

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO**

**NÚMEROS FRACIONÁRIOS: A CONSTRUÇÃO DOS DIFERENTES
SIGNIFICADOS POR ALUNOS DE 4ª A 8ª SÉRIES DE UMA ESCOLA
DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação de Mestrado

ISABEL CRISTINA PEREGRINA VASCONCELOS

Porto Alegre, 2007

ISABEL CRISTINA PEREGRINA VASCONCELOS

**NÚMEROS FRACIONÁRIOS: A CONSTRUÇÃO DOS DIFERENTES
SIGNIFICADOS POR ALUNOS DE 4ª À 8ª SÉRIES DE UMA ESCOLA
DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, sob a orientação da Professora Dra. Beatriz Vargas Dorneles.

Porto Alegre

2007

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

Vasconcelos, Isabel Cristina Peregrina

Números fracionários [manuscrito] : a construção dos diferentes significados por alunos de 4^a à 8^a séries de uma escola do ensino fundamental / por Isabel Cristina Peregrina Vasconcelos. Porto Alegre. - 2007.
103 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2007.

"Orientação: Beatriz Vargas Dorneles "

1. Educação 2. Matemática 3. Ensino Fundamental 4. Número Fracionário 5. Estratégia Cognitiva 6. Estrutura Multiplicativa I.
Título. II. Dorneles, Beatriz Vargas.

CDD 512.72
372.7

CDU 511.12
372.851

Bibliotecária Responsável

Marialva M. Weber CRB 10/995

Dedico esta dissertação ao Beto, pelo apoio e incentivo
e à Helen, pela compreensão
e por suportar os momentos de ausência.

AGRADECIMENTOS

É muito bom agradecer às várias pessoas que estiveram presentes, ao meu lado, durante o processo de elaboração deste trabalho.

À minha orientadora, Beatriz Vargas Dorneles, pelo desafio, pelas incansáveis orientações, pela dedicação e, sobretudo, pelo seu acolhimento.

Aos colegas de mestrado, Adriana, Jutta, Karla, Luciana, Marcos, Maria Teresa, Neila, Rosane, Rosângela e Virginia, pelo convívio e pelo tanto que contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos alunos que participaram da pesquisa, contribuindo para sua realização.

À minha família, que soube enfrentar a minha ausência para o cumprimento de mais esta etapa, meu carinho e amor eternos.

RESUMO

A presente pesquisa investiga a aquisição do conceito de número racional na sua representação fracionária. O estudo justifica-se devido ao alto índice de dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão do conceito de número racional, que faz parte do pensamento multiplicativo. Apontamos a conexão entre os números fracionários e o raciocínio multiplicativo, destacando que as frações são números produzidos por divisões que resultam sempre em partes iguais. Nosso objetivo de pesquisa é comparar as estratégias cognitivas utilizadas por alunos com bom desempenho em Matemática com as estratégias cognitivas utilizadas por alunos que apresentam baixo desempenho escolar em Matemática, durante o processo de aquisição dos diferentes significados dos números fracionários: parte-todo, quociente e operador multiplicativo. Descrevemos as estratégias cognitivas utilizadas por cinquenta alunos, de 4^a à 8^a séries do Ensino Fundamental, de uma escola privada da cidade de Porto Alegre. Verificamos a desconexão entre a compreensão dos alunos sobre a divisão e a aprendizagem de frações e a relacionamos à tendência metodológica de ensinar o conceito de número fracionário enfatizando somente o significado parte-todo. Constatamos que existem semelhanças na utilização das estratégias pelos alunos dos dois grupos. Percebemos que, embora as estratégias sejam comuns, os resultados mostram diferenças na recuperação automática de fatos na memória, que afetam a resolução de problemas mais complexos. A pesquisa aponta a necessidade de explorar a aquisição dos números fracionários em várias situações e em diferentes contextos, repensando o ensino de fração na escola. Tal ensino deve levar em consideração os conhecimentos informais, valorizar as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos, promover interações entre eles para observar suas estratégias, proporcionar diversidade de ensino e reflexão das estratégias utilizadas, possibilitando um avanço no sentido de estratégias mais eficientes e econômicas.

Palavras-chave: Número Fracionário; Estratégias Cognitivas; Estruturas Multiplicativas.

ABSTRACT

The present research investigates the acquisition of the concept of rational number in its fractional representation. This study is justified due to the high degree of difficulty presented by students in understanding the concept of rational number, which is part of the multiplicative thought, observing that fractions are numbers produced by divisions which always result in equal parts. The objective of this research is to compare the cognitive strategies used by two groups of students: one with high performances in Math and the other one with low performance, during the process of learning different meanings of fractional numbers such as: whole-part, quotient' and multiplicative operator. Cognitive strategies of fifty 4th to 8th Elementary School students from a private school in Porto Alegre were studied. A disconnection between the students' understanding of division and their learning about fractions was verified. There is a tendency of teaching students the fractional number concept only emphasizing the meaning of the whole-part. Results of the research suggest that both groups of students used similar strategies and although strategies were alike, the results showed differences in the automatic retrieval of facts in the memory which affects solving higher complexity problems. The research shows the need of exploring the acquisition of fractional numbers in different situations and contexts, rethinking the teaching of fractions in schools. Such teaching should take into consideration informal knowledge, emphasize different strategies used by students, promote interaction between students in order to observe their strategies, and stimulate diversity in teaching and reflection on strategies used by students. Thus, more efficient and economical strategies would be possible.

Keywords: fractional number, cognitive strategies, multiplicative structures

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Campo Conceitual: Estruturas Multiplicativas.....	26
--	----

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Comparação do número de acertos, com quantidade discreta, entre os dois grupos.....	68
Gráfico 2 - Comparação do número de acertos, quantidade contínua, entre os dois Grupos	69
Gráfico 3 - Estratégias utilizadas pelos dois grupos considerados separadamente.....	73
Gráfico 4 - Estratégias utilizadas pelo Grupo II.....	74
Gráfico 5 – Estratégias utilizadas pelo Grupo I	75

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados obtidos por grupo, em valores percentuais, independentemente da série.....	72
---	----

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 NÚMEROS RACIONAIS FRACIONÁRIOS	15
2.1 O que é um número fracionário?	15
2.2 O Egito Antigo e a utilização dos números para contar e medir	17
2.3 A Mesopotâmia e o surgimento da base sessenta	21
2.4 A Grécia e a discussão da natureza dos números	22
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	24
3.1 Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud	25
3.2 As pesquisas de Nunes e Bryant	31
3.2.1 Significado “parte-todo”	34
3.2.2 Significado “medida”	35
3.2.3 Significado “número”.....	36
3.2.4 Significado “quociente”	37
3.2.5 Significado “operador multiplicativo”.....	37
3.3 Os modos de interpretar e representar os números racionais	38
3.3.1 Interpretação medida	39
3.3.2 Interpretação de repartição	40
3.3.3 Interpretação de operador	41
3.3.4 Interpretação de razão	42
3.4 Estudos sobre alguns obstáculos na aprendizagem matemática	45
3.5 Pesquisas sobre compreensão dos números fracionários	51
3.5.1 Empson e o aprendizado de crianças de 1ª série sobre o desenvolvimento da compreensão do conhecimento informal sobre fração	52
3.5.2 Merlini e a formação e o desenvolvimento do conceito de fração em 5ª e 6ª série do Ensino Fundamental	53
3.6 Fração e os PCNs	56
4 MÉTODO DE PESQUISA E ANÁLISE DOS DADOS	59
4.1 Objetivo geral.....	59
4.2. Objetivos específicos	60

4.3 Questões da pesquisa	60
4.4 Método e amostra do estudo	61
4.4.1 Método.....	61
4.4.2 Amostra.....	62
4.4.3 Instrumentos	63
4.5 Análise dos resultados	66
4.5.1 Aspectos quantitativos	67
4.5.1.1 Os significados dos números fracionários	67
4.5.1.2 As estratégias utilizadas pelos alunos	70
4.5.2 Aspectos qualitativos	76
4.5.2.1 E1 - Estratégia “inversão do numerador pelo denominador”.....	76
4.5.2.2 E2 – Estratégia “utilização dos dados do problema”.....	78
4.5.2.3 E3 - Estratégia “denominador maior que o numerador”.....	79
4.5.2.4 E4 – Estratégia “números sobrepostos”.....	81
4.5.2.5 E5 – Estratégia “utilização de operação”	82
4.5.2.6 E6 – Estratégia “parte-parte”	84
4.5.2.7 E7 – Estratégia “contagem nos dedos”	86
4.5.3 Situação-problema informal envolvendo medida de comprimento	87
4.5.4 Comparação entre os dois Grupos	89
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
REFERÊNCIAS	97
APÊNDICE A: TERMO DE CONSENTIMENTO	99
APÊNDICE B: INSTRUMENTOS DE INVESTIGAÇÃO	100
APÊNDICE C: TABELA GERAL	102

1 INTRODUÇÃO

O presente estudo aborda a aquisição do conceito de número racional em sua representação fracionária, que denominaremos “número fracionário”.

Este tema emerge da prática pedagógica como professora de matemática na Educação Básica, onde podemos constatar as dificuldades que os alunos têm no estudo das frações. A observação dos processos pelos quais os alunos passam indica que a freqüência de insucesso na aprendizagem dos números fracionários não é própria apenas dos alunos das séries iniciais, mas também de jovens e adultos de séries mais avançadas.

As dificuldades que se podem destacar estão relacionadas à resolução de situações-problema, à representação do número fracionário na forma $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ com $b \neq 0$) e, sobretudo, à localização desse número na reta numérica. Antes, porém, está a dificuldade de compreensão do próprio conceito de fração. São freqüentes erros como relacionar parte/parte ou todo/parte em função do modelo parte/todo; dividir uma quantidade contínua e representá-la com números naturais; não considerar a conservação de área na divisão de uma figura em n partes.

Na vida cotidiana, as frações surgem, como representações de quantidades, tanto na linguagem oral como na escrita, manipuladas em diferentes campos, como na música, na biologia, na química, na culinária, na engenharia, entre outros. Seu ensino desempenha papel fundamental no desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos, como os de proporção, probabilidade e porcentagem, favorecendo o desenvolvimento mental e cognitivo dos alunos. Seu entendimento está ligado a uma das premissas importantes da Matemática, qual seja, estabelecer relações de divisão, e estas estão estabelecidas entre o numerador e o denominador da fração.

A Matemática não é apenas uma disciplina na vida escolar; ela faz parte da vida e está implicada em muitas atividades cotidianas. Dividir objetos com os colegas; gastar a mesada; lidar com moedas diferentes; calcular tempo e distância; fazer compras e vendas são atividades que necessitam de habilidades matemáticas. Estas atividades, realizadas na vida cotidiana, não são vistas pelos alunos como “matemática”, mas, para realizá-las, é necessário respeitar princípios matemáticos e, freqüentemente, usar técnicas matemáticas aprendidas na escola, ou fora dela (NUNES e BRYANT, 1997).

Ao lado disso, cabe salientar que o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, SAEB (2006), cujo objetivo é avaliar a aprendizagem dos alunos brasileiros, verificou que a maioria dos alunos tem revelado desenvolvimento insuficiente de habilidades básicas em Matemática.

Embora já existam estudos e pesquisas no campo da Matemática, referentes aos números fracionários (EMPSON, 1999; NUNES *et al.*, 2003; MERLINI, 2005), a aprendizagem da fração ainda é um obstáculo enfrentado pelos alunos. Devemos, então, continuar estudando esse conceito, a fim de entender sua importância e descobrir melhores formas de garantir sua aprendizagem na escola.

Na sala de aula, o conceito de fração é apresentado aos alunos por meio da relação parte-todo, através da qual são exploradas as situações tradicionais de divisão de figuras geométricas, como retângulos, quadrados e círculos. O resultado produzido por tal estratégia é uma aprendizagem permeada por muitas dúvidas. O que justifica o estudo desse conceito e que se pesquise como ocorre sua aquisição, a fim de que se possam propor melhores formas para seu ensino na escola.

O objetivo da presente pesquisa é comparar as estratégias cognitivas utilizadas por alunos de 4^a à 8^a séries do Ensino Fundamental, com bom desempenho na Matemática com as estratégias cognitivas utilizadas por alunos das mesmas séries que tenham baixo desempenho escolar na Matemática, durante o processo de aquisição dos diferentes significados dos números fracionários. A razão de terem sido escolhidas essas séries deve-se ao fato de os números fracionários terem seu ensino iniciado formalmente a partir da 4^a série, desenvolvendo-se ao longo do Ensino Fundamental.

Para compreender como ocorre a construção dos diferentes sentidos desses números, investigou-se as estratégias cognitivas também ao longo desse período.

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. O capítulo inicial apresenta nosso objeto de estudo. O capítulo 2 revisa o conceito de número racional fracionário do ponto de vista matemático e a história do surgimento dos números fracionários em diferentes culturas. No capítulo 3, descrevemos a fundamentação teórica utilizada. A formação do conceito de fração é apresentada na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1988; 1990; 1996) e dos estudos de Nunes e Bryant (1997); Nunes *et al* (2003; 2005) são a referência em termos de ensino e aprendizagem do conceito de fração e dos cinco diferentes significados de fração: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. Neste mesmo capítulo, tratamos do conceito de número fracionário sob o ponto de vista da Educação Matemática, apresentando estudos relevantes e correlatos à nossa pesquisa (LLINARES, 2003; ORRANTIA, 2006; GEARY, 2004; EMPSON, 1999; MERLINI, 2005) e descrevemos as recomendações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997). O capítulo 4 apresenta a descrição do método de pesquisa e a análise dos dados coletados, articulando-se essa análise com a revisão teórica.

Concluimos a dissertação retomando nossa questão de pesquisa e apresentamos as nossas conclusões, baseadas na análise dos resultados, explicitando algumas possíveis implicações pedagógicas de nossa investigação.

2 NÚMEROS RACIONAIS FRACIONÁRIOS

Neste capítulo apresentamos as idéias expostas por Caraça (2003) a respeito da construção do conjunto dos números racionais fracionários, bem como a definição formal desses números e suas propriedades.

Descreve-se, ainda, o surgimento dos números fracionários no Egito, na Mesopotâmia e na Grécia Antiga, cujas informações foram utilizadas para a apropriação progressivamente desse conhecimento, da sua origem e de seu desenvolvimento sendo buscadas em Boyer (2003), Caraça (2003) e Eves (2004).

2.1 O que é um número fracionário?

Para Caraça (2003), os números racionais surgem a partir das necessidades do homem de comparar grandezas, quando sua habilidade de contar tornou-se insuficiente para responder à questão de quantas vezes uma grandeza era maior que a outra. Para expressar a medida de uma grandeza em relação à outra, a solução imediata seria encontrada pelo quociente das duas medidas, sempre que fosse possível efetuar a divisão entre os números inteiros que a representavam.

A necessidade de medição envolve três aspectos distintos: a escolha da unidade, a comparação com a unidade e a expressão do resultado dessa comparação por um número. Surgiu um problema, quando essa divisão era impossível de ser

realizada com os números inteiros. A solução para esse problema, culminou, ao fim de um longo processo, na negação dessa impossibilidade, e a divisão indicada, antes considerada impossível, passou a ser vista como representação de um tipo novo de número, que expressa o resultado da divisão, agora considerado como possível, apesar de não poder ser expresso por um número inteiro.

Caraça (2003) salienta os três princípios básicos que orientam a evolução de toda Matemática, presentes na construção do conjunto dos números racionais:

1. o princípio da extensão, que nos leva a criar novos números por meio dos quais se pode exprimir a medida de dois segmentos;
2. a análise da questão, que mostra que a dificuldade reside na impossibilidade da divisão exata em números inteiros, quando o dividendo não é múltiplo do divisor;
3. o princípio da economia, segundo o qual com os novos números são abrangidas todas as hipóteses de medição; estes novos números sempre são reduzidos aos números inteiros, quando o dividendo for múltiplo do divisor.

A partir de tais princípios, os números racionais foram definidos, como conjunto numérico, com suas propriedades e operações. Neste contexto, Caraça (2003) define os números racionais fracionários como passíveis de serem escritos na forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros e n deve ser não nulo, isto é, $n \neq 0$.

Usamos $\frac{m}{n}$ para indicar a divisão de m por n , onde m é chamado de numerador e n de denominador. Quando não existe possibilidade de divisão, empregamos uma letra, como q , para entender que esse número é um número racional, por exemplo, o quociente de 2 por 5 é o número fracionário $\frac{2}{5}$; o quociente de 10 por 5 é o número racional inteiro $\frac{10}{5} = 2$.

Como podemos observar, números fracionários podem ser obtidos por meio da razão¹ entre dois números inteiros, motivo pelo qual o conjunto de todos os números racionais é denotado por **Q**.

Um novo conjunto numérico, o conjunto dos números racionais, compreende números inteiros e números fracionários, ressaltados por Caraça (2003) como números novos. Esses números podem ser expressos como a medida de um segmento tomando outro como unidade, de modo que, quando dividimos a unidade, por exemplo, em 5 partes iguais, ao caberem 2 dessas partes na grandeza a medir, podemos dizer que a medida é o número $\frac{2}{5}$. O fato de serem uma extensão dos números inteiros, entretanto, não impede que os números racionais apresentem algumas peculiaridades que têm trazido, ao longo do tempo, dificuldades à sua aprendizagem, razão pela qual, são o objeto do nosso estudo.

A seguir, abordamos o surgimento do conjunto dos números racionais fracionários do ponto de vista histórico.

2.2 O Egito Antigo e a utilização dos números para contar e medir

A matemática do Egito Antigo utilizava, para contagem e para medida, números, cuja forma se diferenciava da forma dos hieróglifos usados para a escrita de palavras. Como os egípcios não podiam empregar apenas números inteiros para fazer medidas, desenvolveram o uso de frações com numerador igual a 1. Fixando-se o numerador 1, eles podiam trabalhar com medidas de uma forma prática, considerando frações como representações de pedaços de um inteiro (BOYER, 2003).

Boyer (2003) destaca que as frações com numerador igual a 1 eram

¹ Razão em Latim é *ratio* = razão = divisão = quociente.

manipuladas livremente no tempo de Ahmes (1650 a.C.), mas a fração geral parece ter sido um enigma para os egípcios, que só concebiam as frações denominadas unitárias² e só exprimiam as frações ordinárias³ por meio de somas de frações desse tipo (por exemplo: $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$).

