Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós Graduação em Matemática

Equações de Advecção-Difusão com Aplicações às Equações de Navier-Stokes

por

Lineia Schütz

Porto Alegre, junho de 2008

Conteúdo

RESUMO

Este trabalho consiste de duas partes.

Na primeira, estendemos o resultado de Braz e Silva e Zingano [2], [3] sobre soluções $u(\cdot,t) \in C^0([0,T[, L^p(\mathbb{R}^n))$ de equações de advecção-difusão em meios heterogêneos para classes mais gerais de equações parabólicas, aplicando os resultados às equações de Navier-Stokes incompressíveis no plano formuladas em termos da vorticidade do escoamento. Em particular, estabelecemos estimativas mostrando o decaimento em certas normas do campo de velocidade $u(\cdot,t)$ em caso de escoamentos de energia infinita.

Na segunda parte, consideramos as equações de Navier-Stokes em dimensão $n = 2,3$ examinando soluções $u(\cdot,t)$ de energia finita. Inicialmente, obtemos uma nova derivação, mais simples, do resultado obtido originalmente por Kato [20] estabelecendo o decaimento assintótico ($t \to \infty$) de $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, para estados iniciais $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ (com divergente nulo) arbitrários. Na linha deste argumento obtemos uma formulação mais forte dos resultados fundamentais de Wiegner [36] relacionando $u(\cdot,t)$ com soluções $e^{\nu\Delta t}u_0$ da equação do calor, adaptando o método recentemente introduzido em [22], [23] para a derivação destes resultados. O método de [22], [23] também é utilizado para estabelecermos (dimensão n=3) que, ocorrendo "blow-up" de $u(\cdot,t)$ em tempo finito t_*, necessariamente $t_* < 0.159\|u_0\|^4_{L^p(\mathbb{R}^n)}\nu^{-5}$, sendo ν a viscosidade dinâmica do escoamento.

ABSTRACT

In the first part of the this work, we extend results by Braz e Silva e Zingano [2], [3] concerning L^p solutions $u(\cdot,t) \in C^0([0,T[, L^p(\mathbb{R}^n))$ of advection-diffusion equations in heterogeneous media to broader classes of quasilinear parabolic equations, applying the results to incompressible Navier-Stokes flows in the plane by way of the vorticity formulation. In particular, we obtain some decay rates (as $t \to \infty$) for certain norms of the velocity field $u(\cdot,t)$ in case of flow with infinity energy.

In the second part, we consider the Navier-Stokes equations in dimension $n = 2,3$ and examine solutions $u(\cdot,t)$ with finite energy. First, we give a new (and simpler) derivation of the time asymptotic result originally obtained by Kato [20] and Masuda [28] showing the decay of the L^2 norm of divergence-free, finite-energy solutions. Following these footsteps, we give a stronger formulation of the fundamental results obtained by Wiegner [36] relating the velocity field $u(\cdot,t)$ to solutions $e^{\nu\Delta t}u_0$ of the heat equation, adapting the approach introduced in [22], [23] for the derivation of Wiergner's results. The analysis in [22], [23] is also used to obtain an interesting bound for the blow-up time t_* in $3-D$ flows, in case solutions cease to be smooth: one must have $t_* < 0.159\|u_0\|^4_{L^p(\mathbb{R}^n)}\nu^{-5}$, where ν is the dynamic viscosity.

INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste de duas partes.

Na primeira parte, formada pelos capítulos 1, 2 e 3, desenvolvemos vários resultados sobre soluções $u(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ de equações parabólicas quase-lineares da forma

$$u_t + \operatorname{div}(b(x,t,u)u) = \operatorname{div}(A(x,t,u)\nabla u) + c(x,t,u)u, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \;\; t > 0, \tag{1}$$

associadas a estados iniciais

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \tag{2}$$

para certo $1 \leq p < \infty$. Aqui A, b, c denotam funções suaves dadas, satisfazendo condições apropriadas conforme os vários capítulos; em particular, supomos sempre $A(x,t,u)$ positiva definida, com

$$\langle A(x,t,u)\xi, \xi\rangle \geq \mu(t)|\xi|^2, \qquad \forall \xi \in RRn^n \tag{3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$,$t > 0$ e $u \in \mathbb{R}$, com $\mu(t) > 0$ para cada t [1], onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno e $|\cdot|$ a norma Euclidiana. Supondo, por exemplo,

$$A, \;\; b, \;\; c, \;\; \frac{\partial c}{\partial u}, \;\; \frac{\partial \vec{b}}{\partial x_j}, \;\; \frac{\partial b}{\partial u}, \;\; \frac{\partial^2 b}{\partial x_j \partial u}, \;\; \frac{\partial A}{\partial x_j}, \;\; \frac{\partial A}{\partial u}, \;\; \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial u}, \;\; \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} \tag{4}$$

limitadas para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, $u \in [-M, M]$, para cada $M > 0$, segue de [25], Capítulo 5, e das estimativas aqui obtidas que o problema (1), (2) possui soluções $u(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^n)$ que são limitadas para $t > 0$, uniformemente em compactos $\subseteq]0,T]$ (ou seja, $u(\cdot,t) \in L^\infty(]0,T], L^\infty(\mathbb{R}^n)))$ e são estas soluções que examinamos no trabalho.

No Capítulo 1, consideramos o problema dado por

$$w_t + (u \cdot \nabla)w = \nu \Delta w, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \;\; t > 0, \tag{5}$$

[1]No capítulo 1, considera-se $\mu(t) = \mu > 0$ constante

$$w(\cdot,0) = w_0 \in L^p(\mathbb{R}^2), \tag{6}$$

onde $u(\cdot,0)$ tem divergente nulo e é dado pela chamada Lei de Biot-Savart [6],

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x-y)w(y,t)dy, \tag{7}$$

onde

$$K(\xi) = \frac{1}{2\pi|\xi|^2} \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Aqui ν denota uma constante positiva dada.

As equações (5), (6), (7), (8) correspondem à formulação de vorticidade para escoamentos viscosos incompressíveis no plano, sendo $u(x,t)$ a velocidade de escoamento no ponto x e instante t e $w(x,t) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ a vorticidade correspondente [5], [6], [21], [24]. Note que a equação (5) pode ser escrita como

$$w_t + \operatorname{div}(wu) = \nu \Delta w, \quad x \in \mathbb{R}^2, \ t > 0, \tag{9}$$

e, conhecendo-se porpriedades de $w(\cdot,t)$ pode-se esperar obter informações sobre $u(\cdot,t)$ via (7),(ver por exemplo, [5], [21]).

Na seção 1.3, aplicamos os resulados obtidos sobre $w(\cdot,t)$, solução de (5), para investigar o campo de velocidade $u(\cdot,t)$. Utilizando o teorema de Sobolev-Thorin [2], [35], resulta que

$$u(\cdot,t) \in L^q(\mathbb{R}^2), \quad q \in \frac{2p}{2-p}, \tag{10}$$

supondo $1 < p < 2$, com

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq K(q)\|w(\cdot,t)\|_{L^{\frac{2q}{q+2}}(\mathbb{R}^2)} = O(1)t^{-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \tag{11}$$

para todo $q \geq \frac{2p}{2-p}$ finito e certa constante $K(q)$ dependendo de q. Além disso, estimando o item (7) por um argumento direto, mostramos, no final da seção 1.3, que $u(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ quando $1 \leq p < 2$, tendo-se

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq K(q)\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} t^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}, \quad t > 0, \tag{12}$$

[2]Por conveniência, incluimos uma porva do teorema de Sobolev-Thorin no Apêndice 1, seguindo [17], [29], [32], [33]

para cada constante $K(p)$ dependendo de p.

No Capítulo 2 , adaptamos o método desenvolvido em [2], [3], para o caso do problema

$$u_t + div(b(x,t,u)u) = div(A(x,t,u)\nabla(u)) + c(x,t,u)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \tag{13}$$

$$u(\cdot,0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{14}$$

onde se supõe ademais,

$$c(x,t,u) \leq 0 \tag{15}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q div(b(x,t,\varphi(x))dx \geq 0, \quad \forall\, q \geq p \tag{16}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. A condição (**??**) é introduzida em [2] e usada aqui para substituir a condição sobre $b(x,t,u)$ utilizada em [3], descrita por

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_j}(x,t,u) \geq 0 \quad \forall\ x,t,u. \tag{17}$$

onde $b_1, ..., b_n$ denotam as componentes da velocidade de advecção $\vec{b}$. Adaptando o procedimento em [3], obtemos resulatdos similares, como a estimativa fundamental

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p)\Big(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}}\Big)^{\frac{1}{p}} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^p)} t^{-\frac{1}{p}\left(1+\frac{n}{2}\right)} \tag{18}$$

para todo $t > 0$, onde $\mu(t)$ é dada em (3) e $K(n,p)$ é certa constante que depende apenas dos parâmentros n e p do problema. Como em [3], este resultado é utilizado para estabelecer a unicidade de soluções em $C^0([0,\infty[, L^P(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty_{loc}(]0,\infty[, L^\infty(\mathbb{R}^n))$.

No Capítulo 3, estendemos a análise apresentada em [2], [3] para o problema mais geral

$$u_t + div(b(x,t,u)u) = div(A(x,t,u)\nabla(u)) + c(x,t,u)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \tag{19}$$

$$u(\cdot,0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{20}$$

onde b, c são supostas limitadas, em substituição às condições (15), (16), (17) acima. Novamente, supondo (3) consegue-se estimar $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ em termos de $\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, na forma

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,p,T)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}(\nu t)^{-\frac{n}{2p}} \tag{21}$$

para todo $0 < t < T$, sendo $\nu = inf_{0<t<T}\ \mu(t)$ e $K(n,p,T)$ uma constante que depende apenas dos valores n, p, T dados. Na seção 3.3, generalizamos o procedimento utilizado em [3] para estabelecer a unicidade de soluções a partir de estimativas do tipo (21); em particular, torna-se claro que tal unicidade pode ser obtida diretamente da desigualdade de energia descrita no Teorema 3.2.2, mais simples de ser obtida que a desigualdade(21) acima.

Na segunda parte deste trabalho, voltamos nossa atenção para a equação de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^n$ (sendo $n = 2, 3$),

$$u_t + (u\cdot\nabla)u + \frac{1}{\delta}\nabla p = \nu\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \ t > 0. \tag{22}$$

$$\mathrm{div}(u) = 0, \tag{23}$$

supondo $u(\cdot,0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, onde δ, ν denotam constantes positivas. Nestas condições, existe $T > 0$ (dependendo de u_0) tal que o problema (22), (23) admite uma única solução $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n\times]0,T[)$, $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n\times]0,T[)$, com $T = \infty$ no caso $n = 2$ (ver [22], [23], [24]). Para $n = 3$, o problema admite solução fraca $u(\cdot,t)$, $p(\cdot,t)$ global (i.e, $T = \infty$), que se torna clássica (C^∞) para t suficientemente grande (ver [22], [23], [26], [36]). Em 1986, Wiegner obteve o decaimento

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\gamma}), \tag{24}$$

para $0 < \gamma \leq \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$, supondo que se tenha

$$\|e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\gamma}), \tag{25}$$

onde $v(\cdot,t) = e^{\nu\Delta t}u_0$ denota a solução da equação do calor

$$v_t = \nu\Delta v, \quad t > 0, \tag{26}$$

associada ao estado inicial considerado $v(\cdot,0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Na seção 4.3, mostramos que, nas hipóteses acima, tem-se o resultado mais forte

$$t^\gamma \|u(\cdot,t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad \textit{quando } t \to \infty, \tag{27}$$

no caso $0 < \gamma < \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$. Este resulado é obtido adaptando o argumento desenvolvido em [22], [23] para a obtenção de (24), (25), (26). Na mesma linha, obtemos, na seção 4.4, uma derivação elementar para

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty, \tag{28}$$

no caso geral $u(\cdot,0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, um resulado obtido originalmente por Kato [20] e sugerido no trabalho fundamental de Leray [18]. Portanto, a propriedade (27) é também válida no caso $\gamma = 0$, mas não conseguimos determinar sua velocidade no caso limite $\frac{n}{4} + \frac{1}{2}$, aqui omitido.

Finalmente, na seção 4.5, no caso $3-D$, aproveitamos o resultado obtido em [22], [23] sobre a monotonicidade eventual de $\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$[3] para mostrarmos que se $u(\cdot,t)$ experimentar "blow-up"em tempo finito $t_* > 0$ [4], então, necessariamente deve valer

$$t_* < 0.159\|u_0\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}\nu^{-5}, \tag{29}$$

onde $\nu > 0$ é a viscosidade dinâmica. Para a obtenção da constante 0.159, procuramos determinar uma constante K razoavelmente pequena para a desigualdade de Nirenberg-Gagliardo [13], [34],

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \le K\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u(\cdot,t)\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad u \in H^2(\mathbb{R}^3), \tag{30}$$

modificando a derivação encontrada em [34], Capítulo 13, para se adequar as nossos propósitos.

---

[3] Para todo $t_0 > 0$ suficientemente grande (dependendo de u_0), $\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$, conforme [22], [23], decresce em $[t_0,\infty[$, com $\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$ ao $t \to \infty$.

[4] Este "blow-up"é caracterizado por $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \to \infty$ ao $t \to t_*$ [24]

1 ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

1.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estudar algumas propriedades das soluções $u(\cdot,t)$ do problema de Navier-Stokes incompressível em $\mathbb{R}^2$ aplicando, para a vorticidade, as técnicas que serão discutidas em maior generalidade nos capítulos 2 e 3 deste trabalho. Desta forma, as demonstrações dos resultados apresentados na seção 1.2 estão feitas em detalhes nos capítulos 2 e 3.

Mais precisamente, as equações de Navier-Stokes de um fluido incompressível em $\mathbb{R}^2$ de densidade constante $\rho > 0$ são dadas por

$$u_t + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta u, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}(u) = 0, \tag{1.2}$$

onde ρ é a densidade do fluido, $u(\cdot,t)$ é o campo de velocidade e $p(\cdot,t)$, a pressão, ν é a viscosidade dinâmica e div é o divergente com respeito às variáveis espaciais $x = (x_1, x_2)$.

O rotacional da equação (1.1) nos dá a equação da vorticidade

$$w_t + (u \cdot \nabla)w = \nu\Delta w, \tag{1.3}$$

onde

$$w = \partial_{x_1}u_2 - \partial_{x_2}u_1 \tag{1.4}$$

é a vorticidade.

Por (1.2), existe potencial ψ tal que $u_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}$ e $u_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$, ou seja,

$$-\Delta\psi = w$$

. Resolvendo esta equação com a condição de fronteira $\nabla\psi \to 0$ ao ∞ obtemos

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x-y)w(y,t)dy, \tag{1.5}$$

onde

$$K(x) = \frac{1}{2\pi|x|^2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Assim, através de estimativas para $w(\cdot,t)$ e a Lei de Biot-Savart (1.5), (1.6) acima, obtemos informações para a solução $u(\cdot,t)$ do problema de Navier-Stokes incompressível em duas dimensões.

