UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

NEILA TONIN AGRANIONIH

ESCRITAS NUMÉRICAS DE MILHARES E VALOR POSICIONAL

Concepções iniciais de alunos de 2ª série

PORTO ALEGRE
2008

NEILA TONIN AGRANIONIH

ESCRITAS NUMÉRICAS DE MILHARES E VALOR POSICIONAL
Concepções iniciais de alunos de 2ª série

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, na Linha de Pesquisa: Psicopedagogia, Sistemas de Ensino/aprendizagem e Educação em Saúde.

Orientadora: Profª. Dra. Beatriz Vargas Dorneles

PORTO ALEGRE
2008

DADOS DE CATALOGAÇÃO

A277e Agranionih, Neila Tonin
Escritas numéricas de milhares e valor posicional : concepções iniciais de alunos de 2ª série / Neila Tonin Agranionih. – 2008.
218 f.

Tese (doutorado – Universidade Federal do RioG rande do Sul, Porto Alegre, 2008. Programa de Pós-Graduação em Educação. Orientação: Profª. Dra. Beatriz Vargas Dorneles”.

1. Matemática - ensino 2. Sistema de numeração decimal 3. Notação numérica 4. Valor posicional I. Título

CDU: 510

Catalogação na fonte: bibliotecária Sandra Milbrath CRB 10/1278

Neila Tonin Agranionih

ESCRITAS NUMÉRICAS DE MILHARES E VALOR POSICIONAL
Concepções iniciais de alunos de 2ª série

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, na Linha de Pesquisa: Psicopedagogia, Sistemas de Ensino/aprendizagem e Educação em Saúde.
Orientadora: Profa. Dra. Beatriz Vargas Dorneles

Aprovada em _____________________

_____

Profa. Dra. Beatriz Vargas Dorneles – Orientadora

_____

Profa. Dra. Clarissa Seligman Golbert

_____

Profa. Dra. Maria Cecília Bueno Fischer

_____

Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald

_____

Prof. Dr. Fernando Becker

Por tudo o que representam...

À minha mãe, Vilma (in memoriam)

Ao Moacir, Marina , Guilhermo, Caetano

AGRADECIMENTOS

Algumas pessoas tornaram possível e acompanharam a realização desta pesquisa, às quais agradeço sinceramente:

- Minha orientadora, Professora Doutora Beatriz Vargas Dorneles – um carinho e reconhecimento muito especial...

- Meu pai Domingos e minha sogra Maria – pelo apoio constante

- Equipe diretiva, professores e sujeitos da pesquisa da Escola em que as situações didáticas foram realizadas

- Colegas do Curso de Doutorado do PPGEdu

- Colegas professores da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI- Campus de Erechim

RESUMO

As escritas numéricas e o valor posicional do número são o tema desta pesquisa que tem como objetivos: investigar concepções construídas na interação criança-escrita numérica que contribuem para a construção do valor posicional característico do sistema de numeração decimal; identificar contribuições das notações de números multidígitos à conceituação do valor posicional do número, e verificar as formas cognitivas por meio das quais estas contribuições se efetivam. Consiste num estudo de análise qualitativa.Fundamenta-se na concepção epistemológica construtivista, e volta-se para as microaprendizagens presentes no processo de construção da compreensão do valor posicional e de apropriação da escrita numérica convencional de multidígitos. Envolveu nove alunos da segunda série do Ensino Fundamental de uma escola estadual do município de Erechim-RS, selecionados por sorteio a partir da realização de pré-testes com 44 crianças de três turmas nos quais foram avaliadas noções de composição aditiva, domínio da escrita numérica de multidígitos e do valor posicional. Os critérios utilizados para a seleção foram: compreensão da composição aditiva, não-compreensão do valor posicional e o não-domínio das escritas numéricas de multidígitos. Os alunos participantes da pesquisa, organizados em trios, participaram de onze situações didáticas ao longo do segundo semestre letivo do ano de 2005. A pesquisa evidenciou um processo construtivo não linear, no qual as crianças construíram concepções próximas ao valor posicional, à medida que as situações didáticas provocavam reflexões e sucessivas tomadas de consciência sobre as notações em si e sobre as relações entre escritas e agrupamentos. No que se refere ao valor posicional, a escrita numérica não sugeriu, de imediato, a possibilidade de formarem agrupamentos de acordo com as propriedades do sistema de numeração decimal, do mesmo modo que os agrupamentos (organizados dentro destes princípios) não sugeriram, num primeiro momento, a escrita numérica correspondente. Ambos, escritas e agrupamentos, num primeiro momento, significaram para as crianças a quantidade total representada tanto pelas escritas numéricas quanto pelos agrupamentos. Observou-se uma construção incipiente e progressiva dos princípios aditivo e multiplicativo do sistema, bem como da compreensão da organização do sistema em potências de dez, elementos fundamentais ao reconhecimento do valor relativo do algarismo. As notações, por si só, não foram "transparentes" às crianças e o aprendizado do valor posicional ocorreu a partir da reflexão sobre as relações entre os resultados das ações e sobre as próprias reflexões realizadas por abstrações reflexionantes e tomadas de consciência.

Palavras-chave: Valor posicional. Sistema de numeração decimal. Notações numéricas.

ABSTRACT

Numeric writings and the number place value are the theme of this research, which aims: to investigate conceptions built on the children-numeric writing interaction that contributes for the construction of place value characteristic of the decimal system; to identify contributions of multidigit numbers to the conceptualization of the number place value and; to verify the cognitive forms through which these contributions are effective. It is a study of qualitative analysis. It is grounded on the constructivist epistemological conception, and it turns to micro-learnings present in the process of construction of place value comprehension and of appropriation of the conventional numeric writing of multidigits. Nine fundamental second grade students from a public state school in the town of Erechim/RS were involved in the research, selected by assortment after the accomplishment of pre-tests with 44 children from three classes in which notions of additive composition, the understanding of numeric writing of multidigit and place value were evaluated. The criteria used for the selection were: comprehension of additive composition, the non-comprehension of place value and the non-dominance of numeric writings of multidigits. The participants of the research, organized in triads, participated in eleven didactic situations during the second school semester of 2005. The research evidenced a constructive, non-linear process, in which children built conceptions close to the place value, as the didactic situations provoked reflections and successive consciousness about notations and about the relations between writings and groupings. Regarding place value, the numeric writing did not suggest, at first, the possibility of forming groups according to the properties of decimal system, in the same manner that the groupings (organized within these principles) did not suggest immediately the correspondent numeric writing. In a first moment, both, writings and groupings, meant for the children the total quantity represented as for numeric writings as for groupings. An incipient and progressive construction of additive and multiplicative principles of the system was observed, as well as the comprehension of the system organization in potencies of tens, fundamental elements for the recognition of the number relative value. The notations, by themselves, were not “transparent” for the children and the learning of place value took place from the reflection about relations between action results and about the reflections accomplished by reflexive abstractions and consciousness.

Key words: Place value. Decimal system. Numeric notations.

RESUMEN

Las escritas numéricas y el valor posicional del número son temas de esta pesquisa, que tiene como objetivos: investigar concepciones construidas en la interacción niño-escrita numérica que contribuyen para la construcción del valor posicional característico del sistema de numeración decimal; identificar contribuciones de las notaciones de números multidígitos a la conceptuación del valor posicional del número y verificar las formas cognitivas a través de las cuales estas contribuciones se efectúan. Consiste en un estudio de análisis cualitativo. Se fundamenta en la concepción epistemológica constructivista y se vuelve para los microaprendizajes presentes en el proceso de construcción de la comprensión del valor posicional y de apropiación de la escrita numérica convencional de multidígitos. Involucró nueve alumnos del segundo año de la Enseñanza Primaria – 2ª série do *Ensino Fundamental* – de una escuela estadual del municipio de Erechim-RS, seleccionados, por sorteo, a partir de la realización de pré-testes con 44 niños de tres grupos en los cuales fueron evaluados nociones de composición aditiva, el dominio de la escrita numérica de multidígitos y del valor posicional. Los criterios utilizados para la selección fueron: comprensión de la composición aditiva, no comprensión del valor posicional y el no dominio de las escritas numéricas de multidígitos. Los alumnos participantes de la pesquisa, organizados en triades, participaron de once situaciones-didácticas a lo largo del segundo semestre lectivo del año de 2005. La pesquisa evidenció un proceso constructivo, no linear, en el cual los niños construyeron concepciones próximas al valor posicional, a la medida que las situaciones didácticas provocaban reflexiones y sucesivas tomadas de conciencia sobre las notaciones en si y sobre las relaciones entre escritas y agrupamientos. A lo que se refiere al valor de posición, la escrita numérica no sugirió, de inmediato, la posibilidad de formar agrupamientos de acuerdo con las propiedades del sistema de numeración decimal, del mismo modo que las agrupaciones (organizados dentro de estos principios) no sugirieron de inmediato la escrita numérica correspondiente. Ambos, escritas y agrupamientos, en un primer momento, significaron para los niños la cuantidad total representada tanto por las escritas numéricas, cuanto por los agrupamientos. Se observó una construcción incipiente y progresiva de los principios aditivo y multiplicativo del sistema, bien como de la comprensión de la organización del sistema en potencias de diez, elementos fundamentales al reconocimiento del valor relativo del guarismo. Las notaciones, tan sólo, no fueron “transparentes” los niños y el aprendizaje del valor posicional ocurrió a partir de la reflexión sobre las relaciones entre los resultados de las acciones y sobre las propias reflexiones realizadas por abstracciones reflexionantes y tomadas de conciencia.

Palabras-clave: Valor posicional. Sistema de numeración decimal. Notaciones numéricas.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este estudo enfoca relações entre notações e conceitos na aprendizagem do sistema de numeração decimal e tem como objetivos definir contribuições das notações de números multidígitos à compreensão do valor posicional do número e identificar processos cognitivos por meio dos quais estas contribuições se efetivam. Parte dos pressupostos de que as aprendizagens dos diferentes sistemas simbólicos podem contribuir significativamente para a construção dos conceitos e de que o domínio progressivo das notações numéricas desempenha um importante papel na compreensão do sistema de numeração decimal[1].

O interesse pelo papel dos sistemas simbólicos na construção dos conceitos matemáticos tem uma história cujas origens encontram-se em nossas vivências como educadora matemática. Em Agranionih (2003), realizamos uma retrospectiva com o objetivo de historiar nossas trajetórias escolares, acadêmicas e profissionais, contextualizando as origens das preocupações que motivaram o estudo da temática que envolve esta pesquisa. Consideramos fundamentais pesquisas voltadas a esta temática, devido à necessidade de construir um embasamento teórico sólido, capaz de esclarecer os processos de aprendizagem dos diferentes sistemas simbólicos e de promover um redimensionamento no ensino da matemática, tendo em vista que: - observa-se uma alternância histórica entre os aspectos formais e conceituais da matemática no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina em relação às ênfases atribuídas ao longo do tempo, ou a um ou a outro destes aspectos; - há, na prática pedagógica, uma incerteza evidente em relação aos vínculos necessários entre o ensino das notações numéricas (e, em especial, das escritas de números multidígitos) e o ensino do valor posicional do número, no que se refere à produção e à organização de situações didáticas adequadas a este ensino.

[1] Pressuposto já fundamentado em: Projeto de tese de doutorado: Escritas numéricas x conceitos matemáticos: um estudo sobre as inter-relações possíveis entre notações e conceitos matemáticos, apresentado ao Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, linha de pesquisa: Psicopedagogia, Sistemas de Ensino-aprendizagem e Educação em Saúde, e também discutido no Capítulo 2 deste trabalho.

O ensino centrado no simbolismo próprio da linguagem matemática, no processo de transmissão de conteúdos, na memorização e no treinamento de fórmulas e algoritmos, que enfatizava aspectos formais da matemática no início do século XX, cede espaço a aspectos conceituais, por volta dos anos 50, quando surgem algumas tendências teóricas voltadas à construção dos conceitos. A preocupação com os aspectos conceituais, neste período, no entanto, voltou-se mais para a busca de estratégias de ensino que permitissem ao aluno a compreensão dos algoritmos, das fórmulas e dos símbolos em si, do que para a construção dos conceitos propriamente ditos. O movimento da Matemática Moderna, nas décadas de 60 e 70, introduziu nos currículos escolares o ensino da linguagem matemática universal e das estruturas lógicas da matemática, enfatizando a importância do uso, na escola, de uma terminologia complexa e precisa. O rigor, a dedução e a demonstração passaram a ocupar o papel central, deixando a um plano secundário a intenção de promover um ensino de matemática voltado para a compreensão dos conceitos numa perspectiva contextualizada com a lógica e a realidade do aluno (KLINE, 1976). As tendências pedagógicas construtivistas resgataram estas preocupações a partir da década de 80. O entendimento do conhecimento como processo construtivo provocou rupturas na forma de pensar o ensino, oferecendo um papel maior no ensino à lógica do aluno e ao processo de construção desta lógica. Exposições do conteúdo e demonstrações de teoremas e fórmulas a um aluno atento e receptor passaram a ser questionadas como métodos pedagógicos e foram cedendo espaço a métodos que permitiam a ação do aluno, entendida, inicialmente, como ação sobre os objetos. Observou-se, a partir de então, uma grande busca, por parte dos professores, de técnicas adequadas ao ensino de conteúdos específicos, vinculadas, principalmente, a materiais concretos, manipulativos, que oportunizassem a ação dos alunos sobre os objetos. Surgiram Laboratórios de Matemática nas universidades e escolas, com o objetivo de construir estas metodologias. Grupos de estudos teóricos foram constituídos com a intenção de produzir propostas de ensino. Algumas escolas instituem o Laboratório de Matemática como espaço físico equipado com diversos materiais, tais como ábacos, material dourado[2], quadros de frações, sólidos geométricos, jogos pedagógicos,

[2] Material idealizado pela médica e educadora italiana Maria Montessori, composto por 1 cubo, subdividido em 1.000 partes, 10 placas, cada uma subdividida em100 partes, 100 barras, cada uma subdividida em 10 partes e 1.000 cubinhos, que podem representar o milhar, a centena, a dezena e a unidade, respectivamente.

enfim, materiais através dos quais fosse possível estabelecer as relações lógico-matemáticas necessárias à construção dos conceitos.

É neste momento histórico que nos inserimos como profissionais da educação. Muitos foram os cursos e encontros de professores buscados na intenção de aprender novas metodologias que priorizassem a ação do aluno no ensino dos conteúdos, tais como frações, números decimais, números inteiros, sistemas de numeração, entre outros. Lembramo-nos da certeza que nós, professores, partilhávamos em relação à necessidade e à eficiência destes materiais e de técnicas de ensino específicas a cada conteúdo, talvez uma certeza movida pelo desejo de realmente promovermos um bom ensino de matemática, pois as dificuldades de aprendizagem e os altos índices de repetência na disciplina eram problemas comuns entre nós.

Na condição de professora de matemática no Ensino Fundamental e de metodologia do ensino de matemática nos Cursos de Pedagogia e de Matemática da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, URI - Campus de Erechim, buscamos compreender os aspectos conceituais da matemática, priorizando-os nos processos de ensino e aprendizagem. Buscamos, também, fundamentar teoricamente nossas concepções sobre a prática pedagógica nos pressupostos teóricos construtivistas, mais especificamente, na teoria de Jean Piaget, construídos a partir da realização do Mestrado em Educação, realizado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Esta ênfase caracterizou-se pela prioridade dada, nas situações de ensino e nas orientações a respeito de como estas deveriam ser, à construção de estratégias metodológicas que envolviam materiais e situações concretas, na tentativa de respeitar o processo de construção da lógica dos alunos, para que, desta forma, estes compreendessem a “lógica” dos conteúdos. A compreensão dos conceitos e dos conteúdos matemáticos pelo aluno foi o cerne das nossas preocupações e intervenções didáticas. Em nossa dissertação de Mestrado afirmamos que

> o que se quer é um ensino de matemática que trabalhe operatoriamente o algoritmo. [...] Isto se torna possível se o caminho do fazer ao compreender é percorrido: ação, coordenação das ações, compreensão e, finalmente, formalização. De nada vale colocar a formalização no início do processo, como o faz o ensino que se tem (AGRANIONIH, 1991, p.169).

Como também já escrevíamos no projeto de pesquisa que qualificamos para a realização deste trabalho, as crenças construídas sofrem constantes questionamentos e reconstruções ao longo da prática pedagógica, em contínuos confrontos entre teoria e prática, o que estende o processo de formação profissional, tornando-o contínuo e permanente. Foi pelo confronto dos diferentes saberes com os quais nos deparamos, e destes, com as experiências docentes, que percebemos a necessidade de ampliar e aprofundar conhecimentos, principalmente em torno do papel que a formalização desempenha na formação dos conceitos matemáticos. Se, de um lado, a formação teórica construída e a preocupação em contemplar esses conhecimentos no ensino de matemática levavam-nos a priorizar os aspectos conceituais na aprendizagem matemática, de outro, as práticas diárias em sala de aula e o constante buscar teórico evidenciavam que a formalização e, em especial, os sistemas simbólicos também desempenhavam importante papel no processo de construção dos conceitos. Diante do fato inquestionável de a matemática possuir uma linguagem formal própria, com sistemas notacionais característicos, a questão prática e teórica emergente dirigia-se ao como contemplar ambos os aspectos no processo pedagógico. A articulação entre o processo de construção dos conceitos e a representação dos mesmos ainda não estava suficientemente esclarecida. A afirmação feita em nossa dissertação de Mestrado referida acima de que nada vale colocar a formalização no início do processo como o faz o ensino que se tem (AGRANIONIH, 1991, p.169) passou a gerar reflexões. Ainda acreditamos que reduzir o ensino de matemática ao domínio de fórmulas e ao treino de algoritmos, priorizando a formalização em detrimento dos conceitos, não atende às expectativas do que entendemos por Educação Matemática. O que queremos é um ensino de matemática que trabalhe operatoriamente os algoritmos e que contemple o caminho do fazer ao compreender, fundamental na compreensão dos conceitos. A questão que nos colocamos é relativa à articulação necessária e ao papel que a formalização assume neste processo. Daí decorre a necessidade de, através deste estudo, olhar para este aspecto com maior atenção no processo de construção do conhecimento matemático e de aprofundar referenciais teóricos, dentre eles a Epistemologia Genética, no sentido de construir a compreensão necessária da articulação possível entre o formal e o conceitual, e, mais especificamente, entre as notações e os conceitos matemáticos.

Embora as contribuições das notações para a construção dos conceitos sejam uma possibilidade aludida por diversos autores, o enfoque dado nas práticas de ensino de matemática é o de que as notações sejam usadas para representar os conceitos construídos, muito mais do que para promover a construção destes conceitos. Pesquisas ainda são necessárias para tornar possível articular um processo de ensino-aprendizagem que realmente considere estes aspectos sem delegar a um ou a outro, maior ou menor importância, mas atribuindo a cada um sua real importância. Para tal, é fundamental elucidar os papéis que desempenham no processo de construção do conhecimento matemático.

Fora do contexto escolar, as crianças aprendem muito sobre escritas numéricas. Estas aprendizagens realizam-se de forma natural e espontânea a partir dos inúmeros contatos que elas têm com os diferentes sistemas simbólicos, dentre eles, os sistemas numéricos, nas situações que vivenciam em seu dia-a-dia. Notações numéricas estão presentes nos números de telefones e das casas, nos preços de mercados e lojas, nas propagandas, nos letreiros, nas placas dos carros, entre tantos outros lugares. Diariamente crianças e notações interagem e, nesta interação, as crianças constroem conhecimentos e hipóteses, bem como produzem escritas numéricas. É provável que crianças pequenas não compreendam a estrutura do sistema de numeração decimal, mas isto não as impede de produzirem escritas numéricas e hipóteses sobre esta escrita, bem como de demonstrarem uma grande motivação em aprender números “grandes”, expectativas estas ignoradas pela escola nas séries iniciais. Trata-se do início de um processo que continuará se desenvolvendo com a escolarização, que poderá promover o domínio das regras que regem os sistemas, dentre eles o sistema de numeração decimal.

A aprendizagem do sistema de numeração decimal revela-se um processo difícil para as crianças freqüentadoras dos anos iniciais de escolarização e o processo de ensino deste conteúdo não tem dado conta de promover a compreensão dos conceitos envolvidos.

Um dos indicadores desta constatação está no fato de os alunos apresentarem muitas dificuldades na realização de cálculos que envolvem o “empréstimo” e o “vai um”, apesar de todos os esforços e recursos didáticos empregados no ensino dos agrupamentos em base dez, dentre os quais o material dourado, o quadro “valor do lugar” e o ábaco. As escritas numéricas de números multidígitos são ensinadas na escola a partir da transcrição de ações observadas nestes materiais. Isto quando são usados, uma vez que ainda hoje prevalece um ensino centrado apenas no algoritmo, através das explicações do professor apoiadas no quadro e no giz.

Por outro lado, a abordagem pedagógica relativa à escrita numérica presente nas escolas impõe limites ao ensino da numeração a cada série e atrela a aprendizagem de números superiores a dez ao ensino do sistema de numeração decimal, ou seja: unidades, dezenas, centenas e assim por diante. Desta forma, os números a partir de onze, bem como a sua escrita, são ensinados como agrupamentos de dez unidades, tais como: uma dezena mais uma, duas, três unidades e assim sucessivamente, através de uma seqüenciação linear e gradual, justificada pela suposta necessidade de uma graduação de dificuldades para a aprendizagem deste conteúdo, em função das possibilidades cognitivas da criança. Isto faz com que a criança tenha contato com centenas, no contexto escolar, no final da 1ª série ou apenas na 2ª série e, com milhares, apenas no final da 2ª série, quando não somente a partir da 3ª série do Ensino Fundamental. Esta prática fundamenta-se no pressuposto já teoricamente questionado de que materiais concretos (tais como o ábaco, cartaz valor de lugar e material dourado, referidos acima) representam a lógica do sistema de numeração decimal e de que é possível compreender as propriedades deste sistema a partir de demonstrações do professor. Subjacente a estas práticas encontra-se também a crença de que a aprendizagem da escrita de números multidígitos é um processo decorrente da compreensão da organização do sistema de numeração decimal em unidades, dezenas, centenas, milhares, em agrupamentos de base 10.

O fato de crianças produzirem escritas de números multidígitos e hipóteses em relação a estas escritas desde muito cedo, sem terem passado por um processo de ensino formal sobre unidades, dezenas e centenas, permite considerar a possibilidade de a escrita numérica também desempenhar um papel importante na construção da noção de valor posicional e questionar a intervenção didático-metodológica presente nas escolas, bem como os materiais didático-pedagógicos tradicionalmente utilizados para este fim: - Estariam adequados ao ensino das escritas numéricas de números multidígitos e do sistema de numeração decimal, tendo em vista a psicogênese destes processos? - A representação numérica própria do sistema de numeração decimal é, realmente, um processo decorrente da compreensão do valor posicional do número? - A interação crianças – escritas numéricas em diferentes contextos pode ser considerada determinante à produção destas escritas? - Como se justifica o fato de as crianças produzirem escritas numéricas a partir de hipóteses próprias, independentemente de um contexto de ensino formal? Questões como estas motivaram a realização deste trabalho.

Leituras de pesquisas, tais como as de Kamii e Joseph (1992), que questionam o ensino precoce do valor posicional, indicando ser este um conceito construído tardiamente pelas crianças por envolver a necessidade da construção de um sistema de dezenas além do sistema de unidades e as pesquisas de Lerner e Sadovsky (1996), que argumentam sobre a importância da identificação pelas crianças das regularidades da escrita numérica na compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal contribuíram decisivamente para o interesse por este tema e problema de pesquisa.

Propomo-nos a investigar algumas questões: - como alunos que não compreendem o valor posicional do número passam a compreendê-lo através da interação criança-escritas numéricas? – Que concepções possuem sobre o valor posicional e como constroem novas concepções? - Que caminhos percorrem? - De que forma os aspectos notacionais do número contribuem para a construção de noções relativas às propriedades do sistema de numeração decimal? Nesta pesquisa buscamos identificar processos psicogenéticos através dos quais a compreensão do valor posicional se torna possível.

Organizamos este trabalho da seguinte forma: revisamos a literatura relativa às relações entre notações e conceitos na aprendizagem da matemática, definindo as bases teóricas que sustentam nossa pesquisa, no segundo Capítulo. Num primeiro momento, “Notações e sistemas notacionais”, apresentamos posições assumidas por diferentes paradigmas teóricos sobre notações e sistemas notacionais entendidos como sistemas de representação, destacando a posição construtivista que orienta este trabalho em duas subseções: - representação, sistemas de representação e aprendizagem matemática; - a representação na concepção piagetiana. Num segundo momento, “Conceitos e aprendizagem matemática”, discutimos o processo de construção dos conceitos matemáticos na perspectiva da Epistemologia Genética, em três subseções: - a teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud; - do fazer ao compreender; - a abstração reflexionante.

No terceiro Capítulo, caracterizamos o Sistema de Numeração Decimal, destacando seus aspectos operatórios e lingüísticos.

No quarto Capítulo, colocamos em discussão o processo de construção de escritas numéricas de números multidígitos e relacionamos tal processo à compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal na concepção de diferentes autores, em duas perspectivas: psicogenética e didático-pedagógica.

No quinto Capítulo, apresentamos o método que norteou a realização da pesquisa, explicitando as situações didáticas realizadas na coleta de dados, bem como as categorias de análise dos dados.

No sexto Capítulo, apresentamos os dados coletados na pesquisa. Inicialmente, um conjunto de concepções que denominamos iniciais, sobre a leitura e a escrita de números multidígitos, destacando as hipóteses sobre a leitura e a escrita numérica apresentadas pelas crianças de nossa pesquisa. A seguir, as concepções que identificamos como características de um avanço gradativo rumo às regularidades internas do sistema de numeração decimal, salientando o caminho percorrido em direção à escrita numérica convencional de números multidígitos e à compreensão do valor posicional. Destacamos, neste capítulo, as concepções relativas à escrita convencional de multidígitos e ao valor posicional do número manifestadas pelas crianças ao longo do processo.

No sétimo Capítulo, analisamos os dados obtidos, explicitando concepções iniciais sobre o valor posicional que identificamos nas interações crianças-escritas numéricas, ao longo das intervenções, situando-os no referencial teórico que fundamenta a pesquisa. Identificamos concepções sobre o valor posicional a partir de ações de agrupar quantidades correspondentes à escritas numéricas e produzir a escrita numérica correspondente à quantidade de elementos já agrupados.

Finalizamos o trabalho com uma síntese dos achados da pesquisa.

2 NOTAÇÕES E CONCEITOS NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

O enfoque nos aspectos conceituais já referido na introdução deste trabalho produziu, de certa forma, uma falsa idéia de que o formalismo seria útil para representar os conceitos construídos, muito mais do que para promover a construção destes conceitos. Em outras palavras, que passasse a ser visto como um processo decorrente da compreensão do conceito. Embora pesquisadores reconheçam a importância das notações na Educação Matemática e recomendem que sejam incluídas como parte integral do ensino e da aprendizagem de matemática, essas reflexões e observações ainda não influenciaram a formação de professores (BRIZUELA, 2006, p.18). “Muito mais atenção foi dada à lógica da matemática do que a sistemas matemáticos convencionais por pesquisadores sobre o desenvolvimento matemático”, afirmam Nunes e Bryant (1997, p.227).

Ênfases nos aspectos conceituais ou notacionais não respondem totalmente à necessidade de compreender a dinâmica da aprendizagem matemática, na dialética própria do processo de conhecer. Importante contribuição, neste sentido, à Educação Matemática, é dada por Vergnaud (1996a) ao chamar a atenção para o fato de que a representação simbólica faz parte do conceito matemático, uma vez que este envolve situações, significados e significantes (expressa pela terna S, I, R, respectivamente)[3]. Esta proposição é retomada por Nunes e Bryant (1997), no conceito de numeralização[4]. São elementos que desempenham papéis fundamentais na construção dos conceitos matemáticos e não podem ser reduzidos uns aos outros, para a compreensão da mudança conceitual em matemática. Para serem numeralizadas, as crianças precisam construir invariantes lógicas que permitam a construção do raciocínio lógico-matemático e a compreensão de diferentes princípios

[3] Apresentada na seção 2.2 deste capítulo.