Caraça (2003) demonstra que a subdivisão da unidade fez-se necessária em função de as relações entre o Estado e o indivíduo terem se imposto muito cedo. Há registros de que o rei Sesóstris, que viveu provavelmente há cerca de 4.000 anos, às margens do Rio Nilo, no Egito, ao distribuir as terras, obrigava as famílias arrendatárias a pagarem um certo tributo anual. Para cobrança desse tributo, era necessária a medição do terreno arrendado, que era feita pelos “estiradores de corda”⁴. Os medidores reconheceram, naquela época, que os números inteiros eram insuficientes para exprimir adequadamente as medidas, de modo que essas se aproximassem o mais possível do real. Para garantir a precisão necessária, foi preciso subdividir a unidade em um certo número de partes iguais. Surgiram, assim, as frações da unidade.

A fração imprópria⁵ não era utilizada no Egito, nem aquela com numerador diferente de 1, com exceção da misteriosa fração $\frac{2}{3}$, a qual aparece nas notações sem que se saiba exatamente o porquê. Toda grandeza quebrada pode ser expressa como uma soma de frações unitárias, e grande parte da Matemática egípcia consiste em expressar grandezas que seriam frações impróprias, ou com numerador diferente de 1, através de uma soma de frações unitárias. A notação numérica dos hieróglifos permitia a representação das frações unitárias facilmente. Havia uma representação semelhante também em hierático, a escrita cursiva sagrada dos papiros.

As frações unitárias egípcias também tinham utilidade para realizar divisões. Na verdade, os egípcios não concebiam divisões e multiplicações como operações no

² Frações unitárias são aquelas em que o numerador é igual a 1.

³ Frações ordinárias são aquelas que não são uma fração decimal.

⁴ “Estirador de corda” é a designação atribuída aos homens que realizavam as medições, em especial após inundações do Rio Nilo.

⁵ Frações impróprias são aquelas em que o numerador é maior ou igual ao denominador.

sentido atual do termo. Tinham duas operações: a mediação, que consistia em tomar a metade de uma quantia; e a duplicação, que consistia em tomar o dobro do valor.

A operação aritmética fundamental no Egito era a adição. As operações de multiplicação e divisão eram efetuadas por sucessivas “duplicações”. No exemplo abaixo, a multiplicação seria efetuada somando-se 8 com ele mesmo para obter 16; depois, adicionando-se o resultado a si mesmo para alcançar 32. Como 6 é a soma de $2 + 4$, o resultado da multiplicação 6×8 é o resultado da adição correspondente a 2 e 4, que é $16 + 32$, isto é, 48.

a) $6 \times 8 = ?$

8	1
16	2
<u>32</u>	<u>4</u>
16+32=48	2+4=6

Outro exemplo:

b) $12 \times 17 = ?$

17	1
34	2
68	4
<u>136</u>	<u>8</u>
68 + 136=204	4+8=12

A divisão era realizada pelo mesmo processo, tomando a multiplicação pelo inverso do divisor. Aqui entram as frações unitárias.

Para a divisão de $35 \div 2$, inverte-se o processo de duplicação, e o divisor é dobrado sucessivamente. Assim, duplicando-se $\frac{1}{2}$ temos 1; adicionando-se o resultado a si mesmo, temos 2; depois, temos 4, que, adicionado a si próprio, resulta 8. Como 35

é igual a $32 + 2 + 1$, o resultado da divisão será alcançado adicionando-se os divisores $16 + 1 + \frac{1}{2}$, isto é, $17 \frac{1}{2}$, como vemos a seguir.

a) $35 \div 2 =$

1	$\frac{1}{2}$
2	1
4	2
8	4
16	8
<u>32</u>	<u>16</u>
$32+2+1$	$16+1+\frac{1}{2}$

Outro exemplo:

b) $23 \div \frac{1}{2} =$

1	$\frac{1}{2}$
2	1
4	2
8	4
<u>16</u>	<u>8</u>
$16+4+2+1=23$	$8+2+1+\frac{1}{2} = 11 \frac{1}{2}$

Em todas essas passagens, que envolviam a representação de uma fração com denominador diferente de 1, era utilizado o princípio visto acima, que permitia escrever qualquer fração como uma soma de frações unitárias. A divisão entre inteiros, para os egípcios, era o produto de um inteiro pelo inverso do outro (BOYER, 2003; EVES, 2004).

2.3 A Mesopotâmia e o surgimento da base sessenta

A civilização suméria desenvolveu-se no sul da Mesopotâmia, há cerca de 4.000 anos a.C. Essa região localizava-se entre os rios Tigre e Eufrates, no Oriente Médio, onde atualmente é o Iraque.

Na Mesopotâmia, a Matemática desenvolveu-se mais do que no Egito, o que pode ter ocorrido em consequência de um desenvolvimento econômico mais avançado (EVES, 2004). Lá encontramos uma interessante abordagem numérica, que utiliza aproximações de números quebrados pela notação posicional sexagesimal. Cada “casa” em relação às suas vizinhas tinha um valor muito maior ou muito menor, de modo que seus números cresciam muito rapidamente para um lado e decresciam também muito rapidamente em direção ao outro lado. Foram os sumérios os primeiros a instituir uma notação racional, como hoje fazemos com as frações de horas em minutos e segundos. Boyer (2003) afirma que tais aspectos revelam a superioridade daquele povo em Matemática.

O sistema numérico sexagesimal dos sumérios permitia escrever números grandes e chegar a aproximações muito boas de números quebrados, racionais e irracionais, utilizando poucos algarismos sexagesimais.

Parece mais provável, porém, que a base sessenta fosse adotada conscientemente e legalizada no interesse da metrologia, pois uma grandeza de sessenta unidades pode ser facilmente subdividida em metades, terços, quartos, quintos, sextos, décimos, doze avos, quinze avos, vigésimos e trigésimos, fornecendo assim dez possíveis subdivisões. (BOYER, 2003, p.17).

Até hoje continuamos a empregar o sistema sexagesimal para expressar as medidas de tempo, de arcos e de ângulos.

2.4 A Grécia e a discussão da natureza dos números

A Matemática grega é bastante diferente da Matemática dos egípcios e sumérios. Os egípcios forneciam, para cada problema proposto, soluções individualizadas de Aritmética ou Geometria, sem tentar chegar a métodos gerais nem demonstrar fórmulas e afirmações amplas. Os sumérios forneciam soluções aproximadas dos valores numéricos, sem preocupação com uma possível distinção numérica. Já os gregos trabalharam exatamente no âmbito das generalizações e na discussão da natureza dos números envolvidos.

O mundo grego teve seu centro entre os mares Egeu e Jônio, mas a civilização helênica não estava localizada somente ali. Em 600 a.C., colônias gregas podiam ser encontradas ao longo das margens do mar Negro e do Mediterrâneo; nessas regiões afastadas, imprimiu-se um novo impulso à Matemática.

Na Grécia, a palavra “número” era usada só para os inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único, mas como uma razão ou relação entre inteiros. Como os egípcios, os gregos sentiam-se tentados a usar frações unitárias, com representações simples, escrevendo apenas o denominador, seguido de um acento ou sinal diacrítico. Como exemplo, escrevia-se $\frac{1}{34}$, que podia ser confundido com $30 \frac{1}{4}$, mas também podia ser esclarecido pelo contexto (BOYER, 2003).

Os pitagóricos⁶, interessavam-se particularmente pela natureza dos números. O estudo da música e as relações matemáticas das notas musicais levaram os pitagóricos a considerar razões entre inteiros, que representariam razões entre os comprimentos das cordas dos instrumentos musicais. Perceberam que a relação entre uma nota musical e a mesma nota musical uma oitava acima era de dois para um, em termos de

⁶ “Pitagórico” é a designação atribuída aos seguidores da escola de Pitágoras (IV a.C.).

comprimento de corda vibrante.

Assim, os pitagóricos estabeleceram uma correspondência entre os números inteiros, que eram somente os que dispunham. Perceberam que existiam muitas relações métricas interessantes relacionadas às notas musicais. Descobriram que a relação entre uma corda e a sua metade produz o mesmo som uma oitava acima. Existem outras frações, ou razões entre comprimentos de cordas, que produzem sons harmônicos. Boyer (2003, p. 38) atribui a Pitágoras a autoria das mais antigas leis quantitativas da acústica.

Conta-se que Pitágoras observou que quando os comprimentos de cordas vibrantes podem ser expressos como razões de números inteiros simples, como dois para três (para a quinta) ou três para quatro (para a quarta), os tons serão harmoniosos. Em outras palavras, se uma corda produz a nota dó quando tocada, então uma semelhante com o dobro do comprimento produzirá o dó uma oitava abaixo; e os tons entre essas notas são emitidos por cordas cujos comprimentos são dados por razões intermediárias. Aqui temos talvez as mais antigas leis quantitativas da acústica.

As noções numéricas utilizadas pelos egípcios, sumérios e gregos completam-se na construção da idéia dos números fracionários. Podemos situar o primeiro desenvolvimento significativo das frações no Egito; os números decimais, ou notação posicional para representar números quebrados, tiveram início na Mesopotâmia; e a idéia de equivalência de classes e a compreensão dos números racionais como razões entre inteiros originaram-se na Grécia Antiga.

Esse breve relato histórico fornece-nos uma visão geral dos fatos relacionados à origem e ao desenvolvimento das frações, bem como sobre a importância deles para o reconhecimento dos diferentes sentidos dos números fracionários.

No próximo capítulo, expomos a fundamentação teórica de nosso estudo, revisando a bibliografia que trata do assunto em foco.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem por objetivo apresentar as bases teóricas que sustentam a presente pesquisa. A revisão teórica expõe o estado da arte sobre como a criança compreende e representa o número fracionário em diferentes contextos: parte-todo; quociente, número, operador multiplicativo e medida.

Para realização deste estudo, procuramos investigar algumas produções, no contexto das pesquisas em Educação Matemática, de alguma forma relacionado ao tema. Encontramos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1988; 1990; 1996), bem como nas pesquisas de Nunes e Bryant (1997) e Nunes *et al.* (2003; 2005) o aporte necessário ao nosso estudo. Apresentamos alguns estudos relevantes e correlatos com a nossa pesquisa, como os de Llinares (2003), Orrantia (2002; 2006), Geary (2004) e pesquisas mais recentes diretamente relacionadas com os números racionais fracionários, como as de Empson (1999) e de Merlini (2005).

Encerramos o capítulo descrevendo as recomendações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1997) no que se refere à fração na escola.

3.1 Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

A Teoria dos Campos Conceituais foi desenvolvida pelo professor e pesquisador Gerard Vergnaud (1988; 1990; 1996). Essa teoria oferece uma estrutura consistente às pesquisas sobre aprendizagem matemática, possibilitando estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, e as relações existentes entre os conceitos.

Define-se um campo conceitual pelo conjunto de situações, cuja compreensão necessita do domínio de vários conceitos de naturezas diferentes, de seus invariantes e por um conjunto de representações simbólicas.

O estudo do desenvolvimento de um campo conceitual, segundo essa teoria, requer que o pesquisador veja um conceito como formado por uma terna de conjuntos (S, I, R), onde **S** é um conjunto de situações que tornam o conceito significativo; **I** é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidas e usadas pelo sujeito para analisar e dominar essas situações e **R** é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar as situações e os procedimentos para lidar com eles.

A Teoria dos Campos Conceituais considera que existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento dos conceitos e que o conhecimento conceitual deve emergir dentro de situações-problema.

No processo de aquisição de conhecimento, os conceitos matemáticos expressam seus sentidos a partir de uma variedade de situações que podem ser analisadas com a ajuda de um conjunto de conceitos.

A figura 1 representa o conjunto de situações (S), o conjunto de invariantes (I) e o conjunto de representações (R) e sua relação com os números fracionários.

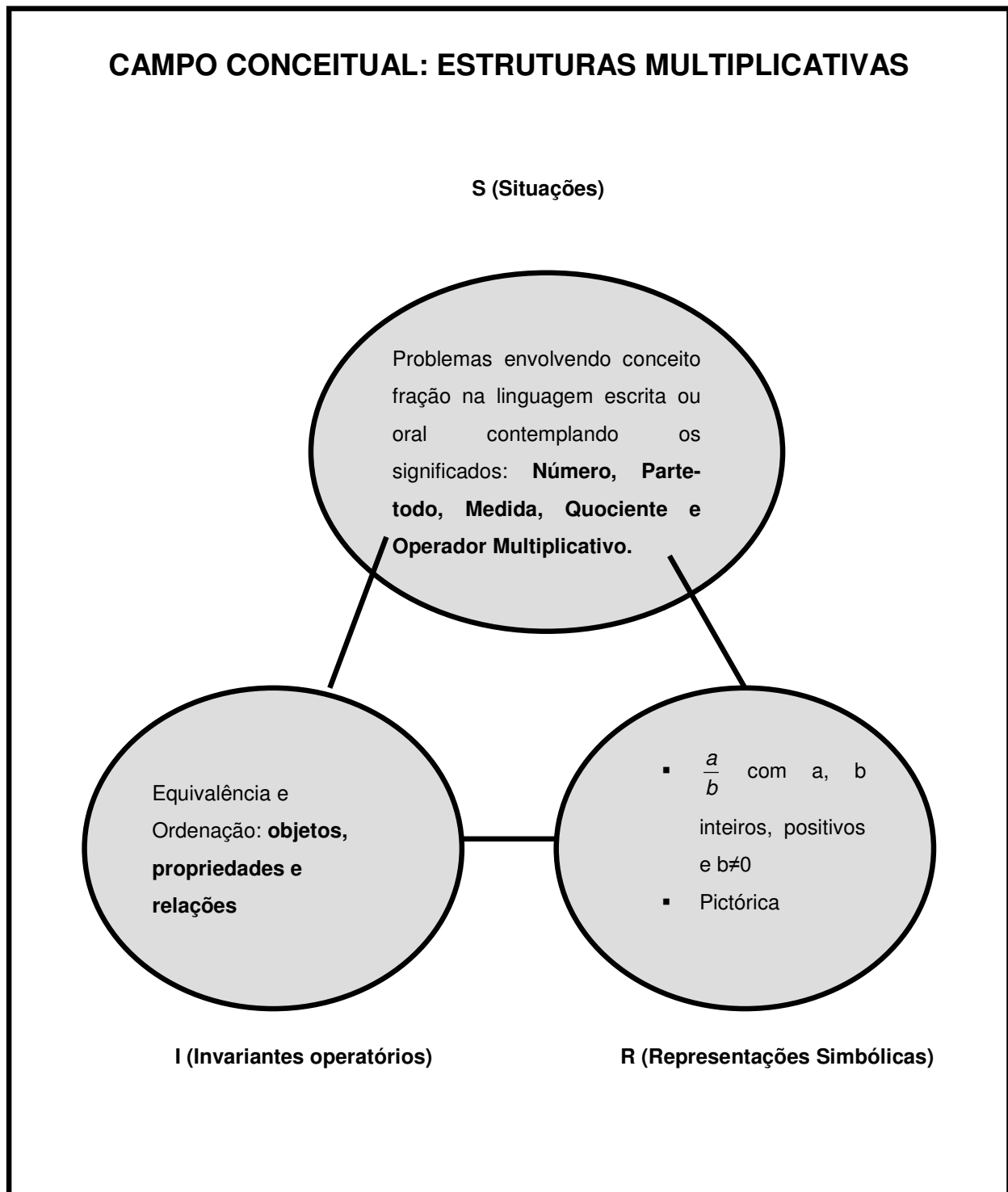


Figura 1 - Campo Conceitual: Estruturas Multiplicativas
 Fonte: Santos (2005)

Para Vergnaud (1990), é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o sujeito. Nesse contexto, podemos distinguir duas classes de situações:

(i) em uma dessas classes o sujeito dispõe em seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;

(ii) na outra o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas que o levam, eventualmente, ao sucesso ou ao fracasso.

Vergnaud (1988; 1990;1996) acrescenta que as competências e concepções são adquiridas pela criança por meio da formação de esquemas. Para se entender melhor o que vem a ser competência e sua relação com a concepção, é necessário primeiro entender o conceito de esquema.

O autor referido afirma que os esquemas são os procedimentos, as invariantes e as condutas organizadas por regras de ações sobre uma classe de situações dadas, isto é, a forma estrutural da atividade e está acompanhado de um teorema-em-ação ou de um conceito-em-ação.

O conceito-em-ação é uma invariante operatória com suas propriedades e definições, quando são manifestados geralmente são explícitos (VERGNAUD, 1988; 1990; 1996).

Os teoremas-em-ação aparecem de modo intuitivo e, na maioria das vezes, são implícitos. Estão relacionados com as estratégias utilizadas pelo sujeito no momento de solucionar situações-problema, sem que consiga explicitá-las ou justificá-las (VERGNAUD, 1988; 1990; 1996).

Portanto, os teoremas-em-ação indicam um caminho para se analisarem as estratégias intuitivas dos alunos e ajudá-los a transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explícito.

Para Vergnaud (1988; 1990; 1996) as competências e as concepções dos alunos vão se desenvolvendo ao longo do tempo, por meio de experiências com um grande número de situações, tanto dentro quanto fora da escola. Em geral, quando se defronta com uma nova situação, o aluno usa o conhecimento desenvolvido em sua experiência em situações anteriores e tenta adaptá-lo à nova situação. Esse conhecimento tanto pode ser explícito, no sentido de que pode ser expresso de forma simbólica, quanto implícito, no sentido de que pode ser usado na ação, durante a qual o estudante escolhe as operações adequadas, sem, contudo, conseguir expressar as razões dessa adequação.

Vergnaud (1988; 1990; 1996) considera que é a análise das tarefas matemáticas e o estudo da conduta do aluno, quando confrontado com essas tarefas, que nos permitem analisar sua competência. A conduta do aluno pode ser avaliada segundo três aspectos:

- a) análise de acerto e erro, sendo considerado competente aquele que acerta;
- b) análise do tipo de estratégia utilizada, podendo alguém ser mais competente que outro porque sua resolução foi mais econômica ou mais rápida, ou, ainda, mais refinada;
- c) análise da capacidade de escolher o melhor método para resolver um problema dentro de uma situação particular.

Dentre as muitas estruturas envolvidas na resolução de problemas, Vergnaud (1988; 1990; 1996) destaca duas: as aditivas e as multiplicativas. As estruturas aditivas são o conjunto das situações que implicam uma ou várias adições ou subtrações e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas.

O campo conceitual das estruturas multiplicativas abrange os conceitos de multiplicação e divisão e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações: proporção, função, escala, quociente e produto de dimensões,

combinação linear, fração, relação, número racional, múltiplo, divisor, etc. (VERGNAUD, 1988; 1990; 1996). Inclui um número maior de situações que necessitam ser elucidadas e analisadas com cuidado a fim de facilitar a hierarquia das competências possíveis desenvolvidas pelos estudantes, dentro e fora da escola.

