

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DE CRITICALIDADE DA PLACA PLANA POR MÉTODOS ANALÍTICOS
DE SOLUÇÃO DAS APROXIMAÇÕES P_N E S_N DA EQUAÇÃO DO TRANSPORTE

Trabalho final apresentado por

LUÍS EDSON SARAIVA

para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Porto Alegre, maio de 1992.

Para Adriana.

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Marco Túllio de Vilhena, a quem devo o exemplo de dedicação ao trabalho e a valiosa experiência; às colegas Elaine Streck e Liliane Barichello, sempre prestativas; aos colegas de Mestrado cuja camaradagem lembrarei sempre.

RESUMO

Neste trabalho é feito um estudo comparativo entre diferentes métodos de solução da equação do transporte de nêutrons aplicados ao problema de criticalidade da placa plana. São comparados os valores obtidos pelo método de Case e pelo método PN àqueles obtidos pelos recentemente desenvolvidos métodos LTPN e LTSN, cujo cálculo é feito pela primeira vez.

ABSTRACT

This work is a comparative study about different methods of solution of the Neutron Transport Equation applied to the critical slab problem. Results obtained at the first time by the recently developed LTP_N and LTS_N Methods to the critical slab problem are compared to those obtained by Case's Method and P_N Method.

ÍNDICE

RESUMO	III
ABSTRACT	IV
INTRODUÇÃO	1
Capítulo I - MÉTODO DE CASE	5
1.0 - Introdução	5
2.0 - Completicidade e Ortogonalidade das Soluções Elementares ..	10
3.0 - O Problema de Milne e a Distância Extrapolada	12
4.0 - O Problema Crítico para uma Placa Plana	15
4.1 - Soluções Aproximadas	18
Capítulo II - MÉTODO PN	20
1.0 - Introdução	20
2.0 - Aplicação do Método PN na Solução do Problema de Criticali- dade para uma Placa Plana	23

Capítulo III - MÉTODO LTSN	28
1.0 - Introdução	28
2.0 - A Formulação Analítica LTSN	29
3.0 - O Método LTSN Aplicado ao Problema de Criticalidade	31
Capítulo IV - MÉTODO LTPN	38
1.0 - Introdução	38
2.0 - A Formulação LTPN	39
CONCLUSÕES	49
APÊNDICE A	51
APÊNDICE B	64
BIBLIOGRAFIA	68

INDICE DE TABELAS

TABELA 1	27
TABELA 2	37
TABELA 3	48

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 - Placa Plana de Espessura $2a$	15
FIGURA 2 - Movimento de Nêutron em Geometria Plana	62

INTRODUÇÃO

A Teoria do Transporte é o ramo da Física que estuda a distribuição de partículas em um meio e foi introduzida por Boltzmann (1872), [12], na Teoria Cinética. As equações de Boltzmann constituem um sistema de equações integro-diferenciais. Assumindo-se, porém, que: i) não haja colisão de partículas semelhantes; ii) apenas um tipo de partículas esteja sendo transportada; iii) as partículas sejam clássicas; iv) a ordem de magnitude da densidade das partículas seja menor que a densidade do meio, [7,8,12], faz-se possível a redução do sistema a uma única equação integro-diferencial linear. As hipóteses adotadas para linearizar as equações de Boltzmann são adequadas à descrição do comportamento de partículas não carregadas eletricamente, como os nêutrons. A equação linearizada de Boltzmann é, portanto, a equação básica na teoria de transporte de nêutrons em meios multiplicadores.

A equação linear de Boltzmann, doravante denominada equação de transporte de nêutrons, pode ser derivada por meio de um simples balanço dos mecanismos pelos quais partículas aparecem e de-

saparecem em um elemento de volume no espaço de fase $(\underline{r}, \underline{\Omega}, E)$, (ver apêndice A), ou seja,

[taxa de variação da densidade com o tempo] = [variação da densidade devido às partículas que cruzam a fronteira do elemento de volume] + [variação devido às partículas que sofrem colisão e que ingressam ou abandonam o espaço de fase] + [variação devido à presença de fontes].

Este balanço é representado matematicamente como

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) = & \\ -\underline{\Omega} \cdot \nabla \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) - \sigma(\underline{r}, E, t) \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + & \\ + \int_0^{\infty} dE' \int_{4\pi} d\underline{\Omega}' \sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t), & \\ Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) & \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ é o fluxo angular; $\sigma(\underline{r}, E, t)$ é a secção de choque macroscópica total, $\sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E)$ é a secção de choque diferencial de transferência, que descreve a probabilidade que tem uma partícula com energia inicial E' e direção $\underline{\Omega}'$ de sofrer uma colisão em \underline{r} no tempo t , resultando na mudança de direção e energia; $Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ é o termo de fonte.

Além da reação de espalhamento de nêutrons com os núcleos do meio, resultam também nêutrons emitidos na fissão, (no caso de meio multiplicador), motivo pelo qual o núcleo do termo integral na e-

quação (1) inclui o termo

$$\frac{\chi(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \omega(E') \Sigma_f(\underline{r}, E', t) \psi(\underline{r}, \Omega', E', t) \quad (2)$$

onde $\chi(E)$ é a distribuição de nêutrons de fissão, (espectro); $\omega(E')$ é o número médio de nêutrons emergentes por fissão e $\Sigma_f(\underline{r}, E', t)$ é a secção de choque macroscópica, assumida como isotrópica.

Soluções exatas para a equação do transporte de nêutrons são obtidas apenas para modelos físicos altamente idealizados, pelo método de expansão na autofunção singular, (método de Case), ou pelo método da transformada de Fourier, [7,8].

Para problemas mais complexos, a solução da equação do transporte é conseguida por métodos numéricos. Existem inúmeros métodos desenvolvidos mas todos eles baseiam-se em algumas poucas técnicas de aproximação tais como diferenças finitas para operadores diferenciais, fórmulas de quadratura para operadores integrais ou métodos de expansão. Entre os vários métodos os mais usados são: o método de expansão em harmônicos esféricos, (APN e DPN); ordenadas discretas, (SN); método dos elementos finitos; método dos característicos; método do transporte integral, (probabilidade de colisão; transformação integral); método da interface ou superfície integral, (CN, FN; leito invariante); e método da malha nodal, [12,14].

Neste trabalho encontramos soluções analíticas para as aproximações PN e SN da equação do transporte de nêutrons unidimensional aplicadas ao problema de criticalidade da placa plana. Estas soluções analíticas aproximadas são comparadas aos valores exatos obtidos por Case, [8]. A importância da solução analítica reside no fato de que as mesmas servem como teste para os esquemas numé-

ricos que são aplicados em problemas reais de física de reatores, transporte de partículas, etc.

Outrossim, analisamos pela primeira vez o problema de criticalidade em uma placa plana pelos recentemente desenvolvidos métodos LTSN, [3,4,5,6,18], e LTPN, [15,16,17]. O método LTSN consiste de uma solução analítica para o problema de ordenada discreta (SN) em um meio homogêneo, em geometria plana, usando transformada de Laplace. Do mesmo modo, o método LTPN conjuga, para a equação do transporte de nêutrons em geometria plana, o uso da formulação PN com o uso da transformada de Laplace.

O presente trabalho é dividido em quatro capítulos -um capítulo para cada método estudado- e dois apêndices. No capítulo I é apresentado o Método de Case de solução da equação do transporte, bem como a solução do problema da criticalidade para uma placa, através desse método. O Método dos Harmônicos Esféricos (PN) é apresentado no capítulo II. O capítulo III trata do método LTSN e são mostrados, com algum detalhamento, os passos seguidos para a obtenção dos valores críticos do problema de criticalidade da placa plana. Adota-se igual procedimento no capítulo IV, onde é apresentado o método LTPN. Informações suplementares sobre a obtenção dos valores críticos pelos métodos PN, LTSN e LTPN são fornecidas no apêndice B. No apêndice A é demonstrada a dedução da equação do transporte de nêutrons, assim como as simplificações admitidas para se chegar à forma na qual ela é trabalhada na presente dissertação.

MÉTODO DE CASE

1.0 Introdução

Case [8] sugere, para a solução da equação do transporte, em sua forma homogênea, para um grupo em energia com espalhamento isotrópico, independente do tempo e em geometria plana, (ver apêndice A),

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = c \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad (1.1)$$

que o fluxo $\psi(x, \mu)$ seja expandido na forma:

$$\psi_\nu(x, \mu) = \phi_\nu(\mu) \exp(-x/\nu), \quad (1.2)$$

onde, em termos usuais, ϕ_ν seriam as autofunções e ν os correspondentes autovalores.

Substituindo na equação (1.1) o fluxo dado pela expres-

são (1.2), chega-se à equação

$$\left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \phi_v(\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \phi_v(\mu') d\mu', \quad (1.3)$$

dada em termos das autofunções e autovalores.

Por conveniência adota-se a normalização

$$\int_{-1}^1 \phi_v(\mu') d\mu' = 1, \quad (1.4)$$

uma vez que se trata da solução de uma equação linear homogênea.

Assim a equação (1.3) pode ser escrita como

$$(v - \mu) \phi_v(\mu) = \frac{c}{2} v. \quad (1.5)$$

Se, inicialmente for assumido que $v \neq \mu$ para qualquer valor de μ no intervalo $[-1, 1]$, da equação (1.5) obtém-se a seguinte solução para $\phi_v(\mu)$:

$$\phi_v(\mu) = \frac{c}{2} \frac{v}{v - \mu} \quad (1.6)$$

que introduzida na equação de normalização (1.4) e efetuada a integração resulta em

$$1 = cv \tanh^{-1} \left(\frac{1}{v}\right) = \frac{c}{2} v \ln \left(\frac{v+1}{v-1}\right). \quad (1.7)$$

A equação (1.7) tem como raízes $\pm v_0$ que serão reais se $c < 1$ ou complexas no caso de $c > 1$. Existem, portanto, dois autovalores discretos $+v_0$ e $-v_0$ que satisfazem a equação (1.3), se $\mu \neq v$,

cujas autofunções são fornecidas pela equação (1.6) e que são

$$\phi_0^+(\mu) = \frac{c}{2}(\nu_0/(\nu_0 - \mu)) \quad (1.8.a)$$

$$\phi_0^-(\mu) = \frac{c}{2}(\nu_0/(\nu_0 + \mu)) \quad (1.8.b)$$

Deste modo, equação (1.1) tem duas soluções para o caso de $\nu \neq \mu$:

$$\psi_0^+(x, \mu) = \exp(-x/\nu_0) \phi_0^+(\mu) \quad (1.9.a)$$

$$\psi_0^-(x, \mu) = \exp(x/\nu_0) \phi_0^-(\mu). \quad (1.9.b)$$

Existe, como se verá, outra solução para a equação (1.1) mas as soluções dadas pelas equações (1.9) dominam longe de fontes ou fronteira. São denominadas soluções assintóticas e, por isso, ψ_0 é chamado de fluxo assintótico.

Para calcular o valor de ν_0 procede-se, inicialmente, a expansão em série de Taylor da função tangente hiperbólica inversa que aparece na equação (1.7), o que resulta

$$1 = c\nu_0 \left[(1/\nu_0) + (1/3\nu_0^3) + (1/5\nu_0^5) + \dots \right], \quad (1.10)$$

que após algumas manipulações algébricas resulta na seguinte expressão para ν_0 :

$$\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{3(1-c)}} \left[1 + \frac{2}{5}(1-c) + \dots \right], \quad (1.11)$$

que é válida para c próximo da unidade. Aproximações para outros valores de c são encontrados em [8].

A raiz v_0 é chamada de comprimento assintótico de relaxação ou comprimento assintótico de difusão desde que determina a taxa de decaimento do fluxo assintótico com a distância.

Observa-se que no intervalo $0 < c < 1$, os valores de $|v_0|$ são maiores que a unidade e que para $c > 1$ são valores imaginários. Isto indica, portanto, que v_0 não se encontra no intervalo real $-1 \leq v_0 \leq 1$ e que por isso é permitido dividir a equação (1.5) por $(v_0 - \mu)$ para se obter solução $\phi_0(\mu)$ dada pela equação (1.6).

Quando $v = \mu$ a solução é divergente (singular). Além disso, não satisfaz a condição de normalização dada por (1.4) por que desta condição deriva a equação (1.7), cujas raízes $\pm v_0$ não se inscrevem no intervalo $[-1, 1]$.

Com o objetivo de determinar uma integral de normalização que inclua a solução singular ($v = \mu$), generaliza-se (1.6) pela adição de um termo, de modo que

$$\phi_v(\mu) = \frac{c}{2} \frac{v}{v-\mu} + \lambda(v)\delta(\mu-v), \quad (1.12)$$

onde $\lambda(v)$ é uma função arbitrária. Esta é a expressão para a solução da equação (1.5) para $v \in [-1, 1]$.

Pode-se agora determinar a função $\lambda(v)$ de modo a satisfazer a condição de normalização dada em (1.4). Antes, porém, deve-se indicar de que modo lidar com a singularidade quando se efetua a integração do primeiro termo da equação (1.12). Este problema é solucionado pela escolha do valor principal de Cauchy, uma vez

que

$$P \int_{-1}^1 \frac{v}{v-\mu'} d\mu' = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{v-\delta} \frac{v}{v-\mu'} d\mu' + \int_{v+\delta}^1 \frac{v}{v-\mu'} d\mu' \right],$$

onde o símbolo P denota o valor principal.

Escrita em sua forma final, a equação para $\phi_\nu(\mu)$ fica

$$\phi_\nu(\mu) = \frac{c}{2} P \frac{v}{v-\mu} + \lambda(\nu) \delta(\mu-\nu). \quad (1.13)$$

A função arbitrária $\lambda(\nu)$ pode agora ser determinada de modo a satisfazer a condição de normalização. Assim,

$$\lambda(\nu) = 1 - c\nu \tanh^{-1}(\nu) \quad (1.14)$$

Existe um *continuum* de autovalores (e autofunções) correspondentes a todos ν entre -1 e 1, além dos dois valores discretos que satisfazem a equação (1.7). A solução da equação (1.1) para $-1 \leq \nu \leq 1$ é representada, então, por

$$\psi_\nu(x, \mu) = \left[\frac{c}{2} P \frac{v}{v-\mu} + \lambda(\nu) \delta(\mu-\nu) \right] \exp(-x/\nu), \quad (1.15)$$

sendo $\lambda(\nu)$ a função indicada em (1.16).

Na próxima seção são mostradas algumas propriedades importantes das soluções elementares. Essencial para a compreensão do problema de criticalidade da placa plana, o conceito de distância extrapolada, (vinculada ao Problema de Milne), é desenvolvido na seção 3.0. Por último, o problema da criticalidade para uma placa

plana é explicitado na seção 4.0 e sua solução é mostrada na seção 4.1 deste capítulo.

2.0 Completicidade e Ortogonalidade das Soluções Elementares

Case [7,8] demonstra que as soluções obtidas acima são completas, ou seja, uma solução geral para a equação (1.1) pode ser escrita como

$$\psi(x, \mu) = a_{o+} \psi_o^+(x, \mu) + a_{o-} \psi_o^-(x, \mu) + \int_{-1}^1 A(v) \psi_v(x, \mu) dv \quad (1.16.a)$$

ou

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu) = & a_{o+} \phi_o^+(\mu) \exp(-x/v_o) + a_{o-} \phi_o^-(\mu) \exp(x/v_o) + \\ & + \int_{-1}^1 A(v) \phi_v(\mu) \exp(-x/v) dv, \end{aligned} \quad (1.16.b)$$

onde a_{o+} e a_{o-} são constantes e $A(v)$ é função de v , a serem determinadas.

Do mesmo modo, relações de ortogonalidade também são obtidas para as autofunções. Estas relações são utilizadas na determinação dos coeficientes de expansão das equações (1.16) em problemas de contorno. Para tanto, tomando-se a equação (1.3) para $\phi_v(\mu)$ e multiplicando-a por $\phi_{v'}(\mu)$, obtém-se

$$\left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \phi_{\nu}(\mu) \phi_{\nu}(\mu) = \frac{c}{2} \phi_{\nu}(\mu) \int_{-1}^1 \phi_{\nu}(\mu') d\mu';$$

semelhantemente, tomando a mesma equação em termos de $\phi_{\nu'}(\mu)$ e multiplicando-a por $\phi_{\nu}(\mu)$,

$$\left(1 - \frac{\mu}{v'}\right) \phi_{\nu'}(\mu) \phi_{\nu}(\mu) = \frac{c}{2} \phi_{\nu}(\mu) \int_{-1}^1 \phi_{\nu'}(\mu') d\mu';$$

subtraindo, por fim, uma da outra e integrando em μ , resulta que

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right) \int_{-1}^1 \mu \psi_{\nu}(\mu) \psi_{\nu'}(\mu) d\mu = 0. \quad (1.17)$$

Se $v' \neq v$, a seguinte relação de ortogonalidade fica estabelecida:

$$\int_{-1}^1 \mu \psi_{\nu}(\mu) \psi_{\nu'}(\mu) d\mu = 0, \quad (1.18)$$

sendo os valores de v e v' escolhidos tanto entre $\pm v_0$, como entre os valores do *continuum*, ou seja $v \in [-1, 1]$.

Resta o cálculo das integrais de normalização. Para $v' = v = v_0$, Case [7,8] obteve a seguinte expressão:

$$N_0^{\pm} = \int_{-1}^1 \mu \phi_0^{\pm}(\mu) \phi_0^{\pm}(\mu) d\mu,$$

que, valendo-se das relações explícitas acima calculadas, fica

$$N_0^{\pm} = \pm \frac{c}{2} v_0^3 \left[\frac{c}{v_0^2 - 1} - \frac{1}{v_0^2} \right] \quad (1.19)$$

No modo contínuo, ($v \in [-1, 1]$) é encontrada a fórmula

$$\int_{-1}^1 \mu \phi_{\nu}(\mu) \phi_{\nu'}(\mu) d\mu = N_{\nu} \delta(\nu - \nu'),$$

onde

$$N_{\nu} = \nu \left(\lambda^2(\nu) + \frac{\pi^2 c^2}{4} \nu^2 \right) \quad (1.20)$$

3.0 O Problema de Milne e a Distância Extrapolada

A formulação do Problema de Milne deveu-se, originalmente, à necessidade de determinação da distribuição angular da radiação emitida por uma estrela. Sob o ponto de vista do transporte de nêutrons, trata-se da determinação da distribuição de nêutrons em um meio semi-infinito com fluxo incidente nulo e uma fonte no infinito da qual os nêutrons são emitidos. Espera-se que, distante da fonte, porém suficientemente distante do limite da região semi-infinita ($x=0$), a solução decaia exponencialmente com o comprimento assintótico de relaxação ν_0 . Portanto, a solução "eleva-se" exponencialmente em direção à fonte (longe da fronteira). Devido a este comportamento, pode-se esperar que, se a solução for designada por $\Psi_0(x, \mu)$, [8],

$$\Psi_0(x, \mu) \rightarrow \bar{\psi}_0(x, \mu), \quad (1.21)$$

para $x \rightarrow \infty$.

Em $x=0$ é razoável esperar-se que os nêutrons que abandonam a placa semi-infinita não retornem. Portanto,

$$\Psi_0(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0. \quad (1.22)$$

Tendo em vista a discussão anterior, a solução para o Problema de Milne pode ser formulada como a combinação das soluções elementares que se anulam no infinito mais ψ_0^- . Então,

$$\Psi_0(x, \mu) = a_{0+} \psi_0^+(x, \mu) + \psi_0^-(x, \mu) + \int_0^1 A(v) \psi_v(x, \mu) dv, \quad (1.23)$$

sendo que o coeficiente de $\psi_0^-(x, \mu)$ foi feito igual à unidade para efeitos de normalização.

Aplicando-se a condição de contorno (1.22) na equação (1.23) tem-se, diretamente,

$$-\phi_0^-(\mu) = a_{0+} \phi_0^+(\mu) + \int_0^1 A(v) \phi_v(\mu) dv, \quad \mu \geq 0. \quad (1.24)$$

Aplicando relações de ortogonalidade desenvolvidas para o intervalo $0 \leq \mu \leq 1$, (*half-range*), os coeficientes a_{0+} e $A(v)$ são prontamente encontrados [7,8].

Relacionado ao Problema de Milne, um importante conceito aparece. Trata-se do conceito de distância extrapolada, ou seja, a distância da interface ($x=0$) para a qual o componente assintótico da densidade,

$$\rho_{as} = 2\pi \int_{-1}^1 [a_{0+} \psi_0^+(x, \mu) + \psi_0^-(x, \mu)] d\mu, \quad (1.25)$$

se anula.

Se ρ_{as} se anula na distância $x=-z_0$, (portanto à esquerda da placa semi-infinita) e considerando que

$$\psi_0^+(x, \mu) = \phi_0^+(\mu) \exp(\bar{\tau}x/v_0) \quad (1.26.a)$$

e

$$\int_{-1}^1 \phi_0^+(\mu) d\mu = 1, \quad (1.26.b)$$

resulta que

$$a_{0+} = \exp(-2z_0/v_0) = \exp((-2z_0/v_0) + i\pi), \quad (1.27.a)$$

ou

$$z_0 = \frac{v_0}{2} [-\ln a_{0+} + i\pi] \quad (1.27.b)$$

sendo que a_{0+} pode ser calculado com as relações de ortogonalidade mencionadas acima.

A expressão explícita para z_0 é dada pela seguinte fórmula:

$$z_0 = \frac{c}{2} \int_0^1 \frac{\mu}{N(\mu)} \left[1 + \frac{c \mu^2}{1-\mu^2} \right] v_0 \tanh^{-1} \left(\frac{\mu}{v_0} \right) d\mu. \quad (1.28)$$

Esta expressão pode ser simplificada e reescrita para diferentes valores de c , descritos a seguir:

$$cz_0(c) = 1 - \frac{c}{2} \ln \frac{2}{c}, \quad c \ll 1; \quad (1.29.a)$$

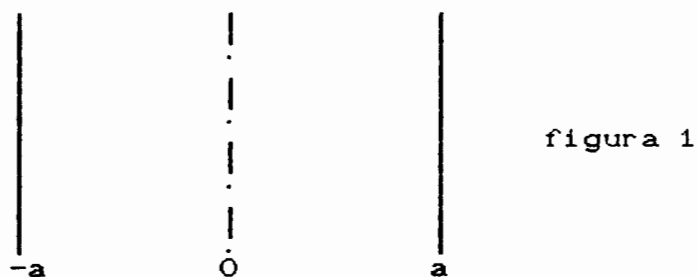
$$cz_0(c) = 0,710446 [1 - 0,0199(1-c)^2 + \dots], \quad (1.29.b)$$

para $|c-1| \ll 1$;

$$cz_0(c) = 3/4, \quad c \rightarrow \infty \quad (1.29.c)$$

4.0 O Problema da Criticalidade para uma Placa Plana

Considere-se uma placa plana de espessura $2a$, cujo centro coincide com a origem, conforme a figura 1.



No interior da placa o transporte de nêutrons é descrito pela equação

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' \quad (1.30)$$

sujeita à condição de simetria

$$\psi(x, \mu) = \psi(-x, -\mu), \quad (1.31)$$

e cuja condição de contorno é designada por

$$\psi(-a, \mu) = 0, \quad \mu \geq 0. \quad (1.32)$$

A solução é dada em termos da combinação linear das soluções elementares

$$\psi(x, \mu) = a_{0+} \psi_0^+(x, \mu) + a_{0-} \psi_0^-(x, \mu) + \int_{-1}^1 A(v) \psi_v(x, \mu) dv. \quad (1.33)$$

Da condição de simetria decorre que

$$a_{0+} = a_{0-} \quad (1.34. a)$$

e

$$A(v) = A(-v) \quad (1.34. b)$$

Assim, a equação (1.33) pode ser escrita como

$$\psi(x, \mu) = \psi_0^+(x, \mu) + \psi_0^-(x, \mu) + \int_0^1 A(v) [\psi_v(x, \mu) + \psi_{-v}(x, \mu)] dv, \quad (1.35)$$

admitindo a normalização $a_{0+} = 1$.

Aplicando a condição de contorno (1.32), chega-se a

$$\psi_0^+(-a, \mu) + \psi_0^-(-a, \mu) + \int_0^1 A(v) [\psi_v(-a, \mu) + \psi_{-v}(-a, \mu)] dv = 0, \quad \mu \geq 0 \quad (1.36)$$

cuja solução não é conhecida. Pode-se, porém, mudar-lhe a forma de

modo a encontrar uma solução iterativa. Fazendo

$$B(v) = A(v)\exp(a/v), \quad (1.37)$$

equação (1.36) torna-se

$$\begin{aligned} \int_0^1 B(v)\phi_v(\mu)dv &= -\phi_0(\mu)\exp(a/v_0) - \phi_0(\mu)\exp(-a/v) - \\ &- \int_0^1 B(v)\phi_v(-\mu)\exp(-2a/v)dv. \end{aligned} \quad (1.38)$$

A equação acima pode ser reescrita em termos das funções $X(z)$ propostas por Case, [8], na forma

$$\begin{aligned} v_0 X(v_0)\exp(a/v_0) - v_0 X(-v_0)\exp(-a/v_0) - \\ - \int_0^1 vB(v)X(-v)\exp(-2a/v)dv = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

cujos valores de $X(v)$ são calculados pela expressão

$$X(z) = \exp\left[\frac{-c}{2} \int_0^1 \frac{\mu'}{N(\mu')} \left[1 + \frac{c\mu'^2}{1-\mu'^2}\right] \ln(\mu'-z) d\mu'\right]. \quad (1.40)$$

A equação (1.39) é chamada de equação crítica. Tabelas com valores numéricos da função $X(z)$ para diferentes valores de z e c aparecem desenvolvidas na literatura [8].

A equação (1.38), novamente manipulada, fornece uma solução em termos de $B(\mu)$, cujo valor é inserido na equação crítica (1.39) a fim de determinar se os valores de c e a conduzem a uma

configuração crítica. Tal expressão toma a forma

$$\mu B(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)} \right] \left[- \frac{v_0 X(v_0)}{\mu - v_0} \exp(a/v_0) + \right. \\ \left. + \frac{v_0 X(-v_0)}{\mu + v_0} \exp(-a/v_0) + \int_0^1 \frac{v B(v)}{\mu + v} \exp(-2a/v) X(-v) dv \right] \quad (1.41)$$

4.1 Soluções Aproximadas

Não há sentido físico em buscar solução para o problema de criticalidade para $c < 1$, pois esta situação ocorre somente para $c > 1$. Em aplicações práticas, porém, não são encontrados casos em que c seja muito maior que a unidade. Por outro lado, demonstra-se, [8], que se $(c-1)$ é pequeno, o valor da espessura crítica é grande. Estas observações, aliadas ao fato de que a equação crítica (1.39) possui no termo integral a função exponencial com argumento negativo, $(-2a/v)$, levam a considerar razoável, como uma primeira aproximação, que esse mesmo termo possa ser negligenciado. Portanto, (1.39) reduz-se a

$$X(v_0) \exp(a/v_0) - X(-v_0) \exp(-a/v_0) = 0 \quad (1.42)$$

Considere-se o seguinte resultado decorrente da solução

do Problema de Milne:

$$X(-v_0)/X(v_0) = -\exp(-2z_0/v_0) \quad (1.43)$$

Esta expressão introduzida na equação (1.42) irá reduzi-la a

$$\cos[(a_0 + z_0)/|v_0|] = 0, \quad (1.44)$$

onde $|v_0|$ é o valor absoluto de v_0 e a_0 o valor da espessura crítica para esta primeira aproximação.

Portanto,

$$(a_0 + z_0)/|v_0| = \pi/2 \quad (1.45.a)$$

ou

$$a_0 = \pi|v_0|/2 - z_0 \quad (1.45.b)$$

Cumprе ressaltar que a espessura crítica acima obtida decorre da aproximação assintótica no sentido que somente as autofunções discretas foram consideradas na equação crítica (1.39).

MÉTODO P_N

1.0 Introdução

O método P_N, [1,2,7,8,10,11,14,19], de solução da equação do transporte para um grupo de nêutrons é, na verdade, a aplicação de um método genericamente denominado dos harmônicos esféricos, restrita às geometrias plana e esférica. Nestas geometrias as funções dos harmônicos esféricos reduzem-se aos polinômios de Legendre. O procedimento geral deste método consiste na expansão da dependência angular do fluxo em uma série de polinômios de Legendre, com vistas a eliminar o termo integral da equação do transporte, através da aplicação das relações de ortogonalidade destes polinômios. Esta série infinita é, então, truncada no N-ésimo termo.

Em geometria plana, o fluxo depende somente de x e μ , portanto pode ser expandido na forma:

$$\psi(x, \mu) = \sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{2} \phi_l(x) P_l(\mu), \quad (2.1)$$

onde $P_l(\mu)$ são os polinômios de Legendre e $\phi_l(x)$ funções da variável espacial a serem determinadas. As funções $\phi_l(x)$ são, para tanto, expandidas na forma, [2,19]:

$$\phi_l(x) = \exp(-x/v_j) T_l(v_j), \quad (2.2)$$

que apresenta semelhança ao processo de separação de variáveis proposto por Case, sendo $v_j, (j=1,2,\dots,N+1)$, as raízes do polinômio $T_{N+1}(v)$, como se verá a seguir. Deve-se, antes, observar que os polinômios $T_l(v)$ obedecem à fórmula de recorrência:

$$(2l+1) v T_l(v) = (l+1) T_{l+1}(v) + l T_{l-1}(v) + v \delta_{0,l} c, \quad (2.3)$$

semelhante a dos polinômios de Legendre, exceto pelo último termo. $\delta_{0,l}$ é definido como o delta de Kronecker e c o número médio de nêutrons secundários emitidos por colisão.

Os valores v_j provêm dos procedimentos que serão descritos a seguir. A expressão (2.1), escrita em termos da equação (2.2), aparece na forma

$$\psi(x, \mu) = \sum_{l=0}^N \sum_{j=1}^{N+1} \frac{2l+1}{2} A_j T_l(v_j) \exp(-x/v_j) P_l(\mu), \quad (2.4)$$

sendo $A_j, j=0,1,\dots,N$, coeficientes arbitrários a serem determinados conforme as condições de contorno prescritas para o problema

em questão. Se a equação (2.4) for introduzida na equação de transporte,

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad (2.5)$$

após manipulações algébricas, a seguinte relação será obtida:

$$P_N(\mu) T_{N+1}(v_j) - P_{N+1}(\mu) T_N(v_j) = 0, \quad (2.6)$$

a qual, multiplicada por $P_\beta(\mu)$ e integrada na variável μ no intervalo $[-1, 1]$, para $\beta=0, 1, \dots, N$, reduz-se a:

$$T_{N+1}(v_j) = 0. \quad (2.7)$$

Deste modo, para a aproximação de grau N , existem $N+1$ raízes v_j . Se N for um número ímpar, haverá um número par de raízes simétricas. Este fato decorre da característica de paridade apresentada pelo polinômio $T_N(v)$, para N ímpar.

Se for levada em consideração a simetria das raízes, equação (2.4) assume a seguinte forma:

$$\psi(x, \mu) = \sum_{l=0}^N \sum_{j=1}^{(N+1)/2} \frac{2l+1}{2} T_l(v_j) \exp(-x/v_j) P_l(\mu) [A_j + (-1)^l B_j], \quad (2.8)$$

sendo B_j também um coeficiente arbitrário a ser determinado e $j=0, \dots, (N+1)/2$. A expressão (2.8) é obtida usando-se a seguinte propriedade dos polinômios $T_l(v)$:

$$T_l(-\nu) = (-1)^l T_l(\nu) \quad (2.9)$$

2.0 Aplicação do Método PN na solução do problema de criticalidade para uma placa plana

Considere-se a equação do transporte independente do tempo, homogênea, com espalhamento isotrópico e um grupo de energia para uma placa plana de espessura $2a$, (ver figura 1):

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad (2.5)$$

simétrica,

$$\psi(x, \mu) = \psi(-x, -\mu), \quad (2.10)$$

e com a seguinte condição de contorno:

$$\psi(-a, \mu) = \psi(a, -\mu) = 0, \quad \mu \geq 0. \quad (2.11)$$

Da condição de simetria (2.10) resulta que $A_j = B_j$. Portanto,

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu) = & \sum_{l=0}^N \sum_{j=1}^{(N+1)/2} A_j \frac{2^{l+1}}{2} T_l(\nu_j) P_l(\mu) [\exp(-x/\nu_j) + \\ & + (-1)^l \exp(x/\nu_j)]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Não é possível satisfazer a condição de contorno (2.11) para a aproximação P_N . A razão reside no fato de que a condição de contorno é válida para $0 \leq \mu \leq 1$, enquanto na expansão $\psi(x, \mu)$ em termos de $T_l(v)$ o parâmetro v assume valores para $-1 \leq v \leq 1$. Por isso, a condição de contorno (2.11) será substituída por condições de contorno apropriadas que serão discutidas a seguir.

Uma destas condições, denominada condição de contorno de Mark, [7], equivale, fisicamente, a substituir o vácuo no exterior da placa por um meio puramente absorvedor, i.e., os nêutrons que abandonam a placa não mais retornam, ou seja,

$$\psi(-a, \mu_k) = \psi(a, -\mu_k) = 0, \quad (2.13)$$

sendo $k=1, 2, 3, \dots, (N+1)/2$, (N ímpar). Esta condição é válida para um número finito de valores μ_k , que são as raízes positivas de $P_{N+1}(\mu) = 0$.

A outra condição de contorno consiste em considerar os momentos ímpares do fluxo na variável μ , no intervalo $[0, 1]$, iguais a zero. Assim, para a aproximação P_N com N ímpar, tem-se $N+1$ condições de contorno, ou seja,

$$\int_0^1 P_k(\mu) \psi(-a, \mu) d\mu = \int_0^1 P_k(-\mu) \psi(a, -\mu) d\mu = 0, \quad (2.14)$$

sendo $k=1, 3, 5, \dots, N$, com N ímpar.

Estas são conhecidas como as condições de Marshak, [7]. Observa-se que para $k=1$, a condição resulta na inexistência de corrente entrando do exterior para a placa, familiar em teoria da difusão:

$$\int_0^1 \mu \psi(-a, \mu) d\mu = \int_0^1 \mu \psi(a, -\mu) d\mu = 0. \quad (2.15)$$

Verifica-se que as condições de contorno de Marshak propiciam resultados melhores que aqueles advindos da aplicação da condição de Mark [7,11]. Ambas, porém, são bastante utilizadas.

A fim de exemplificar o cálculo da meia-espessura crítica da placa plana, adotar-se-ão as condições de contorno de Marshak. Por esse motivo, a expressão (2.12), escrita para $x=a$ e $-\mu$ deve ser multiplicada por $P_k(-\mu)$, $k=1,3,\dots,N$, (N ímpar), integrada no intervalo $[0,1]$ e igualada a zero:

$$\int_0^1 P_k(-\mu) \psi(a, -\mu) d\mu = 0, \quad (2.16)$$

resultando um sistema de $(N+1)/2$ equações lineares, que permitem determinar as $(N+1)/2$ incógnitas A_j .

Assim, para a aproximação P_3 a seguinte equação matricial é obtida de (2.16):

$$\begin{bmatrix} R(v_1) & R(v_2) \\ S(v_1) & S(v_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_1 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.17)$$

onde

$$R(v_j) = 1/2 T_0(v_j) + 5/8 T_2(v_j) \cosh(a/v_j) + T_1(v_j) \sinh(a/v_j) \quad \text{e} \\ S(v_j) = -1/8 T_0(v_j) + 5/8 T_2(v_j) \cosh(a/v_j) + T_3(v_j) \sinh(a/v_j), \quad \text{com} \\ j=1,2.$$

Uma vez que $T_l(v_j)$, ($l=1,2,3$), e v_j são conhecidos, restam

como incógnitas os coeficientes constantes A_1 e A_2 e a meia espesura crítica a .

Para a determinação de a , que é o objetivo do cálculo de criticalidade, considera-se o fato de que, para que o sistema acima tenha solução não nula, o determinante da matriz deve ser nulo. O problema consiste, portanto, em determinar o valor de a que anula o determinante em (2.17). Para tanto, no presente trabalho utilizou-se o método da bissecção.

Na tabela abaixo são comparados os resultados exatos obtidos por Case, [8], àqueles obtidos pelas aproximações P_1 , P_3 e P_5 , utilizando condições de contorno de Marshak. São também apresentados os erros percentuais entre os valores exatos e os das aproximações.

c	Case	P ₁	Erro	P ₉	Erro	P ₅	Erro
1.1	4.2266	4.4573	5.46	4.2427	0.38	4.2318	0.12
1.2	2.5796	2.8250	9.51	2.6040	0.95	2.5852	0.22
1.3	1.8776	2.1226	13.05	1.9099	1.72	1.8840	0.34
1.4	1.4768	1.7162	16.21	1.5153	2.61	1.4844	0.51
1.5	1.2152	1.4470	19.07	1.2583	3.55	1.2243	0.75
1.6	1.0303	1.2538	21.69	1.0768	4.51	1.0409	1.03
1.7	0.8928	1.1078	24.08	0.9414	5.44	0.9047	1.33
1.8	0.7963	0.9931	24.71	0.8364	5.04	0.7995	0.40
1.9	0.7016	0.9006	28.36	0.7526	7.27	0.7158	2.02
2.0	0.6527	0.8241	26.26	0.6841	4.81	0.6477	0.77

TABELA 1

Comparação das espessuras críticas calculadas pelos métodos
P_N e Case

MÉTODO LTSN

1.0 Introdução

O método LTSN [3,4,5,6,18], consiste de uma formulação analítica para o problema de ordenada discreta da equação de transporte de nêutrons em geometria plana para um grupo de energia e espalhamento anisotrópico linear. Esta formulação analítica é obtida pela aplicação da transformada de Laplace na equação de ordenada discreta, (equação SN), com o domínio estendido adequadamente. Resulta deste procedimento um sistema de equações lineares que deve ser resolvido em termos do fluxo angular transformado. O fluxo angular é obtido por inversão do fluxo angular transformado, a qual se dá também analiticamente, pelo método de inversão por expansão de Heaviside. Para a solução do sistema de equações em termos do fluxo transformado, deve-se determinar a condição inicial $(\psi(0, \mu))$, desconhecida para $\mu < 0$, o que é conseguido a partir da aplicação da condição de contorno em $x=a$ para $\mu < 0$.

2.0 A formulação analítica LTSN

Seja

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{d\psi_m(x)}{dx} + \sigma_T \psi_m(x) = \frac{1}{2} [\sigma_{s0} \sum_{k=1}^N \psi_k(x) \omega_k + \\ + 3\mu_m \sigma_{s1} \sum_{k=1}^N \mu_k \psi_k(x) \omega_k] + Q(x), \quad m=1, \dots, N, \quad N \text{ par e } 0 \leq x \leq a \end{aligned} \quad (3.1)$$

a equação de ordenada discreta (SN), para o caso de espalhamento anisotrópico linear, sujeita às condições de contorno

$$\psi_m(0) = f_m, \quad \mu_m > 0 \quad (3.1.a)$$

e

$$\psi_m(a) = g_m, \quad \mu_m < 0, \quad (3.1.b)$$

onde f_m e g_m são os fluxos que entram na fronteira do domínio; $\psi_m(x) = \psi(x, \mu_m)$ é o fluxo angular de partículas na direção μ_m ; σ_T é a seção de choque total; σ_{s0} e σ_{s1} são as componentes de ordem zero e de primeira ordem da seção de choque diferencial de espalhamento, respectivamente; $Q(x)$ é o termo de fonte; μ_m são as raízes do polinômio de Legendre de N-ésimo grau e ω_k são os respectivos pesos da quadratura de Gauss.

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação (3.1), sem o termo de fonte, obtém-se o seguinte sistema linear, a ser resolvido:

$$A_{\sim}(s) \bar{\psi}(s) = F, \quad (3.2)$$

onde $A_{\sim}(s)$ é a matriz cujos elementos são:

$$A_{i,j} = s + \frac{\sigma_T}{\mu_j} - \frac{\sigma_{s0}\omega_j}{2\mu_j} - \frac{3}{2} \sigma_{s1}\omega_j\mu_j, \quad (3.3.a)$$

para $i=j$, $i,j = 1, \dots, N$;

$$A_{i,j} = - \frac{\sigma_{s0}\omega_j}{2\mu_i} - \frac{3}{2} \sigma_{s1}\omega_j\mu_j \quad (3.3.b)$$

para $i \neq j$, $i,j = 1, \dots, N$; e $\bar{\psi}(s)$ e F são os vetores:

$$\bar{\psi}(s) = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1(s) \\ \bar{\psi}_2(s) \\ \vdots \\ \bar{\psi}_N(s) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

sendo que $\bar{\psi}_m(s)$ representa a transformada de Laplace de $\psi_m(x)$.

Para a solução do sistema (3.2), são apresentadas expressões analíticas para a determinação dos cofatores e do determinante da matriz $A_{\sim}(s)$, obtidas por Barichello [4]. Assim,

$$\det A_{\sim}(s) = \prod_{k=1}^N \left(s + \frac{\sigma_T}{\mu_k} \right) - \sum_{k=1}^N \left[\frac{\sigma_{s0}\omega_k}{2\mu_k} + \frac{3}{2} \sigma_{s1}\omega_k\mu_k \right] \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left(s + \frac{\sigma_T}{\mu_l} \right) + \quad (3.5)$$

$$+ \frac{3}{4} \sigma_{s0}\sigma_{s1} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left(\omega_k\omega_l\mu_l \left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_l} \right) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k, l}}^N \left(s + \frac{\sigma_T}{\mu_m} \right) \right);$$

os cofatores de $A_N(s)$ para $i=j$ são diretamente obtidos através da seguinte fórmula:

$$B_{i,j} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \left(s + \frac{\sigma_T}{\mu_k} \right) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \left[\frac{\sigma_{s0}\omega_k}{2\mu_k} + \frac{3}{2} \sigma_{s1}\omega_k\mu_k \right] \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k \\ l \neq i}}^N \left(s + \frac{\sigma_T}{\mu_l} \right) + \quad (3.6)$$

$$+ \frac{3}{4} \sigma_{s0}\sigma_{s1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k, i}}^N \left(\omega_k\omega_l\mu_l \left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_l} \right) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k, l, i}}^N \left(s + \frac{\sigma_T}{\mu_m} \right) \right);$$

para $i \neq j$, os cofatores são dados por:

$$B_{i,j} = \left[\frac{\sigma_{s0}\omega_i}{2\mu_j} + \frac{3}{2} \sigma_{s1}\omega_i\mu_i \right] \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^N \left(s + \frac{\sigma_T}{\mu_k} \right) - \quad (3.7)$$

$$- \frac{3}{4} \sigma_{s0}\sigma_{s1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^N \left(\omega_i\omega_k\mu_k \left[\frac{1}{\mu_k} - \frac{\mu_i}{\mu_k^2} \right] \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i, j, k}}^N \left(s + \frac{\sigma_T}{\mu_l} \right) \right).$$

3.0 O método LTSN aplicado ao problema de criticalidade

Considere-se a equação de ordenada discreta (equação (3.1)), escrita sem termo de fonte e com espalhamento isotrópico:

$$\mu_m \frac{d\psi_m(x)}{dx} + \sigma_T \psi_m(x) = \frac{1}{2} \sigma_{s0} \sum_{k=1}^N \psi_k(x) \omega_k, \quad (3.8)$$

sujeita às mesmas condições de contorno (3.1.a) e (3.1.b).

Se se fizer $c = \frac{\sigma_{s0}}{\sigma_T}$, equação (3.8), escrita em termos da distância óptica ($x \rightarrow \sigma^{-1}x$), torna-se:

$$\mu_m \frac{d\psi_m(x)}{dx} + \psi_m(x) = \frac{1}{2} c \sum_{k=1}^N \psi_k(x) \omega_k \quad (3.9)$$

Tal formulação é conveniente pois vincula a espessura crítica (a) a um único parâmetro (c), que é o número de nêutrons que aparecem por colisão.

A equação (3.9) aplica-se a transformada de Laplace, resultando um sistema de equações algébricas em termos do parâmetro complexo s . Tal sistema pode ser visto na forma matricial, como na equação (3.2):

$$A\tilde{N}(s) \tilde{\psi}(s) = F. \quad (3.2)$$

Considerando-se a isotropia e que a equação de ordenada discreta é escrita em termos do parâmetro c , (equação (3.9)), as expressões para o determinante de $A\tilde{N}(s)$ e para os elementos da matriz de cofatores simplificam-se consideravelmente. Desta forma,

$$\det A\tilde{N}(s) = \prod_{k=1}^N \left(s + \frac{1}{\mu k} \right) - \sum_{k=1}^N \left(\frac{c \omega_k}{2\mu k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \left(s + \frac{1}{\mu l} \right) \right); \quad (3.10)$$

a expressão que dá os cofatores para $i=j$ torna-se:

$$B_{i,j} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \left(s + \frac{1}{\mu_k} \right) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \left(\frac{c \omega_k}{2\mu_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k \\ l \neq i}}^N \left(s + \frac{1}{\mu_l} \right) \right), \quad (3.11)$$

e para $i \neq j$ tem-se que

$$B_{i,j} = \frac{c \omega_i}{2\mu_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^N \left(s + \frac{1}{\mu_k} \right). \quad (3.12)$$

Para a solução do sistema (3.2) para o fluxo transformado,

$$\bar{\psi}(s) = A_N^{-1}(s) F, \quad (3.13)$$

considere-se que a matriz de cofatores é dada por

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{N1} & \dots & B_{NN} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Observa-se, pois, que

$$\begin{bmatrix} \bar{\psi}_1(s) \\ \bar{\psi}_2(s) \\ \vdots \\ \bar{\psi}_N(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1N} \\ B_{12} & & B_{N2} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{1N} & & B_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

sendo Δ o determinante da matriz $A_N(s)$.

Pode-se escrever uma expressão para o fluxo transformado, em termos do sistema acima do seguinte modo:

$$\bar{\psi}_m(s) = \frac{1}{\Delta} [B_{1m} f_1 + B_{2m} f_2 + \dots + B_{Nm} f_N] \quad (3.16)$$

O fluxo angular é obtido por inversão do fluxo transformado, por meio da técnica de inversão de Heaviside, ou seja,

$$\psi_m(x) = \sum_{k=1}^N \frac{D(s_k)}{\Delta'(s_k)} \exp(s_k x), \quad (3.17)$$

onde s_k são as raízes do polinômio característico da matriz $A_N(s)$, Δ' é a derivada do mesmo polinômio característico e

$$\bar{\psi}_m(s) = D(s)/\Delta(s) \quad (3.18)$$

Assim, após alguma manipulação algébrica, a seguinte expressão aparece:

$$\begin{aligned} \psi_m(x) = & f_1 \left[\frac{B_{1m}^1}{\Delta'_1} \exp(s_1 x) + \frac{B_{1m}^2}{\Delta'_2} \exp(s_2 x) + \dots + \frac{B_{1m}^N}{\Delta'_N} \exp(s_N x) \right] + \\ & \dots + f_N \left[\frac{B_{Nm}^1}{\Delta'_1} \exp(s_1 x) + \frac{B_{Nm}^2}{\Delta'_2} \exp(s_2 x) + \dots + \frac{B_{Nm}^N}{\Delta'_N} \exp(s_N x) \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Os índices k , $k = 1, \dots, N$, em B_{nm} e Δ'_k indicam que estes termos são calculados para s_k .

Surge, então, um sistema com N equações que, conforme a expressão (3.19), pode ser visto como

$$\tilde{\psi}(x) = E(x) \tilde{F} \quad (3.20)$$

sendo $\psi(x)$ o vetor dos fluxos angulares, $E(x)$ a matriz envolvendo os termos exponenciais e F o vetor das condições iniciais.

Para o cálculo do valor da espessura crítica, aplicam-se as condições de Mark

$$\psi(0, \mu_j) = 0 \text{ para } \mu_j > 0 \quad (3.21.a)$$

e

$$\psi(a, \mu_j) = 0 \text{ para } \mu_j < 0 \quad (3.21.b)$$

ao sistema acima. Equação (3.20) torna-se

$$E(a) F = 0 \quad (3.22)$$

Como os termos f_m para $\mu < 0$ não são nulos, o vetor F também não o é. A única maneira, portanto, de fazer com que a equação (3.22) tenha solução não trivial é impor que o determinante de $E(a)$ seja nulo. Usando métodos iterativos adequados é possível fazer com que o determinante se anule para um determinado valor de a , o qual será o valor da espessura crítica. Neste trabalho o método iterativo utilizado foi o método da bissecção, pela sua simplicidade e bons resultados. Cabe ressaltar que não existe um único valor numérico que anula o determinante da matriz $E(a)$, motivo pelo qual atenção deve ser dada na escolha do intervalo inicial para obtenção da espessura crítica. Maiores detalhamentos sobre os procedimentos adotados são encontrados no apêndice B.

São apresentados na tabela abaixo os valores obtidos pelas

aproximações LTS_2 , LTS_4 e LTS_6 , comparados aos resultados exatos encontrados por Case, [8]. Também são tabelados os valores percentuais dos erros em relação aos valores exatos.

c	Case	LTS ₂	Erro	LTS ₄	Erro	LTS ₆	Erro
1.1	4.2266	4.6174	9.25	4.2707	1.04	4.2420	0.36
1.2	2.5796	2.9700	15.13	2.6372	2.23	2.5972	0.68
1.3	1.8776	2.2551	20.10	1.9467	3.68	1.8980	1.09
1.4	1.4768	1.8383	24.48	1.5547	5.27	1.5003	1.59
1.5	1.2152	1.5600	28.37	1.2990	6.90	1.2418	2.19
1.6	1.0303	1.3591	31.91	1.1180	8.51	1.0598	2.86
1.7	0.8928	1.2064	35.13	0.9828	10.08	0.9247	3.57
1.8	0.7963	1.0858	36.36	0.8775	10.20	0.8203	3.01
1.9	0.7016	0.9880	40.82	0.7932	13.06	0.7372	5.07
2.0	0.6527	0.9069	38.95	0.7240	10.92	0.6695	2.57

TABELA 2

Comparação das espessuras críticas obtidas pelos métodos
LTS_N e Case

MÉTODO LTP_N

1.0 Introdução

O método LTP_N, [15,16,17], consiste basicamente de uma solução analítica para a aproximação P_N da equação de transporte de nêutrons em geometria plana, considerando um grupo de nêutrons e anisotropia de ordem L. A característica principal deste método consiste na aplicação da transformada de Laplace para resolver o sistema de equações diferenciais oriundas da aplicação da aproximação P_N sobre a equação do transporte. O sistema linear resultante para o fluxo angular transformado é resolvido para a aproximação de ordem N. O fluxo angular é obtido procedendo-se a inversão do fluxo angular transformado pela técnica de expansão de Heaviside.

2.0 A formulação LTPN

Seja

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_T \psi(x, \mu) = \\ = \sum_{l=0}^{L \leq N} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \sigma_{sl} \int_{-1}^1 P_l(\mu') \psi(x, \mu') d\mu', \quad 0 \leq x \leq a \end{aligned} \quad (4.1)$$

a equação do transporte de nêutrons a um grupo de energias com espalhamento anisotrópico de ordem L, sujeita às condições de contorno

$$\psi(0, \mu) = f(\mu), \quad \mu > 0 \quad (4.1.a)$$

e

$$\psi(a, \mu) = g(\mu), \quad \mu < 0, \quad (4.1.b)$$

sendo $f(\mu)$ e $g(\mu)$ os fluxos incidentes nas fronteiras do domínio; $\psi(x, \mu)$ o fluxo angular de partículas na direção μ ; σ_T a secção de choque total e σ_{sl} a l-ésima componente da secção de choque diferencial de espalhamento de ordem $L \leq N$.

O fluxo angular é aproximado pela expansão PN

$$\psi(x, \mu) = \sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{2} \phi_l(x) P_l(\mu), \quad N \text{ ímpar.} \quad (4.2)$$

Substituindo a equação (4.2) na equação (4.1), resulta o seguinte sistema:

$$\sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) [\phi_l'(x) + \sigma_T \phi_l(x)] = \quad (4.3)$$

$$\sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \sigma_{sl} \phi_l(x) , \quad l=0,1,\dots,N,$$

com $\phi_l'(x)$ representando a derivada de $\phi_l(x)$.

Para a eliminação da dependência angular na equação (4.3), multiplica-se a mesma por P_k , ($k=0,\dots,N$), e integra-se a equação resultante na variável μ no intervalo $[-1,1]$. Advém deste procedimento um sistema de equações diferenciais ordinárias em $\phi_l(x)$, no qual é aplicada a transformada de Laplace, considerando o domínio adequadamente estendido. O sistema algébrico advindo deste procedimento é escrito como:

$$A(s) \bar{\phi}(s) = \phi(0) \quad (4.4)$$

onde $\bar{\phi}(s)$ representa a transformada de Laplace do vetor $\phi(x)$; $\phi(0)$ é o vetor $\phi(x)$ calculado em $x=0$ e $A(s)$ a seguinte matriz, [14]:

$$A(s) = \begin{bmatrix} s & a_{1,2} \dots & 0 & & a_{1,j} \dots & 0 & & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & s & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & s & & a_{i,j} \dots & 0 & a_{i,N+1} \\ a_{i+1,1} & 0 & \dots & a_{i+1,j-1} & & s & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & s \\ a_{N+1,1} & 0 & \dots & a_{N+1,j-1} & & 0 & \dots & a_{N+1,N} \\ & & & & & & & s \end{bmatrix} \quad (4.4.a)$$

Os elementos $a_{i,j}$ de $A(s)$ fora da diagonal principal, para $j \leq i-1$, são dados por:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0; & i \text{ ímpar e } j \text{ par ou } i \text{ e } j \text{ ímpares} \\ \frac{2j-1}{j} (\sigma_T - \sigma_{s,j-1}); & j=i-1 \\ \frac{2j-1}{j} (\sigma_T - \sigma_{s,j-1}) \prod_{k=0}^{(i-j-s)/2} - \frac{(1-2k-2)}{(1-2k-1)}; & i \text{ par, } j \text{ ímpar, } j < i-1 \end{cases} \quad (4.4.b)$$

e, para $j \geq i+1$:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0; & i \text{ par e } j \text{ ímpar ou } i \text{ e } j \text{ pares} \\ \frac{2j-1}{j-1} (\sigma_T - \sigma_{s,j-1}); & j=i+1 \\ \frac{2j-1}{j-1} (\sigma_T - \sigma_{s,j-1}) \prod_{k=0}^{(j-i-s)/2} - \frac{(i+2k+1)}{(i+2k)}; & i \text{ ímpar, } j \text{ par, } j > i+1 \end{cases} \quad (4.4.c)$$

Ao se encontrar a matriz inversa de $A(s)$, o sistema estará resolvido para $\bar{\phi}(s)$. Restará o cálculo de $\phi(x)$, que poderá ser encontrado por expansão de Heaviside. A determinação de $\phi(x)$ estará, assim, sujeita ao conhecimento das condições iniciais $\phi(0)$. Tais

condições são determinadas calculando-se os seguintes momentos

$$\int_0^1 \mu^k \psi(0, \mu) d\mu = \int_0^1 \mu^k f(\mu) d\mu, \quad x=0 \text{ e } \mu > 0 \quad (4.5.a)$$

$$\int_{-1}^0 \mu^k \psi(a, \mu) d\mu = \int_{-1}^0 \mu^k g(\mu) d\mu, \quad x=a \text{ e } \mu < 0, \quad (4.5.b)$$

com $k = 0, \dots, N-1$. Um sistema linear é gerado através deste procedimento, permitindo a determinação de $\phi(0)$. Uma vez determinado o vetor $\phi(x)$, o fluxo angular estará determinado pela equação (4.2).

3.0 O método LTPN e o problema de criticalidade para uma placa

Para o estudo da criticalidade de uma placa plana considera-se a equação (4.1) com espalhamento isotrópico, ou seja,

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_T \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \sigma_{s0} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad 0 \leq x \leq a. \quad (4.6)$$

sujeita às mesmas condições de contorno (4.1.a) e (4.1.b).

A equação (4.6) pode ser reescrita, de forma mais conveniente em termos da distância óptica, ou seja, x é substituído por $\sigma^{-1}x$:

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = c \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad (4.7)$$

observando que neste caso, $c = \sigma_{s0} / \sigma_T$.

A fim de exemplificar o uso do método LTPN na solução do problema de criticalidade, a seguir serão desenvolvidos os procedimentos relativos à aproximação LTPs.

Substituindo-se a expansão PN escrita para $N=3$,

$$\psi(x, \mu) = \sum_{m=0}^3 \frac{2m+1}{2} \phi_m(x) P_m(\mu), \quad (4.8)$$

na equação do transporte (4.7), e tomando-se os quatro primeiros momentos, obtém-se o sistema de equações diferenciais abaixo:

$$\begin{aligned} \phi_1'(x) + (1-c)\phi_0(x) &= 0 \\ \phi_0'(x) + 2\phi_2'(x) + 3\phi_1 &= 0 \\ 2\phi_1'(x) + 3\phi_3'(x) + 5\phi_2(x) &= 0 \\ 3\phi_2'(x) + 7\phi_3(x) &= 0, \end{aligned}$$

sendo $\phi_m'(x)$, $m=1,2,3$, as derivadas das funções $\phi_m(x)$.

Aplicando-se ao sistema acima a transformada de Laplace, obtém-se o sistema linear,

$$\begin{bmatrix} s & 3 & 0 & -14/3 \\ 1-c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 7/3 \\ -2/3(1-c) & 0 & 5/3 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_0(s) \\ \bar{\phi}_1(s) \\ \bar{\phi}_2(s) \\ \bar{\phi}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_0(0) \\ \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \phi_3(0) \end{bmatrix}, \quad (4.9.a)$$

escrito na forma matricial:

$$A(s) \underset{\sim}{\bar{\phi}}(s) = \underset{\sim}{\phi}(0). \quad (4.9.b)$$

A equação (4.9.a) pode ser obtida diretamente das equações (4.4), uma vez realizadas as simplificações adequadas, ($\sigma_{s1} = 0$).

Resolvendo o sistema (4.9) obtém-se

$$\underset{\sim}{\bar{\phi}}(s) = A^{-1}(s) \underset{\sim}{\phi}(0), \quad (4.10.a)$$

ou

$$\underset{\sim}{\bar{\phi}}(s) = \frac{1}{\Delta} B^T(s) \underset{\sim}{\phi}(0), \quad (4.10.b)$$

sendo B^T a transposta da matriz de cofatores e Δ o determinante de $A(s)$.

Definindo a matriz de cofatores como:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{41} & \dots & B_{44} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

então (4.10) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi}_0(s) \\ \bar{\phi}_1(s) \\ \bar{\phi}_2(s) \\ \bar{\phi}_3(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} & B_{41} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} & B_{42} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{43} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0(0) \\ \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \phi_3(0) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Resolvendo-se (4.12) para $\phi_m(s)$, obtém-se a expressão

$$\bar{\phi}_m(s) = \frac{1}{\Delta} [B_{1,m+1} \phi_0(0) + B_{2,m+1} \phi_1(0) + B_{3,m+1} \phi_2(0) + B_{4,m+1} \phi_3(0)]. \quad (4.13)$$

onde $m=0,1,\dots,3$.

Por expansão de Heaviside encontra-se uma expressão para $\phi_m(x)$, em termos da equação (4.13),

$$\phi_m(x) = \sum_{k=1}^N \frac{D(s_k)}{\Delta'(s_k)} \exp(s_k x), \quad (4.14)$$

onde s_k são as raízes do polinômio característico da matriz $A(s)$, $\Delta'(s)$ é a derivada do mesmo polinômio característico e

$$\bar{\phi}_m(s) = D(s)/\Delta(s) \quad (4.15)$$

Assim, após alguma manipulação algébrica, a seguinte solução para $\phi_m(x)$ aparece:

$$\begin{aligned} \phi_m(x) = & \phi_0(0) \left[\frac{B_{1,m+1}^1 \exp(s_1 x)}{\Delta'_1} + \dots + \frac{B_{1,m+1}^4 \exp(s_4 x)}{\Delta'_4} \right] + \\ & + \dots + \phi_4(0) \left[\frac{B_{4,m+1}^1 \exp(s_1 x)}{\Delta'_1} + \dots + \frac{B_{4,m+1}^4 \exp(s_4 x)}{\Delta'_4} \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Os índices $k, k=1,\dots,4$, em B_{nm} e Δ'_k indicam que estes elementos são calculados para a raiz s_k .

Achada a expressão para $\phi_m(x)$, o fluxo angular é dado pela equação (4.8),

$$\psi(x, \mu) = \sum_{m=0}^3 \frac{2m+1}{2} \phi_m(x) P_m(\mu), \quad (4.8)$$

ou, visto de outra forma,

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu) = & \frac{1}{2} P_0(\mu) \phi_0(x) + \frac{3}{2} P_1(\mu) \phi_1(x) + \\ & + \frac{5}{2} P_2(\mu) \phi_2(x) + \frac{7}{2} P_3(\mu) \phi_3(x). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Aplicando-se as condições de Marshak à equação (4.17),

$$\int_0^1 P_k(\mu) \psi(0, \mu) d\mu = 0, \quad (4.18.a)$$

e

$$\int_0^1 P_k(-\mu) \psi(a, -\mu) d\mu = 0, \quad (4.18.b)$$

sendo $k=1, 3$, resulta um sistema de quatro equações algébricas:

$$\begin{aligned} 4\phi_0(0) + 8\phi_1(0) + 5\phi_2(0) &= 0 \\ 4\phi_0(a) - 8\phi_1(a) + 5\phi_2(a) &= 0 \\ -\phi_0(0) + 5\phi_2(0) + 8\phi_3(0) &= 0 \\ -\phi_0(a) + 5\phi_2(a) - 8\phi_3(a) &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Lembrando que as funções $\phi_m(x)$ são dadas pela equação (4.16), o sistema acima pode ser visto como:

$$E(a) \underset{\sim}{\phi}(0) = 0, \quad (4.20)$$

sendo $E(a)$ a matriz resultante quando abstraímos do sistema as condições iniciais $\phi_m(0)$.

Uma vez que o vetor $\phi(0)$ da equação (4.19) não é nulo, o determinante da matriz $E(a)$ deve se anular. O valor de a que anula o determinante é o valor da espessura crítica. Pode-se chegar facilmente ao valor de a utilizando-se métodos iterativos adequados. No presente trabalho foi utilizado o método da bissecção. Maiores detalhamentos são encontrados no apêndice B.

Na tabela abaixo são comparados os valores da espessura crítica, (em função de c), obtidos pelas aproximações, LTPN aos valores exatos obtidos por Case, [8]. Convém observar que os valores obtidos pelas aproximações LTPN coincidem exatamente com aqueles obtidos pelas aproximações PN de igual ordem. São também apresentados os erros relativos percentuais em relação aos valores de Case.

c	Case	LTP ₁	Erro	LTP ₉	Erro	LTP ₅	Erro
1.1	4.2266	4.4573	5.46	4.2427	0.38	4.2318	0.12
1.2	2.5796	2.8250	9.51	2.6040	0.95	2.5852	0.22
1.3	1.8776	2.1226	13.05	1.9099	1.72	1.8840	0.34
1.4	1.4768	1.7162	16.21	1.5153	2.61	1.4844	0.51
1.5	1.2152	1.4470	19.07	1.2583	3.55	1.2243	0.75
1.6	1.0303	1.2538	21.69	1.0768	4.51	1.0409	1.03
1.7	0.8928	1.1078	24.08	0.9414	5.44	0.9047	1.33
1.8	0.7963	0.9931	24.71	0.8364	5.04	0.7995	0.40
1.9	0.7016	0.9006	28.36	0.7526	7.27	0.7158	2.02
2.0	0.6527	0.8241	26.26	0.6841	4.81	0.6477	0.77

TABELA 3

Comparação entre as espessuras críticas obtidas pelos métodos
LTP_N e Case

CONCLUSÕES

Procuramos, no presente trabalho, realizar um estudo do problema de criticalidade da placa plana por dois novos métodos aproximados de solução da equação do transporte unidimensional, a saber, método LTS_N e método LTP_N .

Verificamos que, por ambos os métodos, são gerados valores para a espessura crítica que convergem para os valores exatos de Case, [8], à medida que aproximações de ordens mais elevadas vão sendo consideradas. Geramos valores para as três primeiras aproximações de cada método.

Para as aproximações de primeira ordem, ou seja, LTS_2 e LTP_1 , chegou-se a erros, em relação aos valores exatos, de no máximo 41% e 28%, respectivamente. Com as aproximações de segunda ordem, LTS_4 e LTP_3 , os erros máximos diminuíram para, respectivamente, 13% e 7%. Das aproximações de terceira ordem, LTS_6 e LTP_5 , resultaram valores com erros máximos de 5% e 2%. Convém salientar que os erros, para aproximações de ordens equivalentes, foram invariavelmente menores usando o método LTP_N . Não obstante, as tabelas 2 e 3

mostram que, para todos os valores calculados, o erro diminui mais rapidamente entre duas aproximações sucessivas LTSN. Isto indica que os valores obtidos pelas primeiras aproximações LTPN são mais próximos dos valores exatos, mas sua convergência numérica para eles é mais lenta que a das aproximações LTSN.

Acreditamos ter chegado a resultados bastante razoáveis, já para a terceira aproximação, (erros de 5% para LTS₃ e 2% para LTP₃), uma vez que Larsen, [11], considera que resultados exatos são obtidos somente para a aproximação S₄₈.

Omitimos deste trabalho considerações a respeito do problema de criticalidade para uma esfera porque, por meio de transformações adequadas, é possível converter o problema de criticalidade para uma esfera em um problema similar em geometria plana, [13].

Sugerimos, para a continuidade deste trabalho, a extensão do uso das técnicas ora desenvolvidas à multiregião, bastando para tanto que se leve em consideração condições de continuidade nas interfaces. Do mesmo modo, acreditamos que a extensão da solução para o problema de multigrupo poderia ser obtida de forma computacionalmente simples devido à analiticidade inerente aos dois métodos estudados.

A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE

1.0 Introdução

Alguns conceitos necessários à dedução da Equação do Transporte são primeiramente apresentados abaixo.

■ Densidade Angular:

É o número provável de nêutrons na posição \underline{r} , com direção $\underline{\Omega}$ e energia E no instante t , por unidade de volume, por unidade de ângulo sólido, por unidade de energia.

$$\text{Densidade Angular} = N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \quad (\text{A.1})$$

Assim, $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)dVd\underline{\Omega}dE$ é o número provável de nêutrons no volume dV em \underline{r} , tendo direções dentro do ângulo sólido $d\underline{\Omega}$ em torno de $\underline{\Omega}$ e energias no intervalo dE em E , no tempo t .

■ Densidade:

Define-se densidade como:

$$n(\underline{r}, E, t) \equiv \int_{4\pi} N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) d\underline{\Omega}, \quad (\text{A.2})$$

sendo que o símbolo 4π representa integração em todas as direções.

A quantidade $n(\underline{r}, E, t)$ representa o número provável de nêutrons em \underline{r} , com energia E , no tempo t , por unidade de volume, por unidade de energia.

■ Corrente Angular ou Fluxo Vetorial:

A corrente angular é definida como o produto do vetor velocidade pela densidade angular.

$$\text{Corrente Angular} = \underline{v} \cdot N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \quad (\text{A.3})$$

■ Fluxo Angular ou Fluxo Escalar:

É o produto da magnitude da velocidade pela densidade angular, designado por $\psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$.

$$\psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \equiv v \cdot N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \quad (\text{A.4})$$

■ Fluxo Total:

O fluxo total é definido como a integral do fluxo angular sob todas as direções, sendo denotado por $\Psi(\underline{r}, E, t)$.

$$\Psi(\underline{r}, E, t) \equiv \int_{4\pi} \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) d\underline{\Omega} = v \cdot n(\underline{r}, E, t) \quad (\text{A.5})$$

■ Corrente:

Seja \underline{n} um vetor unitário normal a um elemento de superfície dA , tal que $\underline{n} \cdot dA$ é o vetor normal a um elemento de superfície de área dA . Então, $\underline{n} \cdot dA \cdot \underline{v}N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ é o número de nêutrons atravessando o elemento de superfície por unidade de ângulo sólido, por unidade de energia, por unidade de tempo.

A integração sob todas as direções fornece o número líquido de nêutrons por unidade de energia e tempo cruzando dA . Assim, o número líquido de nêutrons atravessando dA é igual a

$$\underline{n} \cdot dA \cdot \int_{4\pi} \underline{v}N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) d\underline{\Omega}.$$

A integral na expressão é chamada de corrente e é representada por $\underline{J}(\underline{r}, E, t)$:

$$\underline{J}(\underline{r}, E, t) \equiv \int_{4\pi} \underline{v}N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) d\underline{\Omega} = v \int_{4\pi} \underline{\Omega}N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) d\underline{\Omega}. \quad (A.6)$$

■ Fontes:

Nêutrons que aparecem por razões outras que não colisões, (por exemplo, fissões espontâneas, ação de raios cósmicos), são representados pela quantidade $Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$, que é definida como a probabilidade por unidade de tempo que um nêutron de energia E apareça em \underline{r} por unidade de volume por unidade de ângulo sólido por unidade de energia.

■ Seções de Choque

A quantidade $\sigma(\underline{r}, E)$, denominada seção de choque macroscópica total, é definida como a probabilidade de reação de um nêutron por unidade de comprimento de trajetória.

A seção de choque macroscópica total é a soma das seções de choque parciais para todos os tipos de colisões nêutron - núcleo, sendo que cada seção de choque parcial representa a probabilidade de que um tipo particular de partícula emerge da colisão. Assim, $\sigma_n(r, E)$ e $\sigma_{n'}(r, E)$ representam as seções de choque de espalhamento elástico e inelástico, respectivamente, $\sigma_\gamma(r, E)$ a seção de choque de captura radioativa e $\sigma_f(r, E)$ a seção de choque de fissão.

Define-se seção de choque diferencial como a probabilidade de que, havendo colisão de um dado tipo, (espalhamento, fissão, etc.), os nêutrons resultantes tenham determinadas direções e energias. A seção de choque diferencial pode então ser representada por:

$$\sigma_x(r, E') \cdot f_x(r; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E),$$

sendo $\sigma_x(r, E')$ a seção de choque para uma reação do tipo x para nêutrons de energia E' e $f_x(r; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) d\underline{\Omega} dE$ a probabilidade de que um nêutron com direção $\underline{\Omega}'$ e energia E' , tenha uma reação do tipo x , emergindo da colisão um nêutron no intervalo $d\underline{\Omega}$ em torno de $\underline{\Omega}$ com energia dE em E .

Uma boa aproximação para colisão com fissão é considerar que os nêutrons resultantes são emitidos isotropicamente. Desta forma é possível escrever:

$$f_f(r; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) d\underline{\Omega} dE = \frac{1}{4\pi} \nu(r; E' \rightarrow E) d\underline{\Omega} dE,$$

onde $\nu(r; E' \rightarrow E) dE$ é a probabilidade de que uma fissão causada por um nêutron em r com energia E' resultará em um nêutron no in-

tervalo dE em E . Além disso, $\nu(\underline{r}; E' \rightarrow E)$ é normalizado tal que

$$\frac{1}{4\pi} \int \int \nu(\underline{r}; E' \rightarrow E) d\Omega dE = \int \nu(\underline{r}; E' \rightarrow E) dE = \bar{\nu}(\underline{r}, E'),$$

onde $\bar{\nu}(\underline{r}, E')$ é o número médio de nêutrons produzidos por uma fissão em \underline{r} , causada por um nêutron com energia E' .

Para reações de espalhamento, um nêutron resulta de cada nêutron que colide; as probabilidades de transferência podem, conseqüentemente ser normalizadas. Assim,

$$\int \int f_{n, n'}(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) d\Omega dE = 1.$$

Se $\sigma(\underline{r}, E')$ é a seção de choque total, a probabilidade por unidade de distância em \underline{r} de que resulte um nêutron com direção $\underline{\Omega}$ e energia E da colisão entre um nêutron com direção $\underline{\Omega}'$ e energia E' e um núcleo, considerando todos os possíveis tipos de colisão, pode ser escrita como:

$$\sigma(\underline{r}, E') \cdot f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E)$$

A quantidade acima pode ser escrita como

$$\sigma(\underline{r}, E') \cdot f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) = \sum_x \sigma_x(\underline{r}, E') \cdot f_x(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E)$$

Integrando-se para todas as direções e todas as energias e considerando as normalizações, encontra-se:

$$\int f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) d\underline{\Omega} dE =$$

(A. 7)

$$= \frac{\sigma_n(\underline{r}, E') + \sigma_{n'}(\underline{r}, E') + \sigma_f(\underline{r}, E') \bar{v}(\underline{r}, E') + \dots}{\sigma(\underline{r}, E')} \equiv c(\underline{r}, E),$$

onde os índices n , n' e f referem-se a espalhamento elástico, espalhamento inelástico e fissão, respectivamente.

A quantidade $c(\underline{r}, E)$ representa, portanto, o número médio de nêutrons emergindo por colisão em \underline{r} , devido a nêutrons que colidem com energia E' .

■ Taxas de Interação

Dos conceitos apresentados acima encontram-se, facilmente, algumas quantidades úteis na dedução da Equação do Transporte:

- $v\sigma_x$: probabilidade de que um nêutron sofra uma colisão do tipo x por unidade de tempo;
- $v\sigma_x N$: taxa de interação do tipo x ou o número de interações do tipo x por unidade de volume, energia e ângulo sólido na posição \underline{r} e tempo t devido a nêutrons com energia E e direção $\underline{\Omega}$, na unidade de tempo;
- $v\sigma_x n$: número de interações do tipo x por unidade de volume e de energia na posição \underline{r} e tempo t devido a nêutrons com energia E , na unidade de tempo;
- $N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE'$: número de nêutrons por unidade de volume tendo direções no interior de $d\underline{\Omega}'$ em torno de $\underline{\Omega}'$ e energias dE' em E' ;
- $v'\sigma_x(\underline{r}, E') f_x(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE' d\underline{\Omega} dE$: taxa, em nêu-

trons por unidade de volume e de tempo, na posição \underline{r} e tempo t , na qual a quantidade $N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE'$ é transferida, através de interações do tipo x , para direções em $d\underline{\Omega}$ em torno de $\underline{\Omega}$ e energias em dE em E .

2.0 Derivação da Equação do Transporte

Sendo $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dV d\underline{\Omega} dE$ o número provável de nêutrons no elemento de volume dV , tendo energias em dE em torno de E , com direções no interior do ângulo sólido $d\underline{\Omega}$ em torno de $\underline{\Omega}$, no instante t , a equação do transporte é a equação que expressa a variação deste número quando transcorre um intervalo de tempo Δt . Em outras palavras, é a equação que expressa um balanço entre os nêutrons que ingressam ou abandonam o grupo $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dV d\underline{\Omega} dE$ durante o intervalo Δt .

A distância percorrida por um nêutron no intervalo Δt é $v\Delta t$. A probabilidade de que o nêutron sofra uma colisão neste tempo é, pois, $\sigma(\underline{r}, E) v\Delta t$. Assim sendo, a probabilidade de que os nêutrons do grupo $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dV d\underline{\Omega} dE$ o abandonem, no intervalo Δt , é

$$\sigma(\underline{r}, E) v\Delta t N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dV d\underline{\Omega} dE.$$

Por outro lado, a probabilidade de que os nêutrons permaneçam no grupo é:

$$N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) [1 - \sigma(\underline{r}, E)v\Delta t] dV d\underline{\Omega} dE$$

Como resultado de colisões o número de nêutrons entrando no grupo é:

$$[\int \int \sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) v' N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE'] dV d\underline{\Omega} dE.$$

O número de nêutrons ingressando no grupo através de fontes é:

$$Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dV d\underline{\Omega} dE \Delta t.$$

A densidade angular na posição $\underline{r} + \underline{\Omega}v\Delta t$ e tempo $t + \Delta t$ é dado pelo balanço entre os nêutrons que entram e os que saem do grupo. Eliminando $dV d\underline{\Omega} dE$ de cada termo obtém-se:

$$N(\underline{r} + \underline{\Omega}v\Delta t, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t) = N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) [1 - \sigma(\underline{r}, E)v\Delta t] +$$

$$[\int \int \sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) v' N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE'] \Delta t +$$

$$Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \Delta t$$

(A. 8)

Dividindo ambos os lados da equação por Δt e tomando o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, a equação acima torna-se:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [(N(\underline{r} + \underline{\Omega}v\Delta t, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t) - N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)) / \Delta t] + \\
& + \sigma(\underline{r}, E) v N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) = \\
& = [\int \int \sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) v' N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\underline{\Omega}' dE'] \\
& + Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)
\end{aligned} \tag{A.9}$$

O primeiro termo da equação acima é a derivada total com respeito ao tempo da densidade angular e pode ser denotado por dN/dt , onde N representa $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$.

Se o termo $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t)$ for adicionado e subtraído ao numerador do termo entre parênteses, duas expressões são prontamente obtidas:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [(N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t) - N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)) / \Delta t] = \frac{\partial N}{\partial t} \tag{A.10}$$

e

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [(N(\underline{r} + \underline{\Omega}v\Delta t, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t) - N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t + \Delta t)) / \Delta t] = \\
& = v\underline{\Omega} \cdot \nabla N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t).
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Este último termo representa a derivada direcional de N na direção $\underline{\Omega}$.

Fazendo-se os arranjos necessários a equação (A.9) torna-se:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + v\underline{\Omega} \cdot \nabla N + \sigma v N = \int \int \sigma' f v' N' d\underline{\Omega}' dE' + Q \tag{A.12}$$

onde $N \equiv N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ e $N' \equiv N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t)$.

A equação acima é a forma básica da Equação do Transporte de Nêutrons, que escrita em termos do fluxo angular torna-se:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \underline{\Omega} \cdot \nabla \psi + \sigma \psi = \int \int \sigma' f \psi' d\underline{\Omega}' dE' + Q \quad (\text{A.13})$$

onde $\psi = vN \equiv \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ e $\psi' = v'N' \equiv \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t)$.

2.1 Equação do Transporte para um Grupo de Nêutrons

A equação do transporte de nêutrons em termos do fluxo angular independente do tempo pode ser vista abaixo:

$$\begin{aligned} & \underline{\Omega} \cdot \nabla \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E) + \sigma(\underline{r}, E) \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E) = \\ & \int \int \sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}', E') d\underline{\Omega}' dE' + Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Existem situações em que as seções de choque podem ser tratadas como independentes da energia (por exemplo, nêutrons térmicos). Isto leva a uma forma de equação do transporte na qual as energias dos nêutrons não aparecem, o que equivale a dizer que todos os nêutrons têm a mesma energia. A esta aproximação dá-se o nome de teoria do transporte para uma velocidade.

Sendo a seção de choque função apenas da posição:

$$\sigma(\underline{r}, E) = \sigma(\underline{r}, E') = \sigma(\underline{r})$$

A distribuição angular dos nêutrons emergindo da colisão,

$$\int f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) dE$$

deve ser independente da energia E' . Portanto, esta quantidade pode ser escrita como:

$$\int f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) dE = c(\underline{r}) f(\underline{r}; \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega})$$

onde a função $f(\underline{r}; \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega})$ é normalizada para a unidade:

$$\int f(\underline{r}; \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}) d\Omega = 1 \quad (\text{A.15})$$

Então, $c(\underline{r})$ é o número médio de nêutrons emergindo de uma colisão em \underline{r} .

Definindo:

$$\int \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E) dE \equiv \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}),$$

$$\int \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}', E') dE \equiv \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}'),$$

$$\int \chi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E) dE \equiv \chi(\underline{r}, \underline{\Omega}),$$

a equação (A.14), após integrada com respeito à energia, pode ser vista como:

$$\underline{\Omega} \cdot \nabla \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}) + \alpha(\underline{r}) \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}) =$$

(A.16)

$$= \alpha(\underline{r}) c(\underline{r}) \int f(\underline{r}; \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}) \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}') d\underline{\Omega}' + Q(\underline{r}, \underline{\Omega})$$

A equação acima é a forma geral da Equação do Transporte independente do tempo para uma velocidade.

Em geometria plana para meio infinito, o movimento dos nêutrons depende da coordenada z e do ângulo θ , conforme a figura 2 sendo $d\underline{s}$ o vetor que representa a direção deste movimento.

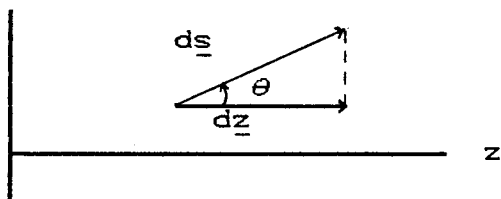


figura 2

Portanto, o termo $\underline{\Omega} \cdot \nabla \psi$ em geometria plana é escrito na forma

$$\underline{\Omega} \cdot \nabla \psi = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos \theta = \mu \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

sendo $\mu = \cos \theta$. Nessa geometria é conveniente fazer $\psi(\underline{r}, \underline{\Omega}) = \psi(z, \mu)$.

A equação (A.16) em geometria plana, portanto, pode ser escrita como:

$$\mu \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} + \alpha(z) \psi(z, \mu) = \alpha(z) c \int f(\underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}) \psi(z, \mu') d\underline{\Omega}' + Q(z, \mu)$$

(A.17)

onde c e f foram feitos independentes de posição.

Em teoria do transporte é conveniente expressar distâncias em termos de livres caminhos médios, portanto

$$x = \int_0^z \sigma(z') dz'$$

e, então:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sigma(z) \frac{\partial}{\partial x}$$

Além disso, suponhamos que os nêutrons emergindo de colisões tenham distribuição isotrópica; então, em vista da condição de normalização dada pela equação (A.15), segue que:

$$f(\underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}) = \frac{1}{4\pi}$$

Portanto, se $d\underline{\Omega}'$ é reescrito em termos dos ângulos azimutal e polar, i.e., $d\underline{\Omega}' \rightarrow 2\pi d\mu'$, a equação (A.17) dividida por $\sigma(z)$ resultará na equação abaixo:

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial z} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu), \quad (A.18)$$

onde $\psi(x, \mu) \equiv \psi[z(x), \mu]$ e $Q(x, \mu) \equiv \frac{1}{\sigma(z)} Q[z(x), \mu]$.

APÊNDICE B

NOTA SOBRE OS PROCEDIMENTOS ADOTADOS PARA ENCONTRAR OS VALORES DAS ESPESSURAS CRÍTICAS

Neste trabalho, foram desenvolvidos procedimentos analíticos e computacionais para o cálculo das espessuras críticas da placa plana em função do parâmetro c , pelos métodos P_N , LTP_N , E LTS_N , os quais foram cotejados com os valores obtidos por Case, [8].

Na parte computacional foram desenvolvidos pequenos programas para cada aproximação dos três métodos mencionados acima. Acreditamos que, com maior tempo de desenvolvimento, seja possível a elaboração de um programa apenas para cada método.

Os programas foram desenvolvidos na linguagem própria do *software* MATLAB, versão 1.3, pois, logo no início do trabalho, mostrou-se atraente a possibilidade de utilização de algumas funções embutidas nesse *software* que economizariam tempo por eliminar a necessidade de elaboração de subprogramas extensos para etapas específicas do programa. Como exemplo, pode-se citar a função *ROOTS*, que calcula as raízes de um polinômio de grau N , bastando a entrada de um vetor com os coeficientes do polinômio, ou a função *DET*

que calcula o determinante de uma matriz qualquer. Além disso, estão disponíveis várias funções que auxiliam na avaliação dos resultados quando se opera com matrizes, (número de condicionamento, etc).

Ficou claro, porém, que, se por um lado o uso da linguagem desse *software* para escrever os programas trouxe vantagens, por outro restringiu a possibilidade de generalização dos mesmos, uma vez que o fator limitante para essa generalização passou a ser o número de linhas disponíveis para programas muito reduzido.

Em seguida serão mostrados, sucintamente, os passos dados até a obtenção dos valores de espessura crítica mostrados nas tabelas 1, 2, 3.

■ Método PN:

Procedimentos Analíticos:

- 1) Determinação dos polinômios $T_l(\nu)$, $l = 1, \dots, N+1$, através da fórmula de recorrência (2.3), (sendo $T_0(\nu) = 1$).
- 2) Obtenção das $(N+1)/2$ expressões dadas pelo uso da fórmula (2.14).

Procedimentos Computacionais:

- 1) Cálculo das raízes positivas ν_j , $j = 1, \dots, (N+1)/2$, do polinômio $T_{N+1}(\nu)$.
- 2) Cálculo dos valores $T_l(\nu_j)$, sendo $l = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, (N+1)/2$.
- 3) Com os dois procedimentos anteriores associados às $N+1$ expressões obtidas pelo uso da fórmula (2.14), ficam determinados os elementos da matriz da equação (2.17), Cou similar para um N dife-

rente), sendo que os mesmos agora são funções apenas da meia espessura crítica a . Através do uso do método da bissecção, fica determinado o valor de a que anula o determinante da matriz em (2.17).

■ Método LTS_N

Procedimentos Analíticos:

- 1) Determinação do polinômio característico dado pela equação (3.10), (determinante da matriz transformada $AN(s)$, (eq.(3.2)).
- 2) Determinação dos polinômios dados pelas equações (3.11) e (3.12), (elementos da matriz de cofatores (3.14)).
- 3) Determinação do polinômio dado pela derivação da equação característica (3.10).

Procedimentos Computacionais:

- 1) Cálculo das N raízes do polinômio característico.
- 2) Cálculo dos valores que se obtém inserindo cada uma das N raízes do polinômio resultante da derivação do polinômio característico.
- 3) Cálculo dos valores que se obtém inserindo cada uma das N raízes nos polinômios que representam os elementos da matriz de cofatores.
- 4) Cálculo, através do método da bissecção, do valor de a que anula o determinante da matriz $E(a)$ da equação (3.22), considerando os procedimentos descritos na seção 3.0 do capítulo 3.

■ Método LTP_N

Procedimentos Analíticos:

- 1) Determinação da matriz $A(s)$ através das equações (4.4).
- 2) Determinação do polinômio característico da matriz $A(s)$.
- 3) Determinação dos polinômios que representam os elementos da matriz de cofatores.
- 4) Determinação do sistema resultante das equações (4.18).

Procedimentos Computacionais:

- 1) Cálculo das raízes do polinômio característico.
- 2) Cálculo dos valores que se obtém inserindo cada uma das N raízes do polinômio característico no polinômio resultante da derivação daquele polinômio.
- 3) Cálculo dos valores que se obtém inserindo cada uma das N raízes nos polinômios que representam os elementos da matriz de cofatores.
- 4) Cálculo do valor de a que anula o determinante da matriz $E(a)$ da equação (4.19), através do método da bissecção, considerando os procedimentos descritos na seção 3.0 do capítulo 4.

BIBLIOGRAFIA

- 1 ABBATE, Máximo & STAMM'LER, Rudi. **Methods of Steady-State Reactor Physics in Nuclear Design**. London, Academic Press, 1983.
- 2 ARGONNE NATIONAL LABORATORY, Lemont, Illinois. **Reactor Physics Constants - ANL - 5800**.
- 3 BARICHELLO, Liliane Basso. **Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional; exame de qualificação para obtenção do título de Doutor em Engenharia**. Porto Alegre, UFRGS - PROMEC, agosto, 1991.
- 4 — & VILHENA, Marco Túlio. **Formulação Explícita para a Matriz Inversa Associada ao Problema de Ordenada Discreta**. **Anais do XIV Congresso Brasileiro de Matemática Aplicada e Computacional, set., 1991**.
- 5 — **An analytical solution for the one dimensional discrete**

ordinate problem using Laplace Transform. *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Matemática Aplicada e Computacional*, set., 1991.

6 — Analytical Matrix Solution for the One-Group Slab Geometry Discrete Ordinate Problem. *Anais do VIII Encontro de Física de Reatores e Termohidráulica*, set., 1991.

7 BELL, George & GLASSTONE, Samuel. *Nuclear Reactor Theory*. Huntington, New York, Robert E. Krieger Publishing, 1979.

8 CASE, Kenneth & ZWEIFEL, Paul. *Linear Transport Theory*. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing, 1967.

9 DUDERSTADT, James & MARTIN, William. *Transport Theory*. New York, John Wiley & Sons, 1979.

10 LARSEN, Edward & POMRANING, G. C. The P_N Theory as an Asymptotic Limit of Transport Theory in Planar Geometry - I: Analysis. *Nuclear Science and Engineering*, (109): 49-75, 1991.

11 — The P_N Theory as an Asymptotic Limit of Transport Theory in Planar Geometry - II: Numerical Results. *Nuclear Science and Engineering*, (109): 76-85, 1991.

12 MAIORINO, J. R. Computer Code ANISN Multiplying Media and Shielding Calculation. I. Theory. *Workshop on Reactor Physics Calculations for Applications in Nuclear Technology*. Trieste, feb.-mar., 1990.

- 13 MITSIS, George J. **Transport Solutions to the Monoenergetic Critical Problems.** Argonne National Laboratory.
- 14 SANCHES, R. & McCORMICK, N.J. A Review of Neutron Transport Approximations. **Nuclear Science and Engineering**, (80) : 481-535, 1982.
- 15 STRECK, Elaine Evani. **Solução Analítica para a Aproximação P_N da Equação de Transporte de Nêutrons Unidimensional; exame de qualificação para obtenção do título de Doutor em Engenharia.** Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, fevereiro,1992.
- 16 — & VILHENA, Marco Túllio. **An Approximated Analytical Solution of the One-Group Transport Equation.** *Kerntechnik*. München, aprovado para publicação.
- 17 — **Combinação do Método P_N e Transformada de Laplace para a Solução da Equação de Transporte de Nêutrons Unidimensional.** *Anais do XIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, set.,1991.
- 18 VILHENA, Marco Túllio & BARICHELLO, Liliâne Basso. **A new analytical approach to solve the neutron transport equation.** *Kerntechnik*, 56. München, 1991.
- 19 YAMAGUCHI, Mitsuo & MAIORINO, José Rubens. **MPN-1: Um Módulo de**

Computação para a Solução da Equação de Transporte em Multiregiões
através do Método PN. Informação IPEN, (10), nov., 1981.