Emparelhamento em Grafos e Generalizações

Lilian Cavalet (Autora)   Carlos Hoppen (Orientador)
lilian.cavalet@ufrgs.br   choppen@ufrgs.br

Introdução

Durante muito tempo buscou-se saber se era possível encontrar um menor caminho que passe por todas as ruas de uma determinada cidade, como aprimorar a produtividade ou economizar tempo através da alocação de tarefas, se existiria uma rota mais curta para certa frota viária que contemple os locais de embarque e desembarque pré-estabelecidos, como organizar colegas de quarto de forma que estes fiquem satisfeitos com a alocação. Todos estes problemas, e muitos outros, estão matematicamente relacionados com a parte da Teoria de Grafos que trabalha com emparelhamentos de grafos, conteúdo a ser abordado neste trabalho.

Emparelhamento e classificação

Emparelhamento	Um emparelhamento em um grafo G é um conjunto de arestas que não compartilham vértices finais. Os vértices incidentes às arestas de um emparelhamento M são ditos saturados por M os demais são ditos insaturados.

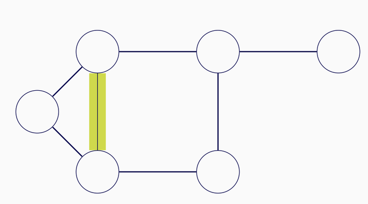

Fig. 1: A aresta destacada forma um emparelhamento do grafo apresentado.

Classificações de emparelhamento	Dentre as classificações de emparelhamento em um grafo G, neste trabalho apresentaremos os conceitos de emparelhamento maximal, emparelhamento máximo, emparelhamento perfeito e emparelhamento estável.

- **Emparelhamento maximal** Um emparelhamento maximal não pode ser aumentado por meio da adição de uma aresta.

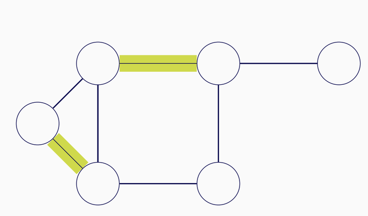

Fig. 2: As arestas destacadas formam um emparelhamento maximal.

- **Emparelhamento máximo** Um emparelhamento máximo possui o maior tamanho entre todos os possíveis emparelhamentos do grafo. Além disso todo emparelhamento máximo é maximal, mas a recíproca não é verdadeira.

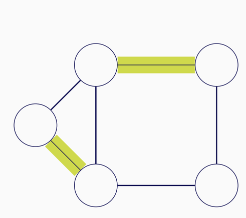

Fig. 3: As arestas destacadas formam um emparelhamento máximo e um emparelhamento maximal.

- **Emparelhamento estável** Um emparelhamento estável satisfaz a ordem de preferência de adjacência dos vértices denotada por {vértice : lista em ordem decrescente de preferência de adjacência do vértice}.

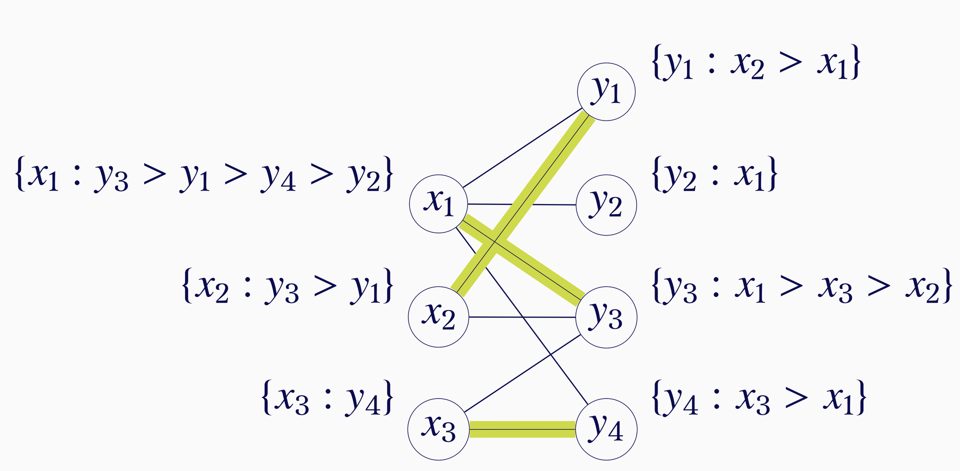

Fig. 4: As arestas destacadas formam um emparelhamento estável.

Aplicação

Considere o grafo bipartido que representa a sala de aula em que é ministrada a disciplina de Cálculo nas segundas e quartas-feiras das $10:30-12:10$ e $13:30-15:10$ e a disponibilidade de horários de três monitores. Com respectivos vértices denotados por S_M, S_T, Q_M, Q_T, M_1, M_2 e M_3. Buscamos a melhor maneira de distribuir os monitores de forma que estes estejam presente o máximo possível.