[4] Nunes e Bryant (1997) utilizam, na obra original do livro *Children doing mathematics,* o termo *numerate*, que, de acordo com a nota de rodapé do tradutor da versão em português, trata-se de uma expressão que designa uma criança ou adulto que tenha um certo domínio do sistema numérico e das operações aritméticas, e que possa pensar com conhecimento matemático. Em português não há uma tradução literal para este termo, sendo que o que melhor se aproxima do significado que os autores pretendem atribuir a *numerate* é “numeralização”.

lógico-matemáticos, tais como a conservação e a transitividade, bem como operações matemáticas (de adição e subtração, entre outras). Precisam aprender matemática e isto significa ir mais além do que dominar regras lógicas. Significa aprender sobre as convenções e procedimentos próprios à matemática, construídos ao longo da história e transmitidos de geração em geração no âmbito de cada grupo cultural, que fornecem às pessoas modos de representar e de falar sobre os conceitos que possuem, bem como dominar técnicas matemáticas, como as do cálculo. Um exemplo dado pelos autores de um sistema convencional de fundamental importância é o do sistema de numeração. Para serem numeralizadas, as crianças precisam saber para que serve seu pensamento matemático. De nada vale ser lógico e dominar sistemas convencionais, se não souber fazer uso apropriado destes aspectos na solução de problemas. Ser "numeralizado" implica em compreender a situação-problema e resolvê-la, utilizando conhecimentos matemáticos e, para tal, é essencial relacionar as técnicas e os procedimentos matemáticos convencionais com as diferentes situações que lhe conferem sentido (NUNES; BRYANT, 1997).

A pouca atenção dada aos aspectos notacionais é uma negligência considerada lamentável por Nunes e Bryant (1997, p. 227), porque, em suas palavras, "[...] o pouco que já sabemos sugere que eles desempenham um importante papel no pensamento matemático das crianças", uma vez que "[...] há uma relação bastante sutil entre o desenvolvimento lógico das crianças e seu conhecimento destes sistemas convencionais". A importância desta relação é enfatizada pelos autores que consideram ser impossível entender a conexão entre desenvolvimento lógico e matemático sem também saber sobre a familiaridade das crianças com sistemas matemáticos convencionais. O notacional, alerta Tolchinsky (1997), não se restringe apenas a comunicar idéias, mas também desempenha o papel de promotor do nocional. As relações entre conhecer formas de simbolizar fatos numéricos e saber utilizar estes símbolos na resolução de operações e problemas ainda precisam ser melhor conhecidas. Kaput (1994) afirma que modificar notações ou criar novas notações é uma estratégia deliberada para levar os estudantes à compreensão dos formalismos.

Estudos voltados à notação numérica (SASTRE; MORENO, 1976; HUGHES, 1986; BEDNARZ; JANVIER, 1986; SINCLAIR, 1989; SINCLAIR; MELLO; SIEGRIST, 1989; SINCLAIR; TIÈCHE-CRISTINAT; GARIN, 1992; TOLCHINSKY; KARMILOFF-

SMITH, 1992; LERNER; SADOVSKY, 1996; NUNES; BRYANT, 1997; OROZCO; HEDERICH, 2000; DANYLUK, 1998; SELVA; BRANDÃO, 2000; BRIZUELA, 2006; TEIXEIRA, 2006) demonstram interesse crescente pelas relações entre as dimensões notacionais e conceituais, e, em decorrência, entre os processos de representação e construção dos conceitos, tornando fundamental discutir os papéis que ambos assumem na aprendizagem da matemática. Este trabalho insere-se nesta perspectiva. Faz-se necessário, portanto, tornar claro o significado que atribuímos às notações e aos conceitos e apresentar as bases teóricas que nos fundamentam.

2.1 NOTAÇÕES E SISTEMAS NOTACIONAIS

As notações são entendidas como marcas intencionais e permanentes produzidas pelo homem a partir de sua capacidade notacional, ou seja, de sua capacidade de utilizar ferramentas para produzir estas marcas, em função de suas ações comunicativas e cognitivas e para garantir uma herança cultural (KARMILOFF-SMITH, 1994; TOLCHINSKY, 2002; MARTÍ, 2003). Esses sistemas são definidos por diferentes termos: sistemas externos de símbolos (LEE; KARMILOFF-SMITH, 1996), sistemas de notação (SINCLAIR, 1988; TOLCHINSKY; KARMILOFF-SMITH, 1993; KARMILOFF-SMITH, 1994) ou sistemas externos de representação (MARTÍ; POZO, 2000).

As notações são estudadas em duas perspectivas (TOLCHINSKY; KARMILOFF-SMITH, 1992; BRIZUELA, 2006): notações como domínios de conhecimento e notações como objetos do conhecimento ou ferramentas referencial-comunicativas.

Na perspectiva de "domínio de conhecimento", estudos têm sido realizados sobre como as crianças usam, interpretam, diferenciam e compreendem os diferentes sistemas de representação (escrita alfabética e numérica, desenho, mapas, por exemplo), desde idades precoces, anteriores à escolarização, voltados para as notações em si. Como exemplo, diferentes significados podem ser atribuídos à notação *54:* prefixo de um telefone, número de casa, posição em uma fila de espera. Lerner e Sadovsky (1996) salientam a importância da compreensão das regularidades da escrita numérica, ou seja, da notação em si, para a compreensão do sistema de numeração decimal. As autoras entendem que as notações, devido a sua importância cultural e cognitiva, devem ser analisadas em suas peculiaridades, como um domínio próprio de conhecimento.

Na perspectiva de “objeto de conhecimento”, as notações são estudadas como ferramentas referencial-comunicativas, ou seja, como ferramentas que podem ser usadas para comunicar uma idéia quantitativa, comunicar “quantos há” a partir de uma contagem. São objeto de estudos de Sinclair (1988) e de Sastre e Moreno (1976), por exemplo.

Brizuela (2006, p. 19) situa seus estudos em ambas as perspectivas, argumentando que, em relação ao que se referem, as notações “[...]*sempre* se referem a alguma coisa, isto é, elas sempre têm algum significado para a pessoa – ainda que esse significado esteja escondido para os outros” (grifo da autora). Nosso estudo está voltado para as notações de números multidígitos também nestas duas perspectivas, uma vez que algumas das situações didáticas desenvolvidas na pesquisa promovem a reflexão das regularidades da escrita, ou seja, da notação propriamente dita, enquanto outras promovem relações com as quantidades que representam. Notações também são entendidas como objetos conceituais sobre os quais as crianças pensam, desenvolvem idéias e refletem, ou “inscrições materiais que, às vezes, fazem parte de sistemas de representação, mas que também podem ser não-convencionais e não-sistemáticas” (BRIZUELA, 2006, p. 23), posição que também assumimos nesta pesquisa. Neste trabalho atribuiremos o mesmo sentido ao termo “escrita numérica”, utilizado para referir as notações convencionais e as notações não-convencionais produzidas pelas crianças.

Neste trabalho, ao nos referirmos aos aspectos notacionais, estamos considerando os diferentes sistemas simbólicos próprios da matemática, tais como, por exemplo, os sistemas numérico e algébrico, bem como as diferentes notações, ou seja, marcas gráficas convencionais (próprias do formalismo matemático) e não-convencionais (produzidas intencionalmente pelas crianças). Partilhamos das considerações de Brizuela (2006, p.18)[5], no sentido de que as crianças, ao interagirem e se apropriarem de um sistema de notação, como o numérico, tentam compreender as relações entre os elementos do sistema e a maneira pela qual o sistema funciona, como sujeito conhecedor que cria e transforma a fim de aprender e

---

[5] Que, por sua vez, partilha destas mesmas concepções com Emilia Ferreiro e com Jean Piaget, conforme refere em seu livro *Desenvolvimento matemático na criança – explorando notações*, publicado pela Artmed, em 2006.

compreender, fazendo um esforço ativo e complexo para construir seus próprios entendimentos e suas próprias interpretações, sem aceitar passivamente as informações que recebe do seu meio. Para a autora, os sistemas escritos, dentre eles o sistema de numeração decimal, constituem objetos conceituais socialmente construídos pelas crianças com certas características e uma lógica que os caracteriza.

Diferentes interpretações para o papel desempenhado pelos sistemas simbólicos na aprendizagem matemática decorrem de diferentes posturas epistemológicas com as quais temos convivido há algum tempo. Entre elas, o empirismo, o construtivismo e teorias mais recentes que buscam novas interpretações para o processo de conhecimento. O *empirismo* considera aprendizagem a capacidade dos seres humanos de adquirir hábitos e de mudar comportamentos em função das pressões exercidas pelo meio externo, sem que seja necessário organizar internamente as experiências que se impõem por si sós, delegando ao sujeito um papel secundário no processo de aquisição do conhecimento. Aprender implica mudanças no comportamento em função das exigências externas. O *construtivismo,* embora não negue a importante influência da experiência e das estruturas inatas na aprendizagem, atribui a ela um caráter construtivo e às ações reflexivas dos sujeitos sobre os objetos do meio físico e social a responsabilidade pela construção das estruturas do conhecimento (PIAGET, 1973). Aprender, para os construtivistas, implica construção de estruturas cada vez mais amplas num processo equilibrado de síntese entre as experiências adquiridas e os mecanismos gerais do conhecimento. Delimitam-se, assim, duas tradições cognitivas diferentes: uma de natureza mecanicista e associacionista (representada atualmente pelo processamento da informação) e outra construtivista (representada pela teoria piagetiana). Mais recentemente convivemos com as contribuições de uma nova escola de pensadores: a ciência cognitiva. Fundamentada e muito influenciada pelos avanços na área da neurologia e do processamento de informação, a ciência cognitiva ganha força no final do séc. XX, mais especificamente na década de 80. É constituída por um grupo multidisciplinar de cientistas: filósofos, psicólogos, lingüistas, antropólogos, neurocientistas e pesquisadores da área de inteligência artificial, cujo elo articulador é a busca da compreensão de como o ser humano se apropria do conhecimento externo por processos de representação ligados a domínios específicos do conhecimento. Não se constitui numa corrente de pensamento unânime, mas mantém alguns pontos centrais de aproximação entre seus representantes, tais como o de que o conhecimento é representado pelo sujeito através de redes de informações, cuja origem está no meio.

Dentre as questões que emergem das discussões a respeito destes diferentes paradigmas que contribuem para a compreensão dos processos de aprendizagem dos sistemas notacionais estão as relativas ao conceito de representação. Estudos sobre a importância da representação na aprendizagem matemática têm sido desenvolvidos pela psicologia cognitiva e por educadores matemáticos com base em diferentes tendências teóricas, o que demonstra o interesse crescente e o reconhecimento da importância da representação na compreensão de como se processa a aprendizagem da matemática (VERGNAUD, 1985; KAPUT, 1994; VON GLASERSFELD, 1995; GOLDIN; KAPUT, 1996; CASTRO; CASTRO, 1997; RICO, CASTRO; ROMERO, 2000; DUVAL, 2003). Trata-se de um processo amplamente discutido e muitas são as interpretações dadas por tradições cognitivas diferentes. Estas vão desde interpretações das representações como homeomórficas à realidade, até interpretações construtivistas que consideram que o sujeito desempenha um papel muito ativo na construção das representações. Verifica-se que há consenso entre educadores matemáticos quanto ao importante papel que desempenham na aprendizagem da matemática e quanto à importância de incrementar os processos de ensino da disciplina com maior ênfase a recursos representacionais diversos, tais como esquemas, quadros, figuras, ilustrações, próprios de diferentes sistemas de representação (gráfico, numérico, algébrico), embora não haja unanimidade em relação ao significado do termo representação e à forma como atuam nos processos cognitivos. No entanto, como já referimos, muitas e diferentes são as interpretações para o termo “representação” e para a forma como a mesma atua na cognição humana, pelas diferentes teorias cognitivas e paradigmas teóricos.

Uma delimitação interessante é realizada por Font (2001), ao distinguir duas linhas de interpretação para as representações mentais do mundo real: a “representacional” e a “não-representacional”. A corrente representacional parte dos pressupostos de que existe um mundo exterior predefinido e de que nossa cognição apreende este mundo, mesmo que de forma parcial. A maneira de conhecer este mundo predefinido é representarmos seus traços mais característicos e depois atuarmos sobre a base destas representações. Considera as dualidades entre interno/externo e realidade/mente, ao considerar dois mundos diferentes: o mundo real dos objetos exteriores ao sujeito e o mundo mental do sujeito e ao pressupor que as pessoas possuem uma mente em que se produzem processos mentais e que os objetos externos às pessoas geram representações mentais internas. Relaciona-se com a metáfora do espelho. Supõe que existe uma série de objetos do mundo real que se refletem na mente das pessoas. Em outras palavras, os objetos externos às pessoas geram representações mentais internas.

A corrente "não-representacional", num sentido amplo, questiona as crenças representacionistas, argumentando que as pessoas constroem e modelam seu mundo de experiências conjuntamente com as outras pessoas. Utiliza a metáfora da construção. Assim, o mundo da experiência não está categorizado de antemão pela realidade, mas se categoriza de uma forma ou outra à medida que as pessoas falam, escrevem e discutem sobre ele. A hipótese básica da corrente representacional é a relação vertical que se estabelece entre os objetos de mundos diferentes, ou seja, entre a realidade exterior e a sua correspondente imagem mental. Esta hipótese, no entanto, é questionada pela corrente "não-representacional", para a qual todos os processos de representação atuam sobre experiências das pessoas e por representação se entende qualquer experiência, mental ou material "x" que representa a outra experiência "y", mental ou material (FONT, 2001).

O interesse das pesquisas sobre representações em Educação Matemática e sobre a sua importância no ensino, aprendizagem e comunicação matemática, justifica-se, pois representações são essenciais na matemática e fundamentais na expressão dos conceitos e leis matemáticas. Também devido ao fato de que desempenham um papel de destaque, uma vez que auxiliam os estudantes em seu processo de compreensão dos conceitos. Para pensar sobre idéias matemáticas e comunicá-las, afirmam Hiebert e Carpenter (1992) que os sujeitos precisam representá-las de algum modo e a comunicação requer que as representações sejam externas, na forma de linguagem oral, símbolos escritos, desenhos e objetos físicos, enquanto o pensamento sobre idéias matemáticas requer representações internas, de maneira que a mente possa operar sobre elas.

Embora muitos estudos considerem a dualidade interno/externo, distinguindo representações externas e internas, não há consenso quanto a este aspecto, uma vez que muitas são as questões ainda em aberto sobre o tema, levantadas por autores, tais como Kaput (1994), que expressa preocupações em relação a esta distinção: - O que queremos dizer quando dizemos que “representa” alguma coisa? Para quem? Como? Qual a diferença entre a experiência de uma representação interna e a de uma representação externa? A representação externa é um sistema constituído socialmente ou pessoalmente? A busca de respostas a estas questões envolve uma discussão ampla e exaustiva, ainda presente nos diferentes paradigmas teóricos, que extrapola os limites deste trabalho.

A seguir apresentamos alguns estudos que envolvem diferentes posicionamentos sobre representação, destacando, ao final, na ordem em que aparecem no texto, autores que assumem uma postura não-representacionalista, construtivista, a qual assumimos nesta pesquisa, tais como Piaget (1978a), Vergnaud (1985, 1996a), Von Glasersfeld (1995, 1996).

2.1.1 Sistemas de representação, representação e aprendizagem matemática

Piaget (1978a) assume uma posição de tradição semiótica em relação à representação, ao diferenciar significante e significado na formação do signo e ao defender que a representação começa quando há uma diferenciação e uma coordenação simultânea de significantes e significados. Entende que as atividades simbólicas são instrumentos para comunicar e expressar algo e derivam de uma função semiótica geral, caracterizada por estágios de desenvolvimento cognitivo que são instrumentos para comunicar e representar algo. Uma posição diferente é assumida por Karmiloff-Smith (1994) e por Tolchinsky (2002) em seus estudos sobre sistemas convencionais e conceitos relativos ao desenvolvimento dos sistemas externos de representação. Questionam uma possível dependência entre o notacional e o nocional e colocam em discussão a sua compreensão das notações, como uma especificidade de domínio. O modelo de Redescrição Representacional de Karmiloff-Smith (1994) propõe a existência de um processo endógeno, no qual a mente explora conhecimentos já armazenados, tanto inatos como por interação com o ambiente, representando recursivamente suas próprias representações internas, ou, em outras palavras, trabalhando internamente as representações já adquiridas. Esta seria a terceira via pela qual se explica a aquisição do conhecimento, sem a qual as outras duas não teriam sentido: a bagagem biológica inata e as novas representações adquiridas por interação ativa com pessoas, objetos e modelos.

Considera, assim, que nem os componentes inatos, nem os processos de aquisição por interação no ambiente podem explicar por si mesmos o conhecimento. As interações com o meio permitem o acréscimo de novas representações através de um processo de redescrição que envolve o trabalho interno sobre as representações já adquiridas. Apresenta argumentos favoráveis à existência de algumas predisposições inatas de domínio específico, mas não assume uma postura totalmente inatista, ao entender que o cérebro possui uma plasticidade muito maior do que os inatistas admitem.

A continuidade e a origem comum das formas de expressão simbólica, cuja evolução se dá a partir de mecanismos gerais de desenvolvimento, são questionadas por este modelo teórico. Tolchinsky e Karmiloff-Smith (1993) assumem uma posição contrária à posição semiótica, representada por Vygotski (1962), Bruner (1964) e Piaget (1978a), no que se refere à importância atribuída ao simbólico no desenvolvimento. Defendem que o notacional e o nocional são domínios diferenciados do conhecimento que requerem processos de aprendizagem especializados.

Karmiloff-Smith (1994) assume uma postura epistemológica que abarca aspectos do inatismo e do construtivismo, e propõe uma reconciliação entre os dois paradigmas. Adere à concepção epigenética e construtivista piagetiana sobre o processo de desenvolvimento, mas "[...] prescindindo de sua insistência sobre a generalidade de domínios em favor de um enfoque que dê mais peso à especificidade de domínios" (p. 29). Ainda em suas palavras:

> [...] é preciso conservar importantes aspectos da epistemologia de Piaget e que o desenvolvimento cognitivo é bastante mais que o simples desdobramento de um programa especificado geneticamente. Se quisermos compreender a mente humana, nosso foco de interesse deve estender-se muito mais além das especificações inatas. Os bebês e as crianças são construtores ativos de seu próprio conhecimento, e isto implica tanto a existência de restrições de domínio específico como de processos de domínio geral (KARMILOFF-SMITH, 1994, p. 29).

As críticas de Tolchinsky e Karmiloff-Smith (1993) à corrente semiótica decorrem da discordância em relação à posição por ela assumida de que a evolução das notações origina-se de mecanismos gerais do desenvolvimento cognitivo. Em outras palavras, em relação à posição semiótica de que todas as atividades simbólicas (linguagem, imagens mentais, gestos, notações) derivam de uma função semiótica geral e se desenvolvem a partir dela. A posição assumida por Karmiloff-Smith (1994) sustenta que a estrutura mental é rica, variada e especializada e evolui por mecanismos específicos de um determinado domínio de conhecimento. A posição de dependência do notacional ao nocional e as idéias de que o processo de aquisição de cada um dos sistemas de notação seria similar e explicar-se-ia por processos gerais do desenvolvimento também são questionadas. Argumenta que as produções espontâneas de notações pelas crianças antes do acesso aos sistemas de notação formais demonstram que a primeira infância não é um período não simbólico. Suas pesquisas mostram que desde cedo as crianças produzem formas gráficas distintas para desenhar, fazer números ou letras e não confundem desenho com notação, escritas com números ou desenho; em outras palavras, estabelecem distinções entre os domínios notacionais. Assume uma posição clara: a criança sabe sobre os sistemas e sobre suas qualidades formais ainda antes de haver aprendido a usá-los, o que leva a considerar que o notacional também é, em si mesmo, um domínio de conhecimento e não apenas um instrumento para representar conhecimento.

Apesar da precocidade do conhecimento das qualidades formais de um sistema, Tolchinsky e Karmiloff-Smith (1993) observam que as funções instrumentais de cada sistema tardam a ser resolvidas. Isto explica porque, embora reconheçam as características sintáticas do sistema, as crianças podem usá-las em funções que não são próprias, como, por exemplo, porque algumas recorrem a desenhos ou a escritas alfabéticas para comunicar quantidades, mesmo já reconhecendo as características próprias de cada um destes sistemas. Não interpretam isto como confusão entre sistemas, mas como aproveitamento de qualidades formais conhecidas para satisfazer funções representativas pouco claras, uma vez que as funções específicas de cada sistema não estão totalmente definidas. Entendem que o reconhecimento das regularidades sintáticas é apenas um dos aspectos do conhecimento notacional e não serve como único indicador do que pode saber uma criança sobre o uso desse sistema como instrumento de comunicação. Assim, as crianças podem reconhecer notações numéricas e não saber usá-las para comunicar quantidades. Isto não significa que, se a criança entende o conceito, saberá produzir, aceitar ou compreender a notação adequada.

Tolchinsky (2002, p.272) enfatiza que o notacional em si parece impor sua problemática, que deverá ser atendida como tal. A diferenciação entre os sistemas pode ser um ponto de partida do conhecimento sobre notações. Para passar do conhecimento das propriedades formais do sistema (propriedades internas do sistema, caracteres, sintaxe e semântica que permitem responder: o que é a escrita) às propriedades instrumentais (uso das notações para representar e comunicar conteúdos específicos que permitem responder: para que serve a escrita), é necessária a representação explícita deste conhecimento implícito. Para a autora, isto requer transformar estes aspectos em objetos de conhecimento para o sistema cognitivo, por um processo de redescrição representacional. A capacidade notacional é definida por Tolchinsky e Karmiloff-Smith (1993) como a capacidade de utilizar ferramentas para deixar marcas permanentes de atos intencionais. Trata-se de uma capacidade própria da espécie humana. Há algo na arquitetura da mente humana, afirmam as autoras, que torna crianças e adultos capazes de produzir notações externas, quer dizer, capazes de servir-se de instrumentos culturais para deixar uma marca intencional e permanente de suas ações comunicativas e cognitivas, característica esta não-compartilhada com outras espécies. O que diferencia o Homo sapiens de outras espécies não é a capacidade de computar ou utilizar ferramentas para resolver problemas, mas a capacidade de produzir um registro intencional do cálculo e utilizar ferramentas para registrar, ou seja, produzir notações.

Em síntese, as notações são entendidas por Tolchinsky e Karmiloff-Smith (1993) e Karmiloff-Smith (1994) como representações externas (incluem escrita, notações numéricas, desenhos, mapas e outras formas gráficas criadas intencionalmente), que têm uma existência independente de seu criador; têm uma existência material que garante a sua permanência e se constituem em sistemas organizados.

Duval (2003) defende uma abordagem cognitiva para analisar as condições e os problemas da aprendizagem em matemática que contemple, além dos conceitos e suas complexidades epistemológicas, aspectos que considera característicos da originalidade e da especificidade do funcionamento do pensamento matemático: as representações semióticas (produções constituídas pelo emprego de signos próprios de um sistema de representação com regras próprias) e a grande variedade destas representações (escritas algébricas e formais, figuras geométricas, gráficos cartesianos e língua natural) utilizadas em matemática. Propõe um modelo para descrever a aprendizagem da matemática que, no seu entendimento, não se atém aos modelos clássicos da psicologia cognitiva, nem aos modelos epistemológicos, uma vez que se volta para as condições específicas de acesso aos objetos matemáticos.

Os objetos matemáticos (números, funções, vetores, círculo) não são acessíveis pela percepção ou instrumentalmente e não devem ser confundidos com a sua representação. O acesso aos mesmos "[...] está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar" (DUVAL, 2003, p. 14), ou seja, passa pelas representações semióticas. Opõe-se à idéia de que as representações semióticas teriam meramente a função de comunicar as representações mentais. A seu ver, além das funções de comunicação, as representações seióticas assumem funções essenciais ao pensamento e sem elas seria impossível construir conhecimento. Denomina a apreensão ou a produção de uma representação semiótica de *semiósis*, e denomina *noésis* a apreensão conceitual de um objeto. Trata-se de processos inseparáveis, uma vez que, para que um objeto matemático seja compreendido, é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semiósis* (representações). Não há *noésis* sem *semiósis*: "[...]como não confundir o objeto matemático com sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?" (DUVAL, 2003, p. 21). A coordenação de vários registros permite a dissociação entre o objeto e suas representações. A atividade matemática mobiliza diferentes "registros" de representação que podem ser não-algoritmizáveis (como a língua natural e as figuras geométricas planas ou em perspectiva) ou algoritmizáveis (como os sistemas de escrita e os gráficos cartesianos) que, coordenados, promovem a compreensão. A compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas e implica a capacidade de mudar de registros de representação, uma vez que a passagem de um registro ao outro não somente muda o modo de tratamento, mas permite explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. São necessários muitos registros para que um objeto matemático não seja confundido com a sua representação, e é a articulação dos registros que constitui a condição de acesso à compreensão matemática e não o "enclausuramento" de cada registro, como fazem muitas abordagens didáticas. Assim, afirma Duval (2003, p.22) que "[...] o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado". A oposição feita entre a compreensão como algo conceitual ou mental e as representações semióticas como algo externo é enganadora, uma vez que "as representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas" (DUVAL, 2003, p.31).

Para este autor, muitos problemas da matemática advêm do fato de o ensino de matemática valorizar mais a *noésis* do que a *semiósis*, desconsiderando a importância da mobilização de diferentes e variados registros de representação semiótica na construção dos conceitos matemáticos.

A importância dos sistemas de representação e de modelos matemáticos na aprendizagem de estruturas numéricas também é destacada por Castro e Castro (1997). Representações e modelos servem para comunicar idéias matemáticas e intervêm na atividade de construção de novos conceitos. As representações constituem os diversos sistemas estruturados de signos que se utiliza como objetos matemáticos, para determinados conceitos matemáticos, e sempre ocorrem no interior das próprias matemáticas, mesmo quando os símbolos ou gráficos escolhidos procedam de outros campos. Podem ser notações e regras que expressam determinados aspectos e propriedades de um conceito, embora nenhum sistema de representação de um conceito esgote, por si só, o próprio conceito. Os modelos constituem formas de exemplificar os conceitos, tais como esquemas ou maquetes procedentes de um campo alheio às matemáticas, que servem para pensar sobre noções e propriedades matemáticas, pondo em conexão o campo das matemáticas com outros campos do conhecimento ou com um campo de fenômenos que não se consideram matemáticos. Podem ser esquemas ou materiais estruturados, conectados através de leis ou regras, tais como o material dourado ou os blocos multibase. Os autores defendem que representações e modelos são importantes no processo de ensino e aprendizagem da matemática, pois as representações oferecem signos ou figuras que atuam como expressões do conceito sobre as quais é possível manipular propriedades e operações matemáticas e os modelos esquematizam o uso da matemática para interpretar e predizer fenômenos do mundo físico que exemplificam os conceitos matemáticos. Neste sentido, representações e modelos são representações externas que têm um equivalente na mente do sujeito que os utiliza, ou seja, são representações mentais que se efetuam como uma interiorização das representações externas. Castro e Castro (1997) centram seus estudos na diversidade de modos de representação que envolvem o mesmo conceito matemático e na importância didática deste aspecto, uma vez que: - um mesmo conceito matemático pode ter uma diversidade de modos de representação; - os tipos de representação externa são fundamentais para a compreensão dos conceitos; - os processos de ensino criam problemas de compreensão dos conceitos devido ao manejo equivocado das diferentes formas de trabalhar com as representações: uso simultâneo ou descontrolado; - é fundamental que os professores conheçam e considerem as dificuldades que os alunos podem encontrar no manejo conjunto de vários sistemas de representação para um mesmo conceito; - é necessário ajudar o estudante a enriquecer o mundo de suas representações internas para que possa relacionar de forma eficaz os significados correspondentes aos objetos mentais que elabora e constrói.

Um importante papel é atribuído aos processos representativos na compreensão das estruturas numéricas por Rico, Castro e Romero (2000). Destacam dois aspectos: a pluralidade de sistemas de representação mediante a qual as estruturas numéricas se manifestam e a necessidade de contar com elas ao longo dos processos de aprendizagem destas estruturas. Entendem as representações matemáticas como ferramentas - signos ou gráficos - mediante as quais é possível relacionar-se com o conhecimento matemático. A seu ver as representações permitem conferir significados às estruturas matemáticas, uma vez que conectam os objetos mentais com os objetos matemáticos e são, portanto, fundamentais no processo de aprendizagem da matemática. Afirmam que a atuação coordenada de vários sistemas representacionais é essencial à compreensão dos conceitos numéricos, pois tornam claros aspectos essenciais das estruturas correspondentes aos conceitos. Em suas palavras, “[...] as representações gráficas desempenham um papel essencial para dotar de significado as estruturas numéricas” (RICO; CASTRO; ROMERO, 2000, p. 156). A aprendizagem das estruturas operatórias não pode se reduzir, afirmam tais autores, à automatização de regras, mas deve consistir na coordenação de diferentes sistemas de representação, nos quais as regras adquirem significado e os conceitos tornam-se precisos. Isto provoca conseqüências à forma como a matemática é ensinada nas escolas. Conforme tais autores, os currículos escolares de matemática não dispõem ainda de informações suficientes sobre os sistemas de representação adequados para as estruturas numéricas convencionais e suas funções cognitivas. Tampouco sobre as possibilidades de coordenação entre os sistemas, os conceitos e os procedimentos que surgem das coordenações entre os sistemas.