Para Vergnaud (1983), as estruturas multiplicativas assumem a forma de equivalência entre duas variáveis de relações binárias. Elas se referem a elementos de mesma natureza ou de natureza diferente, do que derivam diferentes classes e subclasses de problemas (isomorfismo de medidas, produto de medidas) e a presença de números inteiros ou decimais, de grandezas discretas ou contínuas.

A divisão é um conceito importante inserido no campo das estruturas multiplicativas. Embora de natureza complexa, a divisão está presente, desde cedo, em diversas atividades do cotidiano dos alunos como: dividir objetos com os amigos, repartir quantidades (discretas ou contínuas) em partes iguais, colocar uma mesma quantidade de objetos em diversos recipientes. Antes mesmo de entrar na escola, as crianças apresentam conhecimento informal sobre vários conceitos matemáticos. Esse conhecimento informal dará origem, posteriormente, ao conceito de fração (EMPSON, 1999).

Vergnaud (1982; 1985) afirma que a divisão envolve regras operatórias complexas (utilização de divisões sucessivas; multiplicação; subtração; busca de um quociente, que pode envolver um resto e resultar em números fracionários) e requer o estabelecimento de relações diversas (considerar o tamanho do todo; o número de partes; o tamanho das partes, que deve ser o mesmo; a relação direta entre o total de elementos e o tamanho das partes; a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes).

Essa complexidade do conceito de divisão pode ser percebida através da resolução de problemas. Vergnaud (1996) apresenta três tipos distintos de problemas envolvendo estruturas multiplicativas: produto de medidas, proporção múltipla e isomorfismo de medidas. Para resolver esses problemas torna-se necessário realizar uma operação de divisão, variando o grau de dificuldade, como podemos verificar nos

problemas de isomorfismo denominados divisão por partição e divisão por quotas.

Os problemas de divisão por partição destacam-se pela totalidade (dividendo), pela extensão da parte (quociente) conforme uma quantidade fixa (divisor), que resulta em uma medida como a totalidade inicial sobre a qual a quantidade fixa opera. Isso pode ser visto no exemplo a seguir:

Exemplo: Paguei R\$ 12,00 por quatro barras de chocolate. Qual o preço de uma barra?

Para resolver problemas deste tipo, é preciso considerar que o quociente a ser obtido refere-se ao tamanho das partes; que o dividendo é representado pelo todo (valor /quantidade a ser dividido) e que o divisor refere-se ao número de partes em que o todo é dividido.

Em problemas de divisão por quotas é dada uma quantidade inicial que deve ser dividida em quotas preestabelecidas (tamanho das partes), como no exemplo a seguir.

Exemplo: Tenho R\$ 12,00 e quero comprar alguns pacotes de bala que custam R\$ 4,00 cada pacote. Quantos pacotes posso comprar com essa quantia?

Para resolver problemas de divisão por quotas, deve-se considerar que o quociente a ser obtido refere-se ao número de partes em que o todo foi dividido, que o dividendo é representado pelo todo e o divisor refere-se ao tamanho das partes (quotas).

Apesar de utilizarmos as mesmas quantidades nos exemplos citados, estes não podem ser considerados como de um mesmo sentido. A mudança da quantidade a ser encontrada modifica o sentido da operação a ser aplicada. Os exemplos apresentam a idéia de que em diferentes situações existem propriedades distintas a um mesmo conceito.

Vergnaud (1985) aponta que os alunos podem apresentar dificuldades na compreensão de divisão por partição e por quota, pela necessidade de serem

efetuados cálculos diferentes: procurar e obter a extensão das partes (partição) ou procurar e obter o número de partes (quotas).

Nunes e Bryant (1997) acreditam que problemas de divisão medida por quota constituem uma aquisição posterior à compreensão das mesmas relações em problemas de partição. Os autores consideram que nos problemas de divisão por partição pode-se distribuir a totalidade utilizando a correspondência termo-a-termo e nas situações de divisão medida por quota precisa-se construir cada quota em sucessão envolvendo a relação inversa entre quociente e divisor. Neste sentido, a divisão por quotas torna-se mais complexa que a por partição, principalmente quanto às formas de apresentação e representação dos problemas, sendo pouco utilizada nas situações didáticas no contexto escolar.

Nesse sentido reside o porquê de se estudar o conceito de fração dentro do campo conceitual, pois um conceito não se desenvolve isoladamente, mas em inter-relação com os outros conceitos, por meio de vários tipos de problemas e com a ajuda de várias expressões e simbolismos (VERGNAUD, 1988; 1990; 1996).

As contribuições de Vergnaud (1988; 1990; 1996) trouxeram um conjunto de conceitos que serviram de enquadramento teórico para as pesquisas de Nunes e Bryant (1997) na compreensão dos números fracionários, que são apresentadas a seguir.

3.2 As pesquisas de Nunes e Bryant

Inicia-se o estudo da contribuição desses autores pelas idéias sobre como os alunos pensam acerca de problemas matemáticos e sobre a importância do

desenvolvimento desse conhecimento para suas vidas cotidianas. A seguir retomam-se as implicações de alguns obstáculos enfrentados pelas crianças durante a aquisição do conhecimento dos números fracionários.

Nunes e Bryant (1997), em consonância com Vergnaud (1988; 1990), afirmam que o conhecimento matemático envolve as invariáveis lógicas, a capacidade de aprender novas formas de representação simbólica e a conexão entre as formas antigas e as novas situações que enriquecerão a aprendizagem com sentidos diferentes. Sendo assim, não é suficiente aprender procedimentos; é necessário transformá-los em ferramentas de pensamento.

Nunes e Bryant (1997) destacam ainda que os alunos não precisam aprender isoladamente cada item de conhecimento matemático de que eles necessitarão para progredir na vida escolar, pois, se eles entendem como o conhecimento matemático é estruturado, podem gerar conhecimento que não aprenderam. Quando os alunos são levados a resolver problemas, usando seu conhecimento informal e representações simbólicas, eles podem fazer as conexões espontaneamente, ao longo do período de instrução, e usar seu conhecimento cotidiano para resolver problemas mais complexos.

Os autores acrescentam que a aquisição do conhecimento matemático dá-se por meio de situações e problemas que devem ser representados. As representações podem ser manipulativas, simbólicas orais ou escritas, diagramáticas ou gráficas. Afirmam, além disso, que, como ferramenta para representar o pensamento, algum sistema de símbolos deve ser usado (NUNES e BRYANT, 1997).

A representação de invariáveis pode ser implícita, como no caso dos teoremas-em-ação, que são implícitos na forma como organizamos as novas atividades de resolução de problemas; ou pode ser explícita, passível de ser declarada em palavras, como os conceitos-em-ação. No caso das invariáveis e situações, estas não podem ser limitadas uma a outra: uma invariável pode ser central a muitas situações, e a mesma situação pode incluir invariáveis diferentes.

Nunes e Bryant (1997) distinguem três tipos principais de situações multiplicativas: correspondência um-para-muitos; situações que envolvem relações entre variáveis; situações que envolvem distribuição, divisão e divisões ao meio. A primeira das situações multiplicativas envolve uma relação constante de correspondência um-para-muitos entre dois conjuntos, o que é a base para um novo conceito matemático, o conceito de proporção, como em, por exemplo: 1 carro para 4 rodas. A segunda das situações multiplicativas envolve relações entre variáveis, que podem ser encontradas em situações nas quais duas (ou mais) variáveis co-variam como uma consequência de convenção ou de causa (impacto de uma variável sobre a outra), em, por exemplo, 1 Kg de açúcar custa R\$ 1,30, então $\frac{1}{2}$ Kg de açúcar custa R\$ 0,65. O terceiro tipo de ação, a distribuição, envolve uma nova visão das relações parte-todo. Distribuir é uma ação que se relaciona à operação de divisão e à possibilidade de cortes sucessivos, como, por exemplo, em: há 20 doces (o todo) para serem partilhados entre 4 crianças (partes); então, há 5 doces por criança (o tamanho da parte). As relações parte-todo estão envolvidas em distribuição e divisão, mas há três elementos a serem considerados: o tamanho do todo, o número das partes e o tamanho das partes, que deve ser o mesmo para todas as partes.

A preocupação com a aprendizagem do número fracionário deve-se à constatação de que as frações não são apenas um tipo novo de sentido de número, mas também um tipo novo de número. Nunes e Bryant (1997) argumentam:

[Em] se tratando dos números fracionários, às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não o têm. Elas usam termos fracionais certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba (p.191).

Parece importante apontar a conexão entre os números fracionários e o raciocínio multiplicativo, destacando que as frações são números produzidos por divisões, que resultam sempre em partes iguais. A aquisição do conceito de número fracionário é um ponto crítico na aprendizagem da Matemática, que, muitas vezes, não se consolida por conta de defasagens no pensamento multiplicativo. Nesse sentido,

pressupõe a capacidade de entender a lógica das situações, as invariáveis, para que possamos escolher as formas apropriadas de representar conceitos matemáticos.

Uma forma comum de apresentar as frações aos alunos é mostrar-lhes o todo dividido em partes. Os alunos são informados de que o número total de partes é o denominador e as partes pintadas é o numerador. Esta introdução, junto com alguma instrução sobre umas poucas regras para calcular, permite que os alunos dêem ao professor a impressão de que sabem muito sobre frações.

Entretanto, verifica-se a desconexão entre a compreensão dos alunos sobre a divisão desenvolvida fora da escola e sua aprendizagem de frações. Uma hipótese possível é que essa desconexão ocorra exatamente porque os alunos não pensam sobre frações como tendo qualquer relação com divisão e porque relacionam frações apenas à linguagem parte-todo (NUNES e BRYANT, 1997).

Em estudos posteriores, Nunes *et al.* (2003) propõem uma classificação para os diferentes sentidos de fração, contemplando cinco significados: parte-todo, medida, número, quociente e operador multiplicativo. A seguir apresentamos brevemente esses significados e exemplos.

3.2.1. Significado “parte-todo”

A idéia presente neste significado é a da partição de um todo, contínuo⁷ ou discreto⁸, em n partes iguais, cada parte podendo ser representada como $\frac{1}{n}$.

Exemplo 1 - quantidade contínua: Uma barra de chocolate foi dividida em quatro

⁷ Quantidade contínua refere-se àquelas quantidades passíveis de serem divididas exaustivamente, sem que percam suas características, por exemplo, um chocolate.

⁸ Quantidade discreta refere-se àquelas quantidades enumeráveis, contáveis, que dizem respeito a um conjunto de objetos.

partes. Que fração representa uma parte deste chocolate?

Exemplo 2 - quantidade discreta: Na loja há três bolas vermelhas e três bolas brancas. Que fração representa a quantidade de bolas vermelhas em relação ao total de bolas da loja?

Nessas situações, o aluno necessita, previamente, desenvolver algumas competências: a identificação de uma unidade (que o todo é tudo aquilo que considera como a unidade em cada caso concreto); a realização de divisões (o todo se conserva. Mesmo quando o dividimos em partes, há a conservação da unidade); há a manipulação da idéia da conservação da área no caso das representações contínuas (MERLINI, 2005).

3.2.2. Significado “medida”

Assume-se, aqui, fração com significado de medida em situações de quantidades intensivas⁹ e extensivas¹⁰. A idéia de distribuição e de quanto é recebido por cada criança representa o aspecto da quantidade extensiva do número racional; a reconstrução do todo ou unidade em relação às partes representa os aspectos intensivos.

Exemplo 1 - quantidade contínua: Em um terço de suco concentrado e dois terços de água, que fração representa a medida da água em relação ao total de suco?

⁹ Quantidades intensivas baseiam-se na relação entre duas quantidades diferentes: portanto, no raciocínio multiplicativo.

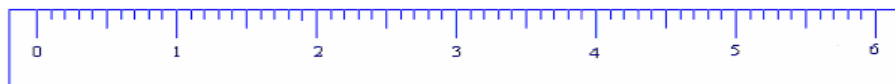
¹⁰ Quantidades extensivas baseiam-se na comparação de duas quantidades da mesma natureza e na relação parte-todo: portanto, no raciocínio aditivo.

Exemplo 2 - quantidade discreta: João colocou dentro de uma caixa três bolas coloridas: duas azuis e uma branca. Que fração representa a chance de João tirar uma bola branca? (MERLINI, 2005).

3.2.3. Significado “número”

O sujeito frente a esse problema (situação) deverá reconhecer, a princípio, a fração $\frac{2}{3}$ como um número (significado) e não como uma superposição de dois números naturais. Deverá perceber, ainda, que todo número tem um ponto correspondente na reta numérica, e que sua localização depende do princípio de ordenação (invariante) ou seja, $\frac{2}{3}$ é um número compreendido entre 0 e 1 .

Exemplo: Qual a localização da fração $\frac{1}{5}$ na reta numerada? (MERLINI, 2005).



3.2.4. Significado “quociente”

Esse significado está presente em situações associadas à idéia da divisão como estratégia para resolver um determinado problema.

Exemplo 1 - quantidade contínua: Se dividirmos duas pizzas igualmente entre três pessoas, que fração representa o que cada uma irá comer?

Exemplo 2 - quantidade discreta: Tenho 20 bolinhas de gude e vou dividir igualmente entre quatro crianças. Que fração representa essa divisão?

Esse significado pressupõe, que temos duas grandezas distintas: pizzas e pessoas; bolinhas de gude e crianças.

3.2.5 Significado “operador multiplicativo”

Associamos a esse significado o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando-o.

Exemplo: João tinha 30 soldadinhos de chumbo e deu $\frac{2}{3}$ para seu colega. Com quantos soldadinhos João ficou? (MERLINI, 2005).

Os diferentes significados e sentidos dados às situações vivenciadas pelas

crianças possibilitam a (re)construção e (re)elaboração dos conhecimentos matemáticos – operações, esquemas e procedimentos - necessários para resolver os problemas da vida cotidiana e da vida escolar.

3.3 Os modos de interpretar e representar os números racionais

Llinares (2003) destaca que a introdução dos números fracionários é um momento importante na aprendizagem matemática. Sua importância consiste em pensar nas relações entre quantidades, no uso de novos sistemas de símbolos para representar essas relações e na ampliação do sistema de numeração decimal.

O autor apresenta algumas dificuldades no ensino-aprendizagem dos números racionais:

- estão relacionadas com diferentes tipos de situações: medida, parte-todo, quociente, razão e operador.
- podem estar na representação de várias maneiras: $\frac{2}{3}$ (frações); $\frac{3}{4}$ (frações decimais); 0,75 (números decimais) e 75% (porcentagens).

Llinares (2003) afirma que os alunos precisam se familiarizar com os novos símbolos e as novas exigências cognitivas das situações de medida, parte-todo, quociente, razão e operador. O desafio estaria no momento, em que esses novos números e operações ampliam os significados construídos com os números naturais.

Da mesma forma que Vergnaud, Llinares (2003) destaca que o domínio dos números racionais está constituído num campo conceitual formado por um conjunto de situações que requer a utilização de uma variedade de procedimentos, de conceitos e de representações simbólicas que estão em estreita conexão.

Um número racional $\frac{a}{b}$ tem muitas interpretações, o que possibilita diferentes significados. Llinares (2003) considera quatro interpretações: medida, repartição, operador e razão. A seguir, apresentamos brevemente essas interpretações.

3.3.1. Interpretação medida

Estabelece a relação entre uma parte e um todo (contínuo ou discreto). As situações de medida consideram um todo dividido em partes iguais e o número racional indica a relação entre a parte e o todo. As situações que podem ser utilizadas são:

Pedro comeu $\frac{3}{5}$ de uma pizza.

$\frac{3}{5}$ das fichas que tenho são roxas.

Juan pintou 60% da parede.

O desenvolvimento da idéia de unidade se manifesta em tarefas que consiste em reconstruir a unidade na representação da parte.

Llinares (2003) destaca outra idéia importante na interpretação do significado medida: a noção de (subgrupos) equivalência. A parte pode estar subdividida em outras partes; o tamanho (quantidade) de uma subparte (subgrupo) depende do número de divisões que se realizam e a maneira como pensamos sobre a unidade e as partes nos

proporcionam representações simbólicas diferentes (ex.: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$). Esta idéia está vinculada à conceitualização de fração unitária ($\frac{1}{n}$) como unidade. A noção de equivalência se apóia na idéia de realizar diferentes divisões que resultam na mesma relação entre a parte e o todo. Nesse contexto a atividade de realizar divisões múltiplas deve ser paralela à atividade de repartição eqüitativa: ambas são fundamentais para a compreensão dos números racionais.

Nunes *et al* (2003) considera nos seus estudos esta interpretação como sendo significado relacionado parte-todo.

3.3.2. Interpretação de repartição

Apresenta a idéia de quociente e números decimais.

Exemplo: Juan tem que repartir 3 pizzas entre 5 amigos. Que fração de pizza corresponde a cada amigo?

Llinares (2003) ressalta que os números racionais podem ser vistos como quociente, quer dizer, como resultado de uma divisão em situações de repartição. Essas situações de repartir levam implícita a idéia de que cada criança recebe uma parte de tamanho equivalente (parte congruentes), ainda que não seja da mesma forma. As idéias de soma e equivalência aparecem de maneira natural nesse tipo de situação.

O autor acrescenta que a divisão está intrinsecamente vinculada com a idéia de

número racional e que as frações se formam a partir de divisões. As frações decimais se formam como divisões em 10 partes de uma unidade, e realizando divisões sucessivas. Nesse caso, localizar um número racional na reta numérica depende da divisão da unidade em partes equivalentes.

O significado de fração como quociente pode produzir, ao se realizar a divisão, uma expressão decimal finita ou infinita. Por exemplo:

- $\frac{1}{3}$ produz uma expressão decimal infinita 0,33333....
- $\frac{1}{4}$ produz uma expressão finita 0,25.

As expressões decimais finitas são as únicas que permitem encontrar uma “fração decimal” equivalente e, portanto, uma fração equivalente com o denominador com potências de 5 e 2 (os divisores de 10), por exemplo, $\frac{1}{4} = 0,25 = \frac{25}{100}$.

Para Nunes *et. al* (2003) esta interpretação está relacionada com o significado quociente.

