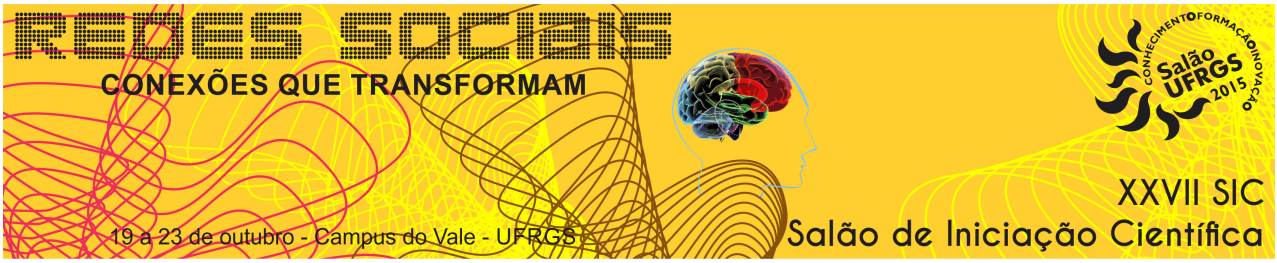

Evento	Salão UFRGS 2015: SIC - XXVII SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFRGS
Ano	2015
Local	Porto Alegre - RS
Título	Emparelhamentos em grafos e generalizações
Autor	LILIAN CAVALET
Orientador	CARLOS HOPPEN

Emparelhamentos em grafos e generalizações

Lilian Cavalet
Carlos Hoppen
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Neste trabalho buscamos abordar problemas propostos na área de Teoria de Grafos relacionados a emparelhamentos e suas possíveis aplicações. Dentre essas, destaca-se a busca por um emparelhamento máximo em um grafo, problema clássico no estudo de algoritmos que pode ser utilizado na determinação do caminho mínimo que cobre um digrafo acíclico, na determinação de rotas veiculares/aéreas, no problema do carteiro chinês, no problema de alocação de tarefas, entre outros. Tratamos, também do problema de emparelhamento estável, usualmente utilizado em processos seletivos para ingresso em universidades, na seleção de estagiários e na organização de colegas de quarto.

Definição 1. Um emparelhamento em um grafo G é um conjunto de arestas que não compartilham vértices finais. Os vértices incidentes às arestas de um emparelhamento M são ditos saturados por M os demais são ditos insaturados.

Um emparelhamento pode ser classificado como um emparelhamento perfeito, se satura todos os vértices do grafo, um emparelhamento estável, se satisfaz a ordem de preferência dos vértices, um emparelhamento maximal, se não pode ser aumentado por meio da adição de uma aresta ou um emparelhamento máximo, se possui o maior tamanho entre todos os possíveis emparelhamentos do grafo. Observe que todo emparelhamento perfeiro é máximo e todo emparelhamento máximo é maximal, mas a recíproca não é verdadeira.

Teorema 1. (*Teorema de Berge*) Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe um caminho de aumento, ou seja, dado um caminho que intercala arestas que estão e não estão no emparelhamento, este caminho não possui vértices finais insaturados pelo emparelhamento.

Teorema 2. (*Teorema de Hall*) Um grafo bipartido $G = (X, Y, E)$ tem um emparelhamento M que satura X se e somente se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$, com $N(S)$ a vizinhança de S.

Quando os conjuntos da bipartição têm o mesmo tamanho o Teorema de Hall é dito Teorema do Casamento. Outra versão desse problema é o Problema do Casamento Estável.

Definição 2. Dado um grafo bipartido $G = (X, Y, E)$ com $|X| = |Y|$, cujos vértices possuem uma lista ordenada de preferências de adjacências no complementar, busca-se um emparelhamento entre X e Y, seguindo a ordem de preferência dos vértices, de modo que não existam $x \in X$ e $y \in Y$ que prefiram abandonar suas duplas para se emparelharem.

Portanto é conveniente enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3. Sempre existe um emparelhamento estável em um grafo bipartido G.

Para a demonstração do **Teorema 3** utiliza-se o Algoritmo de Gale-Shapley, que produz um emparelhamento estável.
Frente a esta teoria propromos investigar as seguintes questões: É possível ter mais de um emparelhamento estável em um grafo? Como a mudança em algumas das listas de preferências de uma das bipartições de G afeta o emparelhamento estável? Por que o Algoritmo de Gale-Shapley privilegia a primeira bipartição a ter suas listas de preferências aplicadas? Existe alguma outra forma de encontrar um emparelhamento estável em que isso não ocorra? Como podemos tratar o emparelhamento em grafos não necessáriamente bipartidos?