Uma significativa contribuição à compreensão do papel que os diferentes sistemas de representação desempenham na aprendizagem da matemática é dada por Goldin e Kaput (1996), num artigo em que buscam aproximações entre seus estudos e as teorias sobre o tema. As representações matemáticas dos indivíduos somente são possíveis, na concepção destes autores, se houver uma interação ou um ato de interpretação envolvido na relação entre o que está sendo representado e o que é representado. Dependem, portanto, de atos representacionais e somente são acessíveis a partir da sua exteriorização. As representações não acontecem isoladas para Goldin e Kaput (1996). Pertencem a sistemas estruturados que podem ser universais, provenientes da cultura, especializados e artificiais (notações matemáticas) ou idiossincráticos (simbolismos que emergem dos significados relacionados com a memória das pessoas). Configurações mentais de indivíduos são consideradas representações internas, não como o objeto direto da atividade introspectiva, mas como um construto, produzido pelo observador a partir da observação do comportamento (incluindo, claro, comportamento verbal e matemático). Ao contrário das representações externas, as representações internas não são diretamente observáveis, uma vez que são subjetivas e próprias do sujeito que as realiza. Neste sentido o acesso a estas representações torna-se quase impossível. Somente os próprios indivíduos têm acesso às suas próprias representações, embora muitos professores e investigadores tentem inferi-las e até mesmo planejem situações visando a que estudantes realizem as representações esperadas através de atividades pedagógicas. Podem ser exteriorizadas através de gestos, da linguagem, mas é somente a partir das exteriorizações que o professor poderá realizar inferências sobre as representações dos alunos.

As representações externas pertencem a sistemas estruturados e não são objetivas ou absolutas, o que lhes confere as características próprias de sistemas de representação externos, afirmam Goldin e Kaput (1996). Os sistemas de representação são definidos pelos autores como organizadores das experiências físicas e mentais dos indivíduos, usados de forma consciente ou não, dependendo do grau de experiências já realizadas. Assim, diferentes tipos de sistemas de representação sustentam e delimitam diferentes tipos de pensamento. Diferenciam sistemas de representações externas de sistemas de representações internas. As formas representativas comumente usadas no ensino da matemática seriam exemplos de sistemas de representações externas, uma vez que, juntamente com outros tipos de configurações observáveis, tais como palavras, quadros e gráficos, constituem-se em formas representativas acessíveis à observação de qualquer indivíduo. As representações externas, como um gráfico que representa uma determinada expressão simbólica, podem representar algo como a posição de um móvel em função do tempo. A relação representada, no entanto, não pré-existe na situação, mas envolve construções anteriores do sujeito que relaciona-se com elas através de atos de representação. As representações externas, portanto, são dependentes das representações internas dos indivíduos que fazem interpretações a partir delas. Não há, na visão de Goldin e Kaput (1996), um dualismo profundo entre representações externas e internas. A diferenciação entre representações internas e externas, advertem, não interfere na posição epistemológica construtivista que assumem, pois as representações cognitivas são internamente construídas pelos indivíduos. Argumentam também que um dos maiores desafios a serem enfrentados pelas teorias de aprendizagem é analisar o processo cognitivo, compreendendo as características das representações internas e externas e as maneiras como o processo representativo pode ser desencadeado nos estudantes.

As idéias de representação como estrutura conceitual isomorfa a uma parte da realidade e de que a atividade de conhecer deveria conduzir a uma verdadeira representação de um mundo que existe em si mesmo e por si só, independente do sujeito, são rejeitadas por Von Glasersfeld (1996), construtivista radical, que assume o conceito de representação de Piaget (1978a). No seu entender, a atividade de conhecer é própria do mundo experimental do sujeito e este é constituído e estruturado pelo próprio sujeito conhecedor que experiencia, relaciona, conceitua. É, portanto, um mundo subjetivo, e o ato de conhecer é um ato próprio do sujeito. Não nega, no entanto, a realidade exterior e tampouco o papel da interação social na construção do conhecimento, mas insiste na impossibilidade de entender a representação como cópia da realidade exterior. Para o autor,

> [...] a re-presentacão (com um hífen) é concebida como um ato mental que traz uma experiência anterior à consciência de um indivíduo. Mais especificamente, é a recordação do material figurativo que constituiu a experiência. Tal recordação não seria possível se a criação original da experiência não tivesse deixado algum rasto ou marca para guiar sua reconstrução (VON GLASERSFELD, 1995, p.165).

Considera que há diferenças entre os termos representação (sem hífen) e re-presentação (com hífen) que derivam da tradução equivocada do termo. A seu ver, o sentido que Kant atribuiu à palavra *Vorstellung*, na Crítica da Razão Pura, aproxima-se do sentido que atribui à representação, ou seja, como re-presentação. Este termo foi traduzido equivocadamente para o inglês, na concepção do autor, como *representation,* significando reprodução, cópia, ou outra estrutura isomorfa a um original. Deveria ter sido traduzido como *presentation*, que designa atuação, performance, no sentido do número de espetáculos que uma companhia teatral realiza num dia. O hífen, no termo re-presentação, realça o “re”, como idéia de repetição de algo que esteve presente no mundo experiencial do sujeito, num outro momento.

Von Glasersfeld (1995) atribui à re-presentação uma origem interna, semelhante à repetição e reconstrução de algo que foi experienciado noutra altura, mas enfatiza que se trata da repetição das experiências próprias do sujeito, e não de uma parte de um mundo independente e objetivo. Trata-se da recordação do material figurativo que constituiu a experiência. Ao representar uma idéia geral, para si mesmo, o sujeito transforma-a numa idéia particular, porque a sua implementação requer o tipo de material a partir do qual ela foi abstraída.

Há um isomorfismo entre a construção presente e aquilo que ela pretende re-presentar, que não diz respeito à coisa em si, mas àqueles aspectos de uma experiência passada que quer retomar, que é a base das representações (sem hífen), refere Von Glasersfeld (1996). Estas representações, que podem ser gráficas ou esquemáticas, fazem surgir no observador as formas de operar desejadas pelo seu autor. Assim, diante de uma notação numérica, o sujeito pode realizar inferências relativas ao seu significado, efetuando as operações necessárias para a compreensão do que o seu autor pretendia comunicar ao elaborá-la. O princípio fundamental de que deriva a maior parte das suas sugestões para o ensino, refere Von Glasersfeld (1995, p.305), é: “[...] os conceitos e as relações conceituais são estruturas mentais que não podem passar de uma mente para outra". Portanto, para este autor, a linguagem, por si só, não veicula o conhecimento. O significado das palavras do professor é interpretado pelos alunos de acordo com suas experiências individuais, o que faz com que as interpretações dos alunos provavelmente não coincidam com o significado que o professor pretende transmitir.

2.1.2 A representação na concepção piagetiana

A representação, para Piaget (1978a), não é considerada uma capacidade herdada ou adquirida de imediato, mas uma capacidade que tem uma origem construtiva, radicalmente diferente das concepções de representação empirista e inatista. O autor busca em sua teoria elementos que evidenciem a insuficiência das teses defendidas por estes paradigmas teóricos, contrapondo-se à concepção empirista, segundo a qual a representação é originada na imagem perceptiva, constituindo-se em um espelho ou cópia da realidade e à concepção inatista, para a qual a representação é entendida como uma capacidade inata, herdada pelo indivíduo, que se manifesta na experiência. A representação implica na própria capacidade de pensar, e esta, por sua vez, consiste em interligar significações: significantes e significados. "Quem diz representação, diz, conseqüentemente, reunião de um 'significante' que permite a evocação e de um 'significado' fornecido pelo pensamento" (PIAGET, 1978a, p. 345).

O termo representação possui, para Piaget (1978a, p. 86), dois sentidos muito diferentes: amplo e estrito. No sentido estrito a representação fica reduzida à imagem mental ou à recordação-imagem, isto é, à evocação simbólica das realidades ausentes; imagem entendida como cópia do objeto. É o que considera representação simbólica ou imaginada: símbolos e imagens simplesmente. É possível dizer que a visão empirista aproxima-se desse sentido de representação. No sentido amplo, a representação confunde-se com o próprio pensamento e não mais se apóia na inteligência sensório-motora (caracterizada por percepções e movimentos), mas em sistemas mentais ou sistemas de conceitos – cujo processo de formação estende-se pelo pré-conceito e pelas intuições até chegar à representação de ordem operatória. É o que considera representação operatória ou representação conceitual.

O conceito de representação de Piaget (1978a) vai além da recordação-imagem, da cópia e da bagagem hereditária. Implica os processos que envolvem a conceituação e a constituição de uma nova realidade no ato representativo, por meio de um movimento dialético de assimilações e acomodações realizadas pelo sujeito, nas quais ora predominam condutas simbólicas imitativas, ora predominam condutas simbólicas lúdicas. A evolução dessas condutas em direção ao equilíbrio entre assimilações e acomodações possibilita a constituição da função que denominou "representativa". É, portanto, um conceito mais amplo do que a idéia de simples evocação de algo. Embora não negue a importância da imagem e dos símbolos, não os concebe da mesma forma que o faz o empirismo e não os considera suficientes no ato representativo.

A representação sempre vem acrescida de transformações, o que envolve processos que vão além do simples "retrato" dessa realidade. Piaget (1978a, p.285-286) traz um exemplo esclarecedor neste sentido: Luciene, com 1 ano, 11 meses e 21 dias, algum tempo depois de ter vivenciado um acontecimento, repete para si mesma e para outros: "*Ti (= tia) Madena no automove, parti no automove*." Mais tarde, sozinha no jardim, repete para si mesma: *"Mamãe saiu, Jaqueline saiu com mamãe."* O exemplo mostra dois aspectos importantes: a capacidade de representação e o momento em que a linguagem deixa de acompanhar o ato em curso para reconstituir uma ação passada, o que constitui um início de representação. A palavra, nesse momento, passa a funcionar como evocação mental do ato, ou seja, como signo. O esquema verbal passa a exercer a função de reapresentação, isto é, de uma nova apresentação, afirma Piaget (1978a). Não se trata, portanto, de uma simples reprodução, mas da reprodução de algo que já passou por transformações internamente, no sujeito, e que se manifesta como nova "apresentação".

O nascimento da capacidade representativa depende de um jogo de significações que é produto, também, de um jogo de assimilações e acomodações que se desenvolvem ao longo de toda a primeira infância em direção ao equilíbrio cognitivo. O período sensório-motor caracteriza-se por uma intensa e dinâmica atividade assimiladora e acomodadora no que concerne à construção e consolidação dos esquemas de ação que permitem ao sujeito agir sobre o meio. Assim, ora a assimilação precede a acomodação, constituindo o *jogo* (como por exemplo, o ato de agarrar um objeto e divertir-se com ele, repetindo várias vezes a mesma situação), ora a acomodação precede a assimilação, constituindo o primado da imitação, isto é, a reprodução de ações ou sons (como, por exemplo, o ato de bater palmas reproduzindo as ações da mãe que a incentiva para tal). Há que considerar, no entanto, que a imitação, nesse período, acontece na presença do modelo. A evocação de imagem somente passará a acorrer no final do período sensório-motor, quando a imitação se tornar diferida, ou seja, quando começar a se interiorizar e se prolongar em representação.

“A representação começa quando os dados sensório-motores atuais são assimilados a elementos simplesmente evocados e não perceptíveis no momento considerado”, afirma Piaget (1978a, p. 351). Em outras palavras: “a representação nasce, portanto, da união de ‘significantes’ que permite evocar os objetos ausentes com um jogo de significação que os une aos elementos presentes” (PIAGET, 1978a, p. 351). Isso ocorre a partir do momento em que, progressivamente, cada objeto pode corresponder a uma imagem mental que permite evocar um objeto ausente. A função simbólica é o mecanismo que torna isso possível. Portanto, a função simbólica, também chamada por Piaget (1978a) de função semiótica ou representativa, utiliza dois instrumentos fundamentais: símbolos e signos. Os símbolos possuem uma relação de semelhança entre o objeto presente, que desempenha o papel de significante e o objeto ausente por ele significado simbolicamente. Os símbolos já envolvem atividade representativa, porque uma situação não dada pode ser evocada mentalmente. Os signos, por sua vez, são significantes arbitrários, convencionados ou socialmente impostos que pressupõem uma relação social. Para Piaget (1978a), um exemplo de signos coletivos que precisam ser aprendidos pelo sujeito é a linguagem.

Os progressos na representação conceitual são solidários com os progressos da linguagem (PIAGET, 1978a). Há, neste processo, conforme o autor, um duplo movimento, uma vez que no seu entender a linguagem permite a construção dos conceitos, tanto quanto a possibilidade de construir representações conceituais é uma condição necessária para a linguagem. Com a função simbólica, a apreensão de signos coletivos torna-se possível e, conseqüentemente, também a apropriação da linguagem, afirma Piaget. A linguagem está vinculada a sistemas de signos convencionais, fixados arbitrariamente por uma tradição lingüística na qual não há relação entre o significante e o significado. Entretanto, embora, a princípio, a linguagem esteja vinculada a realidades particulares, consiste na evocação desta realidade ou de uma imagem particular, o que faz com que a palavra ainda não atinja a generalidade necessária para ser considerada um conceito. Por exemplo, Mar, com 1 ano e 5 meses, dizia "*poti*" para indicar que queria ervilhas. A partir daí passou a usar "*poti*" para outros alimentos em grãos, como feijão, amendoim, durante algum tempo, até usar este termo somente para ervilhas e posteriormente substituí-lo por "*evila*". Piaget (1978a) apresenta o exemplo de Jaqueline que, com 1 ano e 1 mês, designa cães por "*au-au*", estendendo este termo para o cachorro do vizinho, depois para cavalos, galinhas, automóveis, etc., sendo que somente com 1 ano e 4 meses reserva o termo "*au-au*" somente para cães.

Crianças bem pequenas também manifestam esquemas verbais[6], ao utilizarem o nome de algum numeral para indicar qualquer quantidade. Por exemplo, ao aprender a dizer "teis" (três), usam este termo para qualquer quantidade de objetos. Os primeiros esquemas verbais, como os exemplificados há pouco, revelam uma transição entre os esquemas sensório-motores e os conceitos, por três razões: conservam as ações generalizáveis que se aplicam a numerosos objetos, já representam um desligamento em relação à ação em si e possuem um caráter de comunicação. Permanecem intermediários entre o símbolo individual e o signo, que é eminentemente social. Podemos inferir, portanto, que, numa perspectiva piagetiana, tanto a contagem recitativa do número como os grafismos das crianças contribuem para a construção do conceito de número, da mesma forma que o número operatório possibilita à criança progressos representativos evidentes nos grafismos e nas expressões verbais relativas aos conceitos matemáticos.

A linguagem é ligada inicialmente ao presente e ao ato imediato, para Piaget (1978a). Manifesta-se através de ordens e expressões de desejo e gradativamente constitui os primeiros esquemas verbais que, por sua vez, evoluem para narrativas, através das quais reconstroem ações atuais e ações passadas, o que já implica representações. A palavra, nesse período, já funciona como signo, mas expressa pré-conceitos. Os pré-conceitos oscilam entre a particularidade e a generalidade. Piaget (1978a, p. 289) relata que num passeio matinal com Jaqueline, aos 2 anos e 6 meses, a menina designa pelo termo "*a lesma*" todas as lesmas que vê pelo caminho. Aos 2 anos e 7 meses, a menina exclama: "Olhe ela ali!", quando vê uma

---

[6]"[...] esses primeiros esquemas verbais são intermediários entre os esquemas da inteligência sensório-motora e os esquemas conceptuais, tal como os esquemas simbólicos são intermediários entre os jogos de exercícios e os símbolos lúdicos desligados da própria ação e como a imitação diferida é intermediária entre a imitação sensório motora e a imitação representativa" (PIAGET, 1978a, p. 280-281).

lesma e dez metros adiante, diz: “Olhe outra vez a lesma!”. Portanto, para Jaqueline, “*a lesma*” é sempre a mesma lesma, o que revela que ainda não construiu o essencial de um conceito: a possibilidade de incluir o indivíduo “lesma” numa classe genérica e ampla denominada “lesma” ou “lesmas”.

No que se refere à linguagem matemática, inicialmente as quantidades são expressas pelas crianças por gestos, e pelo nome dos números, nem sempre mantendo uma relação correta entre o nome falado e a quantidade de objetos a ser comunicada, ou seja, entre os esquemas verbais numéricos e o número. Numa perspectiva piagetiana, podemos considerar que os primeiros esquemas verbais das crianças relativos à matemática referem o nome dos números ou palavras-número, tais como um, dois, três, quatro e assim por diante, geralmente ditas a partir dos estímulos dos pais, para que digam quantos anos têm, mostrando os dedinhos, de situações de contagem de objetos, ao subir escadas ou cantar. Inicialmente trata-se de condutas que não vinculam conceitos propriamente ditos, mas pré-conceitos, uma vez que não mantêm vínculos com as quantidades que representam. Oscilam entre a particularidade e a generalidade, ou seja, são usadas em diferentes situações, nem sempre ligadas à ação de quantificar objetos e nem sempre fazendo corresponder fielmente as quantidades às palavras usadas. Nesta fase a criança ainda não compreende que o signo “cinco” ou *“5”* implica uma totalidade composta por 5 objetos, de tal forma que $5 > 4 > 3 > 2 > 1$. Assim, a palavra “cinco” pode ser usada para indicar qualquer quantidade. A palavra “cinco” ainda expressa pré-conceitos. A contagem operatória que implica a síntese entre as relações de ordem e a classe, ou seja, no conceito de número operatório, é construída pela criança posteriormente.

No período sensório-motor não existem signos, mas um sistema precário de significações, constituído pelos indícios ou sinais que consistem em dados sensíveis, ligados à percepção direta, como, por exemplo: a porta que se abre anuncia a presença de alguém. Trata-se de um sistema precário, porque embora haja uma significação, o significante e o significado permanecem indiferenciados. Quando as imagens passam a ser interiorizadas, com o princípio da imitação diferida, as imagens perceptivas tornam-se simbólicas. Significante e significado diferenciam-se progressivamente, a partir daí, porque as condutas passam a ser relativas aos objetos ausentes. É justamente com a interiorização da imitação que as imagens se elaboram, substituindo os objetos presentes, o significante é dissociado do significado e o pensamento se torna representativo.

A criança pré-operatória depende ainda do intercâmbio com os objetos no processo de construção dos conhecimentos. A futura possibilidade de coordenação das ações que exerce sobre os objetos é a fonte dos conhecimentos. Nesse período, no entanto, a percepção ainda exerce um importante papel no processo de interação das crianças com os objetos, uma vez que a criança ainda não possui os recursos operatórios que os conceitos exigem. No período operatório-concreto, o pensamento da criança adquire a capacidade operatória, o que possibilita inúmeras transformações e possibilidades ao seu pensamento. Este fato traz progressos à capacidade representativa da criança.

A capacidade representativa do sujeito, para Piaget, não acontece de imediato. A origem da representação está justamente na função simbólica que é construída pelo sujeito gradativamente, no prolongamento do período sensório-motor. A função simbólica caracteriza-se pelo conjunto de condutas que possibilitam a evocação representativa de um objeto ou de um acontecimento ausente pela criança e se manifesta por volta dos 18 meses. A partir daí evolui gradativamente, passando por uma fase pré-conceitual e, finalmente, tornando-se representação cognitiva no período operatório-concreto, quando o sujeito constrói totalidades operatórias.

A imagem, para Piaget, também não é meramente um retrato da realidade, mas uma ação interiorizada pelo sujeito e constitui-se pela união de significante e de significado; é essa união que possibilita o pensamento. A imagem é um dos meios através do qual a capacidade representativa do sujeito se manifesta, juntamente com a linguagem, a imitação diferida, o desenho e o jogo simbólico. Há representação, quando há imitação de um modelo ausente ou de uma ação já vivenciada pelo sujeito, ou seja, quando há função simbólica.

Piaget e Inhelder (1977) são bastante incisivos ao referirem-se ao papel que a imagem mental desempenha no processo de representação. Muito embora desempenhe um papel na construção das significações, a imagem não veicula o significado em si, uma vez que o significado efetivo do objeto ou da realidade só se encontra no conceito. Ou seja, o objeto só é conhecido, quando conceitualizado em graus diversos. Não negam o fato de que a imagem é sempre o produto dum esforço de cópia concreta do objeto, mas, da mesma forma que o fazem para a representação, contestam a concepção de imagem mental como cópia da realidade ou do objeto, própria das teorias empiristas/associacionistas. A seu ver, a cópia, neste caso, permanece fundamentalmente simbólica e não atinge o conceito.

Como referimos, Piaget se opõe à visão de imagem mental do empirismo associacionista. Para esta corrente teórica, a imagem e as associações desempenham um papel essencial no pensamento, uma vez que o próprio pensamento é entendido como um sistema de associações entre imagens. A imagem mental é considerada uma cópia do objeto e dos acontecimentos, produto direto da percepção e da sensação. Este entendimento é considerado equivocado por Piaget e Inhelder (1977), que se opõem à idéia da imagem e também do conhecimento como cópia. Argumentam que se o conhecimento for cópia, suas origens devem ser buscadas nas propriedades dos objetos como tais, mas, a seu ver, o objeto é apenas um instantâneo recortado no fluxo contínuo entre relações de causalidade e o real. O real consiste num sistema de transformações não passíveis de serem copiadas, mas assimiladas pelo sujeito. Ao assimilar o real às suas estruturas, o sujeito reproduz ativamente estas transformações e prolonga-as, arriscando-se assim a não atingir todas as propriedades do objeto. Conhecer o objeto, para Piaget, é agir sobre ele de maneira a decompô-lo e a recompô-lo. A imagem não é um derivado da percepção pura, mas o produto de uma acomodação imitativa. Embora não deixe de ser sempre o produto dum esforço de cópia concreta do objeto, vai além disto, uma vez que esta cópia permanece fundamentalmente simbólica diante do fato de que o significado efetivo só se encontra no conceito. A imagem adquire o estatuto de símbolo e sua constituição está ligada ao surgimento da função simbólica.

A função simbólica e, conseqüentemente, a imagem, na concepção de Piaget, não aparece de imediato. Deriva da acomodação dos esquemas sensório-motores até então manifestados em imitações exteriores e progressivamente interiorizadas. Piaget (1978a, p. 354) diz que a imagem "é ao mesmo tempo imitação sensório-motora interiorizada e bosquejo de imitações representativas." É, nas palavras de Piaget (1978a, p. 354), "uma parte integrante do processo de acomodação imitativa." No período sensório-motor, a imitação caracteriza-se por consistir em uma espécie de representação atual e em ação, diretamente vinculada ao modelo. Já no período representativo, a imitação torna-se "diferida", não mais necessitando da presença do modelo. A imitação assegura a transição entre o período sensório-motor e o representativo, uma vez que inicialmente constitui-se em atos e posteriormente interioriza-se em imagens mentais.

O aparecimento das imagens está ligado ao surgimento da função simbólica, uma vez que as condutas observadas em relação ao objeto permanente, ao espaço sensório-motor, à causalidade, etc. não necessitam da imagem antes do nível de aquisição da linguagem, do jogo simbólico e da imitação diferida. Portanto, a capacidade de constituir imagens nasce da diferenciação entre significante e significado no momento da constituição da função simbólica que emerge do período sensório-motor e, na qualidade de imitação diferida e interiorizada.

É importante salientar que na concepção piagetiana a imagem não é condição suficiente para a construção do conhecimento matemático. Se fosse assim, crianças pequenas não teriam problemas com a conservação de quantidades discretas, por exemplo. Sabemos que diante de cinco botões enfileirados azuis e cinco botões vermelhos enfileirados abaixo, mais espaçadamente, de modo a não manter uma correspondência espacial com os anteriores, crianças não conservadoras deixam-se enganar pela imagem perceptiva, afirmando que há mais botões vermelhos do que azuis. A conservação pressupõe um sistema de compensações quantitativas que a imagem é incapaz de atingir. Faz-se necessário um quadro lógico-matemático que recaia sobre a imagem, permitindo antecipações objetivas e conclusões razoáveis frente às situações. "Se [...] imagem é uma imitação interiorizada, o sujeito imita em regra geral apenas o que compreende ou o que está em via de compreender, o que subordina já a imitação ao funcionamento da inteligência" (PIAGET; INHELDER, 1977, p.25). A imagem desempenha um papel importante, uma vez que facilita a antecipação figural das transformações e constitui um auxiliar indispensável ao funcionamento do pensamento no seu dinamismo. Mas este papel está subordinado a este dinamismo operatório que a imagem não pode substituir e do qual ela é uma expressão simbólica que, conforme o caso, aproxima-se mais ou menos do real (PIAGET; INHELDER, 1977).

A distinção que Piaget e Inhelder (1977) fazem entre os aspectos figurativos e operativos do conhecimento contribui para compreender melhor esta questão. Os primeiros relacionam-se à percepção, à imitação em sentido amplo e à imagem mental, enquanto os segundos relacionam-se às ações sensório-motoras e interiorizadas e às operações. Os primeiros (figurativos) incidem sobre os estados da realidade, enquanto os segundos (operativos) incidem sobre as transformações. O pensamento evolui em direção a uma colaboração cada vez mais estreita entre estes aspectos: de uma fase inicial em que predominam as configurações e as representações imagéticas para uma fase marcada pelos progressos da operatividade, provocando assim uma separação gradual em relação aos aspectos figurativos. Nos níveis pré-operatórios as imagens são estáticas e incapazes de representar movimentos e transformações, mesmo só nos seus resultados. Do mesmo modo são incapazes de antecipar os processos familiarmente conhecidos. Nos níveis operatórios inicia uma capacidade de antecipação imagética que permite a reconstituição dos processos cinéticos ou de transformação e mesmo a previsão de seqüências novas e simples.

Piaget (1978a) esclarece que o pré-conceito implica a imagem e é em parte determinado por ela. Já o conceito se liberta da imagem, porque implica generalidade. No conceito há inclusão de um objeto numa classe e de uma classe numa outra. As imagens, nos níveis operatórios, passam a ser subordinadas às operações. A reversibilidade própria desta fase e o equilíbrio da assimilação e acomodação imitadora não mais permitem que o pensamento se prenda às imagens de estados isolados e estáticos, mas às transformações. As imagens passam a exercer uma função de ilustração. Permitem que o sujeito se liberte progressivamente da necessidade concreta dos objetos, uma vez que a atividade representativa torna possível o pensamento sobre imagens.

Podemos inferir, a partir de sua teoria, que as primeiras notações numéricas das crianças (SASTRE; MORENO, 1976; SINCLAIR, 1989; DANYLUK, 1998), numa concepção piagetiana, consistiriam inicialmente em símbolos expressos em forma de desenhos, de risquinhos, palitinhos, bolinhas, letras, entre outros. Por exemplo, para representar 4 balas desenham grafismos quaisquer, misturam letras com números e formas. Tratar-se-ia de um ato imitativo de escrita que evolui gradativamente, revelando avanços em direção à conceituação no que diz respeito a manter uma correspondência entre a grafia e a quantidade. Os grafismos, no entanto, possuiriam inicialmente um caráter simbólico, uma vez que, embora mantivessem vínculos com a quantidade a ser representada (correspondência termo a termo) entre as notações e a quantidade de objetos, ainda não se desprenderiam dos objetos propriamente ditos nos atos de representação. Por exemplo, para indicar 5 lápis, as crianças desenhariam lápis; para indicar 6 flores, desenham flores. Estas escritas evoluiriam ainda mais, quando deixassem de manter um vínculo necessário com os objetos representados, ou seja, quando passassem a indicar as quantidades com sinais que não mantivessem vínculos com os objetos. Assim, para indicar 6 flores, as crianças passariam a usar traços no lugar do desenho das flores. Finalmente, as escritas tornar-se-iam convencionais. Gradativamente evoluiriam para um caráter de signo, devido à tomada de consciência da criança da necessidade de usar grafias-padrão, convencionais, para expressar as quantidades. Nesta fase, os vínculos com os conceitos já começariam a existir. Por exemplo: para representar 5 balas seria possível desenhar 5 balas, ou 5 tracinhos, ou os algarismos 1, 1, 1, 1, 1, ou os algarismos 1, 2, 3, 4, 5. Finalmente seria possível utilizar unicamente o algarismo 5 na forma de um signo.

Verifica-se que as notações numéricas, numa perspectiva piagetiana, seriam derivadas de construções simbólicas individuais que, aos poucos, se aproximam dos signos coletivos. Há um processo de apropriação do signo, portanto, que evolui de significações próprias para os significantes coletivos que envolvem conceitos. O conceito é geral e comunicável e supõe uma definição fixa que corresponde a uma convenção estável que atribui significação ao signo verbal. Nesta fase, as notações possuem um caráter de signo, uma vez que deixam de ser formas pessoais de expressão para tornarem-se formas coletivas, socialmente aceitas e usadas.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, mais especificamente na segunda série, os professores trabalham com materiais concretos, tais como o ábaco e o material dourado para ensinar a noção de unidade, dezena e centena, ou seja, para familiarizar os alunos com a organização e as propriedades do sistema de numeração decimal. Geralmente estes materiais são usados para demonstrar ao aluno estas propriedades, uma vez que o professor “mostra” que 10 cubinhos equivalem a uma barra; 10 barras, por sua vez, equivalem a 1 placa e dez placas equivalem a 1 cubo. Ou seja, que 10 unidades equivalem a uma dezena, dez dezenas equivalem a 1 centena e 10 centenas equivalem a um milhar. A mesma idéia é trabalhada com outros materiais mais acessíveis, mas que possuem a mesma estrutura lógica. Por exemplo, 10 palitos brancos equivalem a 1 vermelho, 10 vermelhos a 1 verde e assim sucessivamente.