3.3.3. Interpretação de operador

A interpretação do número racional como operador se apóia no significado de função. Um número racional atuando sobre uma parte, um grupo ou um número modificado, por exemplo, “ $\frac{3}{5}$ de” é visto como a sucessão de multiplicar por 3 e dividir por 5 (ou dividir por 5 e multiplicar por 3).

$$\frac{3}{5} \text{ de } P = \frac{1}{5} \text{ de } (3P) = \left(\frac{3P}{5}\right)$$

A interpretação de operador está vinculada a aumentos ou diminuições. O operador “ $\frac{3}{5}$ de” é uma sucessão de uma multiplicação (uma quantidade três vezes seu tamanho original) e uma divisão (reduz uma quantidade $\frac{1}{5}$ do seu tamanho inicial) e proporciona a relação entre o número inicial e o seu resultado. Uma representação dos resultados produzidos por um número racional como operador está no exemplo a seguir:

Entrada	$\frac{3}{5}$ de 10	$\frac{3}{5}$ de 15	$\frac{3}{5}$ de 20	$\frac{3}{5}$ de 50
Saída	6	9	12	30

Dado o exemplo, os alunos podem realizar atividade de identificar o operador, identificar a entrada e a saída dada (ou vice-versa).

3.3.4. Interpretação de razão

Uma razão é uma comparação de duas quantidades. As razões podem ser comparações parte-parte em um conjunto ou comparações parte-todo.

Exemplo: A razão de 12 Km em 9 minutos ($\frac{12}{9}$) compara Km e minutos.

Exemplo: A razão de 4 ovos brancos por 2 ovos marrons em um pacote com 6 ovos ($4 \div 2$).

A interpretação razão permite comparar quantidades de tipos diferentes, enquanto que as interpretações parte-todo em um contexto de medida só nos permite comparar quantidades do mesmo tipo.

Para poder comunicar e usar as idéias matemáticas em diferentes contextos é necessário utilizar representações externas desse conceito. Llinares (2003) lembra, mais uma vez, que o desenvolvimento da competência com os números racionais é um processo longo que se inicia nas séries iniciais e se prolonga no Ensino Fundamental.

Para Llinares (2003), as noções informais dos alunos de divisão eqüitativa e medida proporcionam o contexto no qual serão construídos os diferentes significados dos números racionais. Nesta perspectiva, tais atividades desempenham o mesmo papel que as atividades de contar em relação à construção dos significados dos números naturais. Neste tipo de atividade, está implícita a idéia de “partes equivalentes”. O trabalho inicial com metades, quartos e oitavos, realizados nas séries iniciais com as atividades de realizar dobros em folha (unidade), desenvolvem a linguagem vinculada a essas ações (metades, quartos) e constituem o início do ensino de fração que posteriormente se completa com os terços e quintos. Posteriormente este conhecimento informal dos alunos de situações equivalentes de divisão permite a introdução de situações que mostram a equivalência de frações como, por exemplo:

Exemplo: Temos 3 pizzas para repartir entre cinco crianças. Quantas pizzas são necessárias para 15 crianças, sabendo que todas devem receber a mesma quantidade?

O conhecimento informal dos alunos se apóia no uso de representações (externas e internas) junto com instrumentos cognitivos. Exemplo destas representações são as noções de unidade e divisão equivalentes (mecanismos

construtivos) e o uso da linguagem. Junto com a idéia de “todo” e divisão eqüitativa os alunos utilizam a idéia de contar como um mecanismo construtivo que pode representar as frações unitárias $\left(\frac{1}{n}\right)$ no processo de construção do significado dos números racionais (LLINARES, 2003).

Uma maneira de entender o processo de construção do conhecimento e a noção de compreensão das frações nas crianças pode ser as ações de dividir em partes equivalentes e as atividades de reconstruir a unidade. As atividades deste tipo podem permitir que a criança construa representações internas da noção de fração e de fração equivalente vinculadas às representações externas utilizadas e ao tipo de ação realizada. Trabalhar com problemas equivalentes de divisão e registrar simbolicamente ajuda a construção destas representações internas.

Para podermos comunicar e compartilhar essas idéias é necessário representá-las, utilizando diferentes modos de representação:

- representação de materiais como tangram, cuisenaire, blocos multibase, fichas e figuras;
- símbolos $0,45$, $\frac{3}{5}$, $\frac{a}{b}$, $8 \div 6$;
- desenhos e diagramas;
- linguagem.

Os modos de representação são instrumentos para comunicar, pensar, calcular e compartilhar informações. Esses diferentes modos de representação permitem que as crianças aprendam a avaliar as formas alternativas de representar suas idéias e a julgar a idoneidade das representações utilizadas por seus colegas.

Llinares (2003) acrescenta que devemos ter precaução, que as representações não devem ser ensinadas com um fim em si mesmo, mas como instrumentos para gerar competências matemáticas (construir compreensão e comunicar informações), vinculados à resolução de problemas, para interpretar e dar significado. Desta maneira,

as representações dos alunos proporcionam algum tipo de modelo de seus pensamentos durante o processo de resolução de uma atividade. Os alunos constroem representações baseadas na compreensão parcial das ações em que se apóiam.

O autor referido enfatiza que uma maneira de ajudar os alunos a utilizarem os símbolos com os significados é proporcionar, desde os primeiros momentos, experiências de repartir quantidades de maneira eqüitativa, utilizando desenhos e materiais concretos, conectando essas ações com os símbolos matemáticos.

3.4 Estudos sobre alguns obstáculos na aprendizagem matemática

Entre vários pesquisadores, há uma preocupação em relação às dificuldades na aprendizagem matemática, considerando o fracasso que os alunos apresentam durante a Educação Básica. Embora existam investigações e teorias sobre a aprendizagem matemática, ainda existem poucos estudos referentes às dificuldades específicas nessa área.

Nunes e Bryant (1997) destacam que a compreensão que as crianças têm da Matemática muda constantemente nos primeiros anos da infância, de uma forma generativa, o que significa dizer que as crianças não precisam aprender cada item isolado do conhecimento matemático de que elas precisarão. Se elas entendem como o conhecimento matemático é estruturado, elas podem gerar conhecimentos que não aprenderam. À medida que as crianças crescem, não mudam apenas seus conceitos matemáticos, mas também seu conceito sobre o que seja Matemática. A compreensão das crianças sobre o que é Matemática exerce um efeito maior sobre como elas resolvem problemas.

Muitos alunos acabam sendo considerados fracassados nos conhecimentos matemáticos de forma totalmente equivocada, porque muitos erros cometidos em sala de aula são devidos aos efeitos limitantes do próprio ambiente. Tais erros não podem ser mais atribuídos apenas a lacunas e deficiências no raciocínio matemático dos alunos. O ambiente de sala de aula conduz os alunos em direção a um conjunto de regras e procedimentos que são obtidos assumindo prioridade sobre sua compreensão.

A Matemática é uma área de conhecimento bastante ampla, que envolve habilidades variadas de diferentes naturezas. Em cada uma de suas áreas, há um conjunto de estudos diversos que apontam as habilidades envolvidas em cada conceito (DORNELES, 2006).

Nunes e Bryant (1997) afirmam que o desconhecimento por parte dos professores a respeito do desenvolvimento evolutivo das crianças pode também gerar dificuldades na aprendizagem matemática; isso significa que é fundamental respeitar o que os alunos podem fazer e podem entender sobre conceitos matemáticos.

É preciso lembrar que a falta de preparo dos professores leva a uma diversidade de maneiras de ensinar Matemática. Na tentativa de entender a complexidade do saber docente, destacamos a pesquisa de Santos (2005), que afirma que o conhecimento dos professores e futuros professores sobre os conceitos matemáticos e a aprendizagem dessa disciplina é muito limitado, quase sempre marcado por sérias incompreensões.

O autor procura compreender o conhecimento e as concepções dos professores que atuam no Ensino Fundamental em relação ao conceito de fração. O estudo enfatiza que cada área de conhecimento tem uma especificidade própria, o que justifica a necessidade de investigar o conhecimento do professor nas diferentes disciplinas que ele ensina.

Santos (2005) identifica três vertentes no conhecimento do professor quando se refere ao conhecimento da disciplina para ensiná-la:

(i) o conhecimento do conteúdo da disciplina, ou seja, o professor deve ter sólida e

clara compreensão da disciplina que vai ensinar, baseado em diferentes perspectivas e estabelecer relações entre os diversos tópicos do conteúdo da disciplina e entre sua disciplina e outras áreas do conhecimento;

(ii) o conhecimento didático da disciplina, isto é, uma combinação desencadeada entre o conhecimento da disciplina e o modo de ensinar, a fim de tornar a disciplina compreensível para o aluno;

(iii) o conhecimento do currículo, que envolve a compreensão do programa, o conhecimento dos materiais que irá disponibilizar para ensinar sua disciplina, a capacidade de fazer articulações horizontais e verticais entre o conteúdo a ser ensinado e a história da evolução curricular do conteúdo a ser aprendido.

Neste sentido, pesquisas que focalizam os saberes matemáticos envolvidos na atuação do professor apontam em seus resultados haver uma lacuna entre o conhecimento do professor, o conteúdo a ser ensinado e a forma como ele pode ser aprendido.

Destacamos Orrantia (2006) entre alguns autores que se dedicam ao estudo das dificuldades de aprendizagem da Matemática relacionadas com cálculos e resolução de situações-problema. Seus estudos fornecem importantes subsídios para nossa pesquisa, na medida em que se preocupa em analisar e compreender as dificuldades que surgem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Orrantia (2006) pesquisa as dificuldades de aprendizagem na Matemática numa perspectiva evolutiva, que permite analisar e compreender as dificuldades que surgem no processo de ensino e aprendizagem. Ele destaca dificuldades em conteúdos como geometria, probabilidade, medidas, álgebra e aritmética. Na aritmética, os alunos encontram mais dificuldades porque os conteúdos dessa área são estudados em primeiro lugar, sendo a base para os demais conteúdos curriculares. Muitos alunos enfrentam um clássico bloqueio epistemológico ao passarem do estudo dos números naturais para o dos números racionais, já que o produto em \mathbb{N} sempre é maior do que os fatores que se multiplicam enquanto em \mathbb{Q} isso não é verdadeiro.

Orrantia (2006) afirma que os números, e especialmente as operações, têm sentido para o aluno quando se aprendem em contexto de resolução de situações-problema. Acrescenta que as operações deveriam ser utilizadas para resolução de situações-problema e não o contrário, como um mero exercício das operações, forma segundo a qual geralmente é focado o ensino da aritmética.

Um dos motivos pelos quais podem ocorrer dificuldades de aprendizagem na Matemática, além daqueles relacionados aos conteúdos, é a desconexão entre o conhecimento informal que as crianças desenvolvem espontaneamente e os conhecimentos mais formais, que aprendem nas aulas (ORRANTIA, 2006; NUNES e BRYANT, 1997; EMPSON, 1999; BUTTERWORTH, 2005).

De modo geral, as crianças apresentam dificuldades para conectar os símbolos e as regras que aprendem com os conhecimentos matemáticos. Algumas crianças utilizam os símbolos matemáticos separados da vida real e como um sistema de regras. Esses fatores podem ser determinantes para as dificuldades na Matemática apresentadas por muitos alunos.

O trabalho de Orrantia (2006) analisa algumas dificuldades que os alunos podem enfrentar durante a aprendizagem da Matemática, mais especificamente a desconexão, que muitas vezes ocorre, no ensino da aritmética, entre o conhecimento construído espontaneamente no cotidiano, fora da escola, e os conhecimentos mais formais, que se aprendem durante as aulas. Os alunos desenvolvem, antes do ensino formal da aritmética, uma ampla variedade de conhecimentos informais relacionados com o número, combinações numéricas básicas, resolução de situações-problema, incluindo o domínio dos algoritmos e do valor posicional.

Orrantia (2006) aponta que algumas crianças com dificuldades de cálculo apresentam um déficit específico nas combinações numéricas básicas, a que pode ser descrito como dificuldades de procedimentos ou de recuperação automática de fatos da memória. As características que apresentam nos distintos tipos de dificuldades de procedimentos (estratégia de resolução de operação) são: estratégias menos maduras, erros de contagem e execução lenta, o que acarreta um atraso no desenvolvimento.

Já as crianças que apresentam dificuldades na recuperação automática de fatos da memória (estratégias de pensamento) apresentam: atípica representação, erros de recuperação, tempos de respostas assimétricos, produzindo diferenças nos níveis de desenvolvimento.

O estudo realizado por Orrantia e colaboradores (2002) indica que os alunos sem dificuldade mostram maior confiança na recuperação de fatos na memória, uma velocidade maior na execução das estratégias, utilizando procedimentos mais desenvolvidos e de maneira mais eficaz.

O uso de procedimentos de contagem mais desenvolvidos pode resultar na representação de fatos básicos na memória, ou seja, com a prática as estratégias vão se tornando mais sofisticadas até que desaparecem em favor da recuperação imediata da memória semântica de longo prazo¹¹ (Orrantia et al, 2002). Uma vez formadas essas representações na memória, elas dão suporte para a resolução de problemas que a utilizam predominantemente.

Os processos mais comuns para a resolução de problemas apoiados na memória são recuperação direta e decomposição. Na recuperação direta, a criança diz uma resposta que está associada com o problema que lhe foi apresentado. Na memória de longo prazo, por exemplo, fala “três” quando ela tem que resolver o cálculo $12 \div 4$. A decomposição requer a reconstrução de respostas baseadas na recuperação de uma soma parcial. Por exemplo, $6 + 7$ pode ser solucionado recuperando-se a resposta para o problema $6 + 6$ e, então, adicionando-se 1 a esta soma parcial.

De forma progressiva, os alunos resolvem problemas mais rapidamente porque usam as estratégias apoiadas na memória de forma mais eficiente. Do mesmo modo, com a prática, a execução de cada estratégia requer menos tempo (GEARY, 2004).

¹¹ As memórias podem ser classificadas pelo tempo que duram: a memória de curta duração (dura minutos ou horas, o tempo necessário para que as memórias de longa duração se consolidem) e a memória de longa duração ou longo prazo (dura dias, meses ou muitas décadas). As memórias podem ser episódicas – lembrança de nossa formatura, de um rosto ou de um filme – ou semânticas – de conhecimentos gerais englobando nossos conhecimentos de português, matemática, psicologia, medicina, entre outros (IZQUIERDO, 2002).

Orrantia e colaboradores (2002) ressalta que a mudança para o uso de estratégias apoiadas na memória de longo prazo resulta na solução rápida de problemas e na redução das demandas feitas à memória de trabalho¹², o que, muitas vezes, oferece problemas para alunos com dificuldade de aprendizagem matemática, que apresentam um rendimento inferior em tarefas relacionadas com a memória de trabalho. A eventual recuperação automática de fatos na memória de longo prazo e a redução das demandas feitas à memória de trabalho parecem colaborar para a resolução de problemas aritméticos mais complexos (GEARY, 2004).

Orrantia (2006) acrescenta que, quando o aluno enfrenta resolução de situações-problema, as dificuldades podem surgir por dois fatores: falta de compreensão da situação-problema ou por não contarem com o conhecimento conceitual necessário para resolvê-la, ainda que a falta de conhecimento também possa levar a um fracasso na compreensão.

As dificuldades por que passam os alunos para resolver os problemas podem ser devidas à falta de compreensão do enunciado. A falta de compreensão surge, em muitos casos, quando o aluno utiliza uma estratégia de translação direta do texto para a operação, em vez de crer na representação coerente do enunciado. Nesse contexto, percebe-se que os alunos têm dificuldades porque não utilizam as estratégias cognitivas adequadas para resolver situações-problema, pois não são ensinados a isso, ou porque não se criam as condições necessárias para o seu uso.

Na escola, os problemas são utilizados para exercitar as operações, sem interesse no processo de resolução, o que está relacionado ao fato de que nos problemas mais utilizados nos livros-texto a estratégia de translação direta seria suficiente para resolvê-los.

¹² A memória de trabalho tem a função de manter durante alguns segundos, no máximo poucos minutos (1-3 min), a informação que está sendo processada no momento. Usamos a memória de trabalho, por exemplo, quando conservamos na memória um número de telefone o tempo suficiente para discá-lo e, uma vez feita a comunicação, o esquecemos. O principal papel da memória de trabalho é o de analisar as informações que chegam constantemente ao cérebro e compará-las com as existentes nas demais memórias. (IZQUIERDO, 2002).

Orrantia (2006) ressalta a importância da distinção entre a Matemática formal e a informal, porque nos permite analisar as dificuldades que se produzem pela desconexão que existe no mundo educativo entre estes dois tipos de conhecimento. As dificuldades aparecem quando o processo de ensino e aprendizagem caracteriza-se como algo mecânico e sem significado, embora seja importante considerar esse processo que necessita de certas estratégias e conhecimentos que se tornam cada vez mais complexos. Como o acesso a esses conhecimentos depende de certa forma do nível representacional em que o aluno se encontra, as representações manipulativas têm como ponto de partida o conhecimento informal que os alunos possuem.

Orrantia (2006) acrescenta que não significa que desaparecerão as dificuldades, somente considera um processo de ensino e aprendizagem mais significativo se adaptado às necessidades de cada aluno em função de seus conhecimentos e possibilidades.

A seguir, descrevemos as pesquisas mais recentes diretamente relacionadas com os números fracionários, como as de Empson (1999) e de Merlini (2005), que contribuem para o presente estudo.

3.5 Pesquisas sobre compreensão dos números fracionários

Apresentamos, a seguir, algumas pesquisas relacionadas com os números racionais fracionários, como as de Empson (1999) e de Merlini (2005).

3.5.1 Empson e o aprendizado de crianças de 1ª série sobre o desenvolvimento da compreensão do conhecimento informal sobre fração

Empson (1999) estuda o aprendizado de crianças em uma sala de aula de 1ª série e documenta o desenvolvimento da compreensão do conhecimento informal da criança sobre frações. O estudo descreve os conceitos de fração desenvolvidos pela criança, com foco na análise de diversas interações na sala de aula que resultaram em mudança cognitiva. A autora destaca que, para entender como se desenvolve o pensamento da criança a respeito das frações, a pesquisa deve levar em consideração as formas de pensar organizadas socialmente das quais as crianças participam durante o ensino. Afirma que, apesar dos numerosos progressos nas pesquisas sobre o pensamento matemático da criança, ainda não entendemos suficientemente bem como a criança aprende conceitos matemáticos difíceis em situações de sala de aula.

