Mensais do Rio Nilo, em Aswan: (a) função de autocorrelação amostral; (b) função periodograma.

As Figuras 7.2(a) e 7.2(b) mostram que a série temporal apresenta um comportamento de longa dependência, já que a função de autocorrelação amostral possui um decaimento hiperbólico lento, e sua função periodograma apresenta um comportamento periódico causado pelo seu ciclo anual. A função periodograma apresenta picos nas frequências sazonais w_j , onde $j = \lfloor \frac{n}{s} \rfloor k = \lfloor \frac{1466}{12} \rfloor k = 122k$, para $k = 0, 1, \dots, 6$. Este comportamento também foi detectado por Montanari et al. (2000) e Bisognin e Lopes (2007).

O melhor modelo ajustado à esta série temporal, segundo os critérios de seleção de modelo vistos na Seção 5.2 do Capítulo 5, é um processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com $P = p = 1 = q = Q$, $\hat{D} = W$, $\hat{d} = 0.0$ e $s = 12$.

Tabela 7.1: Modelo Ajustado para a Série Temporal dos Níveis Mensais do Rio Nilo, em Aswan, sem contaminação.

Parâmetro	ϕ_1	Φ_1	D_W	d_W	θ_1	Θ_1
Estimador	0.6124	0.9876	0.1980	0.0087	-0.2171	0.9398
Desvio Padrão	0.0291	0.0295	0.0235	0.0203	0.0357	0.0145

A variância estimada dos resíduos é $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 1.0005$.

Tabela 7.2: Modelo Ajustado para a Série Temporal dos Níveis Mensais do Rio Nilo, em Aswan, com contaminação.

Parâmetro	ϕ_1	Φ_1	D_W	d_W	θ_1	Θ_1
Estimador	0.6091	0.9909	0.1619	0.0075	-0.2130	0.9371
Desvio Padrão	0.0288	0.0048	0.0235	0.0203	0.0358	0.0122

A variância estimada dos resíduos é $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 1.0007$.

Tabela 7.3: Valores dos Critérios de Seleção de Modelo para a Série Temporal dos Níveis Mensais do Rio Nilo, em Aswan, sem contaminação.

Critério de Seleção	AIC	BIC	HQC
Valor	14.7328	51.7648	0.0240

Tabela 7.4: Valores dos Critérios de Seleção de Modelo para a Série Temporal dos Níveis Mensais do Rio Nilo, em Aswan, com contaminação.

Critério de Seleção	AIC	BIC	HQC
Valor	15.0063	52.0384	0.0197

As Tabelas 7.1 e 7.2 apresentam os resultados para os estimadores dos parâmetros do modelo ajustado para esta série temporal com sazonalidade $s = 12$, sem e com contaminação por *outlier* do tipo *AO*. Consideramos apenas o estimador proposto por Fox e Taqu (1986) pelos mesmos motivos apresentados na estimação dos processos $SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$, quando P, p, q, Q são diferentes de zero. O valor do parâmetro de diferenciação d é igual a zero (na verdade, $\hat{d} = 0.0075$). Este modelo foi selecionado pelos critérios de seleção de modelo vistos na Seção 5.2. Os valores são apresentados nas Tabela 7.3 e 7.4, para os casos sem e com contaminação por *outliers*, respectivamente.

Os valores dos critérios de seleção foram obtidos à partir das expressões (5.32), (5.33) e (5.34), respectivamente.

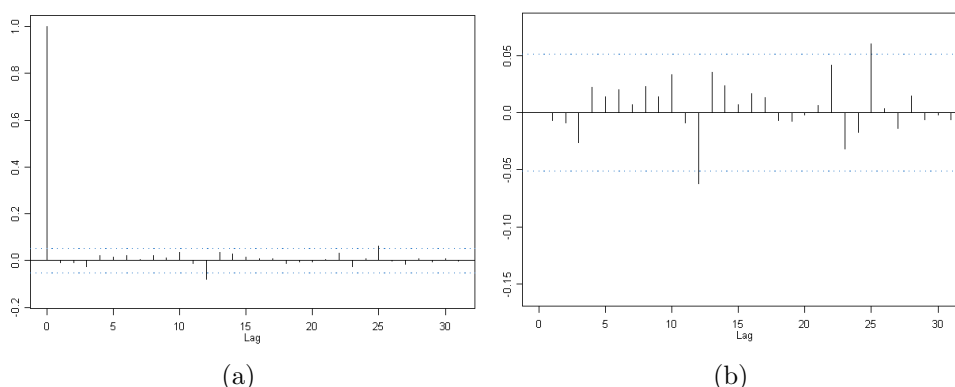


Figura 7.3: Resíduos do Modelo Ajustado à Série Temporal dos Níveis Mensais do Rio Nilo, em Aswan, sem contaminação: (a) função de autocorrelação amostral; (b) função de autocorrelação parcial amostral.

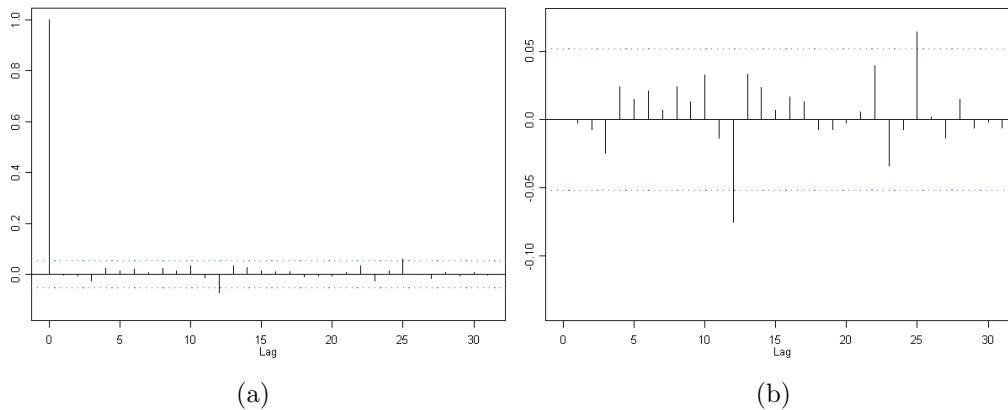


Figura 7.4: Resíduos do Modelo Ajustado à Série Temporal dos Níveis Mensais do Rio Nilo, em Aswan, com contaminação: (a) função de autocorrelação amostral; (b) função de autocorrelação parcial amostral.

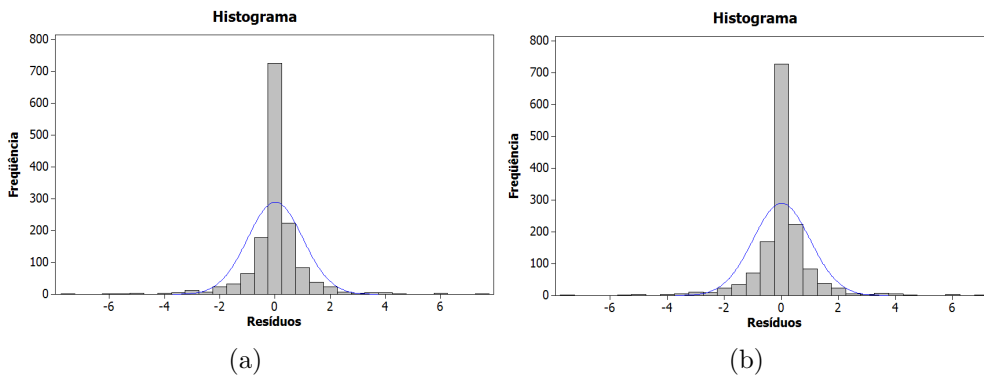


Figura 7.5: Histograma dos Resíduos do Modelo Ajustado à Série Temporal dos Níveis Mensais do Rio Nilo, em Aswan: (a) sem contaminação; (b) com contaminação por *outlier* aditivo.

As Figuras 7.3(a) e 7.3(b) apresentam as funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial amostrais dos resíduos do modelo, quando não há contaminação por *outliers*.

As Figuras 7.4(a) e 7.4(b) apresentam as funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial amostrais dos resíduos do modelo, quando há contaminação por *outliers* do tipo *AO*.

Analisando as Figuras 7.3 e 7.4 observamos que o modelo está bem ajustado em ambos os casos, isto é, quando não há ou há contaminação. Observando os histogramas nas Figuras 7.5(a) e (b), observamos que os resíduos do modelo ajustado a série temporal (sem e com contaminação, respectivamente) possuem distribuição aproximadamente normal padrão com uma variância muito pequena em relação à 1.0.

Capítulo 8

Conclusões

Neste trabalho, demonstramos vários resultados teóricos para os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) e SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$. Para os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) destacamos os Lema 2.1 e 2.2, os quais são de grande importância para a estimação e previsão utilizando estes processos. Para os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ destacamos a função densidade espectral, estacionariedade, dependência intermediária e longa e função de autocovariância do processo. Também obtivemos uma expressão assintótica para a função de autocovariância destes processos. Além disso, mostramos as condições necessárias e suficientes para a causalidade, invertibilidade e a convergência em quadrado médio e quase certa das representações auto-regressiva e média móvel infinita. Na seção de previsão, estendemos os resultados obtidos por Bisognin e Lopes (2007) para os processos SARFIMA($0, D, 0$) $_s$ agora para os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$.

Investigamos a contaminação de processos estocásticos por *outliers* do tipo *AO* e *IO* (contaminação paramétrica e por mistura). Desenvolvemos um estimador para a magnitude dos *outliers* do tipo *AO* e um para os *outliers* do tipo *IO*. Mostramos que estes estimadores são não viciados e tem distribuição normal.

Na estimação em processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$ apresentamos cinco estimadores na classe semiparamétrica e um na classe paramétrica. Ademais, propomos nova metodologia robusta para a estimação dos parâmetros d e D , os chamados estimadores robustos.

Realizamos diversas simulações de Monte Carlo, variando os parâmetros da seguinte forma: sazonalidade $s \in \{4, 5, 6, 7, 12\}$, tamanho amostral $n \in \{500, 1000\}$, $d, D \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$, $p, q \in \{0, 1\}$ e $P = 0 = Q$.

Para os valores de α , onde $g(n) = n^\alpha$ é o número de frequências de Fourier utilizadas na classe dos estimadores semiparamétricos, utilizamos os valores $\alpha \in \{0, 74, 0.76, \dots, 0.88, 0.8996\}$. O caso $\alpha = 0.8996$ significa que estamos considerando todas as frequências na estimação semiparamétrica.

Também investigamos o desempenho dos estimadores quando as séries temporais são contaminadas por *outliers* do tipo *AO* e *IO*.

Nos resultados da estimação obtidos para os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, o estimador *SPR* é aquele que possui menor erro quadrático médio. Dentre as metodologias de estimação, a MQ possui menor erro quadrático médio, seguida pela metodologia robusta MQP e por última a metodologia robusta MM. Estes resultados foram obtidos para simulações sem contaminação e com contaminação por *outliers* tanto do tipo *AO* como do tipo *IO*. Na maioria dos casos analisados, o estimador *GPH*, utilizando as metodologias MQ e MQP, são competitivos com o estimador *SPR*, do ponto de vista de menor erro quadrático médio. Este resultado ocorre independente do tamanho amostral e dos valores da sazonalidade s e foi observado em todas as simulações envolvendo ou não contaminação por *outliers*.

Quando contaminamos as séries temporais com *outliers* do tipo *AO*, o erro quadrático médio de todos os estimadores aumenta. Quando a contaminação ocorre por *outliers* do tipo *IO*, o erro quadrático médio dos estimadores sofre pouca variação.

À medida que o tamanho amostral aumenta, os valores do erro quadrático médio e do vício de todos os estimadores, independente da metodologia utilizada, diminuem.

O vício e o erro quadrático médio diminuem à medida que o valor de α aumenta. Para simulações sem e com contaminação por *outliers* do tipo *IO*, os melhores resultados foram obtidos quando $\alpha \in \{0,74, 0,76, \dots, 0,88, 0,8996\}$, isto é, para valores grandes de α . Para simulações com contaminação por *outliers* do tipo *AO*, os melhores resultados foram obtidos para $\alpha \in \{0,76, 0,78, \dots, 0,88, 0,8996\}$. O valor de $\alpha = 0,8996$ refere-se a utilização de todas as frequências de Fourier para realizar os diversos métodos de estimação da classe semiparamétrica. Em todas as simulações, para $\alpha \leq 0,80$, o erro quadrático médio e o vício diminuem à medida que α aumenta. Para $\alpha > 0,80$, o erro quadrático médio e o vício sofrem pouca influência quando α varia.

Algumas destas conclusões foram obtidas por Porter-Hudak (1990), para o caso $s = 12$, utilizando os processos SARFIMA($0, D, 0$) $_s$. O autor neste artigo sugere o uso de $g(n) = n^\alpha$ com $\alpha \in (0,62, 0,75)$. Lopes et al. (2004), considerando processos ARFIMA(p, d, q), que sugere $\alpha \in \{0,60, 0,70, 0,80\}$. Bisognin e Lopes (2007), considerando processos SARFIMA($0, D, 0$) $_s$, sugerem $\alpha \in \{0,70, 0,80\}$. Mendes e Lopes (2006) concluem que quanto mais complexo o modelo, isto é, mais parâmetros a serem estimados, maior deve ser o valor de α .

Analisando os resultados da estimação para os processos SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$ sem contaminação, percebemos que os estimadores semiparamétricos, para o parâmetro D , possuem maior vício e erro quadrático médio quando comparados com os estimadores semiparamétricos para o parâmetro d . Este resultado independe da metodologia utilizada.

O estimador *GPHT* possui maior erro quadrático médio ao estimar os verdadeiros valores de d e D , em todas as metodologias. Em geral, o estima-

dor SR possui maior vício também independente da metodologia utilizada (isto é, MQ, MM e MQP).

O erro quadrático médio do estimador paramétrico W , para o parâmetro D , aumenta quando o valor de s aumenta. No entanto, isto não acontece para as estimativas do parâmetro d . Para $n = 500$, o estimador W na estimativa de D , possui maior vício comparado com todos os estimadores semiparamétricos. Nas estimativas de d , o estimador W possui maior vício do que os estimadores GPH , R , SR e $GPHT$, independente da metodologia utilizada.

Para $n = 1000$, nas estimativas de D , apenas os estimadores GPH e R , independente da metodologia, e o estimador $GPHT$, na metodologia MM, possuem menor vício do que o estimador W . Nas estimativas de d , para sazonalidade pequena, apenas o estimador SPR , nas metodologias MQ e MQP, possui maior vício do que o estimador W .

Quando as séries temporais são contaminadas por *outlier* do tipo AO , o vício de todos os estimadores aumenta. Quanto as estimativas do parâmetro de longa dependência sazonal, D , a maioria dos estimadores subestima o seu verdadeiro valor com exceção do estimador SR , utilizando as metodologias MQ e MQP. Os estimadores SR e SPR possuem menor vício ao estimar o verdadeiro valor do parâmetro D , independente do tamanho amostral e do valor de s .

Analisando as estimativas do parâmetro de longa dependência, d , todos os estimadores subestimam o seu verdadeiro valor, independente da metodologia utilizada. O estimador com menor vício é o estimador GPH , utilizando as metodologias MQ e MQP. Por outro lado, o estimador com maior vício é o estimador $GPHT$ com a metodologia MM. Os estimadores semiparamétricos de D possuem maior vício e erro quadrático médio em comparação aos estimadores semiparamétricos de d , independente da metodologia utilizada.

O vício e o erro quadrático médio dos estimadores semiparamétricos para o parâmetro d sofrem pouca influência quando a sazonalidade varia. Nas estimativas do parâmetro D , quando s aumenta, o erro quadrático médio permanece praticamente constante.

O erro quadrático médio e o vício do estimador W diminuem quando o tamanho amostral aumenta. Mas, quando s aumenta, os mesmos aumentam. O estimador W possui menor erro quadrático médio, na maioria dos casos analisados, quando comparados com os estimadores semiparamétricos.

O vício do estimador W , para a estimação do parâmetro D , é maior do que o vício para os estimadores semiparamétricos. Quando s aumenta, o vício do estimador W aumenta passando a ser maior do que o vício da maioria dos estimadores semiparamétricos.

A contaminação das séries temporais por *outliers* do tipo IO causa pouca influência na estimação dos parâmetros do processo.

O estimador SPR possui menor erro quadrático médio, tanto na estima-

ção do parâmetro D , como na do parâmetro d , independente do tamanho amostral e do valor da sazonalidade. Dentre as metodologias, a MQ possui menor erro quadrático médio, seguida pela metodologia robusta MQP e por último a metodologia robusta MM. Estes resultados foram observados na estimação dos parâmetros d e D com séries temporais sem e com contaminação por *outliers* do tipo *AO*.

Na estimação do parâmetro D , para $n = 500$, o estimador SR , independente da metodologia utilizada, é competitivo com o estimador SPR . Para $n = 1000$, os estimadores SR , nas três metodologias e GPH e R , nas metodologias MQ e MQP, são competitivos com o estimador SPR .

Na estimação do parâmetro d , para $n = 500$, o estimador SR , nas três metodologias, e o estimador GPH , nas metodologias MQ e MQP, são competitivos com o estimador SPR . Para $n = 1000$, o estimador SR , nas três metodologias, e os estimadores GPH e R , nas metodologias MQ e MQP, são competitivos com o estimador SPR .

Para as estimativas de d , os estimadores GPH , R , SR e $GPHT$ utilizando as metodologias MQ e MQP, possuem menor vício. Todos os estimadores utilizando a metodologia MM subestimam o verdadeiro valor do parâmetro d .

O estimador SPR , independente da metodologia utilizada, é aquele com menor variação no vício quando s aumenta, independente do tamanho amostral. Além disso, este estimador possui o maior vício.

Os estimadores semiparamétricos possuem menor vício quando a série temporal está contaminada por *outliers* do tipo *IO* do que quando há contaminação por *outliers* do tipo *AO*.

Nas estimativas do parâmetro D , o estimador W possui maior vício do que todos os estimadores semiparamétricos aqui considerados. Na maioria dos casos, o seu erro quadrático médio também é maior, com exceção dos estimadores R e $GPHT$, na metodologia MM. Nas estimativas do parâmetro d , o estimador W possui menor erro quadrático médio do que os estimadores semiparamétricos, independente do tamanho amostral e do valor de s aqui considerados.

Comparando os resultados obtidos quando as séries temporais são contaminadas por *outliers* do tipo *IO* com os resultados obtidos quando as séries temporais não são contaminadas, o erro quadrático médio e o vício sofrem pouca influência quando há contaminação por *outliers* do tipo *IO*. Estes resultados já haviam sido mencionados por Rousseeuw e Leroy (2003), para os processos $ARMA(p, q)$.

Quando contaminamos as séries temporais com *outliers* do tipo *AO*, o erro quadrático médio e o vício, nas estimativas dos parâmetros dos SARFIMA completos aumentam. Este resultado foi observado nas simulações dos processos $SARFIMA(0, d, 0) \times (0, D, 0)_s$ com o mesmo tipo de contaminação.

Quando há contaminação por *outliers* do tipo *IO*, o estimador paramé-

trico W , para os processos SARFIMA completos, possui um comportamento semelhante quando as séries temporais não são contaminadas por *outliers*. Este resultado foi observado nas simulações com os processos SARFIMA $(0, d, 0) \times (0, D, 0)_s$.

Podemos dizer que, na grande maioria dos casos, o vício dos parâmetros d e D é parcialmente compensado pelo vício do parâmetro ϕ_1 e θ_1 .

Analisamos a série temporal dos níveis mensais do Rio Nilo em Aswan, cordialmente fornecida pelo Professor Dr. A. Montanari (Univesità de Bologna, Itália). Contaminamos a série temporal com *outliers* do tipo *AO*. Para esta série temporal real, ajustamos o modelo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com $s = 12$, $P = p = 1 = q = Q$, $\hat{d}_W = 0.0$, $\hat{D}_W = 0.1619$, $\hat{\phi}_1 = 0.6091$, $\hat{\Phi}_1 = 0.9909$, $\hat{\theta}_1 = -0.2130$ e $\hat{\Theta}_1 = 0.9371$. Quando não há contaminação por *outliers*, o modelo ajustado para a séries temporal é semelhante ao modelo quando não há contaminação, isto é, ajustamos o modelo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$, com $s = 12$, $P = p = 1 = q = Q$, $\hat{d}_W = 0.0$, $\hat{D}_W = 0.1980$, $\hat{\phi}_1 = 0.6124$, $\hat{\Phi}_1 = 0.9876$, $\hat{\theta}_1 = -0.2171$ e $\hat{\Theta}_1 = 0.9398$.