A lógica posicional da base dez não é facilmente compreendida pelas crianças, “visualizando” os materiais. A percepção não é suficiente para garantir que a criança possa realizar as mesmas transformações no domínio das imagens mentais. A construção do valor posicional, conceito fundamental na estruturação do sistema de numeração decimal, requer as capacidades de antecipação imagética, de reconstituição e transformação próprias do período operatório, referidas acima, que não são garantidas apenas pela visualização dos objetos ou das ações realizadas sobre eles. A este respeito fazemos duas considerações. A primeira refere-se ao processo de construção do conhecimento na ótica piagetiana: o conhecimento matemático é construído a partir da coordenação das ações realizadas pelo sujeito sobre os objetos, por processos de abstração reflexionante. Para tal o aluno precisa interagir com os objetos a partir de situações problematizadoras que o levem a refletir sobre as propriedades dos objetos e sobre as ações que realiza sobre eles. A segunda retoma o processo de formação das imagens mentais estudado por Piaget e Inhelder (1977). Os autores tornam claro que as imagens de reprodução cinética ou de transformação são tardias e necessitam de um quadro de antecipação prévio. Para imaginar um movimento ou uma transformação é preciso reconstituí-los por um processo idêntico à antecipação que permita a representação de um movimento ou de uma transformação ainda não conhecidos. A própria imagem antecipadora só consegue formar-se com a ajuda das operações e revela-se indispensável para a reconstituição representativa dos movimentos e das transformações já conhecidos do sujeito.

Piaget e Inhelder (1977) enfatizam: um quadro operatório de natureza lógico-matemática é necessário para a interpretação nocional do dado perceptivo e para a sua evocação através da imagem. Mas, se de um lado as imagens por si só são insuficientes para o desenvolvimento do pensamento, de outro este não é possível sem a contribuição das imagens. Por exemplo, o sistema coletivo de signos (linguagem) é insuficiente para prestar todos os serviços que a função semiótica exige e deve ser completado por um sistema de símbolos imagéticos. Piaget e Inhelder (1977) justificam esta afirmação com dois argumentos:

- os signos são sempre sociais e há um grande número de experiências individuais em que a linguagem é precária, porque é demasiado abstrata, na medida em que é comum a todos os indivíduos. Por esta razão, o indivíduo concretiza o sentido das palavras que emprega através dum sistema de imagens individuais;

- a linguagem só designa, no domínio cognitivo, conceitos (classes, relações, números) ou indivíduos. Existe um imenso domínio que a linguagem por si só é incapaz de descrever: o do que foi percepcionado no meio exterior e nas ações e que é necessário conservar para poder comunicar a alguém. Se quisermos evocar o que foi percebido, precisamos, além do sistema dos signos verbais, de um sistema de símbolos imagéticos, pois não poderíamos pensar sem instrumentos semióticos: a imagem é, portanto, um símbolo.

Já se sabe, através de pesquisas realizadas por Sinclair (1989), Danyluk (1998), Lerner e Sadovsky (1996), Nunes e Bryant (1997), que a criança apreende as escritas numéricas a partir de hipóteses que constrói sobre elas, e não como reprodução ou cópia sistemática destas escritas. Em Agranionih (2003), já referíamos que, embora as escritas numéricas constituam-se em signos, ou seja, em um sistema notacional convencional que precisa ser apropriado pelo sujeito, podemos inferir que os signos são fundamentais ao processo de construção da capacidade representativa e do próprio conhecimento e não se tornam possíveis sem o apoio de instrumentos semióticos. Por exemplo: a notação 20 036 constitui-se, para a criança, num determinado momento, em um símbolo para o número duzentos e trinta e seis, cujo signo convencional é 236, ainda não construído por ela. Isto evidencia que a apropriação da escrita numérica implica um processo representativo que é construtivo. Os signos são fundamentais ao processo de construção da capacidade representativa e do próprio conhecimento. Em diferentes momentos Piaget a isso se refere: “Ora, só a assimilação generalizadora levará ao conceito, por intermédio do signo, ou seja, mediante o intercâmbio social [...]” (1978a, p. 131), “Chegamos pois à representação cognitiva, [...] caracterizada por uma busca de equilíbrio entre a assimilação e a acomodação e favorecida, por outro lado, pelo apoio dos significantes coletivos que são os signos [...]” (PIAGET, 1978a, p. 357).

2.2 CONCEITOS E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

2.2.1 A teoria dos campos conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996a) traz uma importante contribuição para esclarecer as relações entre conceitos e notações na aprendizagem da matemática. Para o autor “não se pode teorizar sobre a aprendizagem da matemática, nem exclusivamente a partir do simbolismo, nem apenas a partir das situações. É necessário considerar o sentido das situações e dos símbolos” (p.189). Para tal, é fundamental estar atento às ações do sujeito em situação e à organização da sua conduta, ou, em outras palavras, aos esquemas que utiliza. O sentido é, para o autor, uma relação do sujeito com as situações e os significantes, ou seja, os esquemas por eles evocados.

> São as situações que dão sentido aos conceitos matemáticos, mas o sentido não está nas próprias situações. Também não está nas palavras nem nos símbolos matemáticos. [...] são os esquemas evocados, no sujeito individual, por uma situação ou um significante que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse individuo (VERGNAUD, 1996a, p. 179).

Como exemplo, Vergnaud (1996a) refere o sentido da adição para um sujeito individual: é o conjunto dos esquemas que ele pode pôr em prática ao se deparar com situações de adição e o conjunto de esquemas que pode pôr em prática para operar sobre símbolos que representam a adição (que podem ser numéricos, algébricos, gráficos e a linguagem). Assim, o conceito é a combinação de três conjuntos interdependentes que interagem simultaneamente: (S) situações; (I) significados e (R) significantes, onde: **S** é um conjunto de situações que formam o referente do conceito e dão sentido ao conceito; **I** é um conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, que constituem o significado do conceito e que permitem ao sujeito analisar e dominar as situações envolvidas no conceito; **R** é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc) que compõem o significante do conceito e que servem para representar de forma explícita os invariantes operatórios. Todos fazem parte do processo e não podem ser considerados isoladamente no estudo do desenvolvimento ou do funcionamento dos conceitos.

O sujeito constrói conceitos ao enfrentar-se com situações[7]. As situações dão sentido ao conceito através dos problemas a resolver, tanto práticos quanto teóricos e constituem a referência das propriedades dos conceitos. Vergnaud (1996a, p.156)

[7] Vergnaud (1996a) observa que o seu conceito de situações difere do conceito de situações didáticas de Guy Brousseau, uma vez que esta última envolve situações dramáticas e afetivas além das cognitivas. O conceito de situação de Vergnaud envolve processos cognitivos e respostas do sujeito em função das situações com as quais é confrontado.

distingue dois tipos de situações possíveis: aquelas em que o sujeito dispõe das competências necessárias ao tratamento da situação e envolvem condutas automatizadas, organizadas através de um esquema único; aquelas em que, por não dispor de competências, o sujeito se vê obrigado a refletir, explorar, tentar, enfrentar, eventualmente, fracassos ou êxitos, num verdadeiro processo de construção de idéias que conduz, ou ao êxito ou ao fracasso, desencadeando diversos esquemas sucessivamente – processo acompanhado de descobertas, uma vez que os esquemas devem ser acomodados.

O conceito de situação de Vergnaud (1996a, p. 171) envolve as idéias de variedade e de história. Há uma variedade de situações que geram sistematicamente classes possíveis e os conhecimentos dos alunos são resultantes de situações já vivenciadas e dominadas pelos sujeitos (idéia de variedade). Os conhecimentos dos alunos são formados pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e pelas situações com as quais eles se depararam e dominam progressivamente, entre elas, os procedimentos que pretendemos ensinar aos alunos (idéia de história).

O significado do conceito deve-se às invariantes que possibilitam a operacionalidade dos esquemas, ou seja, aos teoremas-em-ato e conceitos-em-ação que organizam as ações do sujeito. A noção de esquema é fundamental na teoria, uma vez que, no seu entender, "é nos esquemas que se tem de procurar [...] os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória" (VERGNAUD, 1996a, p. 157).

Existem várias definições para a palavra "esquema", em função das diferentes teorias que buscam explicar o processo de conceitualização. Para a Epistemologia Genética, o esquema refere-se aos elementos comuns ou ao que é generalizável numa determinada ação. Vergnaud (l993, p.11) refere que o conceito de "esquema" não se constitui em algo simples, devido à diversidade de significações com que a palavra é empregada. Inspira-se na Epistemologia Genética para definir "esquema", como "a organização invariante da conduta para uma classe de situações dadas" (Vergnaud, l996a, p.157), ou, em outras palavras, como "totalidade dinâmica organizadora da ação do sujeito para uma classe de situações especificadas" (VERGNAUD, 1996a, p.162). O "esquema" refere-se diretamente às ferramentas que definem as condutas do sujeito diante de situações-problema, podendo assumir tanto uma função organizadora quanto uma função geradora de ações direcionadas a um determinado fim. Por se tratar de uma totalidade organizada, composta por elementos que lhe conferem funcionalidade, o esquema torna possível a adaptação das ações do sujeito às características particulares de cada uma das situações da classe à qual ele se aplica.

Os elementos que compõem um esquema de ação são: invariantes operatórias, inferências ou raciocínios, regras de ação e antecipações ou predições. As invariantes operatórias são o que podemos chamar de “conteúdo” do esquema ou conhecimentos nele contido, que lhe permitem funcionar em situações variáveis. Vergnaud (1993, p.78) caracteriza-as como “instrumentos de conceitualização de situações de referência do domínio considerado” ou, com palavras mais simples, como elementos que “[...] pilotam o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes à situação e a tomada de informação sobre a situação a tratar” (VERGNAUD, 1996a, p.180).

São de três tipos lógicos:

- teoremas-em-ato: são invariantes operatórios do tipo “proposições”, uma vez que envolvem duas variáveis unidas por uma relação lógica. Exemplos: as ações dos alunos ao resolver uma equação do tipo **ax** + **b** = **c** revelam uma organização invariante que tem como pano de fundo teoremas como: “conserva-se a igualdade subtraindo **b** dos dois lados” ou “conserva-se a igualdade dividindo por **a** os dois lados”; a ação das crianças de contar na seqüência para determinar uma determinada soma também é devida a um teorema-em-ato: Card $(A \cup B)$ = Card (A) + Card (B) contanto que $A \cap B = \varnothing$
- conceitos-em-ato: são invariantes operatórias de um tipo lógico diferente das proposições; são “funções proposicionais”; não envolvem uma relação entre duas variáveis e raramente são explicitadas pelo sujeito, mesmo quando construídas em ação. Por exemplo, o conceito de cardinal é um conceito-em-ato para o esquema de enumeração;
- argumentos: são elementos tomados para expressar as idéias matemáticas. Podem ser objetos materiais, personagens, números, relações, e mesmo proposições. Por exemplo: letras como a,b,c, contas como 4 + 4 = 8, expressões como maior que ou menor que, afirmações tais como 8 é um divisor de 24 e a recíproca, 24 é múltiplo de 8, podem ser proposições, como é o caso do último exemplo, e funções proposicionais, sendo que estas podem se transformar em argumentos.

É importante salientar que há uma relação dialética entre os elementos que compõem as invariantes operatórias. Na visão de Vergnaud (1996a, p.164), “não há proposição sem funções proposicionais e não há função proposicional sem proposições”, e “quem diz função proposicional diz argumento”, o que permite entender que conceitos-em-ato, teoremas-em-ato e argumentos são elementos interdependentes, que se constroem em estreita relação. Um esquema pode engendrar vários teoremas-em-ato e conceitos-em-ato, da mesma forma que o próprio teorema-em-ato pode consistir num esquema. Um conceito-em-ato poderá tomar a forma de um teorema-em-ato e este constituir-se num argumento.

Outro aspecto importante a salientar é que os teoremas-em-ato não se constituem num teorema, da mesma forma que um conceito-em-ato não se constitui num conceito. Os primeiros podem ser verdadeiros ou falsos, enquanto os segundos podem ser adequados ou não a uma determinada situação. É possível dizer que consistem em conhecimentos implícitos nas ações, em saberes em andamento ou provisórios, que poderão tornar-se verdadeiros teoremas ou conceitos. Vergnaud (l996a, p.165) deixa claro que

> na ciência, conceitos e teoremas são explícitos e pode-se discutir a respeito de sua pertinência e de sua verdade. Não é necessariamente o caso para as invariantes operatórias. Conceitos e teoremas explícitos não formam senão a parte visível do iceberg da conceptualização: sem a parte oculta formada pelas invariantes operatórias, esta parte visível não seria nada. Reciprocamente não se sabe falar das invariantes operatórias integradas nos esquemas senão com a ajuda das categorias do conhecimento explícito: proposições, funções proposicionais, objetos-argumentos.

Os esquemas também são compostos por inferências ou raciocínios. Para Vergnaud (1996a), as inferências são indispensáveis ao funcionamento do esquema em cada situação particular. São elas que permitem ‘calcular’ as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórias de que dispõe o sujeito. Podem tomar a forma de operações a partir de informações recebidas pelas situações e a partir das qualidades operatórias dos invariantes (VERGNAUD, 1993, p.78).

As regras de ação permitem decidir sobre as ações a serem postas em prática e que, ao mesmo tempo, resultam das inferências. São elas que engendram o seguimento das ações. São do tipo “se...então...” e permitem gerar a seqüência das ações do sujeito. As antecipações e predições também resultam das inferências ou raciocínios. Dizem respeito ao efeito que desejamos obter. São antecipações do fim a atingir, dos efeitos a esperar e das etapas intermediárias eventuais (VERGNAUD, 1993, 1996a).

O conjunto dos significantes, ou seja, simbolismo e linguagem, permite representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos. “[...] não se poderá falar de conceito na ausência de um significante: sem termos da linguagem natural ou sem significantes emprestados de qualquer outro sistema simbólico, não há conceito [...]” (VERGNAUD, 1985, p. 246). O simbolismo matemático contribui significativamente para a conceitualização, à medida que oportuniza a transformação das categorias de pensamento matemático em objetos matemáticos. No entanto, para Vergnaud (1996a), não é considerado condição necessária nem suficiente para a conceitualização, pois, no seu entender, é a ação do sujeito em situação que constitui a fonte e o critério da conceitualização. Para compreender melhor o papel dos significantes na construção dos conceitos matemáticos, é necessário compreender o papel atribuído pelo autor à representação.

Vergnaud (1985) propõe uma teoria operatória da representação. Considera o conceito de representação essencial para analisar a formação dos conhecimentos operatórios, os processos de transmissão do conhecimento, a formação de concepções e competências. A representação, na perspectiva do autor, envolve os diferentes sistemas de significantes (linguagem, gestos, desenhos, esquemas, tabelas, álgebras, etc.) e os diferentes componentes do significado (esquemas, ou seja, invariantes, inferências, regras de ação, predições). O seu núcleo “sólido”, no entanto, é constituído pelos invariantes operatórios. Sem eles as inferências, as regras de ação, as predições e os significantes não têm sentido. Os esquemas formam, no plano do significado, a articulação indispensável entre as situações de referência e os significantes simbólicos. Atribui à representação um caráter funcional e a função de conceituar o real para agir eficazmente. Assim, considera necessário analisá-la em todos os seus componentes funcionais que envolvem sistemas simbólicos e aspectos processuais, uma vez que reduzi-la a um ou a outro não permite captar o conjunto do seu funcionamento.

A visão de representação como um reflexo da ação adaptativa do sujeito ao meio ou como algo que diz respeito somente à utilização pelo sujeito de sistemas de significantes sociais é criticada por Vergnaud (1985), do mesmo modo que as teorias que a reduzem a seus aspectos explicitamente simbólicos ou a seus aspectos processuais. A representação, salienta, tem a função de reguladora da ação e das expectativas do sujeito, o que lhe confere funcionalidade. Pelo seu caráter funcional, leva em conta os conteúdos dos conhecimentos práticos e teóricos que a originaram, sem os quais correria o risco de parecer excessivamente abstrata. Também tem a função de estabelecer homomorfismos entre o real (as situações) e o significado, ou, em outras palavras, entre certos aspectos do real e sua representação mental. A ação é decisiva na representação, pois é por suas ações e por suas expectativas que o sujeito elabora e corrige suas representações. A representação esclarece e calcula as regras de ação que engendram as ações. Estas, por sua vez, objetivam transformar o real ou questioná-lo, possibilitando a evolução adaptativa do sistema de invariantes constitutivos da representação. É, pois, no plano do significado que se regulam as relações entre o real e a representação.

Seria um absurdo, alerta Vergnaud (1985), considerar que existe uma relação direta entre o real e o plano do significante, uma vez que, no seu entendimento, os homomorfismos transitam necessariamente pelo significado. Os significantes disponíveis, na maioria sociais, desempenham um papel importante neste processo, pois possuem função essencial na construção de invariantes, nas inferências ou predições e na explicitação de regras de ação, mas o autor torna claro que, todo trabalho que se conclui no plano do significado não se acompanha necessariamente de manipulações simbólicas, não havendo uma correspondência unívoca entre o plano do significado e o do significante.

Os sistemas de significantes, dentre os quais a linguagem, não são intermediários obrigatórios para a relação entre significante e significado na concepção de Vergnaud (1985), da mesma forma que outros sistemas de significantes. A linguagem é o meio essencial de representação e de identificação das categorias matemáticas. Tem uma função comunicativa e de auxílio ao pensamento e à organização da ação. Linguagem e símbolos matemáticos, embora desempenhem importante papel na conceitualização, não teriam sentido sem as situações e o significado do conceito.

É possível perceber nitidamente que, embora os três conjuntos: situações, significantes e significados, sejam interdependentes e interagentes no processo de construção dos conceitos, as invariantes operatórias, mais especificamente os esquemas, desempenham um papel essencial, pois são eles que organizam a conduta do sujeito para uma determinada classe de situações e que, ao mesmo tempo, organizam as ações do sujeito, as atividades de representação simbólica e a própria linguagem. Fica clara, portanto, a presença marcante dos princípios da Epistemologia Genética na teoria desenvolvida pelo autor. No que se refere ao notacional e sua relação com o nocional, Vergnaud (1985, 1996a) reconhece a importância do simbolismo na construção dos conceitos, mas, seguindo Piaget, atribui à ação do sujeito sobre os objetos, em situações, a fonte e o critério da conceituação.

Como referimos acima, para Piaget, a fonte da conceituação são as ações do sujeito sobre os objetos, ou, em outras palavras, um "fazer" que antecede e fundamenta a construção dos conhecimentos. Não se trata, no entanto, de um fazer ou de ações que produzem constatações a partir da simples experiência sobre os objetos, como versa o empirismo. Piaget questionou veementemente, desde o início de sua obra, a concepção empirista de que as sensações forneceriam o conhecimento da realidade exterior ao sujeito através da experiência (empírica), rejeitando a idéia de que o registro de dados perceptivos seria suficiente para a produção de conhecimentos. Atribuiu à ação dos sujeitos sobre os objetos um papel muito mais amplo e complexo. Através da Teoria da Abstração Reflexionante e dos estudos *Tomada de Consciência* e *Fazer e Compreender*, torna claro este papel, aprofundando a relação epistemológica necessária entre o sujeito e o objeto no processo de construção de conhecimentos.

2.2.2 Do fazer ao compreender

A construção dos conceitos implica um fazer inicial, ou seja, em ações sobre os objetos, mas, como já referimos acima, não se reduz à simples experiência ou constatação, como versa o empirismo, mas envolve um amplo processo de abstrações reflexionantes e de tomadas de consciência. Piaget (1978b) observou, em vários experimentos, um êxito prático nas ações das crianças no período pré-operatório, que considerou um conhecimento, um *savoir faire* autônomo que, inicialmente, se abstém da conceituação, mas que gradativamente é superado por ela, promovendo uma inversão em relação à situação inicial: a conceituação se impõe à ação até o ponto de ultrapassá-la e tornar-se totalmente independente.

Este saber fazer inicial constitui-se num “fazer” que permite utilizar as coisas com sucesso. Já o saber que em um determinado momento do desenvolvimento passa a preceder a ação a ponto de dela abster-se totalmente, o “compreender”, que consiste em isolar as razões das coisas, possibilita extrapolar o real e entrar para o mundo dos possíveis e imagináveis.

Inicialmente Piaget (1977) verificou que a conceituação se efetua por sucessivas tomadas de consciência a partir da ação inicial sobre os objetos. Considerou a tomada de consciência um processo de conceituação que “[...] reconstrói e depois ultrapassa, no plano da semiotização e da representação, o que era adquirido no plano dos esquemas de ação” (p. 204), superando assim uma concepção de simples iluminação ou de espelho que promoveria uma suposta “representação” direta das ações. Argumenta que, desde o início, a tomada de consciência implica as coordenações das ações do sujeito num processo que obedece a uma lei geral que conduz da “periferia para o centro”,

> [...] a tomada de consciência, parte da periferia (objetivos e resultados), orienta-se para as regiões centrais da ação quando procura alcançar o mecanismos interno desta: o reconhecimento dos meios empregados, motivos de sua escolha ou de sua modificação durante a experiência etc (PIAGET, 1977, p. 198).

Por “periferia” (P), Piaget (1977, p. 198) entende a reação mais imediata e exterior do sujeito em face do objeto: utilizá-lo em conformidade com um objetivo e anotar o resultado obtido. Por “centro,” entende os mecanismos centrais da ação do sujeito (C) e as propriedades intrínsecas do objeto (C’). O conhecimento não procede nem do sujeito (S), nem do objeto (O), mas da interação entre os dois, ou seja, da periferia representada pelo ponto (P) na figura abaixo. A tomada de consciência orienta-se para os mecanismos centrais das ações do sujeito (C), enquanto o conhecimento do objeto orienta-se para suas propriedades intrínsecas e também centrais (C’).

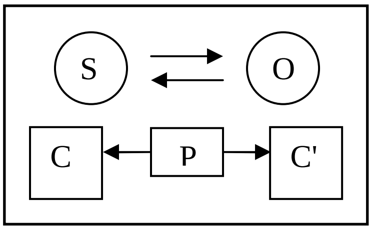

Figura 1: Tomada de consciência
Fonte: Piaget, 1977.

Tomadas de consciência ocorrem diante de êxitos ou de fracassos. Diante de fracassos ou inadaptações, a busca dos motivos que os ocasionaram faz com que o sujeito procure onde houve falha da adaptação dos esquemas ao objeto e, a partir dos dados observados na ação, concentre a atenção nos meios empregados e em suas correções ou substituições. Daí o movimento entre o objeto e a ação aproximar-se do mecanismo interno das ações, da periferia para o centro. Quando o objetivo inicial da ação é atingido sem nenhum fracasso ou inadaptação, o progresso da consciência não resulta mais das dificuldades impostas pela ação, mas do próprio processo assimilador, uma vez que determinar para si mesmo um objetivo em face do objeto já é assimilar este objeto a um esquema prático. Na medida em que o objetivo e o resultado das ações permitem que se desencadeie a consciência, o esquema se torna conceito. O processo assimilador empenhado em compreender os fenômenos tem como conteúdos os objetos e as próprias ações num movimento contínuo entre eles, o que permite que as tomadas de consciência dos objetos conduzam à tomada de consciência das ações.

Piaget (1977, p. 200) observa que, quando perguntamos às crianças como descobriram um tal processo, os mais novos não conseguem explicar, limitando-se a reproduzir suas ações por gestos e sem palavras. Aos poucos conseguem explicar, usando expressões, tais como: “eu percebi que... eu disse comigo então...” ou “ encontrei então a idéia...”. Isto evidencia que a tomada de consciência não se limita à tomada de consciência das ações materiais, mas leva a uma interiorização das ações que, no plano da ação refletida, possibilita a consciência dos problemas a resolver e a consciência dos meios cognitivos (e não mais materiais) empregados na solução. Em outras palavras, permite passar do “porquê” ao “como”.

Interessam-nos, neste trabalho, as relações que Piaget estabelece entre ação e conceituação. Nos estudos descritos na obra *Tomada de Consciência,* Piaget

(1977) descreve o processo evolutivo dos êxitos precoces em direção à conceituação. Os estudos mostram que a ação constitui-se, em si mesma, num saber inicial de eficácia considerável e eficiência notável, mas que, embora seja a sua fonte, ainda não envolve a compreensão conceituada. No plano da ação, as ações iniciais dos sujeitos procedem por meio de esquemas isolados de assimilação, com tentativas de ligá-los aos objetos, mas permanecem num movimento de acomodações momentâneas. As coordenações construídas não são novas, mas extraídas de mecanismos anteriores, o que faz com que a ação se constitua numa tomada de posse progressiva, com reconstrução e enriquecimento, análoga ao que é a conceituação em relação à ação, mas sem tomada de consciência.

O progresso das ações em direção à conceituação consiste em coordenações que procedem inicialmente por assimilações recíprocas dos esquemas utilizados e que, progressivamente, orientam-se na direção de formas cada vez mais gerais e independentes de seu conteúdo (estruturas operatórias de conjunto). A conceituação não é uma simples leitura dos objetos, mas “[...] ela é uma reconstrução, e que introduz características novas sob a forma de ligações lógicas, com estabelecimento de conexão entre a compreensão e as extensões etc.” (PIAGET, 1977, p. 208).

O processo de conceituação envolve, assim, mecanismos análogos que se repetem em níveis sucessivos e hierarquizados, mas com defasagens cronológicas. No primeiro nível, o da ação material sem conceituação, os sistemas de esquemas já se constituem em um saber bem elaborado, sem tomadas de consciência que extraem das fontes orgânicas sua matéria, o que não os caracteriza como um começo absoluto. No segundo nível, o da conceituação, esta retira seus elementos da ação em virtude de tomadas de consciência, acrescentando novidades, ou seja, acrescenta tudo o que de novo o conceito comporta em relação ao esquema. Neste nível há um processo de interiorização das ações materiais por meio de representações semiotizadas (linguagem, imagens mentais, etc.) e de um processo geral de tomada de consciência da ação própria, através do qual a abstração empírica fornece uma conceituação descritiva das características materiais da ação e em que a abstração refletidora extrai das coordenações da ação o necessário para construir as coordenações inferenciais que permitem, no nível do conceito, ligar e interpretar os dados observados, embora os mecanismos que lhe permitem fazê-lo permaneçam inconscientes. No terceiro nível, o das operações formais e abstrações refletidas, a conceituação retira também dos níveis anteriores seus elementos através de operações novas realizadas sobre as operações anteriores ou, em outras palavras, operações sobre operações, produzindo assim abstrações enriquecidas segundo combinações não efetuadas até o momento. Neste nível, a tomada de consciência começa a tornar-se também uma reflexão do pensamento sobre si mesmo, tornando o sujeito capaz de produzir teorias ou operações sobre operações.

Em *Fazer e Compreender,* Piaget confirma os achados anteriores referentes aos atrasos da tomada de consciência em relação ao êxito precoce das ações e ao fato de tratar-se de um processo que se dirige da periferia às regiões centrais da ação, e acrescenta um dado importante: "[...] assistimos, a partir de determinados níveis, a uma influência resultante da conceituação sobre a ação" (PIAGET, 1978b, p. 173). A conceituação fornece à ação um aumento do poder de coordenação, já imanente à ação, o que traz como conseqüência o reforço nas suas capacidades de previsão e a possibilidade, diante de uma dada situação, de oferecer um plano de utilização imediata, e isso sem que o indivíduo estabeleça fronteiras entre a sua prática (o que fazer para conseguir?) e o sistema de seus conceitos (por que as coisas acontecem desta forma?). Esclarece que, quando os sucessos acontecem por etapas, com coordenações progressivas de níveis bem distintos e espaçados, observa-se inicialmente uma fase (Fase II) em que a ação e a conceituação são aproximadamente do mesmo nível e em que trocas constantes são efetuadas entre as duas. Segue-se a esta uma fase (Fase III) em que há uma inversão total da situação inicial: é a conceituação que passa a fornecer à ação uma programação de conjunto semelhante à que se observa na fase adulta, quando a prática se apóia em teorias, substituindo assim os planos restritos e provisórios característicos da fase anterior.