Ao considerar as alternativas educacionais, Empson (1999) enfatiza que questões cruciais incluem “o quê” e “como” a criança pode aprender a respeito de frações. Assegura também que, para se entender como ocorre a mudança cognitiva, é necessário considerar os processos socialmente organizados que motivam a atividade e dão forma ao pensamento. O estudo fornece evidências de que crianças bem jovens podem dar sentido a frações através da divisão em partes iguais. O foco da análise está em localizar e esclarecer quais as estruturas específicas e os processos que estão relacionados com a compreensão de frações e como se originam em interações a respeito de tarefas na sala de aula.

Empson (1999) ressalta que as tarefas de interação resultam em mudança cognitiva, envolvendo conhecimento prévio e interação social. Nessa perspectiva, interação social não é somente uma situação de aprendizado, mas a forma como o aprendizado ocorre.

As tarefas propostas no estudo foram motivadas por problemas de divisão em partes iguais, assim formuladas porque diversos estudos fornecem a evidência de que crianças na idade de cinco ou seis anos têm conhecimento informal de situações de partição. Além disso, pesquisadores (STREEFLAND, 1991; KIEREN, 1976, E KIEREN, 1988 *apud* EMPSON, 1999, p. 291) sugeriram que o contexto de divisão de quantidades contínuas e discretas pode fornecer uma base para a compreensão de fração. Soma-se a isso que o uso de contextos de divisão em partes iguais proporciona diversos subconstrutos de números fracionários, incluindo partição, parte/todo e proporção.

Os resultados do estudo de Empson (1999) indicam que a forma como a criança pensa a respeito de fração é influenciada não somente por como seu próprio conhecimento é estruturado, mas, talvez mais profundamente, pela forma como o contexto de pensar a respeito e de discutir frações é estruturado.

3.5.2 Merlini e a formação e o desenvolvimento do conceito de fração em 5^a e 6^a série do Ensino Fundamental

Merlini (2005) investiga a formação e o desenvolvimento do conceito de fração em 5^a e 6^a séries no Ensino Fundamental, levando em consideração tanto o ponto de vista do ensino como o da aprendizagem, por isso constituiu como sujeitos de pesquisa alunos e seus professores. Um primeiro estudo mapeou e diagnosticou a situação, para que, posteriormente, fosse realizada a intervenção.

O trabalho de pesquisa de Merlini (2005) faz parte de um projeto de pesquisa desenvolvido dentro do programa de cooperação internacional entre *Oxford Brookes*

University, Inglaterra, sob coordenação da Dr^a. Terezinha Nunes e o Centro das Ciências Exatas e Tecnologia da PUC-SP, coordenado pelas Dr^a. Sandra Magina e Dr^a. Tânia Campos que tem o objetivo de investigar as estratégias que os alunos de 5^a e 6^a séries do Ensino Fundamental utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, segundo os cinco significados propostos por Nunes *et al.* (2003) apresentados anteriormente. O estudo foi realizado com 120 alunos: sessenta alunos de 5^a série e sessenta alunos de 6^a série do Ensino Fundamental, em escolas públicas da cidade de São Paulo e envolveu também os professores dessas crianças. Trata-se de uma pesquisa diagnóstica que se serviu, para a coleta de dados, de um questionário contendo questões sobre o conceito de frações. Todas as questões estavam relacionadas com situações do cotidiano dos alunos, tanto dentro quanto fora da escola.

Os resultados indicam que, tanto na 5^a como na 6^a série, os percentuais de acerto foram baixos e próximos um do outro. Em média, o índice de acertos foi de 21,16%, demonstrando uma certa homogeneidade entre o desempenho das séries e indicando um resultado insatisfatório. Merlini (2005) encontrou as seguintes estratégias cognitivas utilizadas pelos alunos da amostra:

a) estratégia relação parte-parte: o aluno despreza o todo envolvido, fazendo contagem das partes sem relacioná-las com o todo, tanto com quantidades contínuas como em quantidades discretas;

b) estratégia inversão do numerador pelo denominador: o aluno faz a inversão das posições do numerador pelas do denominador. A suposição é que o aluno não compreenda a relação que existe entre o numerador e o denominador;

c) estratégia quociente remete para a relação parte-todo: o aluno desprezou as duas grandezas envolvidas (chocolate/criança; bolinhas de gude/criança; bolas de futebol/criança), levando em conta somente uma delas;

d) estratégia interpretação da fração literalmente: o aluno faz a interpretação da fração literalmente, enfocando o significado de número, compreendendo a

representação fracionária na reta numérica;

e) estratégia desprezo da conservação da área: o aluno não levou em conta a conservação da área; não percebeu que a parte pintada representava duas partes que foram divididas na figura;

f) estratégia utilização dos dados do problema: o aluno elaborou sua resposta de maneira equivocada, com dados contidos no enunciado e ou parte da resposta da referida questão;

g) estratégia denominador maior que o numerador: o aluno inverteu o numerador pelo denominador, porque entende que numerador não pode ser maior que o denominador;

h) estratégia números sobrepostos: a característica principal do uso dessa estratégia é o fato de o aluno ter tratado a fração como dois números naturais e distintos e que serão apenas separados por um traço;

i) estratégia utilização de operação: o aluno, com o intuito de revelar a resposta, procedeu a algum tipo de algoritmo de operação (adição, subtração, divisão ou multiplicação) entre o numerador e o denominador.

A autora salienta que, nos resultados encontrados, para um mesmo significado, há diferentes estratégias de resolução utilizadas pelos alunos e que o modo de ensino do conceito de fração utilizado nas escolas privilegia alguns significados, como parte-todo e operador multiplicativo, em detrimento de outros, não garantindo que o aluno construa o conhecimento desse conceito.

No que se refere à fração na escola, descrevemos a seguir as recomendações feitas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs 1997) para introdução do conceito de fração.

3.6 Fração e os PCNs

Para os PCNs, o objetivo principal na abordagem dos números racionais é levar os alunos a perceberem que os números naturais são insuficientes para resolver determinados problemas. Neste sentido, recomendam que a construção da idéia de número racional esteja relacionada à divisão entre dois números inteiros. Sugerem que a introdução do estudo dos números racionais seja feita pelo seu reconhecimento no contexto diário, observando que eles aparecem no cotidiano das pessoas, muito mais na sua representação decimal (números com vírgula) do que na forma fracionária.

A aprendizagem dos números racionais, no entanto, supõe rupturas com idéias construídas pelos alunos acerca dos números naturais e, portanto, demanda tempo e abordagem adequada. Neste sentido, os PCNs propõem, como um trabalho interessante, o uso da calculadora em atividades em que os alunos são convidados a dividir 1 por 2, 1 por 3, 1 por 4, etc., levantando hipóteses sobre as escritas que aparecem no visor da calculadora, iniciando a interpretar o significado dessas representações decimais. Utilizando a calculadora, os alunos podem perceber que as regras do sistema de numeração decimal, utilizadas para representar números naturais, podem ser aplicadas para se obter a escrita dos números racionais na forma decimal. A abordagem dos números racionais deve ser iniciada pela sua representação decimal, uma vez que essa representação aparece com mais freqüência na vida cotidiana do aluno (BRASIL, 1997).

Os PCNs destacam que a representação fracionária é bem menos freqüente na vida cotidiana limitando-se a metades, terços, quartos e mais pela linguagem oral do que das representações.

A prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações que envolvem a relação parte-todo, como no caso da divisão de chocolate, ou de uma pizza, em partes iguais. A fração indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes.

Outro significado das frações é o de quociente; baseia-se na divisão de um número natural por outro ($a \div b$; a / b ; $b \neq 0$). Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir um chocolate em 3 partes e comer duas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 chocolates para 3 pessoas (BRASIL, 1997).

Uma terceira situação, diferentes das anteriores, é aquela em que a fração é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão, como, por exemplo, no trabalho com mapas (a escala é de 1 cm para 100m).

Além dessas três interpretações, já descritas, acrescenta-se mais um significado da fração: operador, ou seja, quando ela desempenha um papel de transformação em que atua sobre uma situação e a modifica. Essa idéia está presente, por exemplo, num problema do tipo “que número devo multiplicar por 3 para obter 2?” (BRASIL, 1997).

Constatamos que os PCNs sugerem que as frações sejam abordadas com os seguintes significados: parte-todo, quociente e razão. E o outro significado, fração como operador, deve ser trabalhado posteriormente, no terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental.

No segundo ciclo, a construção do conceito de número racional pressupõe uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações, o que demanda razoável espaço de tempo, pois trata-se de um trabalho a ser e consolidado nos ciclos finais.

No terceiro e quarto ciclos (5^a e 6^a séries), a abordagem dos números racionais deve ter como objetivo levar os alunos a perceber que os números naturais são

insuficientes para resolver determinadas situações-problema, como as que envolvem medidas de uma grandeza e o resultado de uma divisão.

Os PCNs (BRASIL, 1997) recomendam que, para abordar o estudo dos números racionais, deve-se recorrer aos problemas históricos, envolvendo medidas, de forma a possibilitar bons contextos para o seu ensino. Nesse sentido, pode-se discutir com os alunos, por exemplo, como os egípcios já os usavam, por volta de 2000 a.C., para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Eles utilizavam apenas frações unitárias, com exceção de $\frac{2}{3}$. Assim, em uma situação na qual precisavam dividir, por exemplo, 19 por 8, eles utilizavam um procedimento que, na nossa notação, pode ser expresso por: $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. A sugestão dos PCNs é que esse tipo de problema seja explorado e discutido com os alunos, assim como, por exemplo, seja solicitado aos alunos que mostrem que a soma acima indicada é $\frac{19}{8}$.

As recomendações feitas pelos PCNs propõem uma inovação para o ensino, se analisarmos do ponto de vista da construção do conceito de fração. Essa inovação é traduzida pela ênfase dada pelos Parâmetros ao ensino de fração baseado na resolução de situações-problema, levando-se em consideração dois aspectos fundamentais: os significados que a fração poderá assumir em cada situação e as diferentes formas para sua representação.

4 MÉTODO DE PESQUISA E ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo apresenta o método de pesquisa adotado para realização do presente estudo e a análise dos resultados. Consideramos, aqui, o método na perspectiva de Minayo (2002), como o “caminho e o instrumental próprio da abordagem da realidade”. A seguir, definimos os objetivos, geral e específico, as questões de pesquisa e o método utilizado na investigação.

4.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste estudo é comparar as estratégias cognitivas utilizadas por alunos da 4^a à 8^a séries do Ensino Fundamental com bom desempenho em Matemática com as estratégias cognitivas utilizadas por alunos das mesmas séries que tenham baixo desempenho escolar na Matemática quando se trata de resolver problemas que implicam o conceito do número fracionário, no que diz respeito aos significados: parte-todo, quociente e operador multiplicativo.

4.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos são:

4.2.1 reconhecer as estratégias cognitivas utilizadas por alunos da 4^a à 8^a séries do Ensino Fundamental para resolver problemas que implicam o conceito do número fracionário, no que diz respeito aos significados: parte-todo, quociente e operador multiplicativo;

4.2.2 verificar se as estratégias cognitivas utilizadas pelos alunos com bom desempenho na Matemática diferem daquelas utilizadas pelos alunos com baixo desempenho na Matemática.

4.3 Questões da pesquisa

Em decorrência dos objetivos acima fixados, estabelecem-se as questões de pesquisa abaixo relacionadas.

4.3.1 Crianças com bom desempenho na Matemática usam preferencialmente determinadas estratégias cognitivas, diferentes daquelas utilizadas por crianças com baixo desempenho na Matemática?

4.3.2 Quais implicações pedagógicas as estratégias cognitivas observadas trazem para o ensino dos números fracionários?

4.4 Método e amostra do estudo

A seguir, apresentamos o método e a amostra de estudo desta investigação. Iniciamos por definir o tipo de estudo procedido e culminamos por trazer elementos constantes nos instrumentos, que demonstram o percurso metodológico pelo qual se optou.

4.4.1 Método

A proposta deste estudo é desenvolver uma pesquisa quali-quantitativa e esta opção decorre, de acordo com Minayo (2002, p. 22), do fato de que “o conjunto de dados quantitativos e qualitativos não se opõem. Ao contrário, se complementam, pois a realidade abrangida por eles interage dinamicamente, excluindo qualquer dicotomia”.

A abordagem qualitativa nos possibilita a compreensão das estratégias cognitivas evidenciados pelos alunos através de entrevista individual, à medida que

favorece a constituição de uma rede de significados, de difícil recuperação em estudos quantitativos; a análise quantitativa será usada para complementar nossa análise qualitativa, permitindo-nos verificar diferenças e variações no desempenho dos grupos I e II, quantificando os dados estatística e graficamente.

4.4.2 Amostra

A amostra é constituída por cinqüenta alunos do Ensino Fundamental da 4^a à 8^a séries de uma escola privada de classe média com cerca de mil alunos da cidade de Porto Alegre. Foram escolhidos dez alunos de cada série, sendo cinco alunos que apresentaram bom desempenho e cinco alunos que apresentaram baixo desempenho na disciplina de Matemática. Dividimos a amostra em dois grupos de igual tamanho (25 alunos cada). Para essa divisão, foi utilizado o critério desempenho. Assim, o grupo com bom desempenho foi denominado **Grupo I**, enquanto o grupo com baixo desempenho foi denominado **Grupo II**. O perfil dos grupos foi determinado pela média alcançada pelos alunos na avaliação escolar do primeiro trimestre. Aqueles alunos que atingiram média acima de 8,0 estão no Grupo I e os que alcançaram média abaixo de 4,0 no Grupo II. Os alunos foram indicados pelos próprios professores, de acordo com seu desempenho na avaliação do primeiro trimestre. Foi solicitada a autorização dos pais para que os alunos participassem da pesquisa.

4.4.3 Instrumentos

Foram apresentados às crianças sete problemas que envolvem situações com números fracionários e lhes foi solicitado que explicassem como os resolveram, a fim de que se pudesse verificar que estratégias aplicaram para chegar à solução desses problemas. As entrevistas ocorreram no turno escolar e os encontros foram gravados em áudio e vídeo, em seguida, descritos detalhadamente para, então, serem analisados e interpretados.

Para avaliar as estratégias, assim como os distintos processos cognitivos, elaboraram-se sete situações-problema envolvendo fração no que diz respeito aos significados parte-todo, quociente e operador multiplicativo, usando como referências Merlini (2005) e Nunes *et. al* (2003). Optou-se por esses três significados da fração, pois são os mais utilizados pelos professores ao introduzirem o conceito de número fracionário. Todas as questões estão relacionadas com situações do cotidiano do aluno dentro e fora da escola. As situações-problema propostas para os alunos de 4^a à 8^a séries foram as mesmas.

A seguir, apresentam-se as situações-problema submetidas às crianças e definem-se os significados implicados em cada uma delas.

QUESTÃO 1: enfoca o significado quociente com quantidade discreta

1) Tenho 12 adesivos e vou dividi-los igualmente entre 4 crianças.

a) Quantos adesivos cada criança ganhará?

b) Que fração representa esta divisão?

QUESTÃO 2: enfoca o significado quociente com quantidade contínua. O significado quociente está presente nas situações em que a divisão surge como uma estratégia para resolver um problema com a idéia de divisão, partilha.

2) Duas barras de chocolate foram divididas igualmente entre 3 crianças.

a) Cada criança come um chocolate inteiro? () Sim () Não

b) Cada criança receberá pelo menos metade de um chocolate? () Sim () Não

c) Qual a fração de chocolate que cada criança receberá?

QUESTÃO 3: aborda o significado parte-todo com quantidade contínua. O significado parte-todo é, geralmente, utilizado na introdução do conceito de fração. A quantidade contínua no significado parte-todo, via de regra, é bem explorada nos livros didáticos.

3) Uma barra de chocolate foi dividida em 5 partes iguais.

Maria comeu 3 dessas partes. Que fração da barra representa o que Maria comeu?

QUESTÃO 4: aborda o significado parte-todo com quantidade discreta para retratar a situação. Trata-se de uma situação que pode empregar um tipo de contagem dupla – a quantidade total de lápis sendo o denominador; a quantidade de lápis pretos, o numerador. A quantidade discreta no significado parte-todo costuma ser pouco explorada nos livros didáticos, o que permite inferir que esse poderá ser o fator de complexidade da questão.

4) No material de Maria há 6 lápis coloridos e 2 lápis pretos.

Que fração representa a quantidade de lápis pretos em relação ao total de lápis?

QUESTÃO 5: enfoca o significado de operador multiplicativo com quantidade contínua. O significado de operador multiplicativo nesta questão propõe-se a delimitar a quantidade de chocolate que Maria comeu, ou seja, reduz o inteiro partido em 4 partes iguais, em 3 partes já consumidas. Partindo do pressuposto de que, geralmente, o conceito de fração é introduzido e trabalhado com figuras geométricas (retângulos, círculos) que representam chocolate, pizza, etc., entendemos que a representação seja um fator que contribui para a compreensão dessa questão pelo aluno.

5) *Maria partiu o chocolate e comeu $\frac{3}{4}$ dele . Desenha o chocolate e mostra quanto Maria comeu.*

QUESTÃO 6: enfoca o significado de operador multiplicativo com quantidade discreta. O significado operador multiplicativo tem o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre o número ou quantidade, transformando seu valor nesse processo.

6) *Carolina tem uma coleção de 24 adesivos. A coleção de sua prima é $\frac{2}{3}$ da sua. Quantos adesivos tem a prima de Carolina?*

QUESTÃO 7: aborda o significado parte-todo com quantidade contínua para explorar a situação medida de comprimento num contexto mais espontâneo partindo dos conhecimentos informais dos alunos. Para resolver a situação-problema foi disponibilizada tira de papel liso com o comprimento de 1 metro (os alunos não receberam a informação sobre a medida da tira).

7) Encontre a medida que representa a largura da porta da sala de aula utilizando uma tira de papel.

Foi colocado à disposição dos alunos material manipulável, para auxiliar na representação das soluções dos problemas, assim como material para representação escrita do seu pensamento. Foi opcional o uso do material concreto. A notação da operação matemática usada para resolver o problema foi, porém, uma exigência feita aos alunos, assim como a explicação oral do seu pensamento de solução, pois o objetivo do estudo é verificar as estratégias utilizadas por eles para resolução das situações-problema.

Os materiais disponibilizados para as crianças resolverem os problemas foram os seguintes: barrinhas coloridas, adesivos de coleção, fichas, papel, lápis, borracha, figuras de círculos, de retângulos, tira de papel pardo, entre outros. Os materiais foram usados para manipulação concreta, quando necessária, e para a representação gráfica da solução.