Referências

- [1] Akaike H. (1973). “Information Theory and an Extension of the Maximun Likelihood Principle”. *Proc. 2nd International Symposium of Information Theory* (Eds. B.N. Petrov e F. Csaki), pp. 267-281. Akademiai Kiado, Budapest.
- [2] Arteche, J. (2006). “Semiparametric Estimation in Perturbed Long Memory Series”. *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. **51**(4), pp. 2118-2141.
- [3] Arteche, J. e P.M. Robinson (2000). “Semiparametric Inference in Seasonal and Cyclical Long Memory Processes”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **21**(1), pp. 1-25.
- [4] Baillie, R.T. (1996). “Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics”. *Journal of Econometrics*, Vol. **73**, pp. 5-59.
- [5] Barnett, V. (1984). *Outliers in statistical data*. New York: John Wiley.
- [6] Bary, N.K. (1964). *A Treatise on Trigonometric series*. Vol. II. Pergamon Press, New York.
- [7] Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. New York: Chapman & Hall.
- [8] Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. New York: John Wiley.
- [9] Bingham, N.H., C.M. Goldie e J.L. Teugels (1987). *Regular Variation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [10] Bisognin, C. e S.R.C. Lopes (2005). “Processos Fracionários Generalizados”. *Anais da 11^a Escola de Séries Temporais e Econometria*, Vol **1**, pp. 111-111.

- [11] Bisognin, C. e S.R.C. Lopes (2007). “Estimating and Forecasting the Long Memory Parameter in the Presence of Periodicity”. *Journal of Forecasting*, Vol. **26**(6), pp. 405-427.
- [12] Box, G.E.P., G.M. Jenkins e G.C. Reinsel (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. New Jersey: Prentice Hall.
- [13] Box, G.E.P. e G.C. Tiao (1975). “Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **70**, pp. 70-79.
- [14] Brietzke, E.H.M., S.R.C. Lopes e C. Bisognin (2005). “A Closed Formula for the Durbin-Levinson’s Algorithm in Seasonal Fractionally Integrated Processes”. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. **42**(11-12), pp. 1191-1206.
- [15] Brockwell, P.J. e R.A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- [16] Bustos, O.H. e V.J. Yohai (1986). “Robust Estimates for ARMA Models”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **81**, pp. 155-168.
- [17] Carlin, J.B. e A.P. Dempster (1989). “Sensitivity Analysis of Seasonal Adjustments: Empirical Case Studies”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **84**(405), pp. 6-20.
- [18] Carlin, J.B., e A.P. Dempster (1985). “On Models and Methods for Bayesian Time Series Analysis”. *Journal of Econometrics*, Vol. **30**, pp. 67-90.
- [19] Chang, I. e G.C. Tiao (1983). “Estimation of time series parameters in the presence of outliers”. Technical Report 8, Statistics Research Center, University of Chicago.
- [20] Chang, I.H., G.C. Tiao e C. Cheng (1988). “Estimation of Time Series Parameters in the Presence of Outliers”. *Technometrics*, Vol. **30**, pp. 193-204.
- [21] Chung, C-F. (1996). “Estimating a Generalized Long Memory Process”. *Journal of Econometrics*, Vol. **73**, pp. 237-259.
- [22] Collet, J., D. Guégan e P. Valdes-Sosa (2003). “How Shall We Determine the Number and the Location of the Gegenbauer Frequencies? An Empirical Approach”. Note de Recherche IDHE-MORA n° 2003-09.

- [23] Crato, N. e Ray, B.K. (2002). “Semi-Parametric Smoothing Estimators for Long Memory Processes with Added Noise”. *Journal of Statistical Planning and Inference* Vol. **105**, pp. 283-297.
- [24] Crato, N. e H.M. Taylor (1996). “Stationary Persistent Time Series Misspecified as Nonstationary ARIMA”. *Statistische Hefte/Statistical Papers*, Vol. **37**, pp. 215-223.
- [25] Dahlhaus, R. (1989). “Efficient Parameter Estimation for Self-Similar Processes”. *Annals of Statistics*, Vol. **17**, pp. 1749-1766.
- [26] Denby, L. e R.D. Martin (1979). “Robust Estimation of the First-Order Autoregressive Parameter”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **74**, pp. 140-146.
- [27] Doukhan, P., G. Oppenheim e M.S. Taqqu (2003). *Theory and Applications of Long-Range Dependence*. Boston: Birkhäuser.
- [28] Draper, N. e H. Smith (1981). *Applied Regression Analysis*. New York: John Wiley.
- [29] Durrett, R. (1996). *Probability: Theory and Examples*. Belmont: Duxbury Press.
- [30] Ferrara, L. e D. Guégan (1999). “Estimation and Applications of Gegenbauer Processes”. Preprint INSEE n° 9927.
- [31] Ferrara, L. e D. Guégan (2001). “Forecasting with k-factor Gegenbauer processes: Theory and Applications”. *Journal of Forecasting*, Vol. **20**, pp. 581-601.
- [32] Figueiredo, D.G. (2003). *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: IMPA/Projeto Euclides.
- [33] Fox, A.J. (1972). “Outliers in Time Series”. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. **B-43**, pp. 350-363.
- [34] Fox, R. e M.S. Taqqu (1986). “Large-sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series”. *The Annals of Statistics*, Vol. **14**, pp. 517-532.
- [35] Geweke, J. e S. Porter-Hudak (1983). “The Estimation and Application of Long Memory Time Series Model”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **4**(4), pp. 221-238.
- [36] Giraitis, L. e R. Leipus (1995). “A Generalized Fractionally Differencing Approach in Long Memory Modelling”. *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **35**(1), pp. 53-65.

- [37] Gradshteyn, I.S. e I.M. Ryzhik (2000). *Table of Integrals, Series e Products*. San Diego: Academic Press.
- [38] Granger, C.W.J. e R. Joyeux (1980). “An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **1**(1), pp. 15-29.
- [39] Gray, H. L., N-F. Zhang e W.A. Woodward (1989). “On Generalized Fractional Processes”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **10**(3), pp. 233-257.
- [40] Halmos, P.R. (1969). *Measure Theory*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- [41] Hannan E.J. e B.G. Quinn (1979). “The Determination of the Order of an Autoregression”. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. **B-41**, pp. 190-195.
- [42] Hassler, U. (1994). “(Mis)Specification of Long Memory in Seasonal Time Series”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **15**(1), pp. 19-30.
- [43] Hosking, J.R.M. (1981). “Fractional Differencing”. *Biometrika*, Vol. **68**(1), pp. 165-176.
- [44] Hosking, J.R.M. (1984). “Modelling Persistence in Hydrological Time Series Using Fractional Differencing”. *Water Resources Research*, Vol. **20**(12), pp. 1898-1908.
- [45] Huber, P.J. (1981). *Robust Statistics*. New York: Wiley.
- [46] Hurst, H.E. (1951). “Long-term Storage Capacity of Reservoirs”. *Transactions of American Society in Civil Engineers*, Vol. **116**, pp. 165-167.
- [47] Hurvich, C.M. e B.K. Ray (1995). “Estimation of the Memory Parameter for Nonstationary or Noninvertible Fractionally Integrated Processes”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **16**(1), pp. 17-042.
- [48] Koopmans, L.H. (1974). *The Spectral Analysis of Time Series*. London: Academic Press.
- [49] Le, N.D., A.E. Raftery e R.D. Martin (1996). “Robust Bayesian Model Selection for Autoregressive processes with Additive Outliers”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **91**(433), pp. 123-131.

- [50] Lopes, S.R.C. (2007). “Long-range Dependence in Mean and Volatility: Models, Estimation and Forecasting”. In: Vares M.E. e V. Sidoravicius (eds). *EBP*. Rio de Janeiro: Birkhäuser.
- [51] Lopes, S.R.C. e B.V.M. Mendes (2006). “Bandwidth Selection in Classical and Robust Estimation of Long Memory”. *International Journal of Statistics and Systems*, Vol. **1**(2), pp. 167-190.
- [52] Lopes, S.R.C., B.P. Olbermann e V.A. Reisen (2004). “A Comparison of Estimation in Non-Stationary ARFIMA Processes”. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. **74**(5), pp. 339-347.
- [53] Reisen V.A., S.R.C. Lopes e M.R. Sena (2002). “Error and Model Misspecification in ARFIMA Processes”. *Brazilian Review Of Econometrics*, Vol. abf 21(1), pp. 101-135.
- [54] Mandelbrot, B.B. e J.R. Wallis (1969). “Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part One, Averages and Variances”. *Water Resources Research*, Vol. **5**(1), pp. 228-241.
- [55] Montanari, A., R. Rosso e M.S. Taqqu (2000). “A Seasonal Fractional ARIMA Model Applied to the Nile River Monthly Flows at Aswan”. *Water Resources Research*, Vol. **36**(5), pp. 1249-1259.
- [56] Morettin P.A. e C.M.C. Tolo (2004). *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: Edgard Blücher.
- [57] Olbermann, B.P. (2002). “Estimação em Classes de Processos Estocásticos com Decaimento Hiperbólico da Função de Autocorrelação”. Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, Porto Alegre.
- [58] Ooms, M (1995). “Flexible Seasonal Long Memory and Economic Time Series”. *Preprint of the Econometric Institute*, Erasmus University, Rotterdam.
- [59] Palardy, J. (2002). “Autoregressive Lag Selection Criteria and Random Contamination Models”. Technical Report, Youngstown State University.
- [60] Palma, J.A. (1998). *Outliers em Séries Temporais - Uma Abordagem no Domínio dos Modelos ARMA*. Dissertação de Mestrado, apresentada na Universidade de Lisboa - FCUL. Lisboa.
- [61] Palma, W. (2007). *Long-Memory Time Series - Theory and Methods*. New Jersey: John Wiley.

- [62] Peiris, M.S. e N. Singh (1996). “Predictors for Seasonal and Nonseasonal Fractionally Integrated Arima Models”. *Biometrika*, Vol. **38**(6), pp. 741-752.
- [63] Porter-Hudak, S. (1990). “An Application of the Seasonal Fractionally Differenced Model to the Monetary Aggregates”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **85**(410), pp. 338-344.
- [64] Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis in Time Series*. New York: Academic Press.
- [65] Ray, B.K. (1993). “Long-Range Forecasting of IBM Product Revenues Using a Seasonal Fractionally Differenced ARMA Model”. *International Journal of Forecasting*, Vol. **9**, pp. 255-269.
- [66] Reisen, V.A. e S.R.C. Lopes (1999). “Some Simulations and Applications of Forecasting Long-Memory Time Series Models”. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. **80**(2), pp. 269-287.
- [67] Robinson, P.M. (1995). “Log-Periodogram Regression of Time Series with Long Range Dependence”. *Annals of Statistics*, Vol. **23**(3), pp. 1048-1072.
- [68] Rousseeuw, P.J. (1984). “Least Median of Square Regression”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **79**, pp. 871-880.
- [69] Rousseeuw, P.J. e B.C. Zomeren (1990). “Unmasking Multivariate Outliers and Leverage Points”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **85**, pp. 633-651.
- [70] Rousseeuw, P.J. e A.M. Leroy (2003). *Rubust Regression and Outlier Detection*. New Jersey: John Wiley.
- [71] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. Auckland: Mcgraw-Hill.
- [72] Samarov, A. e M.S. Taqqu (1988). “On the Efficiency of the Sample Mean in Long-Memory Noise”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **9**, pp. 191-200.
- [73] Schwartz G. (1978). “Estimating the Dimension of a Model”. *Annals of Statistics*, Vol. **6**, pp. 461-464.
- [74] Sowell, F. (1992). “Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models”. *Journal of Econometrics*, Vol. **53**, pp. 165-188.

- [75] Sun, Y. e P.C.B. Phillips. (2003). “Nonlinear Log-Periodogram Regression for Perturbed Fractional Processes”. *Journal of Econometrics*, Vol. **115**(2), pp. 355-389.
- [76] Szegő, G. (1959). *Orthogonal polynomials*. New York: American Mathematical Society.
- [77] Taqqu, M.S., V. Teverovsky e W. Willinger (1995). “Estimators for Long Range Dependence: An Empirical Study”. *Fractals*, Vol. **3**(4), pp. 785-798.
- [78] Tsay, R.S. (1986). “Time Series Model Specification in the Presence of Outliers”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **81**, pp. 132-141.
- [79] Tukey, J.W. (1949). “The Sampling Theory of Power Spectrum Estimates”. *Symp. Appl. Autocorrelation Anal. Phys. Problems, Woods Hole, Massachusetts*, pp. 735.
- [80] Velasco C. (1999). “Gaussian Semiparametric Estimation of Nonstationary Time Series”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **20**(1), pp. 87-127.
- [81] Wei, W. (2005). *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. New York: Addison Wesley.
- [82] Whittle, P. (1951). *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. New York: Hafner.
- [83] Woodward, W.A., Q.C. Cheng e H.L. Gray (1998). “A k -Factor GARMA Long-Memory Model”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **19**(4), pp. 485-504.
- [84] Yajima Y. (1996). “Estimation of the Frequency of Unbounded Spectral Densities”. *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section 4-7*, American Statistical Association.
- [85] Yohai, V. J. (1987). “High breakdown point and high efficiency robust estimates for regression”. *Annals of Statistics*, Vol. **15**, pp. 642-656.
- [86] Zygmund, A. (1959). *Trigonometric Series*. Cambridge: University Series Cambridge Press.

Apêndice A

Neste apêndice apresentamos algumas definições e teoremas necessários para demonstrações de certos resultados nos Capítulos 2, 3 e 5. Estas definições e teoremas foram retirados de vários livros e artigos e têm como objetivo facilitar a leitura deste trabalho.

A.1 Funções de Variação Limitada e de Variação Suave

A seguir, apresentamos a definição de *função de variação limitada* e *função de variação suave no sentido de Zygmund*. Estas noções são necessárias na Seção 3.2 do Capítulo 3.

Definição A.1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real e seja $a < x_0 < x_1 < \dots < x_k < b$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Dizemos que $f(\cdot)$ é de *variação limitada*, sob o intervalo fechado $[a, b]$, se

$$\sup \left\{ \sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})| \right\} < \infty,$$

sob todas as possíveis partições do intervalo $[a, b]$. Denotamos por $BV[a, b]$ o conjunto das funções de variação limitada no intervalo $[a, b]$.

Definição A.2. Dizemos que $g : [-\pi, \pi] \rightarrow [0, \infty]$ é uma *função par, real e de variação suave* nas frequências w_j , para $j = 0, 1, \dots, [s/2]$, no sentido de Zygmund, onde $[x]$ significa a parte inteira de x , se satisfaz as duas condições a seguir.

- i) Para algum $\delta > 0$, $g(w)|w - w_j|^\delta$ é crescente (respectivamente, decrescente) e $g(w)|w - w_j|^{-\delta}$ é decrescente (respectivamente, crescente) em alguma vizinhança à direita (respectivamente, à esquerda) de w_j ;

- ii) $g(\cdot)$ é uma função de variação limitada no conjunto $(0, \pi] \setminus \bigcup_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} [w_j - \epsilon, w_j + \epsilon]$, para algum $\epsilon > 0$.

Observação A.1:

1) Uma função é de *variação suave* em zero (respectivamente, infinito) se ela é limitada em um intervalo finito e se, para todo $x > 0$, $g(tx)/g(t) \rightarrow 1$, quando $t \rightarrow 0$ (respectivamente, infinito). As funções constante e logarítmica são exemplos de funções de variação suave.

2) A função $g(\cdot)$ de variação suave na frequência 0, no sentido de Zygmund, satisfaz a condição $g(tx)/g(t) \rightarrow 1$, quando $t \rightarrow 0$, para todo $x > 0$, isto é, g é de variação limitada no sentido de Karamata. Portanto, toda função de variação suave na frequência zero, no sentido de Zygmund, é também de variação limitada no sentido de Karamata. Para maiores detalhes ver Bingham et al. (1989).

A.2 Ordens de Aproximação \mathcal{O} e o

Nesta seção, apresentamos as definições das ordens de aproximação \mathcal{O} e o e também algumas propriedades das mesmas. Estas noções são utilizadas nas Seções 2.2 e 2.4 do Capítulo 2 e na Seção 3.2 do Capítulo 3.

Definição A.3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais quaisquer. Então, dizemos que $f(\cdot)$ é de ordem menor ou igual a $g(\cdot)$, denotada por $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, quando $x \rightarrow \infty$, se e somente se, existem $A > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, tais que $|f(x)| \leq A|g(x)|$, para todo $x > x_0$. Em outras palavras, $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, quando $x \rightarrow \infty$, significa que $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ é limitada para x suficientemente grande.

Definição A.4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais quaisquer. Então, dizemos que $f(\cdot)$ é de ordem (estritamente) menor a $g(\cdot)$, denotada por $f(x) = o(g(x))$, quando $x \rightarrow \infty$, se e somente se, para todo $A > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $|f(x)| < A|g(x)|$, para todo $x > x_0$. Em outras palavras, $f(x) = o(g(x))$, quando $x \rightarrow \infty$, significa que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Definição A.5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais quaisquer. Então, dizemos que $f(\cdot)$ é assintoticamente igual a $cg(\cdot)$ e denotamos por $f(x) \sim cg(x)$, quando $x \rightarrow x_0$, se e somente se, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, onde c é uma constante finita.

Observação A.1. Nos Capítulos 2 ao 5, em algumas definições e teoremas, utilizamos a Definição A.5 com $c = 1$.

A seguir, apresentamos algumas propriedades, operações elementares e relações dos símbolos apresentados nas Definições A.3-A.5.

Propriedades:

- i) A relação da Definição A.5 é uma relação de equivalência, isto é, ela é reflexiva, simétrica e transitiva.
- ii) Multiplicação por uma constante: $\mathcal{O}(kf(x)) = k\mathcal{O}(f(x)) = \mathcal{O}(f(x))$, para todo $k \neq 0$.
- iii) Adição de uma constante: $\mathcal{O}(k + f(x)) = k + \mathcal{O}(f(x)) = \mathcal{O}(f(x))$.
- iv) Composição: $\mathcal{O}(\mathcal{O}(f(x))) = \mathcal{O}(f(x))$.
- v) $\mathcal{O}(f(x)) + \mathcal{O}(f(x)) = \mathcal{O}(f(x))$.

As propriedades acima citadas, também são válidas para o símbolo o .

- vi) $o(g(x)) = \mathcal{O}(g(x))$, mas $\mathcal{O}(g(x)) \neq o(g(x))$.
- vii) Se $f(x) \sim g(x)$, então $f(x) = g(x)(1 + o(1))$.
- viii) $f(x) = o(1)$, quando $x \rightarrow \infty$, significa que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.
- ix) $f(x) = \mathcal{O}(1)$, quando $x \rightarrow \infty$, significa que $|f(x)|$ é limitada, quando x tende ao ∞ .

A.3 Coeficientes de Fourier

O Teorema A.1 a seguir, apresenta uma expressão assintótica para os coeficientes da expansão em série de Fourier de uma função que comporta-se como $\lambda^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$. Este teorema é muito útil para encontrarmos a expressão assintótica da função de autocovariância dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s, vista no Teorema 3.3.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário com função densidade espectral $S_X(w)$, $w \in (0, \pi]$, e função de autocovariância $\gamma_X(h)$, $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Suponha que a função densidade espectral $S_X(w)$ comporta-se como $|w|^{-2d}$, quando $w \rightarrow 0$, isto é, quando $0 < d < 0.5$, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ exibe comportamento de longa dependência.

Seguindo a notação dos capítulos anteriores, podemos dizer que

$$S_X(w) = f_X(w)b(w),$$

onde $b(\cdot)$ uma função de variação limitada e de variação suave.

No caso dos processos ARFIMA(0, d , 0), a função densidade espectral é dada por

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w}{2} \right) \right|^{-2d} \sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |w|^{-2d}, \quad \text{quando } \lambda \rightarrow 0,$$

onde $0 < d < 0.5$ e $w \in (0, \pi]$.

Pelo Teorema 2.24 em Zygmund (1959) (ver também Samarov e Taqqu, 1988), temos o seguinte teorema.

Teorema A.1. *Seja*

$$S_X(w) = f_X(w)b(w), \quad \text{para } w \in [0, a],$$

$0 < a \leq \pi$, onde $b(\cdot)$ é uma função de variação suave no sentido de Zygmund em $w = 0$ e possui variação limitada no intervalo (ε, a) , para qualquer $0 < \varepsilon < a$. Então, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\int_0^a S_X(w) \cos(nw) dw \sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |n|^{2d-1} b\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma(1-2d) \sin(d\pi), \quad (\text{A.1})$$

$$\int_0^a S_X(w) \sin(nw) dw \sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |n|^{2d-1} b\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma(1-2d) \cos(d\pi),$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama.

A.4 Ergodicidade

O Lema A.1 abaixo apresenta as condições necessárias para que um processo estacionário seja ergódico. Este lema é importante para a prova da ergodicidade dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s e GARMA(p, u, λ, q) (ver Seção 3.4). Sua demonstração pode ser encontrada em Olbermann (2002).

Lema A.1. *Seja $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico ruído branco (ver Definição 2.3). O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado por*

$$X_t = \sum_{j=0}^n a_j \varepsilon_{j-t}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

é estacionário e ergódico. Mais geralmente, se $\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_j^2 < \infty$ então, o processo $Y_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} a_j \varepsilon_{t-j}$ é ergódico.

A.5 Convergência

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre convergência de funções e séries os quais são muito úteis nas demonstrações dos teoremas na Seção 3.3, onde tratamos da causalidade e inversibilidade dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s.

O teorema a seguir, fornece as condições para a convergência quase certa de uma seqüência de funções integráveis. Sua demonstração pode ser encontrada em Halmos (1969).

Teorema A.2. *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}}$ uma seqüência de funções integráveis tal que*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} \int |f_n| d\mu < \infty.$$

Então, a série $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} |f_n|$ e, conseqüentemente, $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} f_n$, convergem quase certamente (a.e.) para uma função integrável f e

$$\int f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} \int f_n d\mu.$$

O Teorema A.3 fornece um importante resultado sobre convergência de séries útil para a demonstração da convergência em quadrado médio das representações média móvel e auto-regressiva infinitas dos processos SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ dadas na Seção 3.3 do Capítulo 3.

Teorema A.3. *Seja $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} a_n$ uma série de termos positivos convergente. Então, a série $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} a_n^2$ converge.*

Demonstração: Por hipótese, temos que $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} a_n$ converge. Logo $a_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $a_n^2 < a_n$, para todo $n \geq n_0$.

Desta forma,

$$\sum_{n \geq n_0} a_n^2 \leq \sum_{n \geq n_0} a_n < \infty,$$

ou seja,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} a_n^2 = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n^2 + \sum_{n \geq n_0} a_n^2 < \infty,$$

Portanto, a série $\sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq}} a_n^2$ converge. □

A.6 Estimação da Função Densidade Espectral

Nesta seção, apresentamos os estimadores para a função densidade espectral de um processo estocástico. Estes resultados são muito úteis no Capítulo 5, onde descrevemos alguns métodos de estimação para estimar os parâmetros do processo SARFIMA $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário com média μ e função de autocovariância, denotada por $\gamma_x(\cdot)$, absolutamente convergente. Sob

estas condições, o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por

$$f_x(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_x(k) e^{-ikw}, \text{ para } w \in (0, \pi]. \quad (\text{A.2})$$

Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal gerada a partir de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, com função de autocovariância não necessariamente absolutamente convergente. Então, a função periodograma da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ é definida por

$$I(w) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-itw} \right|^2, \text{ para todo } w \in (0, \pi]. \quad (\text{A.3})$$

Brockwell e Davis (1991) demonstram que a equação (A.3) é equivalente a

$$I_n(w) = \begin{cases} n|\bar{X}|^2, & \text{se } w = 0 \\ \sum_{|k| < n} \hat{\gamma}_x(k) e^{-itw}, & \text{se } w \in (0, \pi], \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

onde $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$ é a média da série temporal e $\hat{\gamma}_x(\cdot)$ é a função de autocovariância amostral dada por

$$\hat{\gamma}_x(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|k|} (X_t - \bar{X})(X_{t+|k|} - \bar{X}). \quad (\text{A.5})$$

Pela equação (A.4), um estimador natural para $f_x(w)$, para $w \in (0, \pi]$ é $I(w)/2\pi$.

Na prática, a função periodograma só poderá ser calculada para um número finito de frequências $w \in (0, \pi]$. Pode-se demonstrar que (A.3) fica completamente determinada por seus valores nas frequências de Fourier $w_j = \frac{2\pi j}{n}$, para $j \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

Pela expressão (A.3) temos que $I_n(\cdot)/2\pi$ é assintoticamente não-viciado para a função densidade espectral, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{I_n(\cdot)}{2\pi} \right) = f_x(w).$$

Apesar da função periodograma ser um estimador assintoticamente não-viciado, ela é inconsistente para a função densidade espectral, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\frac{I_n(\cdot)}{2\pi} \right) \neq 0.$$

Em vista disso, Tukey (1949) propõe um estimador para a função densidade espectral baseado na função de autocovariância ponderada ou suavizada o qual é não-viciado e consistente. Neste caso, o processo de suavização ocorre no domínio do tempo e para a obtenção do estimador passa-se para o domínio da frequência.

Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal gerada a partir de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Então, o estimador da função densidade espectral, chamado *estimador suavizado de covariâncias*, denotado por $I_{smooth}(\cdot)$, é dado por

$$I_{smooth}(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq m} \Lambda\left(\frac{k}{m}\right) \hat{\gamma}_X(k) e^{-ikw}, \text{ para } w \in (0, \pi], \quad (\text{A.6})$$

onde $\hat{\gamma}_X(\cdot)$ é a função de autocovariância amostral dada pela expressão (A.5), $m = n^\beta$, para $0 \leq \beta \leq 1$ e $\Lambda(x)$ é uma função par, contínua por intervalos de x satisfazendo as condições

- A.i) $0 \leq \Lambda(x) \leq \Lambda(0) = 1$,
- A.ii) $\Lambda(-x) = \Lambda(x)$, para todo x ,
- A.iii) $\Lambda(x) = 0$, para $|x| > 1$.

A função $\Lambda(\cdot)$ é chamada de *função de ponderação*, *função peso* ou *núcleo*.

Note que, pela propriedade A.iii) da função de ponderação, o produto $\Lambda\left(\frac{k}{m}\right) \hat{\gamma}_X(k) = 0$, para $|k| > m$.

Um processo de suavização alternativo ao anterior é aplicar o procedimento de suavização no próprio domínio das frequências. Neste caso, obtemos o chamado *estimador suavizado de periodogramas*.

A transformada de Fourier da função de ponderação ou núcleo, denotada por $\Lambda_q(\cdot)$, é chamada *janela espectral*, e é dada por

$$\Lambda_q(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-iwk} \Lambda(k), \text{ para } w \in (0, \pi], \quad (\text{A.7})$$

onde $q < n$ é um inteiro que depende do tamanho da amostra n .

A janela espectral $\Lambda_q(\cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\Lambda_q(-w) = \Lambda_q(w)$, para todo w ;
- (ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_q(w) dw = \Lambda(0) = 1$.

Note que (A.6) é a transformada de Fourier do produto $\Lambda_q(\cdot) \hat{\gamma}_X(\cdot)$ e essa transformada é a convolução das transformadas de Fourier de $\Lambda_q(\cdot)$ e de $\hat{\gamma}_X(\cdot)$.

Desta forma, a expressão do estimador suavizado de covariância, dado pela equação (A.6), é equivalente a

$$I_{smooth}(w) = \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_q(w - \lambda)I(\lambda)d\lambda. \quad (A.8)$$

Aproximando a integral em (A.8) pela sua soma de Riemann, temos

$$I_{smooth}(w) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Lambda_q(w - w_j)I(w_j), \quad (A.9)$$

onde $w_j = \frac{2\pi j}{n}$ e $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x .

Pela soma de Riemann, decorre que

$$\frac{2\pi}{n} \sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Lambda_q(w_j) \cong \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_q(w)dw = 1. \quad (A.10)$$

Logo, (A.10) é assintoticamente equivalente ao estimador da forma

$$I_{smooth}(w) = \sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} K(w - w_j)I(w_j), \text{ para } w \in (0, \pi], \quad (A.11)$$

onde $K(\cdot)$ é uma *função de ponderação* real, simétrica e periódica, tal que

$$\sum_{j=-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} K(w_j) = 1, \quad (A.12)$$

com $w_j = \frac{2\pi j}{n}$, com $j \in \{-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

O estimador dado pela expressão (A.11) é denominado *estimador suavizado de periodogramas* ou somente *função periodograma suavizado*.

Segundo Koopmans (1974), em ambos os casos, obtemos estimadores que são assintoticamente não-viciados e consistentes para a função densidade espectral de um processo estocástico estacionário.

A função periodograma e o estimador suavizado de covariância são utilizados, respectivamente, nos estimadores *GPH* e *SPR*, propostos no Capítulo 5.

A.7 Generalização da Representação de Fejér

Nesta seção, apresentamos a generalização da representação de Fejér para funções polinomiais trigonométricas não negativas. A generalização desta representação normalizada (e sua extensão para uma certa classe de funções não

negativas) é de grande importância na discussão do comportamento assintótico de polinômios ortogonais. Estas noções são necessárias na demonstração do Lema 2.1, do Capítulo 2.

Os Teoremas A.4 e A.5, a seguir, apresentam a representação de Fejér para funções polinomiais trigonométricas.

Teorema A.4. *Seja $g(w)$ uma função polinomial trigonométrica com coeficientes reais e não-negativa para todos os valores de w . Então, existe um polinômio $p(\cdot)$ de mesmo grau que $g(\cdot)$ tal que $g(w) = |p(z)|^2$, onde $z = e^{-iw}$. Reciprocamente, se $z = e^{-iw}$, a expressão $|p(z)|^2$ sempre representa uma função polinomial trigonométrica em w de mesmo grau do polinômio $p(\cdot)$.*

A representação em questão, contudo, não é única. De fato, se α denota uma raiz qualquer do polinômio $p(\cdot)$, o polinômio $p(z)(1-\bar{\alpha}z)/(z-\alpha)$ fornece outra representação. Então, assumindo $g(w) \neq 0$, podemos gradualmente remover todos os zeros para $|z| < 1$ e obtemos o seguinte teorema:

Teorema A.5. *Seja $g(\cdot)$ a função satisfazendo a condição do Teorema A.4 e $g(w) \neq 0$. Então, a representação $g(w) = |h(e^{-iw})|^2$ existe tal que $h(z)$ é um polinômio de mesmo grau que $g(w)$, com $h(z) \neq 0$ em $|z| < 1$, e $h(0) > 0$. Este polinômio é unicamente determinado. Se $g(\cdot)$ é um polinômio de cossenos, $h(\cdot)$ é um polinômio com coeficientes reais.*

A generalização da representação de Fejér segue abaixo.

Seja $g(\cdot)$ uma função polinomial trigonométrica não identicamente nula. De acordo com o Teorema A.5, existe uma função $h(\cdot)$ de mesmo grau, unicamente determinada, com as seguintes condições:

- a) $g(w) = |h(e^{-iw})|^2 = |h(z)|^2$, onde $z = e^{-iw}$;
 - b) $h(z)$ é diferente de zero em $|z| < 1$;
 - c) $h(0)$ é real e positiva.
- (A.13)

Obviamente temos

$$\log(g(w)) = 2\Re\{\log(h(z))\}, \text{ onde } z = e^{-iw}. \quad (\text{A.14})$$

A função $\log(h(z))$ é regular para $|z| \leq 1$ exceto nos pontos $z = e^{-iw}$ os quais correspondem aos zeros de $g(w)$ e nos quais ambas as funções $\log(g(w))$ e $\log(h(z))$ tornam-se logaritmicamente infinitas. Temos que $\log(h(0))$ é real. A função $2\Re\{\log(h(z))\}$ é regular e harmônica para $|z| < 1$ e tem valores de fronteira absolutamente integráveis $\log(g(w))$. Aplicando o Teorema do Valor Médio de Gauss, obtemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(g(w)) dw = 2\Re\{\log(h(0))\} = 2\log(h(0)).$$

ou seja,

$$(h(0))^2 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(g(w))dw\right).$$

A última expressão é chamada de *média geométrica* da função $g(\cdot)$.

O Teorema A.6 a seguir, é o Teorema do Valor Médio de Gauss utilizado na generalização da representação de Fejér.

Teorema A.6. *Seja Ω um domínio em \mathbb{C} e suponha que $f(\cdot)$ seja uma função analítica em Ω . Além disso, seja C um círculo em Ω de centro z_0 e raio r . Então, $f(z_0)$ é o valor médio de $f(\cdot)$ em C , isto é,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{iw}) dw.$$

Apêndice B

Neste apêndice apresentamos uma demonstração alternativa para o Lema 2.1, do Capítulo 2. O Lema B.1 abaixo, apresenta o valor da integral do logaritmo da função densidade espectral de um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, dada pela equação (2.24), no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Lema B.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ dado pela Definição 2.9, causal e inversível cuja função densidade espectral $f_x(\cdot)$ é dada pela equação (2.25). Então,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln[f_x(w)] dw = 2\pi \ln\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\right), \quad (\text{B.1})$$

onde $\sigma_\varepsilon^2/2\pi$ é a função densidade espectral do processo ruído branco, denotado por $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Demonstração: Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ dado pela expressão (2.24), cuja função densidade é dada pela expressão (2.25).

Então, podemos reescrever a função densidade espectral $f_x(\cdot)$, para todo $w \in (0, \pi]$, da seguinte forma

$$\begin{aligned} f_x(w) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-iw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2} \prod_{j=1}^k |2(\cos(w) - u_j)|^{-2\lambda_j} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-iw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2} \prod_{j=1}^k |2(\cos(w) - \cos(G_j))|^{-2\lambda_j} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-iw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2} \prod_{j=1}^k \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w - G_j}{2}\right) 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w + G_j}{2}\right) \right|^{-2\lambda_j} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde $G_j = \cos^{-1}(u_j)$, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são, respectivamente, os polinômios de grau p e q dados pela equação (2.2).

Aplicando a função logarítmica em ambos os lados da equação (B.2) temos

$$\begin{aligned}
\ln(f_X(w)) &= \ln \left[\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-iw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2} \prod_{j=1}^k \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w - G_j}{2} \right) 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w + G_j}{2} \right) \right|^{-2\lambda_j} \right] \\
&= \ln \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \right) + \ln |\theta(e^{-iw})|^2 - \ln |\phi(e^{-iw})|^2 \\
&\quad + \sum_{j=1}^k (-\lambda_j) \ln \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w - G_j}{2} \right) 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w + G_j}{2} \right) \right|^2. \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

Integrando a equação (B.3) de $-\pi$ a π em relação a w , temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \ln(f_X(w)) dw &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \right) dw + \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\theta(e^{-iw})|^2 dw - \int_{-\pi}^{\pi} \ln |\phi(e^{-iw})|^2 dw \\
&\quad + \sum_{j=1}^k (-\lambda_j) \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w - G_j}{2} \right) 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w + G_j}{2} \right) \right|^2 dw. \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$

Resolvendo a primeira integral do lado direito da expressão (B.4), temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \right) dw = 2\pi \ln \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \right).$$

Vamos supor que o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seja causal e inversível. Segundo Sowell (1992), podemos escrever o polinômio $\phi(\cdot)$, dado pela equação (2.2), da seguinte forma

$$\phi(x) = \prod_{\ell=1}^p (1 - \rho_\ell x),$$

onde $1/\rho_\ell$ são as raízes do polinômio $\phi(\cdot)$ e $|\rho_\ell| < 1$, para $\ell \in \{1, \dots, p\}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
|\phi(e^{-iw})|^2 &= \left| \prod_{\ell=1}^p (1 - \rho_\ell e^{-iw}) \right|^2 = \prod_{\ell=1}^p |1 - \rho_\ell e^{-iw}|^2 \\
&= \prod_{\ell=1}^p (1 - \rho_\ell e^{iw}) (1 - \rho_\ell e^{-iw}) = \prod_{\ell=1}^p (1 - 2\rho_\ell \cos(w) + \rho_\ell^2). \quad (\text{B.5})
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \ln |\phi(e^{-iw})|^2 dw &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left(\prod_{\ell=1}^p (1 - 2\rho_\ell \cos(w) + \rho_\ell^2) \right) dw \\
&= \sum_{\ell=1}^p \int_{-\pi}^{\pi} \ln (1 - 2\rho_\ell \cos(w) + \rho_\ell^2) dw = 0. \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

Para a terceira igualdade em (B.6) referenciamos Gradshteyn e Ryzhik (2000) (fórmula 4.397.16, página 586), onde

$$\int_0^\pi \frac{\ln(1 - 2a \cos(x) + a^2)}{1 - 2b \cos(x) + b^2} dx = \frac{2\pi \ln(1 - ab)}{1 - b^2}, \quad (\text{B.7})$$

com $a^2 \leq 1$ e $b^2 < 1$. Usamos a fórmula (B.7) para $a = |\rho_\ell| < 1$, $1 \leq \ell \leq p$ e $b = 0$.

De forma análoga, provamos que

$$\int_{-\pi}^\pi \ln|\theta(e^{-iw})|^2 dw = 0.$$

A seguir, demonstramos que

$$\sum_{j=1}^k (-\lambda_j) \int_{-\pi}^\pi \ln \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w - G_j}{2} \right) 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w + G_j}{2} \right) \right|^2 dw = 0. \quad (\text{B.8})$$

Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, temos que

$$\begin{aligned} & (-\lambda_j) \int_{-\pi}^\pi \ln \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w - G_j}{2} \right) 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w + G_j}{2} \right) \right|^2 dw \\ &= (-\lambda_j) \left\{ \int_{-\pi}^\pi \ln \left(4 \left| \operatorname{sen} \left(\frac{w - G_j}{2} \right) \right|^2 \right) dw + \int_{-\pi}^\pi \ln \left(4 \left| \operatorname{sen} \left(\frac{w + G_j}{2} \right) \right|^2 \right) dw \right\} \\ &= (-\lambda_j) \left\{ 4\pi \ln(4) + 2 \int_{-\pi}^\pi \ln \left| \operatorname{sen} \left(\frac{w - G_j}{2} \right) \right| dw + 2 \int_{-\pi}^\pi \ln \left| \operatorname{sen} \left(\frac{w + G_j}{2} \right) \right| dw \right\}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = \frac{w - G_j}{2}$ e $y = \frac{w + G_j}{2}$, a integral desejada torna-se

$$\begin{aligned} & (-\lambda_j) \int_{-\pi}^\pi \ln \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w - G_j}{2} \right) 2 \operatorname{sen} \left(\frac{w + G_j}{2} \right) \right|^2 dw \\ &= (-\lambda_j) \left\{ 4\pi \ln(4) + 4 \int_{-\frac{\pi - G_j}{2}}^{\frac{\pi - G_j}{2}} \ln |\operatorname{sen}(y)| dy + 4 \int_{-\frac{\pi + G_j}{2}}^{\frac{\pi + G_j}{2}} \ln |\operatorname{sen}(y)| dy \right\} \\ &= (-\lambda_j) \left\{ 4\pi \ln(4) + 4 \int_{-\frac{\pi - G_j}{2}}^0 \ln |\operatorname{sen}(y)| dy + 4 \int_0^{\frac{\pi - G_j}{2}} \ln |\operatorname{sen}(y)| dy \right. \\ &\quad \left. + 4 \int_{-\frac{\pi + G_j}{2}}^0 \ln |\operatorname{sen}(y)| dy + 4 \int_0^{\frac{\pi + G_j}{2}} \ln |\operatorname{sen}(y)| dy \right\}. \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Mas,

$$\int \ln|\operatorname{sen}(y)| dy = \frac{y}{2} \ln(\operatorname{sen}(y))^2 - y \ln(1 - e^{2iy}) + \frac{i}{2} (y^2 + \operatorname{PolyLog}[2, e^{2iy}]), \quad (\text{B.10})$$

onde $\operatorname{PolyLog}[\cdot, \cdot]$ é a função poli-logarítmica definida pela soma

$$\operatorname{PolyLog}[a, z] = \sum_{j \geq 1} \frac{z^j}{j^a},$$

para todo $a \in \mathbb{Z}_{\geq}$ e z pertencente ao disco unitário aberto. Na expressão (B.10) temos $a = 2$, a função poli-logarítmica pode ser definida pela integral

$$\operatorname{PolyLog}[2, z] = \int_z^0 \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

Portanto, substituindo a equação (B.10) na equação (B.9), temos

$$\begin{aligned} & (-\lambda_j) \left\{ 4\pi \ln(4) + \frac{1}{6} \left[-i(\pi^2 + 6\pi G_j + 3G_j^2) + 6(\pi + G_j) \left[-2 \ln(1 + e^{-iG_j}) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \ln(\cos^2(G_j/2)) \right] - 12i \operatorname{PolyLog}[2, -e^{-iG_j}] \right] + \frac{1}{6} \left[i(\pi^2 - 6\pi G_j + 3G_j^2) \right. \right. \\ & \left. \left. + 6(\pi - G_j) \left[-2 \ln(1 + e^{-iG_j}) + \ln(\cos^2(G_j/2)) \right] + 12i \operatorname{PolyLog}[2, -e^{-iG_j}] \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} \left[-i(\pi^2 - 6\pi G_j + 3G_j^2) + 6(\pi - G_j) \left[-2 \ln(1 + e^{iG_j}) + \ln(\cos^2(G_j/2)) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - 12i \operatorname{PolyLog}[2, -e^{iG_j}] \right] + \frac{1}{6} \left[i(\pi + 6\pi G_j + 3G_j^2) + 6(\pi + G_j) \left[-2 \ln(1 + e^{iG_j}) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \ln(\cos^2(G_j/2)) \right] + 12i \operatorname{PolyLog}[2, -e^{-iG_j}] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Simplificando a expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
& (-\lambda_j) \left\{ 4\pi \ln(4) + 2\pi \left[-iG_j - 2\ln(1 + e^{-iG_j}) + \ln(\cos^2(G_j/2)) \right] \right. \\
& \quad \left. + 2\pi \left[iG_j - 2\ln(1 + e^{iG_j}) + \ln(\cos^2(G_j/2)) \right] \right\} \\
= & (-\lambda_j) \left\{ -4\pi \left[\ln(1 + e^{-iG_j}) + \ln(1 + e^{iG_j}) - \ln(4 \cos^2(G_j/2)) \right] \right\} \\
= & 4\lambda_j \pi \left\{ \ln(2 + 2 \cos(G_j/2)) - \ln(4 \cos^2(G_j/2)) \right\} \\
= & 4\lambda_j \pi \left\{ \ln(4 \cos^2(G_j/2)) - \ln(4 \cos^2(G_j/2)) \right\} = 0.
\end{aligned}$$

A penúltima igualdade segue da equação trigonométrica $1 + \cos(2a) = 2 \cos^2(a)$.

Assim, demonstramos a expressão (B.8). Portanto, segue o resultado. \square

Apêndice C

As tabelas a seguir, apresentam os resultados de estimação do parâmetro dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s (ver Definição 3.2), através dos métodos semiparamétricos e suas versões robustas e do método paramétrico.

Da mesma forma que no Capítulo 6, o estudo de simulações de Monte Carlo foi realizado para os casos em que o processo SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s é estacionário e possui longa dependência, isto é, quando $0 < d + D < 0.5$, $0 < D < 0.5$ e todas as raízes das equações $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ e $\phi(z)\Phi(z^s) = 0$ estão fora do círculo unitário. Para maiores detalhes sobre as propriedades sobre os processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s ver o Teorema 3.2, Capítulo 3.

C.1 Estimação Sem Contaminação

Nesta seção, apresentamos os resultados da estimação dos parâmetros dos processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s. Nesta seção os processos não possuem contaminação por *outliers*.

Resultado da Estimação dos Processos

SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$)_s

Apresentamos os resultados da estimação para os processos SARFIMA($0, d, 0$) \times ($0, D, 0$)_s sem contaminação por *outliers*.

Tabela C.1: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 4$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2027	0.2011	0.1926	0.1946	0.2002	0.1994
vício	0.0027	0.0011	-0.0074	-0.0054	0.0002	-0.0006
eqm	0.0028	0.0024	0.0049	0.0051	0.0032	0.0029
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2023	0.2004	0.1942	0.1945	0.2002	0.1996
vício	0.0023	0.0004	-0.0058	-0.0055	0.0002	-0.0004
eqm	0.0031	0.0032	0.0054	0.0064	0.0035	0.0038
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2089	0.2011	0.2051	0.2006	0.2077	0.2005
vício	0.0089	0.0011	0.0051	0.0006	0.0077	0.0005
eqm	0.0020	0.0019	0.0037	0.0036	0.0028	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2043	0.1945	0.2030	0.1983	0.2063	0.1984
vício	0.0043	-0.0055	0.0030	-0.0017	0.0063	-0.0016
eqm	0.0018	0.0016	0.0034	0.0030	0.0027	0.0022
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2080	0.2034	0.2009	0.1972	0.2101	0.2019
vício	0.0080	0.0034	0.0009	-0.0028	0.0101	0.0019
eqm	0.0041	0.0037	0.0070	0.0065	0.0046	0.0040
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2011	0.2032	0.1952	0.2006	0.1999	0.2014
vício	0.0011	0.0032	-0.0048	0.0006	-0.0001	0.0014
eqm	0.0012	0.0010	0.0029	0.0023	0.0015	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2011	0.2031	0.1965	0.2008	0.2003	0.2024
vício	0.0011	0.0031	-0.0035	0.0008	0.0003	0.0024
eqm	0.0013	0.0012	0.0030	0.0029	0.0016	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2048	0.2020	0.2022	0.2018	0.2038	0.2013
vício	0.0048	0.0020	0.0022	0.0018	0.0038	0.0013
eqm	0.0008	0.0008	0.0016	0.0015	0.0012	0.0012
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2023	0.1984	0.2019	0.2009	0.2027	0.2008
vício	0.0023	-0.0016	0.0019	0.0009	0.0027	0.0008
eqm	0.0008	0.0007	0.0016	0.0012	0.0012	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2029	0.2048	0.1965	0.2020	0.2024	0.2035
vício	0.0029	0.0048	-0.0035	0.0020	0.0024	0.0035
eqm	0.0020	0.0018	0.0038	0.0032	0.0024	0.0022

Tabela C.2: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1739	0.1957	0.1886	0.1986
vício	-0.0261	-0.0043	-0.0114	-0.0014
eqm	0.0040	0.0015	0.0016	0.0007

Tabela C.3: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 4$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1015	0.3025	0.0959	0.2997	0.1020	0.3036
vício	0.0015	0.0025	-0.0041	-0.0003	0.0020	0.0036
eqm	0.0027	0.0026	0.0054	0.0050	0.0033	0.0029
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1012	0.3023	0.0957	0.2984	0.1008	0.3020
vício	0.0012	0.0023	-0.0043	-0.0016	0.0008	0.0020
eqm	0.0029	0.0034	0.0058	0.0061	0.0035	0.0038
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1051	0.3035	0.1033	0.3007	0.1046	0.3028
vício	0.0051	0.0035	0.0033	0.0007	0.0046	0.0028
eqm	0.0018	0.0021	0.0038	0.0039	0.0027	0.0027
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1012	0.2980	0.1022	0.3000	0.1035	0.3022
vício	0.0012	-0.0020	0.0022	0.0000	0.0035	0.0022
eqm	0.0017	0.0017	0.0034	0.0030	0.0025	0.0022
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1085	0.3078	0.0959	0.2980	0.1071	0.3050
vício	0.0085	0.0078	-0.0041	-0.0020	0.0071	0.0050
eqm	0.0046	0.0042	0.0081	0.0070	0.0049	0.0045
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1017	0.3027	0.0971	0.3002	0.1021	0.3010
vício	0.0017	0.0027	-0.0029	0.0002	0.0021	0.0010
eqm	0.0012	0.0011	0.0029	0.0024	0.0015	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1014	0.3022	0.0994	0.2989	0.1038	0.3011
vício	0.0014	0.0022	-0.0006	-0.0011	0.0038	0.0011
eqm	0.0012	0.0013	0.0029	0.0029	0.0016	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1030	0.3023	0.1027	0.3017	0.1032	0.3020
vício	0.0030	0.0023	0.0027	0.0017	0.0032	0.0020
eqm	0.0008	0.0009	0.0015	0.0016	0.0011	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1008	0.2991	0.1021	0.3012	0.1028	0.3013
vício	0.0008	-0.0009	0.0021	0.0012	0.0028	0.0013
eqm	0.0008	0.0007	0.0015	0.0013	0.0011	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1062	0.3038	0.1009	0.3007	0.1058	0.3035
vício	0.0062	0.0038	0.0009	0.0007	0.0058	0.0035
eqm	0.0020	0.0018	0.0036	0.0035	0.0022	0.0020

Tabela C.4: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.0803	0.2936	0.0950	0.2963
vício	-0.0197	-0.0064	-0.0050	-0.0037
eqm	0.0030	0.0015	0.0014	0.0007

Tabela C.5: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 5$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3047	0.1011	0.2950	0.0972	0.3024	0.1009
vício	0.0047	0.0011	-0.0050	-0.0028	0.0024	0.0009
eqm	0.0029	0.0023	0.0056	0.0043	0.0033	0.0024
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3041	0.1001	0.2956	0.0953	0.3016	0.1002
vício	0.0041	0.0001	-0.0044	-0.0047	0.0016	0.0002
eqm	0.0032	0.0030	0.0062	0.0063	0.0035	0.0033
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3211	0.0998	0.3159	0.0961	0.3196	0.0971
vício	0.0211	-0.0002	0.0159	-0.0039	0.0196	-0.0029
eqm	0.0023	0.0018	0.0039	0.0033	0.0031	0.0025
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3155	0.0913	0.3153	0.0930	0.3170	0.0944
vício	0.0155	-0.0087	0.0153	-0.0070	0.0170	-0.0056
eqm	0.0020	0.0015	0.0035	0.0028	0.0029	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3153	0.1023	0.3034	0.0956	0.3138	0.0998
vício	0.0153	0.0023	0.0034	-0.0044	0.0138	-0.0002
eqm	0.0045	0.0036	0.0084	0.0060	0.0051	0.0040
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3024	0.1011	0.2961	0.0981	0.3017	0.1008
vício	0.0024	0.0011	-0.0039	-0.0019	0.0017	0.0008
eqm	0.0012	0.0011	0.0026	0.0024	0.0014	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3020	0.1007	0.2957	0.0982	0.3023	0.0995
vício	0.0020	0.0007	-0.0043	-0.0018	0.0023	-0.0005
eqm	0.0013	0.0013	0.0029	0.0029	0.0014	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3127	0.0986	0.3084	0.0982	0.3109	0.0979
vício	0.0127	-0.0014	0.0084	-0.0018	0.0109	-0.0021
eqm	0.0010	0.0008	0.0017	0.0015	0.0013	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3100	0.0946	0.3086	0.0973	0.3097	0.0963
vício	0.0100	-0.0054	0.0086	-0.0027	0.0097	-0.0037
eqm	0.0009	0.0007	0.0016	0.0013	0.0012	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3089	0.1002	0.3040	0.0957	0.3075	0.0986
vício	0.0089	0.0002	0.0040	-0.0043	0.0075	-0.0014
eqm	0.0020	0.0018	0.0037	0.0035	0.0023	0.0021

Tabela C.6: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.2671	0.0953	0.2847	0.0969
vício	-0.0329	-0.0047	-0.0153	-0.0031
eqm	0.0039	0.0015	0.0015	0.0007

Tabela C.7: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 5$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1994	0.2016	0.1909	0.1941	0.1985	0.1996
vício	-0.0006	0.0016	-0.0091	-0.0059	-0.0015	-0.0004
eqm	0.0026	0.0023	0.0055	0.0050	0.0033	0.0027
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1986	0.2004	0.1910	0.1932	0.1992	0.2016
vício	-0.0014	0.0004	-0.0090	-0.0068	-0.0008	0.0016
eqm	0.0030	0.0032	0.0058	0.0064	0.0037	0.0037
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2084	0.2011	0.2067	0.2005	0.2077	0.2007
vício	0.0084	0.0011	0.0067	0.0005	0.0077	0.0007
eqm	0.0019	0.0019	0.0040	0.0035	0.0028	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2038	0.1944	0.2049	0.1984	0.2066	0.1996
vício	0.0038	0.0056	0.0049	-0.0016	0.0066	-0.0004
eqm	0.0017	0.0015	0.0035	0.0028	0.0026	0.0020
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2092	0.2034	0.1983	0.1983	0.2071	0.2045
vício	0.0092	0.0034	-0.0017	-0.0017	0.0071	0.0045
eqm	0.0043	0.0036	0.0075	0.0059	0.0049	0.0040
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2002	0.2034	0.1945	0.2002	0.2001	0.2027
vício	0.0002	0.0034	-0.0055	0.0002	0.0001	0.0027
eqm	0.0012	0.0010	0.0030	0.0025	0.0016	0.0013
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2001	0.2032	0.1951	0.2011	0.2002	0.2028
vício	0.0001	0.0032	-0.0049	0.0011	0.0002	0.0028
eqm	0.0013	0.0012	0.0032	0.0030	0.0017	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2061	0.2019	0.2037	0.2022	0.2055	0.2017
vício	0.0061	0.0019	0.0037	0.0022	0.0055	0.0017
eqm	0.0008	0.0008	0.0015	0.0015	0.0012	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2035	0.1981	0.2026	0.2012	0.2051	0.2000
vício	0.0035	-0.0019	0.0026	0.0012	0.0051	0.0000
eqm	0.0008	0.0007	0.0014	0.0014	0.0011	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2046	0.2046	0.1964	0.2009	0.2040	0.2033
vício	0.0046	0.0046	-0.0036	0.0009	0.0040	0.0033
eqm	0.0020	0.0018	0.0038	0.0031	0.0023	0.0020

Tabela C.8: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1654	0.1954	0.1851	0.1985
vício	-0.0346	-0.0046	-0.0149	-0.0015
eqm	0.0040	0.0014	0.0014	0.0006

Tabela C.9: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 5$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0983	0.3033	0.0929	0.3010	0.0981	0.3040
vício	-0.0017	0.0033	-0.0071	0.0010	-0.0019	0.0040
eqm	0.0030	0.0026	0.0060	0.0048	0.0035	0.0030
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0978	0.3025	0.0920	0.2984	0.0959	0.3026
vício	-0.0022	0.0025	-0.0080	-0.0016	-0.0041	0.0026
eqm	0.0033	0.0034	0.0064	0.0058	0.0038	0.0038
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1029	0.3037	0.1011	0.3031	0.1019	0.3034
vício	0.0029	0.0037	0.0011	0.0031	0.0019	0.0034
eqm	0.0019	0.0021	0.0035	0.0035	0.0026	0.0027
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0991	0.2983	0.1003	0.3012	0.1003	0.3023
vício	-0.0009	-0.0017	0.0003	0.0012	0.0003	0.0023
eqm	0.0017	0.0017	0.0032	0.0029	0.0025	0.0022
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1030	0.3090	0.0906	0.3027	0.0995	0.3059
vício	0.0030	0.0090	-0.0094	0.0027	-0.0005	0.0059
eqm	0.0044	0.0040	0.0073	0.0065	0.0049	0.0042
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1006	0.3029	0.0943	0.2995	0.0985	0.3025
vício	0.0006	0.0029	-0.0057	-0.0005	-0.0015	0.0025
eqm	0.0012	0.0011	0.0031	0.0025	0.0016	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1002	0.3023	0.0944	0.2989	0.0972	0.3015
vício	0.0002	0.0023	-0.0056	-0.0011	-0.0028	0.0015
eqm	0.0013	0.0013	0.0033	0.0031	0.0016	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1019	0.3024	0.0998	0.3020	0.1016	0.3023
vício	0.0019	0.0024	-0.0002	0.0020	0.0016	0.0023
eqm	0.0008	0.0008	0.0013	0.0015	0.0011	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0997	0.2993	0.0992	0.3013	0.1005	0.3016
vício	-0.0003	-0.0007	-0.0008	0.0013	0.0005	0.0016
eqm	0.0008	0.0007	0.0013	0.0013	0.0010	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1018	0.3049	0.0983	0.3005	0.1010	0.3042
vício	0.0018	0.0049	-0.0017	0.0005	0.0010	0.0042
eqm	0.0020	0.0017	0.0037	0.0034	0.0023	0.0021

Tabela C.10: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.0707	0.2943	0.0869	0.2974
vício	-0.0293	-0.0057	-0.0131	-0.0026
eqm	0.0032	0.0015	0.0013	0.0007

Tabela C.11: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 6$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3020	0.1033	0.2962	0.0943	0.3007	0.1011
vício	0.0020	0.0033	-0.0038	-0.0057	0.0007	0.0011
eqm	0.0028	0.0022	0.0057	0.0046	0.0032	0.0024
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3013	0.1019	0.2965	0.0954	0.3018	0.1024
vício	0.0013	0.0019	-0.0035	-0.0046	0.0018	0.0024
eqm	0.0031	0.0030	0.0060	0.0058	0.0035	0.0033
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3198	0.1015	0.3156	0.0975	0.3176	0.0976
vício	0.0198	0.0015	0.0156	-0.0025	0.0176	-0.0024
eqm	0.0024	0.0017	0.0042	0.0034	0.0031	0.0024
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3143	0.0932	0.3159	0.0953	0.3161	0.0957
vício	0.0143	-0.0068	0.0159	-0.0047	0.0161	-0.0043
eqm	0.0020	0.0015	0.0039	0.0029	0.0029	0.0020
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3175	0.1033	0.3079	0.0934	0.3149	0.0994
vício	0.0175	0.0033	0.0079	-0.0066	0.0149	-0.0006
eqm	0.0049	0.0034	0.0077	0.0059	0.0050	0.0038
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3021	0.0993	0.2978	0.0955	0.3012	0.1002
vício	0.0021	-0.0007	-0.0022	-0.0045	0.0012	0.0002
eqm	0.0013	0.0011	0.0029	0.0026	0.0016	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3017	0.0988	0.2985	0.0959	0.3017	0.1008
vício	0.0017	-0.0012	-0.0015	-0.0041	0.0017	0.0008
eqm	0.0014	0.0013	0.0031	0.0028	0.0018	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3136	0.0992	0.3097	0.0965	0.3116	0.0980
vício	0.0136	-0.0008	0.0097	-0.0035	0.0116	-0.0020
eqm	0.0010	0.0008	0.0018	0.0015	0.0015	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3109	0.0953	0.3097	0.0960	0.3111	0.0972
vício	0.0109	-0.0047	0.0097	-0.0040	0.0111	-0.0028
eqm	0.0009	0.0007	0.0017	0.0014	0.0013	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3094	0.1006	0.3041	0.0971	0.3089	0.1014
vício	0.0094	0.0006	0.0041	-0.0029	0.0089	0.0014
eqm	0.0022	0.0018	0.0037	0.0032	0.0025	0.0019

Tabela C.12: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.2569	0.0971	0.2789	0.0980
vício	-0.0431	-0.0029	-0.0211	-0.0020
eqm	0.0045	0.0013	0.0016	0.0007

Tabela C.13: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 6$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2039	0.2051	0.2015	0.1952	0.2031	0.2009
vício	0.0039	0.0051	0.0015	-0.0048	0.0031	0.0009
eqm	0.0029	0.0024	0.0055	0.0043	0.0032	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2036	0.2047	0.1992	0.1933	0.2031	0.1989
vício	0.0036	0.0047	-0.0008	-0.0067	0.0031	-0.0011
eqm	0.0032	0.0033	0.0061	0.0059	0.0036	0.0033
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2130	0.2037	0.2092	0.1972	0.2125	0.2013
vício	0.0130	0.0037	0.0092	-0.0028	0.0125	0.0013
eqm	0.0020	0.0019	0.0034	0.0035	0.0027	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2083	0.1969	0.2074	0.1974	0.2100	0.1993
vício	0.0083	-0.0031	0.0074	-0.0026	0.0100	-0.0007
eqm	0.0018	0.0015	0.0034	0.0028	0.0025	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2168	0.2021	0.2104	0.1976	0.2166	0.2024
vício	0.0168	0.0021	0.0104	-0.0024	0.0166	0.0024
eqm	0.0047	0.0036	0.0067	0.0059	0.0050	0.0040
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2029	0.2006	0.1967	0.1959	0.2010	0.2008
vício	0.0029	0.0006	-0.0033	-0.0041	0.0010	0.0008
eqm	0.0013	0.0011	0.0028	0.0027	0.0017	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2023	0.1996	0.1970	0.1945	0.2013	0.1980
vício	0.0023	-0.0004	-0.0030	-0.0055	0.0013	-0.0020
eqm	0.0013	0.0014	0.0029	0.0034	0.0016	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2080	0.2001	0.2053	0.1987	0.2070	0.1992
vício	0.0080	0.0001	0.0053	-0.0013	0.0070	-0.0008
eqm	0.0009	0.0008	0.0016	0.0015	0.0013	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2056	0.1967	0.2036	0.1984	0.2059	0.1983
vício	0.0056	-0.0033	0.0036	-0.0016	0.0059	-0.0017
eqm	0.0009	0.0007	0.0016	0.0013	0.0012	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2089	0.2023	0.2006	0.1978	0.2058	0.2014
vício	0.0089	0.0023	0.0006	-0.0022	0.0058	0.0014
eqm	0.0023	0.0018	0.0041	0.0031	0.0025	0.0018

Tabela C.14: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1616	0.1965	0.1812	0.1976
vício	-0.0384	-0.0035	-0.0188	-0.0024
eqm	0.0043	0.0014	0.0016	0.0007