Piaget (1978b, p. 178-179) considera que a característica mais geral dos estados conscientes é a de exprimir significações e reuni-las através de "implicações significantes". "A passagem da ação para a conceituação consiste em uma espécie de tradução da causalidade em termos de implicação [...]". A implicação é uma conexão entre significações, o que possibilita um progresso notável às coordenações causais das ações (em si mesmas limitadas, embora atinjam seus objetivos materiais) ao fornecer a possibilidade de determinar as razões que não são compreendida, nem nos objetivos, nem nos meios empregados e, sem as quais, os sucessos representam apenas fatos sem significados. Há um isomorfismo entre as estruturas causais das ações e de seus objetos e as estruturas implicativas do pensamento, sendo que estas últimas fornecem a razão das primeiras. Assim,

> [...] compreender consiste em isolar a razão das coisas, enquanto fazer é somente utilizá-las com sucesso, o que é, certamente uma condição preliminar da compreensão, mas que esta ultrapassa, visto que atinge um saber que precede a ação e pode abster-se dela (PIAGET, 1978b, p. 179).

Piaget (1978b) explica que as razões se tornam autônomas, a ponto de absterem-se dos objetos, ou, em outras palavras, a compreensão ou a procura das razões ultrapassam os sucessos práticos da ação e enriquecem o pensamento, por dois fatores complementares. Quando os indivíduos buscam as razões de um fenômeno físico, chegam a situar em um mundo de relações possíveis as relações reais observadas no momento atual, ultrapassando o plano da ação e estendendo a pesquisa das razões ao mundo dos possíveis. Isto envolve a construção em pensamento de séries indefinidas com recorrência, transitividade, alternâncias regulares, etc. O segundo fator diz respeito ao poder operacional conquistado pelo indivíduo, o que lhe permite a construção indefinida de novas operações sobre as precedentes: operações de segunda e de enésima ordem. Em síntese, “[...] o mundo das razões se amplia sobre os possíveis e transborda, assim, o real” (PIAGET, 1978b, p. 179).

A ultrapassagem da ação pela conceituação não se efetua por construções puras, mas continua a obedecer a um movimento retrospectivo que leva da periferia para os centros das estruturações operacionais, onde cada construção se apóia, em seu ponto de partida, sobre elementos retirados dos níveis anteriores por abstrações e por reflexões. No que se refere ao processo da explicação causal, este movimento também é observado, confirmando as hipóteses levantadas na obra *Tomada de Consciência* (1977): há correlação constante entre os progressos da interiorização (em direção à C) e os da exteriorização (em direção à C’). Piaget (1978b, p. 180) observa que a busca da explicação causal de um problema se dá a partir de um modelo A, que explica o fenômeno periférico P, isolando a razão, tratando-se em seguida de encontrar o porquê ou o como de tal transformação invocada pelo modelo A, donde a necessidade de um novo modelo B, relacionado a um dos aspectos de A, e assim por diante, numa alternância sem fim dos porquês e dos comos. Este movimento descreve um processo contínuo de construção do conhecimento e, de certa forma, de relações que nele se estabelecem entre a teoria e a prática, uma vez que

> ora são as estruturas e os operadores construídos pelo pensamento autônomo do matemático que servem imediatamente como instrumentos explicativos na física [..] ora é a descoberta de novos fatos experimentais, que levantam problemas para o teórico e levam à construção (por reconstrução e não por cópia ou reflexo) de novos instrumentos matemáticos [...] (PIAGET, 1978b, p. 180).

Piaget esclarece que as etapas e os sucessos da ação ocorrem em função de atingir uma finalidade, ou um objetivo, e que a compreensão se constitui num fim permanente, devido a processos de equilibração conjunta. Um objetivo corresponde a uma necessidade e esta é, por sua vez, a expressão de uma lacuna, de um desequilíbrio. A satisfação da necessidade consiste numa reequilibração e não num simples finalismo na intenção de alcançar um objetivo em que as soluções determinem o presente. Piaget (1978b) refere que os conflitos e as contradições características das ações e dos sucessos, bem como os da conceituação ou da compreensão, são fatores essenciais do desenvolvimento, pois tratam-se de desequilíbrios e de reequilibrações. A busca dos porquês de um determinado problema conduz a soluções que levantarão novos problemas com suas novas soluções, e assim por diante, numa sucessão que conduz da periferia (P) para o centro (C e C') ou, em outras palavras, numa direção que oscila entre uma determinação pelo passado e uma abertura sobre novidades imprevisíveis. Este movimento acontece em cada etapa e não antecipadamente, pois é só através dos instrumentos dedutivos construídos nessa etapa que a nova e imprevista construção aparece retrospectivamente como necessária. Piaget exemplifica este processo com a matemática, justamente por entendê-la como um processo que envolve uma direção sem um finalismo, que caracteriza uma equilibração. Para ele, as criações matemáticas não são nem descobertas, nem invenções, isto porque os seres construídos não existiam antes e porque o seu construtor não é livre para modificá-las à vontade. As matemáticas são construções com a propriedade particular de se imporem como necessárias assim que são concluídas e fechadas sobre si mesmas, enquanto não o eram ainda no decorrer de sua elaboração. Estas questões tornam necessário considerar o processo de abstração reflexionante.

2.2.3 A abstração reflexionante

Piaget (1995) atribuiu à abstração reflexionante o papel de motor do desenvolvimento cognitivo por constituir-se num processo contínuo de construção e reconstrução a partir das ações iniciais sobre os objetos, fontes de abstrações e de novos conhecimentos. Aspectos fundamentais desta teoria e suas relações com o uso de materiais concretos no ensino de matemática foram revisados por nós, em Agranionih (2003) e são apresentados nos parágrafos que seguem.

Piaget (1995) distingue outra forma de abstração, além daquela apoiada sobre os objetos. A seu ver, é necessário considerar a abstração provinda das ações ou das operações dos sujeitos sobre os objetos, como aquela que possibilita a construção de conhecimentos em patamares superiores, a partir do retirado da atividade enquanto tal e da reconstrução do já conhecido, conferindo ao sujeito a possibilidade de novas construções e generalizações. Assim, distingue duas possibilidades de abstração: empírica e reflexionante, na interação do sujeito com os objetos.

A abstração empírica é aquela que se apóia sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da própria ação. Retira informações relativas às propriedades que já existiam nos objetos antes de serem constatadas pelos sujeitos, sobre suas características materiais ou sobre os observáveis das ações do sujeito. Faz o papel de "coleta de dados", mas não existe por si só e também não pode ser entendida como simples "leitura" de dados da realidade, uma vez que "abstrai" dos objetos suas propriedades (peso, cor, por exemplo), utilizando, para tal, instrumentos de assimilação que derivam de esquemas construídos anteriormente pelo sujeito. Estes esquemas são utilizados pelo sujeito com o objetivo de assimilar os conteúdos (observáveis).

Assim, diante de materiais, tais como o ábaco, utilizado para o ensino de cálculos, por exemplo, pela abstração empírica o aluno constataria sua cor, forma, tamanho, etc. No entanto, como decidir por amarelo ou azul, sem um quadro mais amplo de referências que lhe permitam diferenciar as cores entre si? Ou decidir entre grande ou pequeno? Piaget adverte: a abstração empírica não existe por si só, necessita de um quadro reflexionante. Ao dizer isto, não reduz o conhecimento do objeto a uma mera constatação de propriedades físicas pela experiência física. A abstração reflexionante apóia-se sobre as formas e as atividades cognitivas do sujeito, ou seja, apóia-se sobre os esquemas ou coordenações de ações, operações e estruturas, para delas retirar suas características e utilizá-las em novos problemas ou novas finalidades. Comporta dois aspectos essenciais e inseparáveis: *reflexionamento* e *reflexão.* O *reflexionamento* consiste na projeção, para um patamar superior, das informações colhidas em patamares precedentes. A *reflexão* consiste num ato mental de reconstrução e reorganização daquilo que foi retirado do patamar inferior. Estabelece-se assim uma relação dialética e contínua entre forma e conteúdo.

Diz Piaget (1995 p. 276): “[...] todo o reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devido à reflexão.” Trata-se de um movimento contínuo e análogo a uma espiral: uma alternância ininterrupta entre reflexionamentos e reflexões, formas e conteúdos. Assim, novos conteúdos geram novas formas, novas formas permitem a assimilação de novos conteúdos, estes, por sua vez possibilitam a construção de formas mais amplas (reflexão) que tendem a assimilar novos conteúdos e assim sucessivamente.

Este movimento contínuo que depende fundamentalmente das interações sujeito-meio físico e social confere ao sujeito possibilidades infinitas em termos de abstração. O predomínio inicial das abstrações empíricas e pseudo-empíricas dos níveis sensório-motor ao operatório-concreto é gradativamente ultrapassado pelas abstrações reflexionantes. Isto não quer dizer que estas não estão presentes nos níveis iniciais. Pelo contrário, Piaget defende a tese de que uma não existe sem a outra; elas são interdependentes e coexistem desde os níveis mais elementares: “Com efeito, enquanto a primeira [abstração reflexionante] se torna cada vez mais autônoma (ela é a única a operar na lógica e matemática puras), a segunda [abstração empírica] só avança porque apoiada sobre a primeira” (PIAGET, 1995, p. 6). Mas não há dúvidas de que o vínculo, inicialmente necessário, com os objetos da realidade concreta torna-se totalmente desnecessário devido às possibilidades do sujeito de desligar-se deles e interagir no mundo dos possíveis e imagináveis (PIAGET, 1978b). Exemplo disso é a matemática, ciência de dupla natureza:

concreta e abstrata, conceitual e formal, em que o trânsito contínuo entre a realidade e a abstração dá lugar ao mundo das formas abstratas.

Em materiais, tais como o ábaco, citado anteriormente, as propriedades físicas somente são assimiladas em função das formas anteriormente construídas pelo sujeito. São estas formas que conferem a ele a possibilidade de assimilação de novos conteúdos que, por sua vez, geram a necessidade de novos reflexionamentos e novas reflexões, ou seja, a construção de novas formas. É necessário, pois, um quadro assimilador reflexionante. A empiria, ou seja, a experiência por si só não permitiria ao sujeito operar com unidades, dezenas e centenas. E quando nos referimos a operar, não nos referimos a somente realizar movimentos no ábaco, reproduzindo ações dos professores. Referimo-nos a compreender o processo operatório a partir do ábaco e, para tal, as constatações sobre seus observáveis devem atingir as coordenações das ações do sujeito. Nesse processo, entra em cena a abstração pseudo-empírica.

A abstração pseudo-empírica é um caso particular da abstração reflexionante. Por exemplo, ao relacionar uma determinada cor a um time de futebol, estamos realizando uma abstração pseudo-empírica. O time de futebol não está na cor azul ou vermelha, o sujeito é quem projeta na cor o time de sua preferência, no caso, Grêmio ou Internacional, no Rio Grande do Sul. A propriedade Grêmio ou Internacional constatada não está no objeto, mas é introduzida nele pela coordenação de ações do sujeito. Outro exemplo: ao olharmos para uma coleção de objetos e concluirmos que se trata de 5 objetos, o “cinco” não está no objeto, mas é inferido pelo sujeito, a partir de coordenações de ações que lhe permitem designar uma quantidade de objetos. No caso do ábaco, a unidade, a dezena e a centena não estão visíveis, presentes no ábaco em si, mas são inferidas pelo sujeito na interação com o objeto, através de abstrações pseudo-empíricas. Isto explica porque, na maioria das vezes, os alunos não conseguem “ver” nos objetos o conceito matemático que o professor pretende ensinar.

O mesmo ocorre com o material dourado, outro recurso bastante utilizado para trabalhar com o valor posicional, com as operações e também com números decimais. Fica evidente a necessidade de estruturas prévias que permitam ao sujeito “transformar” um cubo, 10 placas, 100 barras e 1.000 cubinhos em 1 inteiro, 10 décimos, 100 centésimos e 1.000 milésimos, por abstrações reflexionantes. Portanto, a abstração reflexionante “apóia-se sobre tais formas e sobre todas as atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas, etc.) para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas, etc.)” (PIAGET, 1995, p. 6).

A tomada de consciência de uma abstração reflexionante desdobra-se em uma abstração refletida. Assim, a tomada de consciência das relações entre unidades diferentes e blocos diferentes, em colaboração contínua com as abstrações pseudo-empíricas (que são reflexionantes!) promove uma reflexão sobre o refletido, ou seja, uma reflexão num patamar superior. A compreensão do valor posicional, característica fundamental do nosso sistema de numeração, portanto, não se deve aos materiais em si, tais como o ábaco ou o material dourado, mas às abstrações realizadas pelo sujeito a partir das ações realizadas sobre estes materiais. Quando “refletidas”, são generalizáveis e abrem possibilidades para outras generalizações. Assim, os conceitos inicialmente construídos na relação com o ábaco podem ser generalizados a outros materiais, tais como ao próprio material dourado, ao dinheiro (1.000 reais é o mesmo que 10 notas de 100 reais, 100 notas de 10 reais e 1.000 notas de 1 real), e ao cálculo mental através de decomposições. Por exemplo: 234 + 56 = 200 + 30 + 50 + 4 + 6 = 200 + 80 + 10 = 200 + 90 = 290.

Fica evidente que estas generalizações vão além das constatações das relações observadas. Promovem generalizações construtivas (PIAGET, 1978b), uma vez que, por apoiarem-se nas operações dos sujeitos, geram novas formas e novos conteúdos, ou seja, novas estruturas. A ação sobre os objetos, que desempenha um papel fundamental no processo de construção dos conhecimentos matemáticos, implica em abstrações reflexionantes. O conhecimento não está no objeto, ou seja, nos materiais concretos, mas é o produto de construções do sujeito em função das estruturas que constrói e da possibilidade infinita de construir novas estruturas, cada vez mais amplas e abrangentes.

Neste trabalho, acrescentamos à discussão desta mesma temática a descrição de um experimento sobre a noção de proporção: o equilíbrio da balança, descrito em Inhelder e Piaget (1976) na obra *A Lógica da Criança e do Adolescente,* e por Piaget (1978b), na obra *Fazer e Comprender*. O objetivo do experimento era verificar por que a noção de proporção aparece somente no estádio III A do período operatório formal e não antes (INHELDER; PIAGET, 1976) e até que ponto as sucessivas conceituações da criança dependem de suas ações ou, ao contrário, dirigem-nas (PIAGET, 1978b). Para tal, foi apresentada a sujeitos de 3 a 15 anos uma balança com pesos diferentes, que poderiam ser pendurados em diferentes pontos da barra transversal, e pequenos cestos com diferentes pesos, que também poderiam ser movimentados sobre esta barra.

A questão que colocamos, tendo em vista os objetivos deste trabalho, é: Será que a criança perceberia de imediato, ao interagir com a balança, a proporção inversa entre os pesos e as distâncias no equilíbrio da balança? Seria possível ver ou extrair da balança o conceito de proporção inversa? Muitos professores de matemática acreditariam nesta possibilidade e usariam a balança em suas aulas, como um material concreto, “mostrando” aos alunos esta relação que na realidade só estaria visível a si mesmos? Se os alunos pudessem vê-las nos objetos ou compreendê-las a partir das explicações do professor não teríamos tantos problemas de reprovação escolar nesta disciplina! No entanto, Inhelder e Piaget (1976) e Piaget (1978b) tornam claro que é necessário um longo tempo e muitas construções até que possam fazê-lo. Distinguem, nas condutas das crianças, três estádios de desenvolvimento da noção de proporção.

O primeiro estádio subdivide-se em IA e IB. O subestádio IA caracteriza-se por condutas onde os sujeitos procuram assegurar o equilíbrio da balança com ações pessoais, como a de buscar o equilíbrio com as mãos, pois não conseguem coordenar os pesos e tampouco relacionar o peso com as distâncias. Trata-se de uma seqüência de manobras desordenadas para destacar o lado da balança que se abaixa. Não há interação entre os pesos separados, pelo contrário, há a crença de que os pesos ajam cada um por si. As crianças, neste nível, mostram reconhecer a necessidade de uma simetria entre os lados da balança e tendem a acrescentar pesos no outro lado, na tentativa de manter o equilíbrio, mas sem nenhuma relação com a distância. Não há nem indícios de compreensão prática de um equilíbrio por igualdade de pesos.

No subestádio IB, compreendem a necessidade de pesos aproximadamente iguais em ambos os lados da balança. Colocam e retiram pesos na tentativa de igualar. A consideração do outro lado é progressivamente imposta por um fator de simetria que é de natureza perceptiva e sensório-motora, mas que não comporta noções causais ou operatórias, uma vez que não atinge a idéia de uma transmissão. Há ainda indecisão quanto à natureza das ações do peso, que tanto podem consistir em arrastar como em sustentar. O fato de colocar o peso no meio, conduta própria desta fase, afasta o problema de transmissões e de ações no sentido inverso. Do ponto de vista de suas noções causais e operatórias, não atingem ainda a idéia de uma influência recíproca entre as extremidades, ou seja, de uma transmissão mediada por meio da prancha. Apenas mantém a idéia de sustentar o conjunto. É possível verificar apenas indícios de operações reversíveis. Há claramente um predomínio de abstrações empíricas. Quadros reflexionantes estão presentes, mas não no nível necessário para tais operações. As ações próprias deste nível dão lugar apenas a uma tomada de consciência incompleta e deformadora, uma vez que há ausência das coordenações necessárias para tal.

No subestádio IIA, a criança consegue coordenar pesos e distâncias por regulações intuitivas. Descobre que é possível o equilíbrio entre um peso menor a uma maior distância e um peso maior a uma menor distância. No entanto não generaliza isto para outras situações, tais como as que envolvem pesos diferentes. Já construiu a reciprocidade, mas não consegue coordenar todas as relações em jogo. É perfeitamente possível verificar a presença de uma crescente construção de formas em função dos novos conteúdos. Assim, o progresso estrutural possibilitado pela reversibilidade crescente permite a assimilação de novos conteúdos. As abstrações pseudo-empíricas desempenham, neste momento, um importante papel.

As abstrações pseudo-empíricas estão muito presentes nos níveis representativos, pré-operatório e operatório-concreto, uma vez que o sujeito necessita apoiar-se sobre resultados constatáveis, pois não consegue efetuar construções puramente dedutivas. Ou seja, necessita de objetos materiais, mas é importante salientar que as propriedades destes objetos não são apenas constatáveis por abstrações empíricas, mas são também introduzidas nos objetos pela atividade do próprio sujeito.

No subestádio IIB, o sujeito chega à lei do equilíbrio, mas já não apenas por tentativas ou regulações. Estas dão lugar à busca do equilíbrio por deslocamentos e isto é possível pela presença de uma forma mais ampla do que as anteriores. No entanto essa forma ainda não dá conta de relações métricas. Sabemos que estas são tardias, no desenvolvimento, em relação às correspondências qualitativas.

As condutas observadas nesses subestádios são operativas, mas não operatórias, uma vez que não há igualização exata entre as partes e o todo e a reversibilidade presente não permite operações mais complexas. O que difere uma conduta operativa de uma operatória é o fato de que a conduta operatória implica necessariamente uma abstração refletida. Nesses níveis isto ainda não ocorre, uma vez que as abstrações empíricas e pseudo-empíricas ainda predominam.

Piaget (1978b) observa que a passagem do subestádio IB para o subestádio II, ou seja, dos progressos práticos caracterizados pelas ações para a fase em que a compreensão é adquirida (caracterizada pelas coordenações progressivas que permitem interligar as ações em um sistema mais eficaz), é possibilitada pela "coordenação geral das ações" (reunião, ordenação, correspondência, etc.) que utiliza a inteligência prática em suas regulações e correções graduais. Essas coordenações são de natureza lógico-matemática, o que significa dizer que para coordenar ações físicas é necessário recorrer a instrumentos lógico-matemáticos (correspondências, reversibilidade, transitividade, etc.). No que concerne à tomada de consciência, esclarece que na ausência de coordenações suficientes, as ações dão lugar a apenas uma tomada de consciência incompleta e deformadora. A tomada de consciência ou conceituação adequada é possibilitada pelas coordenações progressivas que permitem novas formas de correções, novas regulagens e a reunião das ações em um todo representativo.

Já no subestádio IIIA, há um avanço progressivo em direção à tomada de consciência das leis de equilíbrio da balança, inclusive através de relações métricas que permeiam o conceito de proporção inversa. Já intervêm abstrações refletidas. No subestádio IIIB, já é possível buscar explicações para as leis que regulam o equilíbrio da balança e as relações entre pesos e distâncias. Em outras palavras, as operações tornam-se objeto do pensamento, o que possibilita ao sujeito realizar tematizações. Ora, pensamos na medida das possibilidades de nossas estruturas e estas são os instrumentos do conhecimento disponíveis em diferentes patamares de reflexionamento. A descoberta e a tematização sobre as leis que regulam o equilíbrio da balança são possíveis pela presença de uma estrutura caracterizada por diferentes formas de reversibilidade que Piaget denominou de grupo INRC. Esta estrutura permite ao pensamento fazer e desfazer operações: idêntica, negativa, recíproca e correlativa.

Certamente, no estádio III há um predomínio das abstrações refletidas, uma vez que já envolvem operações sobre operações e a tomada de consciência destas operações. Como diz Piaget (1995, p. 287),

> quanto à abstração refletida, ela permanece sistematicamente em retardo em relação ao processo reflexionante até o momento (terceiro nível) em que se torna o instrumento necessário das reflexões sobre a reflexão anterior e, em que permite, finalmente, a formação de uma meta reflexão ou pensamento reflexivo, que torna então possível à constituição de sistemas lógico-matemáticos de cunho científico.

Os materiais concretos adquirem sentido no ensino de matemática, se possibilitarem estas construções. Para tal, precisam problematizar o sujeito para gerar o desequilíbrio necessário à construção de novas formas de conhecimento. Neste sentido, os materiais precisam constituir-se num conteúdo interessante e desafiador e a ação sobre eles deve ser a ação exploratória, a ação dirigida a um objetivo específico, e não meramente a ação pela ação. Novos conteúdos geram problematizações, problematizações geram novos conteúdos que, por sua vez, geram novas formas, e assim sucessiva e indefinidamente, as projeções dos conteúdos para patamares superiores (reflexionamento) e a reconstrução dos mesmos neste novo patamar (reflexão), ou seja, a dinâmica da abstração reflexionante confere ao sujeito possibilidades infinitas de criação de novidades e de conhecimentos. A experiência é a fonte da novidade, mas esta não se constitui sem um quadro reflexionante. Abstrações empíricas e reflexionantes coexistem, portanto, em todo o desenvolvimento, muito embora a segunda ultrapasse a primeira nos últimos estágios do desenvolvimento.

2.2.4 As microgêneses cognitivas

Piaget direcionou a sua obra para o estudo das categorias fundamentais do conhecimento, ou seja, “[...] do sujeito do conhecimento racional, que não seria mais o sujeito do conhecimento filosófico, mas o do conhecimento científico ampliado ao conhecimento racional de senso comum, ou intuitivo [...]” (INHELDER; CAPRONA, 1996, p. 8), voltando-se para o estudo aprofundado das estruturas organizadoras do conhecimento e de sua funcionalidade. A análise do “saber-fazer” de cada sujeito em sua individualidade, ou seja, do sujeito psicológico individual, como complementar aos estudos piagetianos, é proposta por Inhelder e Cellérier (1996) através de estudos voltados às microgêneses cognitivas. Assim, os estudos microgenéticos são realizados com a intenção de compreender as condutas cognitivas próprias do sujeito psicológico individual, numa perspectiva diferenciada em relação aos estudos macrogenéticos realizados por Piaget e colaboradores, uma vez que não têm como objeto de estudo a construção das grandes estruturas do conhecimento próprias do sujeito epistêmico, mas buscam a compreensão da dinâmica do progresso macrogenético (referentes às estruturas mais gerais do conhecimento) a partir da análise pormenorizada das condutas efetivas do sujeito individual em toda a sua complexidade natural. Nas palavras de Inhelder e Caprona (1996, p.9), trata-se de "[...] um programa de pesquisa que tem por objetivo o sujeito psicológico, mas que reconhecerá plenamente que também existem funcionamentos epistêmicos".

Os estudos macrogenéticos centram-se na construção das categorias gerais do conhecimento. Já os microgenéticos voltam-se para a "grande quantidade e variedade dos procedimentos inventados pela criança e pela maneira como ela os transforma, modifica e põe à prova" (INHELDER; CAPRONA, 1996, p. 297), buscando compreender os significados que o sujeito atribui às suas ações.

Estudos microgenéticos permitem evidenciar as características do processo interativo entre o sujeito e o objeto, bem como desvelar as soluções e os modelos construídos pelos sujeitos, seus procedimentos e encadeamentos, através de recortes ou *découpages* das suas condutas (INHELDER; CAPRONA, 1996). Podem ocorrer a partir da inserção dos sujeitos da pesquisa em situações experimentais que permitam o envolvimento do sujeito com a situação em si, no sentido de provocar nele o uso de seus esquemas de conhecimento e principalmente de provocar a construção de novos esquemas ou estratégias que permitam a resolução dos problemas próprios à situação. Este trabalho de pesquisa insere-se nesta perspectiva. Buscamos olhar para o sujeito psicológico individual e identificar a dinâmica de suas condutas e os processos de construção de novos conhecimentos frente a um objeto específico do conhecimento: o sistema de numeração decimal.

Nos capítulos seguintes, passamos a caracterizar o sistema de numeração decimal, bem como os processos de aprendizagem deste sistema, na perspectiva de diferentes pesquisas realizadas sobre o tema.

3 SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL – PROPRIEDADES

O caminho percorrido pelo homem até a construção de sistemas de base que lhe permitissem ampliar as possibilidades de contagem e cálculo numérico foi longo e evidenciou um processo evolutivo em diferentes povos, desde a construção de sistemas que envolviam o uso de partes do corpo para significar números usados pelo homem primitivo e por aborígines de diversos continentes, até a invenção dos sistemas de base, entre eles a base decimal (IFRAH, 1996).

Ao longo da História, diferentes sistemas foram sendo construídos por diferentes povos, para expressar formas de contagem e registro de quantidades. Surgiram da necessidade de facilitar as atividades de contagem de grandes quantidades e de recuperar a informação obtida através de alguma forma de registro, para dar conta das transações comerciais cada vez mais intensas com o desenvolvimento do comércio sumério (quarto milênio antes de Cristo). Marcas passam a representar o número e a identidade dos objetos que, por sua vez, representavam os elementos reais de uma transação. A criação de novas marcas constitui um salto evolutivo no desenvolvimento dos sistemas, pois passam a exercer, além da função de contar, a função de identificar através do nome. Trata-se de uma evolução de um sistema baseado na repetição de signos em que quantidade e identidade dos objetos não estavam diferenciadas (uma ovelha, uma pedra ...) a um sistema em que se combinam dois signos: um para representar a quantidade; outro para representar a identidade. A partir daí criaram-se diferentes regras de combinação e o estabelecimento de verdadeiros sistemas de signos, ou seja, de sistemas de numeração (MARTÍ, 2005).

A evolução dos sistemas de numeração foi marcada pelo surgimento de uma série de princípios organizativos do sistema. O princípio do agrupamento surge como uma solução à complexidade das situações de contagem, tarefa que, com o tempo, passou a ser exaustiva. Um passo decisivo é dado, quando se faz corresponder um signo novo com um grupo de elementos (como o V para 5, no sistema romano). A combinação de signos de diferentes valores em uma mesma notação força a necessidade de definir as relações entre signos com base em diferentes princípios operativos: adição, subtração, multiplicação ou por uma combinação desses princípios (MARTÍ, 2005). Em Ifrah (1996), podemos verificar que vários sistemas foram criados, utilizando-se um ou outro desses princípios, em diferentes bases (base 2, base 5, base 10, base 60).

Um passo importante foi dado com o reconhecimento do zero. No sistema de numeração hindu-arábico o zero é usado como guardador de lugar e significou um avanço considerável nas possibilidades notacionais do sistema, pois reduziu a ambigüidade na interpretação dos números escritos, ou seja, permitia distinguir o 45 (quarenta e cinco) do 405 (quatrocentos e cinco). Embora o conceito de zero para indicar ausência já existisse entre os hindus, nos séculos VI ou VII, não existia notação para este conceito.

Os sistemas aditivos fundamentam-se no processo cognitivo de composição e decomposição de quantidades, que supõe um esquema de coordenação parte-todo e um esquema aditivo que permite a geração de novas quantidades a partir de acréscimos de novos elementos. É um sistema limitado e pouco apto para o cálculo, pois envolve notações muito grandes para expressar grandes quantidades. Relacionar números pela multiplicação tornou-se uma solução viável, embora não suficiente, à resolução dessa questão. A justaposição de dois signos origina um valor resultante da multiplicação do valor numérico de um pelo valor numérico de outro, mas ainda envolve expressões numéricas muito grandes. Sistemas híbridos (que combinam princípios aditivos e multiplicativos) permitem uma notação mais compacta para expressar quantidades grandes e constituem um avanço importante em relação aos sistemas aditivos simples, mas foi com o princípio de posição que chegamos a uma forma de compor expressões mais concisas, uma vez que o valor de um elemento varia conforme a posição que ocupa na sucessão de elementos que compõem a notação numérica (MARTÍ, 2005).

O sistema de numeração hindu-arábico é um sistema de base 10, que congrega estes princípios, como caracterizamos a seguir.