4.5 Análise dos resultados

Nesta parte do presente trabalho apresentamos os resultados obtidos na análise das entrevistas realizadas com os alunos. Iniciamos com a análise quantitativa dos dados e nos detemos nos índices de estratégias utilizadas e de acertos por significados

com quantidades contínuas e discretas. Na seqüência, apresentamos a análise qualitativa dos resultados, com base na resolução das situações-problema propostas aos alunos, procurando identificar as estratégias por eles utilizadas.

4.5.1 Aspectos quantitativos

Iniciamos a análise quantitativa buscando evidenciar as estratégias cognitivas utilizadas pelos sujeitos da pesquisa. Nosso objetivo foi comparar o uso dessas estratégias entre os dois grupos na resolução dos sete problemas com significado quociente, parte-todo e operador multiplicativo com quantidades discretas e contínuas.

Na análise quantitativa, dois enfoques são considerados: um relacionado aos significados dos números fracionários e o outro relacionado às estratégias utilizadas pelos alunos para resolver as situações-problema.

4.5.1.1 Os significados dos números fracionários

Na análise, consideramos a classificação dos diferentes significados: quociente, parte-todo e operador multiplicativo já descritos por Nunes *et al* (2003) com quantidades discretas e contínuas. Os vinte e cinco sujeitos pesquisados de cada grupo são considerados independentemente da série.

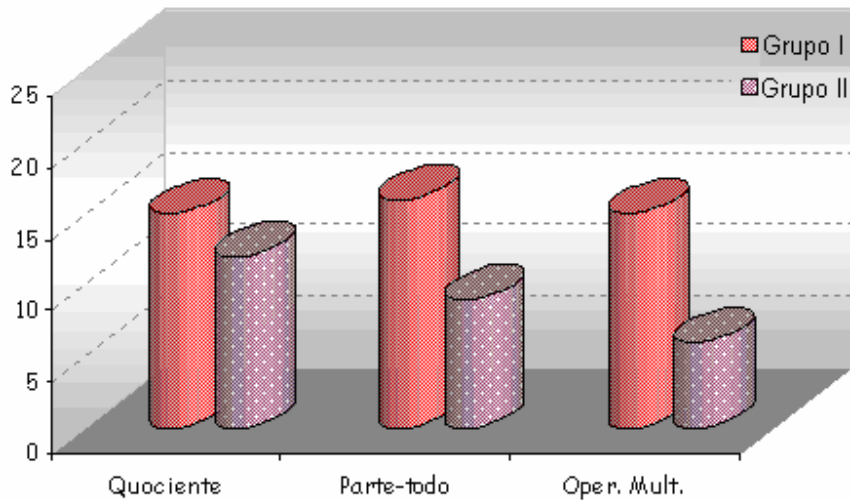


Gráfico 1 - Comparação do número de acertos, quantidade discreta, entre os dois grupos
 Fonte: Dados da pesquisa coletados em 2006

Os dados do gráfico 1 indicam que os alunos do Grupo I apresentaram melhor desempenho no significado parte-todo, sendo 56 % o índice de acertos; seguido pelos significados quociente e operador multiplicativo, ambos com o índice de 52% de acertos.

Os alunos do Grupo II tiveram um melhor índice de acerto no significado quociente, sendo 48% o índice de acertos; em relação ao significado parte-todo, o índice de acertos atingiu 36% e o significado operador multiplicativo alcançou 24% dos acertos.

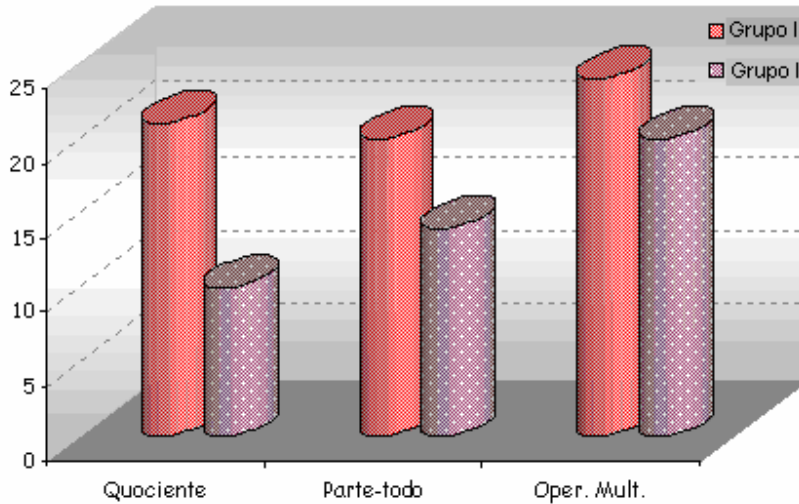


Gráfico 2 - Comparação do número de acertos, quantidade contínua, entre os dois grupos
 Fonte: Dados da pesquisa coletados em 2006.

Os dados do gráfico 2 indicam que os alunos do Grupo I apresentaram índice de 96 % de acertos no significado operador multiplicativo; de 84% de acertos no significado quociente e 80% de acertos foi alcançado no significado parte-todo.

Em relação aos alunos do Grupo II, destacamos o índice de 80% de acertos para o significado operador multiplicativo com quantidade contínua, seguido pelo índice de 56% de acertos no significado parte-todo e 40% de índice de acertos para o significado quociente.

Podemos destacar que o desempenho geral dos alunos dos dois grupos foi sensivelmente melhor no significado operador multiplicativo com quantidades contínuas.

Chama atenção que os dados dos gráficos 1 e 2 demonstram que os alunos, tanto do Grupo I quanto os do Grupo II, obtiveram menor índice de acertos na resolução dos problemas envolvendo quantidades discretas. Esses resultados podem ter ocorrido em razão do enfoque metodológico escolar, que inicia o ensino de frações com as situações que abordam quantidades contínuas a partir do significado parte-todo, seguido por problemas e cálculos com operador multiplicativo. As quantidades

contínuas representam os objetos que podem ser quantificados através da *medida* que possibilita a divisão em partes iguais e com resto, possibilitando o surgimento dos números fracionários.

É importante ressaltar que as quantidades discretas surgem da *contagem* de objetos sendo representadas pelo conjunto dos números naturais e são poucas as situações em que aparece esse tipo de quantidade no ensino de frações. Nas quantidades discretas, o inteiro é representado por um conjunto de objetos iguais, em que cada elemento constitui uma parte desse conjunto e só pode ser dividido em quantidades iguais quando o dividendo for múltiplo do divisor.

4.5.1.2 As estratégias utilizadas pelos alunos

Apresentamos a seguir as estratégias utilizadas pelos dois grupos e os percentuais de acertos obtidos pelos alunos que resolveram corretamente os problemas, bem como o dos que não conseguiram fazê-lo.

As estratégias identificadas na pesquisa foram:

- E1- Inversão do numerador pelo denominador: o aluno faz a inversão da posição do numerador pela do denominador. A suposição é que o aluno não saiba distinguir a relação que existe entre o numerador e denominador;
- E2 - Utilização dos dados do problema: o aluno elabora sua resposta com dados contidos no enunciado e/ou parte da resposta da referida questão;
- E3 - Denominador maior que o numerador: o aluno inverte o numerador pelo denominador, porque entende que numerador não pode ser maior que o denominador;

- E4 - Números sobrepostos: a característica principal do uso dessa estratégia é o fato de o aluno ter tratado a fração como dois números naturais e distintos que são apenas separados por um traço;
- E5 - Utilização de operação: o aluno, com o intuito de revelar a resposta, procede a algum tipo de algoritmo de operação (adição, subtração, divisão ou multiplicação) entre o numerador e o denominador;
- E6 – Relação parte-parte: o aluno despreza o todo envolvido, faz a contagem das partes sem relacioná-las com o todo.
- E7- Contagem nos dedos: recurso utilizado como apoio para contagem.

A Tabela 1, a seguir, fornece os percentuais de acerto, considerando o total de cada coluna. Percebemos que as estratégias utilizadas, já apresentadas no capítulo 3, baseadas na pesquisa de Merlini (2005), são comuns aos alunos dos dois grupos. Notamos que a estratégia mais adotada, não considerando a série do aluno, foi a de número 2 “utilização de dados do problema”.

Observamos, também, que, no Grupo I, 74,0% dos alunos apresentaram soluções corretas, enquanto no Grupo II esse número foi de 47,3%. As soluções corretas são aquelas consideradas como as resoluções com respostas imediatas ou aquelas em que o aluno encontra o resultado esperado como solução sem recorrer a estratégias que podem conduzi-lo a erros.

A seguir apresentamos a Tabela 1 com os resultados obtidos por grupo, em valores percentuais, independente da série a partir da tabulação geral dos dados que segue em anexo.

Tabela 1 – Resultados obtidos por grupo, em valores percentuais, independentemente da série

Estratégia	Grupos	
	I	II
1 Inversão numerador/ denominador	6,0	13,3
2 Utilização/ dados problema	10,7	16,0
3 Denominador maior que o numerador	2,0	2,7
4 Números sobrepostos	0,0	4,0
5 Utilização de operação	4,0	8,7
6 Parte-parte	0,0	2,0
7 Contagem nos dedos	0,0	3,3
Solução Correta	74,0	47,3
Não responderam	3,3	2,7
Total	100,0	100,0

Percebemos que os alunos do Grupo I utilizaram menos estratégias para resolver as situações-problema e obtiveram um índice de soluções corretas bem superior aos do Grupo II. Esses dados nos reportam aos estudos de Orrantia (2006), segundo os quais, quando os alunos enfrentam a resolução de situações-problema, as dificuldades podem surgir por dois fatores: falta de compreensão da situação, ou falta de conhecimento conceitual necessário para resolvê-la, ainda que a falta de conhecimento também possa levar a um fracasso na compreensão. Assim, percebe-se que os alunos têm dificuldades porque não utilizam as estratégias adequadas para resolver situações-problema, uma vez que não são ensinados a isso, ou porque não se criam as condições necessárias para o seu uso.

O gráfico 3 faz uma comparação entre as estratégias utilizadas pelos dois grupos, apresentando uma diferença na utilização das mesmas. O Grupo II utilizou um maior número de estratégias em relação ao Grupo I. Assim, por exemplo, vinte alunos do Grupo II utilizaram a estratégia do tipo 1, enquanto nove alunos do Grupo I fizeram o mesmo. Desse modo, foram onze estratégias a mais sobre um total de 29 estratégias, ou seja, 37,9%. As estratégias 4, 6 e 7 foram utilizadas somente pelo Grupo II, que foi o que utilizou maior variedade de estratégias.

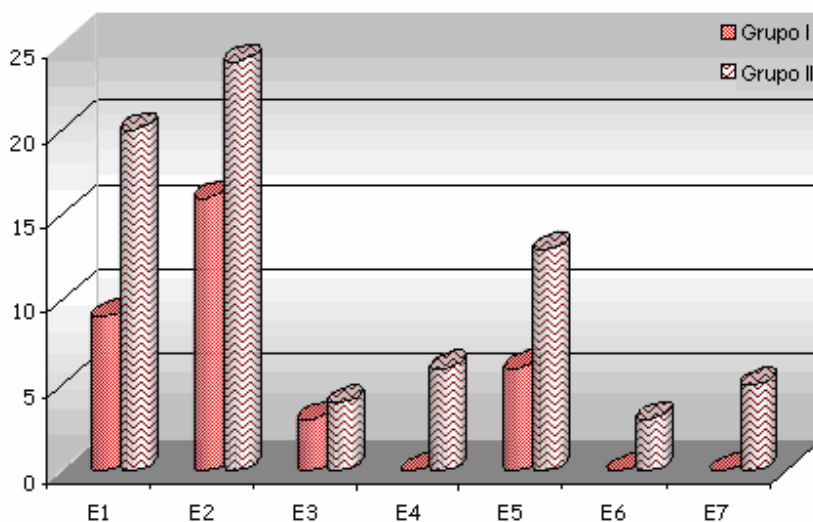


Gráfico 3 - Estratégias utilizadas pelos dois grupos considerados separadamente
Fonte: Dados da pesquisa coletados em 2006.

Apesar de os grupos apresentarem estratégias comuns, os resultados mostram diferenças entre os grupos. O Grupo I utiliza menos estratégias para resolução das situações-problema; encontra o resultado correto de forma imediata, evocando a recuperação de fatos na memória, ou dispõe das competências necessárias ao utilizar uma operação como ferramenta de solução da situação, representada por resoluções mais econômicas ou mais rápidas, ou, ainda, mais refinadas (Vergnaud, 1990).

O Grupo II apresenta diversidade de uso de estratégias, não dispondo de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, que o levam, eventualmente, ao sucesso ou ao

fracasso (Vergnaud, 1990).

A seguir apresentamos as estratégias utilizadas por cada grupo separadamente para uma análise mais detalhada.

O gráfico 4 apresenta as estratégias mais utilizadas pelo Grupo II. Podemos verificar que a estratégia 2, utilização dos dados do problema, foi a mais utilizada.

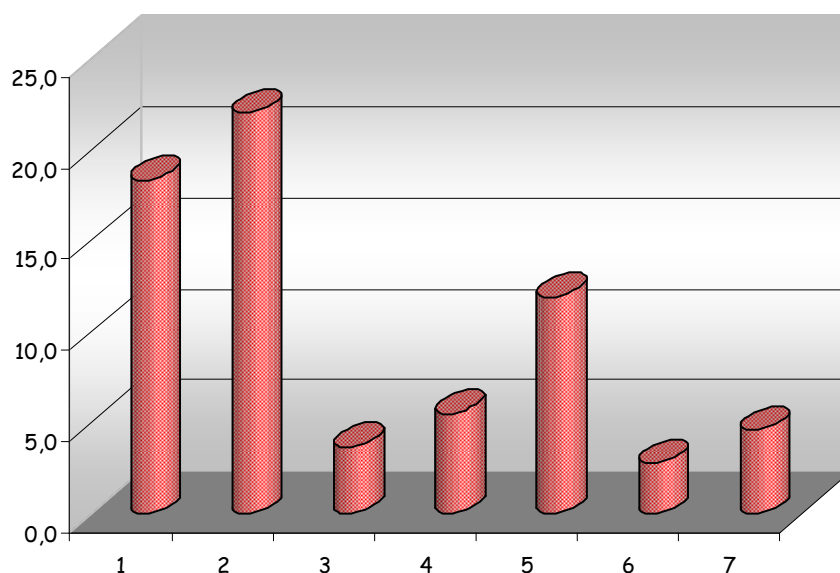


Gráfico 4 - Estratégias utilizadas pelo Grupo II
Fonte: Dados da pesquisa coletados em 2006.

Podemos destacar que alguns alunos com dificuldades na Matemática apresentam estratégias de resolução menos maduras, erros de contagem e execução lenta, o que expressa um atraso no desenvolvimento cognitivo. Também podem apresentar dificuldades de recuperação automática de fatos na memória, que traduziriam uma representação atípica, por meio de erros de recuperação e tempos de respostas assimétricos (ORRANTIA, 2006). Tais características justificariam o maior uso de estratégias para solucionar os problemas.

O gráfico 5 apresenta as estratégias utilizadas pelo Grupo I. Percebemos que existe uma diferença razoável na utilização das estratégias pelos dois grupos. As estratégias utilizadas seguem praticamente a mesma ordem nos dois grupos, sendo a estratégia 2 a mais utilizada, seguida pela estratégia 1. O Grupo I não utilizou as estratégias dos tipos 4, 6 e 7.

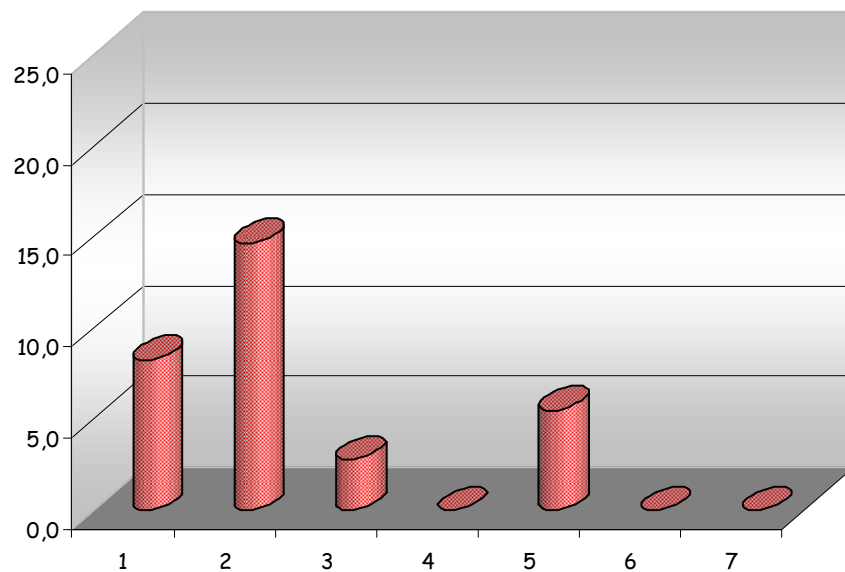


Gráfico 5 - Estratégias utilizadas pelo Grupo I
Fonte: Dados da pesquisa coletados em 2006.

Observamos que o Grupo I utiliza menos estratégias para solucionar as situações-problema. Os alunos desse Grupo mostram maior confiança na recuperação de fatos na memória, uma velocidade de execução das estratégias, utilizando procedimentos mais desenvolvidos e de maneira mais eficaz. Esses procedimentos mais desenvolvidos possibilitam a representação de fatos básicos na memória, ou seja, com a prática as estratégias vão se tornando mais sofisticadas, até que desaparecem em favor da recuperação imediata na memória semântica de longo prazo. Uma vez formadas essas representações na memória, elas dão suporte para a resolução de problemas que utilizam predominantemente a recuperação dessa informação (ORRANTIA, 2002).

Passamos, a seguir, para a análise qualitativa, descrevendo as estratégias de

resolução de alguns alunos entrevistados.

4.5.2.Aspectos qualitativos

A seguir abordamos uma a uma as estratégias utilizadas, definindo-as e explicitando, para cada uma delas, a estratégia utilizada pelo aluno que possa justificá-la. Cabe informar que os alunos da 4ª série receberam instrução sobre a representação dos números fracionários durante a entrevista, pois ainda não os haviam estudado formalmente. Também descrevemos os resultados obtidos na situação-problema informal, explorando o conceito de fração com significado parte-todo com quantidade contínua, explorando medida de comprimento.

4.5.2.1 E1 - “Inversão do numerador pelo denominador”

A estratégia “inversão do numerador pelo denominador” refere-se à inversão da posição da posição do numerador pela do denominador, o que supõe a não compreensão da relação existente entre o numerador e o denominador. As relações parte-todo que estão envolvidas em distribuição e divisão apresentam três elementos a serem considerados: o tamanho do todo, o número das partes e o tamanho das partes.

