

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM MECÂNICA E NUMÉRICA DA INFLUÊNCIA DOS EFEITOS  
VISCOSOS E ELÁSTICOS NOS ESCOAMENTOS DE MATERIAIS ELASTO-  
VISCOPLÁSTICOS

por

Giovanni Minervino Furtado

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia Mecânica

Porto Alegre, fevereiro de 2016

MODELAGEM MECÂNICA E NUMÉRICA DA INFLUÊNCIA DOS EFEITOS  
VISCOSOS E ELÁSTICOS NOS ESCOAMENTOS DE MATERIAIS ELASTO-  
VISCOPLÁSTICO

por

Giovanni Minervino Furtado

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Frey

Aprovada por:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Adriane Prisco Petry - PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Luiz Alberto de Oliveira Rocha – PROMEC / UFRGS

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Flávia Schwarz Franceschini Zinani – UNISINOS

Prof. Dr. Luiz Alberto de Oliveira Rocha

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 29, fevereiro de 2016

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos professores da Escola de Engenharia Mecânica por me darem todo o conhecimento que adquiri ao longo do curso para poder chegar até a conclusão do mestrado; também agradeço a ajuda dos meus colegas do Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC), ao meu professor orientador Dr. Sérgio Frey que sempre me acompanhou até o término deste trabalho, agradeço a professora Dr<sup>a</sup> Adriane Prisco Petry por me seder espaço no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (LMF) para o término deste trabalho. Agradeço, de modo especial, à minha família que sempre me deu total apoio e confiança para seguir a difícil caminhada requerida por este curso e agradeço a CAPES por me dar o suporte financeiro para a realização desta dissertação.

## RESUMO

Esta dissertação investiga numericamente a influência dos efeitos viscosos e elásticos em escoamentos de materiais viscoplásticos no interior de uma cavidade dirigida. O modelo mecânico empregado é constituído pelas equações de conservação de massa e pelo princípio da quantidade de movimento linear, para fluidos incompressíveis, acoplado à equação constitutiva. Esta equação modifica o modelo viscoelástico de Oldroyd-B de modo a acomodar que os tempos de relaxação e retardo do material, bem como sua viscosidade viscoplástica, dependam das mudanças de sua microestrutura. A aproximação numérica do modelo emprega o método multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados em termos do tensor de tensão extra, do vetor velocidade e do campo de pressão. Os resultados objetivam a determinação do tamanho e localização das regiões aparentemente não-escoadas do material, bem como sua deformação elástica, intensidade de tensão, e a sua vorticidade no interior da cavidade. Os resultados claramente indicam que o padrão do escoamento é fortemente influenciado pela variação dos efeitos elásticos (variação do tempo de relaxação adimensional,  $\theta_0^*$ ), viscosos (variação do índice de *power-law*,  $n$ ) e cinemáticos (variação da velocidade adimensional,  $U^*$ , do escoamento) no interior da cavidade.

Palavras-chave: materiais viscoplásticos, elasto-viscoplasticidade, escoamento em cavidade dirigida, método multi-campo de Galerkin mínimos-quadrados.

## ABSTRACT

This dissertation investigated numerically the influence of viscous and elastic effects on flows of viscoplastic materials within a lid-driven cavity. The mechanical model used is made up of mass and momentum balance equations, coupled with the constitutive equation. This equation modifies the viscoelastic Oldroyd-B model to accommodate both relaxation and retardation times, and viscosity function, dependent on the microstructure changes. Numerical approximations of the model make use a three-field Galerkin least squares method in terms of the extra stress tensor, velocity vector and pressure field. Computations focus on the determination of the size and position of apparently unyielded regions as well as the elastic deformation, stress intensity, and the vorticity within of the cavity. Results clearly indicate that the flow pattern is strongly influenced by the elastic (variation of the dimensionless relaxation time,  $\theta_0^*$ ), viscous (variation of the power-law index,  $n$ ) and kinematic (variation of the dimensionless flow velocity,  $U^*$ ) effects within the cavity.

Keywords: viscoplastic materials, elasto-viscoplasticity, lid-driven cavity flow, multi-field Galerkin least-squares method.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>MODELAGEM MECÂNICA</b> .....	<b>7</b>
3.1	Lei da Conservação de Massa.....	7
3.2	Princípio da quantidade de movimento.....	9
<b>4</b>	<b>COMPORTAMENTO MATERIAL</b> .....	<b>12</b>
4.1	Fluido Newtoniano generalizado.....	12
4.2	Comportamento não-newtoniano.....	13
4.2.1	Modelo power-law.....	14
4.2.2	Comportamento Viscoplastico.....	14
4.2.2.1	Fluido de Bingham.....	15
4.2.2.2	Fluido de Herschel-Bulkley.....	15
4.2.3	Regularização de Papanastasiou.....	15
4.2.4	Modelo Viscoplastico SMD.....	16
4.2.5	Tensão de escoamento.....	18
4.3	Comportamento Viscoelástico.....	20
<b>5</b>	<b>MODELAGEM DA ELASTO-VISCOPLASTICIDADE</b> .....	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>MODELAGEM NUMÉRICA</b> .....	<b>26</b>
6.1	Formulação forte de elementos finitos.....	26
6.2	Formulação fraca de elementos finitos.....	27
6.3	Galerkin mínimos-quadrados.....	28
6.4	Formulação estabilizada a três-campos.....	28
6.5	Programas utilizados.....	30
6.6	Geometria e condições de contorno.....	30
<b>7</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	<b>32</b>
7.1	Parâmetros adimensionais.....	32
7.2	Teste de independência de malha.....	35
7.3	Comparação Numérica.....	36
7.4	Análise das superfícies de escoamento.....	39
7.4.1	Influência da cinemática.....	39
7.4.2	Influência da elasticidade.....	42
7.4.3	Influência do índice de power-law.....	44
7.5	Análise da deformação elástica sobre o escoamento.....	45
7.6	Análise da posição do vórtice principal.....	47
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>51</b>
<b>9</b>	<b>PERSPECTIVAS FUTURAS</b> .....	<b>54</b>
	<b>ANEXO</b> .....	<b>55</b>
	<b>APÊNDICE</b> .....	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>57</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1	Curva de escoamento de diversos materiais.....	13
Figura 4.2	Curva de escoamento SMD.....	17
Figura 4.3	Curva de escoamento de materiais reais.....	18
Figura 4.4	Curva de escoamento viscoplástica.....	19
Figura 4.5	Representação esquemática do modelo UCM.....	20
Figura 4.6	Representação esquemática do modelo Oldroyd-B.....	21
Figura 6.1	Geometria e condições de contorno.....	31
Figura 7.1	Teste de independência de malha.....	35
Figura 7.2	Superfícies de escoamento com $Bn$ variando.....	37
Figura 7.3	Superfícies de escoamento com $Bn$ variando.....	38
Figura 7.4	Superfícies de escoamento com $U^*$ variando.....	41
Figura 7.5	Perfis da magnitude da tensão extra com $U^*$ variando.....	43
Figura 7.6	Superfícies de escoamento com $\theta_0^*$ variando.....	44
Figura 7.7	Superfícies de escoamento com $n$ variando.....	45
Figura 7.8	Análise da deformação elástica.....	47
Figura 7.9	Análise da posição do vórtice principal do escoamento.....	49

## **LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS**

PROMEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNISINOS	Universidade do Vale dos Sinos



## LISTA DE SÍMBOLOS

$t$	Tempo	[-]
$Bn$	Número de Bingham	[-]
$\mathbf{D}$	Tensor taxa de deformação	[s <sup>-1</sup> ]
$\overset{\vee}{\mathbf{D}}$	Derivada convectada superior do tensor taxa de deformação	[s <sup>-2</sup> ]
$G$	Módulo de cisalhamento da microestrutura do material	[Pa]
$G_0$	Módulo de cisalhamento de um material completamente estruturado	[Pa]
$\mathbf{g}$	Vetor aceleração	[m/s <sup>2</sup> ]
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio $\Omega$	[-]
$H^1_0(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam sobre o contorno $\Gamma_g$	[-]
HB	Número de Herschel-Bulkley	[-]
K	Elemento Finito	[-]
$K$	Índice de consistência	[Pa.s <sup>n</sup> ]
$L^2(\Omega)$	Espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis sobre o domínio $\Omega$	[-]
$L^2_0(\Omega)$	Espaço de Hilbert das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula no domínio $\Omega$	[-]
$L_c$	Comprimento característico	[m]
$m$	Grau de interpolação de elementos finitos	[-]
$m_p$	Parâmetro regularizador de Papanastasiou	[s]
$m_k$	Parâmetro do grau de interpolação utilizado	[-]
$n$	Índice de <i>power-law</i>	[-]
$p$	Pressão	[Pa]
$P$	Espaço funcional do campo pressão	[-]
$P^h$	Sub-espço de elementos finitos para o campo pressão	[-]
$q^h$	Função peso do campo de pressão	[-]
$\mathfrak{R}$	Espaço dos números reais	[-]
$\mathbf{R}$	Vetor do resíduo	[-]
$R_k$	Espaço polinomial de ordem $k$	[-]
$R_l$	Espaço polinomial de ordem $l$	[-]
$R_m$	Espaço polinomial de ordem $m$	[-]
$Re$	Número de Reynolds	[-]
$Re_k$	Número de Reynolds de malha	[-]
$S$	Superfície de uma região arbitrária no espaço	[m <sup>2</sup> ]
$S^h$	Função peso do campo tensão	[-]
$\mathbf{T}$	Tensor de tensão total	[Pa]
$\mathbf{t}_h$	Vetor de força de superfície	[Pa]
$t_{eq}$	Tempo característico de mudança da microestrutura do material	[s]
$\mathbf{U}$	Vetor de graus de liberdade	[-]
$U^*$	Vazão adimensional	[-]
$U$	Variável genérica	[-]
$U^h$	Aproximação de elementos finitos de uma variável genérica $U$	[-]
$\mathbf{u}$	Vetor velocidade	[m/s]
$\mathbf{u}^h$	Aproximação de elementos finitos para o campo de velocidade	[m/s]
$u_c$	Velocidade característica	[m/s]
$u_i$	Componente da velocidade na direção $i$	[m/s]

$V$	Espaço funcional do campo velocidade	[-]
$V^h$	Sub-espço de elementos finitos para o campo velocidade	[-]
$V$	Volume de uma região arbitrária do espaço	[m <sup>3</sup> ]
$\mathbf{v}^h$	Função peso do campo velocidade	[-]
$W_i$	Número de Weissenberg	[-]
$\mathbf{X}$	Posição de um ponto qualquer no espaço	[m]
$x_i$	Direção $i$ do espaço	[m]

## LETRAS GREGAS

$\alpha$	Parâmetro de estabilização da equação de movimento	[-]
$\beta$	Parâmetro de estabilização da equação material	[-]
$\delta$	Parâmetro de estabilização da equação da continuidade	[-]
$\delta_a$	Medida relativa de assimetria	[%]
$\Sigma$	Espaço funcional do campo de tensão extra polimérica	[-]
$\Sigma^h$	Sub-espaço de elementos finitos para o campo de tensão extra polimérica	[-]
$\lambda$	Parâmetro de estruturação da microestrutura do material	[-]
$\dot{\gamma}$	Magnitude do tensor taxa de deformação – taxa de cisalhamento	[s <sup>-1</sup> ]
$\dot{\gamma}_0$	Taxa de deformação máxima para a qual a estrutura do fluido está inalterada	[s <sup>-1</sup> ]
$\dot{\gamma}_1$	Taxa de deformação onde o fluido escoar como um fluido <i>power-law</i>	[s <sup>-1</sup> ]
$\dot{\gamma}_2$	Taxa de deformação onde o fluido escoar com uma viscosidade $\eta_\infty$	[s <sup>-1</sup> ]
$\dot{\gamma}_{0d}$	Taxa de deformação que marca a transição da tensão $\tau_0$ para $\tau_{0d}$	[s <sup>-1</sup> ]
$\gamma$	Deformação total	[-]
$\gamma_e$	Deformação elástica	[-]
$\gamma_v$	Deformação viscosa	[-]
$\eta$	Viscosidade não-newtoniana	[Pa.s]
$\eta_0$	Viscosidade newtoniana para baixas taxas de cisalhamento	[Pa.s]
$\eta_\infty$	Viscosidade newtoniana para altas taxas de cisalhamento	[Pa.s]
$\eta_v$	Viscosidade estrutural	[Pa.s]
$\mu$	Viscosidade newtoniana	[Pa.s]
$\mu_p$	Viscosidade do polímero elástico	[Pa.s]
$\mu_b$	Viscosidade plástica de Bingham	[Pa.s]
$\mu_s$	Viscosidade do solvente newtoniano	[Pa.s]
$\mu_t$	Viscosidade total	[Pa.s]
$\rho$	Massa específica do fluido	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho^*$	Massa específica adimensional	[-]
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensão extra total	[Pa]
$\boldsymbol{\tau}_p$	Tensor de tensão extra polimérico	[Pa]
$\boldsymbol{\tau}_s$	Tensor de tensão extra do solvente	[Pa]
$\tau$	Tensão de cisalhamento	[Pa]
$\tau_0$	Tensão limite de escoamento	[Pa]
$\tau_{0d}$	Tensão limite de escoamento dinâmica	[Pa]
$\boldsymbol{\tau}_p^h$	Aproximação de elementos finitos para o campo de tensão	[Pa]
$\overset{\vee}{\boldsymbol{\tau}}$	Derivada convectada superior do tensor extra de tensão	[Pa/s]
$\theta$	Tempo de relaxação variável – função de $\dot{\gamma}$	[s]
$\theta_1$	Tempo de relaxação	[s]
$\theta_2$	Tempo de retardação	[s]
$\theta_{01}$	Tempo de relaxação abaixo do limite de escoamento	[s]
$\theta_{02}$	Tempo de retardação abaixo do limite de escoamento	[s]
$\theta_{\infty 1}$	Tempo de relaxação acima do limite de escoamento	[s]
$\theta_{\infty 2}$	Tempo de retardação acima do limite de escoamento	[s]
$\theta_0^*$	Tempo de relaxação adimensional	[-]
$\Omega$	Domínio do problema	[-]
$\Omega^h$	Partição do domínio $\Omega$ em elementos finitos	[-]

$d\Gamma$	Elemento infinitesimal de superfície	$[m^2]$
$\Gamma$	Fronteira do domínio $\Omega$	$[-]$
$\Gamma_g$	Parte da fronteira $\Gamma$ na qual são impostas as condições de Dirichlet	$[-]$
$\Gamma_h$	Parte da fronteira $\Gamma$ na qual são impostas as condições de Neuman	$[-]$

## SUBSCRITOS

$\alpha$	Número do ponto nodal local
$g$	Condição de contorno de Dirichlet
$h$	Condição de contorno de Neuman

## SOBRESCRITOS

*	Denota variáveis adimensionais
$h$	Denota aproximação de elementos finitos
T	Transposta de uma matriz

## SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\nabla$	Operador gradiente espacial
$\  \cdot \ $	Norma das funções $L^2$

# 1 INTRODUÇÃO

O escoamento de fluidos não-Newtonianos e reologia são assuntos essencialmente interdisciplinares em sua natureza, as quais possuem amplas áreas de aplicação. De fato, o comportamento de fluidos não-Newtonianos é encontrado em quase todas as indústrias de processamento químico e afins, seja nas indústrias de cosméticos, nas alimentícias e nas indústrias de petróleo. Os fatores que determinam as características reológicas de um material são altamente complexos e sua plena compreensão exige uma contribuição de físicos, químicos, matemáticos e engenheiros. Além disso, o assunto é de interesse tanto para matemáticos e cientistas quanto para a prática de engenheiros.

Podemos classificar os fluidos em duas formas diferentes: ou de acordo com a sua resposta à pressão aplicada exteriormente ou de acordo com os efeitos produzidos sob a ação de uma tensão de cisalhamento. Nesse trabalho, o enfoque será sobre a resposta a uma tensão de cisalhamento.

Fluidos Viscoplasticos são materiais estruturados que exibem um comportamento não-newtoniano complexo. Por sua vez, o comportamento viscoplastico caracteriza-se pelo nível de tensão do material necessitar exceder um limite de escoamento (*yield stress*) para que haja deformação, ou seja, para que o material escoe, mas a elasticidade e a tixotropia também podem desempenhar um papel importante. Quando submetido a valores acima do limite de escoamento, a sua viscosidade diminui com o tempo de cisalhamento, e há uma subsequente recuperação da viscosidade depois da interrupção deste processo de cisalhamento. Por outro lado, abaixo do limite de escoamento, o fluido se comporta como um material sólido, e a elasticidade pode ser significativa.

Neste trabalho, resultados numéricos de escoamento sem inércia de fluidos elasto-viscoplastico dentro de uma cavidade dirigida na tampa são obtidos com o objetivo de analisar as contribuições viscosas e elásticas para o escoamento apresentado. O comportamento mecânico de um material elasto-viscoplastico está relacionado com o nível de estrutura do material, que depende do nível da tensão aplicada ao mesmo. Abaixo da tensão de escoamento, o material é altamente estruturado, o que, por sua vez, levará a elevados níveis de elasticidade e viscosidade. Quando submetido a níveis de tensão acima do limite de escoamento, o material sofre uma ruptura na estrutura, levando a um comportamento onde a viscosidade decai e a elasticidade tende a desaparecer. Como o escoamento de líquidos

viscoplásticos está presente em diversos setores industriais, modelando o seu complexo comportamento mecânico não-linear é de extrema relevância industrial para a previsão e para entender os diferentes processos a que estão sujeitos.

Neste trabalho, o escoamento de um fluido elasto-viscoplástico dentro de uma cavidade com velocidade dirigida na tampa é analisado. A equação constitutiva usada para este modelo foi baseada em uma equação modificada seguindo o modelo de Oldroyd-B, a qual leva em consideração a elasticidade abaixo da tensão de escoamento e um comportamento pseudoplástico (*shear-thinning*) acima da tensão de escoamento. Mais recentemente, uma nova equação constitutiva baseada no modelo Oldroyd-B foi proposta. Ela possui uma importante característica pois além da elasticidade e do comportamento pseudoplástico, a mesma também prediz o comportamento tixotrópico dos fluidos, que é uma característica presente em muitos materiais viscoplásticos (equação constitutiva introduzida por Souza Mendes, 2011). Como este novo modelo envolve um parâmetro de estrutura para descrever a microestrutura do fluido, ele é mais representativo e será usado nessa dissertação. Este parâmetro de estrutura é avaliado com o auxílio de uma equação hiperbólica que deve ser resolvida juntamente com as equações de conservação e com a equação constitutiva. Fluidos tixotrópicos podem ser definidos como aqueles que apresentam uma diminuição contínua da viscosidade com o tempo, quando o escoamento é aplicado a uma amostra previamente em repouso, e a subsequente recuperação da viscosidade no momento em que o escoamento é interrompido. Ou seja, a tixotropia pode ser compreendida da seguinte maneira: a microestrutura depende da história do cisalhamento do escoamento que pode ser quebrado quando submetido a um determinado valor de tensão, o que significa que um fluido tixotrópico sempre terá comportamento viscoplástico.

Outro fato de importante análise é sobre a elasticidade, a qual pode estar presente nas regiões aparentemente não-escoadas em escoamentos de fluidos viscoplásticos, isto é, a elasticidade pode estar presente em regiões onde a tensão aplicada é inferior a tensão de escoamento do material. Portanto, quando a elasticidade é incorporada, as regiões escoadas passam a ser regiões não-simétricas. Já a função viscosidade é dada pelas equações específicas, tais como o modelo de *Bingham* ou *Herschel-Bulkley*, ou com as suas versões regularizadas.

A solução numérica das equações de conservação e que governam o escoamento são obtidas utilizando três campos com a aproximação por Galerkin Mínimos Quadrados (GLS) e

com a formulação do método de elementos finitos, para mais detalhes ver, [Zinani et al. 2010], a qual leva em conta a velocidade, pressão e o campo de tensão extra como variáveis primais; esta formulação pode ser vista como uma extensão – para o caso elasto-viscoplástico sujeito a *shear-thinning* dos tempos de relação e retardamento, e da função viscoplástica SMD [Souza Mendes, et al. 2007] – da formulação proposta em [Behr, et al. 1993], para fluidos de viscosidade constante. Com a adição de termos malha-dependentes as equações governantes, essa formulação consegue capturar os efeitos elásticos e viscosos presentes no modelo. A influência da elasticidade, tensão de escoamento, *shear-thinning* e da cinemática sobre a topologia das regiões escoadas e sobre as regiões aparentemente não-escoadas são apresentadas e discutidas.

Sendo o objetivo geral do trabalho, analisar a influência mecânica e numérica nos escoamentos de materiais elasto-viscoplásticos no interior de uma cavidade dirigida no topo, investigando os efeitos elásticos e viscosos no campo de escoamento.

O presente trabalho apresenta a seguinte estrutura: no capítulo 2, é apresentada uma revisão bibliográfica sobre alguns trabalhos feitos sobre fluidos não-Newtonianos; no capítulo 3, será discutida a modelagem mecânica utilizada no trabalho, ou seja, será apresentada todas as equações utilizadas para a realização desse trabalho; no capítulo 4, é apresentado como se comporta alguns tipos de fluidos não-Newtonianos; no capítulo 5, é apresentada e discutida a modelagem do modelo proposto nessa dissertação; no capítulo 6, a modelagem numérica usada é analisada; no capítulo 7, são apresentados os resultados obtidos nessa dissertação; no capítulo 8, são discutidas as conclusões desse trabalho e por fim é apresentado alguns itens para a realização na sequência desse trabalho.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O fluido não-Newtoniano se caracteriza principalmente por a tensão não ser proporcional à taxa de deformação, isto é, a sua viscosidade não é constante; este conceito é básico, porém o escoamento de fluidos não-newtonianos é um assunto muito abrangente e ainda está sendo discutido na literatura.

Bercorvier et al., 1980, propuseram uma equação regularizada para o modelo de Bingham, para contornar o problema da modelagem numérica da viscosidade infinita para taxas de deformação nulas, no qual eles mostraram que as regiões escoadas aumentam à medida que o parâmetro de regularização cresce. Então, a localização das superfícies de escoamento é uma função do valor escolhido para o parâmetro de regularização.

Papanastasiou et al., 1987, contribuiu para o chamado modelo regularizado de viscoplasticidade, propondo uma função analítica e contínua para a tensão cisalhante em termos da taxa de deformação, a qual é válida para todo o domínio do fluido.

Barnes et al., 1999, realizou uma revisão sobre materiais com tensão de escoamento, na qual afirma que a propriedade tensão de escoamento não existe. Apresentou curvas de materiais viscoplásticos, mostrando a existência de escoamento abaixo da tensão de escoamento, o que contradiz a definição do termo. Portanto, considera que a tensão de escoamento é o nível de tensão para o qual ocorre uma mudança severa na microestrutura do material e conseqüentemente uma mudança na sua viscosidade.

De Souza Mendes et al., 2004, propôs uma nova função viscosidade para alta pseudoplasticidade, que é uma função contínua e apresenta um platô de viscosidade para baixas taxas de cisalhamento, seguida por uma queda acentuada da viscosidade em um valor limite de cisalhamento (tensão de escoamento), e uma região *power-law* posterior. Esta equação foi ajustada de acordo com os dados de uma solução aquosa de Carbopol em duas concentrações diferentes, um fluido de perfuração, uma emulsão de água/óleo, uma maionese comercial e uma formulação de revestimento de papel.

De Souza Mendes et al., 2007, propôs uma alternativa para a escolha das grandezas características para ser empregada na adimensionalização das equações governantes nos problemas de escoamento de fluidos não-newtonianos. O procedimento usual de adimensionalização, gera os conhecidos grupos adimensionais, tais como, número de Reynolds, número de Deborah ou Weissenberg, número de Carreau, número de Bingham e o

número de capilaridade. Os grupos que apresentam propriedades reológicas adimensionais envolvem quantidades de escoamento, como a velocidade característica e a taxa de deformação. Nesse procedimento alternativo, os grupos reológicos adimensionais resultantes são propriedades reológicas sem dimensão e, assim, permanecem fixos para um determinado material que se escoar. Além disso, observou-se que cada conjunto de valores dessas propriedades reológicas adimensionais define uma classe de materiais reologicamente equivalentes. O procedimento de adimensionalização proposto é fisicamente mais sólido e torna mais simples, tanto a aplicação dos resultados adimensionais como as situações de engenharia e as comparações entre resultados numéricos e experimentais em investigação científica. Os experimentos de visualização foram feitos com soluções aquosas de Carbopol em diferentes concentrações e a observação das zonas aparentemente não-escoadas e escoantes foi realizada para diferentes combinações dos parâmetros governantes.

Nassar et al., 2011, propôs uma equação constitutiva para o modelo elasto-viscoplástico com base no modelo Oldroyd-B com o objetivo de substituir o valor da viscosidade, do tempo de relaxação e retardação para expressões que são funções da taxa de deformação. Como resultado, analisou as superfícies de escoamento em uma expansão-contracção.

De Souza Mendes e Thompson. R.L, 2012, revisaram a modelagem tixotrópica, com ênfase particular em modelos onde a tensão de escoamento do material possui elasticidade. Avaliaram as vantagens e desvantagens algébrica em comparação com as equações diferenciais de tensão. O fenômeno tixotrópico é descrito como um sistema dinâmico, cujo local de equilíbrio é a curva de escoamento, onde enfatizaram a importância do uso dessa curva como uma entrada do modelo. Diferentes formas para a equação de evolução para o parâmetro de estrutura foram analisadas, com o cuidado de garantir uma descrição verdadeira do fenômeno tixotrópico.

Dos Santos et al., 2013, analisou um escoamento incompressível elasto-viscoplástico em uma expansão-contracção planar. Os resultados mostraram que a deformação elástica é máxima ao longo das superfícies escoadas. Já o efeito da viscoplasticidade foi analisado alterando a velocidade adimensional de entrada,  $U^*$ ; com velocidades de entrada muito baixas, as regiões aparentemente não-escoadas tomam a maior parte do domínio, entretanto, com o aumento da velocidade, essas regiões reduzem de tamanho, como esperado. O efeito da inércia foi examinado alterando a massa específica adimensional,  $\rho^*$ , no qual mostrou-se

que a inércia não altera significativamente o tamanho das regiões aparentemente não-escoadas, mas desloca a posição das superfícies escoadas da cavidade no sentido oposto ao deslocamento causado pela deformação elástica.

Martins R.R et, al., 2013, analisou um escoamento elasto-viscoplástico incompressível em uma cavidade cuja velocidade é dirigida na tampa. Utilizaram o modelo do Nassar et al., 2011 com o objetivo de analisar os efeitos elásticos e viscosos na topologia das regiões escoadas, para isso, utilizou o método de elementos finitos com a aproximação de Glaerkin Mínimos Quadrados (GLS). Os resultados mostraram que as superfícies escoadas são fortemente influenciadas pela interação entre os efeitos elásticos e viscosos de acordo com a visualização experimental do escoamento elasto-viscoplástico.

De acordo com o trabalho publicado por Martins R.R et, al., 2013, as equações do tempo de relaxação e de retardo do material, que foram proposta por Nassar et al., 2011, não são fisicamente reais, pois elas foram um ajuste de curvas para dosar a elasticidade nas zonas aparentemente não-escoadas. Por outro lado, nessa dissertação, tanto a equação do tempo de relaxação e do retardo do material são expressamente funções da reologia do material, logo elas são fisicamente real, portanto pode-se dizer que a maior contribuição dessa dissertação são essas equações.

### 3 MODELAGEM MECÂNICA

Para o estudo completo de qualquer comportamento material, é necessário a solução das equações que representam as leis físicas, pois qualquer escoamento tem que satisfazer essas leis. Neste Capítulo são apresentadas e discutidas a Lei de conservação de massa e o princípio da quantidade de movimento que foram utilizadas nesta dissertação.

Nesta dissertação foram empregadas as tradicionais equações da conservação de massa e o princípio da quantidade de movimento, onde as grandezas e operadores diferenciais destas equações são descritos espacialmente, ou seja, são funções que, para um dado instante de tempo, ocupam a posição espacial de uma partícula fluida ao longo de sua trajetória. Por simplicidade e clareza, entretanto sem perda de generalidade, esta descrição é omitida ao longo deste Capítulo.

#### 3.1 Les da Conservação de Massa

Este princípio postula que “a vazão mássica líquida que entra em um volume fluido  $\Omega$  é igual a taxa de variação com o tempo da massa no seu interior”. Assim, este princípio pode ser expresso matematicamente por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

Para chegarmos, a partir da Eq.(3.1), na forma Euleriana da Equação da Continuidade é necessário estar de posse do Teorema do Transporte de Reynolds e do Teorema da Divergência. Logo, temos que o Teorema de Reynolds acerta que: *Seja  $\varphi$  um campo espacial suficientemente regular e assumindo que  $\varphi$  seja a valor escalar ou vetorial. Então, para um dado volume  $\Omega = \Omega(t)$  e em um dado instante de tempo  $t$ , tem-se:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \varphi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \text{em } \Omega \quad (3.2)$$

Para provarmos o Teorema do Transporte de Reynolds, consideramos seu domínio de referência,  $\Omega_r$ , o qual é independente do tempo ( $\Omega(0) \equiv \Omega_r$ ), pois desta forma podemos aplicar operações de diferenciação e integração. Desta forma, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.3)$$

A prova se dá para  $\varphi$  escalar e é estendida para  $\boldsymbol{\varphi}$  vetorial,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_r} \varphi \det \mathbf{F} d\Omega_r = \int_{\Omega_r} \frac{d}{dt} (\varphi \det \mathbf{F}) d\Omega_r = \int_{\Omega_r} [\dot{\varphi} \det \mathbf{F} + \varphi \overline{\dot{\det \mathbf{F}}}] d\Omega_r \quad (3.4)$$

mas, como  $\overline{\dot{\det \mathbf{F}}} = \text{tr} \nabla \mathbf{u} \cdot \det \mathbf{F}$ , assim:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi d\Omega = \int_{\Omega_r} [\dot{\varphi} \det \mathbf{F} + \varphi \text{tr} \nabla \mathbf{u} \det \mathbf{F}] d\Omega_r \quad (3.5)$$

Agora, colocando  $\det \mathbf{F}$  em evidencia e sabendo que  $\text{tr} \nabla \mathbf{u} = \text{div} \mathbf{u}$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi d\Omega = \int_{\Omega} [\dot{\varphi} + \varphi \text{div} \mathbf{u}] \det \mathbf{F} d\Omega_r = \int_{\Omega} [\dot{\varphi} + \varphi \text{div} \mathbf{u}] d\Omega \quad (3.6)$$

Para a forma vetorial assumimos na Eq.(3.6) a identidade, [maiores detalhes em Girtin, 1981]:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\varphi} \text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \text{div}(\boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}) \quad (3.7)$$

Desta forma substituindo a (Eq(3.7)) na (Eq.(3.6)) e aplicando o teorema de Stokes (Eq. (A(10.11))), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}, t) d\Omega &= \int_{\Omega} [\dot{\varphi} + \varphi \text{div} \mathbf{u}] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\bar{\varphi} \mathbf{v}) d\Omega \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}, t) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\varphi} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.8)$$

Fazendo  $\varphi = \rho$  na Eq. (3.3) e o Teorema da Divergência (Anexo), [Truesdell e Toupin, 1960; Billington e Tate, 1981],

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega} (\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega \quad (3.9)$$

Como  $\varphi$  é um volume arbitrário do fluido que estabelece o balanço de massa em todos os pontos do material contínuo, temos que o Teorema da Localização (Anexo) aplicado à Eq. (3.9) fornece,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) \quad (3.10)$$

onde, o primeiro termo desta equação descreve a taxa de aumento de massa por unidade de volume e o segundo termo descreve a taxa líquida de adição de massa por unidade de volume por convecção.

O vetor  $\rho \mathbf{u}$  é o fluxo de massa e a sua divergência tem um significado simples: é a taxa líquida de efluxo de massa por unidade de volume.

Uma forma muito importante da equação da continuidade (Eq.(3.10)) é quando a densidade for constante, ou seja, para fluidos incompressíveis a Eq. (3.10) torna-se:

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (3.11)$$

onde  $\mathbf{u}$  representa o vetor velocidade e esta equação representa a conservação de massa.

### 3.2 Princípio da Quantidade de Movimento

Este princípio nos diz que, *a taxa líquida de quantidade de movimento que atravessa o sistema mais a soma das forças de corpo agindo no sistema mais a soma das forças de superfícies é igual a taxa de aumento da quantidade de movimento no sistema*, ou seja, a taxa de variação da quantidade de movimento em um volume de fluido  $\Omega$  é igual a força total nele aplicada. Assim, este princípio pode ser expresso matematicamente fazendo  $\boldsymbol{\varphi} = \rho \mathbf{u}$  no

transporte de Reynolds (Eq.(3.3)) e como  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega$  é a massa vezes a aceleração, o balanço de momentum vai ser igual a esse termo igualado com o somatório de forças agindo no sistema, a qual poder ser expressa pela tensão multiplicada pela normal,

$\int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma$  e aplicando o teorema de Green (Anexo), teorema da divergência (Anexo), hipótese de Cauchy (Anexo) e aplicando para um fluido incompressível e o escoamento em regime permanente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \frac{d\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $\Gamma$  representa a superfície do volume  $\Omega$ ,  $\mathbf{F}$  representa o campo de forças totais externas e mútuas e  $\mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t)$  representa o tensor de Cauchy, o qual afirma que: *Seja  $(t(x, t), f(x, t))$  um sistema de forças de um corpo em movimento. Então, a condição necessária e suficiente para que as leis de conservação de momentum sejam satisfeitas é a existência de um campo tensorial espacial  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  - chamado tensor de Cauchy, tal que:*

I – para todo vetor unitário  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  ;

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \tag{3.13}$$

II – o tensor  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  é simétrico;  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ ,

o tensor  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  satisfaz a Eq.(3.14), a qual é conhecida como a primeira lei de Cauchy ou equação de movimento linear. Para obtenção da primeira Lei de Cauchy, foram aplicados o Teorema da Localização (Anexo) para um fluido incompressível na equação (3.12).

$$\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \tag{3.14}$$

em que esta equação descreve o movimento dos fluidos, bem como o movimento de qualquer meio contínuo. Escrevendo a Eq.(3.14) de uma maneira mais comum,

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \times \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \tag{3.15}$$

Esta equação possui a forma *Euleriana* da equação da quantidade de movimento, onde o lado esquerdo dessa equação representa as forças de inércia por unidade de volume agindo sobre o fluido, já o lado direito representa as forças de contato e de corpo por unidade de volume agindo sobre o fluido. Por outro lado, utilizando a forma *Euleriana* e a substituindo na equação do movimento, obtemos a forma *Lagrangeana* da equação da conservação da quantidade de movimento, dada por:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{div}(\mathbf{T}) + \rho \mathbf{g} \quad (3.16)$$

O tensor  $\mathbf{T}$  é o tensor tensão, onde estão armazenadas todas as tensões de superfície por porção infinitesimal do fluido. Assumindo-se fluidos incompressíveis, o tensor  $\mathbf{T}$  é definido como:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.17)$$

onde  $p$  é o campo de pressão,  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade e  $\boldsymbol{\tau}$  é o tensor extra de tensão. Sendo assim, substituindo-se essa definição na equação da quantidade de movimento a Eq. (3.18) apresenta a seguinte forma:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \text{div}(\boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{g} \quad (3.18)$$

Nessa equação, o termo da esquerda representa o fenômeno da advecção, por causa da aceleração da partícula, isto é, é o termo das forças de inércia; por outro lado, os termos a direita representam as forças de corpo e de contato agindo na partícula.



#### 4. COMPORTAMENTO MATERIAL

Para sabermos as características mecânicas do comportamento de um dado material, precisamos estudar as chamadas equações constitutivas, pois os parâmetros dessa equação dependem diretamente do material analisado. As equações constitutivas são descritas pela variação do tensor tensão, logo cada material terá o seu comportamento caracterizado diretamente pela equação do tensor tensão.

A partir de diversas observações feitas por reologistas, notou-se que a lei da viscosidade de Newton não descrevia com exatidão escoamentos de vários fluidos. Com isso, introduziu-se uma alteração nesta lei de Newton permitindo que a viscosidade variasse com a taxa de deformação, surgindo assim a ideia de fluido newtoniano generalizado.

##### 4.1 Fluido Newtoniano Generalizado

A modificação proposta da lei de Newton substitui a viscosidade constante por uma viscosidade que varia de acordo com o gradiente de velocidades, ou seja, para a tensão cisalhante temos a seguinte expressão:

$$\tau_{12} = \eta \frac{du_1}{dx_2} \quad (4.1)$$

onde  $\eta$  é função do gradiente de velocidade  $\frac{du_1}{dx_2}$ .

Sendo assim, para qualquer campo de velocidade, tem-se o modelado Fluido Newtoniano Generalizado,

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (4.2)$$

onde  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  é o tensor taxa de deformação, dado por:

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \quad (4.3)$$

A viscosidade aparente  $\eta$  é uma grandeza escalar e depende do tensor taxa de deformação.

#### 4.2 Comportamento Não-Newtoniano

O fluido Não-Newtoniano tem a característica de não possuir a viscosidade constante, ou seja, a tensão cisalhante não é proporcional a taxa de deformação, como segue:

$$\tau_{12} = \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{du_1}{dx_2} \right) \quad (4.4)$$

onde a viscosidade aparente  $\eta$  é uma função da taxa de deformação  $\dot{\gamma} = \frac{du}{dx}$ .

A curva tensão x taxa de deformação pode ter vários formatos, na qual irão caracterizar o comportamento do material, como visto na figura abaixo:

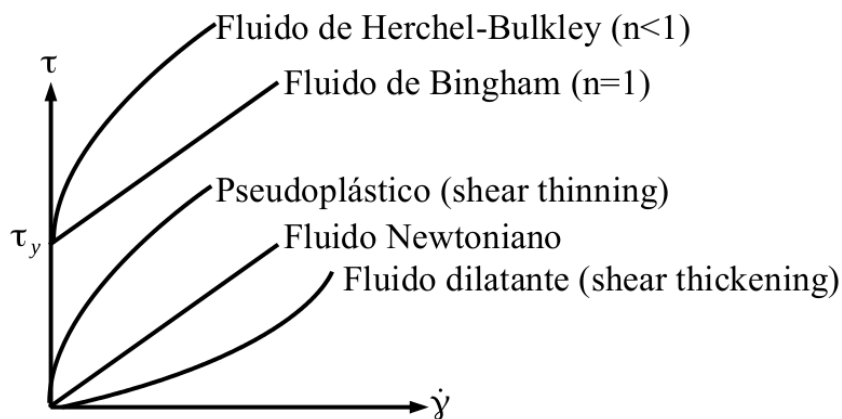


Figura 4.1 – Curva de escoamento de diversos materiais

Com base nesse gráfico, podemos ver que no fluido Newtoniano, a viscosidade é constante e a tensão é diretamente proporcional a taxa de deformação, logo o que diferencia o Newtoniano do dilatante e do pseudoplástico é o valor do índice de *power-law*,  $n$ .

#### 4.2.1 Modelo Power-law

O modelo *power-law* é o mais comum dentre o fluido Newtoniano Generalizado, onde a sua equação é:

$$\tau = m(\dot{\gamma})^n \quad (4.5)$$

onde  $m$  é o índice de consistência e  $n$  é o índice de *power-law*, nos quais são obtidos empiricamente. Quando  $n=1$  e  $m=\mu$ , este modelo se reduz ao modelo Newtoniano para um fluido incompressível. Por outro lado, quando  $n<1$  o fluido é dito pseudoplástico ou também é chamado de *shear-thinning* e se  $n>1$  o fluido é dito dilatante ou também é chamado de *shear-thickening*.