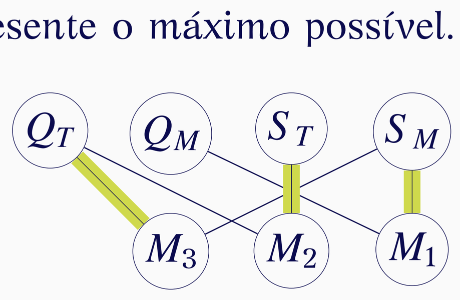

Fig. 5:

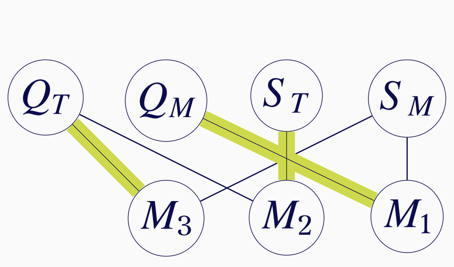

Fig. 6:

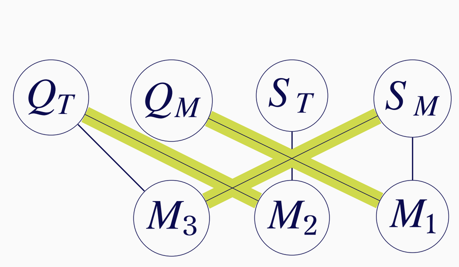

Fig. 7:

Teoremas de emparelhamento

Teorema 1 *(Teorema de Berge)*	Um emparelhamento M em um grafo G é máximo se e somente se não existe um caminho aumentante, ou seja, dado um caminho que intercala arestas que estão e não estão no emparelhamento, este caminho não possui vértices finais insaturados pelo emparelhamento.
Teorema 2 *(Teorema de Hall)*	Um grafo bipartido $G = (X, Y, E)$ tem um emparelhamento M que satura X se e somente se $\lvert N(S)\rvert \geq \lvert S\rvert$ para todo $S \subseteq X$, com $N(S)$ a vizinhança de S.

Quando os conjuntos da bipartição têm o mesmo tamanho o Teorema de Hall é dito Teorema do Casamento.

Teorema 3	Sempre existe um emparelhamento estável em um grafo bipartido G.

Este teorema garante a solução do problema do casamento estável proposto a seguir.

Problema do casamento estável

Dado um grafo bipartido $G = (X, Y, E)$ com $\lvert X\rvert = \lvert Y\rvert$, cujos vértices possuem uma lista ordenada de preferências de adjacências no complementar, busca-se um emparelhamento entre X e Y, tal que os vizinhos de cada vértice v são totalmente ordenados em uma lista de preferências de v seguindo a ordem de preferência dos vértices, de modo que não existam $x \in X$ e $y \in Y$ que prefiram abandonar suas duplas para se emparelharem.
Este emparelhamento é encontrado através da utilização do algorítmo de Gale-Shapley.

Outros problemas

- Multiplicidade de emparelhamentos estáveis.
Seja um grafo bipartido $G = (X, Y, E)$, tal que $a, b, c \in X$, $u, v \in Y$. Consideremos as listas de preferências de adjacências dadas por $\{u : a > b > c\}$, $\{v : b > c > a\}$, $\{a : v > u\}$, $\{b : u > v\}$, $\{c : v > u\}$.

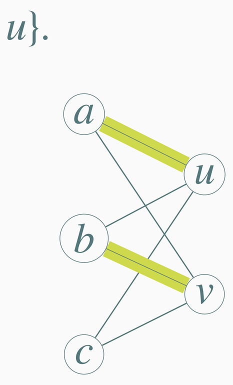

Fig. 8: Emparelhamento estável considerando as listas de preferências dos vértices de Y.

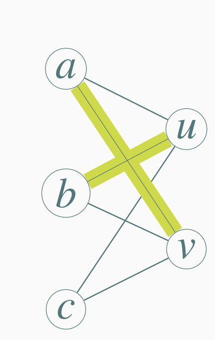

Fig. 9: Emparelhamento estável considerando as listas de preferências dos vértices de X.

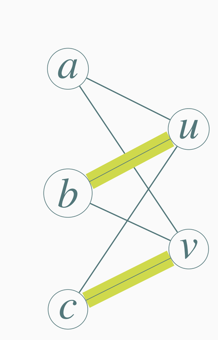

Fig. 10: Emparelhamento estável considerando as listas de preferências dos vértices de X e Y.

Portanto em um grafo podemos encontrar mais de um emparelhamento estável.

- A mudança em algumas das listas de preferências de uma das bipartições do grafo G afeta o emparelhamento estável.
Considere o grafo e as listas de preferências de adjacências do problema acima. Modificando a lista de preferência de adjacência do vértice v para $v : b > a > c$, ainda é possível gerar um emparelhamento estável diferente dos anteriores. Modificando a lista de preferência de adjacência de v tal que $v : a > b$, de u tal que $u : a > b$ e de b tal que $b : v$ observamos que não existe um emparelhamento estável, uma vez que se emparelhou a aresta (v, a) o que não torna possível satisfazer a preferência de b e emparelhar a aresta (v, b), uma vez que em no emparelhamento as arestas não devem compartilhar vértices finais.

Conclusão

Atualmente o trabalho está fundamentado na revisão bibliográfica, e tem se desenvolvido via questionamentos feitos sobre o conteúdo estudado e a busca destas respostas.

Referências

D. Gusfield and R. W. Irving, The Stable Marriage Problem, Structure and Algorithms, MIT Press, vol. 54, (1989).
D. B. West, Matchings and Factors, Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, Cap. 3, vol. 2, (2001).

CNPq
UFRGS UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS