Laplaciana normalizada e suas propriedades

CNPq/UFRGS
Apoio

Lucas Gabriel Mota da Silveira (lucasgmsilveira@gmail.com)
Bolsista

Vilmar Trevisan (trevisan@mat.ufrgs.br)
Orientador

Introdução

A ideia geral no estudo de teoria espectral dos grafos é que conseguimos associar qualquer grafo a uma matriz correspondente que possui informações sobre a sua estrutura.

Uma questão surge acerca dessa associação:

De que forma os autovalores da matriz se relacionam à estrutura do grafo?

Motivados por essa questão, escolhemos a Laplaciana normalizada $\mathcal{L}$ como representação matricial de um grafo G e veremos como alguns parâmetros espectrais - energia e índice geral de Randic – se relacionam.

Por fim, vemos dois resultados acerca do espectro de $\mathcal{L}$.

Teoria dos Grafos

Um **grafo**, denotado por G, é um par (V, A), onde os elementos de V são chamados de **vértices** e os elementos de A de **arestas**, sendo cada aresta representada por um par de vértices.

Abaixo, temos $V = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $A = \{12,15,23,24,25,36,45,56\}$:

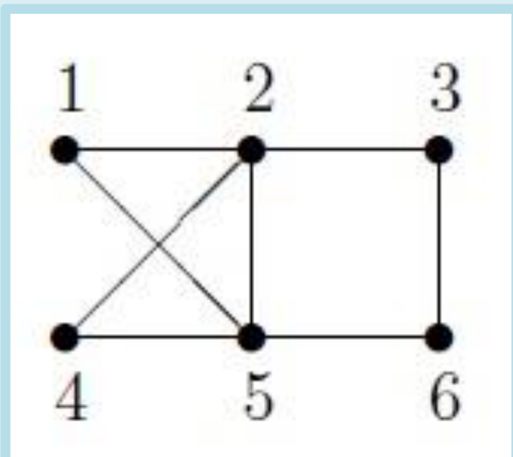

Figura 1: Grafo com 6 vértices e 8 arestas.

O **grau** de um vértice x, denotado por d_x, é o número de arestas incidentes a ele. Na figura acima, $d_1 = 2, d_2 = 4$ etc.

O **volume** de G, denotado por $vol(G)$, é a soma dos graus de todos os vértices de G.

Uma **matriz de graus**, denotada por D, é aquela cuja diagonal principal $D(x,x) = d_x$ *e* $D(x,y) = 0,\ \ caso\ x \neq y$.

O **traço** de uma matriz M, denotado por $tr(M)$, é a soma dos elementos da sua diagonal principal.

Laplaciana Normalizada ($\mathcal{L}$)

A Laplaciana normalizada é apenas uma das formas matriciais de representar um grafo. Suas linhas e colunas são indexadas pelos vértices de $G = (V, A)$ e é definida por:

$$L(x,y) = \begin{cases} 1, & se\ x = y\ e\ d_y \neq 0, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{d_x d_y}}, & se\ xy \in A, \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Abaixo podemos ver a matriz $\mathcal{L}$ do grafo G da Figura 1:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{8}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{8}} & 1 \end{bmatrix}$$

Espectro e Energia de $\mathcal{L}$

O **espectro** de uma matriz M é o conjunto dos seus autovalores, i.e., os λ tais que $\det(\lambda I - \mathrm{M}) = 0$, onde I é a matriz identidade.

Denotaremos por $\lambda_1(\mathcal{L}) \leq \lambda_2(\mathcal{L}) \leq \cdots \leq \lambda_n(\mathcal{L})$ os n autovalores de $\mathcal{L}$.

Se G é um grafo de ordem n e $\mathcal{L}$ é a Laplaciana normalizada associado a G, então a $\mathcal{L}$**- energia de G** é definia por

$$E_L(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(\mathcal{L}) - 1|$$

Índice Geral de Randic

Seja G um grafo de ordem n (possui n vértices), sem vértices isolados ($d_x \neq 0, \forall x \in V$). O **índice geral de Randic**, denotado por $R_\alpha(G)$, é definido como

$$R_\propto(G) = \sum_{x \sim y} (d_x\ d_y\ )^\alpha$$

onde a soma é sobre todas as arestas $xy \in A$. Utilizaremos neste trabalho $\propto = -1$.

Relação entre $R_{-1}(G)$ e $\mathcal{L}$

Seja G *um grafo de ordem* n *sem vértices isolados. Então*

$$2R_{-1}(G) \leq E_{\mathcal{L}}(G) \leq \sqrt{2nR_{-1}(G)}.$$

Acima vemos a importância em conhecer $R_{-1}(G)$ quando queremos informações sobre a $\mathcal{L}$- energia de G, pois ao determinarmos como a estrutura de G se relaciona com $R_{-1}(G)$, saberemos informações sobre $E_{\mathcal{L}}(G)$.

Alguns resultados sobre $\mathcal{L}$

Teorema da Matriz − Árvore

Seja G *um grafo de ordem* n *com matriz de graus* D*. Então o número de árvores geradoras de* G *é dado por*

$$t(G) = \frac{\det(D)}{vol(G)} \prod_{i=2}^{n} \lambda_i(\mathcal{L})$$

onde $\mathcal{L}$ *é a Laplaciana normalizada de* G.

A seguir, temos um resultado relacionando o número de árvores geradoras e os coeficientes do polinômio característico de $\mathcal{L}$. Mas primeiro, alguns novos conceitos.

Sejam $G = (V, A)$ um grafo de ordem n e $J = \{j_1, \ldots, j_q\} \subseteq V$. Para $J \neq \emptyset$, definimos G_J como sendo o multigrafo obtido de G ao trocar os vértices $\{j_1, \ldots, j_q\}$ por um único vértice v. O número de arestas de v nele mesmo é igual ao número de arestas entre os vértices de J, e o número de arestas de v à $k \in (V \setminus J)$ é igual ao número de $j \in J$ tais que $jk \in A$.

Corolário

Seja G *um grafo sem vértices isolados. Se* $\mathcal{L}$ *possui polionômio característico*

$$det(\lambda I - \mathcal{L}) = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda^1 + c_n$$

então para $i = 0,1,\ldots,n$

$$c_{n-i} = (-1)^{n-i} \sum_{\substack{J \subseteq V \\ |J| = i}} \frac{t(G_J)}{\prod_{k \in V \setminus J} d_k}$$

onde $t(G_\emptyset) = 0$ *e* $\prod_{k \in \emptyset} d_k = 1.$

Referências

CAVERS, M.S.; (2010). *The Normalized Laplacian Matrix and General Randic Index of Graphs.*
BIGGS, N.; (1993). *Algebraic Graph Theory*, 2ª ed., Cambridge University Press, Cambridge.
BIGGS, N.; LLOYD, E.; WILSON, R.; (1986). *Graph Theory*, Oxford University Press.
CVETKOVIC, D.; DOOB, M.; SACHS, H.; (1980). *Spectra of Graphs*, Academic Press, New York.