3.1 ASPECTOS OPERATÓRIOS

O sistema de numeração por nós usado tem suas origens no sistema de numeração hindu-arábico, trazido pelo povo árabe para a Europa, por volta do século VII e difundido entre os povos do Ocidente. Envolve um conjunto reduzido de signos intencionalmente criados, de natureza espacial, arbitrários e convencionais: a notação arábica dos dígitos: *1,2,3,4,5,6,7,8* 9 que representam as quantidades básicas; o *0* que representa ausência de quantidade; o ponto (.) e a vírgula (,) utilizados para separar unidades de tamanhos diferentes, através dos quais é possível representar infinitos números.

É um sistema aditivo e multiplicativo; portanto, híbrido, uma vez que:

- o valor de um dígito é obtido multiplicando-o pelo valor próprio da sua posição: propriedade multiplicativa. Ex. Em 345, o 3 vale (3x100) = 300
- o valor da expressão é a soma dos valores representados por cada dígito individual: propriedade aditiva. Ex. (3x100) + (4x10) + (5x1) = 345

É um sistema posicional, onde a posição de cada dígito determina a potência de base pela qual está multiplicado. Envolve as propriedades:

- o valor de um dígito numa expressão numérica está determinado pela posição que ocupa, o que lhe confere um valor posicional;
- a posição corresponde a uma ordem definida pela multiplicação de suas unidades por uma potência de dez, e o valor das posições aumenta em potências de base dez, da direita para a esquerda.
- Exemplo: $123 = (1 \times 10^2) + (2 \times 10^{1)} + (3 \times 10^0)$.

Quando um algarismo como o 4, por exemplo, em *444*, encontra-se na primeira posição da direita, está multiplicado por 10^0 e, por isso, vale 4 e ocupa a ordem das unidades de 1, chamada “unidade”. Quando está na segunda posição, está multiplicado por 10^1 e, por isso, vale 40 e ocupa a ordem das unidades de 10 chamada “dezena”. Quando está na terceira posição, está multiplicado por 10^2 e, por isso, vale 400 e ocupa a ordem das unidades de 100, chamada “centena”. Por um mecanismo recursivo, seguem-se unidades, dezenas e centenas de mil, unidades, dezenas e centenas de milhões, e assim por diante (OROZCO, 2001).

Entre as vantagens de um sistema de base, estão: a estrutura do sistema possibilita que o aprendiz gere nomes de números em vez de memorizá-los todos mecanicamente; a lógica do sistema permite gerar infinitos números; a estrutura de base pode ser usada para organizar um sistema de notação, ou seja, a mesma estrutura usada para contagem torna-se a fonte da organização para a escrita dos números; os cálculos baseados na notação do sistema tornam-se tanto econômicos quanto eficientes (NUNES; BRYANT, 1997).

Dentre as vantagens de um sistema posicional, está a possibilidade de registrar qualquer número com uma quantidade de símbolos bastante reduzida, o que o torna mais econômico. Nem todos os sistemas numéricos da Antigüidade eram posicionais. Os egípcios, por exemplo, criaram um sistema de numeração de agrupamento simples, com base dez, com símbolos para representar apenas as potências de dez regidos por um princípio aditivo (o número é representado pela soma dos valores de cada símbolo) não posicional. O 1 era representado por um traço vertical; o 10, por um calcanhar invertido; o 100, por um laço e o 1.000, por uma flor de lótus. Treze mil e quinze é representado através da expressão:

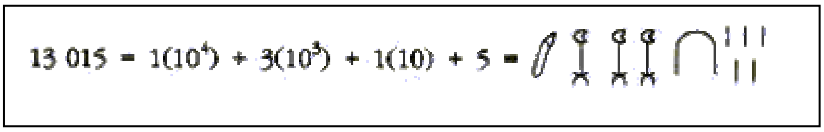

Figura 2 - Notação egípcia
Fonte: http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/numeraçao.html

No sistema egípcio, a posição que os símbolos ocupam não altera o número representado, e muitos símbolos são necessários para escrever números grandes .

Um sistema posicional é menos transparente que os sistemas que usam símbolos específicos para indicar a potência da base, como o egípcio, porque a posição é o único vestígio de uma potência de base. Para interpretar um número representado em um sistema posicional é necessário inferir qual é a potência de base pela qual devemos multiplicar cada algarismo.

Se, de um lado, há vantagem dos sistemas posicionais em registrar infinitos números com poucos algarismos, de outro, esse caráter sintético pode constituir-se num grande obstáculo para a sua compreensão (MARTÍ, 2005; TEIXEIRA, 2006). Lerner e Sadovsky (1996, p. 111) referem que economia e transparência "não são variáveis independentes: quanto mais econômico é o sistema de numeração, menos transparente se apresenta."

No que se refere à linguagem, a estrutura do sistema de numeração de base dez pode ser representada de diferentes formas nas diferentes línguas, o que pode torná-la mais transparente ou não. É o que discutimos a seguir.

3.2 ASPECTOS LINGÜÍSTICOS

As palavras numéricas dos idiomas europeus apresentam várias irregularidades em determinados períodos da seqüência numérica, o que dificulta a aprendizagem do valor posicional do número. Já línguas como a quéchua e orientais, tais como o japonês e o chinês, possuem uma regularidade maior, o que torna a estrutura decimal mais transparente e de mais fácil compreensão (Ver Quadro1).

No inglês, percebem-se irregularidades em alguns intervalos da seqüência numérica, o que torna menos transparentes os indícios sobre unidades de diferentes valores. Por exemplo, para dizer doze, não se combinam palavras de dezenas e unidades, como os japoneses e chineses (juni, shi er que equivalem a dizer *dezdois)*, mas outro nome: twelve. Do mesmo modo, para dizer vinte ou trinta, em japonês e em chinês, combinam-se as palavras de dezenas e unidades: niju, er shy que equivalem a *doisdez*. Em inglês, fala-se twenty.

No português essas irregularidades são percebidas nos nomes dos números entre dez e dezesseis: onze, doze, treze, quatorze, quinze. Ao pronunciarmos onze, em português, está implícita uma relação aditiva em que o “on” é o indicativo de um e o “ze” é o indicativo de dez: “on”-“ze” (1 + 10), “do”-“ze” (2 + 10), o mesmo ocorrendo até o quinze. Ao pronunciarmos esses números, não nomeamos explicitamente os “dezes” e os “uns” tal, como o fazemos para dezesseis (dez e seis), dezessete (dez e sete), dezoito (dez e oito) e dezenove (dez e nove). O mesmo ocorre no espanhol. Assim, na fala dos nomes dos números nesse intervalo da seqüência numérica, pronunciamos a palavra referente à quantidade de unidades primeiro e, depois, acrescemos a palavra referente ao grupo de dez. Já na escrita numérica, é o contrário, uma vez que também apresenta algumas irregularidades em relação à fala do nome dos números entre dez e dezesseis. Em doze (12), por exemplo, falamos a expressão equivalente a dois mais dez (2 + 10) como vimos acima, mas escrevemos uma expressão equivalente a dez mais dois (10 + 2), em que o 1 assume o valor de dez em função do lugar que ocupa.

Na seqüência, mantém-se uma certa regularidade em relação à fala e à escrita. Pronunciamos primeiro o nome dos números referentes às potências de base dez e, depois, acrescemos as unidades restantes: deze-seis (10 + 6) , deze-sete (10 + 7), vinte e um (20 + 1), cento-e-um (100 + 1) e assim por diante. A escrita segue o mesmo padrão: escrevemos, primeiro, à esquerda, o algarismo referente às potências da base dez e, depois, à direita, os algarismos referentes às unidades: 16 (dezesseis), 21 (vinte e um), 101 (cento e um).

Japonês		**Chinês**	**Inglês**	**Espanhol**	**Português**	**Quéchua**
1	Ichi	yi	one	uno	um	Schuc
2	Ni	er	two	dos	dois	Ishcai
3	San	san	three	três	três	quimsa
4	Shi	si	four	cuatro	quatro	chusco
5	Go	wu	five	cinco	cinco	pichca
6	Roku	liu	six	seis	seis	sucta
7	Sichi	qi	seven	siete	sete	canchis
8	Hachi	ba	eight	ocho	oito	pusac
9	Ku	jiu	nine	nueve	nove	iscun
10	ju	shi	ten	diez	dez	chunca
11	juichi	shi yi	eleven	once	onze	chunca shuc
12	juni	shi er	twelve	doce	doze	chunca ishcai
13	jusan	shi san	thirteen	trece	treze	chunca quimsa
20	niju	er shi	twenty	veinte	vinte	ishcai chunca
21	nijuichi	er shi yi	twenty one	veintiuno	vinte e um	ishcai chunca shu
22	nijuni	er shi er	twenty two	veintidós	vinte e dois	ishcai chunca ishcai
23	nijusan	er shi san	twenty three	veintitrés	vinte e três	ishcai chunca quimsa
31	sanju	san shi	thirty	treinta y uno	trinta e um	quimsa chunca
32	sanjuichi	san shi yi	thirty one	treinta y dos	trinta e dois	quinsa chunca schuc

Quadro 1 - Nomes dos números em diferentes idiomas
Fonte: Nunes;Bryant (1997); Orrantia (2001); D'amore (2003)

O fato de lermos os números numa direção oposta à que escrevemos (de onze a quinze) é uma das maiores dificuldades que as crianças que falam idiomas europeus enfrentam na aprendizagem desses números, conforme Fuson e outros (1997), Nunes e Bryant (1997), Orrantia (2001).

Orrantia (2001) salienta que a representação mental desses números supõe um processo complexo, porque, além de identificar os componentes da dezena e das unidades, é necessário invertê-los para representar seus respectivos valores posicionais.

Isto não ocorre em sistemas mais regulares, como o japonês, o chinês e o quéchua, por exemplo. Os nomes de números de 1 a 10 são: *ichi, ni, san, shi, go,roky, sichi, hachi, ku, ju*, respectivamente. Onze (11) equivale a *juichi*, doze (12) a *juni,* e assim sucessivamente. Portanto, *dezum*, *dezdois*. Os "dez" são ditos antes e equivalem à expressão escrita, o que não ocorre nas línguas européias. Vinte (20) equivale a *niju;* vinte e um (21) *nijuich;* vinte e dois (22) *nijuni.* Portanto, *dois dez um, dois dez dois*... Em chinês ocorre o mesmo: yi, er, san, si (um, dois, três, quatro); shi (dez); shi yi (onze); shi er (onze); ershi (vinte); er shi yi (vinte e um). Assim, crianças que falam japonês ou chinês não precisam dominar irregularidades do sistema, ou memorizar muitos nomes de números para gerar novos números. O mesmo ocorre com a numeração dos quéchuas (D'AMORE, 2003), em que não se observam irregularidades. Na língua quéchua, se o nome de um algarismo está antes do 10, indica uma multiplicação. Assim, *pusac chunca* significa oito (vezes) dez, ou seja, 80; se está depois, é uma adição: chunca pusac é dez (mais) oito, ou seja, 18.

Os nomes de números referentes ao intervalo numérico das dezenas, no português, não oferecem dificuldades em relação à inversão entre fala e escrita, uma vez que são lidos e escritos, indicando os grupos de dez e as unidades, nesta ordem, tendo implícita uma expressão multiplicativa e aditiva. Por exemplo, nas dezenas exatas, como oitenta, "oit" - "enta" corresponde, na fala, a "oitodez", ou seja, 8 x 10, sendo pronunciado inicialmente o nome de número correspondente à quantidade de grupos de dez. A escrita segue a mesma ordem: o algarismo indicativo da quantidade de grupos de dez é escrito por primeiro, à direita do número 80. Em oitenta e dois, a expressão falada corresponde a "oitodez mais dois" e a escrita a (8 x 10) + 2 = 82, sendo que o primeiro algarismo escrito à esquerda assume um valor relativo à posição que ocupa. Há uma correspondência, portanto, entre a fala do nome do número e a sua escrita.

No intervalo numérico das dezenas, a partir de trinta até noventa, o sufixo “ta” indica “grupo de dez”, e os prefixos variam irregularmente em função da quantidade de grupos de dez que representam, com uma certa semelhança com o nome dos algarismos: trin, quaren, cinqüen, seten ... Surge uma irregularidade em relação ao vinte, em que o “ta” é substituído por “te” e o “vin” nada tem a ver com “dois”.

Em relação às centenas, a língua portuguesa também apresenta certas irregularidades. Dizemos duzentos e não *doiscentos;* trezentos e não *trescentos;* quinhentos ao invés de *cincocentos.* Já em quatrocentos, seiscentos, setecentos, oitocentos e novecentos, passa a haver regularidade na fala do nome dos números. Em duzentos, trezentos e quinhentos, a potência de dez (100) é expressa pelo sufixo *ent,* que equivale ao *centos* (o nome do número), enquanto a quantidade de grupos de cem é expressa pelos prefixos *duz, trez, quinh*. Em relação aos milhares, observa-se maior regularidade. Pronunciamos a quantidade de grupos de mil seguida da palavra *mil:* dois mil, três mil, vinte mil, e assim por diante.

3.2.1 Formato verbal e formato arábico do sistema

Os trabalhos de Orozco (2001, 2005), Orozco e Hederich (2000) e Sevilla e Orozco (2006) trazem importantes contribuições à compreensão das características do sistema numérico decimal, ao analisá-las numa perspectiva lingüística, que apresentamos a seguir. A produção de escritas numéricas envolve, conforme as autoras, a compreensão dos aspectos operatórios dos formatos arábico (expressões escritas) e verbal do sistema de numeração decimal.

a) Caráter operatório das expressões escritas:

As expressões numéricas escritas resultam de uma composição simultaneamente aditiva e multiplicativa entre os dígitos. A expressão verbal *trezentos e cinqüenta mil cento e setenta e dois* corresponde a uma expressão escrita do tipo:

$(3 \times 100 + 5 \times 10)\ 1000 + 1x100 + 7x10 + 2$

$(3 \times 10^2 + 5x10^1)\ 10^3 + 1x10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

Nas expressões, os sinais aritméticos “+” e “x” representam as operações aditivas e multiplicativas, respectivamente. Os parênteses representam uma operação multiplicativa.

A composição multiplicativa fundamenta a construção das unidades do sistema: qualquer unidade no sistema é produto da potenciação 10^n e a formação dos numerais que o configuram. Por exemplo:

$100 = 1\ x10^2$
$1.000 = 1 \times 10^3$
$7 = 7 \times 1$ e corresponde a uma unidade de ordem zero: 7×10^0;
$70 = 7\ x10$ e corresponde a uma unidade de ordem um: 7×10^1
$700 = 7 \times 100$ e corresponde a uma unidade de ordem dois: 7×10^2
$7.000 = 7 \times 1.000$ e corresponde a uma unidade de ordem três: 7×10^3, e assim por diante.

O que chamamos comumente de “casa” da unidade é denominado de ordem zero, porque não há uma unidade cujo valor seja igual a dez, ou seja, não configura um grupo de dez elementos. A “casa” da dezena é denominada de unidade de ordem um, porque se forma uma unidade de valor dez, ou seja, configura um grupo de dez elementos, e assim por diante.

Na expressão *trezentos e cinqüenta mil, cento e setenta e dois,* é possível explicitar as multiplicações das unidades de primeira ordem, como abaixo:

$(3 \times 100 + 5 \times 10 + \underline{0 \times 1}) \times 1000 + 1x100 + 7x10 + \underline{2 \times 1}$

$(3 \times 100 + 5 \times 10) \times 1000 + (1x100 + 7x10 + 2 \times 1)\ \underline{\times 1}$.

Na expressão, podemos observar também o que Orozco e Hederich (2000) denominaram regra das três posições: somas de centenas, dezenas e unidades que se multiplicam recorrentemente por fatores: unidades, milhares, milhões. O termo da expressão *trezentos e cinqüenta mil* corresponde aos milhares. O segundo termo, *cento e setenta e dois* (1x100 + 7x10 + 2 x 1) corresponde às unidades.

Quando a expressão da seqüência de unidades, dezenas e centenas não explicita as unidades em uma ordem dada, escreve-se zero (0), que indica ausência de quantidade nessa ordem da unidade. Por exemplo: Em 350 (*trezentos e cinqüenta*) não são expressas as unidades de primeira ordem. Em 204 (*duzentos e quatro*) não são expressas as unidades de segunda ordem.

A composição aditiva fundamenta a composição dos numerais em diversas ordens e permite a inclusão dos números de um período ao seguinte. Para escrever qualquer número, utiliza-se a versão abreviada da lógica do sistema, pois somente se escrevem os operadores das potências. Por exemplo:

$$1.234 = 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^{o}$$

$$1.234 = \underset{1}{\underline{1}} \times 10^3 + \underset{2}{\underline{2}} \times 10^2 + \underset{3}{\underline{3}} \times 10^1 + \underset{4}{\underline{4}} \times 10^{o}$$

Em outras palavras, o número representado na forma arábica, em termos de quantidade, é uma soma de unidades de diferentes ordens. Assim, cada símbolo incluído na expressão arábica deve ser interpretado como a multiplicação do dígito que representa pela potência de 10, que marca sua posição na expressão. O grafismo arábico requer, conforme Orozco e Hederich (2000), a realização de adições, multiplicações e potenciações (multiplicações reiteradas), o que torna evidente a estrutura aditiva e multiplicativa do sistema.

b) Caráter operatório das expressões verbais:

Uma dupla perspectiva, morfofonológica e sintática, é adotada na análise do caráter operatório das expressões numéricas verbais por Orozco e Hederich (2000) e Orozco (2001, 2005).

A análise morfofonológica permite diferenciar prefixos de sufixos como componentes das palavras numéricas que configuram a expressão, e analisar contrações. Através dela, é possível diferenciar dois componentes das expressões numéricas verbais:

a) Partículas de quantidade: palavras numéricas (*dos, cincu, sete*) e prefixos (*qua, cinc*), marcam quantidades básicas;
b) Partículas sintáticas: palavras numéricas (*cem, mil, millón*) e sufixos (*enta, cientos*), chamadas também de partículas de potência, expressam potência de dez ou unidade em uma ordem dada; definem a grandeza do numeral.

A análise sintática permite destacar a maneira ordenada pela qual as partículas de quantidade e sintáticas intercalam-se entre si, através de operações aditivas e multiplicativas implícitas. Orozco e Hederich (2000) e Orozco (2001, 2005) analisam a expressões numéricas na língua espanhola. Na expressão verbal, *trescientos cincuenta y ocho mil nove cientos sessenta y dos,* usando-se marcadores morfológicos percebem-se claramente estas operações:

Tres [cientos] / cincu [enta] y ocho [mil] / nove [cientos] / ses [enta] y siete

Observamos que, na expressão:

a) as palavras *tres, ocho*, e *siete* e os prefixos *cincu*, *nove* e *ses* são partículas de quantidade;
b) a palavra *mil* e os sufixos *cientos* e *enta* são partículas sintáticas ou de potência;
c) as barras (/) representam as composições aditivas;
d) os colchetes ([ ]) representam as composições multiplicativas;
e) a conjunção (y) denota uma composição aditiva explícita.

Tanto expressões numéricas verbais quanto arábicas têm em comum uma estrutura operatória comum, embora se diferenciem em seus componentes e em sua sintaxe. Enquanto as expressões verbais estão compostas por partículas de quantidade e de potência, as expressões numéricas são compostas por dígitos e regras de composição. O processo mental de tradução dos números, de um formato de representação a outro, é denominado “transcodificação numérica” (SEVILLA; OROZCO, 2006, p. 49). A transcodificação, segundo os mesmos autores, exige

> [...] traduzir códigos, desde um sistema de regras que utiliza o recurso da posição para significar potências de dez, a um sistema de regras de marcação morfossintática – sufixos derivativos e morfemas composicionais da língua própria do formato verbal falado, ou vice-versa, dependendo da tarefa (SEVILLA; OROZCO, 2006, p.411).

Na transcodificação numérica, ao passar do formato verbal ao arábico, apenas se escrevem as partículas de quantidade, codificando-as como os dígitos no numeral. As partículas de potência são traduzidas pela posição do dígito no numeral. Por exemplo: *dois mil, trezentos e cinqüenta e quatro:*

2 354 =	$\underline{2} \times 10^3$	+	$\underline{3} \times 10^2$	+	$\underline{5} \times 10^1$	+	$\underline{4} \times 10^0$
	2		3		5		4
	Dois [mil]		trez [entos]		cinqu [enta]		quatro

Quando, na escrita arábica, as quantidades e as potências em certa ordem dada não são explicitadas, a posição correspondente deve ser preenchida com 0, que expressa a ausência da quantidade nessa específica ordem. Por exemplo: duzentos e oito: 208.

Ao passar do formato arábico para o verbal, com a presença de um zero (0), em uma posição qualquer da seqüência dos dígitos, devemos omitir o sufixo ou a palavra correspondente na expressão verbal. Por exemplo: em 208 devemos omitir a forma sintática que corresponde à posição da dezena para lermos duzentos e oito. Caso contrário, leríamos *duzentos zeroenta e oito*, leitura não própria do sistema de numeração decimal.

Quando, numa expressão arábica, houver o dígito 1 (um) na posição das dezenas, a tradução verbal implicará considerá-lo como uma parte de uma palavra nova formada conjuntamente com o dígito que se encontra na casa da unidade: *onze, doze, treze,* ou uma palavra pertencente ao grupo dos dez: *dezesseis, dezessete, dezoito*, etc. Se se encontra na posição das centenas ou unidades de mil, a marca de quantidade não se codifica literalmente. Por exemplo, não se diz *um mil* ou *um cento*, mas é possível dizer *três mil* ou *trezentos.*

Como vimos neste capítulo, os sistemas de numeração produzidos ao longo da História, dentre eles o sistema de numeração decimal, são produtos culturais que envolvem uma série de princípios operatórios e lingüísticos construídos a partir das situações geradas pelas necessidades cada vez mais complexas de contagem e registro de dados numéricos enfrentadas desde os tempos mais remotos.

O caminho a ser percorrido pelas crianças para a compreensão do sistema de numeração decimal não é menos complexo do que o caminho percorrido para a sua construção ao longo da História. Entendemos que a aprendizagem dos sistemas de numeração envolve a compreensão de aspectos operatórios e lingüísticos e, neste sentido, envolve a aprendizagem dos conceitos e das notações numéricas próprios do sistema decimal. Lerner e Sadovsky (1996) referem que, para as crianças apropriarem-se do sistema de numeração decimal, deverão descobrir o que ele oculta. Os caminhos percorridos pelas crianças na descoberta do que está oculto no sistema é objeto de estudo deste trabalho e dos autores cujas pesquisas nos propomos a revisar, a seguir.

4 ESCRITAS NUMÉRICAS E COMPREENSÃO DO VALOR POSICIONAL

Crianças pequenas elaboram precocemente conhecimentos sobre a escrita numérica e isto não depende de compreensões sobre número. As representações gráficas da quantidade que produzem evoluem de grafismos figurativos para escritas predominantemente esquemáticas, abstratas e convencionais a partir de hipóteses que elaboram sobre escritas numéricas nas interações com notações presentes no contexto sociocultural. É o que evidenciam pesquisas sobre a gênese das representações gráficas e das notações numéricas, tais como as de Sastre e Moreno (1976), Hughes (1986), Sinclair, Mello e Siegrist (1989), Danyluk (1998), Selva e Brandão (2000), Brizuela (2006). Crianças não-alfabetizadas produzem formas gráficas diferentes para desenhar, fazer números ou letras (TOLCHINSKY; KARMILOFF-SMITH, 1992).

Crianças pequenas também podem escrever e ler números sem compreender os princípios básicos do sistema de numeração escrita e sem seguir a ordem convencional da numeração (SINCLAIR; SINCLAIR, 1984; BEDNARZ; JANVIER, 1986; KAMII; JOSEPH, 1992; SINCLAIR; TIÈCHE-CRISTINAT; GARIN, 1992). Produzem e identificam escritas convencionais de números multidígitos, tais como, por exemplo, as correspondentes às potências de dez[8], antes de fazê-lo para os números correspondentes aos intervalos da seqüência numérica apoiada na numeração falada (LERNER; SADOVSKY, 1996; NUNES; BRYANT, 1997; OROZCO, 2001; TEIXEIRA, 2006). Nesse processo produzem escritas numéricas não-convencionais, como se vê nos exemplos a seguir (Figura 3), cometendo “erros” que manifestam as hipóteses que possuem em relação a como se escrevem números multidígitos e revelam uma evolução gradativa em direção às escritas convencionais e à compreensão das propriedades do sistema numérico decimal (SINCLAIR; SINCLAIR, 1984; KAMII; JOSEPH, 1992; LERNER; SADOVSKY, 1996; NUNES; BRYANT, 1997; OROZCO, 2001; TEIXEIRA, 2006).

---

[8] Os “nós” referidos por Lerner e Sadovsky (1996) ou “nudos” referidos por Orozco (2000).

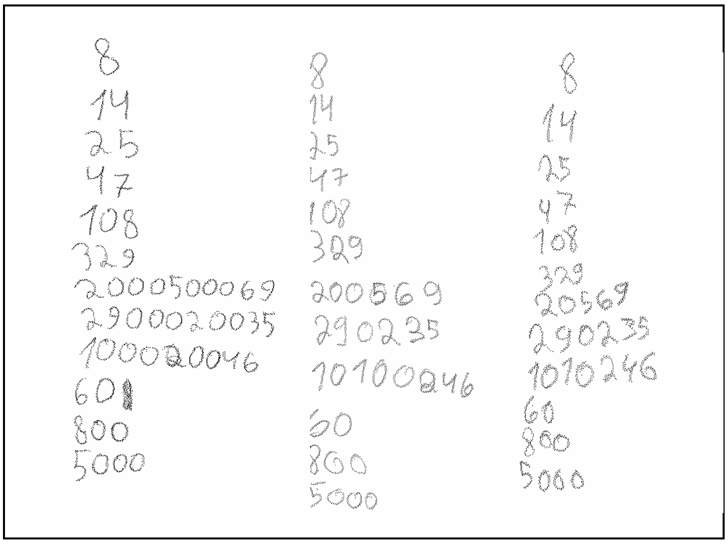

Figura 3 - Escritas numéricas produzidas por uma criança de 6 anos ao longo do ano de 2005
Fonte: Dados coletados durante o ano de 2005

Nesta parte do trabalho colocamos em discussão como se dá o processo de construção cognitiva de escritas numéricas de números multidígitos e como esse processo está relacionado à compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal na perspectiva de diferentes autores. Devido à importância destas contribuições para o entendimento das relações que se estabelecem entre a escrita numérica e a compreensão do sistema de numeração decimal, julgamos conveniente apresentar, neste capítulo, de forma mais detalhada, resultados de pesquisas relativas à compreensão do sistema de numeração decimal, focalizando aspectos relevantes à análise dos dados obtidos em nossa pesquisa, dentre eles: transcodificação numérica, estruturas conceituais para números multidígitos, invariantes operatórias e as regularidades da escrita numérica.

4.1 A TRANSCODIFICAÇÃO NUMÉRICA

Estudos a respeito da construção do sistema de notação em base dez, a partir de tarefas de notação numérica e leitura de numerais e do mecanismo denominado transcodificação numérica, foram realizados por teóricos do processamento numérico, como McCloskey, Caramazza e Basili (1985); Noël e Seron (1993); Macaruso, McCloskey e Aliminosa (1993); Noël e Turconi (1999).

Numa perspectiva diferenciada, a transcodificação numérica tem sido objeto de estudo de Orozco e Hederich (2000); Orozco (2001, 2005); Sevilla e Orozco (2006). Os modelos clássicos do processamento numérico, na argumentação das próprias autoras, contribuem para o entendimento dos processos que permitem transcodificar, mas não explicam como as crianças constroem tal processo, uma vez que ignoram a necessidade de fazer um manejo operatório para a construção da representação interna do número a partir de qualquer notação, seja verbal ou arábica. Suas pesquisas acrescentam importantes elementos à discussão sobre as bases da aprendizagem da escrita numérica: a necessidade de considerar aspectos operatórios nesse processo e a análise das expressões verbais numa perspectiva morfofonológica e sintática. O processo de transcodificação numérica implica a alteraração das marcas de potência de dez da expressão verbal pela posição dos dígitos no numeral ou vice-versa, o que não é um processo fácil para as crianças, durante os primeiros anos de aprendizagem, devido às diferenças entre os componentes léxicos, sintáticos e semânticos de cada formato: arábico e verbal. Daí a importância da compreensão do caráter operatório de cada um desses formatos (descritos no capítulo anterior deste trabalho).

Um estudo descritivo realizado por Orozco e Hederich (2000) com 123 crianças colombianas que freqüentam os sete primeiros anos da educação básica primária de uma escola particular de alto nível acadêmico de Cali, com idades variando entre 10 e 12 anos, revela uma alta correlação entre estratégias multiplicativas e êxito ao escrever numerais. Portanto, uma relação bastante clara e estreita entre o desenvolvimento da operação multiplicativa na criança e seu manejo do sistema de numeração em base 10. As operações de adição e multiplicação subjazem, afirmam as autoras, tanto ao formato verbal quanto ao formato arábico (escrita numérica) que permitem expressar o sistema de numeração em base dez. Também, nesse estudo, analisam os erros cometidos pelas crianças na escrita de numerais.