O denominador é o número de partes em que o todo foi dividido e, o numerador, o número de partes consideradas.

A situação-problema com significado quociente requer a ação de distribuição, que envolve uma nova visão das relações parte-todo. Distribuir é uma ação que se relaciona à operação de divisão e à possibilidade de cortes sucessivos. O problema solicita que doze adesivos (o todo) sejam partilhados entre quatro crianças (partes); então, há três adesivos para cada criança (o tamanho da parte).

QUESTÃO 1

Tenho 12 adesivos e vou dividi-los igualmente entre 4 crianças.

a) Quantos adesivos cada criança ganhará?

b) Que fração representa esta divisão?

Iniciamos descrevendo a resolução da situação-problema com significado quociente com quantidade discreta, comparando as respostas dos alunos Gui (GI) e Joa (GII) da 4ª série.

Grupo I	Grupo II
<p>P: Quantos adesivos cada criança ganhará?</p> <p>Gui: Três (imediato).</p> <p>P: Como você pensou?</p> <p>Gui: Pensei na lei do três - Três vezes quatro é igual a doze.</p> <p>P: Que fração representa essa divisão?</p> <p>Gui: $\frac{12}{4}$ (imediato)</p>	<p>P: Quantos adesivos cada criança ganhará?</p> <p>Joa: Tem que dividir doze por quatro dá três.</p> <p>P: Que fração representa essa divisão?</p> <p>Joa: $\frac{4}{12}$.</p> <p>P: Como você pensou?</p> <p>Joa: Pensei que são quatro crianças e</p>

P: Como você pensou?	doze adesivos.
Gui: Eu pensei que tem doze adesivos para dividir entre quatro crianças.	

Ao responder a esse problema, o aluno Joa, 4^a série, Grupo II, inverteu o numerador pelo denominador. Esse tipo de estratégia, que compreende a inversão das posições do numerador pelas do denominador, também foi detectado nos estudos de Merlini (2005) e, em nosso caso, entendemos que essa estratégia pode ser decorrente de o aluno compreender a operação necessária à resolução, porém sem ser capaz de representá-la utilizando a fração, não distinguindo, portanto, a relação que há entre numerador e denominador.

As estratégias utilizadas pelos alunos das outras séries pesquisadas foram semelhantes às dos alunos da 4^a série, já descritas.

4.5.2.2 E2 - “Utilização dos dados do problema”

Compreende a estratégia em que o aluno elabora sua resposta com dados contidos no enunciado e/ou parte da resposta da referida questão.

Um exemplo que pode justificar essa estratégia é a situação-problema com significado quociente com quantidade discreta, que se pode visualizar comparando-se as respostas do aluno Tai (GI) às respostas do aluno Vic (GII), ambos da 5^a série com relação ao mesmo problema já descrito. A situação refere-se a um problema de divisão que envolve o esquema de distribuição; dessa forma, as frações estão relacionadas ao

conceito de divisão.

Grupo I	Grupo II
<p>P: Quantos adesivos cada criança ganhará?</p> <p>Tai: Três (imediato) porque doze dividido por quatro é três.</p> <p>P: Que fração representa essa divisão?</p> <p>Tai: $\frac{12}{4}$ porque cada criança ganha 3 adesivos do total.</p>	<p>P: Quantos adesivos cada criança ganhará?</p> <p>Vic: Vou dividir doze por quatro. (Contou nos dedos: 4 em 4) é três.</p> <p>P: Que fração representa essa divisão?</p> <p>Vic: $\frac{3}{4}$ porque cada criança vai ganhar três adesivos.</p>

A resposta apresentada pelo aluno Vic, 5ª série, Grupo II, nos revela que solucionou corretamente o problema, porém apresentou dificuldade em realizar a representação simbólica da fração, talvez porque esse significado, quociente com quantidade discreta, não tenha sido estudado na forma fracionária ou a fração não seja entendida como divisão, assim precisou recorrer à utilização dos dados contidos no problema.

As estratégias utilizadas pelos alunos das outras séries pesquisadas foram semelhantes às dos alunos da 5ª série, já descritas.

4.5.2.3 E3 - “Denominador maior que o numerador”

Compreende a estratégia em que o aluno inverte o numerador pelo denominador, porque entende que o numerador não pode ser maior que o denominador.

Um exemplo que justifica essa estratégia é a situação-problema com significado quociente com quantidade discreta, que se pode perceber na seguinte entrevista com Luc (GI) e Esd (GII), alunos da 7ª série, com relação ao problema já descrito.

Grupo I	Grupo II
<p>P: Quantos adesivos cada criança ganhará?</p> <p>Luc: Três (imediato) porque três vezes quatro é doze.</p> <p>P: Que fração representa essa divisão?</p> <p>Luc: $\frac{12}{4}$, porque a fração representa divisão.</p>	<p>P: Quantos adesivos cada criança ganhará?</p> <p>Esd: Três (imediato) porque três vezes quatro é doze..</p> <p>P: Que fração representa essa divisão?</p> <p>Esd: $\frac{4}{12}$.</p> <p>P: Quatro doze avos? Como é que você pensou para responder quatro doze avos?</p> <p>Esd: Ah! Eu pensei que tenho doze adesivos e tenho que dar quatro para cada um.</p> <p>P: E como você chega em quatro doze avos?</p> <p>Esd: Porque o número debaixo na fração fica maior.</p>

Nessa questão, que aborda o significado quociente, podemos pensar que o aluno ainda se reporta à parte-todo. O significado parte-todo é trabalhado para iniciar o

conceito de fração e, normalmente, com quantidades contínuas, em que apenas um todo é dividido em partes iguais (nesse caso, o numerador sempre será menor que o denominador). Esse procedimento pode, muitas vezes, não dar ao aluno a chance de perceber as frações impróprias (numerador maior que denominador).

Orrantia (2006) destaca que as crianças apresentam dificuldades para conectar os símbolos e regras que aprendem com os conhecimentos matemáticos; utilizam os símbolos matemáticos separados da vida real e como um sistema de regras. Esse fator pode ser determinante para as dificuldades na Matemática apresentadas por muitos alunos.

As estratégias utilizadas pelos alunos das outras séries pesquisadas foram semelhantes às dos alunos da 7ª série, já descritas.

4.5.2.4 E4 - “Números sobrepostos”

A característica principal do uso dessa estratégia é o fato de o aluno ter tratado a fração como dois números naturais e distintos e que serão apenas separados por um traço.

Um exemplo que caracteriza essa estratégia é o da situação-problema com significado quociente com quantidade discreta, que se vê comparando-se as respostas do aluno Raf (GI) às respostas do aluno Pie (GII), ambos da 8ª série, com relação ao problema já descrito.

Grupo I	Grupo II
P: Quantos adesivos cada criança ganhará?	P: Quantos adesivos cada criança ganhará?

Raf: Três , porque três vezes quatro é doze.	Pie: Três, porque três vezes quatro é doze.
P: Que fração você usaria para representar essa divisão?	P: Que fração você usaria para representar essa divisão?
Raf: $\frac{12}{4}$ porque está dividindo 12 adesivos para 4 crianças.	Pie: $\frac{3}{4}$
	P: Três quartos? Você poderia explicar como chegou a três quartos?
	Pie: Porque eu tenho três adesivos para cada crianças.

A resposta do aluno Pie, 8ª série, Grupo II, demonstra claramente essa estratégia, uma vez que transfere as idéias construídas dos números naturais para o número racional, referindo-se às frações não como um número, mas como números sobrepostos. Como a construção do sistema numérico do conjunto dos números naturais ocupa um tempo longo na escola, parece ser difícil pensar que outros sentidos podem ser representados utilizando esse mesmo sistema.

As estratégias utilizadas pelos alunos das outras séries pesquisadas foram semelhantes às dos alunos da 8ª série, já descritas.

4.5.2.5 E5 - “Utilização de operação”

É a estratégia em que o aluno, com o intuito de encontrar a resposta, procede a algum tipo de algoritmo de operação (adição, subtração, divisão ou multiplicação) entre

o numerador e o denominador.

Um exemplo que justifica essa estratégia é o da situação-problema com significado operador multiplicativo com quantidade discreta, que se visualiza comparando-se as respostas do aluno Lau (GI) às respostas do aluno Mar (GII), ambos da 7ª série.

QUESTÃO 6

Carolina tem uma coleção de 24 adesivos. A coleção de sua prima é

$\frac{2}{3}$ da sua. Quantos adesivos têm a prima de Carolina?

Grupo I	Grupo II
<p>P: Quantos adesivos tem a prima da Carolina?</p> <p>Lau: Dezesesseis adesivos (imediato)</p> <p>P: Como você pensou?</p> <p>Lau: Tive que dividir por três e multiplicar por dois. Assim, $24 : 3 = 8$ e $8 \times 2 = 16$ adesivos.</p>	<p>P: Como você pensou para chegar a essa resposta?</p> <p>Mar: Eu faria mmc e ia calcular assim</p> $24 + \frac{2}{3} = \frac{72}{3} + \frac{2}{3} = \frac{74}{3}$ <p>P: E que resposta você encontrou?</p> <p>Mar: Deu alguma coisa errada, então vou precisar dividir. Assim</p> $74 \div 3 = 24,6$ <p>mas ainda tem alguma coisa errada.</p>

A resposta apresentada pelo aluno Mar, 7ª série, Grupo II, faz-nos pensar que ele usou conhecimentos escolares descontextualizados da situação-problema para resolvê-la.

Outro exemplo que ilustra esse tipo de procedimento pode ser observado na resposta dada pelos alunos Rac (GI) e Vin (GII), ambos da 8ª série.

Grupo I	Grupo II
<p>P: Quantos adesivos tem a prima da Carolina?</p> <p>Rac: Dezesesseis adesivos (imediate)</p> <p>P: Como você pensou?</p> <p>Rac: Vinte quatro é o total, dividido por três são oito, e aí dois vezes oito é dezesesseis.</p>	<p>P: Quantos adesivos tem a prima da Carolina?</p> <p>Vin: Vinte um adesivos.</p> <p>P: Como você pensou para chegar a essa resposta?</p> <p>Vin: Eu cheguei em Vinte um porque Vinte quatro menos três dá vinte um.</p>

A resposta apresentada pelo aluno Vin, Grupo II, revela-nos a utilização dos dados do problema, obedecendo à ordem em que eles aparecem.

Reconhecemos, através destes exemplos, que um dos motivos pelos quais podem ocorrer dificuldades de aprendizagem na Matemática, além daqueles relacionados aos conteúdos, é a desconexão entre o conhecimento informal que as crianças desenvolvem espontaneamente e os conhecimentos formais, que aprendem nas aulas (ORRANTIA, 2006).

As estratégias utilizadas pelos alunos das outras séries pesquisadas foram semelhantes às usadas por alunos da 7ª e da 8ª séries, já descritas.

4.5.2.6 E6 - "Parte-parte"

É aquela estratégia na qual o aluno despreza o todo envolvido, fazendo contagem das partes, sem relacioná-las com o todo.

Um exemplo que justifica essa estratégia é o da situação-problema com significado parte-todo com quantidade discreta que se percebe comparando-se as respostas do aluno Bet (GI) às respostas do aluno Dan (GII), ambos da 5ª série.

QUESTÃO 4

No material de Maria há 6 lápis coloridos e 2 lápis pretos. Que fração representa a quantidade de lápis pretos em relação ao total de lápis?

Grupo I	Grupo II
Bet: $\frac{2}{8}$ (imediato)	Dan: $\frac{2}{6}$ (imediato)
P: Como você pensou?	P: Você respondeu dois sextos. Como você pensou?
Bet: Porque são oito lápis sendo dois pretos.	Dan: Pensei que tem dois lápis pretos e seis lápis coloridos. Então a resposta é dois sextos. Quer dizer dois de seis.

Outro exemplo que ilustra esse procedimento pode ser observado nas respostas dadas pelos alunos Gus (GI) e Bru (GII), ambos da 8ª série.

Grupo I	Grupo II
Gus: $\frac{2}{8}$ (imediato)	Bru: $\frac{6}{2}$ (imediato)
P: Como você pensou?	P: Você respondeu seis meios. Como você pensou?
Gus : Porque precisa somar os lápis: são oito lápis sendo dois pretos.	Bru: Pensei que são seis lápis coloridos

	divididos por dois lápis pretos.
--	----------------------------------

Nessa situação, percebemos que a atenção do aluno estava nas partes (lápiz coloridos e lápis pretos) e não no total de lápis que estava sendo apresentado. Poderíamos, também, supor que o aluno simplesmente tenha utilizado os dados do problema, o que caracteriza a estratégia utilização/dados do problema, porém o aluno não cita essa possibilidade; ao contrário, ele fixa seu foco na quantidade, e não no enunciado.

Em seus estudos, Merlini (2005) também observou esse tipo de estratégia na relação parte-parte, tanto em quantidades discretas como contínuas. A autora afirma que o aluno procedeu à contagem da parte destacada e, em seguida, procedeu à contagem das demais partes, esquecendo-se de relacioná-las ao todo.

As estratégias utilizadas pelos alunos das outras séries pesquisadas foram semelhantes às dos alunos da 5ª e 8ª séries, já descritas.

4.5.2.7 E7 – “Contagem nos dedos”

É aquela em que o aluno utiliza a contagem nos dedos como recurso manipulativo para contagem.

Um exemplo que pode justificar essa estratégia é a situação-problema com quantidade discreta, que foi utilizada pelos alunos Ama (GII) e Vic (GII), ambos da 5ª série, para verificar a divisão de 12 adesivos para 4 crianças. A contagem nos dedos foi utilizada para contar de 4 em 4, até completar 12 adesivos.

Destaca-se que as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos ao resolverem uma situação-problema foram semelhantes, independentemente da série e que os alunos do Grupo I utilizam menos estratégias de resolução, recorrendo à utilização de recuperação de fatos na memória, apresentam tempos de respostas reduzidos e utilizam procedimentos mais desenvolvidos e mais sofisticados.

4.5.3 Situação-problema informal envolvendo medida de comprimento

A seguir apresentamos uma situação-problema informal, não utilizada na escola, abordando o significado parte-todo com quantidade contínua e explorando a medida de comprimento num contexto mais informal, partindo dos conhecimentos espontâneos dos alunos. Entregamos aos alunos uma tira de papel pardo com 1 metro de comprimento, para que medissem a largura da porta da sala de aula (os alunos não receberam a informação sobre a medida da tira).

QUESTÃO 7

Encontre a medida que representa a largura da porta da sala de aula, utilizando uma tira de papel.

As estratégias mais utilizadas pelos alunos dos dois grupos estão descritas a seguir.

Grupo I	Grupo II
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dobraram toda a tira pela parte que sobrou. A tira tem sete partes e a porta ocupou seis. Então a porta mede $\frac{6}{7}$ da tira de papel. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dobraram toda a tira pela parte que sobrou. A tira tem sete partes e a porta ocupou seis. Então a porta mede $\frac{6}{7}$ da tira de papel. ▪ Dobraram a tira no comprimento da porta , mediram com palmos a parte que sobrou, verificaram quantos palmos tinha a tira toda. Tem 7 palmos a tira toda e a porta 6. Então a porta mede $\frac{6}{7}$ da tira de papel. ▪ Dobraram toda a tira por um mesmo tamanho. A tira inteira tem 36 dessas partes. Voltaram e compararam com a porta. Sobraram cinco partes. Então a porta mede $\frac{31}{36}$.

Os alunos dos grupos I e II, iniciaram a atividade comparando a tira com a porta, marcando ou dobrando o tamanho da largura da porta na tira e dizendo que a porta tinha menos que uma tira. Perguntamos como poderiam quantificar essa medida, encontrando um número que indicasse o tamanho da largura da porta. Os alunos perguntaram se poderiam dobrar a tira, e foi então, que perceberam que dividindo a tira,

encontrariam subdivisões para poder encontrar uma representação mais próxima possível da largura da porta.

Percebemos que os alunos dos dois grupos encontraram uma estratégia semelhante para resolver a situação-problema sem auxílio de instrumento de medida formal. A necessidade de dividir, dobrando a tira em várias partes iguais, usando seu conhecimento informal e representações simbólicas, possibilitou aos alunos que realizassem conexões espontâneas para resolver o problema proposto. Observamos, na ação de dividir em partes iguais a tira e logo após reconstruir a unidade, uma maneira de entender o processo de aprendizagem e a noção de compreensão das frações realizadas pelos alunos (LLINARES,2003).

Tal situação nos leva a concluir que o desempenho dos alunos dos dois grupos se aproxima em situações não-escolares.

4.5.4 Comparação entre os dois Grupos

Constatamos que os dois grupos de alunos apresentaram estratégias comuns de resolução das situações-problema e destacamos como diferença entre eles o uso da recuperação de fatos na memória, utilizada pelo grupo com bom desempenho, o que facilita a resolução de problemas mais complexos.

Percebemos que os alunos com bom desempenho mostram maior facilidade na recuperação de fatos na memória, uma velocidade de execução de estratégias, utilizando estratégias mais desenvolvidas de maneira mais eficaz, e agilidade com cálculos mentais, resultado este encontrado em estudos semelhantes envolvendo

outros conceitos (ORRANTIA, 2006). Esses alunos dispõem, em seu repertório, em determinado momento de seu desenvolvimento, as competências necessárias à resolução relativamente imediata da situação (VERGNAUD, 1990).

Verificamos que, apesar de os grupos apresentarem estratégias comuns de resolução, o grupo com baixo desempenho apresenta diversidade de uso de estratégias, necessita de maior tempo para resolver cada problema, utiliza material de apoio, apresenta estratégias de recuperação de fatos na memória com tempos de respostas mais lentos e de maneira não automática, resultado este encontrado em estudos semelhantes envolvendo outros conceitos (ORRANTIA, 2006). Os alunos desse grupo não dispõem de todas as competências necessárias, o que os obriga a um tempo maior de reflexão e exploração, a hesitações, tentativas frustradas que os levam, eventualmente, ao sucesso ou ao fracasso (VERGNAUD, 1990).

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) nos permite compreender que os sujeitos, frente a uma nova situação, mobilizam o conhecimento desenvolvido em suas experiências em situações anteriores e tentam adaptá-los a novas situações.

A situação-problema proposta tem a ver com o contexto no qual o problema encontra-se inserido, de forma a contribuir para que os conceitos presentes nessa situação ganhem significado (VERGNAUD, 1990).