Na seção 1.2, derivamos propriedades para $w(\cdot,t)$ solução do problema descrito por (1.8), (1.9) e (1.10), seguindo um procedimento análogo ao desenvolvido em [2], [3]. Começamos observando que $\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ decresce monotonicamente com t, quando $w(\cdot,0) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ para todo $1 \leq p < \infty$. No Teorema 1.2.2 obtemos uma desigualdade de energia para a solução $w(\cdot,t)$, dado $1 \leq p < \infty$. Em seguida, no Teorema 1.2.3, mostramos que $w(\cdot,t)$ é limitada para $t > 0$, e obtemos a seguinte estimativa para a norma do sup:

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq K(p)\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}(\nu t)^{-\frac{1}{p}},$$

para certa constante $K(p)$ dependendo apenas de p. Além disso, provamos a contratividade das soluções $w(\cdot,t)$ em $L^1(\mathbb{R}^2)$. Então, como consequência das desigualdades obtidas nos teoremas citados, provamos a unicidade das soluções $w(\cdot,t)$ em $L^p(\mathbb{R}^2)$, para $1 \leq p < \infty$. Para finalizar a seção 1.2, mostramos que, para $p \geq 1$, $\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \to 0$ quando $t \to +\infty$, adaptando o argumento em [3].

Na seção 1.3, utilizando as estimativas obtidas para a vorticidade $w(\cdot,t)$, o Teorema de Thorin-Sobolev [32], [33], [35] e a Lei de Biot-Savart (1.5), (1.6), obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C(p)\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \text{ para } q = \frac{2p}{2-p} \ \textit{e}\ 1 < p < 2,$$

onde $u(\cdot,t)$ é solução do problema de Navier-Stokes incompressível em $\mathbb{R}^2$. Para $q = +\infty$, mostramos por um argumento direto, Teorema 1.3.3, que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq K\|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}(\nu t)^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.7}$$

no caso $p = 1$, e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \;\; \leq \;\; K(p,\nu)t^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},$$

para $1 < p < 2$.

1.2 Estimativas para $\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$.

Nesta seção, vamos derivar algumas propriedades de $w(\cdot,t)$, solução do problema

$$w_t + (u\cdot\nabla)w = \nu\Delta w, \tag{1.8}$$

$$\text{div} = 0, \tag{1.9}$$

para $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ e com condições iniciais em L^p dado $1 \leq p < \infty$, i.e.,

$$w(\cdot,0) = w_0 \in L^p(\mathbb{R}^2) \tag{1.10}$$

onde, div é o divergente e Δ é o laplaciano, ambos com respeito às variáveis espaciais $x = (x_1, x_2)$, $w = \nabla\times u$ é o rotacional de u e ν é uma constante positiva. Para isso, fazemos uso das chamadas *funções sinais regularizadas* [15], [24]: tomando $\varphi \in C^\infty$ função crescente e ímpar tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \geq 1, \\ 0, & \text{se} \quad x = 0, \\ -1, & \text{se} \quad x \leq -1, \end{cases} \tag{1.11}$$

considere, para cada $\delta > 0$, $\quad \varphi_\delta(x) = \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Definindo $L_\delta \in C^\infty$ por

$$L_\delta(x) = \int_0^x \varphi_\delta(\xi)d\xi, \tag{1.12}$$

temos:

$$L_\delta \geq 0, \tag{1.13}$$

$$L''_\delta \geq 0, \tag{1.14}$$

$$L_\delta(x) \to |x| \text{ quando } \delta \to 0, \tag{1.15}$$

$$L'_\delta(x) \to sgn(x) \text{ quando } \delta \to 0, \tag{1.16}$$

onde sgn denota a *função sinal.*

As idéias aplicadas nas demonstrações dos teoremas a seguir seguem a discussão em [2], [3] e são estendidas a problemas mais gerais nos capítulos 2 e 3.

Teorema 1.2.1. *Se $w(.,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^2))$, $1 \leq p < \infty$, é solução de (1.8), (1.9) e (1.10), então,*

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall t \in [0,T] \tag{1.17}$$

Prova: Seja $\Phi_\delta(\cdot) = L_\delta(\cdot)^p$, para $L_\delta(\cdot)$ definida como em (1.12). Multiplicando a equação (1.8) por $\Phi'_\delta(w)$ e integrando o resultado sobre $\mathbb{R}^2 \times [t_0, t]$, para $0 < t_0 < t \leq T$ dados, obtemos,

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi'_\delta(w) w_\tau dx d\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi'_\delta(w)(u(x,\tau)\nabla) w(x,\tau) dx d\tau \\ = \nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi'_\delta(w) \Delta w(x,\tau) dx d\tau.\end{aligned}$$

Segue do Terorema do Divergente, de (1.9) e de $\Phi'_\delta(w) w_t = \frac{d}{dt}[\Phi_\delta(w)]$ que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Phi_\delta(w(x,t)) dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_\delta(w(x,t_0)) dx - \nu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi''_\delta(w) |\nabla w(x,\tau)|^2 dx d\tau$$

Como ν é uma constante positiva e $\phi''_\delta(u) \geq 0$, fazendo $\delta \to 0$ e $t_0 \to 0$ obtemos

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \|w(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

$\square$

O resultado acima será utilizado na obtenção da desigualdade de energia a seguir, que tem papel fundamental na análise deste capítulo. Na prova a seguir, vamos utilizar a desigualdade de Sobolev (Gagliardo-Nirenberg) dada por

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_2 \|v\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|\nabla v\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad v \in C_0^\infty, \tag{1.18}$$

onde C_2 é constante (independe de v).

Teorema 1.2.2. *Se $w(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^2))$, $1 \leq p < \infty$, satisfaz (1.8), (1.9) e (1.10), então*

$$\|w(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^2)} + \frac{4\nu}{t^2}\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^2} |w(x,\tau)|^{2p-2}|\nabla(w(x,\tau))|^2 dx d\tau$$
$$\leq C_2^4\Big(\nu t\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\Big)^{-1}\|w_0\|^{2p}_{L^p(\mathbb{R}^2)} \quad \forall t \in (0,T] \qquad (1.19)$$

onde C_2 é a constante da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg dada em (1.18) acima.

Prova: Sejam $t_0 \in (0,t)$ e $\phi_\delta(\cdot) = L_\delta(\cdot)^{2p}$, para $L_\delta(\cdot)$ definida em (1.12). Multiplicando a equação (1.8) por $(t-t_0)^2\phi'_\delta(w(x,t))$, integrando o resultado sobre $\mathbb{R}^2\times[t_0,t]$, aplicando o Teorema do Divergente, a condição (1.9) e fazendo $t_0 \to 0$ obtemos

$$t^2\|w(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^2)} + 4\nu\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^2} |w(x,\tau)|^{2p-2}|\nabla(w(x,\tau))|^2 dx d\tau$$
$$= 2\int_0^t \tau \int_{\mathbb{R}^2} |w(x,\tau)|^{2p} dx d\tau$$

Considerando

$$E_p(t) = t^2\|w(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^2)} + 4\nu\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^2} |w(x,\tau)|^{2p-2}|\nabla(w(x,\tau))|^2 dx d\tau$$

e definindo $v(\cdot,t)$ como

$$v(x,t) = \begin{cases} w(x,t) & \text{se} \quad p = 1 \\ |w(x,t)|^p & \text{se} \quad p > 1. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} E_p(t) &= t^2\|v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 4\nu\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla v(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ &= 2\int_0^t \tau \int_{\mathbb{R}^2} |w(x,\tau)|^{2p} dx d\tau. \end{aligned} \qquad (1.20)$$

Pela desigualdade (1.18), temos

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_2 \|w(\cdot,t)\|^{\frac{p}{2}}_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|\nabla v(\cdot,t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.21}$$

Das desigualdades (1.17), (1.20) e da desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} t^2\|v(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 4\nu\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla v(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} d\tau \\ \leq 2C_2^2 \|w_0(\cdot,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^2)} \Big[E_p(t)\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[4\nu\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\Big]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Assim,

$$E_p(t) \leq 2C_2^2 \|w_0(\cdot,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^2)} \Big[E_p(t)\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[4\nu\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\Big]^{-\frac{1}{2}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|w(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^2)} + \frac{4\nu}{t^2}\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\int_0^t \tau^2 \int_{\mathbb{R}^n} |w(x,\tau)|^{2p-2}|\nabla(w(x,\tau))|^2 dx d\tau \leq \\ C_2^4\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)^{-1}\|w_0\|^{2p}_{L^p(\mathbb{R}^2)}(\nu t)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Por um procedimento análogo ao esquema de Moser [14], Capítulo 8, a desigualdade (1.19) pode ser usada iterativamente para obter o seguinte resultado fundamental.

Teorema 1.2.3. *Se $w(.,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^2))$, $1 \leq p < \infty$, é solução de (1.8), (1.9) e (1.10), então*

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \Big(\frac{C_2^4}{2}\Big)^{\frac{1}{p}} \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} (\nu t)^{-\frac{1}{p}} \tag{1.22}$$

Prova: Considere $t_0 = \frac{t}{2^k}$ e $t_i = t_{i-1} + \frac{t_0}{2^i}$ para $i \in 1,...,k$, k um número natural. Como, pelo teorema anterior,

$$\begin{aligned} \|w(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^2)} \leq C_2^4\Big(\nu(t-s)\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)\Big)^{-1}\|w(\cdot,s)\|^{2p}_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\ \forall\ 0 \leq s < t < T \ \ e\ \forall\ 1 \leq p \leq \infty, \end{aligned} \tag{1.23}$$

aplicando a desigualdade (1.23) para $t = t_i$ e $s = t_{i-1}$ temos

$$\|w(\cdot,t_i)\|_{L^{2^i p}(\mathbb{R}^2)} \leq \Big(C_2^4\Big)^{\frac{1}{2^i p}}\Big(1-\frac{1}{2^i p}\Big)^{-\frac{1}{2^i p}}\|w(\cdot,t_{i-1})\|_{L^{2^{i-1}p}(\mathbb{R}^2)}(\nu t)^{-\frac{1}{2^i p}}, \quad \forall\ 0 \leq i \leq k. \tag{1.24}$$

Aplicando a desigualdade (1.24) para $i = k, k-1, k-2, ..., 1$ e observando que $t_k = t$ obtemos

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^{2^k p}(\mathbb{R}^2)} \leq \Big(\frac{C_2^4}{\nu t}\Big)^{\sum_{i=1}^k\left(\frac{1}{2^i p}\right)}\prod_{i=1}^k\Big(1-\frac{1}{2^i p}\Big)^{-\frac{1}{2^i p}}\|w(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.25}$$

Mas,

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i p} = \frac{1}{p}\Big(1-\frac{1}{2^k}\Big)$$

e

$$\prod_{i=1}^k\Big(1-\frac{1}{2^i p}\Big)^{-\frac{1}{2^i p}} \leq 2^{-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\frac{1}{p}}.$$

Portanto, fazendo $k \longrightarrow +\infty$, obtemos

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \Big(\frac{C_2^4}{2}\Big)^{\frac{1}{p}}\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}(\nu t)^{-\frac{1}{p}}.$$

□

1.3 Estimativas para $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$.

Nesta seção, vamos utilizar os resultados da seção anterior para obter estimativas para $u(\cdot,t)$ dada por (1.5). Inicialmente, investigamos a seguinte questão: tendo-se $w(\cdot,t) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ em dado espaço $L^p(\mathbb{R}^2)$ [1], em que espaço $L^q(\mathbb{R}^2)$ está $u(\cdot,t)$?

[1]Pelos resultados da seção 1.2, tem-se, na verdade, $w(\cdot,t) \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, e assim $w(\cdot,t) \in L^r(\mathbb{R}^2)$

Começamos observando que, supondo $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ para $1 < p < 2$, obtem-se a desigualdade de Sobolev [[13], página 24]

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq K(p)\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \tag{1.26}$$

para $q > p$ dado por

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}. \tag{1.27}$$

É notável que se tenha também $u(\cdot,t) \in L^q(\mathbb{R}^2)$ para q dado em (1.27), supondo apenas que $w(\cdot,t) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < 2$, como obtemos abaixo utilizando o Teorema de Thorin-Sobolev. Este resultado trata de operadores singulares da forma

$$T_\lambda[f](x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda} dy, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{1.28}$$

onde $\lambda \in]0, n[$.

Teorema 1.3.1. *(Thorin-Sobolev) Se f é uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < q < \infty$, e $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} - 1$, com $0 < \lambda < n$, então $T_\lambda f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e T_λ é um operador limitado,*

$$\|T_\lambda[f]\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A(p,n,\lambda)\|f\|_{|L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\ f \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{1.29}$$

onde $A(p,n,\lambda)$ é uma constante dependendo apenas de $p, n.\lambda$.

Prova: A demostração do teorema está feita no apêndice 1, seguindo [29], [17].

Observação: o Teorema 1.3.1 no caso $n = 2$ e $\lambda = 1$ nos dá

$$\|T_\lambda[f]\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq A(p,n,\lambda)\|f\|_{|L^p(\mathbb{R}^2)} \quad \forall\ f \in L^p(\mathbb{R}^2), \tag{1.30}$$

onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ e $1 < p < 2$.

Em particular, obtemos de (1.5), (1.6) o seguinte resultado fundamental.

Teorema 1.3.2. *Se $w(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^2))$ é solução de (1.8), (1.9) e (1.10), então, para $1 < p < 2$,*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C(p)\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \tag{1.31}$$

$$\tag{1.32}$$

onde $u(\cdot,t)$ *é dada por (1.5), (1.6), e* $q = \frac{2p}{2-p}$.

Prova: Considerando $q = \frac{2p}{2-p}$ e aplicando o teorema 1.3.1 para $f(\cdot) = \frac{1}{2\pi}|w(\cdot,t)|$, $\lambda = 1$ e $n = 2$ temos

$$\frac{1}{2\pi}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|w(y,t)|}{|x-y|}dy\Big)^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{A(p)}{2\pi}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|w(y,t)|^p dy\Big)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq A(p)\|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.33}$$

$\square$

Podemos também obter o seguinte resultado para $u(\cdot,t)$, que inclui o caso $p = 1$.

Teorema 1.3.3. *Se* $w(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^2))$, $p \in [1,2)$ *é solução de (1.8), (1.9) e (1.10), então* $u(\cdot,t)$ *satisfaz*

1. *para p=1,*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \;\leq\; \Big(\frac{C_2^4}{2} + \frac{1}{2\pi}\Big)\|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}(\nu t)^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.34}$$

2. *para* $1 < p < 2$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \;\leq\; C(p)(\nu t)^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \tag{1.35}$$

onde

$$C(p) = \frac{C_2^4}{2} + (4\pi)^{-\frac{1}{p}}\Big(\frac{p-1}{2-p}\Big)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{1.36}$$

Prova: Pela Lei de Biot-Savart, (1.5) e (1.6),

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|w(y,t)|}{|x-y|}dy.$$

Assim, se $p = 1$,

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|x-y|\leq(\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y,t)|}{|x-y|}dy + \frac{1}{2\pi}\int_{|x-y|>(\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y,t)|}{|x-y|}dy \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\int_{|x-y|\leq(\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|x-y|}dy \\
&\quad + \frac{(\nu t)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}\int_{|x-y|>(\nu t)^{\frac{1}{2}}} |w(y,t)|dy \\
&\leq (\nu t)^{\frac{1}{2}}\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + \frac{(\nu t)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}\|w(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
&\underbrace{\leq}_{Teorema 1.2.3} \frac{C_2^4}{2}\|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}(\nu t)^{-\frac{1}{2}} + \frac{(\nu t)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}\|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \qquad (1.37)
\end{aligned}
$$

Como a desigualdade (1.37) vale para todo x em $\mathbb{R}^2$, então,

$$
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \Big(\frac{C_2^4}{2} + \frac{1}{2\pi}\Big)\|w_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}(\nu t)^{-\frac{1}{2}},
$$

o que prova o ítem 1.