O modelo *power-law* possui algumas limitações: para valores baixos de  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ , a microestrutura do fluido é preservada e a viscosidade  $\eta \rightarrow \infty$  e para altos valores de  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ , a viscosidade  $\eta \rightarrow 0$ . E já no dilatante a viscosidade aumenta com o aumento da taxa de deformação.

#### 4.2.2 Comportamento Viscoplastico

O que caracteriza este comportamento é de que o nível de tensão do material necessita exceder um limite de escoamento (*yield-stress* =  $\tau_y$ ) para que haja deformação. Por outro lado, o material se deformará elasticamente, como um corpo rígido, quando a tensão aplicada for inferior a  $\tau_y$ , o que implica que a curva de escoamento nunca passará pela origem.

Fisicamente, o comportamento viscoplastico pode ser explicado da seguinte maneira: inicialmente o material em repouso é composto por uma microestrutura tridimensional suficientemente rígida de modo a registar à tensão inferiores a  $\tau_y$ . Para níveis de tensão superiores a  $\tau_y$ , a sua microestrutura começa a se colapsar e o material acaba escoando como um fluido puramente viscoso.

Um material com curva de escoamento linear, Fig.(4.1), é chamado de fluido de *Bingham* e tem viscosidade constante. Por sua vez, um material que apresente uma curva de escoamento não-linear, Fig.(4.1), é denominado fluido de *Herchel-Bucley*.

#### 4.2.2.1 Fluido de Bingham

É dito um modelo de dois parâmetros, visto que depende de  $\tau_y$  e  $\mu$ . A equação da sua tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau = \tau_y + \mu \dot{\gamma} \quad \text{se} \quad \tau \geq \tau_y \quad (4.6)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{se} \quad \tau < 0 \quad (4.7)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade viscoplástica e  $\tau_y$  é a tensão limite do material.

#### 4.2.2.2 Fluido de Herchel-Bucley

É dito um modelo a três parâmetros, visto que depende de  $\tau_y$ ,  $K$  e  $n$ . A equação da sua tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau = \tau_y + K \dot{\gamma}^n \quad \text{se} \quad \tau \geq \tau_y \quad (4.8)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{se} \quad \tau < 0 \quad (4.9)$$

onde  $K$  é o índice de consistência.

Porém, o modelo *Herchel-Bucley* é um modelo clássico de viscoplasticidade, visto assumir a existência de um nível de tensão  $\tau_y$  a partir do qual o material passa abruptamente de movimento de corpo rígido,  $\dot{\gamma} = 0$ , para escoamento de fluido *power-law*.

#### 4.2.3 Regularização de Papanastasiou

Os modelos clássicos de viscoplasticidade cedem vez aos chamados modelos regularizados de viscoplasticidade, com a importante contribuição de [Bercovier, 1982] e [Papanastasiou, 1987]. O primeiro dá origem ao chamado modelo da bi-viscosidade e enquanto o segundo dá origem a uma função analítica e contínua para a tensão de cisalhamento em termos da taxa de deformação, a qual é válida para todo o domínio do fluido. Apesar de o modelo da bi-viscosidade apresentar resultados muito bons no ajuste de dados experimentais, ele carrega a inconveniência da determinação das superfícies de escoamento

(*yield surfaces*). Entretanto, Papanastasiou propôs uma regularização de grande simplicidade computacional para a determinação dessas superfícies, para isso Papanastasiou propôs uma modificação da Eq.(4.8), introduzindo um parâmetro regularizador  $m$ , que controla o crescimento exponencial da tensão quando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ , seguindo a equação,

$$\tau = \tau_y [1 - \exp(-m \dot{\gamma})] + K \dot{\gamma}^n \quad (4.10)$$

onde o parâmetro  $m$  tem dimensão de tempo. Como dito anteriormente, este modelo regularizado é de simples implementação, porém este modelo não terá bons resultados onde  $\tau = \tau_y$ , ou seja, o modelo não consegue visualizar superfícies de escoamento bem definidas, pois há escoamento nas regiões aparentemente não-escoadas. Partindo da Eq.(4.10), pode-se obter uma equação para a viscosidade regularizada:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-m \dot{\gamma})] + K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (4.11)$$

Outra observação para este modelo, é que apresentará um comportamento inadequado quando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ , pois devido a regularização o modelo de Papanastasiou tenderá ao modelo *power-law*, sendo assim terá os mesmo problemas das assíntotas, isto é, quando  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow \infty$  e quando  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 0$ .

#### 4.2.4 Modelo Viscoplastico SMD

Devido as dificuldades encontradas nos modelos clássicos de viscoplasticidade citados acima, [Souza Mendes, 2004] propuseram através de observações experimentais, uma nova função finita de viscosidade. Esta nova função tem como vantagem o fato de ser contínua, assim como a sua derivada. Possui comportamento qualitativamente igual às demais funções viscosidade viscoplasticas, ou seja, apresenta um platô de viscosidade alta nas regiões de baixas taxas de cisalhamento, em seguida apresenta uma queda abrupta da viscosidade em valores da tensão cisalhante próximos da tensão limite de escoamento ( $\tau = \tau_y$ ) e logo após, para altas taxas de cisalhamento prescreve uma região *power-law*. A forma SMD para a tensão cisalhante é dada por:

$$\tau = [1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_y)] (\tau_y + K \dot{\gamma}^n) \quad (4.12)$$

onde  $\eta_0$  é a viscosidade para baixas taxas de cisalhamento. A representação gráfica desta função, está representada na Fig.(4.2),

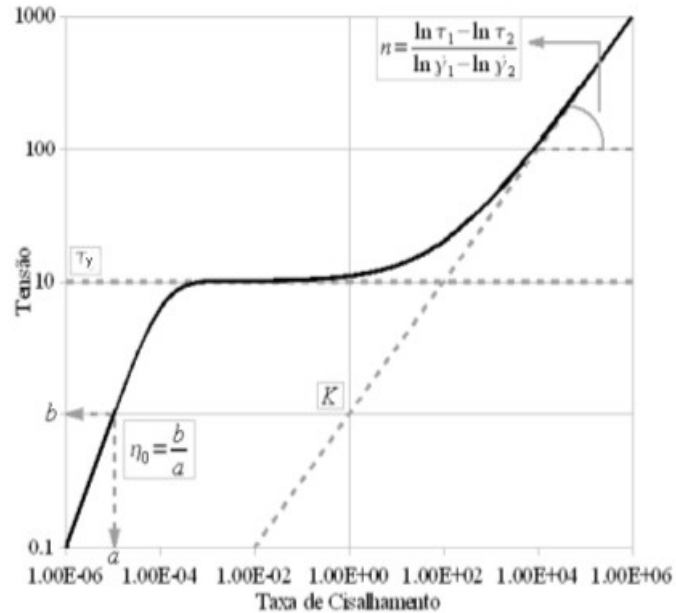


Figura 4.2 – Curva de escoamento SMD

A viscosidade  $\eta_0$  é a razão entre a tensão e a taxa de cisalhamento, na região onde esta tensão seja menor que  $\tau_y$ , para assegurar que a taxa de cisalhamento esteja dentro da região de platô delimitada pela taxa de cisalhamento limite de escoamento  $\dot{\gamma}_0$ . O índice  $n$  é a inclinação da reta na região *power-law* no gráfico  $\log \tau \times \log \dot{\gamma}$ .

A taxa de cisalhamento limite de escoamento é definida como:

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_y}{\eta_0} \quad (4.13)$$

e a taxa de cisalhamento no início da região *power-law* é dada por:

$$\dot{\gamma}_1 = \left( \frac{\tau_y}{K} \right)^{1/n} \quad (4.14)$$

A Fig. 4.3 mostra algumas curvas de escoamento de materiais viscoplásticos reais descritos pelo modelo SMD – observa-se o mesmo comportamento qualitativo para todos os casos.

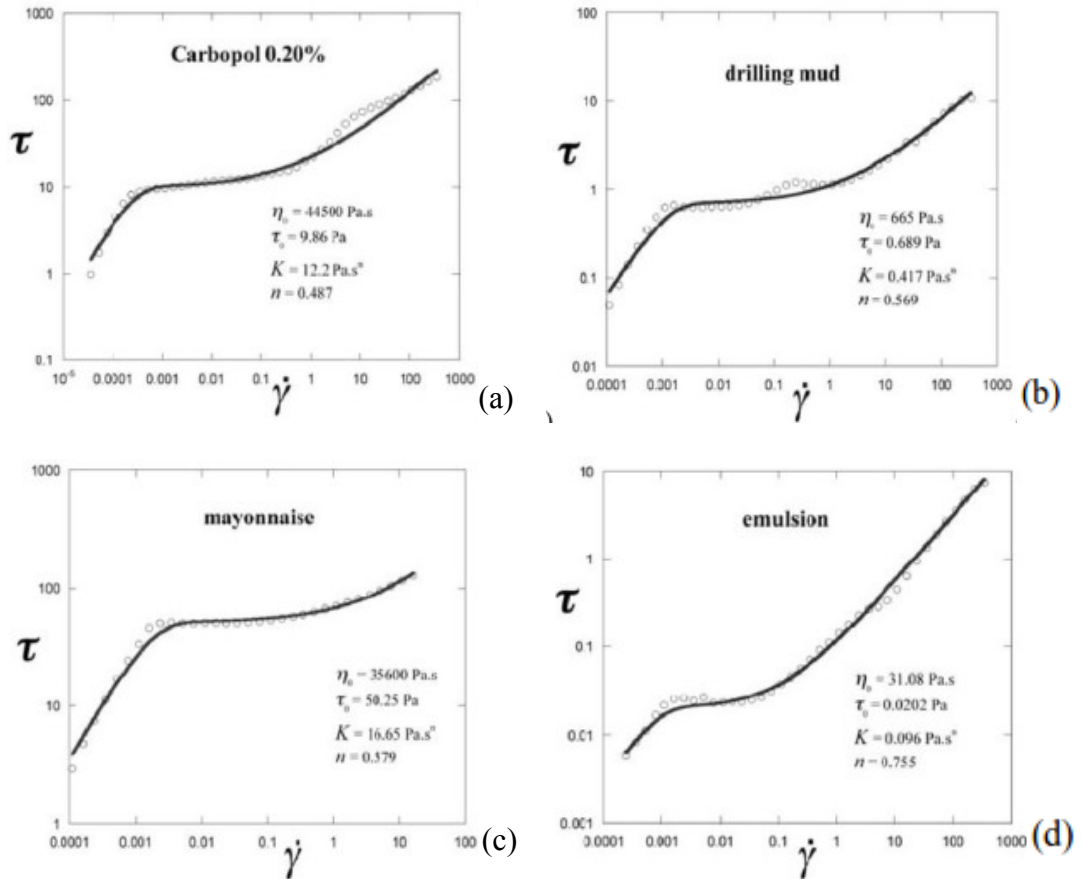


Figura 4.3 – Curvas de escoamento de materiais reais: (a) solução de água e Carbopol a 0.20%; (b) lama de perfuração; (c) maionese comercial; (d) emulsão de água e óleo. [de Souza Mendes, 2004].

[Souza Mendes et al., 2007] introduzem uma propriedade reológica adimensional baseada na observação do comportamento da função viscosidade SMD, no qual é o número de salto ( $J$ ). Esse número fornece uma medida relativa do salto na taxa de cisalhamento que ocorre quando  $\tau = \tau_y$ , definido por:

$$J = \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \frac{\eta_0 \tau_y^{(n-1)/n}}{K^{1/n}} - 1 = \frac{\eta_0 \dot{\gamma}_1}{\tau_y} - 1 \quad (4.15)$$

Para  $n=1$ , o parâmetro  $J$  torna-se independente de  $\tau_y$ , assim este parâmetro se reduz a  $J = \frac{\eta_0}{K} - 1$ .

#### 4.2.5 Tensão de escoamento - “yield stress”

É um conceito muito importante dentro dos fluidos não-newtonianos e ainda causa alguma confusão sobre o seu conceito.

É visualmente impossível estabelecer se o material viscoplástico tem ou não um limite de escoamento. Entretanto, no ponto de vista reométrico, este conceito ainda vale, visto que materiais viscoplásticos se aproximam do chamado comportamento viscoplástico clássico. Ainda reometricamente, o que aconteceu foi o avanço tecnológico dos reômetros, os quais passaram a ser capazes de captar escoamento a baixíssimas taxas de deformação.

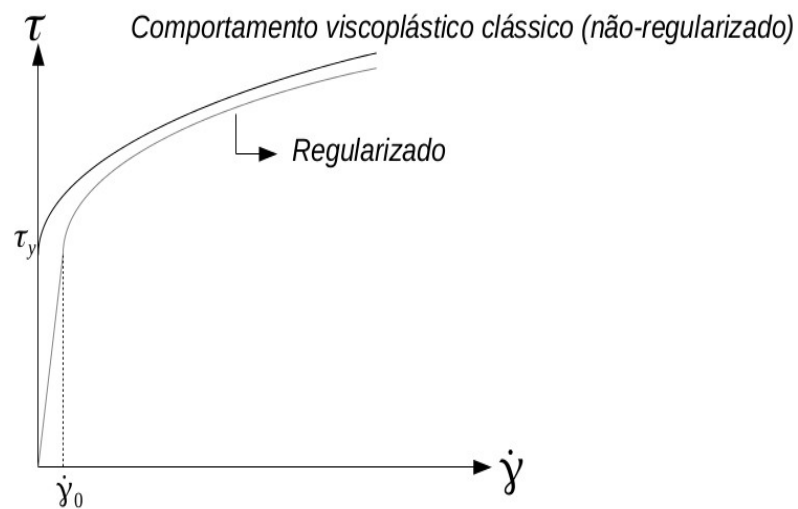


Figura 4.4 – Curva de escoamento viscoplástica



### 4.3 Comportamento Viscoelástico

Para expressar esse comportamento, vamos introduzir dois modelos, o modelo de Maxwell Convectado Superior (UCM) e o modelo Oldroyd-B. O modelo UCM é o modelo mais simples para modelar o comportamento viscoelástico, visto que ele apresenta facilidade na implementação de algoritmos numéricos. A sua equação é dada por:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2 \eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (4.16)$$

onde  $\theta_1$  é o tempo de relaxação do fluido e o seu modelo é descrito como uma mola em série com um amortecedor, como mostra a Fig.(4.3) abaixo,

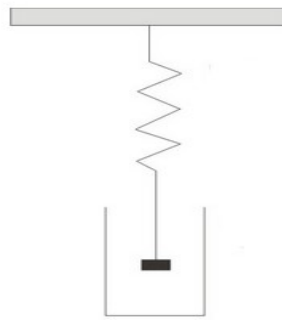


Figura 4.5 – Representação esquemática do modelo UCM

A derivada  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$  é expressa por:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = (\nabla \boldsymbol{\tau}) \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (4.17)$$

O modelo UCM combinado em paralelo com o modelo Newtoniano, resulta no chamando modelo *Oldroyd-B*, na qual a sua equação constitutiva é expressa por:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2 \eta (\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \theta_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) \quad (4.18)$$

onde  $\theta_2$  é o tempo de retardo do fluido, no qual é maior ou igual a zero e menor que o tempo de relaxação e a derivada convectada superior do tensor taxa de deformação  $\overset{\nabla}{\mathbf{D}}$ , é

dada por:

$$\overset{\vee}{\mathbf{D}} = (\nabla \mathbf{D})\mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (4.19)$$

e o seu modelo é descrito como um amortecedor em paralelo com uma mola e um amortecedor em série, como mostra a Fig.(4.4) abaixo,

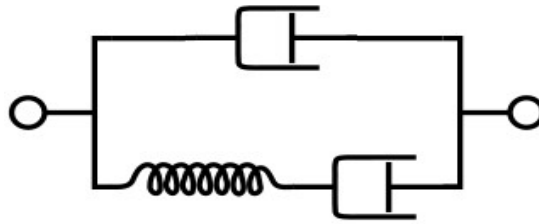


Figura 4.6 – Representação esquemática do modelo Oldroyd-B

A viscosidade  $\eta$  é a soma da viscosidade do solvente Newtoniano  $\eta_s$  com a viscosidade do polímero elástico  $\eta_e$ , logo:

$$\eta = \eta_s + \eta_e \quad (4.20)$$

E os tempos de relaxação e retardação são, respectivamente dados por:

$$\theta_1 = \frac{\eta_e}{G} \quad e \quad \theta_2 = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_e} \theta_1 \quad (4.21)$$

O tensor extra  $\boldsymbol{\tau}$  é expresso pela soma da contribuição Newtoniana,  $\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D}(\mathbf{u})$  com a parcela viscoelástica  $\boldsymbol{\tau}_e$ , ou seja,  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_e$ , sendo  $\boldsymbol{\tau}_e$  satisfazendo a Eq.(4.16).

## 5. MODELAGEM DA ELASTO-VISCOPLASTICIDADE

Para modelar o comportamento elasto-viscoplástico do material, o tensor extra de tensão é descrito por uma equação do tipo Oldroyd que leva em conta não só a elasticidade, mas também a viscoplasticidade e a tixotropia. A equação constitutiva do modelo adotado nessa dissertação foi proposta por [Souza Mendes, 2011], que segue a seguinte relação:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = 2 \eta(\dot{\gamma}) (\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \theta_2(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) \quad (5.1)$$

onde  $\dot{\gamma} = \sqrt{2 \operatorname{tr}[(\mathbf{D}(\mathbf{u}))^2]}$  é a magnitude do tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$  é o tensor taxa de deformação e  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$  e  $\overset{\nabla}{\mathbf{D}}$  representam as derivadas convectadas superior, respectivamente dadas por:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = (\nabla \boldsymbol{\tau}) \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (5.2)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{D}} = (\nabla \mathbf{D}) \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \quad (5.3)$$

A equação diferencial do tensor extra de tensão, Eq. (5.1), é o modelo viscoelástico Oldroyd-B padrão, com exceção do fato de a viscosidade estrutural,  $\eta$ , o tempo de relaxação,  $\theta_1$ , e o tempo de retardação,  $\theta_2$ , são parâmetros dependentes. A evolução do parâmetro de estrutura é governada por uma equação cinética, com a sua derivada material no tempo dada por:

$$\dot{\lambda} = \mathbf{u} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) = \left[ (1 - \lambda) - (1 - \lambda_{eq}) \left( \frac{\lambda}{\lambda_{eq}} \right) \right] \quad (5.4)$$

onde o desequilíbrio entre o termo de construção,  $\frac{1}{t_{eq}}(1 - \lambda)$ , e o de quebra,

$$\frac{1}{t_{eq}} \left[ (1 - \lambda_{eq}) \left( \frac{\lambda}{\lambda_{eq}} \right) \right],$$

determina se o material será submetido a um envelhecimento ou a um processo de rejuvenescimento. Este tipo de modelo pode ser classificado como fenomenológico, uma vez que o parâmetro de estrutura não é uma quantidade diretamente

mensurável. Neste contexto, o parâmetro de estrutura de equilíbrio é determinado por uma função do nível de tensão atual.

A viscosidade e o módulo de elasticidade do material seguem essa dependência do parâmetro de estrutura, como segue, respectivamente:

$$\eta(\lambda) = \eta_0^\lambda \eta_\infty^{1-\lambda} \quad (5.5)$$

e

$$G(\lambda) = G_0 e^{m\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)} \quad (5.6)$$

onde  $\eta_0$  e  $\eta_\infty$  são as viscosidades máxima e mínima, respectivamente, dos estados estruturais e  $G_0$  é o módulo de elasticidade quando o material está totalmente estruturado.

A viscosidade de equilíbrio adotada é uma função da tensão quando o fluido está aparentemente escoando caracterizada por uma alta viscosidade finita no limite onde  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ , dada por [Souza Mendes, 2007]:

$$\eta_{eq}(\dot{\gamma}) = \left[ 1 - \exp\left(\frac{-\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_y}\right) \right] \left( \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \right) + \eta_\infty \quad (5.7)$$

onde  $\tau_y$  é a tensão quando o fluido está aparentemente escoando,  $K$  é o índice de consistência e  $n$  é o índice de *power-law*. Esta função viscosidade é caracterizada por quatro regiões distintas que correspondem aos diferentes estágios das experiências materiais quando o fluido evolui de um estado mais estruturado para um estado menos estruturado. A primeira região,  $\dot{\gamma} \in [0, \dot{\gamma}_0]$ , é a alta viscosidade - *plateau* -; a próxima,  $\dot{\gamma} \in [\dot{\gamma}_0, \dot{\gamma}_1]$  é caracterizada por um grande colapso da microestrutura; a terceira região,  $\dot{\gamma} \in [\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2]$ , corresponde a um comportamento *power-law*; e a última região,  $\dot{\gamma} \in [\dot{\gamma}_2, \infty]$ , é a baixa viscosidade ( $\eta_\infty$ ) - *plateau* -. As delimitações da taxa de deformação são dadas por:

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_y}{\eta_0}, \quad \dot{\gamma}_1 = \left( \frac{\tau_y}{K} \right)^{1/n}, \quad \dot{\gamma}_2 = \left( \frac{\eta_\infty}{K} \right)^{1/n-1} \quad (5.8)$$

Neste ponto, é importante mencionar que este modelo geral apresentado acima para materiais elasto-viscoplástico-tixotrópico tende suavemente para o caso onde os efeitos tixotópicos são desprezíveis, isto é, quando  $t_{eq} \rightarrow 0$ . Este caso limite, corresponde a uma estrutura de resposta instântenea para o novo nível de tensão aplicada e, portanto, o material está sempre em equilíbrio. Assim, o parâmetro de estrutura correspondente pode ser determinado pela função inversa da Eq.(5.5) e substituindo na Eq.(5.6) para encontrar o módulo de elasticidade nesse nível de estrutura. Alternativamente, pode-se conectar a função inversa,  $\lambda(\eta)$ , na Eq.(5.6) e encontrar  $G$  como uma função da viscosidade, isto é, sem computar  $\lambda$ . Por causa dessa correspondência um-para-um, pode-se ver que o estado da estrutura do material podia ser também determinado pelo seu nível de viscosidade.

O tempo de relaxação e de retardo, usados na Eq.(5.1), são definidos respectivamente:

$$\theta_1 = \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_{eq}}\right) \frac{\eta_{eq}}{G_{eq}} \quad (5.9)$$

$$\theta_2 = \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_{eq}}\right) \frac{\eta_\infty}{G_{eq}} \quad (5.10)$$

onde,  $G_{eq}$  é o módulo de elasticidade em equilíbrio e segue a mesma relação da Eq.(5.6),

$$G_{eq}(\lambda_{eq}) = G_0 e^{m\left(\frac{1}{\lambda_{eq}} - 1\right)} \quad (5.11)$$

Esta função é utilizada para prever o comportamento elástico de fluidos viscoplásticos somente em regiões onde o nível de tensão é inferior à tensão de escoamento.

Como,  $\eta_\infty$  corresponde a região de baixa viscosidade o tempo de retardação é praticamente nulo e o tempo de relaxação se reduz a:

$$\theta_{eq} = \frac{\eta_{eq}}{G_{eq}} \quad (5.12)$$

E a relação entre o parâmetro de estrutura em equilíbrio e a viscosidade em equilíbrio é dada por,

$$\lambda_{eq}(\dot{\gamma}) = \frac{\ln \eta_{eq}(\dot{\gamma}) - \ln \eta_{\infty}}{\ln \eta_0 - \ln \eta_{\infty}} \quad (5.13)$$

A dependência das funções materiais sobre as voltas possíveis no nível de estrutura para este modelo prevendo uma ampla variedade de respostas mecânicas, a partir do puramente elástico para o puramente viscoso, passando pela resposta viscoelástica sólida e a resposta viscoelástica líquida.

## 6. MODELAGEM NUMÉRICA

Muitos dos problemas encontrados na engenharia não são lineares e necessitam de métodos numéricos para obtenção de solução. Uma forma de aproximação numérica é o método de elementos finitos. Os princípios básicos do método de elementos finitos para a solução de problemas de valor de contorno são o estabelecimento de uma formulação variacional do problema investigado e a solução aproximada das equações variacionais através do uso de funções de interpolação de elementos finitos [Reddy e Gartling, 1994].

O método de elementos finitos consiste em uma aproximação numérica de equações diferenciais, baseado no conceito de que a solução de uma equação diferencial pode ser representada como uma combinação linear de graus de liberdade incógnitos e funções de aproximação selecionadas ao longo de todo o domínio do problema [ver, por exemplo, Reddy e Gartling, 1994].

A solução numérica do problema diferencial elasto-viscoplástico definido pelas Eqs. (5.1)–(5.10) obtida foi através da metodologia de elementos finitos, a qual aproxima numericamente a formulação variacional das equações governantes por combinações de graus de liberdade incógnitos e funções de base de suporte compacto definidas ao longo de todo o domínio do problema computacional  $\Omega$ . A aproximação do método de elementos finitos usada foi a aproximação por Galerkin Mínimos Quadrados (GLS), em termos do tensor extra de tensão, do vetor velocidade e do campo de pressão. Esta formulação pode ser vista como uma extensão da introduzida em [Behr et al., 1993], para fluidos de viscosidade constante. O método GLS foi originalmente proposto em [Hughes et al., 1986] para o problema misto de Stokes e depois estendido, em [Franca et al., 1992], para as equações de Navier-Stokes incompressíveis – tem sido já empregado para aproximar diversos problemas de escoamentos de fluidos não-Newtonianos. O método é capaz de produzir soluções estáveis para escoamentos advectivos e elasto-dominantes, usando interpolações Lagrangeanas de igual-ordem para aproximar tanto as funções solução, como as funções teste do problema estudado.

### 6.1 Formulação Forte de Elementos Finitos

A formulação forte do problema é obtida da particularização das equações da conservação de massa (Eq.(3.6)) e da quantidade de movimento (Eq.(3.13)) para um fluido

newtoniano generalizado escoando em regime laminar e permanente, juntamente com uma equação constitutiva para  $\boldsymbol{\tau}$  (Eq.(5.1)). Assim, pode-se construir o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 0 &= -\nabla p + \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) && \text{em } \Omega \\
 \boldsymbol{\tau} + \theta(\dot{\gamma})^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\tau} &= 2\eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}) && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\
 (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})\mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde  $\theta$  e a função viscosidade  $\eta$  dependem da taxa de cisalhamento do material,  $\rho$  representa a massa específica do fluido,  $\mathbf{u}$  é o vetor velocidade,  $p$  é a pressão,  $\mathbf{D}$  é o tensor taxa de deformação,  $\mathbf{g}$  representa a aceleração da gravidade que atua no sistema  $\mathbf{u}_g$  é a condição de contorno de Dirichlet,  $\mathbf{I}$  é tensor identidade e  $\mathbf{t}_h$  é a condição de contorno de Neumann.

## 6.2 Formulação Fraca de Elementos Finitos (Variacional)

Para definir a forma fraca, ou variacional, é preciso primeiro caracterizar dois conjuntos de funções. A primeira é definida como soluções candidatas ou tentativa. Essas possíveis soluções precisam satisfazer as condições de contorno e estar dentro dos espaços de funções apropriado. Sobre os espaços de funções,  $L_2(\Omega)$  define o espaço de funções quadrado-integráveis sobre  $\Omega$ ,  $H^1(\Omega)$  o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre  $\Omega$  [Rektorys, 1975].

O segundo conjunto de funções é chamado de funções peso ou variacionais. Esse conjunto de funções é muito semelhante as funções tentativas exceto porque requerem ser zero sobre o contorno, ou seja, estar nos seguintes espaços:  $L_2^0(\Omega)$  o espaço de funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre  $\Omega$  e  $H_0^1(\Omega)$  o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre  $\Omega$  que se tornam zero em  $\Gamma_g$  [Rektorys, 1975]. O próximo passo será de integrar a formulação forte ao modo que ocorra uma diminuição no grau da derivada, sendo preciso algumas manipulações nas equações. Após, é feito um produto interno das equações e suas respectivas funções pesos, tornando-a, assim uma equação variacional.



### 6.3 Galerkin Mínimos Quadrados

A formulação de Galerkin clássica apresenta oscilações nos campos de pressão e de velocidade, quando os gradientes são elevados, tornando-se instável. Para a estabilidade dos sub-espacos de velocidade e pressão adota-se a estratégia de mínimos quadrados na formulação clássica de Galerkin, mais conhecida como *Galerkin Least-Square* (GLS). Assim, este método mantém a estrutura da formulação de Galerkin e adiciona termos que garantem a estabilidade. Para maior detalhes ver, [Zinani, F. et. al., 2006].

### 6.4 Formulação estabilizada a três-campos

A formulação GLS utilizada baseia-se nos sub-espacos de elementos finitos usuais para problemas de escoamentos incompressíveis,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{ij}^h \{S_{ij}^h \in C^0(\Omega) \cap L_2, \forall i, j | S_{ij}^h|_K \in P_k(K), \forall K \in \Omega^h\} \\
 & P^h = \{q^h \in C^0(\Omega) \cap L_2^0 | q^h|_K \in P_m(K), \forall K \in \Omega^h\} \\
 & V_{ig}^h = \{v_{ig}^h \in H^1(\Omega), \forall i | v_{ig}^h|_K \in P_n(K), \forall K \in \Omega^h\} \\
 & V_i^h = \{v_i^h \in V_i^h = 0, \forall i | v_i^h|_K \in P_n(K), \forall K \in \Omega^h\}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

com  $C^0$  denotando para o espaco das funções contínuas,  $L_2$  o espaco (de Hilbert) de funções de quadrado-integrável e  $H^1$  o espaco (de Sobolev) de funções de derivada primeira integráveis, como segue:

$$\begin{aligned}
 L_2(\Omega) &= \{q \mid \int_{\Omega} q^2 d\Omega < \infty\} \\
 L_2^0(\Omega) &= \{q \in L_2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\Omega = 0\} \\
 H^1(\Omega) &= \{v_1 \in L_2(\Omega), \nabla \mid \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), \forall i, j\} \\
 H_0^1(\Omega) &= \{v_i \in H^1(\Omega), \forall i \mid v_i = 0, \forall i \text{ em } \Gamma_q\}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

A partir das definições da Eq.(6.2), podemos escrever uma formulação estabilizada três-campos, como segue:

Dado  $g_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $u_{i_g} : \Gamma_g^{u_i} \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $\tau_{ij_g} : \Gamma_g^{\tau_{ij}} \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $t_i : \Gamma_h^{t_i} \rightarrow \mathfrak{R}$ , encontrar a tripla  $(\tau_{ij}^h, p^h, u_i^h) \in \Sigma_{ij}^h \times P^h \times V_{i_g}^h$  de tal modo que:

$$B(\tau_{ij}^h, p^h, u_i^h, S_{ij}^h, q^h, v_i^h) = F(S_{ij}^h, q^h, v_i^h), \forall (S_{ij}^h, q^h, v_i^h) \in \Sigma_{ij}^h P^h \times V_i^h \quad (6.4)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\tau_{ij}^h, p^h, u_i^h, S_{ij}^h, q^h, v_i^h) = & \int_{\Omega} \check{\tau}_{ij}^h S_{ij}^h d\Omega + \int_{\Omega} \theta(\lambda) \tau_{ij}^h S_{ij}^h d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta(\lambda) D_{ij}(u^h) S_{ij}^h d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \rho u_k^h \partial_{x_k} v_i^h d\Omega - \int_{\Omega} p^h \partial_{x_k} v_k^h d\Omega + \int_{\Omega} \tau_{ij}^h D_{ij}^h(v^h) d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta_{\infty} D_{ij}(u^h) S_{ij}^h d\Omega + \int_{\Omega} \partial_{x_k} u_k^h q^h d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \partial_{x_{\alpha}} u_{\alpha}^h \delta(\text{Re}_K) \partial_{x_{\beta}} v_{\beta}^h d\Omega + \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} (\rho u_k^h \partial_{x_k} u_i^h + \partial_{x_i} p^h - \partial_{x_k} \tau_{ik} - 2\eta_{\infty} \partial_{x_k} D_{ik}(u^h)) \cdot \\ & \cdot \alpha(\text{Re}_K) (\rho u_k^h \partial_{x_k} v_i^h + \partial_{x_i} q^h - \partial_{x_k} S_{ik}^h - 2\eta_{\infty} \partial_{x_k} D_{ik}(v^h)) d\Omega + \int_{\Omega} (\tau_{ij}^h + \theta(\lambda) \check{\tau}_{ij} - 2\eta_S(\lambda) D_{ij}(u^h)) \cdot \\ & \cdot \beta(W_{i_k}) (S_{ij}^h + \theta(\lambda) \check{S}_{ij}^h - 2\eta_S(\lambda) D_{ij}(v^h)) d\Omega \end{aligned} \quad (6.5)$$

e

$$\begin{aligned} F(\varphi^h, S_{ij}^h, q^h, v_i^h) = & \int_{\Omega} \rho g_i v_i^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} t_i v_i^h d\Gamma + \\ & + \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} \rho g_i (\alpha(\text{Re}_K) (\rho u_k^h \partial_{x_k} v_i^h + \partial_{x_i} q^h - \partial_{x_j} S_{ij}^h - 2\eta_S(\lambda) D_{ij}(v^h))) d\Omega \end{aligned} \quad (6.6)$$

com os parâmetros de estabilidade das equações da continuidade e de movimento definidos como em [Behr et al., 1993] e o parâmetro de estabilidade da equação viscoelástica,

$$\delta(\text{Re}_K) = \varphi |u^h(\mathbf{x})|_p h_K \xi(\text{Re}) \quad (6.7)$$

$$\alpha(\text{Re}_K) = \frac{h_K}{2|u^h(\mathbf{x})|_p} \xi(\text{Re}) \quad (6.8)$$

$$\xi(\text{Re}_K) = \begin{cases} \text{Re}_K & , 0 \leq \text{Re}_K < 1 \\ 1 & , \text{Re}_K \geq 1 \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\text{Re}_K = \frac{m_k \rho |u^h(\mathbf{x})|_p h_K}{4\eta(\dot{\gamma})} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})_p = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^N u^h(\mathbf{x})_{i,p} \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1,N} u^h(\mathbf{x})_{i,p}, & p = \infty \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\beta(W_{i_k}) = \begin{cases} \max\left(1, \frac{\theta(\lambda) \mathbf{u}^h(\mathbf{x})_{i,p}}{W_{i_k}}\right), & W_{i_k} h_K \leq 1 \\ \max\left(1, \frac{1}{2W_{i_k}}\right), & W_{i_k} h_K > 1 \end{cases} \quad (6.12)$$

$$W_{i_k} = \theta(\dot{\gamma}) \frac{\mathbf{u}^h(\mathbf{x})_p}{h_K} \quad (6.13)$$

$$m_k = \min(1/3, 2C_k) \quad (6.14)$$

$$C_k \sum_{K \in \Omega^h} h_K^2 \int_{\Omega} \partial_{x_k} \tau_{ij}^h \partial_{x_i} \tau_{il}^h d\Omega_K \leq \int_{\Omega_k} \tau_{ij}^h \tau_{ij}^h d\Omega_K \quad (6.15)$$

a constante  $\varphi$  denota um número positivo arbitrário e  $C^h$  é a constante de estimativa inversa de elementos finitos.

## 6.5 Programas Utilizados

Para o pré-condicionamento de elementos finitos foi utilizado o programa GID, para a solução numérica da formulação GLS definida pelas Eqs. (6.1)-(6.15) foi utilizado o código NNFEM em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) da UFRGS e para o pós-processamento gráfico foi usado o programa *Gmsh*.

## 6.6 Geometria e condições de contorno

A geometria considerada está ilustrada na figura (6.1). Ela consiste de uma cavidade unitária de comprimento  $L$ , com a parede superior deslocando-se com velocidade constante ( $u_1 = u_c; u_2 = 0$ ) e suas demais paredes e os dois pontos de singularidade nas duas quinas superiores da cavidade sujeitas a condições de não-deslizamento e impermeabilidade ( $u_1 = u_2 = 0$ ). Todos resultados foram obtidos utilizando interpolações bi-linear Lagrangeanas (Q1) para todas as variáveis primais.

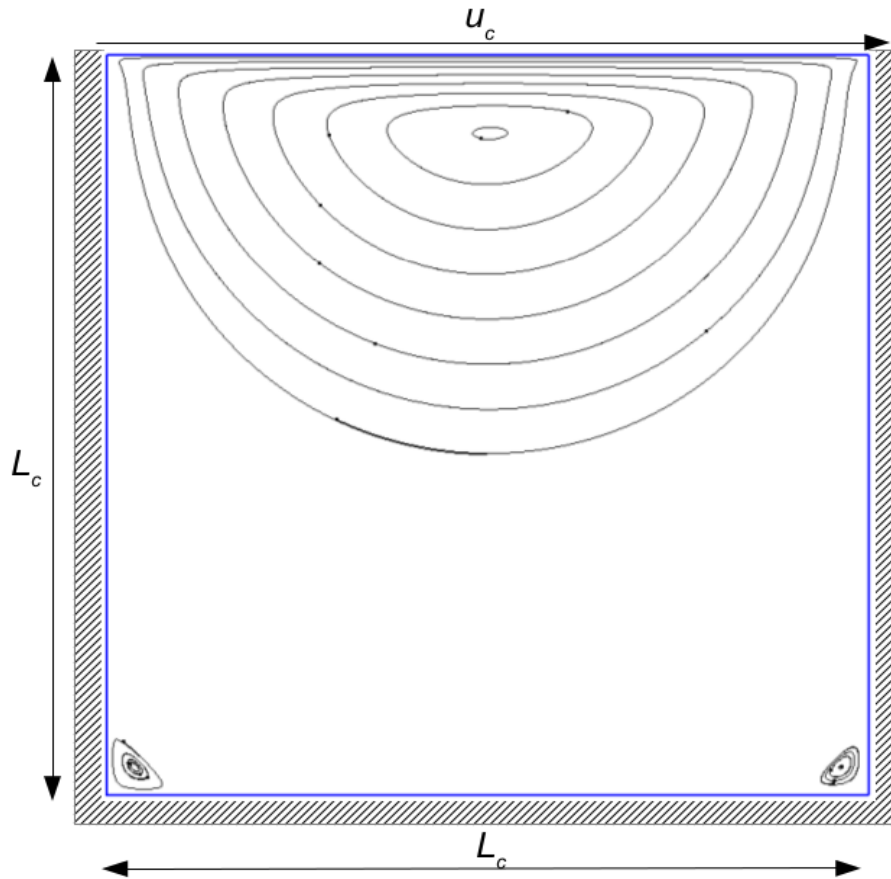


Figura 6.1 – Geometria e condições de contorno

Nesta figura, podemos ver três regiões de recirculação, uma região central associada ao escoamento principal e duas regiões secundárias nas quinas inferiores da cavidade. Estas regiões são causadas pelo efeito da velocidade na tampa da cavidade e sempre estarão presentes nessa geometria sob as condições de contorno abordadas acima.

## 7. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste Capítulo são apresentadas e discutidas aproximações GLS (Eq.(6.1)–(6.15)) de escoamentos de materiais elasto-viscoplásticos Eqs.(5.1)–(5.11)) no interior de uma cavidade forçada.

Os resultados objetivam estudar o padrão de escoamento de materiais viscoplásticos sujeitos à elasticidade, através da determinação da morfologia e posição de suas regiões aparentemente não-escoadas, as deformações elásticas no seu interior, a posição do olho do vórtice do escoamento principal. Todos os resultados foram obtidos supondo ser o escoamento permanente e não inercial, e negligenciando o comportamento tixotrópico do material – ou seja, sua microestrutura muda instantaneamente quando o nível de tensão, o qual o material é submetido, é alterado,  $t_{eq}^* \approx 0$ .

### 7.1 Parâmetros adimensionais

A adimensionalização das equações governantes do escoamento é a introduzida em [Souza Mendes et al., 2007], e tem como característica principal a utilização de grandezas reológicas do material na adimensionalização das variáveis cinemáticas, dinâmicas e reológicas do problema. Para tal são introduzidas as seguintes quantidades adimensionais:

$$\mathbf{x}_i^* = \frac{x_i}{L} ; \mathbf{u}^* = \frac{u_i}{\dot{\gamma}_1 L} ; \dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1} ; p^* = \frac{p}{\tau_y} ; \tau_{ij}^* = \frac{\tau_{ij}}{\tau_y} ; \eta_{eq}^* = \frac{\eta_{eq} \dot{\gamma}_1}{\tau_y} \quad (7.1)$$

*Conservação de massa:*  $\text{div} \mathbf{u} = 0$  e como  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \dot{\gamma}_1 L$  e  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* L$  - Eq.(7.1) – logo:

$$\frac{\dot{\gamma}_1 L}{L} \text{div}^* \mathbf{u}^* = 0 \rightarrow \text{div}^* \mathbf{u}^* = 0 \text{ e em notação indicial:}$$

$$\partial_{x_i^*} u_i^* = 0 \quad \text{em } \Omega^* \quad (7.2)$$

*Princípio da conservação da quantidade de movimento:* pela equação de movimento:

$$\mathbf{0} = -\nabla p + \text{div} \boldsymbol{\tau} + 2 \eta_{\infty} \text{div}(\mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \text{ e como } \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \dot{\gamma}_1 L, \mathbf{x} = \mathbf{x}^* L, p = p^* \tau_y \text{ - Eq.(7.1) -}$$

e  $\eta_\infty = \frac{\eta_\infty^* \tau_y}{\dot{\gamma}_1}$ , logo:

$$\mathbf{0} = -\frac{\tau_y}{L} \nabla^* p^* + \frac{\tau_y}{L} \text{div}^* \boldsymbol{\tau} + 2 \frac{\tau_y}{L} \eta_\infty^* \text{div}^*(\mathbf{u}^*) + \rho \mathbf{g}^* \rightarrow \mathbf{0} = -\nabla^* p^* + \text{div}^* \boldsymbol{\tau} + 2 \eta_\infty^* \text{div}^*(\mathbf{u}^*) + \mathbf{g}^*$$

e em notação indicial:

$$0 = -\partial_{x_i} p^* + \partial_{x_j} \tau_{ij}^* + 2 \eta_\infty^* \partial_{x_j} D(u^*)_{ij} + g_i \quad \text{em } \Omega^* \quad (7.3)$$

*Equação constitutiva:* para o modelo adotado,  $\boldsymbol{\tau} + \theta(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} - 2 \eta(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}) = 0$  e como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \dot{\gamma}_1 L, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^* L, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^* \tau_y \quad \text{Eq.(7.1)} \quad \text{e} \quad \eta(\dot{\gamma}) = \frac{\eta^*(\dot{\gamma}) \tau_y}{\dot{\gamma}_1}, \quad \text{logo:}$$

$$\boldsymbol{\tau}^* \tau_y + \theta^*(\dot{\gamma}) \frac{\dot{\gamma}_1 L \tau_y}{L} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^* - 2 \left( \frac{\tau_y \dot{\gamma}_1 L}{\dot{\gamma}_1 L} \right) 2 \eta^*(\dot{\gamma}) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) = 0 \rightarrow \boldsymbol{\tau}^* + \theta^*(\dot{\gamma}) \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}^* = 2 \eta^*(\dot{\gamma}) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) \quad \text{e}$$

em notação indicial:

$$\tau_{ij}^* + \theta^* \overset{\nabla}{\tau}_{ij}^* = 2 \eta_{eq}^*(\dot{\gamma}^*) D^*(u^*)_{ij} \quad \text{em } \Omega^* \quad (7.4)$$

onde  $D^*(u^*)_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_{x_j} u_i^* + \partial_{x_i} u_j^*)$  e  $\overset{\nabla}{\tau}_{ij}^* \equiv u_k^* \partial_{x_k} \tau_{ij}^* - \tau_{ik}^* \partial_{x_j} u_k^* - \partial_{x_i} u_k^* \tau_{kj}^*$ , e a viscosidade

viscoplástica é dada por:

$$\eta_{eq}^*(\dot{\gamma}^*) = [1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma}^*)] \left( \frac{1}{\dot{\gamma}^*} + \dot{\gamma}^{*(n-1)} \right) + \eta_\infty^* \quad (7.5)$$

A partir da adimensionalização do problema são identificados os seguintes parâmetros governantes do escoamento:

$$\eta_0^* \equiv \frac{\eta_0}{\tau_y / \dot{\gamma}_1}; \quad \eta_\infty^* \equiv \frac{\eta_\infty}{\tau_y / \dot{\gamma}_1}; \quad U^* = \frac{u_c}{\dot{\gamma}_1 L}; \quad g_i^* \equiv \frac{\rho L}{\tau_y} g_i; \quad \theta^*(\dot{\gamma}) = \theta \dot{\gamma}_1 \quad (7.6)$$

Na obtenção dos resultados foram fixados os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\tau_y^* = \tau_{y_d}^* = 1, \quad \eta_\infty^* = 10^{-2}, \quad \eta_0^* = 10^3, \quad \rho^* = 0 \quad e \quad m = 2 \quad .$$

A intensidade de escoamento  $U^*$  é derivada da condição de contorno imposta na parede superior da cavidade. Um fato importante é que este parâmetro adimensional é inversamente proporcional ao número de *Herschel-Bulkley* – o qual relaciona a tensão limite de escoamento do material com a tensão *power-law* característica do escoamento.

$$HB = \frac{\tau_0}{K \dot{\gamma}^n} = \frac{\tau_0}{K \left( \frac{u_c}{L} \right)^n} \quad (7.7)$$

substituindo  $u_c/L$  por  $\dot{\gamma}_1^* U^*$  (Eq.(7.6)) na Eq.(7.9) e considerando  $\dot{\gamma}_1 = (\tau_{y_d}/K)^{1/n}$  ,

$$HB = \frac{\tau_0}{K (\dot{\gamma}_1 U^*)^n} = \frac{1}{U^{*n}} \rightarrow U^* = HB^{-1/n} \quad (7.8)$$

Para quantificar os efeitos elásticos no escoamento estudado é empregado o tempo de relaxação adimensional (Eq.7.11) supondo o material completamente estruturado ( $\lambda=1$ ) , ou seja, levando o limite  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  na Eq.(7.6) e pela definição da Eq.(5.11),

$$\theta_0^* = \theta^*(\dot{\gamma}^* \rightarrow 0) = \frac{\eta_0}{G_0} \dot{\gamma}_1 \quad (7.9)$$

A partir destas definições, as equações que regem o problema adquirem a seguinte forma adimensional:

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} u_i^* &= 0 && \text{em } \Omega^* \\ 0 &= -\partial_{x_i} p^* + \partial_{x_j} \tau_{ij}^* + 2 \eta_\infty^* \partial_{x_j} D(u)_{ij}^* + g_i^* && \text{em } \Omega^* \\ \tau_{ij}^* + \theta^* \dot{\gamma}_{ij}^* &= 2 \eta_{eq}^*(\dot{\gamma}^*) D(u)_{ij}^* && \text{em } \Omega^* \end{aligned} \quad (7.10)$$

## 7.2 Teste de qualidade de malha

Para assegurar que a aproximação numérica é independente da malha utilizada, a Fig. (7.1), avaliou-se o perfil transversal – em  $x_1^*=0,5$  – da magnitude da tensão extra ( $\tau=(1/2 \tau_{ij} \tau_{ij})^{1/2}$ ) para 4 malhas de elementos bilineares: a malha M1 com 900 elementos Q1, a malha M2 com 2.500 elementos Q1, a malha M3 com 4900 Q1 elementos e a malha M4 com 10.000 elementos Q1.

Segundo o teste realizado, no qual foram empregados os parâmetros governantes  $U^*=0,05$ ,  $\theta_0^*=100$ ,  $n=0,5$ ,  $\rho^*=0$ , foi selecionada a malha M3 por esta apresentar um erro inferior a 3% da malha mais refinada. Sendo o erro calculado por:

$$erro = \frac{\tau_a^* - \tau_b^*}{\tau_a^*} \quad (7.11)$$

sendo,  $\tau_a^*$  o maior valor do módulo da tensão e  $\tau_b^*$  o menor valor do módulo da tensão (para a mesma malha em análise).

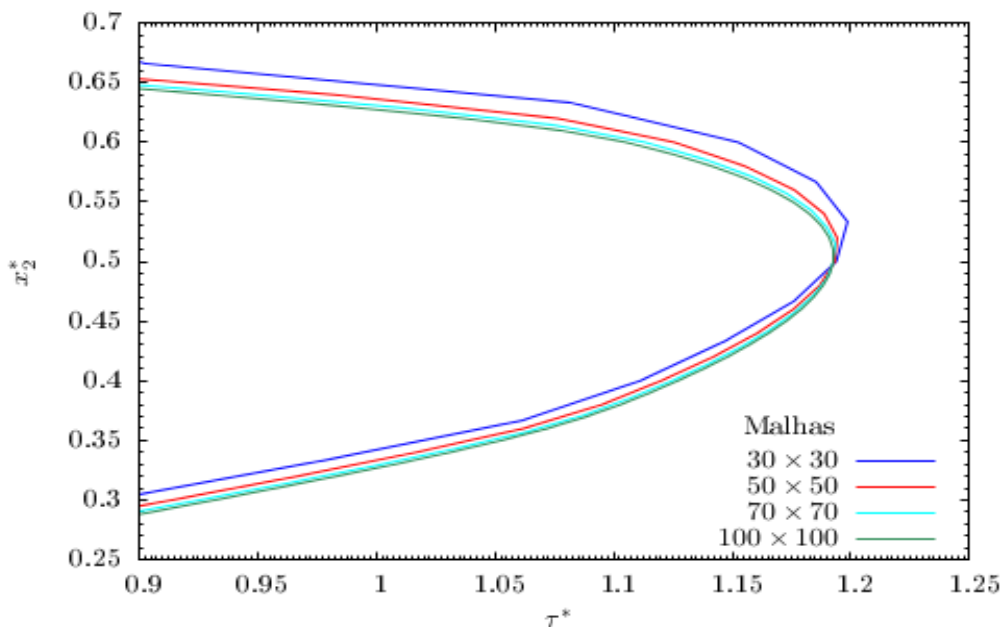


Figura 7.1 – Teste de qualidade de malha



### 7.3 Comparação Numérica

Para a comparação do código numérico usado nessa dissertação o artigo do [Mitsoulis et al., 2001] serviu como base para a comparação. Esse artigo trata da simulação numérica de um escoamento de Bingham (viscoplástico) em uma cavidade quadrada com velocidade dirigida na tampa. Para isso, os autores desse trabalho fizeram o seguinte: a equação constitutiva de Bingham foi modificada conforme Papanastasiou,

$\tau = \tau_y [1 - \exp(-m\dot{\gamma})] + \mu\dot{\gamma}$  e  $\eta = \mu + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(m\dot{\gamma})]$  (Eqs. (4.10 e 4.11)) – modelo regularizado de Papanastasiou com  $n=1$ ; nas simulações, o número de Bingham adimensional  $Bn$ , foi definido como,

$$Bn = \frac{\tau_y L}{\mu U} \quad (7.12)$$

onde  $L$  é o comprimento característico da cavidade e  $U$  é a velocidade característica na tampa da cavidade. O  $m$  foi sempre fixo nas simulações com o valor de  $m=1000s$  e  $U=1$ .

Os valores do número de Bingham simulados foram:  $Bn=2, 5, 20, 50$  e  $200$  para uma malha de 1600 elementos.

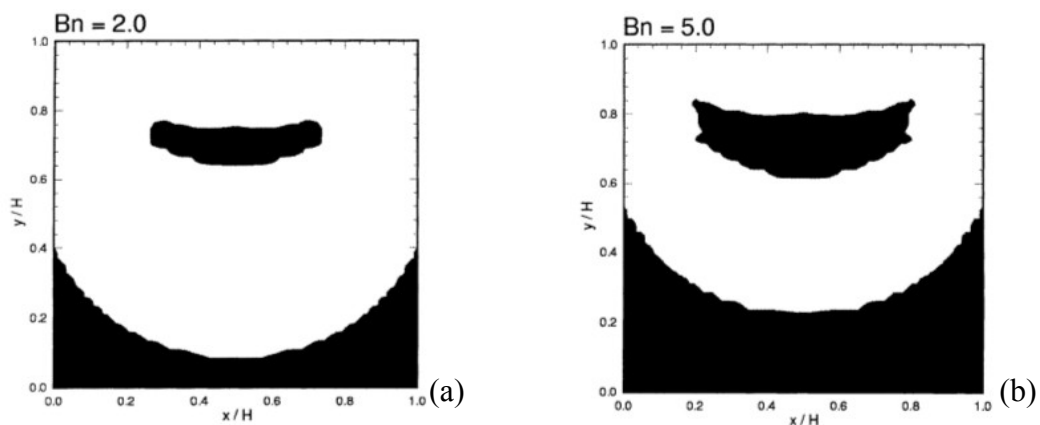


Figura 7.2 - Superfícies de escoamento: (a)  $Bn=2$ , (b)  $Bn=5$ , (c)  $Bn=20$ , (d)  $Bn=50$ , (e)  $Bn=200$ , conforme [Mitsoulis et al., 2001]

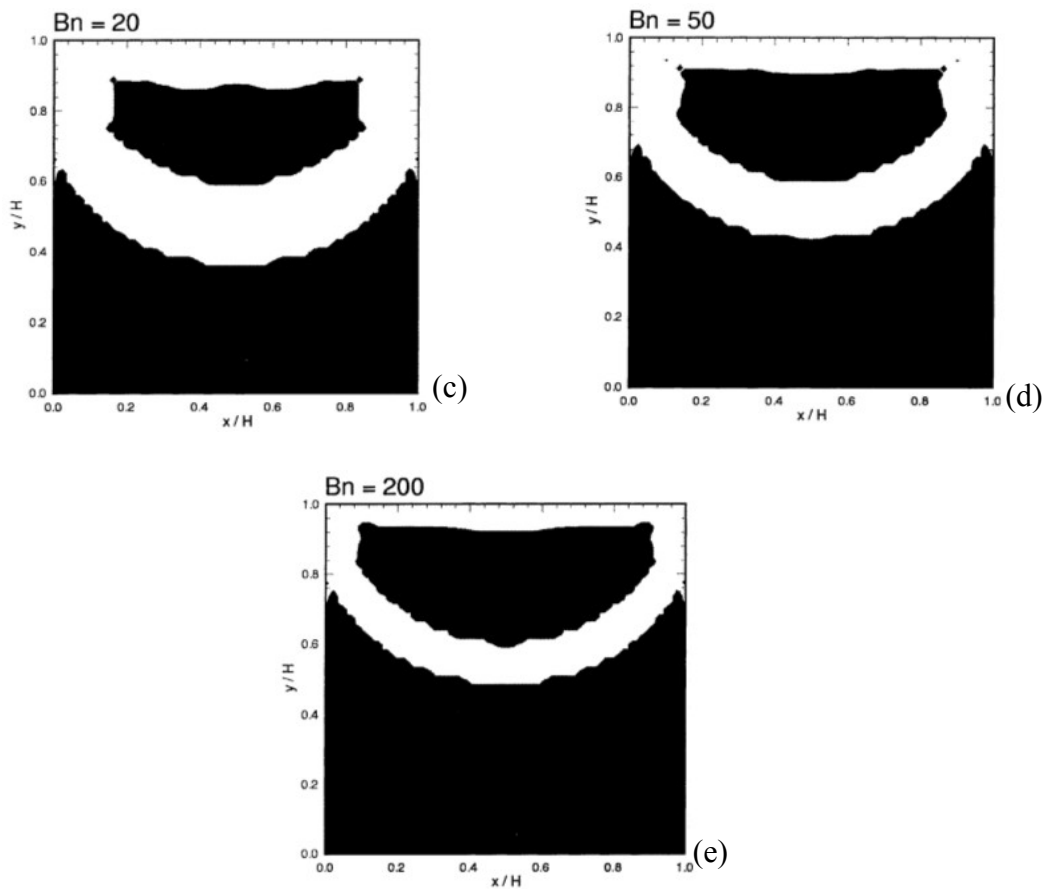


Figura 7.2 - Superfícies de escoamento: (a)  $Bn=2$ , (b)  $Bn=5$ , (c)  $Bn=20$ , (d)  $Bn=50$ , (e)  $Bn=200$ , conforme [Mitsoulis et al., 2001]

Devido à utilização da modificação de Papanastasiou na equação constitutiva de Bingham, o escoamento é puramente viscoso. À medida que o número de  $Bn$  aumenta a região aparentemente não-escoada também aumenta e ocupa mais espaços na cavidade, mas sempre teremos uma pequena região de escoamento perto da tampa da cavidade.

Sendo assim, em comparação com o código numérico usado nessa dissertação foi feito o seguinte procedimento:

- o índice de consistência (K):  $\mu \rightarrow K$ ,  $K=1$  fixo,

$$m = \frac{\eta_0}{\tau_y} \quad (7.13)$$

- $n=1$  e  $m=1000$ , sempre fixo,
- $G_0=10^6$ , sempre fixo – muito elevado para praticamente anular a elasticidade,  $\theta_0^*$  praticamente nulo – escoamento viscoplástico (puramente viscoso).

Logo, de acordo com a Eq.(7.14) e Eq.(7.15),

- $Bn=2$ :  $\tau_y=2$  e  $\eta_0=2000$  ,
- $Bn=5$ :  $\tau_y=5$  e  $\eta_0=5000$  ,
- $Bn=20$ :  $\tau_y=20$  e  $\eta_0=20000$  ,
- $Bn=50$ :  $\tau_y=50$  e  $\eta_0=50000$  ,
- $Bn=200$ :  $\tau_y=200$  e  $\eta_0=200000$  .

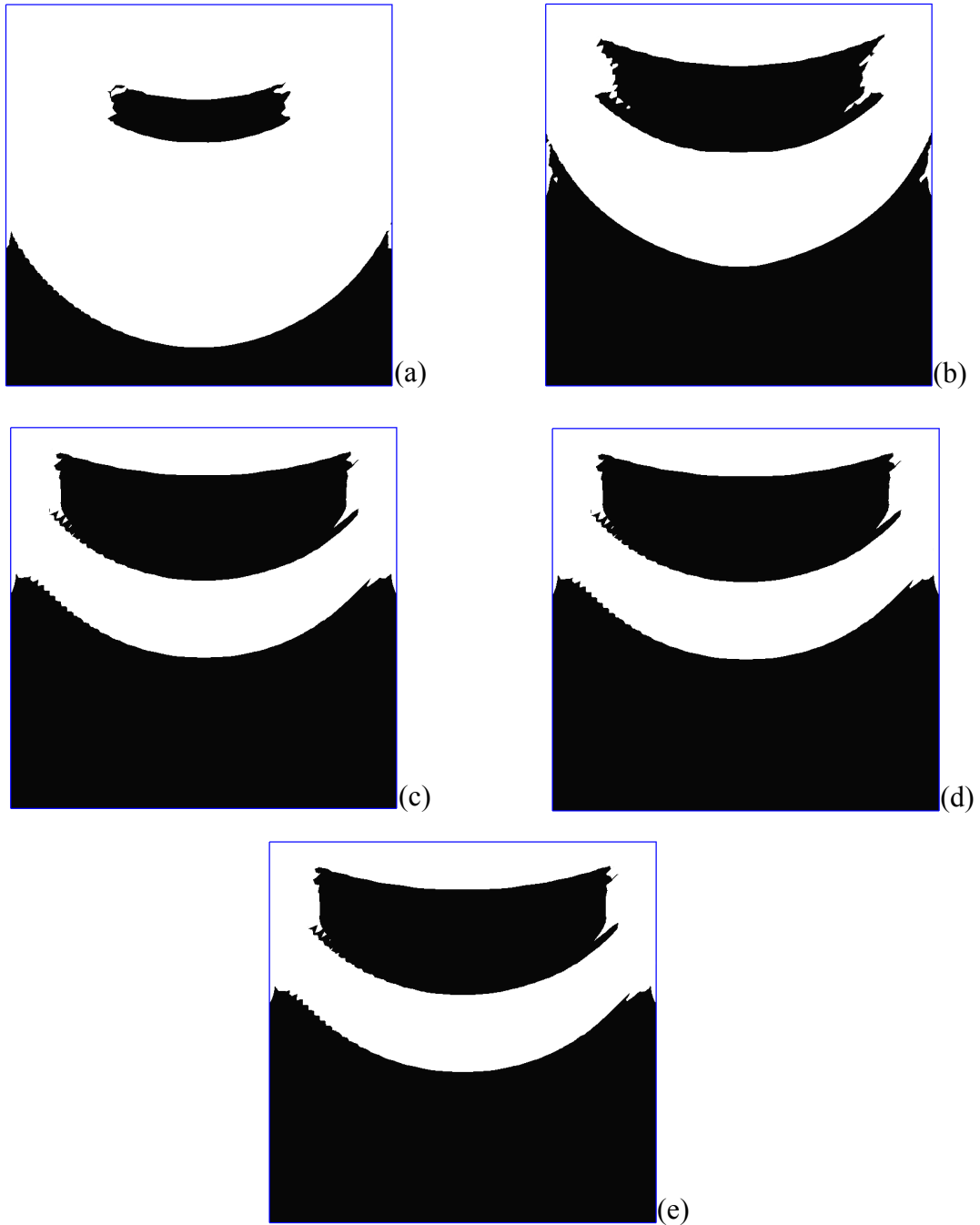


Figura 7.3 – Superfícies de escoamento: (a)  $Bn=2$ , (b)  $Bn=5$ , (c)  $Bn=20$ , (d)  $Bn=50$ ,  
(e)  $Bn=200$

Em comparação com a Fig.(7.2), nota-se na Fig.(7.3) mostra o mesmo comportamento, ou seja, que com o aumento de  $Bn$  a região aparentemente não-escoada também aumenta e vai ocupando mais espaços na cavidade. Tem-se uma região de escoamento perto da tampa da cavidade que vai diminuindo com o aumento de  $Bn$ . Em relação a Fig.(7.3) percebe-se uma leve diferença entre a Fig(7.3(c)-(e)), pois, a região aparentemente não-escoada aumenta muito pouco na parte inferior da cavidade e se mantém a mesma na parte superior, porém o caso que mais se assemelha entre essas duas figuras é com o  $Bn=50$ , Fig(7.2(d)) e Fig.(7.3(d)). Uma diferença considerável nesses resultados, é que a Fig(7.3) foi gerada com uma malha de 4900 elementos, ou seja, 3300 elementos de diferença sobre a Fig.(7.2), por isso tem-se menos assimetria na Fig(7.3). Portanto, visualizando essas figuras, pode-se dizer que os resultados são semelhantes.

## 7.4 Análise das superfícies de escoamento

Ao contrário da definição clássica de superfícies de escoamento [ver por exemplo, Mitsoulis et al., 2002], nesta Dissertação estas superfícies são definidas como o lugar geométrico dos pontos no qual a taxa de deformação é igual a  $\dot{\gamma}_0$  - para mais detalhes ver [Souza Mendes et al., 2007]. Como estas superfícies delimitam as regiões escoadas e aparentemente não-escoadas do material, para  $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0$  este escoamento é linearmente viscoso sujeito a elevados valores de viscosidade; já para  $\dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$ , o material escoamento como um fluido puramente viscoso não linear.

Os resultados ora apresentados visam avaliar a influência dos efeitos elásticos e viscosos na topologia destas superfícies. As zonas pretas visualizadas nas figuras representam as regiões aparentemente não-escoadas ( $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0$ ), enquanto que as zonas brancas representam as regiões escoadas ( $\dot{\gamma} \geq \dot{\gamma}_0$ ).

### 7.4.1 Influência da cinemática

A Fig.(7.2) mostra a influência da cinemática, ou também chamada de intensidade do escoamento sobre as superfícies de escoamento dentro da cavidade. Os parâmetros fixos do material utilizado foram;  $\theta_0^* = 100$ ,  $n = 0,5$ .

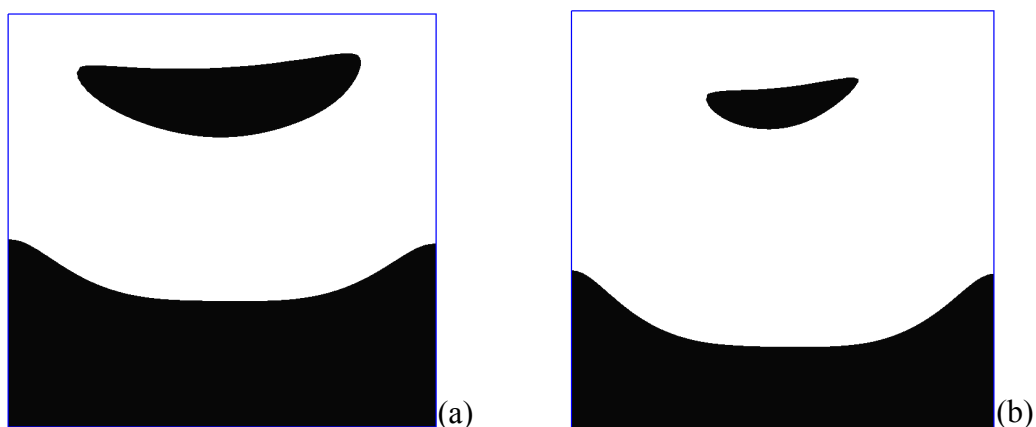


Figura 7.4 – Superfícies de escoamento: (a)  $U^* = 0,01$ , (b)  $U^* = 0,05$ , (c)  $U^* = 0,1$ , (d)  $U^* = 0,2$ , (e)  $U^* = 0,25$

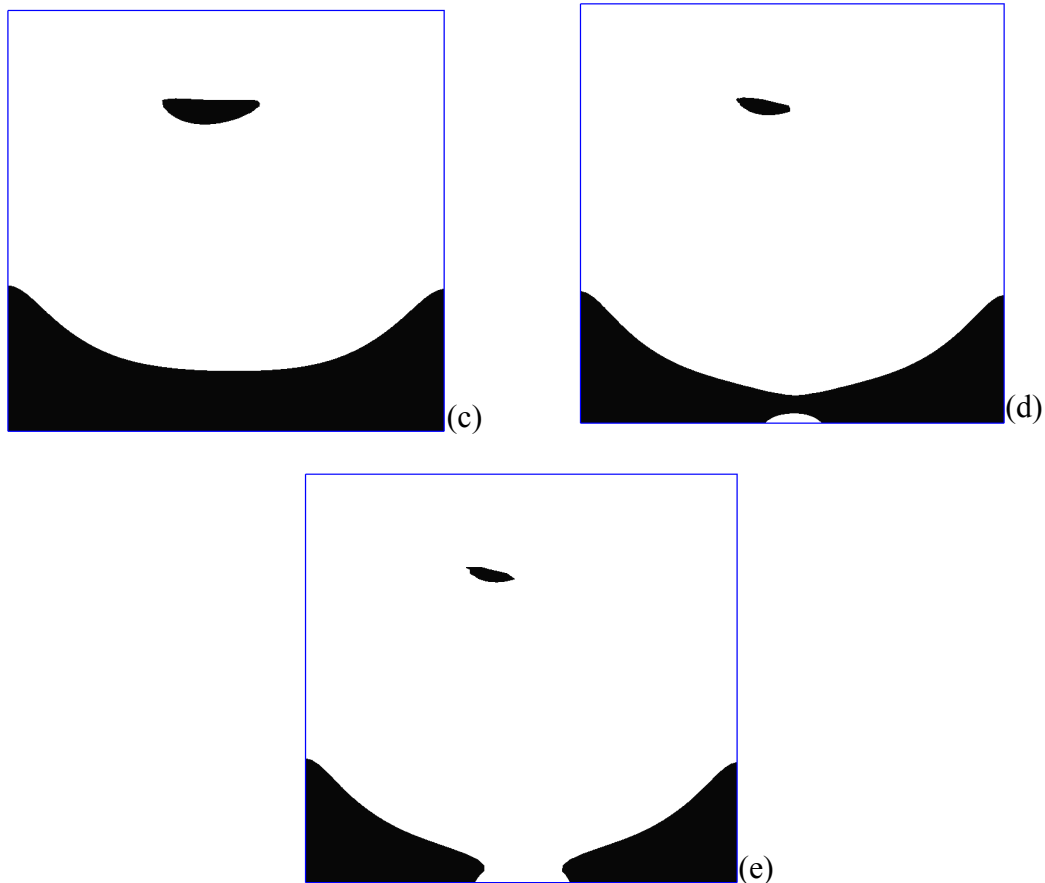


Figura 7.4 – Superfícies de escoamento: (a)  $U^*=0,01$  , (b)  $U^*=0,05$  , (c)  $U^*=0,1$  ,  
(d)  $U^*=0,2$  , (e)  $U^*=0,25$

Como esperado, com o aumento da intensidade do escoamento, as regiões aparentemente não-escoadas diminuem em toda a cavidade. Em relação a sua parcela superior, observa-se que a região aparentemente não-escoada, localizada junto ao vórtice do escoamento, sofre uma forte redução com o aumento de  $U^*$  . Isto se deve a esta região estar localizada muito próxima da parede superior da cavidade. Portanto, com o aumento da cinemática nesta parede superior, são ali gerados crescentes níveis de tensão, os quais possibilitam que mais regiões excedam o limite de escoamento. Este efeito também é observado na parcela inferior da cavidade. Mesmo menos sensível ao aumento da cinemática no topo da cavidade, as regiões aparentemente não-escoadas ali localizadas também são reduzidas com o crescimento de  $U^*$  , porém com intensidade menor. Observa-se, inclusive, para os valores mais elevados de  $U^*$  , que estas regiões passam a ser disjuntas. Finalmente, no que tange à assimetria de

ambas as regiões aparentemente não-escoadas, esta característica será discutida adiante, quando o efeito da elasticidade sobre o escoamento for abordado.

Na Fig.(7.5) são apresentados perfis verticais da magnitude da tensão extra ao longo do eixo central da cavidade ( $x_1^*=0,5$ ), para diferentes valores de  $U^*$  – a saber,  $U^*=10^{-2}-0,25$ . Uma primeira observação concerne à geometria analisada nesta Dissertação. Apesar do problema da cavidade – seja ela forçada ou vazante – ser talvez o mais usual *benchmark* usado nas simulações numéricas da Mecânica dos Fluidos puramente viscosos – lineares ou não lineares – quando se trata de um material complexo escoando em seu interior, esta geometria gera, ao meu ver, um escoamento de alta complexidade. Considere, por exemplo, o escoamento de fluidos complexos através de dutos retos ou sujeitos a alterações (abruptas ou não) de bitola. Nestes escoamentos, também largamente empregados na literatura Newtoniana e não-Newtoniana, é possível identificar claramente as regiões nas quais o escoamento é simples ou complexo. Sabemos que, tanto nos *entry flows* como nos *exit flows* desses problemas, o material escoam de maneira complexa visto ser necessário restabelecer seu equilíbrio dinâmico – salvo, naturalmente, quando as condições de entrada e/ou saída assim não o façam necessário. Entretanto, após alcançado seu equilíbrio, as partículas do material escoam de maneira dita “simples” – ou estacionária, do ponto de vista Lagrangeano – tanto nas regiões que excederam o limite de escoamento do material – as regiões escoadas – como nas regiões nas quais este limite não foi ultrapassado – as regiões aparentemente não-escoadas. Pois bem, no caso analisado de escoamentos de materiais complexos no interior de cavidades, esta dualidade nunca vem ocorrer explicitamente. A natureza do escoamento é curvilínea e excêntrica – excentricidade esta devido à assimetria das condições de contorno impostas nas paredes superior e inferior da cavidade -- além de ser sujeita à mudanças bruscas de trajetória, provocadas pelas quinas inferiores e superiores da cavidade. Ao meu modo de ver, fica impossível determinar quantitativamente as regiões nas quais o fluido escoam de maneira simples ou complexa. Cabe, apenas, localizarmos regiões nas quais o fluido escoam com dominância simples ou complexa.

È com base nas reflexões acima introduzidas que os perfis transversais de tensão extra devem ser analisados. Na figura que segue, observamos, talvez como sua mais marcante característica, que a região escoada junto ao topo da cavidade é predominantemente cisalhante, com os perfis de  $\tau^*$  bem ajustados por uma regressão linear. Podemos destacar também que, na parte inferior, a cavidade tende experimentar um comportamento predominantemente

elástico, com as curvas da magnitude da tensão extra bem ajustas por funções não lineares. Finalmente, são ainda visíveis as regiões nas quais o material excede seu limite de escoamento  $\tau^* > \tau_y^* = 1$ , uma região localizada na parcela intermediária da cavidade e outra na região compreendida entre o vórtice do escoamento e a parede superior da cavidade. Cabe ainda observar os limites de ambas as regiões dependerem da intensidade de escoamento  $U^*$ , conforme discutido quando apresentadas as isobandas de  $\tau^*$ .

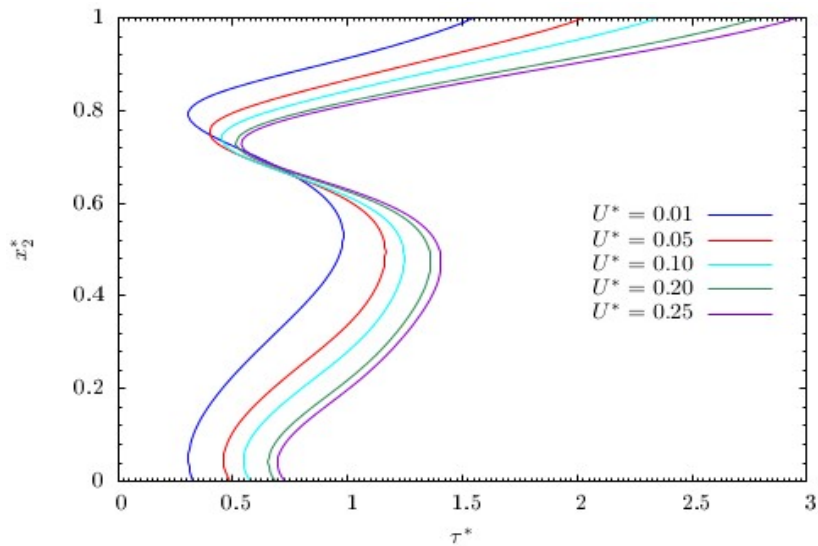


Figura 7.5 – Perfis da magnitude da tensão extra com  $U^*$  variando

#### 7.4.2 Influência da elasticidade

A Fig.(7.4) mostra a influência da elasticidade sobre as superfícies de escoamento dentro da cavidade, pela variação do módulo de elasticidade inicial. Os parâmetros fixos do material utilizado foram;  $U^* = 0,05$ ,  $n = 0,5$ .



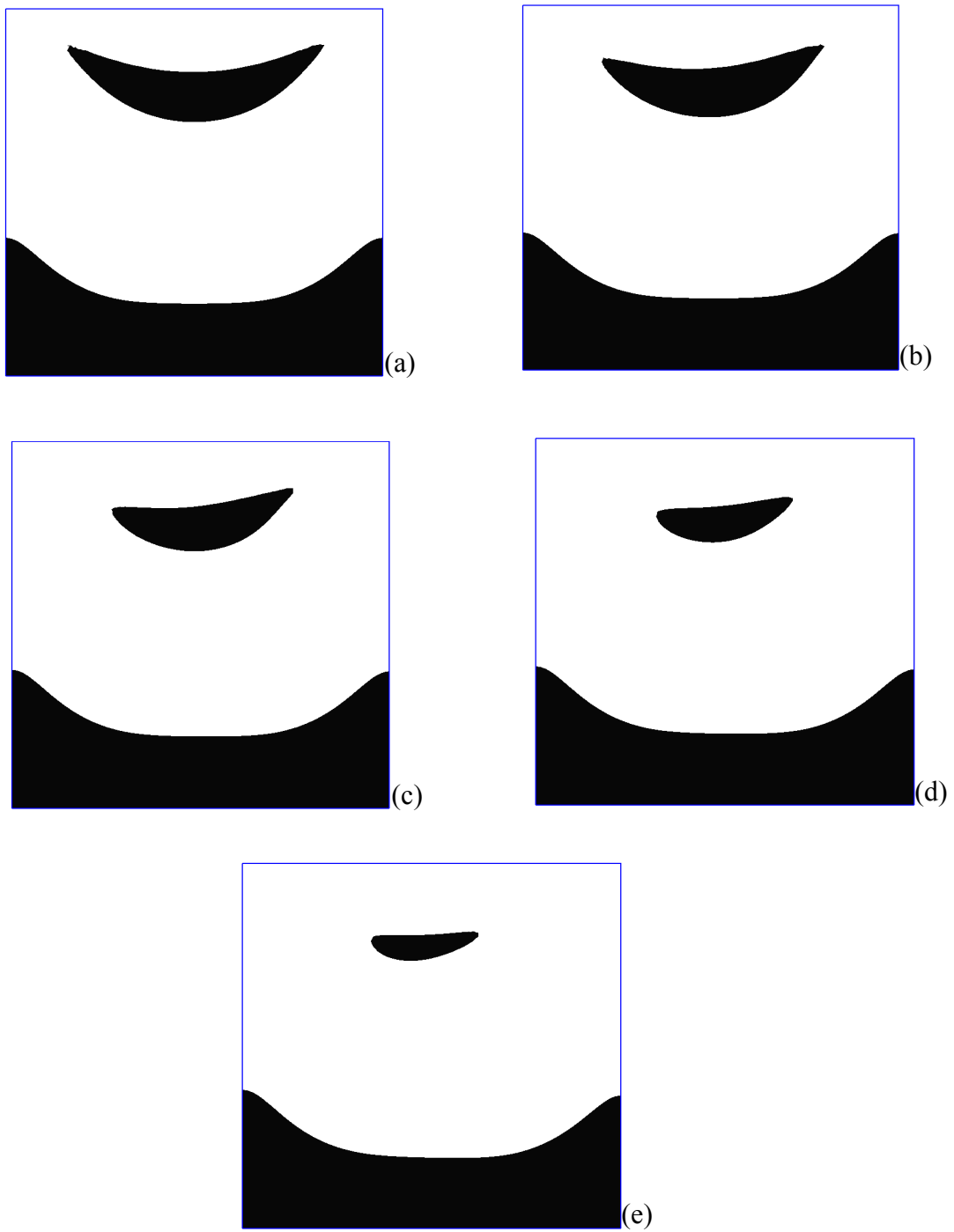


Figura 7.6 – Superfícies de escoamento: (a)  $\theta_0^*=1$  , (b)  $\theta_0^*=20$  , (c)  $\theta_0^*=50$  ,  
 (d)  $\theta_0^*=100$  , (e)  $\theta_0^*=200$

Conforme já observado na subseção anterior, as superfícies de escoamento dos materiais elasto-viscoplásticos têm um padrão assimétrico – contrariamente a simetria observada nas superfícies de escoamento de materiais viscoplásticos. A assimetria observada nos resultados

discutidos na Fig.7.4, deve-se ao fato destes escoamentos apresentarem um considerável nível de elasticidade ( $\theta_0^*=100$ ) .

Os resultados apresentados na Fig 7.6 mostram que, para maiores valores da elasticidade as superfícies aparentemente não-escoadas apresentam maior assimetria no interior da cavidade – comportamento este já confirmado experimentalmente em trabalhos recentes [Martins R.R, et al., 2013]. Neste conjunto de figuras tanto as superfícies localizadas no olho do vórtice como no fundo da cavidade, apresentam esta tendência assimétrica. Esta tendência pode ser explicada pela influência crescente do termo advectivo (não simétrico) da tensão extra presente na equação viscoelástica do modelo empregado.

Outro comportamento relevante identificado é que o aumento da elasticidade leva à redução da morfologias destas regiões. Novamente este comportamento é devido à presença cada vez maior da componente elástica (exponencial) do tensor extra de tensão.

#### 7.4.3 Influência do índice de power-law

A Fig.(7.7) mostra o efeito do índice de *power-law* no padrão do escoamento na cavidade. Para isso, os seguintes parâmetros foram fixados:  $U^*=0,05$ ,  $\theta_0^*=100$  .

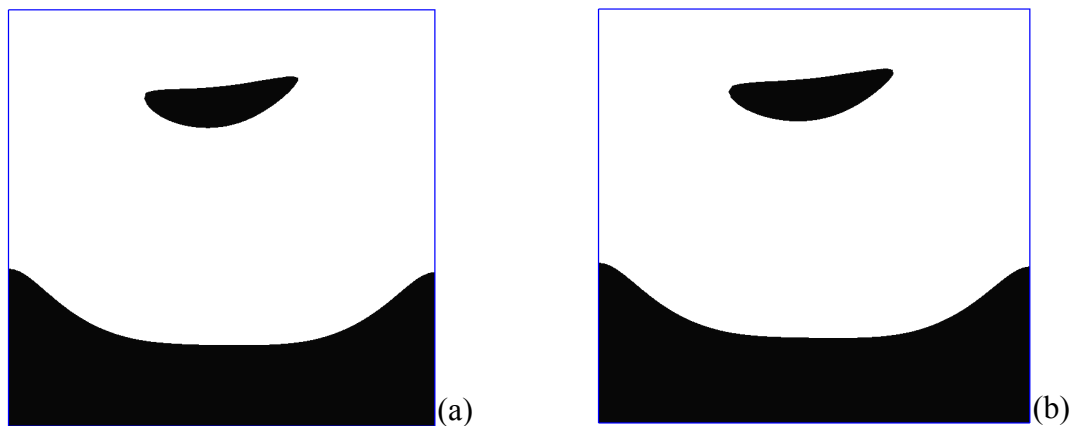


Figura 7.7 – Superfícies de escoamento: (a)  $n=0,5$  , (b)  $n=0,3$  , (c)  $n=0,1$

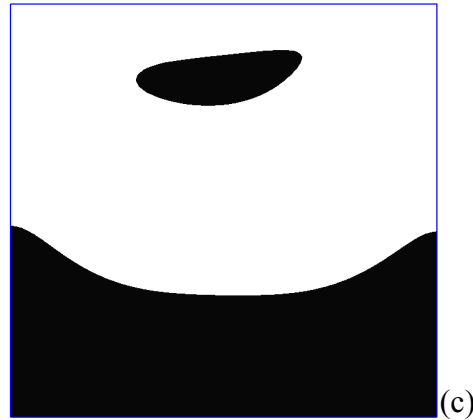


Figura 7.7 – Superfícies de escoamento: (a)  $n=0,5$  , (b)  $n=0,3$  , (c)  $n=0,1$

Uma primeira observação é a assimetria apresentada pelas regiões aparentemente não-escoadas no interior da cavidade, tendência esta devida ao nível de elasticidade apresentada pelo material ( $\theta_0^* = 100$ ) .

No que tange a influência do índice  $n$  propriamente dita, esta se manifesta de maneira muito suave, diminuindo ligeiramente as dimensões tanto da região aparentemente não-escoada no olho do vórtice, como na região estagnada no fundo da cavidade de acordo com o aumento da pseudoplasticidade (diminuição do  $n$ ). Este fator está diretamente ligado ao *shear-thinning* da equação viscoplástica empregada. Com o aumento crescente do *shear-thinning* da viscosidade, são necessárias tensões menores para deformar o material e, conseqüentemente, mais regiões deixam de ceder o seu limite de escoamento ( $\tau_y^*$ ) .

### 7.5 Análise da deformação elástica sobre o escoamento

Conforme predito pelo modelo elasto-viscoplástico empregado nesta Dissertação (Eq. (5.1) – (5.11)), somente as regiões aparentemente não-escoadas apresentam elasticidade; afóra elas o material escoá como um fluido puramente viscoso – linearmente ou não dependendo da intensidade da taxa de deformação. A distribuição da magnitude da deformação elástica no interior das regiões aparentemente não-escoadas é dada pela razão entre a magnitude do tensor de tensão extra  $\tau$  e o módulo de elasticidade ao cisalhamento  $G$ ,

$$\gamma_e = \frac{\tau}{G} = \frac{(2 \tau_{ij} \tau_{ij})^{1/2}}{G(\lambda_{eq})} \quad (7.14)$$

Cabe observar que para fluidos com tempo de relaxação constante, a definição clássica do número de Weissenberg ( $Wi$ ) substitui o termo  $\theta^*(\dot{\gamma}^*)$ . E a fórmula do número de Weissenberg é dada por:

$$Wi = \theta_1 \frac{u_c}{L_c} \quad (7.15)$$

7.5.1 Influência da cinemática

A Fig.(7.8) mostra a influência da cinemática sobre a deformação elástica ao longo da cavidade no escoamento. Os parâmetros fixos do material utilizado foram;  $\theta_0^* = 100, n = 0,5, m = 2$ .

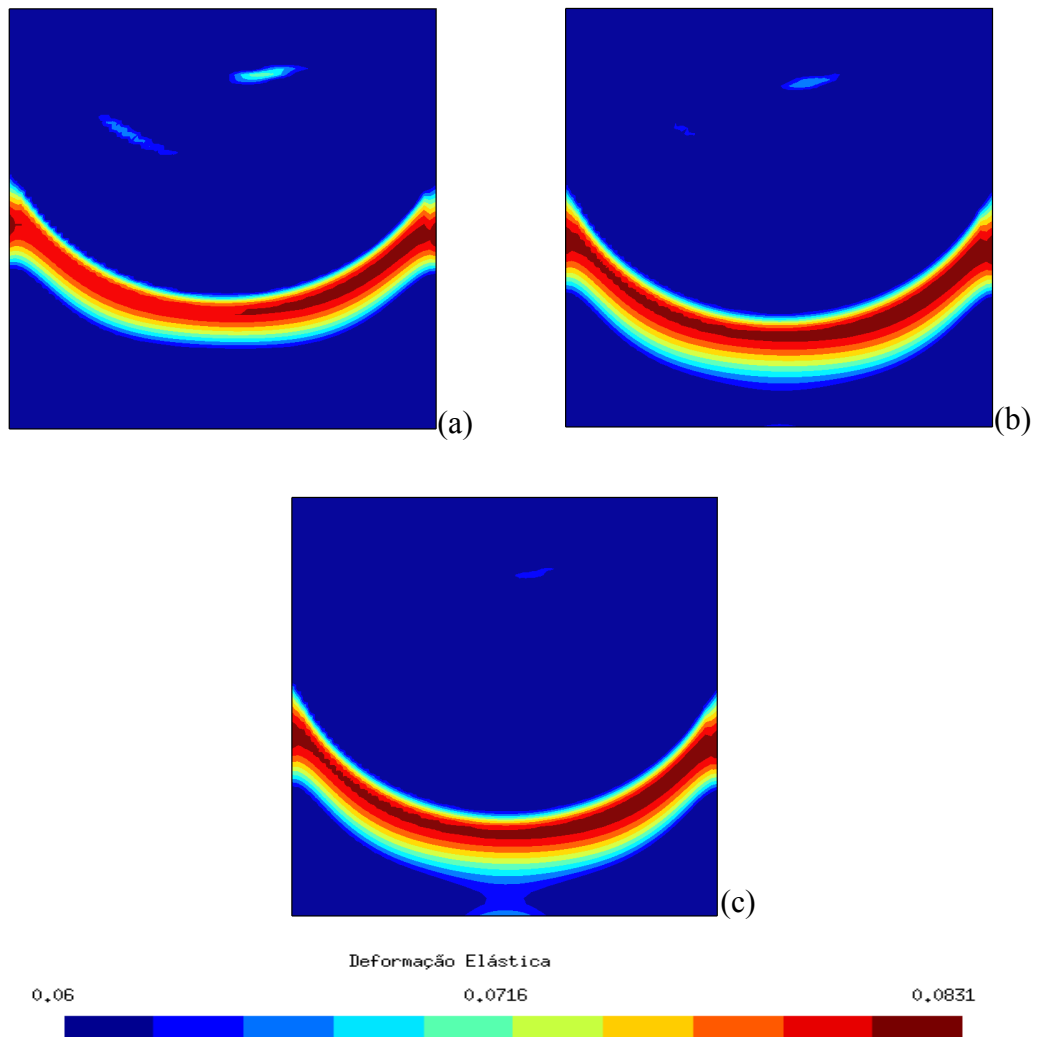


Figura 7.8 – Deformação elástica: (a)  $U^* = 0,1$ , (b)  $U^* = 0,2$ , (c)  $U^* = 0,25$

De sua definição dada pela Eq.(7.14), sabemos que a deformação elástica cresce monotonicamente até atingir seu valor máximo nas superfícies de escoamento, nas quais a tensão extra é igual a tensão de escoamento do material. Esta tendência é claramente observada na Fig.(7.8), principalmente nas regiões aparentemente não-escoadas no fundo da cavidade. Também, podem ser observadas nesta figura a diminuição da deformação elástica na região aparentemente não-escoada no vórtice (região central) do escoamento – o que vem ao encontro da diminuição da morfologia das regiões aparentemente não-escoadas no vórtice do escoamento, com o aumento de  $U^*$ .

### 7.6 Análise da posição do vórtice principal

A vorticidade é um conceito matemático usualmente utilizado na dinâmica dos fluidos para caracterizar os vórtices de um escoamento. Ela pode ser interpretada como a quantidade de circulação ou rotação de um fluido, por unidade de área, de uma dada posição no escoamento. Matematicamente, a vorticidade é definida como um campo vetorial dado pelo rotacional do campo de velocidade,  $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{V}$ .

A análise do padrão do escoamento dentro da cavidade identificou três regiões de recirculação, a saber, uma região de recirculação localizada na parte superior da cavidade e duas regiões de menor vorticidade localizadas em suas quinas inferiores. A primeira região de recirculação é provocada pela condição de contorno imposta na parede superior da cavidade, condição esta, que impõe ao escoamento, no interior da cavidade, uma recirculação no sentido horário – doravante designada de vórtice principal do escoamento. Já as recirculações ditas secundárias nas quinas inferiores da cavidade, são provocadas pelo descolamento do fluido nestas regiões, ou seja, o escoamento principal, ao chegar próximo ao fundo da cavidade, perde quantidade de movimento e mostra-se incapaz de permanecer aderido às paredes laterais nestas regiões.

Na Fig.7.9 (posição geométrica) são descritas as influências da intensidade do escoamento  $U^*$  (Fig.7.9(a)), do tempo de relaxação adimensional  $\theta_0^*$  (Fig.7.9(b)) e do *shear-thinning* de viscosidade  $n$  (Fig.7.9(c)), sobre a localização do olho do vórtice do escoamento principal. Podemos observar na Fig.7.9(a), que o olho do vórtice desloca-se ligeiramente (cerca de 6% do comprimento  $L$  da cavidade) ao longo do eixo central da cavidade ( $x_1^*=0,5$ ), com o crescimento de  $U^*$ . Numa primeira abordagem poderíamos ser levados a explicar que este

deslocamento seja devido unicamente ao aumento da cinemática na parede superior da cavidade. Lembrando que a intensidade de escoamento é definida como  $U^* = \frac{U_c}{\dot{\gamma}_1 L}$ , esta intensidade também pode ser expressa como uma função explícita da tensão limite de escoamento,  $U^* = \frac{U_c k^{1/n}}{\tau_y^{1/n} L}$ . Ou seja, a quantidade  $U^*$  acopla os efeitos cinemáticos e viscoso da tensão de escoamento – para uma dada geometria e coeficiente *power-law*. Sobre este novo ponto de vista introduzido pela adimensionalização empregada, a Fig 7.9(a) indica que escoamentos mais viscosos apresentam a formação de seus vórtices mais próximo do topo da cavidade e, contrariamente, escoamentos menos viscosos tem suas recirculações mais distantes da parede superior da cavidade. Este comportamento observado vai ao encontro da dinâmica dos fluidos viscosos, isto é, os escoamentos mais dissipativos impedem que a quantidade de movimento imposta no topo da cavidade alcance suas regiões inferiores.

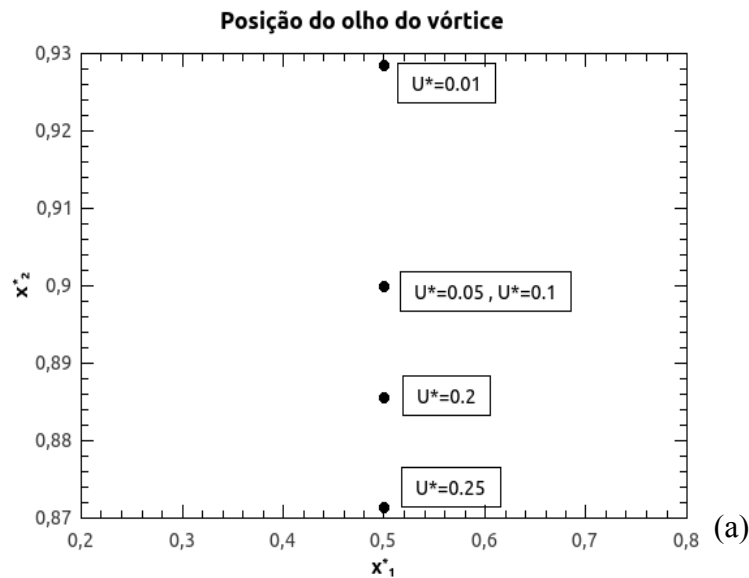


Figura 7.9 – Análise da posição do vórtice principal do escoamento: (a)  $U^* = 10^{-2} - 0,25$

Segundo a Fig.7.9(b), o efeito elástico é de pouca influência (cerca de 2% do comprimento  $L$ ) sobre a posição do olho do vórtice – observados os limites de variação do tempo de relaxação adimensional  $\theta_0^*$  empregados nesta dissertação. Para  $\theta_0^*$  na faixa de 1 até 333,333, a localização do vórtice parece ser insensível à variação do parâmetro elástico. Dada a natureza altamente não linear do fenômeno abordado, quando  $\theta_0^*$  alcança o valor mais elástico

estudado ( $\theta_0^* = 10^3$ ), observa-se que a posição do olho afasta-se do eixo central da cavidade em direção a sua parede direita. Este resultado, no que diz respeito à análise do padrão dos materiais viscoplásticos, talvez seja a maior contribuição desta Dissertação. Lembrando que diferentemente do tratamento puramente viscoso na modelagem destes tipos de materiais, esta Dissertação introduz elasticidade às suas regiões aparentemente não-escoadas. Certamente, esta componente elástica faz com que a posição do olho do vórtice desvie-se de sua posição tradicional predita pelos modelos viscoplásticos até então empregados. Classicamente, o reposicionamento do olho do vórtice é unicamente devido ao componente inercial do modelo mecânico. Visto que os escoamentos aqui estudados negligenciam o termo inercial da equação de movimento do fluido (Eq.(3.18)), fica neste trabalho registrado a contribuição que os efeitos elásticos também venham a alterar o posicionamento do vórtice do escoamento. Obviamente, esta tendência observada deve-se à forte componente elástica (e, conseqüentemente, menos viscoso) imposto na situação  $\theta_0^* = 10^3$ , a qual desvia a posição do vórtice de seu comportamento clássico dos escoamentos não inerciais de materiais viscoplásticos.

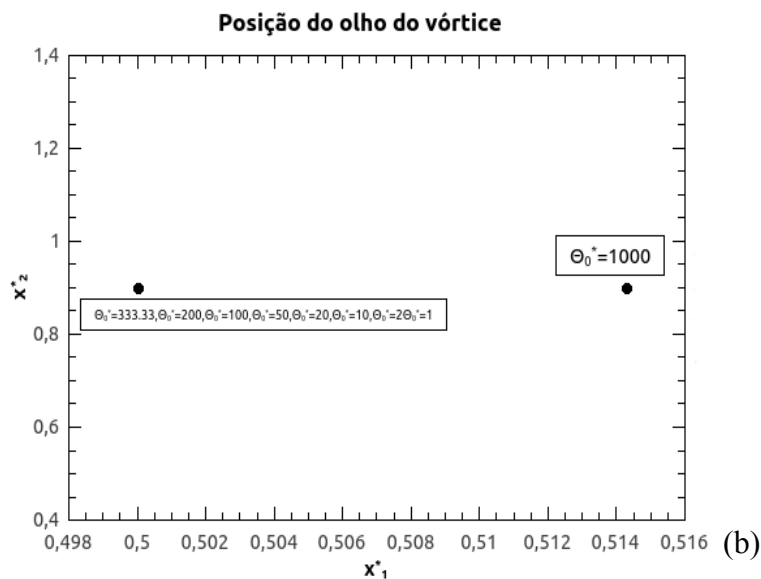


Figura 7.9 – Análise da posição do vórtice principal do escoamento: (b)  $\theta_0^* = 1 - 10^{+3}$

Por último, na Fig. 7.9(c), encontramos a influência do *shear-shinning* da função viscoplástica sobre a posição do olho do vórtice. Na verdade, o comentário acerca da diminuição da influência dos efeitos viscosos pelos efeitos elásticos acima introduzida, pode ser aqui retomado em um novo contexto. Ou mais ainda, podemos utilizar o bem conhecido

comportamento dos efeitos inerciais sobre o posicionamento do vórtice em materiais viscoplásticos que escoam com número de Reynolds (*power-law*) não nulo – a saber, ao aumentar a contribuição da advecção de *momentum* na equação de movimento, o olho do vórtice apresenta comportamento assimétrico em relação ao eixo central da cavidade, tendendo a deslocar-se rumo à parede direita da cavidade a medida que Reynolds aumenta. Se pensarmos que o o número de *Re* pode ser majorado tanto pelo aumento da cinemática a qual o escoamento está sujeito, mas como também pela diminuição (*shear-thinning*) da função viscopástica do material – obviamente para uma geometria invariante – chegamos a uma explicação plausível para o comportamento do olho do vórtice ilustrado na Fig.7.9(c). Conforme o índice *power-law* diminui – ou quando o *shear-thinning* da viscosidade aumenta – o vórtice assume mais e mais um posicionamnto assimétrico à direita do eixo central da cavidade. Nos casos consiredados não é o efeito inercial que vem a diminuir a natureza viscosa (de tensão de escoamento) do material, mas sim o efeito de *shear-thinninig* do campo de viscosidade. Portanto, é fisicamente realista o comportamento observado nesta figura, a saber, os maiores valores do coeficiente *n* originando um posicionamento simétrico e o caso de maior *shear-thinning* ( $n=0,1$ ) posicionando o olho do vórtice de maneira fortemente assimétrica à direita do eixo central da cavidade.

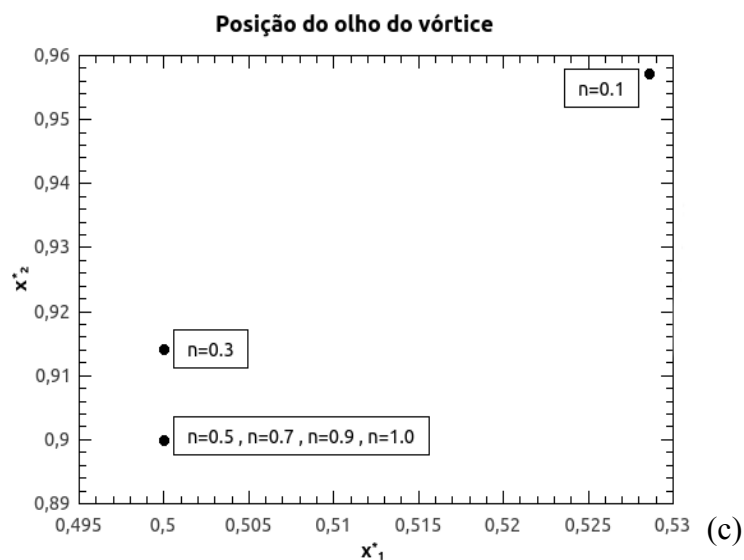


Figura 7.9 – Análise da posição do vórtice principal do escoamento:(c)  $n=0,1 - 1,0$



## 8. CONCLUSÕES

Nesta dissertação foram realizadas simulações numéricas de escoamentos elasto-viscoplásticos negligenciando a inércia e a tixotropia, onde a geometria utilizada foi uma cavidade forçada. A modelagem mecânica foi feita empregando-se a equação da conservação de massa, a equação do princípio da conservação da quantidade de movimento acoplado a uma equação material elasto-viscoplástica proposta em [Souza Mendes et al., 2011]. Segundo esta equação o tensor extra de tensão é descrito por uma equação do tipo Oldroyd-B a qual permite que tanto os tempos de relação e redardo do material, como sua função viscoplástica, sejam sensíveis às mudanças de sua microestrutura.

O modelo mecânico foi aproximado por um método de Elementos Finitos, a saber, o método multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados, em termos da tensão extra, pressão e velocidade. Esta formulação estabilizada permite não só o emprego de elementos finitos de igual ordem, bem como produz aproximações estáveis em escoamentos fortemente advectivos dominados.

A geometria estudada consiste de uma cavidade bi-unitária na qual sua tampa superior move-se para a direita, induzindo, assim, um escoamento curvilíneo no seu interior. Para tal, foram prescritas as seguintes condições de contorno: na parede superior da cavidade escoamento horizontal com velocidade constante e, nas demais paredes foram imposta as condições de não-deslizamento e impermeabilidade. De modo a determinarmos a melhor discretização deste domínio computacional, foram empregadas diversas malhas de elementos Lagrangeanos bilineares, resultando, segundo o critério de independência de malha adotado, na escolha de uma malha de 4900 elementos Q1.

Através da adimensionalização do modelo mecânico empregado, obtém-se que o escoamento estudado é governado pelos seguintes parâmetros: o índice *power-law*,  $n$  controla o grau de *shear-thickening* da viscosidade viscoplástica, o nível de elasticidade das regiões aparentemente não-escoadas é dado pelo tempo de relaxação adimensional  $\theta_0^*$  e a intensidade do escoamento é controlada pela velocidade adimensional,  $U^*$ .

Em seguida à determinação da discretização do domínio computacional e a obtenção dos parâmetros governantes do escoamento, foi realizada uma análise de sensibilidade de modo a aferir a influência dos efeitos viscosos, elásticos e cinemáticos sobre o padrão do escoamento. As tendências principais desta análise são resumidas nos parágrafos que seguem.

Quanto à influência dos efeitos elásticos no interior das regiões aparentemente não-escoadas do material, foi observado que à medida que o nível de elasticidade aumenta, a assimetria das superfícies do escoamento no interior da cavidade também aumentam, certamente ligado à crescente influência do termo (assimétrico) de *upwind* de tensão extra da derivada convectada superior da equação viscoelástica empregada. Observa-se também que o aumento da elasticidade tende a diminuir as dimensões das regiões aparentemente não-escoadas, comportamento este associado aos crescentes níveis de tensão elástica.

No que tange a influência dos efeitos cinemáticos, foi observado uma acentuada redução nas regiões aparentemente não-escoadas com o crescimento da intensidade do escoamento. Isso se deve que o aumento de  $U^*$  provoca níveis crescentes de tensão em toda a cavidade, fazendo com que maiores regiões excedam o limite de escoamento do material e comecem a escoar como um fluido *power-law*.

Em relação ao índice de *power-law*, foi verificado que as superfícies de escoamento não são por ele muito influenciadas, visto que as zonas aparentemente não-escoadas sofrem pequenas modificações com o aumento do  $n$ .

Afora as tendências principais acima apresentadas, alguns comentários específicos merecem ainda destaque, a saber:

- A posição do olho do vórtice do escoamento sofre grande influência da intensidade do escoamento. Com o aumento de  $U^*$ , o olho do vórtice desloca-se verticalmente para o fundo da cavidade, segundo seu eixo central. A elasticidade não tem influência marcada na posição deste vórtice, pois só para elevados valores de  $\theta_0^*$ , o olho do vórtice move-se ligeiramente em direção à parede direita da cavidade. Quanto a influência do índice de *power-law*, a posição do vórtice sofre uma modificação considerável. O nível de *shear-thickening* da viscosidade é capaz de movimentar o olho do vórtice tanto para direita ou para esquerda, bem como deslocá-lo para o centro da cavidade.
- O nível de tensão no interior da cavidade aumenta com o aumento da intensidade de escoamento, diminui com o decaimento de  $\theta_0^*$  e fica insensível ao *shear-thickening* da viscosidade.

- A deformação elástica é fortemente influenciada pela variação da intensidade do escoamento. À medida que  $\theta_0^*$  aumenta, as regiões aparentemente não-escoadas estão cada vez sujeitas a maiores deformações elásticas ao passo que as regiões escoadas apresentam  $\gamma_e=0$ . Este comportamento predito pelo modelo está de acordo com as recentes visualizações experimentais de escoamento de materiais viscoplásticos, nos quais os escoamentos apresentam um comportamento puramente viscoso quando a tensão excede o limite de escoamento do material, e o comportamento viscoelástico quando este limite não é alcançado. Outro relevante comentário a cerca de  $\gamma_e$ , é que a deformação elástica atinge seus valores máximos nas superfícies de escoamento, visto ser nelas que ocorrem os maiores níveis de tensão no interior das regiões aparentemente não-escoadas.
- Finalmente, destaca-se em face dos resultados obtidos e das observações físicas, que o modelo de viscoelasticidade empregado nesta dissertação mostrou-se capaz de prever qualitativamente o comportamento de materiais viscoplásticos reais no interior de cavidades forçadas. Como o estudo realizado foi numérico, isto também implica nas boas condições de estabilidade e a curacidade do método numérico empregado.
- O código numérico usado nas simulações dessa dissertação, apresentou-se confiável, pois apresentou resultados muito bons e semelhantes em comparação com a literatura [Mitsoulis et al., 2001].

## 9. PERSPECTIVAS FUTURAS

Como perspectivas futuras desta dissertação de mestrado podemos destacar os seguintes tópicos de pesquisa:

- Acrescentar o termo de inércia nas simulações numéricas, visto que ocorrerá uma mudança no comportamento das regiões aparentemente não-escoadas. Esse processo já está sendo realizado para a publicação de um artigo;

$$\rho^* = \frac{\rho(\dot{\gamma}_1 L_c) L_c}{\tau_y / \dot{\gamma}_1} = \frac{\rho(\dot{\gamma}_1 L_c)^2}{\tau_y}, \quad \text{Re} = \frac{\rho u_c L_c}{\eta} \quad (9.1)$$

- A incorporação do comportamento tixotrópico para os materiais viscoplásticos, visando considerar a dependência do tempo da influência das alterações da micro estrutura do material;
- Aplicar a técnica de conformação logarítmica de tensão na equação viscoelástica visando alcançar tempos de relaxação adimensional mais elevados e por consequência, conseguindo maiores valores para o número de Deborah;
- A substituição do modelo viscoplástico de Oldroyd-B pelos modelos viscoelásticos PTT (Phan-Thien e Tanner) e FENE-P (modelo turbulento), de modo a melhor ajustar dados reológicos de materiais viscoelásticos reais;
- Estudar modelos transientes de elasto-viscoplasticidade de modo a capturar as variações locais das derivadas materiais de velocidade e tensão extra;
- Estudar escoamentos tridimensionais de materiais elasto-viscoplásticos, avaliando assim, a influência dos efeitos de extremidade;
- Estabilizar os termos de mínimos quadrados da equação viscoelástica em função do número de Deborah local, de modo a adicionar a difusividade artificial apenas nas regiões complexas do escoamento.
- Estudar com mais profundidade a posição do olho do vórtice.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A. Baloch, P. Townsend, M. Webster, On vortex development in viscoelastic expansion and contraction flows, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 65 (1996) 133–149.

A. Matsoukas, E. Mitsoulis, Geometry effects in squeeze flow of Bingham plastics, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 109 (2003) 231–240.

A. Mujumdar, A.N. Beris, A.B. Metzner, Transient phenomena in thixotropic systems, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 102 (2002) 157–178.

A.N. Alexandrou, T.M. McGilvrey, G. Burgos, Steady Herschel-Bulkley fluid flow in three-dimensional expansions, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 100 (2001) 77–96.

Behr, M., Franca, L.P., Tezduyar, T.E., 1993. "Stabilized Finite Element Methods for the Velocity-Pressure-stress Formulation of Incompressible Flows", **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 104, pp. 31–48.

Beverly, C.R., Tanner, R.I., 1989. "Numerical analysis of extrudate swell in viscoelastic materials with yield stress, **J. Rheology.**, vol. 33/6, pp. 989–1009.

Billington, E. W., Tate, A., 1981 The physics of deformation and flow. **McGraw-Hill Inc**, U.S.A.

Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O., 1987. **Dynamics of polymeric liquids.** vol. 1, John Wiley and Sons, U.S.A.

Burgos, G.R., Alexandrou, A.N., Entov, V., 1999. "On the determination of yield surfaces in Herschel–Bulkley fluids", **J. Rheology.** vol. 43/3, pp. 463–483.

Carreau, P. J., 1968. Ph.D. Thesis, **University of Wisconsin**, Madison.

D. Sikorski, H. Tabuteau, J.R. de Bruyn, Motion and shape of bubbles rising through a yield-stress fluid, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 159 (2009) 10–16.

E. Mitsoulis, A. Matsoukas, Free surface effects in squeeze flow of Bingham plastics, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 129 (2005) 182–187.

E. Mitsoulis, R.R. Huilgol, Entry flows of Bingham plastics in expansions, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 122 (2004) 45–54.

E. Mitsoulis, S.S. Abdali, N.C. Markatos, Flow simulation of Herschel- Bulkley fluids through extrusion dies, **Can. J. Chem. Eng.** 71 (1993) 147–160.

E. Mitsoulis, Th. Zisis, Flow of Bingham plastics in a lid-driven square cavity, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 101 (2002) 173–180.

Franca, L. P., Frey, S., 1992, "Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations". **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 99, pp. 209–233.

G.G. Lipscomb, M.M. Denn, Flow of Bingham fluids in complex geometries, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 14 (1984) 337-346.

Gurtin, M. E., 1981. An introduction to continuum mechanics. **Academic Press**, New York, U.S.A.

H.A. Barnes, A brief history of the yield stress, **Appl. Rheol.** 9 (1999) 262–266.

H.A. Barnes, The yield stress - a review, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 81 (1999a) 133–178.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balusters, M., 1986. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes **problem accommodating equal-order interpolations**", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol.59, pp. 85–99.

J. Mewis, N.J. Wagner, Thixotropy, *Adv. Colloid Interface Sci.* 147-148 (2009) 214-227.

K. Dullaert, J. Mewis, A structural kinetics model for thixotropy, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 139 (2006) 21-30.

M. Aboubacar, H. Matallah, M.F. Webster, Highly elastic solutions for Oldroyd- B and Phan-Thien/Tanner fluids with a finite volume/element method: planar contraction flows, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 103 (1) (2002) 65–103.

M.A. Alves, P.J. Oliveira, F.T. Pinho, Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and ptt fluids in planar contractions, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 110 (2003) 45–75.

M.A. Al Khatib, S.D.R. Wilson, Flow of Bingham fluids in an orthogonal rheometer, **Int. J. Eng. Sci.** 63 (2003) 621–632.

M. Bercovier, M. Engelman, A finite element method for incompressible non-Newtonian flows, **J. Comput. Phys.** 36 (1980) 313–326.

M.M. Denn, Dynamics of complex fluids, in: M. Adams, R. Mashelkar, J. Pearson, A. Rennie (Eds.), **Dynamics of Complex Fluids**, Imperial College Press, London, 1998, pp. 372-378.

Nassar, B., de Souza Mendes, M.F. Naccache, 2011. "Flow of elasto- viscoplastic liquids through an axisymmetric expansion–contraction", **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 166, pp. 386–394.

Papanastasiou, T.C., 1987. “Flows of Materials with Yield”, *Journal of Rheology*, vol. 31 (5), pp. 385-404.

P. Jay, A. Magnin, J.M. Piau, Viscoplastic fluid flow through a sudden axisymmetric expansion, *AIChE J.* 47 (10) (2001) 2155-2166.

P.R. de Souza Mendes, Dimensionless non-Newtonian fluid mechanics, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 147 (12) (2007) 109-116.

P.R. de Souza Mendes, Modeling the thixotropic behavior of structured fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 164 (2009) 66-75.

P.R. de Souza Mendes, E.S.S. Dutra, Viscosity function for yield-stress liquids, *Appl. Rheology.* 14 (6) (2004) 296-302.

P.R. de Souza Mendes, M.F. Naccache, Bruno Nassar, Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions-contractions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 166 (2011) 386-394.

P.R. de Souza Mendes, Roney L. Thompson., 2012, A critical overview of elasto-viscoplastic thixotropic modeling, *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, vol. 187, pp. 8-15.

P. Saramito, A new constitutive equation for elasto-viscoplastic fluid flows, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 145 (2007) 1-14.

Renato da R. Martins, Giovanni M. Furtado, Daniel D. dos Santos, Sérgio Frey, Mônica F. Nacacche, Paulo R. de Souza Mendes, Elastic and viscous effects on flow pattern of elasto-viscoplastic fluids in a cavity, *Mechanics Research Communications.* 53 (2013) 36-42.

Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994. “The finite element method in heat transfer and fluid dynamics”, CRC Press Inc., USA.

Reddy, J.N., 2008. An Introduction to Continuum Mechanics, **Cambridge University Press** , USA.

R.E. Carter, R.C. Warren, Extrusion stresses, die swell, and viscous heating effects in double-based propellants, *J. Rheology.* 31 (1987) 151-173.

Santos, Daniel Dall Onder, 2013, Flow of elasto-viscoplastic liquids through a planar expansion–contraction, *Rheol Acta*, vol 53, pp. 31-41.

Santos, Daniel Dall Onder; Frey, Sérgio; Naccache, Mônica F.; de Souza Mendes, P.R. Numerical approximations for flow of Viscoplastic fluids in a lid-driven cavity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, p. 667-679, 2011.

S.Sofou, E.B. Muliawan, S.G. Hatzikiriakos, E.Mitsoulis, Rheological characterization and constitutive modeling of bread dough, *Rheology. Acta* 47 (2008) 369-381.

Slattery, J. C., 1999. Advanced transport phenomena. **Cambridge University Press**, U.S.A.

T.C. Papanastasiou, Flows of materials with yield stress, **J. Rheol.** 31 (1987) 385-404.

T.N. Phillips, A.J. Williams, Comparison of creeping and inertial flow of an Oldroyd-B fluid through planar and axisymmetric contractions, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** 108 (2002) 25-47.

Zinani, F.; Frey, S.L., 2006. "Galerkin Least-Squares Finite Element Approximations for Isochoric Flows of Viscoplastic Liquids". **Journal of Fluids Engineering** – Transactions of the Asme, Estados Unidos, v. 128, n. 4, p. 856-863.

Zinani, F.S.F. e Frey, S.L., 2008, "Galerkin Least-Squares Multifield Approximations for Flows of Inelastic Non-Newtonian Fluids ", **Journal of Fluids Engineering**, vol. 130, pp. 1-14.

Zinani, F. Silveira, FS e Frey, S.L., 2010, "Stabilized mixed approximations for inertial viscoplastic fluid flows", **Mechanics Research Communications**, vol. 37, pp. 145-152.



## ANEXOS

### Anexo I – Teoremas da divergência

$$- \operatorname{div}(\alpha \mathbf{a}) = \nabla \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \operatorname{div}(\mathbf{a}), \text{ sendo } \alpha \text{ um escalar e } \mathbf{a} \text{ um campo vetorial.} \quad (10.1)$$

$$- \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{u}) - \mathbf{T} \nabla \mathbf{u}, \text{ sendo } \mathbf{u} \text{ um campo vetorial (por exemplo, velocidade)} \quad (10.2)$$

e  $\mathbf{T}$  um tensor (por exemplo, o tensor de tensões).

$$- \int_{\Omega} \nabla \alpha = \int_{\Gamma} \alpha \mathbf{n} d\Gamma, \text{ onde } \alpha \text{ é um escalar e } \mathbf{n} \text{ é o vetor normal.} \quad (10.3)$$

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{a} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \text{ onde } \mathbf{a} \text{ é um campo vetorial e } \mathbf{n} \text{ é o vetor normal.} \quad (10.4)$$

$$- \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \mathbf{n} d\Gamma, \text{ onde } \mathbf{u} \text{ é um campo vetorial e } \mathbf{n} \text{ é o vetor normal.} \quad (10.5)$$

$$- \int_{\Omega} \mathbf{S} d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{S}) \mathbf{n} d\Gamma, \text{ onde } \mathbf{T} \text{ é um tensor e } \mathbf{n} \text{ é o vetor normal.} \quad (10.6)$$

$$- \operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{w}, \text{ onde } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{w} \text{ são vetores.} \quad (10.7)$$

### Anexo II – Teorema da Localização

Seja  $\varphi$  um campo escalar ou vetorial, contínuo e definido em conjunto aberto  $\Omega$ , se dado  $x \in \Omega$  e se por sua vez,

$$\int \varphi d\Omega = 0, \text{ para todo } \Omega \subset \Omega, \text{ então } \varphi = 0 \quad (10.8)$$

### Anexo III – Teorema de Green

$$- \int_{\Gamma} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) d\Omega, \text{ onde } \mathbf{T} \text{ é um tensor.} \quad (10.9)$$

### Anexo IV – Hipótese de Cauchy

$$- \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) \quad (10.10)$$

### Anexo V – Teorema de Stokes

Seja  $S$  uma superfície orientada, lisa por partes, cuja fronteira é formada por uma curva  $C$  fechada, simples, lisa por partes, com orientação positiva. Seja  $F$  um campo vetorial cujas componentes possuem derivadas parciais contínuas em uma região aberta de  $\mathbb{R}^3$  que contém  $S$ . Nesse caso, tem-se,

$$\oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} d\mathbf{S} \quad (10.11)$$

## APÊNDICE

Tensor gradiente de deformação

Seja  $\mathbf{F}$  o tensor gradiente de deformação, temos que,  $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$  e por consequência,  $d\mathbf{x} = \det \mathbf{F} d\mathbf{X}$ , onde  $\det \mathbf{F}$  é o jacobiano em um instante de tempo  $t$ .

Seja  $\varphi$  uma função definida no conjunto de todos os tensores inversíveis de  $\mathbf{A}$ , tal que:  $\varphi(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ . Usando a propriedade dos Invariantes de um tensor, temos que:

$$\det(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}) = -\alpha^3 + I_1(\mathbf{A})\alpha^2 - I_2(\mathbf{A})\alpha + I_3(\mathbf{A}) \quad (11.1)$$

onde,  $\alpha = f(\mathbf{A})$  e  $I_1, I_2, I_3$  são os invariantes, na qual os seus valores são

$I_1(\mathbf{A}) = \text{tr } \mathbf{A}$ ,  $I_2(\mathbf{A}) = (1/2)[(\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr } \mathbf{A}^2]$ ,  $I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$  e fazendo  $\alpha = -1$ , temos que,  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = 1 + \text{tr } \mathbf{A}$  e logo, se  $\mathbf{A}$  é inversível e  $\mathbf{U} \in \text{Lin}$  e é arbitrário, então:

$\det(\mathbf{A} + \mathbf{U}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{A} \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{A})^{-1}$  é linear, pelo fato de a operação do traço ser linear, assim:

$$D\varphi(\mathbf{A})\mathbf{U} = \det \mathbf{A} \text{tr}(\mathbf{U} \mathbf{A})^{-1} \quad (11.2)$$

Sendo assim, de acordo com a Eq. (11.2) e fazendo  $\mathbf{A} = \mathbf{F}$ , tem-se:

$$\frac{D(\det \mathbf{F})}{Dt} = (\det \mathbf{F}) \text{tr}(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}), \quad \text{onde } \dot{\mathbf{F}} = (D/Dt)\mathbf{F}. \quad \text{Levando em conta que}$$

$\text{tr}(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) = \text{div } \mathbf{u}$ , chegamos a comprovação que:

$$\dot{\det} \mathbf{F} = \det \mathbf{F} \text{div } \mathbf{u} \quad (11.3)$$