Conforme a classificação já descrita por Nunes *et al* (2003), as crianças, notadamente as de baixo desempenho, utilizam diferentes estratégias para resolver as situações propostas.

Observamos que os dois grupos de alunos obtiveram menor índice de acertos na resolução dos problemas envolvendo as quantidades discretas. Como já referimos, tal resultado pode ser decorrente do enfoque de ensino que se dá a situações que abordam quantidades contínuas exclusivamente.

A representação de quantidades contínuas e discretas envolvem situações distintas. Quando os objetos a serem divididos em partes iguais são divisíveis,

contínuos, as frações surgem de maneira “natural”, como o resultado de uma divisão indicada, sempre que essa repartição não for possível no conjunto dos números inteiros. Podemos citar, como exemplo, a situação de dividir dois chocolates entre três crianças, que pode ser representada pelo número fracionário $\frac{2}{3}$.

As quantidades discretas caracterizam um novo tipo de problema, como, por exemplo, quando doze adesivos precisam ser divididos igualmente entre quatro crianças, pois, se um adesivo for dividido em pedaços, esses pedaços deixarão de ser adesivos, o que não ocorre com os chocolates. Torna-se impossível representar uma situação quociente envolvendo quantidades discretas onde o resultado seja uma fração própria (menor que 1).

Com as quantidades discretas, é possível dividir um conjunto em partes iguais, se o número de partes considerado for um divisor do número de elementos desse conjunto. Nesse caso, a divisão terá sempre como resposta um número inteiro. Em uma situação em que quinze bolinhas, que não podem ser divididas (pois deixarão de ser bolinhas), forem repartidas igualmente entre três crianças, a operação de divisão, que pode ser representada através da fração $\frac{15}{3}$, também pode ser expressa pelo número inteiro 5.

Formular a resposta dessa maneira pressupõe que o sujeito já disponha, pelo menos como invariantes operatórios, dos esquemas de pensamento que caracterizam o que Caraça (2003) denominou “princípio da extensão”. Esse se manifesta na compreensão de que as mesmas operações que conduzem a números racionais fracionários podem conduzir, em casos particulares, a números inteiros, característica do fato de que o conjunto dos números racionais contém o conjunto dos números inteiros.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que as invariáveis que distinguem os números racionais dos números inteiros são identificadas porque os números racionais são números produzidos por divisões.

Analisamos as peculiaridades que envolvem os problemas com quantidades discretas em situações de partição, em que ocorre a correspondência termo-a-termo, e percebemos que eles requerem algumas operações de pensamento mais elaboradas do que no caso dos problemas com as quantidades contínuas, em que ocorrem relações parte-todo, para serem entendidos no conjunto dos números racionais fracionários. Os resultados da divisão de quantidades discretas seriam subconjuntos e os alunos poderiam raciocinar sobre a relação inversa entre quociente e divisor. Neste contexto, os resultados de divisões com quantidades contínuas seriam frações (Nunes e Bryant, 1997).

Destacamos que muitos alunos de 7^a e 8^a séries utilizaram conhecimentos escolares para resolver as situações-problema. Esses conhecimentos escolares, quando descontextualizados, fizeram com que, em algumas situações, os alunos mostrassem dificuldades significativas em perceber o resultado da divisão e a parte a ser dividida.

Os alunos da 4^a série demonstraram, a partir da instrução recebida sobre fração, ter utilizado sua compreensão sobre o conhecimento matemático, gerando o conhecimento que ainda não haviam aprendido, conforme afirmam Nunes e Bryant (1997).

Para completar essa análise, observamos que os alunos do Grupo II utilizaram um número maior de justificativas e explicações orais que tentam tornar legítimas suas respostas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Comparamos as estratégias cognitivas utilizadas por alunos com bom desempenho escolar em Matemática com as estratégias utilizadas por alunos com baixo desempenho escolar em Matemática para resolver situações-problema com números fracionários. Descrevemos e analisamos as estratégias utilizadas durante o processo de aquisição dos diferentes significados dos números fracionários: parte-todo, quociente e operador multiplicativo. Finalizamos nosso estudo com algumas considerações que julgamos necessárias, apoiadas na análise dos instrumentos aplicados.

Retomamos nossa questão de pesquisa - “Crianças com bom desempenho na Matemática usam preferencialmente determinadas estratégias cognitivas, diferentes daquelas utilizadas por crianças com baixo desempenho?” - e constatamos, na análise dos resultados, que existem semelhanças no tipo de estratégias utilizadas pelos alunos dos dois grupos. Apesar de os grupos apresentarem estratégias comuns de resolução, os resultados mostram diferenças na recuperação automática de fatos na memória, que afetam a resolução de problemas mais complexos. O grupo com baixo desempenho necessita de maior tempo para resolver cada problema, utiliza material de apoio, uma grande diversidade de estratégias e recupera fatos na memória com tempos de respostas mais lentos e de maneira não automática. O grupo com bom desempenho apresentou recuperação de fatos na memória com mais frequência e rapidez, agilidade com cálculos mentais, estratégias mais simples e eficazes.

Percebemos, durante as entrevistas, que os alunos da 4ª série encontraram estratégias para resolver os problemas que não haviam formalmente estudado nas aulas de Matemática e utilizaram as mesmas estratégias que os alunos das séries mais avançadas. Podemos pensar que os conhecimentos que os alunos haviam adquirido anteriormente geraram as estratégias de solução para os conhecimentos matemáticos

que ainda não haviam aprendido formalmente.

Destacamos que a estratégia mais utilizada, a *estratégia utilização dos dados do problema*, é aquela na qual o aluno permanece ligado ao contexto do problema sem dominar as relações entre os conceitos envolvidos e tenta resolver o problema com uma operação matemática que já conhece, ou, também, utiliza a palavra “divisão”, contida no problema, para encontrar a solução. Pensamos que, para compreender os números fracionários, o aluno precisa ir dominando a estrutura multiplicativa, compreendida pelos conceitos de multiplicação e divisão, pelas relações entre esses conceitos, pelos diferentes significados, pelos invariantes operatórios que determinam a compreensão do conceito de número fracionário.

As estratégias de solução dos problemas que descrevemos evidenciam que não houve uma regularidade, pois encontramos diferentes estratégias utilizadas para um mesmo significado. Percebemos que o grupo com baixo desempenho utilizou um número maior de estratégias, representação com cálculos escritos e manipulação de material de apoio. Apontamos que, quanto maior o número de estratégias a que os alunos recorrem para solucionar o problema, mais evidente fica que eles não dispõem de uma compreensão geral do número fracionário, utilizando, em vista disso, um maior tempo de reflexão e exploração para solucionar os problemas.

Podemos afirmar que os alunos com bom desempenho dominam a linguagem matemática, utilizam as propriedades do conceito de fração e apresentam um nível de conhecimento mais avançado e elaborado, o que lhes propicia maior facilidade na recuperação de fatos na memória, uma maior velocidade de execução de estratégias utilizando procedimentos mais desenvolvidos, de maneira eficaz e apresentando agilidade com cálculos mentais.

Realizando uma análise geral das estratégias que os alunos utilizaram, verificamos que nem sempre o uso de estratégias para resolver um problema auxiliou na compreensão da situação e na solução correta. Percebemos que as justificativas que os alunos apresentaram para uma solução, muitas vezes estavam baseadas em uma regra formal escolarizada não compreendida, que nem sempre os ajudou a

encontrar a solução correta para o problema.

Outro aspecto importante a apontar diz respeito ao uso de material manipulativo, que algumas vezes ajudou os alunos a encontrarem a solução para o problema. Tal recurso, porém, nem sempre foi utilizado pelos alunos que não conseguiam resolver o problema, não sendo, portanto, uma ferramenta dos alunos que encontram dificuldade em resolver os problemas.

Em relação à nossa segunda questão de pesquisa - “Que implicações pedagógicas as estratégias cognitivas observadas trazem para o ensino dos números fracionários?” - pensamos que o ensino de frações privilegia alguns significados como parte-todo e operador multiplicativo e percebemos a necessidade de estabelecer uma conexão entre o conhecimento cotidiano e o conhecimento escolar, explorando o conceito de fração na resolução de problemas com divisão, com quantidades contínuas e discretas, em que a quantidade a ser distribuída e o número de receptores são conhecidos e não apenas representações estáticas parte-todo. A utilização dos diferentes significados das frações pode contribuir para essa relação entre conhecimento cotidiano e conhecimento escolar. Lembramos que os alunos dos dois grupos utilizaram estratégia semelhante na resolução da situação-problema informal, o que nos leva a pensar que esse tipo de situação deveria ser o ponto de partida do ensino de frações.

Destacamos a importância do papel do professor como educador matemático e a necessidade de ele ter conhecimento sobre como ocorre a aprendizagem matemática, ampliando seus conhecimentos sobre os processos de aprendizagem dos alunos e inserindo sua prática pedagógica num contexto mais amplo e significativo.

Apontamos a necessidade de o ensino explorar a aquisição dos números fracionários em várias situações e em diferentes contextos, de modo a diversificarem-se as experiências, estabelecerem-se relações entre os conhecimentos prévios e os novos, valorizarem-se as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos, promoverem-se interações entre eles para se observarem suas estratégias, possibilitando um avanço no sentido de estratégias mais eficientes e econômicas.

Para que o aluno compreenda o conceito de número fracionário, entendemos ser preciso que ele se familiarize com os novos símbolos e as novas exigências cognitivas dos diferentes significados: parte-todo, quociente, número, medida e operador multiplicativo e perceba que esses novos números e operações ampliam os significados construídos com os números naturais.

Para os professores a importância de conhecer os diferentes significados dos números fracionários está em propor uma variedade de situações desafiadoras aos alunos, que provoquem conflitos cognitivos e transformem procedimentos em ferramentas de pensamento. Este estudo nos mostra que é necessário, então, que os alunos tenham tempo para integrar os diferentes significados, com seus símbolos e suas representações, considerando um ensino efetivo e uma aprendizagem significativa, que, progressivamente, reverta o quadro de dificuldades no ensino dos números fracionários.

REFERÊNCIAS

- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2003.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1997.
- BUTTERWORTH, B. The development of arithmetical abilities. **Journal of Child Psychology and Psychiatry**, 46: 1; p. 3-18, 2005.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2003.
- DORNELES, B. V. Obstáculos cognitivos na aprendizagem matemática inicial: a contagem, as operações iniciais e os diferentes sentidos de número. In: **Aprendizagem: Tramas do conhecimento, do saber e da subjetividade**. Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2006, p. 131-143.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- EMPSON, S. Equal sharing and shared meaning: The development of fractions concepts in first-grade classroom. **Cognition and instruction**, 17: 3, p. 283-342, 1999.
- GEARY, D. C. Mathematics and Learning Disabilities. **Journal of Learning Disabilities**. Chicago, v. 37, n.1, p. 4-15, 2004.
- IZQUIERDO, I. **Memória**. Porto Alegre: Artmed, 2002.
- LLINARES, S. Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. In: CHAMORRO, Maria del Carmen (Coord.) **Didáctica de las Matemáticas para Primaria**. Madrid, España: Pearson Educación, 2003. Cap.7, p.187-220.
- MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
- MINAYO, M.C.S. **O desafio do conhecimento**: pesquisa qualitativa em saúde. São Paulo: Hucitec: Abrasco, 2002.

NUNES, T; CAMPOS, T; MAGINA, S; BRYANT, P. **Educação Matemática 1: números e operações numéricas**. São Paulo: Cortez, 2005.

NUNES, T. *et al.* **The effect of situations on children's understanding of fractions**. Trabalho apresentado à British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, jun., 2003.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

ORRANTIA, J. Dificuldades em el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. **Psicopedagogia**, v. 23, n. 71, p. 158-180, 2006.

ORRANTIA, J.; MARTINEZ, J.; MORÁN, M. *et al.* Dificultades em el aprendizaje de la Aritmética: um analisis desde los modelos cronométricos. **Cognitiva**, v.14, n.2, p. 183-201, 2002.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SAEB: Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica. Disponível em: <<http://www.inep.gov.br/saeb>>. Acesso em: 11 maio 2006.

VERGNAUD, G. La theorie des champs conceptuels. In: BRUN, J. **Didatique des mathématiques**. Paris: Delachaux et Niestlé, 1996.

_____. Epistemology and psychology of mathematics education. In: KILPATRICK, J. E Neshier, P. **Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education**. New York: Cambridge University Press, 1990, p. 14-30.

_____. Multiplicative Structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. **Research agenda in mathematics education: number concepts and operations in middle grades**. Hillsdale: Laurende Erlbaum , 1988, p. 141-161.

_____. **L'enfant, la mathématique et al réalité**. 3.ed. Berne: Peter Lang, 1985.

_____. Multiplicative structures. In: **Acquisition of mathematics concepts and processes**. London: Academic Press, 1983, p.127-174.

_____. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In: CARPENTER, T.P.; MOSER, J.M.; ROMBERG T. A. (Orgs.). **Addition and subtraction: a cognitive perspective**. New Jersey: Lawrence Earlbau, 1982.

APÊNDICE A: TERMO DE CONSENTIMENTO



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULADDE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

TERMO DE CONSENTIMENTO

Autorizo meu (minha) filho (a) _____ a participar da pesquisa intitulada “Números Fracionários: a construção dos diferentes significados pela criança” realizada pela professora Isabel Cristina Peregrina Vasconcelos, mestranda da UFRGS, sob orientação da prof^a. Dra. Beatriz Vargas Dorneles, durante o segundo semestre de 2006.

Declaro estar ciente de que a pesquisa tem o objetivo de comparar estratégias cognitivas utilizadas por alunos de 4^a série à 8^a séries do Ensino Fundamental, durante o processo de aquisição dos diferentes significados dos números fracionários.

Da mesma forma, declaro ter conhecimento de que o procedimento metodológico utilizado será a aplicação de algumas situações-problema matemáticos em entrevista individual, para que o aluno explique o seu pensamento ao resolvê-las e possa assim ser analisadas as estratégias cognitivas que ele utiliza. Será disponibilizado material manipulativo como auxiliar na representação da solução pelo aluno, assim como material para a representação escrita do seu pensamento. Este encontro será agendado e previamente combinado com a coordenação e devidamente comunicado à família. O encontro será vídeo-gravado para que possa ser descrito detalhadamente e, também, exaustivamente analisado e interpretado.

Autorizo também, a divulgação dos resultados encontrados, em forma de artigos ou vídeo.

Assinatura do Pai/Mãe ou Responsável

2006/2

APÊNDICE B: INSTRUMENTOS DE INVESTIGAÇÃO

Nome: _____

Série: _____

Idade: _____

QUESTÃO 1:

Tenho 12 adesivos e vou dividi-los igualmente entre 4 crianças.

- a) Quantos adesivos cada criança ganhará?
- b) Que fração representa esta divisão?

QUESTÃO 2:

Duas barras de chocolate foram divididas igualmente entre 3 crianças.

- a) Cada criança come um chocolate inteiro? () Sim () Não
- b) Cada criança receberá pelo menos metade de um chocolate? () Sim () Não
- c) Qual a fração de chocolate que cada criança receberá?

QUESTÃO 3

Uma barra de chocolate foi dividida em 5 partes iguais.

Maria comeu 3 dessas partes. Que fração da barra representa o que Maria comeu?

QUESTÃO 4:

No material de Maria há 6 lápis coloridos e 2 lápis pretos.
Que fração representa a quantidade de lápis pretos em relação ao total de lápis?

QUESTÃO 5:

Maria partiu o chocolate e comeu $\frac{3}{4}$ dele. Desenha o chocolate e mostra quanto Maria comeu.

QUESTÃO 6:

Carolina tem uma coleção de 24 adesivos. A coleção de sua prima é $\frac{2}{3}$ da sua. Quantos adesivos têm a prima de Carolina?

QUESTÃO 7:

Encontre a medida que representa a largura da porta da sala de aula utilizando uma tira de papel.

APÊNDICE C: TABELA – RESULTADOS GERAIS OBTIDOS NA RESOLUÇÃO DOS SEIS PROBLEMAS

Estratégia		Bom desempenho					Total Bom	Baixo desempenho					Total Baixo	Total Geral
		4ª	5ª	6ª	7ª	8ª		4ª	5ª	6ª	7ª	8ª		
1. Inversão numerador/ denominador	Q1	1	1				2	3	3		1		7	9
	Q2						0		1		1		2	2
	Q3	1		1	3		5			1	2	4	7	12
	Q4				1		1		1	1		2	4	5
	Q5						0						0	0
	Q6					1	1						0	1
2. Utilização/ problema dados	Q1	2	3	1			6		1		1	1	3	9
	Q2		1				1	4			2	2	8	9
	Q3						0						0	0
	Q4	2		2		2	6	2	1	1	4	2	10	16
	Q5						0						0	0
	Q6	1		2			3			1	2		3	6
3. Denominador maior que o numerador	Q1		1				1			2			2	3
	Q2						0						0	0
	Q3						0						0	0
	Q4	2					2						0	2
	Q5						0	2					2	2
	Q6						0						0	0
4. Números sobrepostos	Q1						0						0	0
	Q2						0		1				1	1
	Q3						0						0	0
	Q4						0	1				1	2	2
	Q5						0					1	1	1
	Q6						0	1		1			2	2
5. Utilização de operação	Q1						0						0	0
	Q2			1			1			3			3	4
	Q3						0	1	1		1		3	3
	Q4						0						0	0
	Q5						0						0	0
	Q6			2	3		5			3	1	3	7	12
6. Parte-parte	Q1						0						0	0
	Q2						0						0	0
	Q3						0						0	0
	Q4						0						0	0
	Q5						0				1		1	1
	Q6						0	2					2	2
7. Contagem nos dedos	Q1						0						0	0
	Q2						0						0	0
	Q3						0						0	0
	Q4						0						0	0
	Q5						0						0	0
	Q6						0	2	3				5	5
8. Respostas Corretas	Q1	1		4	5	5	15	2		3	3	4	12	27
	Q2	3	4	4	5	5	21		3	2	3	2	10	31
	Q3	4	5	4	2	5	20	3	4	4	2	1	14	34
	Q4	1	5	3	4	3	16	2	3	3	1		9	25
	Q5	4	5	5	5	5	24	2	5	5	4	4	20	44
	Q6	3	5	1	2	4	15		2		2	2	6	21

9. Não responderam	Q1	1					1		1				1	2
	Q2	2					2	1					1	3
	Q3						0	1					1	1
	Q4						0						0	0
	Q5	1					1	1					1	2
	Q6	1					1						0	1
			30	30	30	30	30	150	30	30	30	30	30	150