No processo de transcodificação, “a reflexão das crianças está centrada nas regularidades lingüísticas das expressões verbais e são essas características que regulam a escrita dos numerais arábicos”, sustenta Orozco (2005, p. 89). A sintaxe do formato verbal enuncia ou expressa explicitamente as potências de dez (quatro/centos, cinco/enta) enquanto a sintaxe do numeral arábico esconde sua expressão e a converte em posições que definem o valor dos dígitos no numeral, esclarecem Orozco e Hederich (2000).

A análise da produção de escritas e os tipos de erros cometidos pelas crianças em ditados numéricos analisados por Orozco e Hederich (2000), no estudo realizado com crianças colombianas, já referido, é uma importante contribuição ao nosso trabalho. Classificam-se em erros léxicos e sintáticos.

a) Erros léxicos são cometidos quando, ao escrever numerais correspondentes às expressões numéricas que escutam, equivocam-se ao produzir os dígitos necessários ou as palavras numéricas, mas conservam a ordem de magnitude e a forma sintática do número ditado. Por exemplo: para trinta e quatro mil, duzentos e vinte e três (34.223) escrevem *34.233* ou *34.323*;

b) erros sintáticos são aqueles que revelam dificuldades na inclusão de dígitos em um todo numérico e a dificuldade de processar os elementos do número para produzi-lo como um todo. Por exemplo: para quatrocentos e cinqüenta e quatro (454), escrevem *400504* ou 4054 ou *40054*

Os erros léxicos podem ser explicados por dificuldades na memória de curto prazo, mas os erros sintáticos exigem análises mais aprofundadas. A falta de uma mudança interna poderia explicar a ausência de integração dos dois tipos de sintaxe que os erros sintáticos das crianças maiores revelam. Esta mudança interna está vinculada à construção de princípios operatórios, dentre os quais o princípio multiplicativo (OROZCO; HEDERICH, 2000).

Os erros sintáticos identificados em nossa pesquisa também foram amplamente descritos na literatura e são objeto de estudos de vários autores (MCCLOSKEY; CARAMAZZA; BASILI, 1985; POWER; DAL MARTELLO, 1990; NOEL; SERON 1993; SERON; FAYOL, 1994; LERNER; SADOVSKY, 1996; TOLCHINSKY, 1997; NUNES; BRYANT,1997). Esses erros, afirmam Orozco e Hederich (2000), revelam a dominância do formato verbal falado nas produções iniciais de escritas numéricas pelas crianças. Ao escreverem, crianças que os cometem não fragmentam as expressões verbais em partículas de quantidade e em partículas que marcam o valor posicional, o que as leva a produzir escritas não-convencionais. Elas obtêm fragmentos que não correspondem ao formato verbal falado[9], mas que têm sentido para elas, e escrevem os numerais correspondentes a cada um dos fragmentos que obtêm. Ao escreverem numerais dessa forma, realizam uma operação denominada por Orozco e Hederich (2000) de justaposição. Por exemplo, *dos [cientos]uno:*

Dos / cientos uno	2/101
Dos / cientos / uno	2/100/1
Doscientos /uno	200/1

Em outras situações, ao escreverem, codificam fragmentos diferenciados da expressão numérica verbal e compactam-nos. Por exemplo: para *trescientos veinticinco,* escrevem *3025.* Fragmentam a expressão em *trescientos / veinticinco*. Estabelecem uma correspondência verbal entre cada fragmento e os numerais que o codificam: 30025, mas escrevem o número correspondente ao segundo fragmento (25) no lugar do último zero do numeral (300), superpondo-os. Orozco e Hederich (2000) denominam essa operação de compactação e consideram que, ao proceder dessa forma, a criança já começa a compreender as regras do formato arábico, embora de uma forma ainda insuficiente.

Apresentamos, a seguir, de forma mais detalhada, alguns tipos de erros sintáticos cometidos pelas crianças, identificados e caracterizados por Orozco e Hederich (2000). Mesmo que haja proximidade com o português, optamos por conservar os exemplos em espanhol para não alterar o sentido da fragmentação analisada pelas autoras.

a) Codificação literal da parte sintática

Erros que se caracterizam pela utilização, no formato arábico, de um ou vários códigos que traduzem literalmente a partícula sintática que, no formato verbal falado, enuncia a potência de dez, por exemplo: *tres/cientos dos,* escrevem *3102* ou *31002.*

[9] Orozco (2005, p. 84) adota os termos propostos por Macaruso, McCloskey e Aliminosa (1993). Numeral: refere-se a um símbolo ou conjunto de símbolos que representam um número. Numerais arábicos: numerais expressos com algarismos (Ex: 56). Numerais verbais: numerais na forma de palavras (Ex. cinqüenta e seis) que se diferenciam em numerais verbais falados e numerais verbais escritos. Em um ditado numérico, por exemplo, transcodifica-se um numeral verbal falado a um formato arábico ou escrito.

Ao escutarem o número verbal ditado, as crianças o fragmentam em partículas com sentido para elas, codificam a palavra centos, que expressa a potência de dez, e justapõem os numerais que escrevem: *31002*. Não entendem que as partículas que anunciam potências de dez (*cientos*) não são escritas e que a elas devemos aplicar a regra do valor posicional. Tendem a codificá-las literalmente, como se fossem partículas de quantidade. Esses erros rompem a sintaxe do numeral, pois geralmente alteram a magnitude do número, com exceção de números, tais como *tres mil cuatro (3004*). Em outros casos, ao codificarem os fragmentos que obtêm, escrevem o numeral que lhes permite codificar a palavra numérica correspondente a unidades de ordem inferior, na posição do último zero do numeral que utilizam para codificar a expressão sintática. Exemplo: *ciento veinticinco: 1025.* Nesse tipo de erro, predominam as regras do formato verbal falado sobre as regras do formato arábico.

b) Codificação de fragmentos diferenciados, utilizando numerais justapostos: justaposição

Fragmentação das palavras numéricas que compõem a expressão numérica verbal ditada e codificação do numeral arábico correspondente a cada fragmento, justapondo-os. Exemplo: *trescientos* | *veinticinco: 30025.* Em *quinientos* | *cuarenta y tres mil ciento doce,* escrevem *500.43.112.* As crianças fragmentam a expressão numérica verbal em expressões com sentido para elas; porém, a lógica da codificação supera a correspondência entre o fragmento da expressão verbal e o numeral que escrevem, uma vez que a criança sabe que quinhentos pertence à classe dos milhares e o codifica utilizando ponto (.), que indica mil (*500.*) e justapõe o numeral correspondente à expressão verbal restante (*43.112*).

c) Codificação de fragmentos diferenciados, utilizando numerais compactados: compactação.

Codificação das expressões numéricas verbais correspondentes a unidades em uma ordem dada, utilizando numerais que compactam. Exemplos: *trescientos veinticinco: 3025.* A criança fragmenta o formato verbal nas palavras *trescientos/ veinticinco* e inicia a codificação. Escreve o numeral arábico correspondente à palavra numérica que designa a unidade de ordem superior (*300*); porém, a abrevia e sobrepõe o outro numeral que codifica a segunda palavra numérica que expressa a unidade de ordem inferior (*25*) no espaço que corresponde ao último zero do numeral que escreve: *3025.* Em outro exemplo: *quinientos cuarenta y tres mil ciento doce*: *543001012,* a criança codifica numerais correspondentes com os fragmentos que obtém (*quinientos cuarenta y tres mil/ciento/doce*); porém, compacta-os, escrevendo inicialmente o numeral correspondente à expressão numérica de ordem superior (*54300*) e, no lugar do último zero, escreve de maneira abreviada o numeral que codifica a quantidade cem (*10*). Escreve o numeral correspondente às unidades de ordem inferior (*ciento doce*) no lugar do último *0* do numeral que utiliza para codificar a quantidade cem que, igualmente, compacta.

A superposição do numeral correspondente às unidades de ordem inferior no último espaço do numeral correspondente às unidades de ordem superior permite supor um início de composição, bem como pensar que as crianças já trabalham sobre uma das regularidades próprias do formato arábico: a composição de numerais de ordens diferenciadas. São erros que alteram a magnitude do numeral e ocorrem principalmente nos numerais sem zero(0). As autoras observam que Scheuer e outros (2000) chamam esse tipo de notações não-convencionais de notações compactadas, porque começam a integrar o princípio de notação posicional.

d) Codificação de partícula sintática (potências de dez), utilizando-se zero

Diferenciação das partículas que, no formato verbal falado, marcam quantidade, e partículas que marcam potência de dez e codificação das últimas usando zero (0). Por exemplo: *quinientos cuarenta y tres mil ciento doce: 543<u>0</u>112; quinhentos e quarenta e três mil, cento e doze: 543<u>0</u>112.* Esses erros que rompem a sintaxe do numeral, ocorrem geralmente em numerais que apresentam zero e são cometidos por crianças do primeiro ao terceiro ano da Educação Primária colombiana. Possivelmente, as crianças codificam os dígitos que correspondem a marcas de quantidade (*quinientos cuarenta y tres)*e marcam a partícula sintática (mil) utilizando o zero (*0).*

e) Codificação de partícula sintática, utilizando ponto que indica mil

A potência de dez é expressa por ponto (.), que indica mil. Exemplos: *ochocientos mil nueve: 8.009; ochocientos millones sesenta y nueve mil: 8.069.000.* Nesses erros, parecem ignorar o sufixo "*cientos*", que define as unidades de cem na ordem dos milhares e milhões, e não utilizam zeros para codificá-lo. Coordenam as partículas sintáticas e de quantidade com os dígitos e sua correspondente posição para as unidades de ordem inferior, como em *009* (nueve) e *069.000 (sesenta e nueve mil).*

f) Coordenação da codificação de partículas sintáticas com posição de dígitos; porém, mudança de posição do ponto que indica mil

Coordenação da codificação das partículas referentes à quantidade e à potência de dez com os dígitos e a posição dos mesmos no número escrito, mas mudança da posição do ponto. Em outras palavras, crianças escrevem o numeral verbal falado da forma esperada; porém, mudam a posição do ponto que indica mil. Exemplo: *novecientos ochenta y siete mil seiscientos cincuenta y ocho: 9.87658.* O ponto é colocado sempre após o primeiro dígito, o que permite supor que esse tipo de erro está ligado com a classe que a criança domina, no caso, a dos milhares.

g) Codificação de partículas de quantidade, exceto dígito anterior ou posterior ao ponto que indica mil

Erros possivelmente cometidos por crianças que diferenciam as partículas de quantidade das partículas de potência de dez e entendem que não se utilizam de dígitos para codificar a partícula que enuncia potências de dez. Aplicam a regra aos dígitos que ocupam a posição anterior ou posterior ao ponto (.) que indica mil. Exemplos: *treinta y cuatro mil doscientos veintitrés: 3423; quinientos cuarenta y tres mil* | *ciento doce: 54.112.* Rompem a sintaxe do numeral, ao eliminarem um só dígito, geralmente aquele que corresponde ao dígito imediatamente anterior ou posterior ao ponto que indica mil.

h) Codificação de partículas de quantidade

Codificação das partículas de quantidade que, na escrita numérica, definem apenas dígitos e supressão de qualquer referência a partículas indicativas de potência de dez. Exemplos: *doscientos* **|** *uno: 21*; *veinte mil* **|** *ciento* **|** *tres: 213*. Em português: *duzentos / e um: 21*; *vinte mil/cento/e três: 213*. Nesses casos, ignoram todos os zeros e somente escrevem dígitos diferentes de zero. Em *nueve mil* **|** *setenta* (*970*) provavelmente não concebem a palavra setenta como uma composição de partes e justapõem o *70* ao 9, numeral correspondente a mil. Nesse caso, as regras do formato verbal falado dominam o subsistema de produção do numeral escrito.

É interessante observar que, nesta pesquisa, Orozco e Hederich (2000) verificaram a existência de uma alta associação entre os erros na escrita numérica e a série em que estudam. Alguns exemplos: 90% dos erros de codificação literal da parte sintática foram cometidos por crianças do primeiro e segundo anos da Educação Primária colombiana. Os erros relativos à codificação da partícula sintática utilizando zero foram cometidos por crianças do primeiro ao terceiro ano. Erros de compactação foram cometidos pelas crianças de todos os anos, mas com maior freqüência nos primeiros. Seus achados indicam que os alunos tendem a escrever corretamente numerais no intervalo previsto no programa de sua série e cometer erros ao escreverem numerais no intervalo imediatamente superior, quando as escritas convencionais ainda não foram apropriadas.

4.2 ESTRUTURAS CONCEITUAIS PARA NÚMEROS MULTIDÍGITOS

As relações entre o desenvolvimento das notações numéricas e a compreensão do sistema de numeração, especialmente o valor posicional, são estudadas por Fuson (1990), a partir de um modelo que denomina UDSSI (*unitary, decade, sequence, separate, integrated)*, em que explica a construção, pela criança, das estruturas conceituais necessárias para a compreensão de números multidígitos. As estruturas conceituais constituem-se em intérpretes mentais do que as crianças vêem e ouvem no mundo. Neste sentido, uma estrutura conceitual em uso indica ou reflete os aspectos da situação matemática num dado momento, ou seja, capta quais os aspectos focalizados e como estes são interpretados. Por outro lado, uma criança pode ser auxiliada a construir estruturas conceituais por tipos específicos de objetos disponíveis, pela forma como são usados, pelas discussões em torno de seus diferentes usos entre os alunos e os professores e por atividades que, de alguma forma, ajudam ou orientam os alunos A perspectiva teórica que orienta o seu trabalho fundamenta-se numa visão de aprendizagem voltada ao “fazer significado”, na qual o que uma criança “vê”, quando olha para os objetos, depende das estruturas conceituais que utiliza.

As estruturas conceituais para multidígitos elaboradas por Fuson (1990) têm como base uma tríade de relações composta por três elementos: uma quantidade (●●●●), sua expressão verbal (nome do número: quatro) e sua expressão escrita (símbolo numérico escrito: *4*), expressa por um triângulo. Inicialmente a tríade é construída para dígitos únicos e, antes que as crianças possam aprender sobre números de dois dígitos, precisam ter realizado várias aprendizagens sobre números de um único dígito: ler (dizer o nome do número que corresponde a cada marca de número escrita), escrever o numeral correspondente a cada nome de número, e quantificar cada marca escrita e nome de número. As relações que se estabelecem entre os elementos das tríades (quantidade, nome de número e escrita numérica) não se dão ao mesmo tempo para um mesmo número. É possível que uma criança saiba dizer o nome do número sem saber escrever o símbolo numérico que lhe corresponde. Do mesmo modo, estas relações não se dão ao mesmo tempo para todos os números. As crianças podem aprender as relações entre as tríades antes para o três e depois para o nove, por exemplo.

As relações unitárias que se estabelecem na tríade são insuficientes para a compreensão do valor posicional. Essas estruturas elaboradas por Fuson (1990) contêm conhecimentos sobre as características superficiais dos números multidígitos em sua versão oral e escrita, e sobre a ordem e direção específica de aumento das quantidades. Permitem saber que na escrita numérica os algarismos aparecem horizontalmente e o valor de suas posições aumenta a partir da direita. Na versão oral, permitem aprender a seqüência de nomes de multiunidades e das palavras ordenadas em valor decrescente, como são expressas (milhar, centena, dezena, unidades) e que os seus valores decrescem a partir da esquerda. Esses conhecimentos superficiais permitem também a transcodificação de expressões numéricas orais em escritas numéricas, como, por exemplo: escutar o nome do número, duzentos e vinte e seis, e reproduzi-lo na escrita, mas podem conduzir ao erro (como em *200206*), uma vez que estas estruturas não contêm o conhecimento necessário para compreender numericamente as expressões e para compreender que, enquanto os valores dos nomes dos números são explicitados na linguagem oral, na escrita dependem da posição que ocupam. A compreensão do valor posicional, no entanto, requer a construção de estruturas conceituais multiunitárias. São elas: concepção multidígito unitária; concepção de dezenas e unidades; concepção de seqüência de dezenas e unidades; concepção de dezenas separadas; concepção de dezenas e unidades separadas e concepção integrada de dezenas e centenas; concepção de dígito único concatenado (FUSON, 1990).

a) Concepção multidígito unitária

A *concepção multidígito unitária* é uma extensão das relações unitárias para dígitos simples que se estabelecem entre um nome de número, uma quantidade e um símbolo escrito. Neste caso, não há diferenciação de grupos em nenhum dos componentes da tríade. Por exemplo, para (●●●●●●●●●●●●●●●●●) corresponde o símbolo escrito 17, sem nenhuma relação com um grupo de dez e sete unidades e também sem nenhuma relação com o *dez* em *dez*essete. A quantidade é considerada um conjunto de dezessete elementos, em sua totalidade.

b) Concepção de dezenas e unidades

A *concepção de dezenas e unidades* caracteriza-se pela separação das séries de dez no nome do número e pelo princípio de uma relação entre cada parte do nome do número, separadamente, à quantidade a que ela se refere. Por exemplo, em *vinte e sete*: vinte para vinte objetos e sete para sete objetos. Em outras palavras, as crianças passam a reconhecer a estrutura de dezena nos nomes dos números. Embora isto já seja possível, esta estrutura ainda é unitária, uma vez que o vinte do vinte e sete é visto como vinte objetos (mais sete objetos) e não como dois grupos de dez objetos (mais sete grupos de um objeto). A construção desta estrutura é facilitada por experiências em contar números grandes de objetos e pela convivência diária com escritas numéricas de séries de dez (20, 30, 40, etc.), o que favorece a separação das séries de dez e de um no nome dos números e a relação de cada parte separadamente à quantidade a que elas se referem.

c) Concepção de seqüência de dezenas e unidades

A *concepção de seqüência de dezenas e unidades* corresponde a uma estrutura que permite à criança contar por grupos de dez (dez, vinte, trinta, quarenta...), e “ver” os grupos de dez dentro de uma quantidade. No caso de *cinqüenta e três*, por exemplo, contaria: dez, vinte, trinta, quarenta, cinqüenta e saberia que cinqüenta representa os grupos de dez contados até então. É construída a partir das experiências das crianças de contagem e agrupamento de dez e pode, no início, vir acompanhada de esquemas que auxiliam na computação dos grupos de dez, tais como fazer corresponder um dedo para cada um dos grupos de dez contados.

d) Concepção de dezenas e unidades separadas

A estrutura denominada *concepção de dezenas separadas* permite à criança focalizar e contar os grupos de dez, ao invés dos elementos dos grupos. Assim, em cinqüenta e três, a contagem passa a ser: um, dois, três, quatro, cinco grupos de dez e um, dois, três grupos de um. Por exemplo, em 53, contaria 1,2,3,4,5 dezenas e 1,2,3 unidades. A quantidade de dois dígitos é entendida como dois tipos de unidades separadas: unidades de dez e unidades de um.

e) Concepção integrada de dezenas e unidades separadas e seqüência de dezenas e unidades

A *concepção integrada de dezenas e unidades separadas e seqüência de dezenas e unidades* é caracterizada pela integração das duas últimas concepções referidas acima: seqüência de dezenas e unidades e dezenas e unidades separadas. Como vimos, uma criança com a concepção de *seqüência de dezenas* tem que contar de dez em dez até cinqüenta, por exemplo, e lembrar quantos grupos de dez contou para achar cinco dez em cinqüenta. Uma criança com a concepção de *dezenas separadas* tem que contar cinco grupos de dez para depois descobrir que eles formam cinqüenta. A concepção integrada de dezenas permite às crianças passar de uma a outra destas concepções com maior flexibilidade e rapidez de raciocínio e assim entender cinqüenta, tanto como cinco grupos de dez unidades quanto como cinco dezenas individuais. Permite à criança saber de imediato que cinqüenta tem cinco dezenas, porque os dois componentes multiunitários de dez estão relacionados.

f) Concepção de dígito único concatenado

A *concepção de dígito único concatenado* pode existir e ser usada em certas situações, tais como nos algoritmos tradicionais de adições e subtrações, onde os números são escritos em colunas e conduzir a erros de cálculos. O cálculo armado em colunas pode levar as crianças a considerarem apenas o valor absoluto dos algarismos no número. Por exemplo, ao somar 234 + 156 podem interpretar que o 2 e o 1 representam 2 e 1 elementos e não 2 e 1 grupos de cem, respectivamente. Mesmo crianças que possuem uma concepção integrada de dezenas que lhes permite realizar cálculos mentalmente (como 200+100 +30+50+4+6) podem utilizar uma concepção de *dígito único concatenado,* quando resolvem contas armadas em colunas.

As crianças podem ter mais do que uma concepção de multidígitos construídas e podem usá-las em diferentes situações ou combinar partes de diferentes tríades em uma mesma situação. Por exemplo, contar vinte e sete objetos unitariamente e usar a concepção de seqüências de dezenas para escrever o nome do número: *207.* Em relação a esta possibilidade, Fuson (1990) e Fuson e outros (1997) observam que diversas concepções diferentes podem estar disponíveis a uma dada criança e serem usadas em diferentes situações, o que permite que novas concepções sejam construídas ao invés de substituir antigas concepções. É importante frisar que, conforme as autoras, nem todas as crianças constroem todas as concepções. Estas construções dependem das experiências vivenciadas pelas crianças na sala de aula e fora da escola.

A construção da seqüência de dez pelas crianças depende em grande parte do ambiente no qual aprendem, o que possibilita a construção por primeiro de uma ou de outra concepção. Se o ensino é centrado em palavras, facilita o desenvolvimento da concepção na seqüência de dez. Se prioriza os numerais escritos, facilita a concepção de dezenas e unidades separadas. Em outros casos podem construir as duas concepções e relacioná-las numa concepção integrada da seqüência e separação de dezenas. Daí a recomendação das autoras a respeito da fundamental importância de a escola oferecer oportunidades para que elas ocorram. Esta observação, aliada ao fato de que podem coexistir diferentes concepções num mesmo momento, inviabiliza pensar que as estruturas multiunitárias correspondam a estágios seqüenciais de desenvolvimento, argumenta Orrantia (2001), embora seja possível perceber nelas uma seqüência evolutiva que parte de uma concepção unitária para uma estrutura de dezena bastante complexa e nela se apoiar para organizar situações instrucionais que favoreçam a sua aquisição.

A importância dos aspectos lingüísticos para a aprendizagem do sistema de numeração decimal é salientada por Fuson e outros (1997). Crianças que falam palavras para números em sistemas de numeração que não apresentam irregularidades têm maior facilidade em aprender sistemas de numeração (como o chinês, o japonês e o quéchua, por exemplo que, para doze dizem: juni, shier e chunca ishcai, respectivamente). A esta afirmação apresentam o argumento de que nesses sistemas as relações características da *concepção de dezenas separadas* são fáceis de construir, porque as palavras para números nomeiam o dez regularmente. As crianças contam os grupos de dez usando números de dígito simples (um dez, dois dez, três dez, quatro dez, cinco dez) ou omitem a palavra *dez* enquanto contam, deixando-a entendida (um, dois, três, quatro, cinco dez). Assim, precisam somente construir as *concepções unitária* (a quantidade é considerada um conjunto de dezessete elementos, em sua totalidade) e de *dezenas separadas* (estrutura que permite à criança focalizar e contar os grupos de dez, ao invés dos elementos dos grupos). Por outro lado, nestes sistemas, os nomes de números facilitam as ligações entre cada parte de uma palavra de número e cada parte da marca escrita. Sistemas de numeração em línguas como o português e o inglês, por exemplo, oferecem mais dificuldades, porque a aprendizagem dos nomes de números de dois dígitos requer uma *concepção de seqüências de dezenas* (estrutura que permite à criança contar por grupos de dez: dez, vinte, trinta, quarenta... e “ver”, por exemplo, em 46, os grupos de dez dentro da respectiva quantidade) e a aprendizagem da escrita numérica requer uma *concepção de dezenas separadas* (estrutura que permite à criança focalizar e contar os grupos de dez, ao invés dos elementos dos grupos, ou seja, em 43 o 4 indica quatro grupos de dez). A separação das séries de dez e de uns e a tentativa de ligar as partes da palavra do número da série de dez e de um nas escritas numéricas é que conduz à produção de escritas numéricas não-convencionais. Ao escrever quarenta e três, fazem corresponder cada parte do nome do número a uma marca escrita: *403* (quarenta/três).

4.3 A COMPREENSÃO DAS INVARIÁVEIS DO SISTEMA

A importância da construção de invariáveis operatórias como base para a compreensão do valor posicional e suas implicações na escrita numérica tem sido amplamente destacada (NUNES;BRYANT,1997; OROZCO; HEDERICH, 2000; KATO et al., 2002).

A prática em contagem, as habilidades das crianças com a adição, a habilidade de escrever números e os indícios lingüísticos são analisados por Nunes e Bryant (1997), como possíveis bases para a compreensão do sistema decimal. Em um estudo inicial, consideraram que crianças que implementam uma estratégia de contagem em sequência, tal como o *counting-on*[10], quando adicionam dois conjuntos, estão se dando conta de que o número total é composto de dois números menores, demonstrando uma compreensão elementar da composição aditiva do número. Por exemplo: diante da tarefa de descobrir quantos doces ganhou ao todo, se recebeu cinco de sua mãe e três do pai, a criança pode resolvê-la contando todos os objetos (*counting-all*) ou apenas contando a partir do cinco (*counting-on*). Este fato pode ser relevante para a compreensão de aspectos importantes da estrutura decimal, argumentam, ou seja, para a compreensão de que uma totalidade como 12 pode ser decomposta em subtotalidades menores como 10 e 2.

Um sistema de numeração com uma base envolve: contar unidades de tamanhos diferentes que, no caso do sistema decimal, correspondem a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar, etc. que podem agrupar-se em ordens e classes; a compreensão das equivalências dentro do sistema: dez unidades valem o mesmo que uma dezena, do mesmo modo que, no dinheiro, dez cédulas de um real valem o mesmo que 1 cédula de 10 reais e a compreensão do

[10] Estratégia de contagem que envolve contar os elementos, na seqüência, a partir de uma subtotalidade.

valor relativo da contagem de unidades; a compreensão da composição aditiva do número. Em relação à composição aditiva, Nunes e Bryant (1997) referem um estudo realizado por Carraher (1985), com 72 crianças pré-escolares cujas idades variavam de 5 a 7 anos e 20 adultos de um meio socioeconômico pobre, que nunca freqüentaram a escola, que evidencia a importância da composição aditiva do número na compreensão do sistema de numeração decimal. A pesquisa envolveu duas tarefas: a de comparar o valor do total dos conjuntos compostos por moedas ou cédulas de diferentes denominações e a tarefa de compra, na qual crianças e adultos necessitavam levar em consideração o valor relativo das moedas e realizar trocas para efetuar pagamentos. A tarefa voltada à comparação de conjuntos de unidades diferentes evidenciou que 60 % das crianças foram capazes de reconhecer que quatro notas de 10 c[11] compram mais doces do que quatro notas de 1 c e nenhum dos adultos cometeu erros na tarefa. Crianças e adultos podem, portanto, atingir um entendimento do conceito de unidades de tamanhos diferentes, sem freqüentar ou ter freqüentado uma escola e também sem saber escrever números multidígitos, quando agem em contextos que envolvem o sistema monetário. Na tarefa de compra as crianças recebiam quatro notas de 10 c e quatro de 1 c e eram solicitadas a pagar 13 c ou 16 c. Embora tivessem apenas oito notas poderiam realizar as compras se levassem em conta o valor relativo das moedas. Apenas 39% das crianças tiveram êxito na tarefa. Aos adultos era solicitado imaginar quantas notas de 100 c, 10 c e 1 c necessitariam dispor para pagar uma quantia de 365 cruzeiros usando o menor numero de notas possível. Cerca de 70 % responderam a todos os itens corretamente e nenhum deles respondeu a todos incorretamente.

Os resultados evidenciaram que a compreensão do valor relativo de unidades e a compreensão da possibilidade de compor totais com unidades de valores diferentes podem ser dominadas a partir do uso do sistema de numeração oral, desde que em coordenação com a familiaridade com sistemas monetários. Evidenciaram também que as crianças de 5 anos podiam pagar muito bem as compras com moedas de 1 c, mas fracassavam, quando precisavam usar moedas de 10 c e de 1 c combinadas, o que sugere que crianças de 5 anos não têm um total entendimento da estrutura decimal. Nunes e Bryant (1997) consideraram que esta

[11] Refer-se ao Cruzeiro, moeda brasileira na época da realização da pesquisa. Assim, 10 c equivaleriam a dez cruzeiros.

não-compreensão não parece ser devida às experiências com contagem de unidades de tamanhos diferentes, mas ao não-entendimento da compreensão aditiva do número. A interação com operações de adição possibilitaria a construção da composição aditiva do número que, por sua vez, sustentaria a compreensão do sistema de numeração decimal, na concepção dos autores.