Tabela C.15: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 6$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1002	0.3000	0.0934	0.2959	0.1009	0.2990
vício	0.0002	0.0000	-0.0066	-0.0041	0.0009	-0.0010
eqm	0.0030	0.0023	0.0059	0.0044	0.0033	0.0026
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0989	0.2977	0.0942	0.2950	0.0996	0.2982
vício	-0.0011	-0.0023	-0.0058	-0.0050	-0.0004	-0.0018
eqm	0.0033	0.0031	0.0063	0.0059	0.0037	0.0037
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1040	0.3002	0.1017	0.2979	0.1026	0.2992
vício	0.0040	0.0002	0.0017	-0.0021	0.0026	-0.0008
eqm	0.0019	0.0020	0.0038	0.0034	0.0027	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0998	0.2944	0.1006	0.2981	0.1020	0.2988
vício	-0.0002	-0.0056	0.0006	-0.0019	0.0020	-0.0012
eqm	0.0017	0.0016	0.0035	0.0029	0.0026	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1086	0.3026	0.0967	0.2986	0.1065	0.3006
vício	0.0086	0.0026	-0.0033	-0.0014	0.0065	0.0006
eqm	0.0043	0.0038	0.0078	0.0071	0.0051	0.0043
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0993	0.3017	0.0963	0.2980	0.0995	0.3007
vício	-0.0007	0.0017	-0.0037	-0.0020	-0.0005	0.0007
eqm	0.0012	0.0011	0.0031	0.0023	0.0016	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0992	0.3013	0.0946	0.2966	0.0995	0.2997
vício	-0.0008	0.0013	-0.0054	-0.0034	-0.0005	-0.0003
eqm	0.0013	0.0013	0.0033	0.0028	0.0016	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1025	0.3003	0.1015	0.2982	0.1019	0.3000
vício	0.0025	0.0003	0.0015	-0.0018	0.0019	0.0000
eqm	0.0008	0.0008	0.0015	0.0016	0.0012	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1003	0.2972	0.1019	0.2986	0.1011	0.2997
vício	0.0003	-0.0028	0.0019	-0.0014	0.0011	-0.0003
eqm	0.0008	0.0007	0.0014	0.0014	0.0011	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1045	0.3035	0.0990	0.2994	0.1030	0.3034
vício	0.0045	0.0035	-0.0010	-0.0006	0.0030	0.0034
eqm	0.0019	0.0017	0.0036	0.0032	0.0021	0.0020

Tabela C.16: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.0630	0.2914	0.0821	0.2961
vício	-0.0370	-0.0086	-0.0179	-0.0039
eqm	0.0035	0.0015	0.0015	0.0007

Tabela C.17: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 7$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2017	0.2041	0.1961	0.1981	0.2025	0.2050
vício	0.0017	0.0041	-0.0039	-0.0019	0.0025	0.0050
eqm	0.0029	0.0022	0.0060	0.0052	0.0034	0.0026
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2020	0.2045	0.1997	0.1982	0.2030	0.2053
vício	0.0020	0.0045	-0.0003	-0.0018	0.0030	0.0053
eqm	0.0031	0.0030	0.0059	0.0063	0.0038	0.0034
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2145	0.2055	0.2114	0.2033	0.2115	0.2041
vício	0.0145	0.0055	0.0114	0.0033	0.0115	0.0041
eqm	0.0021	0.0019	0.0037	0.0039	0.0029	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2089	0.1971	0.2090	0.2006	0.2110	0.2012
vício	0.0089	-0.0029	0.0090	0.0006	0.0110	0.0012
eqm	0.0019	0.0014	0.0036	0.0031	0.0028	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2153	0.2049	0.2052	0.1962	0.2131	0.2036
vício	0.0153	0.0049	0.0052	-0.0038	0.0131	0.0036
eqm	0.0049	0.0036	0.0078	0.0064	0.0051	0.0040
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2014	0.2031	0.1977	0.1970	0.2018	0.2011
vício	0.0014	0.0031	-0.0023	-0.0030	0.0018	0.0011
eqm	0.0013	0.0011	0.0029	0.0025	0.0017	0.0013
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2014	0.2032	0.1986	0.1991	0.2019	0.2021
vício	0.0014	0.0032	-0.0014	-0.0009	0.0019	0.0021
eqm	0.0014	0.0014	0.0031	0.0030	0.0018	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2090	0.2020	0.2083	0.2016	0.2095	0.2005
vício	0.0090	0.0020	0.0083	0.0016	0.0095	0.0005
eqm	0.0010	0.0008	0.0018	0.0015	0.0013	0.0012
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2062	0.1977	0.2078	0.2006	0.2083	0.1996
vício	0.0062	-0.0023	0.0078	0.0006	0.0083	-0.0004
eqm	0.0009	0.0007	0.0017	0.0013	0.0013	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2073	0.2032	0.1996	0.2018	0.2071	0.2022
vício	0.0073	0.0032	-0.0004	0.0018	0.0071	0.0022
eqm	0.0021	0.0017	0.0038	0.0033	0.0023	0.0020

Tabela C.18: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1552	0.1973	0.1926	0.1965
vício	-0.0448	-0.0027	-0.0074	-0.0035
eqm	0.0046	0.0013	0.0011	0.0007

Tabela C.19: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 7$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0988	0.3015	0.0954	0.2940	0.1005	0.3010
vício	-0.0012	0.0015	-0.0046	-0.0060	0.0005	0.0010
eqm	0.0032	0.0022	0.0061	0.0054	0.0035	0.0026
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0991	0.3019	0.0969	0.2959	0.0989	0.3008
vício	-0.0009	0.0019	-0.0031	-0.0041	-0.0011	0.0008
eqm	0.0034	0.0031	0.0065	0.0070	0.0036	0.0040
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1047	0.3045	0.1005	0.3017	0.1037	0.3027
vício	0.0047	0.0045	0.0005	0.0017	0.0037	0.0027
eqm	0.0020	0.0019	0.0034	0.0034	0.0028	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0995	0.2968	0.0990	0.2999	0.1012	0.3009
vício	-0.0005	-0.0032	-0.0010	-0.0001	0.0012	0.0009
eqm	0.0018	0.0015	0.0033	0.0027	0.0026	0.0020
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1061	0.3059	0.0991	0.2984	0.1037	0.3046
vício	0.0061	0.0059	-0.0009	-0.0016	0.0037	0.0046
eqm	0.0046	0.0034	0.0083	0.0066	0.0055	0.0040
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1001	0.3027	0.0933	0.2987	0.0991	0.3028
vício	0.0001	0.0027	-0.0067	-0.0013	-0.0009	0.0028
eqm	0.0014	0.0011	0.0031	0.0027	0.0016	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0996	0.3019	0.0931	0.2963	0.0977	0.3013
vício	-0.0004	0.0019	-0.0069	-0.0037	-0.0023	0.0013
eqm	0.0014	0.0013	0.0031	0.0034	0.0017	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1035	0.3022	0.1019	0.3025	0.1025	0.3024
vício	0.0035	0.0022	0.0019	0.0025	0.0025	0.0024
eqm	0.0009	0.0008	0.0017	0.0016	0.0012	0.0012
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1012	0.2990	0.1009	0.3020	0.1025	0.3016
vício	0.0012	-0.0010	0.0009	0.0020	0.0025	0.0016
eqm	0.0009	0.0007	0.0017	0.0014	0.0012	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1021	0.3033	0.0955	0.2997	0.1002	0.3039
vício	0.0021	0.0033	-0.0045	-0.0003	0.0002	0.0039
eqm	0.0020	0.0018	0.0038	0.0037	0.0023	0.0021

Tabela C.20: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.0578	0.2929	0.0950	0.2956
vício	-0.0422	-0.0071	-0.0050	-0.0044
eqm	0.0037	0.0013	0.0010	0.0006

Tabela C.21: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 12$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2033	0.2023	0.1966	0.1989	0.2033	0.2021
vício	0.0033	0.0023	-0.0034	-0.0011	0.0033	0.0021
eqm	0.0035	0.0023	0.0077	0.0046	0.0040	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2031	0.2021	0.2006	0.1985	0.2031	0.2026
vício	0.0031	0.0021	0.0006	-0.0015	0.0031	0.0026
eqm	0.0038	0.0031	0.0078	0.0062	0.0042	0.0036
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2190	0.2035	0.2186	0.2023	0.2205	0.2039
vício	0.0190	0.0035	0.0186	0.0023	0.0205	0.0039
eqm	0.0025	0.0019	0.0042	0.0031	0.0034	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2136	0.1950	0.2144	0.1993	0.2179	0.1992
vício	0.0136	-0.0050	0.0144	-0.0007	0.0179	-0.0008
eqm	0.0022	0.0015	0.0043	0.0026	0.0032	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2178	0.2029	0.2117	0.1957	0.2163	0.2017
vício	0.0178	0.0029	0.0117	-0.0043	0.0163	0.0017
eqm	0.0054	0.0035	0.0098	0.0064	0.0056	0.0038
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2019	0.2022	0.1975	0.1997	0.2005	0.2008
vício	0.0019	0.0022	-0.0025	-0.0003	0.0005	0.0008
eqm	0.0015	0.0011	0.0035	0.0026	0.0018	0.0013
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2020	0.2022	0.1987	0.2019	0.2005	0.2016
vício	0.0020	0.0022	-0.0013	0.0019	0.0005	0.0016
eqm	0.0015	0.0013	0.0036	0.0029	0.0019	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2120	0.2020	0.2109	0.2021	0.2124	0.2014
vício	0.0120	0.0020	0.0109	0.0021	0.0124	0.0014
eqm	0.0010	0.0008	0.0018	0.0016	0.0014	0.0012
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2091	0.1974	0.2097	0.1999	0.2109	0.1987
vício	0.0091	-0.0026	0.0097	-0.0001	0.0109	-0.0013
eqm	0.0010	0.0007	0.0018	0.0014	0.0014	0.0011
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2122	0.2023	0.2077	0.1982	0.2113	0.2014
vício	0.0122	0.0023	0.0077	-0.0018	0.0113	0.0014
eqm	0.0023	0.0017	0.0040	0.0031	0.0026	0.0019

Tabela C.22: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1613	0.1895	0.1908	0.1962
vício	-0.0387	-0.0105	-0.0092	-0.0038
eqm	0.0050	0.0014	0.0012	0.0006

Tabela C.23: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 12$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1005	0.3019	0.0934	0.2956	0.0978	0.3021
vício	0.0005	0.0019	-0.0066	-0.0044	-0.0022	0.0021
eqm	0.0038	0.0021	0.0076	0.0046	0.0045	0.0026
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1004	0.3014	0.0923	0.2937	0.0961	0.2983
vício	0.0004	0.0014	-0.0077	-0.0063	-0.0039	-0.0017
eqm	0.0039	0.0030	0.0077	0.0062	0.0045	0.0035
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1071	0.3029	0.1049	0.2992	0.1056	0.3001
vício	0.0071	0.0029	0.0049	-0.0008	0.0056	0.0001
eqm	0.0022	0.0019	0.0041	0.0032	0.0031	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1028	0.2969	0.1026	0.2972	0.1041	0.2985
vício	0.0028	-0.0031	0.0026	-0.0028	0.0041	-0.0015
eqm	0.0021	0.0014	0.0040	0.0026	0.0030	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1109	0.3054	0.1016	0.2972	0.1102	0.3009
vício	0.0109	0.0054	0.0016	-0.0028	0.0102	0.0009
eqm	0.0058	0.0035	0.0093	0.0061	0.0061	0.0039
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1016	0.3025	0.0958	0.2977	0.0999	0.3025
vício	0.0016	0.0025	-0.0042	-0.0023	-0.0001	0.0025
eqm	0.0015	0.0010	0.0031	0.0025	0.0016	0.0013
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1011	0.3017	0.0951	0.2973	0.1000	0.3028
vício	0.0011	0.0017	-0.0049	-0.0027	0.0000	0.0028
eqm	0.0015	0.0013	0.0033	0.0031	0.0017	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1049	0.3025	0.1049	0.3004	0.1048	0.3016
vício	0.0049	0.0025	0.0049	0.0004	0.0048	0.0016
eqm	0.0009	0.0008	0.0016	0.0016	0.0013	0.0012
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1026	0.2991	0.1041	0.3003	0.1046	0.3010
vício	0.0026	-0.0009	0.0041	0.0003	0.0046	0.0010
eqm	0.0009	0.0007	0.0016	0.0014	0.0012	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1047	0.3025	0.0980	0.3006	0.1039	0.3036
vício	0.0047	0.0025	-0.0020	0.0006	0.0039	0.0036
eqm	0.0023	0.0018	0.0041	0.0034	0.0026	0.0021

Tabela C.24: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1209	0.2848	0.0928	0.2954
vício	0.0209	-0.0152	-0.0072	-0.0046
eqm	0.0065	0.0014	0.0013	0.0007

Resultado da Estimação dos Processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$

Tabela C.25: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.2088	0.1385	0.7344	0.2253	0.1554	0.7266
vício	0.0088	-0.0615	0.0344	0.0253	-0.0446	0.0266
eqm	0.0033	0.0180	0.0118	0.0021	0.0082	0.0054

Tabela C.26: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1970	0.1430	0.7339	0.2184	0.1613	0.7243
vício	-0.0030	-0.0570	0.0339	0.0184	-0.0387	0.0243
eqm	0.0033	0.0172	0.0117	0.0018	0.0087	0.0061

Tabela C.27: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 1$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1879	0.0062	0.8149	0.1316	0.2050	0.0784	0.7755	0.1571
vício	-0.0121	-0.1938	0.1149	-0.0684	0.005	-0.1216	0.0755	-0.0429
eqm	0.0032	0.1314	0.0394	0.0876	0.0013	0.0724	0.0177	-0.0429

Tabela C.28: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 1$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1796	0.0176	0.8054	0.1372	0.201	0.0818	0.7744	0.1609
vício	-0.0204	-0.1824	0.1054	-0.0628	0.0010	-0.1182	0.0744	-0.0391
eqm	0.0035	0.1317	0.0424	0.0873	0.0014	0.0728	0.0176	0.0435

C.2 Estimação com Contaminação por Mistura

Outlier Aditivo

Resultado da Estimação dos Processos

SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0)_s

Tabela C.29: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0)_s, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 4$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier AO*.

$n = 500$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1798	0.1801	0.1749	0.1756	0.1790	0.1803
vício	-0.0202	-0.0199	-0.0251	-0.0244	-0.0210	-0.0197
eqm	0.0038	0.0029	0.0063	0.0056	0.0040	0.0033
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.1754	0.1725	0.1743	0.1732	0.1775	0.1725
vício	-0.0246	-0.0275	-0.0257	-0.0268	-0.0225	-0.0275
eqm	0.0043	0.0043	0.0070	0.0074	0.0046	0.0046
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1835	0.1748	0.1807	0.1734	0.1830	0.1715
vício	-0.0165	-0.0252	-0.0193	-0.0266	-0.0170	-0.0285
eqm	0.0027	0.0028	0.0045	0.0042	0.0035	0.0037
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1829	0.1748	0.1825	0.1750	0.1833	0.1758
vício	-0.0171	-0.0252	-0.0175	-0.0250	-0.0167	-0.0242
eqm	0.0026	0.0022	0.0042	0.0035	0.0033	0.0030
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1785	0.1732	0.1646	0.1625	0.1775	0.1718
vício	-0.0215	-0.0268	-0.0354	-0.0375	-0.0225	-0.0282
eqm	0.0055	0.0046	0.0105	0.0096	0.0065	0.0053
$n = 1000$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1873	0.1902	0.1831	0.1868	0.1878	0.1902
vício	-0.0127	-0.0098	-0.0169	-0.0132	-0.0122	-0.0098
eqm	0.0016	0.0014	0.0030	0.0030	0.0019	0.0017
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.1859	0.1879	0.1820	0.1849	0.1858	0.1865
vício	-0.0141	-0.0121	-0.0180	-0.0151	-0.0142	-0.0135
eqm	0.0018	0.0017	0.0032	0.0036	0.0020	0.0021
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1903	0.1883	0.1888	0.1879	0.1891	0.1871
vício	-0.0097	-0.0117	-0.0112	-0.0121	-0.0109	-0.0129
eqm	0.0012	0.0012	0.0018	0.0018	0.0016	0.0015
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1852	0.1860	0.1782	0.1821	0.1836	0.1846
vício	-0.0148	-0.0140	-0.0218	-0.0179	-0.0164	-0.0154
eqm	0.0025	0.0023	0.0046	0.0042	0.0029	0.0026
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1852	0.1860	0.1782	0.1821	0.1836	0.1846
vício	-0.0148	-0.0140	-0.0218	-0.0179	-0.0164	-0.0154
eqm	0.0025	0.0023	0.0046	0.0042	0.0029	0.0026

Tabela C.30: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1463	0.1782	0.1734	0.1878
vício	-0.0537	-0.0218	-0.0266	-0.0122
eqm	0.0067	0.0020	0.0025	0.0010

Tabela C.31: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 4$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0903	0.2738	0.0848	0.2673	0.0905	0.2736
vício	-0.0097	-0.0262	-0.0152	-0.0327	-0.0095	-0.0264
eqm	0.0029	0.0035	0.0053	0.0065	0.0032	0.0039
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0864	0.2673	0.0799	0.2595	0.0865	0.2654
vício	-0.0136	-0.0327	-0.0201	-0.0405	-0.0135	-0.0346
eqm	0.0034	0.0051	0.0062	0.0094	0.0036	0.0058
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.0884	0.2698	0.0890	0.2661	0.0905	0.2672
vício	-0.0116	-0.0302	-0.0110	-0.0339	-0.0095	-0.0328
eqm	0.0020	0.0036	0.0036	0.0051	0.0027	0.0044
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0877	0.2695	0.0908	0.2688	0.0927	0.2697
vício	-0.0123	-0.0305	-0.0092	-0.0312	-0.0073	-0.0303
eqm	0.0019	0.0030	0.0035	0.0044	0.0024	0.0037
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.0897	0.2603	0.0807	0.2484	0.0911	0.2583
vício	-0.0103	-0.0397	-0.0193	-0.0516	-0.0089	-0.0417
eqm	0.0046	0.0061	0.0078	0.0105	0.0050	0.0069
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0955	0.2851	0.0881	0.2824	0.0935	0.2867
vício	-0.0045	-0.0149	-0.0119	-0.0176	-0.0065	-0.0133
eqm	0.0013	0.0016	0.0033	0.0033	0.0015	0.0018
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0942	0.2830	0.0886	0.2799	0.0924	0.2831
vício	-0.0058	-0.0170	-0.0114	-0.0201	-0.0076	-0.0169
eqm	0.0014	0.0020	0.0033	0.0040	0.0017	0.0022
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.0958	0.2853	0.0934	0.2835	0.0943	0.2846
vício	-0.0042	-0.0147	-0.0066	-0.0165	-0.0057	-0.0154
eqm	0.0009	0.0014	0.0017	0.0021	0.0013	0.0017
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0947	0.2839	0.0935	0.2842	0.0944	0.2852
vício	-0.0053	-0.0161	-0.0065	-0.0158	-0.0056	-0.0148
eqm	0.0008	0.0012	0.0016	0.0019	0.0012	0.0016
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.0968	0.2811	0.0909	0.2754	0.0961	0.2794
vício	-0.0032	-0.0189	-0.0091	-0.0246	-0.0039	-0.0206
eqm	0.0018	0.0027	0.0041	0.0045	0.0023	0.0030

Tabela C.32: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.0633	0.2685	0.0814	0.2836
vício	-0.0367	-0.0315	-0.0186	-0.0164
eqm	0.0038	0.0029	0.0018	0.0011

Tabela C.33: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 5$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2643	0.0887	0.2571	0.0843	0.2634	0.0901
vício	-0.0357	-0.0113	-0.0429	-0.0157	-0.0366	-0.0099
eqm	0.0053	0.0022	0.0084	0.0047	0.0056	0.0026
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2615	0.0841	0.2531	0.0839	0.2604	0.0848
vício	-0.0385	-0.0159	-0.0469	-0.0161	-0.0396	-0.0152
eqm	0.0060	0.0031	0.0110	0.0063	0.0064	0.0037
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2791	0.0845	0.2739	0.0848	0.2783	0.0836
vício	-0.0209	-0.0155	-0.0261	-0.0152	-0.0217	-0.0164
eqm	0.0038	0.0020	0.0056	0.0030	0.0048	0.0027
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2764	0.0810	0.2740	0.0847	0.2781	0.0833
vício	-0.0236	-0.0190	-0.0260	-0.0153	-0.0219	-0.0167
eqm	0.0036	0.0018	0.0056	0.0028	0.0042	0.0023
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2623	0.0838	0.2534	0.0782	0.2597	0.0827
vício	-0.0377	-0.0162	-0.0466	-0.0218	-0.0403	-0.0173
eqm	0.0074	0.0035	0.0130	0.0068	0.0083	0.0041
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2832	0.0941	0.2747	0.0909	0.2812	0.0947
vício	-0.0168	-0.0059	-0.0253	-0.0091	-0.0188	-0.0053
eqm	0.0019	0.0011	0.0041	0.0029	0.0021	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2824	0.0929	0.2726	0.0908	0.2801	0.0935
vício	-0.0176	-0.0071	-0.0274	-0.0092	-0.0199	-0.0065
eqm	0.0020	0.0013	0.0046	0.0033	0.0024	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2934	0.0916	0.2892	0.0918	0.2904	0.0919
vício	-0.0066	-0.0084	-0.0108	-0.0082	-0.0096	-0.0081
eqm	0.0012	0.0009	0.0020	0.0016	0.0017	0.0012
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2915	0.0889	0.2896	0.0915	0.2903	0.0919
vício	-0.0085	-0.0111	-0.0104	-0.0085	-0.0097	-0.0081
eqm	0.0011	0.0008	0.0019	0.0014	0.0016	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2817	0.0908	0.2722	0.0859	0.2783	0.0918
vício	-0.0183	-0.0092	-0.0278	-0.0141	-0.0217	-0.0082
eqm	0.0029	0.0017	0.0053	0.0035	0.0033	0.0021

Tabela C.34: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W
média	0.2282	0.0871	0.2639	0.0922
vício	-0.0718	-0.0129	-0.0361	-0.0078
eqm	0.0092	0.0015	0.0028	0.0007

Tabela C.35: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 5$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

$n = 500$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1789	0.1804	0.1733	0.1786	0.1795	0.1824
vício	-0.0211	-0.0196	-0.0267	-0.0214	-0.0205	-0.0176
eqm	0.0040	0.0028	0.0071	0.0050	0.0040	0.0029
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.1759	0.1756	0.1701	0.1753	0.1773	0.1763
vício	-0.0241	-0.0244	-0.0299	-0.0247	-0.0227	-0.0237
eqm	0.0047	0.0039	0.0075	0.0068	0.0047	0.0042
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1831	0.1766	0.1789	0.1738	0.1799	0.1763
vício	-0.0169	-0.0234	-0.0211	-0.0262	-0.0201	-0.0237
eqm	0.0027	0.0029	0.0049	0.0044	0.0038	0.0036
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1814	0.1747	0.1811	0.1761	0.1822	0.1778
vício	-0.0186	-0.0253	-0.0189	-0.0239	-0.0178	-0.0222
eqm	0.0025	0.0024	0.0045	0.0033	0.0035	0.0028
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1757	0.1734	0.1597	0.1658	0.1704	0.1695
vício	-0.0243	-0.0266	-0.0403	-0.0342	-0.0296	-0.0305
eqm	0.0051	0.0045	0.0098	0.0084	0.0060	0.0050
$n = 1000$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1889	0.1887	0.1861	0.1840	0.1892	0.1873
vício	-0.0111	-0.0113	-0.0139	-0.0160	-0.0108	-0.0127
eqm	0.0014	0.0013	0.0032	0.0030	0.0017	0.0016
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.1876	0.1865	0.1851	0.1819	0.1887	0.1850
vício	-0.0124	-0.0135	-0.0149	-0.0181	-0.0113	-0.0150
eqm	0.0016	0.0017	0.0034	0.0036	0.0020	0.0020
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1935	0.1868	0.1925	0.1854	0.1921	0.1867
vício	-0.0065	-0.0132	-0.0075	-0.0146	-0.0079	-0.0133
eqm	0.0009	0.0012	0.0017	0.0020	0.0013	0.0015
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1921	0.1849	0.1917	0.1860	0.1923	0.1869
vício	-0.0079	-0.0151	-0.0083	-0.0140	-0.0077	-0.0131
eqm	0.0009	0.0011	0.0017	0.0017	0.0013	0.0013
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1875	0.1826	0.1798	0.1760	0.1856	0.1797
vício	-0.0125	-0.0174	-0.0202	-0.0240	-0.0144	-0.0203
eqm	0.0023	0.0022	0.0047	0.0042	0.0028	0.0026

Tabela C.36: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W
média	0.1386	0.1777	0.1705	0.1864
vício	-0.0614	-0.0223	-0.0295	-0.0136
eqm	0.0073	0.0021	0.0022	0.0010

Tabela C.37: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 5$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

$n = 500$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0920	0.2707	0.0817	0.2607	0.0886	0.2683
vício	-0.0080	-0.0293	-0.0183	-0.0393	-0.0114	-0.0317
eqm	0.0031	0.0041	0.0068	0.0075	0.0034	0.0046
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.0878	0.2635	0.0795	0.2532	0.0849	0.2610
vício	-0.0122	-0.0365	-0.0205	-0.0468	-0.0151	-0.0390
eqm	0.0034	0.0056	0.0071	0.0104	0.0037	0.0064
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.0913	0.2652	0.0892	0.2587	0.0907	0.2636
vício	-0.0087	-0.0348	-0.0108	-0.0413	-0.0093	-0.0364
eqm	0.0021	0.0042	0.0030	0.0068	0.0026	0.0054
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0909	0.2657	0.0893	0.2627	0.0912	0.2675
vício	-0.0091	-0.0343	-0.0107	-0.0373	-0.0088	-0.0325
eqm	0.0020	0.0035	0.0030	0.0058	0.0024	0.0043
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.0935	0.2582	0.0866	0.2517	0.0918	0.2585
vício	-0.0065	-0.0418	-0.0134	-0.0483	-0.0082	-0.0415
eqm	0.0042	0.0066	0.0068	0.0111	0.0045	0.0070
$n = 1000$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0951	0.2835	0.0890	0.2812	0.0945	0.2834
vício	-0.0049	-0.0165	-0.0110	-0.0188	-0.0055	-0.0166
eqm	0.0013	0.0017	0.0031	0.0032	0.0015	0.0020
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.0931	0.2802	0.0859	0.2780	0.0917	0.2809
vício	-0.0069	-0.0198	-0.0141	-0.0220	-0.0083	-0.0191
eqm	0.0014	0.0021	0.0035	0.0041	0.0018	0.0024
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.0949	0.2822	0.0931	0.2790	0.0943	0.2799
vício	-0.0051	-0.0178	-0.0069	-0.0210	-0.0057	-0.0201
eqm	0.0009	0.0015	0.0016	0.0024	0.0013	0.0019
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0942	0.2816	0.0942	0.2808	0.0947	0.2818
vício	-0.0058	-0.0184	-0.0058	-0.0192	-0.0053	-0.0182
eqm	0.0009	0.0013	0.0016	0.0022	0.0012	0.0016
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.0952	0.2774	0.0888	0.2707	0.0942	0.2771
vício	-0.0048	-0.0226	-0.0112	-0.0293	-0.0058	-0.0229
eqm	0.0019	0.0028	0.0039	0.0051	0.0023	0.0031

Tabela C.38: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W
média	0.0589	0.2660	0.0771	0.2815
vício	-0.0411	-0.0340	-0.0229	-0.0185
eqm	0.0039	0.0031	0.0017	0.0012

Tabela C.39: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 6$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

$n = 500$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2628	0.0895	0.2533	0.0839	0.2621	0.0866
vício	-0.0372	-0.0105	-0.0467	-0.0161	-0.0379	-0.0134
eqm	0.0054	0.0023	0.0085	0.0050	0.0056	0.0028
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.2605	0.0853	0.2524	0.0807	0.2597	0.0841
vício	-0.0395	-0.0147	-0.0476	-0.0193	-0.0403	-0.0159
eqm	0.0059	0.0032	0.0091	0.0068	0.0061	0.0038
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2803	0.0845	0.2763	0.0861	0.2784	0.0859
vício	-0.0197	-0.0155	-0.0237	-0.0139	-0.0216	-0.0141
eqm	0.0033	0.0022	0.0055	0.0033	0.0043	0.0029
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2766	0.0793	0.2748	0.0852	0.2780	0.0840
vício	-0.0234	-0.0207	-0.0252	-0.0148	-0.0220	-0.0160
eqm	0.0032	0.0020	0.0050	0.0027	0.0040	0.0024
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2613	0.0860	0.2511	0.0826	0.2634	0.0848
vício	-0.0387	-0.0140	-0.0489	-0.0174	-0.0366	-0.0152
eqm	0.0072	0.0036	0.0119	0.0061	0.0077	0.0043
$n = 1000$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2850	0.0952	0.2799	0.0936	0.2839	0.0948
vício	-0.0150	-0.0048	-0.0201	-0.0064	-0.0161	-0.0052
eqm	0.0018	0.0012	0.0037	0.0026	0.0021	0.0014
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.2837	0.0929	0.2787	0.0922	0.2827	0.0939
vício	-0.0163	-0.0071	-0.0213	-0.0078	-0.0173	-0.0061
eqm	0.0020	0.0015	0.0041	0.0032	0.0024	0.0017
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2956	0.0928	0.2928	0.0928	0.2952	0.0920
vício	-0.0044	-0.0072	-0.0072	-0.0072	-0.0048	-0.0080
eqm	0.0012	0.0010	0.0022	0.0017	0.0016	0.0013
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2938	0.0903	0.2930	0.0926	0.2951	0.0919
vício	-0.0062	-0.0097	-0.0070	-0.0074	-0.0049	-0.0081
eqm	0.0011	0.0009	0.0022	0.0015	0.0016	0.0012
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2849	0.0928	0.2756	0.0878	0.2814	0.0928
vício	-0.0151	-0.0072	-0.0244	-0.0122	-0.0186	-0.0072
eqm	0.0028	0.0019	0.0055	0.0037	0.0032	0.0021

Tabela C.40: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W
média	0.2193	0.0838	0.2617	0.093
vício	-0.0807	-0.0162	-0.0383	-0.0070
eqm	0.0099	0.0017	0.0029	0.0008

Tabela C.41: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 6$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

$n = 500$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1748	0.1810	0.1687	0.1733	0.1736	0.1781
vício	-0.0252	-0.0190	-0.0313	-0.0267	-0.0264	-0.0219
eqm	0.0041	0.0030	0.0071	0.0061	0.0045	0.0033
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.1717	0.1758	0.1662	0.1664	0.1697	0.1721
vício	-0.0283	-0.0242	-0.0338	-0.0336	-0.0303	-0.0279
eqm	0.0046	0.0044	0.0076	0.0080	0.0051	0.0052
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1815	0.1749	0.1794	0.1726	0.1781	0.1736
vício	-0.0185	-0.0251	-0.0206	-0.0274	-0.0219	-0.0264
eqm	0.0027	0.0030	0.0041	0.0043	0.0036	0.0036
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1798	0.1732	0.1777	0.1734	0.1795	0.1744
vício	-0.0202	-0.0268	-0.0223	-0.0266	-0.0205	-0.0256
eqm	0.0025	0.0025	0.0041	0.0038	0.0033	0.0031
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1739	0.1732	0.1605	0.1613	0.1719	0.1679
vício	-0.0261	-0.0268	-0.0395	-0.0387	-0.0281	-0.0321
eqm	0.0053	0.0046	0.0102	0.0084	0.0061	0.0048
$n = 1000$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1871	0.1893	0.1824	0.1850	0.1871	0.1887
vício	-0.0129	-0.0107	-0.0176	-0.0150	-0.0129	-0.0113
eqm	0.0016	0.0013	0.0035	0.0029	0.0019	0.0016
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.1860	0.1876	0.1833	0.1841	0.1866	0.1865
vício	-0.0140	-0.0124	-0.0167	-0.0159	-0.0134	-0.0135
eqm	0.0017	0.0016	0.0036	0.0035	0.0020	0.0020
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1932	0.1874	0.1900	0.1864	0.1930	0.1868
vício	-0.0068	-0.0126	-0.0100	-0.0136	-0.0070	-0.0132
eqm	0.0011	0.0011	0.0019	0.0018	0.0014	0.0014
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1915	0.1851	0.1905	0.1854	0.1921	0.1862
vício	-0.0085	-0.0149	-0.0095	-0.0146	-0.0079	-0.0138
eqm	0.0010	0.0010	0.0017	0.0017	0.0014	0.0013
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1881	0.1832	0.1836	0.1797	0.1877	0.1837
vício	-0.0119	-0.0168	-0.0164	-0.0203	-0.0123	-0.0163
eqm	0.0023	0.0022	0.0042	0.0041	0.0025	0.0024

Tabela C.42: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W
média	0.1303	0.1757	0.1649	0.1862
eqm	0.0080	0.0022	0.0026	0.0010
vício	-0.0697	-0.0243	-0.0351	-0.0138

Tabela C.43: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 6$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

$n = 500$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0093	0.2827	-0.0019	0.2706	0.0055	0.2820
vício	-0.0907	-0.0173	-0.1019	-0.0294	-0.0945	-0.0180
eqm	0.0114	0.0031	0.0169	0.0068	0.0123	0.0039
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	-0.0034	0.2605	-0.0108	0.2553	-0.0053	0.2598
vício	-0.1034	-0.0395	-0.1108	-0.0447	-0.1053	-0.0402
eqm	0.0140	0.0055	0.0187	0.0090	0.0147	0.0057
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	-0.0048	0.2647	-0.0077	0.2558	-0.0043	0.2601
vício	-0.1048	-0.0353	-0.1077	-0.0442	-0.1043	-0.0399
eqm	0.0130	0.0038	0.0149	0.0065	0.0136	0.0052
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0032	0.2802	-0.0019	0.2695	0.0016	0.2738
vício	-0.0968	-0.0198	-0.1019	-0.0305	-0.0984	-0.0262
eqm	0.0113	0.0023	0.0137	0.0052	0.0123	0.0039
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.0143	0.2748	0.0036	0.2595	0.0076	0.2717
vício	-0.0857	-0.0252	-0.0964	-0.0405	-0.0924	-0.0283
eqm	0.0112	0.0049	0.0158	0.0104	0.0129	0.0060
$n = 1000$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0041	0.3013	0.0002	0.2918	0.0027	0.3006
vício	-0.0959	0.0013	-0.0998	-0.0082	-0.0973	0.0006
eqm	0.0106	0.0014	0.0127	0.0035	0.0110	0.0016
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	-0.0036	0.2883	-0.0053	0.2827	-0.0041	0.2883
vício	-0.1036	-0.0117	-0.1053	-0.0173	-0.1041	-0.0117
eqm	0.0122	0.0018	0.0141	0.0041	0.0126	0.0020
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	-0.0040	0.2901	-0.0026	0.2877	-0.0022	0.2899
vício	-0.1040	-0.0099	-0.1026	-0.0123	-0.1022	-0.0101
eqm	0.0117	0.0012	0.0120	0.0022	0.0115	0.0017
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0013	0.2996	0.0008	0.2939	0.0020	0.2972
vício	-0.0987	-0.0004	-0.0992	-0.0061	-0.0980	-0.0028
eqm	0.0105	0.0010	0.0114	0.0021	0.0107	0.0015
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.0081	0.2952	0.0007	0.2869	0.0054	0.2942
vício	-0.0919	-0.0048	-0.0993	-0.0131	-0.0946	-0.0058
eqm	0.0103	0.0021	0.0133	0.0049	0.0111	0.0028

Tabela C.44: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* AO .

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W
média	0.0028	0.2758	0.0017	0.2965
vício	-0.0972	-0.0242	-0.0983	-0.0035
eqm	0.0095	0.0023	0.0097	0.0009

Tabela C.45: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 7$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo AO .

$n = 500$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1715	0.1780	0.1626	0.1701	0.1669	0.1764
vício	-0.0285	-0.0220	-0.0374	-0.0299	-0.0331	-0.0236
eqm	0.0040	0.0032	0.0083	0.0066	0.0054	0.0039
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.1680	0.1718	0.1624	0.1646	0.1646	0.1703
vício	-0.0320	-0.0282	-0.0376	-0.0354	-0.0354	-0.0297
eqm	0.0046	0.0044	0.0086	0.0084	0.0060	0.0053
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1808	0.1751	0.1761	0.1702	0.1792	0.1730
vício	-0.0192	-0.0249	-0.0239	-0.0298	-0.0208	-0.0270
eqm	0.0029	0.0032	0.0050	0.0049	0.0037	0.0040
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1784	0.1723	0.1761	0.1704	0.1796	0.1736
vício	-0.0216	-0.0277	-0.0239	-0.0296	-0.0204	-0.0264
eqm	0.0027	0.0028	0.0047	0.0045	0.0035	0.0034
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1703	0.1673	0.1577	0.1591	0.1631	0.1652
vício	-0.0297	-0.0327	-0.0423	-0.0409	-0.0369	-0.0348
eqm	0.0059	0.0052	0.0107	0.0090	0.0069	0.0056
$n = 1000$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1849	0.1884	0.1794	0.1836	0.1850	0.1893
vício	-0.0151	-0.0116	-0.0206	-0.0164	-0.0150	-0.0107
eqm	0.0017	0.0015	0.0035	0.0031	0.0020	0.0016
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.1836	0.1859	0.1775	0.1817	0.1848	0.1873
vício	-0.0164	-0.0141	-0.0225	-0.0183	-0.0152	-0.0127
eqm	0.0018	0.0019	0.0039	0.0036	0.0020	0.0020
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1924	0.1859	0.1907	0.1848	0.1914	0.1846
vício	-0.0076	-0.0141	-0.0093	-0.0152	-0.0086	-0.0154
eqm	0.0011	0.0013	0.0019	0.0022	0.0015	0.0017
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1912	0.1845	0.1913	0.1865	0.1922	0.1862
vício	-0.0088	-0.0155	-0.0087	-0.0135	-0.0078	-0.0138
eqm	0.0010	0.0011	0.0018	0.0018	0.0014	0.0014
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1860	0.1832	0.1798	0.1760	0.1835	0.1822
vício	-0.0140	-0.0168	-0.0202	-0.0240	-0.0165	-0.0178
eqm	0.0026	0.0024	0.0046	0.0047	0.0029	0.0026

Tabela C.46: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W
média	0.1213	0.1741	0.1634	0.1856
vício	-0.0787	-0.0259	-0.0366	-0.0144
eqm	0.0093	0.0025	0.0026	0.0010

Tabela C.47: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 7$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

$n = 500$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0900	0.2672	0.0772	0.2625	0.0857	0.2692
vício	-0.0100	-0.0328	-0.0228	-0.0375	-0.0143	-0.0308
eqm	0.0028	0.0040	0.0061	0.0074	0.0031	0.0044
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.0870	0.2619	0.0759	0.2585	0.0841	0.2637
vício	-0.0130	-0.0381	-0.0241	-0.0415	-0.0159	-0.0363
eqm	0.0032	0.0054	0.0068	0.0093	0.0036	0.0059
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.0888	0.2661	0.0878	0.2618	0.0861	0.2638
vício	-0.0112	-0.0339	-0.0122	-0.0382	-0.0139	-0.0362
eqm	0.0018	0.0037	0.0033	0.0057	0.0027	0.0048
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0871	0.2647	0.0878	0.2639	0.0857	0.2659
vício	-0.0129	-0.0353	-0.0122	-0.0361	-0.0143	-0.0341
eqm	0.0017	0.0033	0.0030	0.0048	0.0026	0.0040
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.0902	0.2569	0.0695	0.2492	0.0859	0.2559
vício	-0.0098	-0.0431	-0.0305	-0.0508	-0.0141	-0.0441
eqm	0.0035	0.0067	0.0089	0.0102	0.0041	0.0071
$n = 1000$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0958	0.2828	0.0902	0.2797	0.0953	0.2824
vício	-0.0042	-0.0172	-0.0098	-0.0203	-0.0047	-0.0176
eqm	0.0013	0.0016	0.0030	0.0032	0.0016	0.0018
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.0937	0.2793	0.0891	0.2763	0.0930	0.2794
vício	-0.0063	-0.0207	-0.0109	-0.0237	-0.0070	-0.0206
eqm	0.0014	0.0020	0.0031	0.0039	0.0017	0.0022
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.0964	0.2813	0.0941	0.2792	0.0957	0.2804
vício	-0.0036	-0.0187	-0.0059	-0.0208	-0.0043	-0.0196
eqm	0.0008	0.0014	0.0016	0.0022	0.0012	0.0017
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0955	0.2805	0.0943	0.2806	0.0964	0.2814
vício	-0.0045	-0.0195	-0.0057	-0.0194	-0.0036	-0.0186
eqm	0.0008	0.0013	0.0015	0.0020	0.0011	0.0015
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.0963	0.2764	0.0933	0.2698	0.0959	0.2759
vício	-0.0037	-0.0236	-0.0067	-0.0302	-0.0041	-0.0241
eqm	0.0020	0.0026	0.0038	0.0049	0.0022	0.0030

Tabela C.48: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W	\widehat{D}_W	\widehat{d}_W
média	0.0454	0.2628	0.0736	0.2797
vício	-0.0546	-0.0372	-0.0264	-0.0203
eqm	0.0045	0.0033	0.0017	0.0012

Tabela C.49: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 12$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

$n = 500$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1754	0.1795	0.1700	0.1706	0.1762	0.1778
vício	-0.0246	-0.0205	-0.0300	-0.0294	-0.0238	-0.0222
eqm	0.0044	0.0032	0.0079	0.0061	0.0045	0.0038
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.1721	0.1727	0.1678	0.1662	0.1745	0.1721
vício	-0.0279	-0.0273	-0.0322	-0.0338	-0.0255	-0.0279
eqm	0.0048	0.0044	0.0087	0.0077	0.0050	0.0050
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1881	0.1765	0.1851	0.1712	0.1863	0.1739
vício	-0.0119	-0.0235	-0.0149	-0.0288	-0.0137	-0.0261
eqm	0.0025	0.0030	0.0044	0.0049	0.0034	0.0039
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1854	0.1735	0.1853	0.1726	0.1858	0.1743
vício	-0.0146	-0.0265	-0.0147	-0.0274	-0.0142	-0.0257
eqm	0.0024	0.0026	0.0040	0.0042	0.0032	0.0032
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1786	0.1705	0.1715	0.1582	0.1779	0.1685
vício	-0.0214	-0.0295	-0.0285	-0.0418	-0.0221	-0.0315
eqm	0.0058	0.0051	0.0116	0.0098	0.0066	0.0058
$n = 1000$						
	$\widehat{D}_{GPH.MQ}$	$\widehat{d}_{GPH.MQ}$	$\widehat{D}_{GPH.MM}$	$\widehat{d}_{GPH.MM}$	$\widehat{D}_{GPH.MQP}$	$\widehat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1865	0.1880	0.1820	0.1845	0.1874	0.1880
vício	-0.0135	-0.0120	-0.0180	-0.0155	-0.0126	-0.0120
eqm	0.0017	0.0013	0.0040	0.0028	0.0021	0.0017
	$\widehat{D}_{R.MQ}$	$\widehat{d}_{R.MQ}$	$\widehat{D}_{R.MM}$	$\widehat{d}_{R.MM}$	$\widehat{D}_{R.MQP}$	$\widehat{d}_{R.MQP}$
média	0.1851	0.1853	0.1806	0.1819	0.1856	0.1841
vício	-0.0149	-0.0147	-0.0194	-0.0181	-0.0144	-0.0159
eqm	0.0019	0.0017	0.0042	0.0035	0.0023	0.0021
	$\widehat{D}_{SR.MQ}$	$\widehat{d}_{SR.MQ}$	$\widehat{D}_{SR.MM}$	$\widehat{d}_{SR.MM}$	$\widehat{D}_{SR.MQP}$	$\widehat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1967	0.1860	0.1945	0.1862	0.1963	0.1866
vício	-0.0033	-0.0140	-0.0055	-0.0138	-0.0037	-0.0134
eqm	0.0011	0.0012	0.0019	0.0020	0.0015	0.0015
	$\widehat{D}_{SPR.MQ}$	$\widehat{d}_{SPR.MQ}$	$\widehat{D}_{SPR.MM}$	$\widehat{d}_{SPR.MM}$	$\widehat{D}_{SPR.MQP}$	$\widehat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1952	0.1841	0.1941	0.1869	0.1964	0.1867
vício	-0.0048	-0.0159	-0.0059	-0.0131	-0.0036	-0.0133
eqm	0.0011	0.0011	0.0019	0.0017	0.0014	0.0013
	$\widehat{D}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQ}$	$\widehat{D}_{GPHT.MM}$	$\widehat{d}_{GPHT.MM}$	$\widehat{D}_{GPHT.MQP}$	$\widehat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1886	0.1858	0.1825	0.1795	0.1884	0.1827
vício	-0.0114	-0.0142	-0.0175	-0.0205	-0.0116	-0.0173
eqm	0.0026	0.0022	0.0051	0.0042	0.0031	0.0026

Tabela C.50: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1349	0.1688	0.1946	0.1806
vício	-0.0651	-0.0312	-0.0054	-0.0194
eqm	0.0080	0.0025	0.0016	0.0011

Tabela C.51: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 12$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0899	0.2705	0.0729	0.2611	0.0865	0.2707
vício	-0.0101	-0.0295	-0.0271	-0.0389	-0.0135	-0.0293
eqm	0.0035	0.0038	0.0084	0.0076	0.0040	0.0044
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0870	0.2648	0.0722	0.2599	0.0815	0.2655
vício	-0.0130	-0.0352	-0.0278	-0.0401	-0.0185	-0.0345
eqm	0.0038	0.0056	0.0083	0.0091	0.0045	0.0059
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.0895	0.2666	0.0892	0.2625	0.0891	0.2633
vício	-0.0105	-0.0334	-0.0108	-0.0375	-0.0109	-0.0367
eqm	0.0019	0.0041	0.0036	0.0063	0.0028	0.0056
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0880	0.2662	0.0875	0.2639	0.0894	0.2669
vício	-0.0120	-0.0338	-0.0125	-0.0361	-0.0106	-0.0331
eqm	0.0019	0.0034	0.0034	0.0054	0.0028	0.0044
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.0891	0.2624	0.0807	0.2587	0.0853	0.2617
vício	-0.0109	-0.0376	-0.0193	-0.0413	-0.0147	-0.0383
eqm	0.0047	0.0063	0.0086	0.0093	0.0054	0.0068
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0932	0.2856	0.0907	0.2788	0.0933	0.2839
vício	-0.0068	-0.0144	-0.0093	-0.0212	-0.0067	-0.0161
eqm	0.0015	0.0015	0.0031	0.0034	0.0016	0.0019
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0914	0.2821	0.0890	0.2773	0.0909	0.2816
vício	-0.0086	-0.0179	-0.0110	-0.0227	-0.0091	-0.0184
eqm	0.0016	0.0019	0.0034	0.0039	0.0018	0.0022
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.0952	0.2826	0.0940	0.2807	0.0946	0.2811
vício	-0.0048	-0.0174	-0.0060	-0.0193	-0.0054	-0.0189
eqm	0.0009	0.0015	0.0016	0.0023	0.0012	0.0019
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0942	0.2819	0.0946	0.2815	0.0948	0.2829
vício	-0.0058	-0.0181	-0.0054	-0.0185	-0.0052	-0.0171
eqm	0.0009	0.0013	0.0015	0.0021	0.0012	0.0016
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.0934	0.2801	0.0903	0.2736	0.0929	0.2796
vício	-0.0066	-0.0199	-0.0097	-0.0264	-0.0071	-0.0204
eqm	0.0021	0.0026	0.0041	0.0049	0.0025	0.0030

Resultado da Estimação dos Processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$

Tabela C.52: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1704	0.0228	0.7833	0.1880	0.0383	0.7798
vício	-0.0296	-0.1772	0.0833	-0.012	-0.1617	0.0798
eqm	0.0038	0.0609	0.0302	0.0015	0.0483	0.0241

Tabela C.53: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1625	0.0319	0.7760	0.1848	0.0523	0.7686
vício	-0.0375	-0.1681	0.0760	-0.0152	-0.1477	0.0686
eqm	0.0045	0.0601	0.0317	0.0016	0.0465	0.0250

Tabela C.54: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 1$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1569	0.0100	0.8207	0.1786	0.1748	0.0871	0.7752	0.2235
vício	-0.0431	0.1900	0.1207	-0.0214	-0.0252	-0.1129	0.0752	0.0235
eqm	0.0048	0.1405	0.0519	0.0839	0.0019	0.0746	0.0236	0.0438

Tabela C.55: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 1$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *AO*.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1164	0.0551	0.7844	0.2048	0.1726	0.1007	0.7746	0.2372
vício	-0.0836	-0.1449	0.0844	0.0048	-0.0274	-0.0993	0.0746	0.0372
eqm	0.0111	0.1265	0.0398	0.0853	0.0021	0.0764	0.0202	0.0508

Outlier Inovador

Resultado da Estimação dos Processos

SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$

Tabela C.56: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 4$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2002	0.2027	0.1915	0.1986	0.1976	0.2018
vício	0.0002	0.0027	-0.0085	-0.0014	-0.0024	0.0018
eqm	0.0027	0.0023	0.005	0.0047	0.0032	0.0028
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2001	0.2026	0.1924	0.1975	0.1972	0.2004
vício	0.0001	0.0026	-0.0076	-0.0025	-0.0028	0.0004
eqm	0.0029	0.0033	0.0055	0.0065	0.0035	0.0038
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2062	0.2016	0.2040	0.1970	0.2057	0.1994
vício	0.0062	0.0016	0.0040	-0.0030	0.0057	-0.0006
eqm	0.0018	0.002	0.0032	0.0034	0.0026	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2018	0.1954	0.2022	0.1966	0.2048	0.1987
vício	0.0018	-0.0046	0.0022	-0.0034	0.0048	-0.0013
eqm	0.0016	0.0016	0.0031	0.0029	0.0024	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2091	0.2052	0.1978	0.1986	0.2069	0.2021
vício	0.0091	0.0052	-0.0022	-0.0014	0.0069	0.0021
eqm	0.0040	0.0036	0.0075	0.0058	0.0043	0.0038
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2002	0.2010	0.1949	0.1993	0.2006	0.2020
vício	0.0002	0.0010	-0.0051	-0.0007	0.0006	0.0020
eqm	0.0012	0.0012	0.0029	0.0028	0.0015	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2007	0.2018	0.1945	0.1992	0.2005	0.2000
vício	0.0007	0.0018	-0.0055	-0.0008	0.0005	0.0000
eqm	0.0012	0.0014	0.0033	0.0032	0.0016	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2024	0.1973	0.2042	0.1984	0.2056	0.1984
vício	0.0024	-0.0027	0.0042	-0.0016	0.0056	-0.0016
eqm	0.0007	0.0008	0.0014	0.0014	0.0011	0.0010
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2024	0.1973	0.2042	0.1984	0.2056	0.1984
vício	0.0024	-0.0027	0.0042	-0.0016	0.0056	-0.0016
eqm	0.0007	0.0008	0.0014	0.0014	0.0011	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2024	0.2006	0.1979	0.1952	0.2019	0.1996
vício	0.0024	0.0006	-0.0021	-0.0048	0.0019	-0.0004
eqm	0.0019	0.0017	0.0035	0.0035	0.0021	0.0020

Tabela C.57: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1727	0.1957	0.1897	0.1976
vício	-0.0273	-0.0043	-0.0103	-0.0024
eqm	0.0039	0.0014	0.0015	0.0007

Tabela C.58: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 4$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1013	0.3055	0.0923	0.3006	0.0995	0.3036
vício	0.0013	0.0055	-0.0077	0.0006	-0.0005	0.0036
eqm	0.0027	0.0023	0.0057	0.0045	0.0030	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1003	0.3041	0.0921	0.2996	0.0988	0.3034
vício	0.0003	0.0041	-0.0079	-0.0004	-0.0012	0.0034
eqm	0.0029	0.0030	0.0063	0.0060	0.0032	0.0034
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1031	0.3046	0.1013	0.3042	0.1024	0.3029
vício	0.0031	0.0046	0.0013	0.0042	0.0024	0.0029
eqm	0.0017	0.0019	0.0035	0.0035	0.0026	0.0027
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0992	0.2990	0.1002	0.3022	0.1007	0.3018
vício	-0.0008	-0.0010	0.0002	0.0022	0.0007	0.0018
eqm	0.0016	0.0015	0.0032	0.0028	0.0024	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1079	0.3087	0.0990	0.3017	0.1063	0.3043
vício	0.0079	0.0087	-0.0010	0.0017	0.0063	0.0043
eqm	0.0038	0.0039	0.0071	0.0060	0.0043	0.0039
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0997	0.3017	0.0978	0.2988	0.1019	0.3015
vício	-0.0003	0.0017	-0.0022	-0.0012	0.0019	0.0015
eqm	0.0013	0.0011	0.0029	0.0027	0.0015	0.0015
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0990	0.3005	0.0965	0.2971	0.1020	0.2994
vício	-0.0010	0.0005	-0.0035	-0.0029	0.0020	-0.0006
eqm	0.0014	0.0013	0.0031	0.0031	0.0016	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1015	0.3013	0.0998	0.2999	0.1007	0.2997
vício	0.0015	0.0013	-0.0002	-0.0001	0.0007	-0.0003
eqm	0.0008	0.0008	0.0014	0.0015	0.0011	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0997	0.2988	0.0992	0.2996	0.1004	0.3001
vício	-0.0003	-0.0012	-0.0008	-0.0004	0.0004	0.0001
eqm	0.0008	0.0007	0.0014	0.0013	0.0011	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1040	0.3014	0.0975	0.2993	0.1020	0.3024
vício	0.0040	0.0014	-0.0025	-0.0007	0.0020	0.0024
eqm	0.0020	0.0017	0.0039	0.0035	0.0022	0.0020

Tabela C.59: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 4$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.0802	0.2950	0.0924	0.2964
vício	-0.0198	-0.0050	-0.0076	-0.0036
eqm	0.0031	0.0014	0.0014	0.0007

Tabela C.60: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 5$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3039	0.1026	0.2950	0.0961	0.3038	0.1012
vício	0.0039	0.0026	-0.0050	-0.0039	0.0038	0.0012
eqm	0.0029	0.0024	0.0052	0.0045	0.0034	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3034	0.1016	0.2949	0.0978	0.3039	0.1010
vício	0.0034	0.0016	-0.0051	-0.0022	0.0039	0.0010
eqm	0.0031	0.0031	0.0058	0.0056	0.0035	0.0034
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3203	0.1002	0.3163	0.0983	0.3181	0.0983
vício	0.0203	0.0002	0.0163	-0.0017	0.0181	-0.0017
eqm	0.0023	0.0019	0.0040	0.0034	0.0030	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3150	0.0923	0.3148	0.0948	0.3164	0.0953
vício	0.0150	-0.0077	0.0148	-0.0052	0.0164	-0.0047
eqm	0.0020	0.0016	0.0036	0.0028	0.0029	0.0022
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3171	0.1008	0.3029	0.0920	0.3131	0.0969
vício	0.0171	0.0008	0.0029	-0.0080	0.0131	-0.0031
eqm	0.0045	0.0035	0.0075	0.0059	0.0046	0.0041
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3025	0.1004	0.2956	0.0970	0.3020	0.0999
vício	0.0025	0.0004	-0.0044	-0.0030	0.0020	-0.0001
eqm	0.0013	0.0010	0.0031	0.0027	0.0016	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3025	0.1003	0.2962	0.0979	0.3012	0.1000
vício	0.0025	0.0003	-0.0038	-0.0021	0.0012	0.000
eqm	0.0014	0.0012	0.0032	0.0032	0.0017	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3131	0.0989	0.3094	0.0975	0.3111	0.0985
vício	0.0131	-0.0011	0.0094	-0.0025	0.0111	-0.0015
eqm	0.0010	0.0008	0.0018	0.0015	0.0013	0.0012
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3102	0.0947	0.3096	0.0965	0.3102	0.0972
vício	0.0102	-0.0053	0.0096	-0.0035	0.0102	-0.0028
eqm	0.0009	0.0008	0.0017	0.0013	0.0013	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3090	0.1026	0.3005	0.0980	0.3076	0.1001
vício	0.0090	0.0026	0.0005	-0.0020	0.0076	0.0001
eqm	0.0019	0.0018	0.0040	0.0032	0.0023	0.0020

Tabela C.61: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.2658	0.0961	0.2842	0.0973
vício	-0.0342	-0.0039	-0.0158	-0.0027
eqm	0.0040	0.0014	0.0015	0.0007

Tabela C.62: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 5$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2015	0.2036	0.1936	0.1992	0.1988	0.2031
vício	0.0015	0.0036	-0.0064	-0.0008	-0.0012	0.0031
eqm	0.0027	0.0024	0.0059	0.0045	0.0032	0.0026
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2005	0.2019	0.1957	0.1997	0.1987	0.2019
vício	0.0005	0.0019	-0.0043	-0.0003	-0.0013	0.0019
eqm	0.0030	0.0033	0.0061	0.0059	0.0035	0.0036
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2101	0.2015	0.2055	0.2017	0.2086	0.2000
vício	0.0101	0.0015	0.0055	0.0017	0.0086	0.0000
eqm	0.0019	0.0021	0.0035	0.0036	0.0025	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2056	0.1949	0.2055	0.1983	0.2067	0.1982
vício	0.0056	-0.0051	0.0055	-0.0017	0.0067	-0.0018
eqm	0.0018	0.0016	0.0032	0.0031	0.0025	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2090	0.2057	0.1990	0.1981	0.2065	0.2038
vício	0.0090	0.0057	-0.0010	-0.0019	0.0065	0.0038
eqm	0.0047	0.0034	0.0075	0.0057	0.0047	0.0037
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1994	0.2018	0.1943	0.1956	0.1999	0.1999
vício	-0.0006	0.0018	-0.0057	-0.0044	-0.0001	-0.0001
eqm	0.0013	0.0012	0.0029	0.0024	0.0016	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1990	0.2013	0.1943	0.1949	0.1986	0.2006
vício	-0.0010	0.0013	-0.0057	-0.0051	-0.0014	0.0006
eqm	0.0014	0.0014	0.0031	0.0031	0.0018	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2056	0.2005	0.2057	0.1994	0.2058	0.2009
vício	0.0056	0.0005	0.0057	-0.0006	0.0058	0.0009
eqm	0.0009	0.0009	0.0016	0.0016	0.0012	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2033	0.1972	0.2051	0.1986	0.2050	0.2000
vício	0.0033	-0.0028	0.0051	-0.0014	0.0050	0.0000
eqm	0.0008	0.0008	0.0015	0.0013	0.0011	0.001
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2042	0.2024	0.1994	0.1963	0.2049	0.2019
vício	0.0042	0.0024	-0.0006	-0.0037	0.0049	0.0019
eqm	0.0019	0.0019	0.0036	0.0038	0.0022	0.0023

Tabela C.63: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1646	0.1959	0.1840	0.1980
vício	-0.0354	-0.0041	-0.0160	-0.0020
eqm	0.0042	0.0014	0.0015	0.0007

Tabela C.64: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 5$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0988	0.3030	0.0925	0.3003	0.0968	0.3027
vício	-0.0012	0.0030	-0.0075	0.0003	-0.0032	0.0027
eqm	0.0028	0.0021	0.0053	0.0042	0.0032	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0982	0.3018	0.0927	0.2988	0.0968	0.3031
vício	-0.0018	0.0018	-0.0073	-0.0012	-0.0032	0.0031
eqm	0.0030	0.0030	0.0054	0.0057	0.0034	0.0032
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1036	0.3038	0.1024	0.3035	0.1017	0.3032
vício	0.0036	0.0038	0.0024	0.0035	0.0017	0.0032
eqm	0.0018	0.0018	0.0032	0.0034	0.0025	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0993	0.2978	0.0986	0.3023	0.0998	0.3016
vício	-0.0007	-0.0022	-0.0014	0.0023	-0.0002	0.0016
eqm	0.0017	0.0014	0.0030	0.0026	0.0024	0.0020
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1049	0.3073	0.0943	0.2995	0.1012	0.3053
vício	0.0049	0.0073	-0.0057	-0.0005	0.0012	0.0053
eqm	0.0040	0.0035	0.0074	0.0064	0.0045	0.0038
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0993	0.3026	0.0942	0.2998	0.1001	0.3035
vício	-0.0007	0.0026	-0.0058	-0.0002	0.0001	0.0035
eqm	0.0013	0.0011	0.0026	0.0027	0.0015	0.0013
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0990	0.3022	0.0938	0.2996	0.0995	0.3015
vício	-0.0010	0.0022	-0.0062	-0.0004	-0.0005	0.0015
eqm	0.0014	0.0013	0.0027	0.0031	0.0015	0.0015
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1009	0.3029	0.0990	0.3025	0.1001	0.3025
vício	0.0009	0.0029	-0.0010	0.0025	0.0001	0.0025
eqm	0.0008	0.0008	0.0015	0.0014	0.0011	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0989	0.2999	0.099	0.3015	0.1001	0.3024
vício	-0.0011	-0.0001	-0.001	0.0015	0.0001	0.0024
eqm	0.0008	0.0007	0.0014	0.0013	0.0011	0.001
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1028	0.3034	0.0966	0.2977	0.1016	0.3011
vício	0.0028	0.0034	-0.0034	-0.0023	0.0016	0.0011
eqm	0.0019	0.0017	0.0034	0.0032	0.0021	0.0019

Tabela C.65: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.0707	0.2943	0.0865	0.2979
vício	-0.0293	-0.0057	-0.0135	-0.0021
eqm	0.0031	0.0012	0.0014	0.0006