Além disso, dado $1 < p < 2$, seja $p' = \frac{p}{p-1}$. Tomando $0 < \alpha < \frac{2}{p} - 1$, temos:

$$
\begin{aligned}
2\pi|u(x,t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|w(y,t)|}{|x-y|}dy = \int_{|x-y|\leq(\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y,t)|}{|x-y|}dy + \int_{|x-y|>(\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y,t)|}{|x-y|}dy \\
&\leq \|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\int_{|x-y|\leq(\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|x-y|}dy + \int_{|x-y|>(\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y,t)|}{|x-y|}dy \\
&\leq \|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\int_{|x-y|\leq(\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|x-y|}dy \\
&\quad + \Big(\int_{|x-y|>(\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{|w(y,t)|^p}{|x-y|^{\alpha p}}dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{|x-y|>(\nu t)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|x-y|^{(1-\alpha)p'}}dy\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq 2\pi\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}(\nu t)^{\frac{1}{2}} + \|w(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}t^{-\alpha\frac{1}{2}}\Big(2\pi\int_{(\nu t)^{\frac{1}{2}}}^{\infty} r^{(\alpha-1)p'+1}dr\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&\underbrace{\leq}_{Teorema 1.2.3} C_2^4\pi(\nu t)^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \\
&\quad + (2\pi)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\frac{t^{-\frac{1}{2}((1-\alpha)p'-2)}}{(1-\alpha)p'-2}\Big)^{\frac{1}{p'}}(\nu t)^{-\alpha\frac{1}{2}}\|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}
\qquad (1.38)
$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ obtemos o resultado. □

2 EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO EM $\mathbb{R}^N$

2.1 Introdução

Neste capítulo, adaptamos o método desenvolvido em [2], [3], vamos examinar o comportamento das soluções $u(\cdot,t)$ da equação de advecção-difusão,

$$u_t + \operatorname{div}(b(x,t,u)u) = \operatorname{div}(A(x,t,u)\nabla(u)) + c(x,t,u)u, \tag{2.1}$$

para $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, com condições iniciais em L^p, para $1 \leq p < \infty$, i.e.,

$$u(\cdot,0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{2.2}$$

onde div é o divergente com respeito às variáveis espaciais $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, e A, b, c são funções suaves como descrito na introdução, página 5, com

$$\langle A(x,t,u)\xi, \xi\rangle \geq \mu(t)|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^q div(b(x,t,u(x))dx \geq 0, \quad \forall\, q \geq 1 \tag{2.4}$$

e

$$c(x,t,u) \leq 0 \tag{2.5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, e alguma função $\mu \in C^0([0,\infty[)$ positiva, onde $\langle \cdot,\cdot \rangle$ denota o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$ e $|\cdot|$ é a norma Euclidiana. Vamos mostrar que a análise apresentada em [2], [3] pode ser aplicada neste caso, modificando apropriadamente alguns argumentos.

Na seção a seguir, derivamos algumas porpriedades das soluções $u(\cdot,t)$ do problema descrito acima. Em particular, vemos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ decresce monotonicamente com t, quando $u(\cdot,0) \in L^p$ (Teorema 2.2.1), isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t_0 \in [0,T],$$

para todo $1 \leq p < \infty$. Em seguida, obtemos a seguinte desigualdade de energia para as solução $u(\cdot,t)$, quando $1 \leq p < \infty$ (Teorema 2.2.2):

$$t^{1+\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + 2p(2p-1)\int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{2p-2}|\nabla(u(x,\tau))|^2 dxd\tau$$
$$\leq C_n^{n+2}\Big(1+\frac{n}{2}\Big)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)}\Big(\frac{2p(2p-1)}{p^2}\Big)^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|^{2p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}}d\tau \quad \forall t \in [0,T].$$

Para $p = +\infty$, pelo Teorema 2.2.3, temos que $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0$ quando $t \to +\infty$. Ademais, a $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\frac{n}{2}})$. Por fim, obtemos a unicidade das soluções do problema em questão.

2.2 Estimativas para $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Nesta seção, derivamos estimativas para as soluções $u(\cdot,t)$ do da equação de adveção-difusão (2.1), com as condições (2.2), (2.4), (2.3) e (2.5).

Vamos utilizar as funções sinais regularizadas definidas no capítulo anterior (seção 1.2).

Teorema 2.2.1. *(Princípio do máximo) Se $u(.,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ é solução de (2.1) e (2.2), então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t \in [0,T] \tag{2.6}$$

Prova: Seja $\Phi_\delta(\cdot) = L_\delta(\cdot)^p$, para $L_\delta(\cdot)$ definida em (1.12). Multiplicando a equação (2.1) por $\Phi'_\delta(u)$ e integrando o resultado sobre $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$, para $0 < t_0 < t$ dados, obtemos,

$$\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi'_\delta(u)u_\tau dxd\tau + \int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi'_\delta(u)div(b(x,\tau,u)u)dxd\tau =$$
$$\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi'_\delta(u)div(A(x,\tau,u)\nabla(u))dxd\tau + \int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi'_\delta(u)c(x,\tau,u)udxd\tau.$$

Aplicando o Teorema do Divergente e observando que $\Phi'_\delta(u)u_t = \frac{d}{dt}[\Phi_\delta(u)]$ temos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta(u(x,t))dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta(u(x,t_0)dx + \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) div(b(x,\tau,u)u)dxd\tau =$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u)\langle\nabla(u),(A(x,\tau,u)\nabla(u)\rangle dxd\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u)c(x,\tau,u)udxd\tau.$$

Segue, de (2.3) e (1.14), que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta(u(x,t))dx \leq & -\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) div(b(x,\tau,u)u)dxd\tau + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta(u(x,t_0))dx \\ & + \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u)c(x,\tau,u)udxd\tau.\end{aligned}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) div(b(x,\tau,u)u)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u)\ \ u\ \ div(b(x,\tau,u)dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\delta(u) div(b(x,\tau,u)dx \quad (2.7)$$

fazendo $\delta \to 0$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx \leq & \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^p dx + p\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} c(x,\tau,u)|u|^p dxd\tau \\ & +(1-p)\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^p div(b(x,\tau,u))dxd\tau.\end{aligned}$$

Assim, como de (2.4) e (2.5)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t_0)|^p dx \leq 0$$

e

$$(1-p)\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^p div(b(x,\tau,u))dxd\tau \leq 0,$$

fazendo $t_0 \to 0$, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

No resultado a seguir vamos fazer uso da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2}{n+2}} \|\nabla v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{n+2}} \quad (2.8)$$

Teorema 2.2.2. *Se $u(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^n))$, $1 \le p < \infty$, é solução de (2.1) e (2.2), então*

$$t^{1+\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + 2p(2p-1)\int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}}\mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{2p-2}|\nabla(u(x,\tau))|^2 dxd\tau$$
$$\le C_n^{n+2}\Big(1+\frac{n}{2}\Big)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)}\Big(\frac{2p(2p-1)}{p^2}\Big)^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|^{2p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}}d\tau \quad \forall t \in [0,T] \tag{2.9}$$

onde C_n é a constante da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.8).

Prova: Sejam $t_0 \in (0,t]$ e $\phi_\delta(v) = L_\delta(v)^{2p}$, para $L_\delta(\cdot)$ definida em (1.12). Multiplicando a equação (2.1) por $(t-t_0)^{1+\frac{n}{2}}\phi'_\delta(u(x,t))$ e integrando o resultado sobre $\mathbb{R}^n \times [t_0,t]$ obtemos

$$\begin{aligned}(t-t_0)^{1+\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t))^{2p}dx + \int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)^{1+\frac{n}{2}}\phi'_\delta(u(x,\tau))div(b(x,\tau,u)u)dxd\tau \\ = \int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)^{1+\frac{n}{2}}\phi'_\delta(u(x,\tau))div(A(x,\tau,u)\nabla(u(x,\tau))dxd\tau \\ + \int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)^{1+\frac{n}{2}}\phi'_\delta(u(x,\tau))c(x,\tau,u)udxd\tau \\ + \int_{t_0}^t\Big(1+\frac{n}{2}\Big)(\tau-t_0)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,\tau))^{2p}dx.\end{aligned}$$

Do Teorema do Divergente e de (2.3) temos

$$\begin{aligned}(t-t_0)^{1+\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t))^{2p}dx + \int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)^{1+\frac{n}{2}}\phi'_\delta(u(x,\tau))div(b(x,\tau,u)u)dxd\tau \\ + \int_{t_0}^t(\tau-t_0)^{1+\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\phi''_\delta(u(x,\tau))\mu(\tau)|\nabla u(x,\tau)|^2dxd\tau \\ \le \int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}(\tau-t_0)^{1+\frac{n}{2}}\phi'_\delta(u(x,\tau))c(x,\tau,u)udxd\tau \\ + \int_{t_0}^t\Big(1+\frac{n}{2}\Big)(\tau-t_0)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,\tau))^{2p}dx.\end{aligned}$$

Fazendo $\delta \to 0$, por (2.7) temos

$$(1-p)\int_{t_0}^t\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^p div(b(x,\tau,u))dxd\tau \le 0,$$

Segue então, de (2.4),(2.5) e do fato de que

$$\phi'_\delta(u) \to 2p|u|^{2p-1} \quad \text{quando } \delta \to 0 \tag{2.10}$$

$$\phi''_\delta(u) \to 2p(2p-1)|u|^{2p-2} \quad \text{quando } \delta \to 0, \tag{2.11}$$

que

$$(t-t_0)^{1+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{2p} dx + \int_{t_0}^t (\tau - t_0)^{1+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} 2p(2p-1)\mu(\tau)|u|^{2p-2}|\nabla u|^2 dx d\tau$$
$$\leq \int_{t_0}^t \Big(1+\frac{n}{2}\Big)(\tau - t_0)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{2p} dx d\tau.$$

Fazendo $t_0 \to 0$ obtemos

$$t^{1+\frac{n}{2}} \|u(x,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + 2p(2p-1) \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\tau)|u(x,\tau)|^{2p-2}|\nabla u(x,\tau)|^2 dx d\tau$$
$$\leq \int_0^t \Big(1+\frac{n}{2}\Big)(\tau)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^{2p} dx d\tau.$$

Considere

$$E_p(t) = t^{1+\frac{n}{2}} \|u(x,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + 2p(2p-1) \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\tau)|u|^{2p-2}|\nabla u|^2 dx d\tau$$

e defina $w(\cdot,t)$ como

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{se} \quad p = 1 \\ |u(x,t)|^p & \text{se} \quad p > 1. \end{cases}$$

Então

$$E_p(t) = t^{1+\frac{n}{2}} \|w(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{2p(2p-1)}{p^2} \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \mu(\tau) \|\nabla w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau$$
$$\leq \Big(1+\frac{n}{2}\Big) \int_0^t \tau^{\frac{n}{2}} \|w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau$$

Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.8). segue que

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \|\nabla u(\cdot,t)\|^{\frac{2p}{n+2}}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\nabla w(\cdot,t)\|^{\frac{n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Assim,

$$t^{1+\frac{n}{2}} \|w(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{2p(2p-1)}{p^2} \int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}} \mu(\tau) \|\nabla w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau$$
$$\leq \Big(1+\frac{n}{2}\Big) \int_0^t \tau^{\frac{n}{2}} C_n^2 \|u(\cdot,\tau)\|^{\frac{4p}{n+2}}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tau.$$

Do princípio do máximo (2.6) e da Desigualdade de Hölder ($p = \frac{n+2}{n}$ e $q = \frac{n+2}{2}$) obtemos

$$t^{1+\frac{n}{2}}\|w(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{2p(2p-1)}{p^2}\int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}}\mu(\tau)\|\nabla w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\tau \leq$$
$$\Big(1+\frac{n}{2}\Big)C_n^2\|u_0\|^{\frac{4p}{n+2}}_{L^P(\mathbb{R})}\Big(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}}d\tau\Big)^{\frac{2}{n+2}}\Big(\int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}}\mu(\tau)\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau\Big)^{\frac{n}{n+2}}.$$

Então,

$$E_p(t) \leq \Big(1+\frac{n}{2}\Big)C_n^2\Big(\frac{2p(2p-1)}{p^2}\Big)^{-\frac{n}{n+2}}\|u_0\|^{\frac{4p}{n+2}}_{L^P(\mathbb{R}^n)}\Big(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}}d\tau\Big)^{\frac{2}{n+2}}\big(E_p(t)\big)^{\frac{n}{n+2}}.$$

Logo,

$$E_p(t) \leq \Big(1+\frac{n}{2}\Big)^{\frac{n+2}{2}}C_n^{n+2}\Big(\frac{2p(2p-1)}{p^2}\Big)^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|^{2p}_{L^P(\mathbb{R}^n)}\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}}d\tau.$$

Portanto,

$$t^{1+\frac{n}{2}}\|u(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(R^n)} + 2p(2p-1)\int_0^t \tau^{1+\frac{n}{2}}\mu(\tau)|u(x,\tau)|^{2p-2}|\nabla(u(x,\tau))|^2dxd\tau \leq$$
$$C_n^{n+2}\Big(1+\frac{n}{2}\Big)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)}\Big(\frac{2p(2p-1)}{p^2}\Big)^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|^{2p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}}d\tau,$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 2.2.3. *Se $u(.,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ é solução de (2.1) e (2.2), então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \Big[2C_n^{(n+2)}(n+2)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)}\Big]^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}}d\tau\Big)^{\frac{1}{p}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}t^{-\frac{1}{p}\left(1+\frac{n}{2}\right)}. \tag{2.12}$$

Prova: Das desigualdades (2.6) , (2.9) e como μ é uma função positiva, temos

$$\|u(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \leq K(n)\Big(1-\frac{1}{2p}\Big)^{-\frac{n}{2}}\|u(\cdot,s)\|^{2p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}(t-s)^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)}\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}}d\tau$$
$$\forall\ s \leq t \leq T,$$

onde

$$K(n) = C_n^{(n+2)}\Big(1+\frac{n}{2}\Big)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)}2^{-n}. \tag{2.13}$$

Tomando $t_0 = \frac{t}{2^k}$, $t_i = t_{i-1} + \frac{t}{2^i}$, para $1 \leq i \leq k$ e $k \in \mathbb{N}$, temos que $t_k = t$ e

$$\|u(\cdot,t)\|^{2^i p}_{L^{2^i p}(\mathbb{R}^n)} \leq K(n)\Big(1 - \frac{1}{2^i p}\Big)^{-\frac{n}{2}} \|u(\cdot,s)\|^{2^i p}_{L^{2^{i-1}p}(\mathbb{R}^n)} \Big(\frac{t}{2^i}\Big)^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)} \int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau. \tag{2.14}$$