Tabela C.66: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 6$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.3035	0.1019	0.2940	0.0951	0.3004	0.0987
vício	0.0035	0.0019	-0.0060	-0.0049	0.0004	-0.0013
eqm	0.0032	0.0021	0.0056	0.0049	0.0033	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.3030	0.1011	0.2950	0.0943	0.3008	0.0993
vício	0.0030	0.0011	-0.0050	-0.0057	0.0008	-0.0007
eqm	0.0035	0.0029	0.0061	0.0066	0.0037	0.0034
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3206	0.0992	0.3184	0.0995	0.3194	0.0990
vício	0.0206	-0.0008	0.0184	-0.0005	0.0194	-0.0010
eqm	0.0025	0.0018	0.0041	0.0034	0.0033	0.0025
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3153	0.0915	0.3163	0.0969	0.3180	0.0959
vício	0.0153	-0.0085	0.0163	-0.0031	0.0180	-0.0041
eqm	0.0022	0.0015	0.0038	0.0027	0.0031	0.0020
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3177	0.1020	0.3045	0.0945	0.3142	0.0991
vício	0.0177	0.0020	0.0045	-0.0055	0.0142	-0.0009
eqm	0.0046	0.0033	0.0081	0.0064	0.0050	0.0035
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2997	0.1013	0.2993	0.0976	0.3015	0.1002
vício	-0.0003	0.0013	-0.0007	-0.0024	0.0015	0.0002
eqm	0.0012	0.0011	0.0026	0.0024	0.0016	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2990	0.1002	0.2989	0.0979	0.3004	0.1000
vício	-0.0010	0.0002	-0.0011	-0.0021	0.0004	0.0000
eqm	0.0013	0.0013	0.0029	0.0029	0.0016	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.3114	0.0990	0.3076	0.0983	0.3102	0.0991
vício	0.0114	-0.0010	0.0076	-0.0017	0.0102	-0.0009
eqm	0.0010	0.0008	0.0019	0.0015	0.0014	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.3090	0.0954	0.3068	0.0973	0.3092	0.0982
vício	0.0090	-0.0046	0.0068	-0.0027	0.0092	-0.0018
eqm	0.0010	0.0008	0.0018	0.0014	0.0014	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.3092	0.0990	0.3040	0.0934	0.3068	0.0967
vício	0.0092	-0.0010	0.0040	-0.0066	0.0068	-0.0033
eqm	0.0021	0.0019	0.0040	0.0034	0.0023	0.0021

Tabela C.67: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.1$, $D = 0.3$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.2563	0.0956	0.2766	0.0981
vício	-0.0437	-0.0044	-0.0234	-0.0019
eqm	0.0047	0.0014	0.0018	0.0007

Tabela C.68: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 6$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2025	0.2017	0.1908	0.1993	0.1957	0.2021
vício	0.0025	0.0017	-0.0092	-0.0007	-0.0043	0.0021
eqm	0.0029	0.0021	0.0060	0.0046	0.0035	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2015	0.1999	0.1913	0.1982	0.1966	0.2021
vício	0.0015	-0.0001	-0.0087	-0.0018	-0.0034	0.0021
eqm	0.0031	0.0031	0.0063	0.0057	0.0037	0.0035
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2122	0.2011	0.2084	0.2002	0.2100	0.2004
vício	0.0122	0.0011	0.0084	0.0002	0.0100	0.0004
eqm	0.0020	0.0020	0.0036	0.0033	0.0027	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2077	0.1946	0.2067	0.1984	0.2084	0.1994
vício	0.0077	-0.0054	0.0067	-0.0016	0.0084	-0.0006
eqm	0.0018	0.0015	0.0035	0.0029	0.0025	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2127	0.2032	0.2025	0.1951	0.2095	0.2014
vício	0.0127	0.0032	0.0025	-0.0049	0.0095	0.0014
eqm	0.0046	0.0034	0.0072	0.0062	0.0047	0.0033
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2014	0.2025	0.1969	0.1973	0.2011	0.2010
vício	0.0014	0.0025	-0.0031	-0.0027	0.0011	0.0010
eqm	0.0012	0.0011	0.0028	0.0025	0.0016	0.0013
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2007	0.2012	0.1955	0.1971	0.2001	0.2004
vício	0.0007	0.0012	-0.0045	-0.0029	0.0001	0.0004
eqm	0.0013	0.0013	0.0032	0.0030	0.0016	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2077	0.2005	0.2072	0.2010	0.2072	0.2016
vício	0.0077	0.0005	0.0072	0.0010	0.0072	0.0016
eqm	0.0009	0.0008	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2054	0.1972	0.2062	0.2005	0.2070	0.2008
vício	0.0054	-0.0028	0.0062	0.0005	0.0070	0.0008
eqm	0.0008	0.0007	0.0015	0.0013	0.0011	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2081	0.2012	0.2018	0.1957	0.2059	0.2009
vício	0.0081	0.0012	0.0018	-0.0043	0.0059	0.0009
eqm	0.0019	0.0016	0.0037	0.0031	0.0022	0.0018

Tabela C.69: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1595	0.1954	0.1811	0.1978
vício	-0.0405	-0.0046	-0.0189	-0.0022
eqm	0.0041	0.0013	0.0015	0.0006

Tabela C.70: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 6$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1008	0.3021	0.0962	0.2940	0.0995	0.3005
vício	0.0008	0.0021	-0.0038	-0.0060	-0.0005	0.0005
eqm	0.0027	0.0021	0.0059	0.0046	0.0030	0.0026
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1003	0.3013	0.0939	0.2937	0.0979	0.2978
vício	0.0003	0.0013	-0.0061	-0.0063	-0.0021	-0.0022
eqm	0.0030	0.0030	0.0066	0.0060	0.0033	0.0034
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1042	0.3017	0.1022	0.2969	0.1036	0.2988
vício	0.0042	0.0017	0.0022	-0.0031	0.0036	-0.0012
eqm	0.0018	0.0018	0.0031	0.0034	0.0023	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1002	0.2961	0.1003	0.2978	0.1029	0.2984
vício	0.0002	-0.0039	0.0003	-0.0022	0.0029	-0.0016
eqm	0.0016	0.0013	0.0029	0.0027	0.0022	0.0020
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1108	0.3053	0.0978	0.2976	0.1059	0.3017
vício	0.0108	0.0053	-0.0022	-0.0024	0.0059	0.0017
eqm	0.0040	0.0031	0.0071	0.0059	0.0042	0.0033
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1005	0.2993	0.0964	0.2956	0.1002	0.2988
vício	0.0005	-0.0007	-0.0036	-0.0044	0.0002	-0.0012
eqm	0.0013	0.0011	0.0029	0.0025	0.0016	0.0013
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1001	0.2986	0.0964	0.2952	0.1002	0.2991
vício	0.0001	-0.0014	-0.0036	-0.0048	0.0002	-0.0009
eqm	0.0014	0.0013	0.0031	0.0030	0.0017	0.0015
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1032	0.2991	0.1028	0.2966	0.1038	0.2971
vício	0.0032	-0.0009	0.0028	-0.0034	0.0038	-0.0029
eqm	0.0008	0.0008	0.0015	0.0015	0.0011	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1012	0.2962	0.1022	0.2968	0.1033	0.2967
vício	0.0012	-0.0038	0.0022	-0.0032	0.0033	-0.0033
eqm	0.0007	0.0007	0.0014	0.0013	0.0010	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1053	0.3014	0.0999	0.2953	0.1034	0.2997
vício	0.0053	0.0014	-0.0001	-0.0047	0.0034	-0.0003
eqm	0.0020	0.0016	0.0038	0.0033	0.0022	0.0018

Tabela C.71: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.0655	0.2927	0.0836	0.2949
vício	-0.0345	-0.0073	-0.0164	-0.0051
eqm	0.0032	0.0013	0.0014	0.0007

Tabela C.72: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 7$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2033	0.2036	0.1976	0.1980	0.2024	0.2039
vício	0.0033	0.0036	-0.0024	-0.0020	0.0024	0.0039
eqm	0.0030	0.0023	0.0058	0.0045	0.0031	0.0026
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2022	0.2011	0.1977	0.1967	0.2013	0.2014
vício	0.0022	0.0011	-0.0023	-0.0033	0.0013	0.0014
eqm	0.0033	0.0033	0.0063	0.0064	0.0034	0.0035
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2138	0.2030	0.2119	0.2013	0.2144	0.2020
vício	0.0138	0.0030	0.0119	0.0013	0.0144	0.0020
eqm	0.0021	0.0019	0.0036	0.0032	0.0028	0.0024
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2092	0.1964	0.2103	0.2001	0.2125	0.2005
vício	0.0092	-0.0036	0.0103	0.0001	0.0125	0.0005
eqm	0.0019	0.0015	0.0035	0.0024	0.0026	0.0019
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2139	0.2065	0.2050	0.2006	0.2140	0.2045
vício	0.0139	0.0065	0.0050	0.0006	0.0140	0.0045
eqm	0.0049	0.0035	0.0076	0.0065	0.0050	0.0037
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2024	0.2031	0.1946	0.1990	0.2007	0.2019
vício	0.0024	0.0031	-0.0054	-0.0010	0.0007	0.0019
eqm	0.0013	0.0011	0.0033	0.0027	0.0016	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2026	0.2035	0.1951	0.1984	0.2014	0.2018
vício	0.0026	0.0035	-0.0049	-0.0016	0.0014	0.0018
eqm	0.0014	0.0014	0.0032	0.0031	0.0016	0.0017
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2094	0.2028	0.2097	0.2016	0.2095	0.2018
vício	0.0094	0.0028	0.0097	0.0016	0.0095	0.0018
eqm	0.0009	0.0009	0.0016	0.0014	0.0013	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2067	0.1987	0.2086	0.2005	0.2088	0.2010
vício	0.0067	-0.0013	0.0086	0.0005	0.0088	0.0010
eqm	0.0008	0.0007	0.0015	0.0012	0.0012	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2085	0.2039	0.2048	0.1959	0.2074	0.2005
vício	0.0085	0.0039	0.0048	-0.0041	0.0074	0.0005
eqm	0.0020	0.0017	0.0034	0.0034	0.0022	0.0020

Tabela C.73: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1563	0.1967	0.1811	0.1988
vício	-0.0437	-0.0033	-0.0189	-0.0012
eqm	0.0044	0.0013	0.0014	0.0007

Tabela C.74: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 7$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0973	0.3018	0.0931	0.2948	0.0967	0.3032
vício	-0.0027	0.0018	-0.0069	-0.0052	-0.0033	0.0032
eqm	0.0030	0.0022	0.0059	0.0046	0.0033	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0968	0.3007	0.0929	0.2932	0.0959	0.3019
vício	-0.0032	0.0007	-0.0071	-0.0068	-0.0041	0.0019
eqm	0.0032	0.0032	0.0067	0.0060	0.0034	0.0033
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1035	0.3028	0.1010	0.3009	0.1030	0.3033
vício	0.0035	0.0028	0.0010	0.0009	0.0030	0.0033
eqm	0.0019	0.0020	0.0034	0.0036	0.0026	0.0027
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.0993	0.2968	0.0988	0.2991	0.1020	0.3023
vício	-0.0007	-0.0032	-0.0012	-0.0009	0.0020	0.0023
eqm	0.0018	0.0015	0.0032	0.0031	0.0025	0.0022
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1083	0.3048	0.1007	0.2982	0.1052	0.3045
vício	0.0083	0.0048	0.0007	-0.0018	0.0052	0.0045
eqm	0.0045	0.0035	0.0078	0.0065	0.0046	0.0037
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1007	0.3022	0.0958	0.3010	0.0976	0.3016
vício	0.0007	0.0022	-0.0042	0.0010	-0.0024	0.0016
eqm	0.0014	0.0011	0.0029	0.0026	0.0016	0.0013
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1003	0.3015	0.0958	0.3003	0.0986	0.3016
vício	0.0003	0.0015	-0.0042	0.0003	-0.0014	0.0016
eqm	0.0014	0.0013	0.0032	0.0031	0.0017	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1029	0.3022	0.1014	0.3011	0.1023	0.3018
vício	0.0029	0.0022	0.0014	0.0011	0.0023	0.0018
eqm	0.0008	0.0008	0.0015	0.0016	0.0012	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1007	0.2990	0.1009	0.3006	0.1023	0.3016
vício	0.0007	-0.0010	0.0009	0.0006	0.0023	0.0016
eqm	0.0008	0.0007	0.0014	0.0013	0.0011	0.001
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1039	0.3059	0.0986	0.3006	0.1030	0.3037
vício	0.0039	0.0059	-0.0014	0.0006	0.0030	0.0037
eqm	0.0019	0.0017	0.0036	0.0031	0.0022	0.0020

Tabela C.75: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 7$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.0583	0.2931	0.0822	0.2968
vício	-0.0417	-0.0069	-0.0178	-0.0032
eqm	0.0037	0.0013	0.0014	0.0007

Tabela C.76: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 12$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2037	0.2037	0.1946	0.1922	0.2017	0.1994
vício	0.0037	0.0037	-0.0054	-0.0078	0.0017	-0.0006
eqm	0.0033	0.0020	0.0069	0.0046	0.0036	0.0024
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2041	0.2046	0.1942	0.1937	0.2019	0.2021
vício	0.0041	0.0046	-0.0058	-0.0063	0.0019	0.0021
eqm	0.0035	0.0027	0.0075	0.0062	0.0040	0.0031
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2175	0.2028	0.2166	0.2004	0.2181	0.2014
vício	0.0175	0.0028	0.0166	0.0004	0.0181	0.0014
eqm	0.0022	0.0017	0.0040	0.0033	0.0031	0.0024
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2120	0.1943	0.2143	0.1966	0.2155	0.1986
vício	0.0120	-0.0057	0.0143	-0.0034	0.0155	-0.0014
eqm	0.0019	0.0014	0.0038	0.0025	0.0030	0.0019
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2178	0.2033	0.2058	0.1964	0.2143	0.2033
vício	0.0178	0.0033	0.0058	-0.0036	0.0143	0.0033
eqm	0.0054	0.0031	0.0098	0.0061	0.0058	0.0038
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.2007	0.2014	0.1946	0.1979	0.2014	0.2017
vício	0.0007	0.0014	-0.0054	-0.0021	0.0014	0.0017
eqm	0.0014	0.0010	0.0034	0.0025	0.0018	0.0012
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.2002	0.2004	0.1947	0.1978	0.2005	0.2002
vício	0.0002	0.0004	-0.0053	-0.0022	0.0005	0.0002
eqm	0.0014	0.0013	0.0035	0.0029	0.0019	0.0014
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.2108	0.2005	0.2082	0.1985	0.2107	0.1990
vício	0.0108	0.0005	0.0082	-0.0015	0.0107	-0.0010
eqm	0.0010	0.0008	0.0018	0.0015	0.0013	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.2083	0.1968	0.2082	0.1983	0.2094	0.1988
vício	0.0083	-0.0032	0.0082	-0.0017	0.0094	-0.0012
eqm	0.0009	0.0007	0.0018	0.0014	0.0013	0.0009
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.2113	0.2016	0.2043	0.1987	0.2102	0.2014
vício	0.0113	0.0016	0.0043	-0.0013	0.0102	0.0014
eqm	0.0021	0.0016	0.0043	0.0032	0.0024	0.0020

Tabela C.77: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA(0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $s = 12$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$		$n = 1000$	
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	\hat{D}_W	\hat{d}_W
média	0.1606	0.1891	0.1871	0.1968
vício	-0.0394	-0.0109	-0.0129	-0.0032
eqm	0.0049	0.0013	0.0027	0.0006

Tabela C.78: Resultado da estimação semiparamétrica para o processo SARFIMA (0, d , 0) \times (0, D , 0) $_s$, quando $d = 0.3$, $D = 0.1$, $s = 12$, $n \in \{500, 1000\}$ e $\ell = 5$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

$n = 500$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.0975	0.3047	0.0908	0.3020	0.0958	0.3046
vício	-0.0025	0.0047	-0.0092	0.0020	-0.0042	0.0046
eqm	0.0035	0.0021	0.0071	0.0043	0.0041	0.0025
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.0967	0.3038	0.0930	0.3046	0.0966	0.3036
vício	-0.0033	0.0038	-0.0070	0.0046	-0.0034	0.0036
eqm	0.0037	0.0031	0.0073	0.0056	0.0042	0.0035
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1047	0.3041	0.1024	0.3025	0.1035	0.3043
vício	0.0047	0.0041	0.0024	0.0025	0.0035	0.0043
eqm	0.0021	0.0020	0.0037	0.0035	0.0031	0.0026
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1005	0.2980	0.1016	0.3008	0.1022	0.3026
vício	0.0005	-0.0020	0.0016	0.0008	0.0022	0.0026
eqm	0.0020	0.0015	0.0035	0.0031	0.0030	0.0021
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1095	0.3077	0.0936	0.3001	0.1055	0.3038
vício	0.0095	0.0077	-0.0064	0.0001	0.0055	0.0038
eqm	0.0051	0.0034	0.0102	0.0064	0.0057	0.0037
$n = 1000$						
	$\hat{D}_{GPH.MQ}$	$\hat{d}_{GPH.MQ}$	$\hat{D}_{GPH.MM}$	$\hat{d}_{GPH.MM}$	$\hat{D}_{GPH.MQP}$	$\hat{d}_{GPH.MQP}$
média	0.1010	0.3025	0.0994	0.2988	0.1006	0.3020
vício	0.0010	0.0025	-0.0006	-0.0012	0.0006	0.0020
eqm	0.0015	0.0011	0.0029	0.0025	0.0017	0.0014
	$\hat{D}_{R.MQ}$	$\hat{d}_{R.MQ}$	$\hat{D}_{R.MM}$	$\hat{d}_{R.MM}$	$\hat{D}_{R.MQP}$	$\hat{d}_{R.MQP}$
média	0.1003	0.3010	0.0995	0.2984	0.1003	0.3017
vício	0.0003	0.0010	-0.0005	-0.0016	0.0003	0.0017
eqm	0.0016	0.0014	0.0031	0.0031	0.0017	0.0016
	$\hat{D}_{SR.MQ}$	$\hat{d}_{SR.MQ}$	$\hat{D}_{SR.MM}$	$\hat{d}_{SR.MM}$	$\hat{D}_{SR.MQP}$	$\hat{d}_{SR.MQP}$
média	0.1043	0.3026	0.1027	0.3016	0.1042	0.3019
vício	0.0043	0.0026	0.0027	0.0016	0.0042	0.0019
eqm	0.0009	0.0009	0.0017	0.0016	0.0012	0.0011
	$\hat{D}_{SPR.MQ}$	$\hat{d}_{SPR.MQ}$	$\hat{D}_{SPR.MM}$	$\hat{d}_{SPR.MM}$	$\hat{D}_{SPR.MQP}$	$\hat{d}_{SPR.MQP}$
média	0.1021	0.2994	0.1025	0.3009	0.1039	0.3018
vício	0.0021	-0.0006	0.0025	0.0009	0.0039	0.0018
eqm	0.0009	0.0008	0.0016	0.0014	0.0012	0.0010
	$\hat{D}_{GPHT.MQ}$	$\hat{d}_{GPHT.MQ}$	$\hat{D}_{GPHT.MM}$	$\hat{d}_{GPHT.MM}$	$\hat{D}_{GPHT.MQP}$	$\hat{d}_{GPHT.MQP}$
média	0.1061	0.3037	0.1011	0.2938	0.1045	0.3006
vício	0.0061	0.0037	0.0011	-0.0062	0.0045	0.0006
eqm	0.0021	0.0016	0.0041	0.0034	0.0024	0.0019

Resultado da Estimação dos Processos SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q) $_s$

Tabela C.79: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1704	0.0228	0.7833	0.1880	0.0383	0.7798
vício	-0.0296	-0.1772	0.0833	-0.0120	-0.1617	0.0798
eqm	0.0038	0.0609	0.0302	0.0015	0.0483	0.0241

Tabela C.80: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 0$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$			$n = 1000$		
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$
média	0.1625	0.0319	0.7760	0.1848	0.0523	0.7686
vício	-0.0375	-0.1681	0.0760	-0.0152	-0.1477	0.0686
eqm	0.0045	0.0601	0.0317	0.0016	0.0465	0.0250

Tabela C.81: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 1$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 5$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1568	0.0125	0.8220	0.1781	0.1750	0.0879	0.7741	0.2228
vício	-0.0432	-0.1875	0.1220	0.0840	-0.0250	-0.1121	0.0261	0.0228
eqm	0.0048	0.1420	0.0520	-0.0219	0.0018	0.0744	0.0741	0.0447

Tabela C.82: Resultado da estimação paramétrica para o processo SARFIMA($1, d, 1$) \times ($0, D, 0$) $_s$, quando $d = 0.2$, $D = 0.2$, $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.2$, $s = 6$ e $n \in \{500, 1000\}$ com contaminação por *outlier* do tipo *IO*.

	$n = 500$				$n = 1000$			
	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$	\hat{D}_W	\hat{d}_W	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\theta}_1$
média	0.1509	0.0143	0.7967	0.1814	0.1726	0.1007	0.7746	0.2372
vício	-0.0491	-0.1857	0.0967	-0.0186	-0.0274	-0.0993	0.0746	0.0372
eqm	0.0053	0.1377	0.0618	0.0882	0.0021	0.0764	0.0202	0.0508