Aplicando a desigualdade (2.14) para $i = k, k-1, k-2, ..., 1$, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{2^k p}(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{K}(n,p) \|u(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^{k} \Big(\frac{t}{2^i}\Big)^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)\frac{1}{2^i p}} \prod_{i=1}^{k} \Big(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau\Big)^{\frac{1}{2^i p}},$$

onde

$$\widetilde{K}(n,p) = \prod_{i=1}^{k} [K(n)]^{\frac{1}{2^i p}} \prod_{i=1}^{k} \Big(1 - \frac{1}{2^i p}\Big)^{-\frac{n}{2^{i+1}p}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \tilde{K}(n,p) &= [K(n)]^{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i p}} \prod_{i=1}^{k} \Big(1 - \frac{1}{2^i p}\Big)^{-\frac{n}{2^{i+1}p}} \\ &\leq [K(n)]^{\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} 2^{\frac{n}{2p}}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k} \Big(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau\Big)^{\frac{1}{2^i p}} &= \Big(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau\Big)^{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i p}} \\ &= \Big(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}} d\tau\Big)^{\frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

e

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k} \Big(\frac{t}{2^i}\Big)^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2^i p}\right)} &= t^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i p}} 2^{\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2^i p}} \\ &= t^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} 2^{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2^i}} \\ &\leq t^{-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} 2^{\frac{2}{p}}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Então, de (2.15), (2.16) e (2.17), fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \Big[2C_n^{(n+2)}(n+2)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)}\Big]^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^t \mu(\tau)^{-\frac{n}{2}}\Big)^{\frac{1}{p}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} t^{-\frac{1}{p}\left(1+\frac{n}{2}\right)}.$$

$\square$

Teorema 2.2.4. *Se* $u(\cdot,t), \tilde{u}(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^n))$*, são soluções de (2.1) correspondendo aos estados iniciais* $u_0, \tilde{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *respectivamente, com* $u_0 - \tilde{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e c(x,t,u) satisfazendo (2.5) uma função lipschitz na terceira variável para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *e para todo* $t \in [0,T]$ *então,*

$$\|u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}n)} \leq C(T)\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \ \ 0 \leq t \leq T, \tag{2.18}$$

onde $C(T)$ *é uma constante que depende de* $T > 0$ *dado e de* $\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, $\|\tilde{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Prova: Dado $t \in (0,T)$, seja $v(\cdot,t) = u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)$. Então v satisfaz:

$$v_t + div(b(x,t,u)v) + div([b(x,t,u) - b(x,t,\tilde{u})]\tilde{u}) = div(A(x,t,u)\nabla v)$$
$$+div([A(x,t,u) - A(x,t,\tilde{u})]\nabla \tilde{u}) + c(x,t,u)v + [c(x,t,u) - c(x,t,\tilde{u})]\tilde{u}$$

Multiplicando a equação acima por $L'_\delta(v)$, integrando o resultado sobre $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$, onde $t_0 \in (0,t)$, e observando que $L'_\delta(v)v_t = \frac{d[L_\delta(v)]}{dt}$, obtemos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot,t))dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v) div([b(x,t,u) - b(x,t,\tilde{u})]\tilde{u}) dxd\tau +$$
$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v) div(b(x,\tau,u)v) dxd\tau = \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v) div(A(x,t,u)\nabla v) dxd\tau$$
$$+ \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v) c(x,\tau,u) v dxd\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)[c(x,t,u) - c(x,t,\tilde{u})]\tilde{u} dxd\tau$$
$$+ \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v) div([A(x,t,u) - A(x,t,\tilde{u})]\nabla \tilde{u}) dxd\tau + \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot,t_0))dx$$

Pelo Teorema do Divergente temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot,t))dx - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle [b(x,t,u) - b(x,t,\tilde{u})]\tilde{u}, \nabla v\rangle dxd\tau -$$
$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle b(x,\tau,u)v, \nabla v\rangle dxd\tau = -\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle A(x,t,u)\nabla v, \nabla v\rangle dxd\tau$$
$$+ \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v) c(x,\tau,u) v dxd\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)[c(x,t,u) - c(x,t,\tilde{u})]\tilde{u} dxd\tau$$
$$- \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle [A(x,t,u) - A(x,t,\tilde{u})]\nabla \tilde{u}, \nabla v\rangle dxd\tau + \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot,t_0))dx$$

Como $L''_\delta(v) \geq 0$ e por (2.3)

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot,t))dx + \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle[A(x,t,u) - A(x,t,\tilde{u})]\nabla\tilde{u}, \nabla v\rangle dxd\tau \leq$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(v(\cdot,t_0))dx + \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle[b(x,t,u) - b(x,t,\tilde{u})]\tilde{u}, \nabla v\rangle dxd\tau +$$
$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)c(x,\tau,u)vdxd\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} L'_\delta(v)[c(x,t,u) - c(x,t,\tilde{u})]\tilde{u}dxd\tau$$
$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle b(x,\tau,u)v, \nabla v\rangle dxd\tau$$

Fazendo $\delta \to 0$, $L''_\delta(v) \to 0$ e então, pelo teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle[A(x,t,u) - A(x,t,\tilde{u})]\nabla\tilde{u}, \nabla v\rangle dxd\tau \to 0,$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle[b(x,t,u) - b(x,t,\tilde{u})]\tilde{u}, \nabla\tilde{u}\rangle dxd\tau \to 0,$$

e

$$\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} L''_\delta(v)\langle b(x,\tau,u)v, \nabla v\rangle dxd\tau \to 0$$

Assim, como $L_\delta(v) \to |v|$ e $L'_\delta(v) \to sgn(v)$ ao $\delta \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \|v(\cdot,t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} c(x,\tau,u)|v(\cdot,\tau)|dxd\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} [c(x,t,u) - c(x,t,\tilde{u})]\tilde{u}\ \ sgn(v)dxd\tau.\end{aligned}$$

Ainda, como $c(x,t,u) \leq 0$, temos

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|v(\cdot,t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + C\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(\cdot,t)||v(\cdot,t)|dxd\tau.$$

Então,

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|v(\cdot,t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + C\|\tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{R}^n} |v(\cdot,t)|dxd\tau. \quad (2.19)$$

Pelo Lema de Gronwall obtemos

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|v(\cdot,t_0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} e^{C(n,T)\|\tilde{u}(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)}.$$

Portanto, fazendo $t_0 \to 0$

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|v_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} e^{C(n,T)\|\tilde{u}_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} t},$$

de onde segue o resultado. □

Os resultados acima perimitem estabelecer a unicidade das soluções consideradas.

Teorema 2.2.5. *Se* $u(\cdot,t)$, $\tilde{u}(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ *são soluções de (2.1) e (2.2), com* $u(\cdot,0) = \tilde{u}(\cdot,0)$ *então* $u(\cdot,t) = \tilde{u}(\cdot,t)$, $\forall \quad t > 0$.

Prova: Se $p = 1$ o resultado decorre imediatamente do Teorema 2.2.4, de modo que vamos supor $p > 1$ no que segue. Dados $t > 0$ e $M > 0$, considere

$$u_0^{[M]}(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{se} \quad |u_0(x)| \leq M \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja u^M solução da equação (2.1) com a condição inicial $u_0^{[M]}$ dada acima. Como

$$\|u_0^M\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

pelo Teorema 2.2.3, existe uma constante $K(t) > 0$ tal que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(t)$$

e

$$\|u^M(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(t)$$

Assim, para $p > 1$,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{1}{p}} \|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (2K(t))^{1-\frac{1}{p}} \|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Obtemos, pelo teorema anterior,

$$\|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq (2K(t))^{1-\frac{1}{p}} \Big(C(T)\|u_0 - u_0^M\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Observando que

$$\|u_0 - u_0^M\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u_0 - u_0^M|^p |u_0 - u_0^M|^{1-p} \leq M^{1-p} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0 - u_0^M|^p,$$

temos

$$\|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq (2K(t)) M^{\frac{1-p}{p}} C(T) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Então, dadas $u(\cdot,t)$, $\tilde{u}(\cdot,t)$ duas soluções de (2.1) com $u(\cdot,0) = \tilde{u}(\cdot,0)$, temos

$$\|u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \widehat{K}(t,p) M^{\frac{1-p}{p}} C(T) \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\ M > 0, \quad \forall\ p > 1.$$

Fazendo $M \to \infty$, como $\widehat{K}(t,p)$ não depende de M, obtemos

$$\|u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad \forall\ 1 < p < \infty,$$

o que conclui o argumento. $\square$

3 EQUAÇÕES DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO MAIS GERAIS

3.1 Introdução

Neste capítulo, estendemos as idéias discutidas no capítulo 2, voltando a examinar em maior generalidade o problema

$$u_t + \operatorname{div}(b(x,t,u)u) = \operatorname{div}(A(x,t,u)\nabla u) + c(x,t,u)u, \quad 0 < t < T, \tag{3.1}$$

para $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e com condições iniciais em L^p para $1 \leq p < \infty$, i.e.,

$$u(\cdot, 0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n) \tag{3.2}$$

onde A, b, c são funções suaves, como descrito na introdução (página 5), porém, estamos supondo apenas que

$$|b(x,t,u)| \leq B(T) \tag{3.3}$$

e

$$|c(x,t,u)| \leq C(T), \tag{3.4}$$

com

$$\langle A(x,t,u)\xi, \xi\rangle \geq \mu|\xi|^2, \quad \forall \xi \in R^n \tag{3.5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$ e μ uma constante positiva, onde $\langle ., . \rangle$ denota o produto escalar usual em $\in \mathbb{R}^n$, $|\cdot|$ é a norma Euclidiana, $B(T)$ e $C(T)$ são constantes dadas.

Na seção 3.2, estudamos algumas propriedades de $u(\cdot, t)$ solução do problema descrito por (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5). Em particular, pelo Teorema 3.2.1, temos que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(T)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad 0 < t < T$$

onde $K(T)$ é uma constante que depende de p, T, μ. No Teorema 3.2.2 obtemos uma desigualdade de energia para as soluções $u(\cdot, t)$ quando $1 \leq p < \infty$. Por fim, no Teorema 3.2.3, obtemos a seguinte desigualdade para a norma do sup:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(T)t^{-\frac{n}{2p}}, \quad 0 < t < T$$

onde $K(T)$ é uma constante que depende de n, p, μ, T.

Na Seção 3.3, como consequência das desiguladades obtidas na seção 3.2, provamos a unicidade das soluções $u(\cdot, t)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$.

3.2 Estimativas para $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Nesta seção, vamos obter estimativas para as soluções $u(\cdot, t)$ do problema (3.1), (3.2).

Teorema 3.2.1. *Se $u(., t) \in C^0([0, T], L^p(\mathbb{R}^n))$ é solução de (3.1) e (3.2), então*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K(T)\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t \in [0, T] \tag{3.6}$$

onde $K(T) = e^{\left(\frac{B^2(T)}{2\mu}(p-1)+C(T)\right)t}$.

Prova: Seja $\Phi_\delta(\cdot) = L_\delta^p(\cdot)$,onde $L_\delta(\cdot)$ é definida em (1.12). Multiplicando a equação (3.1) por $\Phi'_\delta(u)$ e integrando o resultado sobre $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$, para $0 < t_0 < t$ dados, obtemos,

$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u)u_\tau dxd\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u)div(b(x, \tau, u)u)dxd\tau =$$
$$\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u)div(A(x, \tau, u)\nabla(u))dxd\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u)c(x, \tau, u)udxd\tau.$$

Aplicando o Teorema do Divergente e observando que $\Phi'_\delta(u) = \frac{d}{dt}[L_\delta(u)^p]$ temos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t))^p dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u)\langle A(x, \tau, u)\nabla u, \nabla u\rangle dxd\tau =$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x, t_0))^p dx + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u)\langle b(x, \tau, u)u, \nabla u\rangle dxd\tau$$
$$+ \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u)c(x, \tau, u)udxd\tau.$$

Segue de (3.3), (3.4), (3.5) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t))^p dx - \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t_0))^p dx \leq B(T)\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u)|u||\nabla u| dx d\tau$$
$$+C(T)\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) u dx d\tau - \mu \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u)|\nabla u|^2 dx d\tau.$$

Pela desigualdade de Cauchy,

$$|u||\nabla u| \leq \frac{1}{2\mu}|u|^2 + \frac{\mu}{2}|\nabla u|^2. \tag{3.7}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t))^p dx - \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t_0))^p dx d\tau \leq \frac{B^2(T)}{2\mu}\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u)|u|^2 dx d\tau +$$
$$C(T)\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u) u dx d\tau - \frac{\mu}{2}\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u)|\nabla u|^2 \leq \frac{B^2(T)}{2\mu}\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u)|u|^2 dx d\tau$$
$$+C(T)\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \phi'_\delta(u) u dx d\tau.$$

Então, fazendo $\delta \to 0$,

$$\|u(x,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(x,t_0)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \Big(p(p-1)\frac{B^2(T)}{2\mu} + C(T)p\Big)\int_{t_0}^t \|u(x,\tau)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} d\tau.$$

Assim, pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$\|u(x,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(x,t_0)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} e^{\Big(p(p-1)\frac{B^2(T)}{2\mu} + C(T)p\Big)(t-t_0)} \tag{3.8}$$

Fazendo $t_0 \to 0$, obtemos (3.6). $\square$

O resultado acima é usado na derivação da seguinte estimativa fundamental.

Teorema 3.2.2. *Se $u(.,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ é solução de (3.1) e (3.2), então*

$$t^{n+1}\|u(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\int_0^t \tau^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2p-2}|\nabla u|^2 dx d\tau \leq$$
$$\Big(C_n F(t)\Big)^{\frac{n+2}{2}}\Big(\frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\Big)^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|^{2p}_{L^p(\mathbb{R}^n)} e^{\frac{n+2}{2}K_2(\mu,T,p)} t, \ \ \forall \ t \in [0,T]. \tag{3.9}$$

onde

$$F(t) = K_1(\mu,T,p)\Big(\frac{t^{n+2}}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}} + (n+1)\Big(2\frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}},$$

$$K_1 = K_1(\mu, T, p) = \Big(\frac{B^2(T)p(2p-1)}{\mu} + 2pC(T)\Big)$$

e

$$K_2 = K_2(\mu, T, p) = \Big(\frac{B^2(T)(p-1)}{2\mu} + C(T)\Big).$$

Prova: Sejam $t_0 \in (0, t)$ e $\Phi_\delta(\cdot) = {L_\delta}^{2p}(\cdot)$, com $L_\delta(\cdot)$ como em (1.12. Multiplicando a equação (3.1) por $(t - t_0)^{n+1}\Phi'_\delta(u)$ e integrando o resultado sobre $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$, obtemos,

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1}\Phi'_\delta(u)u_\tau dxd\tau + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1}\Phi'_\delta(u)div(b(x,\tau,u)u)dxd\tau \\
&= \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1}\Phi'_\delta(u)div(A(x,\tau,u)\nabla(u))dxd\tau \\
&\quad + \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1}\Phi'_\delta(u)c(x,\tau,u)udxd\tau.
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Divergente e observando que

$$\frac{d}{dt}[(t-t_0)^{n+1}\Phi_\delta(u)] = (t-t_0)^{n+1}\Phi'_\delta(u)u_t + (n+1)(t-t_0)^n\Phi_\delta(u),$$

temos

$$\begin{aligned}
&(t-t_0)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t))^{2p}dx - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1}\phi''_\delta(u)\langle b(x,\tau,u)u, \nabla u\rangle dxd\tau \\
&= \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1}\Phi'_\delta(u)c(x,\tau,u)udxd\tau + (n+1)\int_{t_0}^t (t-t_0)^n \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,\tau))^{2p}dxd\tau \\
&\quad - \int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^n} (\tau - t_0)^{n+1}\phi''_\delta(u)\langle A(x,\tau,u)\nabla u, \nabla u\rangle dxd\tau.
\end{aligned}$$

Segue de (3.3), (3.4), (3.5), (3.7) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}
&(t-t_0)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t))^{2p}dx + \mu\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n} \phi''_\delta(u)|\nabla u|^2 dxd\tau \leq \\
&(n+1)\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^n \int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,\tau))^{2p}dxd\tau + \frac{\mu}{2}\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi''_\delta(u)|\nabla u|^2 dxd\tau \\
&+\frac{B(T)^2}{2\mu}\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi''_\delta(u)|u|^2 dxd\tau + C(T)\int_{t_0}^t (\tau-t_0)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi'_\delta(u)udxd\tau.
\end{aligned}$$

Então,

$$(t-t_0)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,t))^{2p}dx + \frac{\mu}{2}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n}\phi''_\delta(u)|\nabla u|^2 dxd\tau \leq$$
$$(n+1)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{n}\int_{\mathbb{R}^n} L_\delta(u(x,\tau))^{2p}dxd\tau + C(T)\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi'_\delta(u)udxd\tau$$
$$+\frac{B(T)^2}{2\mu}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi''_\delta(u)|u|^2dxd\tau.$$

Fazendo $\delta\to 0$ e $t_0\to 0$, obtemos

$$t^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|^{2p}dx + \mu p(2p-1)\int_0^t \tau^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{2p-2}|\nabla u|^2dxd\tau$$
$$\leq (n+1)\int_0^t\tau^n\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{2p}dxd\tau + 2pC(T)\int_0^t\tau^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{2p}dxd\tau$$
$$+\frac{B(T)^2p(2p-1)}{\mu}\int_0^t\tau^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,\tau)|^{2p}dxd\tau.$$

Considere $w(\cdot,t)$ da seguinte forma:

$$w(x,t)=\begin{cases} u(x,t) & \text{se } p=1\\ |u(x,t)|^p & \text{se } p>1\end{cases}$$

Assim,

$$t^{n+1}\|w(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\int_0^t\tau^{n+1}\|\nabla w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau \leq$$
$$K_1\int_0^t\tau^{n+1}\|w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau + (n+1)\int_0^t\tau^n\|w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau,$$

onde

$$K_1 = K_1(\mu,T,p) = \Big(\frac{B^2(T)p(2p-1)}{\mu} + 2pC(T)\Big). \tag{3.10}$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (2.8) temos

$$t^{n+1}\|w(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\int_0^t\tau^{n+1}\|\nabla w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau$$
$$\leq K_1C_n\int_0^t\tau^{n+1}\|w(\cdot,t)\|^{\frac{4}{n+2}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau$$
$$+(n+1)C_n\int_0^t\tau^n\|w(\cdot,t)\|^{\frac{4}{n+2}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau.$$

Pela desigualdade (3.6)

$$
\begin{aligned}
& t^{n+1}\|w(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\int_0^t \tau^{n+1}\|\nabla w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau \\
& \leq K_1 C_n \|u_0\|^{\frac{4p}{n+2}}_{L^p(\mathbb{R}^n)} e^{K_2}\int_0^t \tau^{n+1}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau \\
& +(n+1)C_n\|u_0\|^{\frac{4p}{n+2}}_{L^p(\mathbb{R}^n)} e^{K_2(\mu,T,p)}\int_0^t \tau^{n}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau,
\end{aligned}
$$

onde

$$
K_2 = K_2(\mu,T,p) = \Big(\frac{B^2(T)p(p-1)}{2\mu} + C(T)p\Big). \tag{3.11}
$$

Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos

$$
\begin{aligned}
& t^{n+1}\|w(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\int_0^t \tau^{n+1}\|\nabla w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau \\
& \leq K_1 C_n \|u_0\|^{\frac{4p}{n+2}}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Big(\frac{t^{n+2}}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}} e^{K_2(\mu,T,p}\Big(\int_0^t \tau^{n+1}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau\Big)^{\frac{n}{n+2}} \\
& +(n+1)C_n\|u_0\|^{\frac{4p}{n+2}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big(2\frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}} e^{K_2(\mu,T,p)}\Big(\int_0^t \tau^{n+1}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau\Big)^{\frac{n}{n+2}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& t^{n+1}\|w(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\int_0^t \tau^{n+1}\|\nabla w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau \leq \\
& \Big[K_1\Big(\frac{t^{n+2}}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}} + (n+1)\Big(2\frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}}\Big] C_n\|u_0\|^{\frac{4p}{n+2}}_{L^p(\mathbb{R}^n)} e^{K_2(\mu,T,p)}\,. \\
& \cdot K_3^{-\frac{n}{n+2}}\Big(t^{n+1}\|w(x,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + K_3\int_0^t \tau^{n+1}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^{\frac{2n}{n+2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau\Big)^{\frac{n}{n+2}},
\end{aligned}
$$

onde

$$
K_3 = K_3(\mu,p) = \frac{\mu p(2p-1)}{p^2}. \tag{3.12}
$$

Assim,

$$
\Big(t^{n+1}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + K_3\int_0^t \tau^{n+1}\|\nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau\Big)^{\frac{2}{n+2}} \leq C_n K_3^{-\frac{n}{n+2}}\|u_0\|^{\frac{4p}{n+2}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}F(t)e^{K_2 t},
$$

para

$$
F(t) = K_1\Big(\frac{t^{n+2}}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}} + (n+1)\Big(2\frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}}. \tag{3.13}
$$

Então,

$$t^{n+1}\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\int_0^t \tau^{n+1}\|\nabla w(x,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau \leq$$
$$\big(C_n F(t)\big)^{\frac{n+2}{2}}\Big(\frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\Big)^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|^{2p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}e^{\frac{n+2}{2}K_2(\mu,T,p)t},$$

onde K_2 e $F(t)$ são definidas por (3.11) e (3.13) respectivamente. Portanto,

$$t^{n+1}\|u(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + \frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\int_0^t \tau^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{2p-2}|\nabla u|^2 dx d\tau \leq$$
$$\big(C_n F(t)\big)^{\frac{n+2}{2}}\Big(\frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\Big)^{-\frac{n}{2}}\|u_0\|^{2p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}e^{\frac{n+2}{2}K_2(\mu,T,p)}t, \ \ \forall\ t\in[0,T].$$

como queríamos demonstrar. □

Como em [3], este resultado permite estimar $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$

Teorema 3.2.3. *Se $u(.,t)\in C^0([0,T],L^p(\mathbb{R}^n))$ é solução de (3.1) e (3.2), então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (3\mu t)^{-\frac{n}{2p}}\Big(c_n p^2 2^{16}\big(K_4 T + n + 1\big)\Big)^{\frac{n+2}{2p}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}e^{\frac{n+2}{2}3pK_4 t}$$
$$\forall\ t\in[0,T], \tag{3.14}$$

onde

$$K_4 = \Big(\frac{B^2(T)}{\mu} + C(T)\Big)$$

Prova: Pelas desigualdades (3.8) e (3.9), $u(\cdot,t)$ satisfaz

$$\|u(\cdot,t)\|^{2p}_{L^{2p}(\mathbb{R})} \leq C_n^{\frac{n+2}{2}}K_3^{-\frac{n}{2}}\|u(\cdot,s)\|^{2p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}t^{-(n+1)}F(t)^{\frac{n+2}{2}}e^{\frac{n+2}{2}K_2(t-s)},$$
$$\forall\ 0\leq s<t<T,$$

onde K_3 e $F(t)$ estão definidas em (3.12) e (3.13) respectivamente. Como,

$$\begin{aligned} t^{-(n+1)}F(t)^{\frac{n+2}{2}} &= t^{-(n+1)}\Big[K_1\Big(\frac{t^{n+2}}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}} + (n+1)\Big(2\frac{t^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}}\Big]^{\frac{n+2}{2}} \\ &= t^{-\frac{n}{2}}\Big[K_1\Big(\frac{1}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}}t + (n+1)\Big(\frac{2}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}}\Big]^{\frac{n+2}{2}} \\ &\leq (t-s)^{-\frac{n}{2}}\Big[K_1\Big(\frac{1}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}}T + (n+1)\Big(\frac{2}{n+2}\Big)^{\frac{2}{n+2}}\Big]^{\frac{n+2}{2}} \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$K_1 = \frac{B^2(T)}{\mu}p(2p-1) + C(T)2p \leq (2p)^2\Big(\frac{B^2(T)}{\mu} + C(T)\Big), \ \ \forall p > 1 \tag{3.16}$$

e

$$K_2 = \frac{B^2(T)p(p-1)}{2\mu} + C(T)p \leq p^2\Big(\frac{B^2(T)}{\mu} + C(T)\Big), \ \ \forall p > 1 \tag{3.17}$$

temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \leq (t-s)^{-\frac{n}{4p}}\Gamma^{\frac{1}{2p}}\|u(\cdot,s)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}e^{\left(\frac{n+2}{2}\right)p^2\left(\frac{B^2(T)}{\mu}+C(T)\right)\frac{(t-s)}{2p}},$$

$\forall \ 0 \leq s < t < T$, onde

$$\Gamma = \frac{2}{n+2}(2p)^{n+2}\Big[C_n\Big(\Big(\frac{B^2(T)}{\mu} + C(T)\Big)T + (n+1)\Big)\Big]^{\frac{n+2}{2}}\Big(\frac{\mu p(2p-1)}{p^2}\Big)^{-\frac{n}{2}}.$$

Então, tomando $t_0 = 3\frac{t}{4^k}$, $\quad t_i = t_{i-1} + 3\frac{t}{4^i}$, $\quad 1 \leq i \leq k$, $\quad k \in \mathbb{N}$, temos que $t_k = t$ e

$$\|u(\cdot,t_i)\|_{L^{2^ip}(\mathbb{R})} \leq \Big(\frac{3t}{2^{2i}}\Big)^{-\frac{n}{2^{i+1}p}}\Gamma_i^{\frac{1}{2^ip}}\|u(\cdot,t_{i-1})\|_{L^{2^{i-1}p}(\mathbb{R}^n)}e^{\left(\frac{n+2}{2}\right)p\left(\frac{B^2(T)}{\mu}+C(T)\right)\frac{3t}{2^i}}, \quad \forall \quad 0 \leq i \leq k \tag{3.18}$$

onde,

$$\Gamma_i = \frac{2}{n+2}(2^ip)^{n+2}\Big[C_n\Big(\Big(\frac{B^2(T)}{\mu} + C(T)\Big)T + (n+1)\Big)\Big]^{\frac{n+2}{2}}\Big(2\mu\Big(1 - \frac{1}{2^ip}\Big)\Big)^{-\frac{n}{2}}.$$

Aplicando a desigualdade (3.18) para $i = k, k-1, k-2, ..., 1$, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{2^kp}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{k}\Big(\frac{3t}{2^{2i}}\Big)^{-\frac{n}{2^{i+1}p}}\prod_{i=1}^{k}\Gamma_i^{\frac{1}{2^ip}}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}e^{\sum_{i=1}^k\left(\frac{n+2}{2}\right)pK_4\frac{3t}{2^i}} \quad \forall \quad 0 \leq i \leq k$$

onde

$$k_4 = \Big(\frac{B^2(T)}{\mu} + C(T)\Big). \tag{3.19}$$

Então, ao $k \to \infty$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (3\mu t)^{-\frac{n}{2p}}\Big(C_np^2 2^{16}\big(K_4T + n + 1\big)\Big)^{\frac{n+2}{2p}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}e^{\frac{n+2}{2}3pK_4t}$$

□

Analogamente ao Teorema 2.2.4 do Capítulo 2, obtemos

Teorema 3.2.4. *Se $u(\cdot,t), \tilde{u}(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ são soluções de (3.1) correspondendo aos estados iniciais $u_0, \tilde{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ respectivamente, com $u_0 - \tilde{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ c(x,t,u) satisfazendo (2.5) uma função lipschitz na terceira variável para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para todo $t \in [0,T]$ então,*

$$\|u(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}n)} \leq C(T)\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{3.20}$$

onde $C(T)$ é uma constante que depende de $T > 0$ dado e de $\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, $\|\tilde{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

3.3 Unicidade de soluções

Vamos descrever o procedimento utilizado no Capítulo 2 para estabelecer a unicidade de soluções em maior generalidade.

Teorema 3.3.1. *Suponhamos que uma dada equação diferencial*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t) = P[u(\cdot,t)], \quad x \in \Omega, \;\; 0 < t < T, \tag{3.21}$$

com condição inicial

$$u(\cdot,0) = u_0 \in L^p(\Omega), \tag{3.22}$$

possua solução $u(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\Omega))$, sendo $u_0 \in L^p(\Omega)$ para qualquer $1 \leq p < \infty$. Se tivermos

1.

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \leq K_p(T, \|u_0\|_{L^p(\Omega)}) \quad \forall \;\, 0 < t \leq T \tag{3.23}$$

2.

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q(\Omega)} \leq K_q(T, \|u_0\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall\ 0 < t \leq T, \tag{3.24}$$

para algum $q > p$, finito ou não.

3. sendo $u(\cdot,t)$, $v(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^r(\Omega))$ soluções de (3.21), onde $1 \leq r < p$, com

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^r(\Omega)} \leq K_r(T, \|u_0\|_{L^r(\Omega)}, \|v_0\|_{L^r(\Omega)})\|u(\cdot,0) - v(\cdot,0)\|^{\alpha}_{L^r(\Omega)}, \tag{3.25}$$

para $\alpha > 0$, $0 \leq t \leq T$,

então, a solução $u(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\Omega))$ do problema (3.21), (3.22) é única.

Prova: Dados $t > 0$ e $M > 0$, considere

$$u_0^{[M]}(x) = \begin{cases} u_0(x), & \text{se} \quad |u_0(x)| \leq M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $u^{[M]}$ solução de (3.21), com condição inicial $u_0^{[M]}$. Assim, para $p > 1$, dados r e q tais que $r < p < q$, por interpolação, (3.23) e (3.24), temos

$$\|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \;\leq\; \|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|^{\theta\frac{r}{p}}_{L^r(\Omega)} \|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|^{(1-\theta)\frac{q}{p}}_{L^q(\Omega)},$$

para $0 < \theta < 1$ tal que $p = \theta r + (1-\theta)q$. Por (3.25) obtemos

$$\|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \;\leq\; K_{r,q,\theta}(T, \|u_0\|_{L^p(\Omega)}) \|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|^{\alpha\theta\frac{r}{p}}_{L^r(\Omega)},$$

para algum $\alpha > 0$. Segue da definição de $u_0^{[M]}$ que

$$\|u(\cdot,t) - u^{[M]}(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \;\leq\; C(T, \|u_0\|_{L^p(\Omega)}) M^{\left(1-\frac{p}{r}\right)}, \quad \forall\ M > 0.$$

Portanto, fazendo $M \to \infty$, como C não depende de M, obtemos

$$\|u(\cdot,t) - u^M(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \to 0,$$

de onde segue o resultado. □

Como corolário do Teorema 3.3.1 obtemos o seguinte resultado, em vista de (3.6) e (3.9) ou (3.14).

Teorema 3.3.2. *Se* $u(\cdot,t)$, $\tilde{u}(\cdot,t) \in C^0([0,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ *são soluções de (3.1), com* $u(\cdot,0) = \tilde{u}(\cdot,0)$ *então* $u(\cdot,t) = \tilde{u}(\cdot,t)$, $\forall \quad 0 < t \leq T$.

4 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSÍVEIS EM 2-D E 3-D

4.1 Introdução

Neste capítulo vamos obter alguns resultados para $u(\cdot,t)$ solução das equações de Navier-Stokes

$$\begin{cases} u_t + u\cdot\nabla u + \nabla p = \nu\Delta u \;\; x\in\mathbb{R}^n, \;\; t>0, \\ \operatorname{div}(u)=0 \end{cases} \tag{4.1}$$

em dimensão $n=2,3$, com a condição inicial

$$u(\cdot,0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), \tag{4.2}$$

sendo $div(u_0)=0$. Para examinar $u(\cdot,t)$ vamos fazer uso de estimativas obtidas em [22], [23], desenvolvendo resultados que estendem ou fortalecem a discussão em [22], [23]. Em [22], [23], os resultados de Wiegner [36] sobre o comportamento de $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ ao $t\to\infty$, são reobtidos a partir de argumentos mais simples (parte dos quais considerados na seção 4.2 a seguir). Estes resultados estabelecem que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\gamma}),$$

para $0<\gamma\leq\frac{n}{4}+\frac{1}{2}$ se acontecer

$$\|e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(t^{-\gamma}),$$

onde $\tilde{u}(\cdot,t) = e^{\nu\Delta t}u_0$ denota a solução da equação do calor

$$\tilde{u}_t = \nu\Delta\tilde{u} \tag{4.3}$$

associada ao estado inicial $u(\cdot,0)=u_0$.

Na seção 4.4, mostraremos que, nas hipóteses acima,

$$t^\gamma\|u(\cdot,t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0 \;\text{ quando }\; t\to\infty$$

para qualquer solução de (4.1), (4.2), fornecendo assim, uma nova prova para este resultado, conjecturado por Leray [26], [27] e estabelecido originalmente por Kato [20].

Finalmente, na seção 4.5, consideramos o problema de "blow-up"em $3-D$. mostrando que, supondo ocorrer "blow-up"em tempo finito $t_* > 0$, tem-se

$$t_* < 0.159\|u_0\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}\nu^{-5}. \tag{4.4}$$

Segue da análise em [3], [33] que t_* pode ser estimado superiormente nesta forma,

$$t_* < K\|u_0\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}\nu^{-5}$$

e na seção 4.5 obtemos um valor razoável para K dada em (4.4) acima.

4.2 Estimativas Preliminares

Seguindo , [3], [23], observamos que a solução $u(\cdot,t)$ do problema (4.1), (4.2) pode ser escrita como

$$u(t) = e^{\nu\Delta t}u_0 + \int_0^t e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)ds, \tag{4.5}$$

onde $e^{\nu\Delta t}$ é o operador solução da equação do calor e $Q = -\nabla p - u.\nabla u$. Além disso, vamos utilizar a transformada de fourier aqui definida por

$$\widehat{v}(\kappa) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{i}\kappa\cdot x}v(x)dx, \qquad \kappa \in \mathbb{R}^n \tag{4.6}$$

para $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ qualquer.

Teorema 4.2.1. *A transformada de Fourier $\widehat{Q}$ do termo $Q = -\nabla(p) - u.\nabla(u)$ satisfaz*

$$|\widehat{Q}(\kappa,t)| \leq \frac{2\sqrt{n}}{(2\pi)^{n/2}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{4.7}$$

$$|\widehat{Q}(\kappa,t)| \leq \frac{2n|\kappa|}{(2\pi)^{n/2}}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ \kappa \in \mathbb{R}^n. \tag{4.8}$$

Teorema 4.2.2. *Sejam $\widehat{u}_0, |\kappa|^{-1}\widehat{u}_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então, a solução $e^{\nu\Delta t}u_0$ da equação do calor satisfaz*

$$\|e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_1(\nu t)^{-\frac{n}{4}}\|\widehat{u}_0\|_\infty \tag{4.9}$$

e

$$\|e^{\nu\Delta t}u_0\| \leq c_2(\nu t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|\widehat{w}_0\|_\infty, \quad \textit{se } \widehat{w}_0(\kappa) = |\kappa|^{-1}\widehat{u}_0(\kappa). \tag{4.10}$$

onde c_1 e c_2 são constantes adequadas (que não dependem de u).

Teorema 4.2.3. *Para o integrando da equação (4.5), os Teoremas 4.2.1 e 4.2.2 implicam em*

$$\begin{aligned} \|e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq c_1\nu^{-\frac{n}{4}}(t-s)^{-\frac{n}{4}}\|\widehat{Q}(s)\|_\infty \\ &\leq \frac{2c_1\sqrt{n}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\nu^{-\frac{n}{4}}(t-s)^{-\frac{n}{4}}\|u(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|Du(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{4.11}$$

e

$$\begin{aligned} \|e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq c_2\nu^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\||\kappa|^{-1}\widehat{Q}(s)\|_\infty \\ &\leq \frac{2c_2 n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\nu^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u(\cdot,s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

A prova dos resultados acima pode ser encontrada em [23].

A seguir, apresentamos algumas estimativas conhecidas envolvendo $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ e $\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Teorema 4.2.4. *Seja $u(\cdot,t)$ solução de (4.1) e (4.2). Então,*

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\nu\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0, \quad t \geq 0 \tag{4.13}$$

Prova: Como $u(\cdot,t)$ é solução de (4.1), então, para cada $i \in \{1,2,...,n\}$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu\Delta u_i \tag{4.14}$$

Assim, multiplicando a equação (4.15) por $2u_i(\cdot,t)$ e aplicando a integração por partes em $\mathbb{R}^n$ temos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} u_i(\cdot,t)^2 dx + \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i^2)dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} p\frac{\partial u_i}{\partial x_i}dx = -2\nu\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2 dx$$

Mas, como $div(u(\cdot,t)) = 0$,

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} u_j\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i^2)dx = \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j u_i^2)dx = 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} u_i(\cdot,t)^2 dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} p(\cdot,t)\frac{\partial u_i}{\partial x_i}dx = -2\nu\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2 dx$$

Somando em $i \in \{1,2,..,n\}$ e usando novamente o fato que $div(u(\cdot,t)) = 0$, temos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} u(\cdot,t)^2 dx = -2\nu\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2 dx.$$

□

Teorema 4.2.5. *Seja $u(\cdot,t)$ solução de (4.1)e (4.2). Então, $\forall \quad t>0$,*

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} - 2\nu\|D^2u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Prova: Considere a equação

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu\Delta u_i, \quad i = 1,2,3. \tag{4.15}$$

Derivando (4.15) em relação a x_ℓ, multiplicando por $2\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}$, somando em $i,\ell = 1,2,3$, integrando em $\mathbb{R}^3$, obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{i,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} 2\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell\partial t}dx + 2\sum_{i,j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}\,\frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)dx \\ +2\sum_{i,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x_\ell\partial x_i}dx = 2\nu\sum_{i,j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}\,\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_\ell\partial x_j^2}dx.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\sum_{i,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} 2\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial t}dx &= \sum_{i,\ell=1}^{3}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}\Big)^2 dx\\ &= \frac{d}{dt}\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \qquad (4.17)\end{aligned}$$

Observe ainda que, como $div(u(\cdot,t))=0$,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}\,\frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)dx &= -\sum_{i,j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}u_j dx\\ &\quad -\sum_{i,j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j}\;u_i\;\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}dx\\ &= -\sum_{i,j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j}\;u_i\;\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}dx. \qquad (4.18)\end{aligned}$$

$$\sum_{i,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_\ell}dx=\sum_{i,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x_\ell^2}dx=0. \qquad (4.19)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}\,\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j^2}dx &= -\sum_{i,j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_\ell}\Big)^2 dx\\ &= -\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \qquad (4.20)\end{aligned}$$

Então, de (4.16)-(4.20) segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} &+ 2\nu\|D^2u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 2\sum_{i,j,\ell=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j}\;u_i\;\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}dx\\ &\le 2\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\sum_{i,j,\ell=1}^{3}\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_j}\Big)^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i,j,\ell=1}^{3}u_i^2\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_\ell}\Big)^2\Big)^{1/2}dx\\ &\le 2\|D^2u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2\sum_{j,\ell=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_\ell}\Big)^2dx\Big)^{1/2}\\ &\le 2\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3))}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

□

Observação:

Para $n = 2$, pode-se mostrar que a solução de (4.1) satisfaz na verdade

$$\frac{d}{dt}\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = -2\nu\|D^2u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{4.21}$$

Deste resultado segue, em particular, a não ocorrência de "blow-up"no caso $2 - D$ [22], [23], [24].

Teorema 4.2.6. *Considere $u(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Então, $u(\cdot,t)$ satisfaz*

$$\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \sqrt{3}\|D^2u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{4.22}$$

Prova: A demostração segue por integração por partes. □

4.3 Decaimento de $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

Teorema 4.3.1. *(*Kato*, 1984).*
Dada $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ de divergente nulo, a solução $u(\cdot,t)$ de (4.1), (4.2) satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} \| u(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{4.23}$$

Prova: De (4.5) e (4.11), temos

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq w(t) + K\int_0^t (t-s)^{-n/4} \| u(\cdot,s) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \| Du(\cdot,s) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds, \tag{4.24}$$

onde $w(t) = \| e^{\nu\Delta t}u_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ e $K > 0$ é uma constante dependendo de n, ν, e onde $\| Du(\cdot,s) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(1+s)^{-1/2}$ [22], [23]. Considerando o caso $n = 3$ primeiro e lembrando que $\| u(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ é decrescente, obtemos então

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq w(t) + C\int_0^t (t-s)^{-3/4} (1+s)^{-1/2} ds, \tag{4.25}$$

onde $C > 0$ constante depende de ν, u_0. Assim, $\| u(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = w(t) + O(t^{-1/4})$, e o resultado segue do fato de se ter $w(t) \to 0$ ao $t \to \infty$.

Quando $n = 2$, podemos proceder do seguinte modo: dado $t_0 > 0$ qualquer, temos, por (4.4) e (4.10),

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq w(t) + C \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-1/2} \| Du(\cdot,s) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, ds$$

para todo $t > t_0$, sendo $w(t) = \| e^{\nu\Delta(t-t_0)} u(\cdot,t_0) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ e C constante dependendo de ν, u_0, mas independente de t_0. Como

$$\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-1/2} \| Du(\cdot,s) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, ds \;\leq\; 4 \sup_{t > t_0} \left\{ (1+t)^{1/2} \| Du(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right\}$$

para todo $t > t_0$, visto que

$$\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-1/2} (1+s)^{-1/2} \, ds \;\leq\; 4$$

para todo $t > t_0 > 0$, resulta que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, obtemos

$$\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-1/2} \| Du(\cdot,s) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \, ds \;\leq\; \varepsilon$$

para todo $t > t_0$ se escolhermos $t_0 > 0$ suficientemente grande, temos de ter $t^{1/2} \| Du(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \to 0$ ao $t \to \infty$ [22], [23]. Em particular, lembrando novamente que $w(t) \to 0$ ao $t \to \infty$, obtemos $\| u(\cdot,t) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \varepsilon$ para todo t suficientemente grande, e a demonstração está completa. □

4.4 N-S e Equação do Calor

Teorema 4.4.1. *Sendo $u(\cdot,t)$ solução de (4.1) e (4.2), então, valendo (4.5), tem-se*

$$t^{\gamma} \| u(\cdot,t) - e^{\nu\Delta t} u_0 \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{ao} \quad t \to +\infty, \tag{4.26}$$

se $0 \leq \gamma < \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$.

Prova: O caso $\gamma = 0$ foi obtido na seção anterior. Considerando $\gamma > 0$, por (4.5), temos

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|e^{\nu\Delta t}u_0 + \int_0^t e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)ds - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\int_0^t e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)ds\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \int_0^t \|e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds \\
&= \int_0^{\frac{t}{2}} \|e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds + \int_{\frac{t}{2}}^t \|e^{\nu\Delta(t-s)}Q(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds
\end{aligned}$$

Do Teorema 4.2.3 segue que

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq K_2\int_0^{\frac{t}{2}}(t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds \\
&\quad + K_1\int_{\frac{t}{2}}^t(t-s)^{-\frac{n}{4}}\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}ds \\
&\leq K_2\Big(\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{t}{2}}(1+s)^{-2\gamma}ds \\
&\quad + K_1\int_{\frac{t}{2}}^t(t-s)^{-\frac{n}{4}}(1+s)^{-\gamma}(1+s)^{-\gamma-\frac{1}{2}}ds \\
&\leq K_2\Big(\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\Big[\frac{1}{1-2\gamma}\big(1+\frac{t}{2}\big)^{1-2\gamma} - \frac{1}{1-2\gamma}\Big] \\
&\quad + K_1\Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{-2\gamma-\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-\frac{n}{4})}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{1-\frac{n}{4}} \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Se $\gamma \in \Big(\frac{1}{2}, \frac{n}{4}+\frac{1}{2}\Big)$, por (4.27)

$$\|u(\cdot,t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2\mathbb{R}^n} \leq \frac{K_2}{2\gamma-1}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} + K_1\Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{-2\gamma-\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-\frac{n}{4})}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{1-\frac{n}{4}} \tag{4.28}$$

Se $\gamma \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big)$, por (4.27)

$$\|u(\cdot,t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2\mathbb{R}^n} \leq K_2\frac{\big(1+\frac{t}{2}\big)^{1-2\gamma}}{2\gamma-1}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} + \frac{K_1}{(1-\frac{n}{4})}\Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{-2\gamma-\frac{1}{2}}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{1-\frac{n}{4}} \tag{4.29}$$

Se $\gamma = \frac{1}{2}$ e $n = 2$ então

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\Big((1+s)^{-\frac{1}{2}}\Big)^2 ds \\
&\quad + \int_{\frac{t}{2}}^{t} (t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} ds \\
&\leq \Big(\frac{t}{2}\Big)^{-1} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-1} ds \\
&\quad + \Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{3}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^{t} (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds \\
&= \Big(\frac{t}{2}\Big)^{-1} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-1}(1+s)^{\frac{1}{4}}(1+s)^{-\frac{1}{4}} ds \\
&\quad + 2\Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\frac{t}{2}\Big)^{-1} \Big(\int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-\frac{3}{2}}\Big)^{\frac{1}{2}} ds \\
&\quad + 2\Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\frac{t}{2}\Big)^{-1} \Big(2\Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} - 2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(2 - 2\Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + 2\Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|u(\cdot,t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2\Big(\frac{t}{2}\Big)^{-1}\Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{\frac{1}{4}} + 2\Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\frac{t}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.30}$$

Se $\gamma = \frac{1}{2}$ e $n = 3$ então

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_0^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-1} ds \\
&= \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{3}{2}} ds \\
&\quad + \int_{\frac{t}{2}}^{t} (t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{3}{2}} \\
&\leq 2\Big(\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{3}{4}} + 4\Big(\frac{t}{2}\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(1+\frac{t}{2}\Big)^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Portanto, de (4.29), (4.30) e (4.31),

$$t^{\gamma}\|u(\cdot,t)-e^{\nu\Delta t}u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\to 0 \ \text{ ao } \ t\to+\infty,$$

o que finaliza a demonstração. □

4.5 Blow-up de soluções (n=3)

No teorema abaixo determinamos uma constante K razoavelmente pequena para a desigualdade de Nirenberg-Gagliardo

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\le K\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u(\cdot,t)\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

A prova deste resultado melhorou significantemente o argumento utilizado em [34] capítulo 13.

Teorema 4.5.1. *Considere $u(\cdot,t)\in H^1(\mathbb{R}^3)$. Então, $u(\cdot,t)$ satisfaz*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\le K\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u(\cdot,t)\|^{\frac{3}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)},\qquad K=0.654 \tag{4.32}$$

Prova: Dados $x\in\mathbb{R}^3$ e $g\in C^2([0,1])$ tal que $g(0)=1$, $g(1)=0$ e $g'(1)=0$, temos

$$u(x)=-\int_0^1\frac{\partial}{\partial r}[g(r)u(x+rw)]dr$$

Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 r\frac{\partial^2}{\partial r^2}[g(r)u(x+rw)]dr\\ &= \int_0^1 r\big[g''(r)u(x+rw)] + 2g'(r)\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x+rw)]w_j\\ &\qquad + g(r)\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(x+rw)]w_iw_j\big]dr \end{aligned}$$

Assim, por Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}|u(x)| \;\leq\;& \Big(\int_0^1 |g''(r)|^2 dr\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^1 r^2|u(x+rw)|^2 dr\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &+ 2\Big(\int_0^1 |g'(r)|^2 dr\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^1 r^2|Du(x+rw)|^2 dr\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \Big(\int_0^1 |g(r)|^2 dr\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^1 r^2|D^2u(x+rw)|^2 dr\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Integrando em $|w| = 1$ temos

$$|u(x)| \;\leq\; \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\Big(C(g)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2B(g)\|Du\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + A(g)\|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big), \tag{4.33}$$

onde

$$A(g) = \|g\|_{L^2([0,1])} \tag{4.34}$$

$$B(g) = \|g'\|_{L^2([0,1])} \tag{4.35}$$

$$C(g) = \|g''\|_{L^2([0,1])} \tag{4.36}$$

Segue do Teorerma 4.2.6 que

$$\begin{aligned}\sqrt{4\pi}\|u(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \;\leq\;& C(g)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2B3^{\frac{1}{4}}(g)\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|D^2u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &+ A(g)\|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned} \tag{4.37}$$

Aplicando a desigualdade (4.37) para $v(x) = u(\lambda x)$ obtemos

$$\begin{aligned}\sqrt{4\pi}\|u(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \;\leq\;& C(g)\lambda^{-\frac{3}{2}}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2B(g)3^{\frac{1}{4}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &+ A(g)\lambda^{\frac{1}{2}}\|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned} \tag{4.38}$$

Assim, dado $t > 0$, seja $\lambda > 0$ dado por

$$\lambda = t^{-\frac{2}{3}}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u\|^{-\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \tag{4.39}$$

Então, segue de (4.38) e (4.39) que

$$\sqrt{4\pi}\|u(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \big(C(g)t + 2B(g)3^{\frac{1}{4}}t^{\frac{1}{3}} + A(g)t^{-\frac{1}{3}}\big)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}} \tag{4.40}$$

Tomando

$$t = \Big(\frac{-3^{\frac{1}{4}}B(g) + \sqrt{3^{\frac{1}{2}}B(g)^2 + 3A(g)C(g)}}{3C(g)}\Big)^{\frac{3}{2}}, \tag{4.41}$$

otemos

$$\|u(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{4}{3}\widehat{K}(g,g',g'')\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{4}}\|D^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{4}}, \tag{4.42}$$

onde

$$\widehat{K}(g,g',g'') = \frac{1}{\sqrt{3C(g)}}\frac{3A(g)C(g) - 3^{\frac{1}{2}}B(g)^2 + 3^{\frac{1}{4}}B(g)\sqrt{3^{\frac{1}{2}}B(g)^2 + 3A(g)C(g)}}{\big(-3^{\frac{1}{4}}B(g) + \sqrt{3^{\frac{1}{2}}B(g)^2 + 3A(g)C(g)}\big)^{\frac{1}{2}}} \tag{4.43}$$

Tomando

$$g(r) = (1-r)^\alpha(1+\rho r), \tag{4.44}$$

para $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$, temos

$$A(g)^2 = \frac{1}{2\alpha+1}\Big(1 + \frac{\rho}{\alpha+1}\big(1 + + \frac{\rho}{2\alpha+3}\big)\Big) \tag{4.45}$$

$$B(g)^2 = \frac{1}{\alpha(2\alpha-1)}\Big(\frac{\rho^2(1+\alpha)^2}{2\alpha+1} + (\rho-\alpha)(\rho^2+\alpha)\Big) \tag{4.46}$$

$$C(g)^2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)(2\alpha-3)}\Big[\frac{\rho^2(1+\alpha)^2}{2\alpha-1} + (\alpha-2\rho-1)\Big((\alpha-\rho)(\alpha-2)\rho+1\Big)\Big] \tag{4.47}$$

Então, escolhendo $\alpha = 1.501$ e $\rho = -1.05$, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{4}{3}\widehat{K}(g,g',g'') = 0.654, \tag{4.48}$$

o que finaliza a demostração do Teorema 4.5.1. $\square$

Teorema 4.5.2. *Considere $u(\cdot,t)$ solução de (4.1)e (4.2). Se*

$$\|u(\cdot,t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|Du(\cdot,t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\nu^2}{3^{\frac{1}{4}}K^2},$$

para algum t_0, onde K é a constante em (4.32) , então

$$\frac{d}{dt}\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 0 \ \forall \quad t > t_0.$$

Prova: Seguindo [22], [23] temos, pelos Teoremas 4.2.5 e 4.2.6,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad &\leq \quad 2\sqrt{3}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3))}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u(\cdot,t)\|^{\frac{7}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad - 2\nu\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.5.1,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \\ &2\|D^2u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\Big(\sqrt{3}\|u(\cdot,t)\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3))}\|Du(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|D^2u(\cdot,t)\|^{-\frac{1}{4}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \nu\Big).\end{aligned}$$

Assim, se

$$\|u(\cdot,t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|Du(\cdot,t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\nu^2}{3^{\frac{1}{4}}K^2},$$

para algum $t_0 > 0$, então

$$\frac{d}{dt}\|Du(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 0,$$

para $t > t_*$, o que finaliza a prova do teorema. $\square$

No teorema a seguir, obtemos uma limitação para o tempo de "blow-up"de $u(\cdot,t)$.

Teorema 4.5.3. *Seja $u(\cdot,t)$ solução de (4.1)e (4.2). Se existe "blow-up"em $u(\cdot,t)$ num instante $t_* > 0$, então*

$$t_* < 0.159\frac{1}{\nu^5}\|u_0\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Prova: Integrando (4.13) em $[0,T]$, obtemos

$$\|u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_0^T \|Du(\cdot,s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}ds = \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.49}$$

Mas, pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_m \in [0,T]$ tal que

$$\|Du(\cdot,t_m)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{2\nu T}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.50}$$

e então,

$$\|u(\cdot,t_m)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|Du(\cdot,t_m)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{2\nu T}\|u_0\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.51}$$

Logo, se

$$T \leq \frac{(0.654)^4\sqrt{3}}{2\nu^5}\|u_0\|^4_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.52}$$

então

$$\|u(\cdot,t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|Du(\cdot,t_m)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\nu^2}{3^{\frac{1}{4}}(0,654)^2},$$

Portanto, tomando $t_0 = t_m$, para T dado por (4.52), do Teorema 4.5.2 segue o resultado. □

5 APÊNDICE 1

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados sobre integrais fracionárias, com o objetivo de provar o Teorema 1.3.1.

O resultado 1.3.1, segundo Nicolas Du Pressis [29], segue da generalização do teorema devido a G. H. Hardy e J.E. Littlewood [17], como descrito a seguir.

5.1 Resultados Preliminares

Vamos descrever aqui algumas desigualdades que serão necessárias na próxima seção e que foram adaptadas de [19].

Teorema 5.1.1. *Se* $r > 1$*,* $s > 1$*,* $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \geq 1$ *e* u_j *e* v_j *são positivas, então*

$$\sum u_j v_j \leq \left(\sum u_j^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum v_j^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

Prova: Dados $r > 1$ e $s > 1$, se $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, obtemos a desigualdade devido a Hölder, [19]. Se $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \rho > 1$, considere $p = \rho r$ e $q = \rho s$. Assim, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e então,

$$\sum u_j v_j \leq \left(\sum u_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum v_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Como $p > r$ e $q > s$, pela Desigualdade de Jensen [1],

$$\left(\sum u_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum v_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum u_j^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum v_j^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

Portanto,

$$\sum u_j v_j \leq \left(\sum u_j^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum v_j^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

□

Teorema 5.1.2. *Se a_j e b_j são positivas , monótonas, uma crescente e outra decrescente, então*

$$N\sum_{j=1}^{N} a_j b_j \leq \sum_{j=1}^{N} a_j \sum_{j=1}^{N} b_j$$

.

Prova: De fato,

$$\begin{aligned} N\sum_{j=1}^{N} a_j b_j - \Big(\sum_{j=1}^{N} a_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{N} b_j\Big) &= \sum_{i,j=1}^{N} a_j b_j - \sum_{i,j=1}^{N} a_i b_j \sum_{i,j=1}^{N} \big(a_i b_i - a_j b_i\big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \big(a_j b_j + a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i\big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \big(a_j - a_i\big)\big(bj - b_i\big) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.1.3. *Se $p > 1$, a_n é positiva e $A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, então*

$$\sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{A_n}{n}\Big)^p \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p$$

.

Prova: Defina α_n por

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{A_n}{n} & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{A_n}{n}\Big)^p - \frac{p}{p-1}\Big(\frac{A_n}{n}\Big)^{p-1} a_n &= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1} a_n \\
&= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1}\big(n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}\big) \\
&= \alpha_n^p\Big(1 - \frac{np}{p-1}\Big) + \frac{p(n-1)}{p-1}\alpha_n^{p-1}\alpha_{n-1} \\
&\leq \alpha_n^p\Big(1 - \frac{np}{p-1} + n - 1\Big) + \frac{n-1}{p-1}\alpha_{n-1}^p \\
&= \frac{1}{p-1}\big(- n\alpha_n^p + (n-1)\alpha_{n-1}^p\big) \quad \forall\ n \geq 1,
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{A_n}{n}\Big)^p - \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{A_n}{n}\Big)^{p-1} a_n &= -\frac{1}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\big(n\alpha_n^p - (n-1)\alpha_{n-1}^p\big) \\
&= -\frac{N}{p-1}\alpha_n^p \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{A_n}{n}\Big)^p &\leq \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{A_n}{n}\Big)^{p-1} a_n \\
&\leq \frac{p}{p-1}\Big(\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{A_n}{n}\Big)^p\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\sum_{n}^{N} a_n^p\Big)\frac{1}{p},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Big(\sum_{j=n}^{N}\Big(\frac{A_n}{n}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

como queriamos mostrar. □

Teorema 5.1.4. *Suponha que*

$$S = \sum_{m,n=-N}^{N} c_{m-n} a_m b_n,$$

onde $c_v = c_{-v}$, $c_0 \geq c_1 \geq c_3 \geq ...$, $a_i > 0$ *e* $b_i > 0 \quad \forall\ i$. *Então, entre todas as ordenações para as quais* S *assume seu valor máximo, existe uma na qual* $a_m - a_{m'} \geq 0$, $b_n - b_{n'} \geq 0$ *sempre que* $|m| < |m'|$, $|n| < |n'|$

Prova: Para a demontração veja [19]

5.2 Demonstração do Teorema 1.3.1

Teorema 5.2.1. *Se* $a_m \geq 0$, $b_m \geq 0$, $r > 1$, $s > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > 1$ *e as séries* $\sum a_m^r$, $\sum b_n^r$ *convergem, então*

$$T = \sum_{m \neq n} \frac{a_m b_n}{|m-n|^\lambda} \leq K A^{\frac{1}{r}} B^{\frac{1}{s}}, \tag{5.1}$$

onde $\lambda = 2 - \frac{1}{r} - \frac{1}{s}$, *e* K *é uma função de* r *e* s *apenas.*

Prova: A prova a seguir é adaptada de [17]. Para provarmos o teorema basta mostrar a desigualdade (5.1) para $T_N = \sum_{m,n=-N; m \neq n}^{N} \frac{a_m b_n}{|m-n|^\lambda}$. Considerando $c_0 = 1$ e $c_\xi = |\xi|^{-\lambda}$ temos que $T_N \leq \sum_{m,n=-N}^{N} c_{m-n} a_m b_n$, com $c_\xi = c_{-\xi}$ e $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq ...$, como nas hipóteses do Teorema 5.1.4. Observe que em qualquer ordenação de $a_m' s$ e $b_n' s$, S não excede a soma de 4 somas do tipo $\overline{S} = \sum_{m,n=0}^{N} c_{m-n} a_m b_n$, com a_m e b_n funções decrescentes. Além disso, cada soma $\overline{S}$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\overline{S} = S_0 + S_1 + S_2$$

onde $S_0 = \sum a_m b_m$, $S_1 = \sum_{m>n} \frac{a_m b_n}{|m-n|^\lambda}$ e $S_2 = \sum_{m<n} \frac{a_m b_n}{|m-n|^\lambda}$. Assim, é suficiente mostrar que S_0 e S_1 satisfazem (5.1). Para isto vamos utilizar as desigualdades dos teoremas (5.1.1), (5.1.2) e (5.1.3). Assim, pelo Teorema 5.1.1, a soma S_0 satisfaz (5.1). Além disso, temos: $S_1 = \sum_{m=2}^{N} a_m \sum_{n=1}^{m-1} \frac{b_n}{(m-n)^\lambda}$. Como $(m-n)^{-\lambda}$ cresce com n e b_n decresce, escrevendo $B_n = b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + b_n$, segue do Teorema 5.1.2 que $\sum_{n=1}^{m-1} \frac{b_n}{(m-n)^\lambda} \leq \frac{B_{m-1}}{m-1} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{(m-n)^\lambda} \leq \frac{B_{m-1}}{(1-\lambda)(m-1)^\lambda}$. Então $S_1 \leq \sum_{m=2}^{N} a_m \frac{B_{m-1}}{(1-\lambda)(m-1)^\lambda}$. Aplicando o Teorema 5.1.1 com $r' = \frac{r}{r-1} > s$ no lugar de s obtemos $S_1 \leq \frac{1}{1-\lambda}\sum_{m=2}^{N} a_m \frac{B_{m-1}}{(m-1)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}\sum_{m=1}^{N-1} a_{m+1}\frac{B_m}{m^\lambda} \leq \frac{A^{\frac{1}{r}}}{1-\lambda}\Big(\sum_{m=1}^{N}\frac{B_m^{r'}}{m^{\lambda r'}}\Big)^{\frac{1}{r'}}$. Mas, aplicando o Teorema 5.1.1 para s e s', $B_m^s \leq m^{s-1}B$ e então $m^{-\lambda r'}B_m^{r'} \leq m^{-\lambda r'}B_m^s\big(m^{s-1}B\big)^{\frac{r'-s}{s}} = B^{\frac{r'-s}{s}}\Big(\frac{B_m}{m}\Big)^s$, se $-\lambda r' + \frac{(r'-s)(s-1)}{s} = -s$. Assim, pelo Teorema 5.1.3, $S_1 \leq \frac{A^{\frac{1}{r}}}{1-\lambda}B^{\frac{r'-s}{r's}}\Big(\sum_{m=1}^{N}\Big(\frac{B_m}{m}\Big)^s\Big)^{\frac{1}{r'}} \leq \frac{A^{\frac{1}{r}}}{1-\lambda}B^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r'}}\Big(\frac{s}{s-1}\Big)^{\frac{s}{r'}}B^{\frac{1}{r'}} = KA^{\frac{1}{r}}B^{\frac{1}{s}}$.

$\square$

Teorema 5.2.2. *Se $f \in L^r(0,\infty)$, $g \in L^s(0,\infty)$, $f \geq 0$, $g \geq 0$, $r > 1$, $s > 1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s} > 1$, e $F = \int_0^\infty f^r(x)dx$, $G = \int_0^\infty g^s(x)dx$, então*

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda}dxdy \leq F^{\frac{1}{r}}G^{\frac{1}{s}} \tag{5.2}$$

Prova: Suponhamos que $f(x)$ e $g(x)$ sejam zero para $x > \xi$ ou $y > \xi$ e contínuas em $(0,\xi)$. Denotamos o quadrado $0 \geq x \geq \xi$, $0 \geq y \geq \xi$ por D e a parte de D na qual $|x-y| \geq \epsilon > 0$ por $D(\epsilon)$. Logo, basta mostrar que

$$J(\epsilon) = \iint_{D(\epsilon)} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda}dxdy \leq F^{\frac{1}{r}}G^{\frac{1}{s}} \quad \forall\ \epsilon. \tag{5.3}$$

Considerando $x_m = \frac{m\xi}{\upsilon}$ e $y_n = \frac{n\xi}{\upsilon}$, onde $0 \geq m \geq \upsilon$ e $0 \geq n \geq \upsilon$. Dividindo D pelas linhas x_m e y_n, definimos $D_{m,n}$ o quadrado correspondendo a $m-1$, m, $n-1$, n e chamamos de $D_{m,n}(\epsilon)$ qualquer quadrado $D_{m,n}$ que tenha alguma ponto em comun com $D(\epsilon)$. Assim,

$$J(\epsilon) = \lim_{\upsilon\to\infty}\sum\iint_{D_{m,n}(\epsilon)} \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^\lambda}dxdy. \tag{5.4}$$

Suponda ainda que υ é grande o suficiente de modo que $|m-n| \geq 2$ e $|x-y| \geq |m-n|\frac{\xi}{2\upsilon}$ em todo o ponto de $D_{m,n}(\epsilon)$. Além disso, em $D_{m,n}(\epsilon)$

$$f(x)g(y) \leq f(x_m)g(y_n) + \eta_\upsilon,$$

onde η_υ tende uniformemente a zero quando $\upsilon \to \infty$. Assim, temos que

$$J(\epsilon) \leq \overline{\lim}\Big(\frac{2\upsilon}{\xi}\Big)^\lambda \sum\iint_{D_{m,n}(\epsilon)} \frac{f(x_m)g(y_n)+\eta_\upsilon}{|m-n|^\lambda}dxdy.$$

Mas, pelo Teorema 5.2.1,

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim}\Big(\frac{2\upsilon}{\xi}\Big)^{\lambda}\sum_{m,n}\iint_{D_{m,n}(\epsilon)}\frac{\eta_\upsilon}{|m-n|^{\lambda}}dxdy &= 2^{\lambda}\xi^{2-\lambda}\overline{\lim}\Big(\eta_\upsilon\upsilon^{2-\lambda}\sum_{m\neq n}\frac{1}{|m-n|^{\lambda}}\Big)\\
&\leq K\xi^{2-\lambda}\overline{\lim}\ \eta_\upsilon = 0.
\end{aligned}
$$

Então, novamente pelo Teorema 5.2.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
J(\epsilon) &\leq 2^{\lambda}\overline{\lim}\Big(\frac{\xi}{\upsilon}\Big)^{2-\lambda}\sum_{m\neq n}\frac{f(x_m)g(y_n)}{|x-y|^{\lambda}}\\
&\leq K\overline{\lim}\Big(\frac{\xi}{\upsilon}\Big)^{2-\lambda}\Big(\sum_{1}^{\upsilon}f^{r}(x_m)\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\sum_{1}^{\upsilon}g^{s}(y_n)\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&= K\overline{\lim}\Big(\frac{\xi}{\upsilon}\sum_{1}^{\upsilon}f^{r}(x_m)\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\frac{\xi}{\upsilon}\sum_{1}^{\upsilon}g^{s}(y_n)\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&= KF^{\frac{1}{r}}G^{\frac{1}{s}},
\end{aligned}
$$

o que prova (5.3).

Se $f(x)$ e $g(x)$ são quaisquer funções em $L^r(0,\xi)$ e $L^s(0,\xi)$ respectivamente, tal que $f(x)=0$ e $g(y)=0$ para $x\in[\xi,\infty)$, o resultado (5.3) segue por aproximação. Portanto, fazendo $\xi\to\infty$, obtemos (5.2). □

Teorema 5.2.3. *Se $f\in L^r(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^s(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}>1$, $r>1$, $s>1$ e $\mu=2-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}$ então*

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x)g(y)}{|x-y|^{-n\mu}}dxdy \leq K\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \tag{5.5}
$$

Prova: Vamos mostrar o caso n=3. Como a média aritmética é maior que a correspondente média geométrica temos

$$
\begin{aligned}
|x-y|^2 &= (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\\
&\geq 3|x_1-y_1|^{\frac{2}{3}}|x_2-y_2|^{\frac{2}{3}}|x_3-y_3|^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}
$$

e então,

$$
|x-y|^{-3\mu}\leq C|x_1-y_1|^{-\mu}|x_2-y_2|^{-\mu}|x_3-y_3|^{-\mu} \tag{5.6}
$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(x)g(y)}{|x-y|^{3\mu}}dxdy \leq C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(x)g(y)}{|x_1-y_1|^{\mu}|x_2-y_2|^{\mu}|x_3-y_3|^{\mu}}dxdy \tag{5.7}$$

Mas, pelo teorema 5.2.2,

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(x)g(y)}{|x_3-y_3|^{\mu}}dx_3dy_3 \leq C\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^r dx_3\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|g(y)|^s dy_3\Big)^{\frac{1}{s}}$$

Assim (5.7) é dominado por

$$C\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{F(x_1,x_2)G(y_1,y_2)}{|x_1-y_1|^{\mu}|x_2-y_2|^{\mu}}dx_1dx_2dy_1dy_2, \tag{5.8}$$

onde $F(x_1,x_2)=\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^r dx_3\Big)^{\frac{1}{r}}$ e $G(y_1,y_2)=\Big(\int_{\mathbb{R}}|g(y)|^s dy_3\Big)^{\frac{1}{s}}$ Da mesma forma, (5.8) é limitada superiormente por

$$C\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\bar{F}(x_1)\bar{G}(y_1)}{|x_1-y_1|^{-\mu}}dx_1dy_2, \tag{5.9}$$

onde $\bar{F}(x_1)=\Big(\int_{\mathbb{R}}|F(x_1,x_2)|^r dx_2\Big)^{\frac{1}{r}}$ e $\bar{G}(y_1)=\Big(\int_{\mathbb{R}}|G(y_1,y_2)|^s dy_2\Big)^{\frac{1}{s}}$ Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x)g(y)}{|x-y|^{n\mu}}dxdy \leq K\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Finalmente, utilizando os resultados acima, provamos o Teorema 1.3.1 utilizado no capítulo 1, seção 1.3.1 .

Teorema 1.3.1: *Se f é uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<r<s<\infty$, e $\frac{1}{s}=\frac{1}{r}+\frac{\lambda}{n}-1$, então $T_\lambda f$ existe quase sempre e*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|T_\lambda f|^s dx\Big)^{\frac{1}{s}} \leq A\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^r dx\Big)^{\frac{1}{r}}, \tag{5.10}$$

onde

$$T_\lambda f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{\lambda}}dy, \quad 0<\lambda<n,$$

Prova: Dada $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$, considere o operador $T_\lambda[f] \in L^s(\mathbb{R}^n)$ definido por:

$$T_\lambda[f](x) = \int_{\mathbb{R}^n)} \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda} dy. \tag{5.11}$$

Então,

$$\|T_\lambda[f]\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} = sup_{g \in L^{s'},\ \|g\|_{L^{s'}}=1} \int_{\mathbb{R}^n} |T_\lambda[f](x)||g(x)|dx, \tag{5.12}$$

onde s' é tal que $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$. Mas,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |T_\lambda[f](x)||g(x)|dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)g(x)}{|x-y|} dydx \\ &\underbrace{\leq}_{Teorema\ 5.2.3} K(\lambda, n, r, s')\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{s'}(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{n} - 1$. Portanto, como $\|g\|_{L^{s'}(\mathbb{R}^n)} = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_\lambda[f](x)||g(x)|dx \leq K(\lambda, n, r, s')\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)},$$

o que finaliza a prova do Teorema 1.3.1. □

Bibliografia

[1] BECKENBACH, E. F. , BELLMAN, R. , *Inequalities* , Springer-Verlag, (1965).

[2] BRAZ E SILVA, P. , ZINGANO, P.R. , *Some asymptotic properties for solutions of one-dimensional advectiondiffusion equations with Cauchy data in* $L^p(\mathbb{R})$, Comptes rendus-Mathématique, (2006), 465 - 467.

[3] BRAZ E SILVA, P. , ZINGANO, P.R. , *A supnorm estimate for advection-diffusion equations in heterogeneous medio*, Submited.

[4] BRÉZIS, H., *Annálisis funcional - Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1983.

[5] CARLEN, E. A. , LOSS, M., *Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with aplications to the 2-D Navier-Stokes equation*, Duke Math. J., **86**, (1996), 135-157.

[6] CHORIN, A. , MARSDEN J. E., *A Mathematical Introduction to Fluid Machanics*, Springer, 3rd ed., New York, 1993.

[7] DURO, G. , CARPIO, A., *Assinptotic profiles for convection-diffusion equations with variable diffusion*, Nonlinear Anal. T.M.A., **45**, (2001), 407-433.

[8] DURO, G. , ZUAZUA, E. , *Large time behavior for convection- diffusion equatio in* $\mathbb{R}^n$ *with assinptotic constant diffusion*, Comm. Partial. Diff. Eqs., **24**, (1999).

[9] ESCOBEDO, M. , ZUAZUA, E., *Large time behavior for convection-diffusion equatio in* $\mathbb{R}^n$, J. Funct. Anal., **100**, (1991), 119-161.

[10] Escobedo, M. , Vazquez, J. L. , Zuazua, E., *On a diffusion-convection equation in several space dimensions*, Indiana Univ. Math. J., **42**, (1993), 1413-1440.

[11] Fefferman C. L. , *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation, in: J. Carlson, A. Jaffe and A. Wiles (Eds.), The Millenium Prize Problems*, American Mathematical Society, Providence, (2006), 57-67.

[12] Fefferman, C. L. , *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation*, Clay Mathematics Institute, Cambridge, (2000).

[13] Friedman, A., *Partial Differential Equations*, New York, (1969).

[14] Gilbarg, D. , Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin, Springer, (1977).

[15] Harabetian, E. , *Rerefactions and large time behavior for parabolic equations and monotone schemes*, Comm. Math. Phys., **114** (1988),527-536.

[16] Haraux, A. , Weissler, F.B., *Non-uniqueness for a semilinear initial value problem* , Indiana Univ. Math. J, **31** (1982), 167 − 189.

[17] Hardy, G.H. , Littlewood, J.E. , *Some properties of fractional integrals. I*, Math. Z., Springer, **4** , (1928), 565 - 606.

[18] Hardy, G.H. , Littlewood, J.E. , Polya, G. , *The Maximum of a Certain Bilinear Form*, Proc. of the London Math. Soc., (1926), 265 - 282.

[19] Hardy, G.H. , Littlewood, J.E. , Polya, G., *Inequalities*, Cambridge, (1952).

[20] KATO, T. , *Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions*, Math Z.- Springer, **187** (1984), 471 – 480.

[21] KATO, T. , *The Navier-Stokes equations for an incompressible fluid in $\mathbb{R}^2$ with a masure as the initial vorticity*, Differ. Integ. Eqs., **7** (1994), 949-966.

[22] KREISS, H.O. , HAGSTROM, T. , LORENZ, J. , ZINGANO,P. , *Decay in time of the solution of the Navier-Stokes equation of incompressible flows*, Manuscripts (unpublished), Univerity of New Mexico, Albuquerque, NM ,(2003)

[23] KREISS, H.O. , HAGSTROM, T. , LORENZ, J. , ZINGANO,P., *Decay in time of incompressible flows*, J. Math. Fluid Mech., **5** (2003), 231-244

[24] KREISS, H.O. , LORENZ, J., *Initia Value Problems and the Navier-Stokes Equations*, Academic Press, New York , 1989.

[25] LADYZHENSKAYA, O. A. , SOLONNIKOV, V. A. , URAL'CEVA, N. N., *Linear and Quasilinear equations of Parabolic Type*, Aner. Math. Soc , Providence , (1968).

[26] LERAY, J., *Essai sur le mouvement d'un liquido visque emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934).

[27] MASUDA, K., *Weak solutions of Navier-Stokes equations*, Tohoku Math. J., 36 (1984), 623-646.

[28] MASUDA, K., *L^2 decay of solutions of the Navier-Stokes equations in the exterior domain*, Proc. Symp. Pure Math., AMS, vol. 45 (1986), Part 2, 179-182.

[29] N DU PLESSIS, *Some theorems about the Riesz fractional integral*, Trans. Amer. Math. Soc, (1955), 124 - 134.

[30] Schonbeck, M.E., *Decay of solution to parabolic conservation laws*, Comm. Partial Diff. Eqs., **7**, (1980), 449-473.

[31] Schonbeck, M.E., *Uniform decay rates for parabolic conservation laws*, Nonlinear Anal. T.M.A., **10**, (1986), 943-956.

[32] Sobolev, S., *On a Theorem of Functional Analysis(Russian)*, Math. Shornik., **4** , (1938), 471-497.

[33] Stein,E. M., Weiss, G. , *Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space*, J. Math. Mech, 1958 **7** , (1958), 504-514.

[34] Taylor, M.E., *Partial Differential Equations*, Vol. 3, Springer, New york (1996).

[35] Thorin, G.D., *Convexity Theorems*, Comm. Sem. Math. Univ. Lund, Uppsala, (1948), 1-57.

[36] Wiegner, M., *Decay Results for Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations on* $\mathbb{R}^n$, J. London Math. Soc., Marcel Dekker, **2** , 1987.