Entender a estrutura do sistema envolve compreender que números maiores podem ser criados combinando números menores. A composição aditiva, propriedade fundamental dos sistemas de numeração com uma base, possibilita esta compreensão: qualquer número *n* pode ser decomposto em dois outros que vêm antes dele na lista ordinal dos números, de tal modo que estes dois somam exatamente *n.* Assim: 12 pode ser decomposto em 11 +1, 10 + 2, 9 + 3, e assim por diante. Possibilita também a compreensão da ordem dos números: seis é maior que cinco e cinco é um subconjunto possível de seis, mas seis não é um subconjunto de cinco (NUNES; BRYANT, 1997).

Ainda com o objetivo de verificar as correlações existentes entre escritas numéricas e composição aditiva do número, os autores referem a pesquisa feita por Carraher (1982) e Carraher e Schliemann (1983) com cem crianças brasileiras de primeira e segunda série, dando a elas a tarefa de compra, descrita anteriormente, e solicitando que escrevessem e lessem um conjunto de números multidígitos. Dentre os resultados foi possível agrupar crianças que não podiam entender a composição aditiva das somas de dinheiro na tarefa de compra, nem escrever números corretamente; crianças que desempenhavam bem a tarefa de composição aditiva, mas ainda cometiam erros ao escrever números e crianças que dominavam tanto a composição aditiva das somas de dinheiro como a escrita convencional dos números. Não houve crianças que lessem e escrevessem números e que falharam na tarefa de composição aditiva. É importante salientar que as crianças do segundo grupo desempenhavam bem a tarefa de composição aditiva, mas cometiam erros sistemáticos na escrita numérica. Estes erros consistiam justamente na escrita numérica não-convencional, ou, nas palavras dos autores, por concatenação. As crianças deste grupo não conseguiam realizar uma representação compacta por valor de lugar, embora algumas até eliminassem alguns zeros em suas produções. Os dados permitiram concluir que as crianças que não entendem composição aditiva não são capazes de escrever e ler números multidígitos, mas nem todas que entendem composição aditiva necessariamente saberão como ler e escrever números. Em sua concepção, se as crianças que entendem composição aditiva forem adequadamente ensinadas, prontamente aprenderão a escrever e ler números.

Em um estudo publicado em 1997, Nunes e Bryant analisam a composição aditiva, as habilidades das crianças em escrever números e os indícios lingüísticos do sistema como possíveis bases para a compreensão do sistema de numeração, a partir da análise de escritas numéricas produzidas por crianças inglesas. Foi proposto às crianças um ditado numérico que envolvia um número de um único dígito (8), três números de dois dígitos (14, 25, 47), dois números de três dígitos (108, 129), um número de quatro dígitos (2.569) e números inteiros, tais como 10, 60, 100, 200, 1.000. Também foi solicitado que lessem alguns números.

Os resultados da pesquisa revelaram que o tamanho do número não constitui uma dificuldade maior para as crianças, tanto na leitura quanto na escrita. Um maior número de crianças escreve 100, 200 ou 1.000 com mais facilidade do que 123 ou 202, por exemplo. Duas são as razões possíveis para isto, de acordo com os autores: números como 100, 300, 1.000 e 2.000 são mais freqüentemente vistos pelas crianças na vida cotidiana e não envolvem uma estrutura aditiva da mesma forma que os intermediários, tais como 123 ou 202. A memorização foi considerada improvável para explicar o fato de as crianças escreverem números de dois dígitos incorretamente, embora admitam a possibilidade de explicar o sucesso em escrever corretamente números correspondentes à dezenas, centenas e milhares exatos: 100, 200, 1.000. Consideram ser bastante provável que as crianças utilizem um sistema que ajude nestas produções, embora nesta pesquisa não tenha ficado claro qual é este sistema. A pesquisa possibilitou, no entanto, confirmar a hipótese de que as crianças são aprendizes ativos do sistema de numeração escrito, ou seja, geram representações escritas e criam sistemas próprios para produzir números escritos de forma relativamente consistente, tais como:

- uso de uma correspondência termo a termo entre um nome e um dígito: 25 requer dois dígitos; 60 requer um dígito; 100 requer um dígito
- Uso simultâneo de dois sistemas na produção das escritas numéricas: um para a escrita de números de dois dígitos (como 47 e 25) e de números como 100, 200 e 1.000 e outro para números intermediários, tais como 108 e 2.569. Os primeiros números foram frequëntemente escritos corretamente pelas

mesmas crianças que escreviam por concatenação números intermediários. Por exemplo, para 108 escreviam: *1008*; para 2.569: *200050069*.

A estratégia de escrever cada componente de uma palavra para número após outra, em uma seqüência, tal como *200050069* para 2.569, denominada por Nunes e Bryant (1997) de “concatenação”, foi a estratégia mais utilizada pelas crianças na produção de escritas.[12] Os autores salientam que este tipo de escrita foi observado em crianças de diferentes nacionalidades: brasileiras, italianas, francesas e belgas, além das crianças inglesas, por diferentes pesquisadores. Foram observadas as escritas dos números 108, 129 e 2.569 produzidas pelas crianças participantes do estudo e separaradas em dois grupos: um com crianças que haviam tido sucesso na tarefa de composição aditiva e outro com crianças que não haviam resolvido esta tarefa. As crianças do primeiro grupo obtiveram 60% de respostas corretas enquanto as do segundo grupo tiveram apenas 13% das respostas corretas, o que permitiu considerar, neste estudo, que o fator que conduz à escrita convencional possa ser o domínio da composição aditiva do número por unidades de valores diferentes.

A influência dos indícios lingüísticos na compreensão da estrutura decimal também foi objeto de estudo de Nunes e Bryant (1997). As aprendizagens das crianças são facilitadas e significativamente influenciadas pela regularidade dos sistemas de contagem, e isto parece resultar parcialmente do uso de indícios lingüísticos específicos e parcialmente de uma compreensão geral da composição aditiva. Nem sempre a estrutura de base é refletida no nome dos números, ou seja, nem sempre ou, em nem todos os nomes dos números de determinadas línguas, a composição aditiva do número fica explícita. É o que ocorre no português: onze, doze, e no inglês: eleven. Em várias pesquisas Nunes e Bryant (1997) constataram que a regularidade dos sistemas de contagem influencia significativamente a aprendizagem das crianças e que sistemas regulares, como o quéchua, o chinês e o japonês, cuja contagem de unidades de valores diferentes é mais clara, permitem às crianças melhores possibilidades para entender composição aditiva, considerada necessária, nesta obra, para a compreensão de um sistema de base decimal. Dizem os autores: “[...] embora possam ajudar, os indícios lingüísticos não são suficientes

[12] Orozco e Hederich (2000) identificaram esta forma de escrever números como “justaposição”, tipo de erro em que crianças codificam expressões numéricas verbais que designam unidades em uma ordem dada, com os correspondentes numerais e justapõem os numerais que obtêm.

para as crianças atingirem um entendimento da composição aditiva" (NUNES; BRYANT,1997, p.64).

A tese de que nem a escolarização nem a habilidade de escrever números são cruciais para a compreensão dos aspectos do número também foi defendida por Nunes e Bryant (1997). Várias pesquisas cujos resultados apóiam esta hipótese são apresentadas por esses autores que iniciam a discussão deste tema contrapondo a sua posição com a de Alexander Luria (1969), para o qual as pessoas vêm a entender a estrutura da base dez, quando são ensinadas a escrever números. Referem que o autor embasou esta afirmação nas observações realizadas em pacientes com dano cerebral, que não podiam escrever números acima de 100 e também apresentavam dificuldade em recombinar unidades em adição e subtração. Por exemplo: ao somar 38 com 57, não conseguiam trabalhar com a idéia de reserva. Referem que Luria (1969) atribuiu ao fato de os pacientes não dominarem a escrita de números as dificuldades dos mesmos em trabalhar com as propriedades do sistema de numeração. Para ele, o sistema escrito ou o arranjo espacial dos números escritos seria a chave para a compreensão do sentido de numeração decimal. Embora reconheçam a importância das observações de Luria (1969) e o fato de que há uma ligação interessante entre o não-domínio da escrita numérica e a dificuldade em cálculos que envolvem o conhecimento do sistema de numeração (cuja causa e efeito ainda não estão claras, observam), Nunes e Bryant (1997, p. 60) questionam a interpretação dada à dificuldade, por aquele autor, argumentando que "os pacientes referidos podem não ter sido capazes de escrever números como um resultado direto de não serem capazes de combinar unidades de tamanhos diferentes em vez de o contrário".

Em estudo posterior, Krebs, Squire e Bryant (2003) mostram que a composição aditiva não é o precursor para o entendimento da estrutura decimal. Seus achados evidenciam que o entendimento da estrutura decimal precede o entendimento da composição aditiva. Foram testadas em tarefas de contagem e de compras 51 crianças de uma escola estadual primária em Oxford, sendo 26 com 5 anos de idade e 25 com 6 anos de idade. Os dados evidenciaram que o *counting-on* não é um precursor para o entendimento da estrutura decimal. As crianças que usavam o *counting-all* quando adicionavam duas quantidades, tinham sucesso nos testes mistos da tarefa de compras. As crianças utilizavam mais o *counting*-all, quando adicionavam quantias envolvendo unidades do que quando adicionavam quantias que envolviam séries de dez, presumivelmente por terem um melhor entendimento da composição aditiva com séries de dez do que com outros números. Para os autores, as crianças aprendem sobre composição aditiva através do aprendizado da estrutura decimal. Em outras palavras, as crianças primeiro aprendem que números maiores de 10 podem ser compostos de dezenas e unidades, e isto leva-as a perceber o princípio mais geral da composição aditiva. Elas percebem que um número maior do que dez pode ser composto de uma série de dez e uns, mas ainda antes de se darem conta de que qualquer número pode ser composto em subtotalidades menores. Outra descoberta foi que crianças de 6 anos tendiam a ter mais dificuldades de combinar cincos e uns, do que combinar dezenas e unidades. Por outro lado, seu desempenho em combinar "cincos e uns" foi muito melhor do que o das crianças de 5 anos. Isto sugere que, por volta dos 6 anos, as crianças começam a transferir seu conhecimento de composição aditiva com dezenas (isto é, a estrutura decimal) para cincos, e fornece evidências de que as crianças podem aprender sobre composição aditiva de números através do aprendizado da estrutura decimal, e não ao contrário, como se supunha anteriormente. Os autores alertam, no entanto, que estudos adicionais são necessários para determinar em que idade este conhecimento é transferido para outros números.

Neste trabalho Krebs, Squire e Bryant (2003) levantam um importante questionamento, para o qual consideram ainda não haver respostas definitivas: se o entendimento da composição aditiva não precede o entendimento da estrutura de séries de dez, então o que precede? Como exatamente as crianças aprendem sobre estrutura decimal? Respondem às questões apresentando algumas possibilidades: talvez as crianças aprendam sobre a estrutura de dez através de experiências com dinheiro, ou talvez pistas lingüísticas ajudem a revelar a estrutura de dez da nossa estrutura de contagem, como já supunham anteriormente Nunes e Bryant (1997). Em relação à influência da linguagem e da transparência dos sistemas de numeração, afirmam:

> Parece que um sistema de linguagem transparente facilita o aprendizado da estrutura decimal, e nossas descobertas sugerem que é provável ser o precursor para o entendimento da composição aditiva. Desta maneira, nós podemos esperar que as crianças cuja língua principal é transparente adquiriria o entendimento da composição aditiva numa idade mais precoce. Para nosso conhecimento, isso ainda não foi testado (KREBS; SQUIRE; BRYANT, 2003, p. 693).

Outros aspectos ainda são considerados como precursores da compreensão da estrutura do sistema de numeração decimal. Kamii e Joseph (1992, 2005) trazem importantes colaborações neste sentido, ao considerar que a compreensão do valor posicional é possível somente quando a criança consegue construir mentalmente um sistema de dezenas, uma vez que até então só é capaz de pensar em um sistema de unidades (KAMII; JOSEPH, 1992, 2005). Assim, para poder pensar num número como, por exemplo, 32, como compreendendo 3 dezenas e 2 unidades, precisará construir um segundo sistema, o de dezenas, sobre o sistema de unidades por abstração construtiva. A construção deste sistema não se dá por transmissão apenas, como supõem os métodos tradicionais de ensino do sistema de numeração, uma vez que as relações hierárquicas parte-todo constituem-se em conhecimentos próprios do domínio do conhecimento lógico-matemático. A não-construção de um sistema de dezenas não impossibilita a criança de realizar cálculos, uma vez que poderá fazê-lo através de algoritmos não convencionais que envolvam unidades e não através dos algoritmos tradicionais, que envolvem o sistema posicional do número. Estes estudos não fazem referências diretas às escritas numéricas propriamente ditas.

O sistema decimal tem de ser construído por toda criança a partir de seu próprio sistema de unidades, enfatizam Kamii e Joseph (2005). A melhor maneira de fazer isto, afirmam as autoras, é estimulando-a a pensar em dezenas e unidades simultaneamente, como o fazem os adultos e crianças mais velhas. Crianças de primeira série pensam que 34 são 34 unidades. Já algumas crianças de segunda série conseguem pensar em “uma dezena” e “dez unidades” em dois momentos distintos, mas não no mesmo momento. Crianças mais velhas e adultos já têm o conhecimento lógico-matemático das dezenas e das unidades e é por isso que podem ver “uma dezena” e “dez unidades’ simultaneamente, em um bloco de dez (como, por exemplo, no material dourado).

O domínio da escrita numérica é vinculado por Katto e outros (2002) ao domínio da conservação numérica, ao estudar as relações entre conservação numérica e representação em tarefas de produção de escritas. Para as autoras, a conservação numérica consiste no suporte necessário à produção de escritas. Realizaram uma pesquisa com sessenta crianças japonesas, entre a idade de 3 anos e 4 meses e 7 anos e 5 meses, para investigar a relação entre seus níveis de abstração (avaliados pela tarefa de conservação do número) e seus níveis de representação (avaliados por uma pergunta-tarefa em que as crianças eram solicitadas a expressar suas representações gráficas de pequenos grupos de objetos). Nesse trabalho, concluem que a abstração e a representação estão completamente relacionadas e que as crianças investigadas podiam representar até ou abaixo de seus níveis de abstração, mas não acima deste nível. Assim, por exemplo, crianças que possuíam um nível de abstração que lhes permitia apenas quantificar objetos por correspondência um a um não eram capazes de expressar uma quantidade total com um único numeral. Em suas palavras:

> Se as capacidades de uma criança não estão desenvolvidas suficientemente para permitir-lhe fazer uma correspondência um a um na tarefa de conservação, não estão desenvolvidas suficientemente para permitir à criança representar unidades compostas (KATO et al., 2002, p.43).

Crianças que pensavam sobre a quantidade total de uma coleção como um total composto e não mais apenas sobre unidades podiam representar quatro pratos, por exemplo, com o numeral 4 e não mais com correspondências um a um em forma de símbolos, tais como 0000 ou 1234.

Nesse estudo, Kato e outros (2002) também verificaram que mesmo o conhecimento social ou convencional dos números é usado pelas crianças de acordo com seu nível de abstração (avaliado pela tarefa de conservação da quantidade). De 33 crianças que sabiam escrever os numerais, 18 usavam desenhos de figuras ou escreviam os numerais com correspondência um a um (1 2 3 4, por exemplo), ao invés de expressarem a quantidade total com um único numeral. Assim, concluem que quando as crianças ainda estão pensando sobre objetos individuais, elas externalizam seus pensamentos com desenhos ou escritas no papel. Quando seus pensamentos avançam no sentido de poder pensar em totalidades compostas, elas começam a externalizar pensamentos com um único numeral.

4.4 AS REGULARIDADES DO SISTEMA

A compreensão do sistema de numeração se dá através da constatação das regularidades que se apresentam neste sistema. Para as crianças se apropriarem do sistema de numeração, elas deverão descobrir o que ele oculta e isto ocorre a partir da constatação das regularidades da escrita numérica e não a partir do ensino formal de agrupamentos. A numeração escrita é um produto cultural, um objeto de uso social cotidiano, e as crianças elaboram conceitualizações e estratégias relativas a ela e ao valor posicional, bem antes de entrar na escola, mesmo não compreendendo as regras do sistema de numeração decimal. Essas idéias defendidas por Lerner e Sadovsky (1996) são apresentadas a seguir.

Os dados das pesquisas desses autores revelam que, embora as crianças ainda não compreendam os agrupamentos em base dez, elas elaboram hipóteses e argumentos que lhes permitem comparar números na relação com fragmentos fragmentos de escritas relativas à seqüência numérica. Por exemplo:

a) quanto maior a quantidade de algarismos de um numeral, maior é o número, embora não generalizem esta hipótese de maneira imediata a todas as situações. Assim, 235 é considerado maior que 21 por possuir mais algarismos. Algumas crianças podem contradizer-se ao comparar números como 112 e 89, afirmando inicialmente que o maior número é o 112 e logo considerar o 89 maior, argumentando que os números 8 e 9 são maiores ou que a soma 8 + 9 é 17, e por esta razão seria o maior, revelando a não-generalização imediata deste critério;

b) o maior número é aquele cujo primeiro algarismo é maior. Desta forma, 21 é maior do que 12, porque o primeiro no doze é o um e o no vinte e um é o dois. Sabem também que, quando o número de algarismos das duas quantidades é o mesmo, é preciso apelar ao segundo para decidir qual é o maior. Neste caso, a generalização também não se dá de imediato, uma vez que o valor absoluto dos números pode fazê-las duvidar deste processo: ao comparar 25 e 16, por exemplo, consideram que o dezesseis é maior, porque o 5 tem um a menos e o seis, um a mais.

As conceitualizações elaboradas pelas crianças a respeito da escrita dos números baseiam-se nas informações que extraem da numeração falada e da escrita convencional das dezenas, centenas, unidades de mil exatas, denominadas de “nós” pelas autoras. Estas informações permitem que as crianças construam a hipótese de que a escrita numérica é o resultado de uma correspondência entre os nomes de números e os símbolos numéricos ou, em outras palavras, a de que a escrita numérica é o resultado de uma correspondência com a numeração falada. Esta é a hipótese que as conduz a escrever *200304* para duzentos e trinta e quatro, por exemplo, na concepção das autoras. A numeração falada, argumentam, não é posicional como a escrita. Nela, a justaposição das palavras supõe sempre uma operação aritmética de soma ou multiplicação. Por exemplo, *mil e quatro* significa *1000 + 4,* enquanto oitocentos significa *8 x 100*. Estas duas operações geralmente aparecem combinadas nos nomes dos números: cinco mil e quatrocentos significa *5 x 1000 + 4 x 100.* Quem busca compreender o sistema depara-se com alguns complicadores de ordem lingüística: mudança na ordem de associação das palavras indica mudança na operação aritmética envolvida. Por exemplo: cinco mil: 5 x 1.000. Mil e cinco: 1000 + 5.

As produções escritas de 50 crianças de cinco a oito anos de idade reunidas em duplas, pertencentes à mesma série, em torno de situações experimentais que envolviam a comparação e a produção de números são analisadas pelas autoras. Os dados obtidos revelam que a apropriação da escrita convencional dos números não segue a ordem da série numérica, tal como é ensinada nas escolas nos dias de hoje. As crianças apropriam-se, em primeiro lugar, das escritas dos “nós”, ou seja, das potências de dez: dezenas, centenas, unidades de milhar exatas, tais como 10, 100, 200, 2.000..., e, só depois, elaboram a escrita dos números que se posicionam nos intervalos entre os nós, tais como 120, 140, etc.

Para produzirem os números cuja escrita convencional ainda não adquiriram, as crianças misturam os símbolos que conhecem, colocando-os de maneira tal que se correspondam com a ordenação dos termos da numeração falada. Por exemplo: para trinta e quatro as crianças escrevem *304*. Para cento e oito escrevem *100*8. Para mil, cento e cinco, escrevem *10001005.*.

Quanto ao processo de apropriação da escrita convencional dos números, as autoras apontam a tomada de consciência do conflito provocado entre as próprias hipóteses produzidas pela criança, contraditórias entre si, como fator provocador de incerteza em relação às suas próprias produções e de elaboração de novas estratégias e hipóteses que conduzirão à escrita convencional. Por exemplo, de um lado as crianças supõem que a numeração escrita vincula-se estritamente à numeração falada e, de outro, consideram que o maior número é aquele que possui mais algarismos. Ao escrever 2.000 e 3.000, o fazem da forma convencional e, ao escrever *dois mil, setecentos e oitenta e dois* o fazem por correspondência com a numeração falada: *200070082.* Como aceitar então que 3.000 seja um número maior que *200070082*? Uma de suas concepções contradiz a outra e instala-se o conflito que conduz à escrita convencional. A tendência apresentada pela criança é a de tentar "diminuir" as escritas, o que a leva a cortar alguns zeros, por exemplo, mas novos conflitos são gerados até atingir a escrita correta dos numerais, o que a leva a produzir escritas como *2007082*.[13]

A possibilidade de coexistirem modalidades de produção diferentes para números posicionados em diferentes intervalos da seqüência numérica é considerada por Lerner e Sadovsky (1996). As crianças podem escrever corretamente números que envolvam dezenas, tais como 34, e ao mesmo tempo produzir escritas correspondentes com a numeração falada, quando se trata de centenas, o mesmo podendo ocorrer entre estas e os milhares. É possível, também, coexistirem produções de escritas convencionais e não-convencionais para números da mesma quantidade de algarismos. Desta forma crianças podem escrever corretamente números entre 100 e 200 e não generalizar esta modalidade a outras centenas.

Neste estudo, as autoras questionam se as escritas que as crianças produzem devem-se apenas ao estabelecimento de correspondências com a numeração falada ou, se ao escrever, as crianças compreendem as operações que parecem estar presentes nas suas escritas. Trabalham com a hipótese de que, "[...] se as crianças descobrissem as operações envolvidas na numeração falada, este conhecimento seria importante para entender como funciona a numeração escrita" (LERNER; SADOVSKY, 1996, p.95). As autoras questionam, também: "aprender o conceito de dezena ajuda realmente a conhecer os números? Ou é o conhecimento dos números – e de sua escrita – que ajuda a compreender o conceito de dezena?" (p.87). A sua posição é clara: é o conhecimento dos números e da sua escrita que ajuda a compreensão do sistema de numeração decimal. Defendem a tese de que ao escrever números a criança passa a detectar regularidades na escrita numérica, e de

[13]As formas de escrita produzidas a partir da tendência em diminuir os algarismos dos números identificam-se com os "erros de compactação" descritos por Orozco e Hederich (2000).

que começa a realizar estas descobertas no contexto da interação social e da interação com a própria escrita.

No entanto, em estudo posterior, Lerner (2005) afirma que o avanço na conceitualização não pode ser alcançado só a partir de constatações empíricas sobre os observáveis na escrita numérica. Fundamenta no referencial teórico piagetiano a hipótese central de seu trabalho, de que o desafio de usar regularmente a numeração escrita leva as crianças a construírem regularidades, cuja elaboração constitui um passo essencial ao processo de conceitualização do sistema. As aprendizagens do sistema de numeração decimal, argumenta, são caracterizadas por uma tensão constante entre ter êxito e compreender, e estão longe de ser um processo linear. Trata-se de um processo consoante com o que diz Piaget (1978a): o êxito na ação pode preceder a compreensão profunda das razões que o explicam. O sujeito põe em jogo um saber fazer, cuja conceitualização se efetuará somente através de sucessivas tomadas de consciência. Quando as aquisições não são muito precoces, o êxito se conquista progressivamente, os avanços na conceitualização favorecem a capacidade de antecipação e tornam possível melhorar substancialmente a ação.

No estudo referido, Lerner (2005) verifica que, ao interagir com as escritas numéricas, as crianças põem em ação conhecimentos que ainda não podem explicar, apoiando-se inicialmente nas modificações que se operam nos significantes (próprios à escrita numérica). Esta interação pode levar à elaboração de regras que permitem às crianças ter êxito, mas por estarem centradas nos significantes, parecem produzir um divórcio temporal entre os significantes e o significado a que remetem. A reflexão sobre as razões que podem explicar o êxito sobre as situações em que o procedimento é eficaz, ou, em outras palavras, as tentativas de compreender os fundamentos que permitem o êxito ou o fracasso promovem a reflexão sobre as próprias reflexões realizadas e a tomada de consciência do que pensam. Possibilitam a passagem das regras elaboradas a partir da interação com a numeração escrita (do que é observável para as crianças ao atuarem sobre a escrita) à compreensão do princípio de posicionalidade que explica estas regras. Ou seja, à compreensão do modo como a notação numérica, como sistema de significantes, remete aos significados que representam.

Um posicionamento próximo ao de Lerner e Sadovsky (1996) sobre escritas numéricas e compreensão do sistema de numeração decimal é apresentado por

Teixeira (2005, 2006). Diz a autora: “A compreensão da numeração escrita parece depender não diretamente da aprendizagem dos critérios lógico-matemáticos do sistema (agrupamentos), mas da sua abstração a partir da exploração dos números e de sua escrita (TEIXEIRA, 2006, p. 131).

Teixeira (2005) relata um estudo realizado com oitenta alunos do Ensino Fundamental de escolas públicas, com o objetivo de verificar a natureza das dificuldades de aprendizagem da escrita numérica por eles enfrentadas. Foram examinadas as notações utilizadas em tarefas escolares relacionadas à numeração escrita a partir de atividades de leitura e escrita de números, questionando-se os aspectos relacionados ao significado da notação numérica quanto à representação das unidades e dos agrupamentos de números. As dificuldades foram agrupadas em cinco padrões:

a) dissociação entre o número visto como quantidade, sua composição aditiva e a escrita numérica que o representa. Alunos solicitados a compor um número formado por 18 dezenas e 5 unidades chegam ao resultado 23 (adicionam 18 com 5). Ou ao se perguntarem quantas dezenas tem o número 120, dão respostas do tipo: 1 dezena (considerando a quantidade de algarismos da casa da dezena); 3 dezenas (levando em conta a quantidade de algarismos do número); 2 dezenas (limitando-se ao número expresso na casa das dezenas) ou, ainda, 120 (considerando as unidades);
b) indiferenciação entre os critérios da numeração falada e da escrita: o número é uma transcrição direta da fala (transcrição fonética de números ditados, como, por exemplo: 2.700 foi escrito como *2000700*; 1.040 como *1.40* onde o ponto representa o mil); escritas das dezenas, centenas, unidades de milhar exatas parecem ter sido dominadas antes das escritas dos números que estão nos intervalos: a criança escreve corretamente 2.000, mas ainda escreve *10040* no lugar de 1.040;
c) dificuldade em perceber equivalência entre as diferentes formas de escrever o número: o número tende a ser lido como unidades (solicitados a ler 368 o fizeram como trezentos e sessenta e oito unidades) ou conforme a decodificação padrão, aprendida na escola, por meio do uso de uma tabela semelhante a um cartaz valor de lugar (C.D.U.) aplicada aos números da direita para a esquerda, indicando unidades, dezenas e centenas (leram 368

como três centenas, seis dezenas e oito unidades). Ao se perguntar quantas dezenas contém o número 856, por exemplo, no geral a resposta era 5;

d) compreenção da ambigüidade da notação numérica, ou seja, compreender que é necessária uma representação mais precisa para diferenciar o valor relativo e absoluto dos números. Ao solicitar ao aluno para que escreva uma dezena, por exemplo, ele escreveu 1, ao invés de 10 ou 1 d, ou 1 dezena;

e) indissociação entre a lógica dos agrupamentos e a forma de expressá-la através de um sistema coletivo de signos, representado pela escrita numérica convencional: interpretação dos dois dígitos do número 25, por exemplo, como unidades. As crianças desenharam duas bolinhas para representar o 2 e cinco bolinhas para representar o 5, apesar da ênfase no uso de agrupamentos (material dourado) como recurso para o ensino no nível de escolaridade considerado.

Em outro estudo, Teixeira (2006) buscou verificar as características da aprendizagem do sistema de numeração decimal em alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental através da análise dos procedimentos usados por alunos com dificuldade e com facilidade para aprender matemática. Foram envolvidos 40 alunos de terceira e quarta série, sendo 20 com dificuldades e 20 sem dificuldades, selecionados a partir do conceito relativo à avaliação escolar e à rapidez e autonomia na resolução de problemas matemáticos. A idade dos alunos variou entre 9 e12 anos. Foram investigados aspectos relativos à composição e decomposição numérica, representação numérica e pictórica, algoritmos da adição e domínio do código numérico. No que se referiu às relações entre o valor posicional e os agrupamentos em escritas numéricas, houve uma grande diferença no desempenho das crianças dos dois grupos. Os resultados mostram que 80% dos alunos que não apresentavam dificuldades de aprendizagem relacionaram os algarismos dos números com seus agrupamentos em dezenas e centenas, enquanto apenas 8% dos alunos com dificuldades o fizeram. Neste último grupo, a maior freqüência de respostas foi das que representaram a dezena ou centena pela unidade, ou seja, atribuindo ao algarismo 5, cinco bolinhas e ao algarismo 2, duas bolinhas, no número 25.

Em relação ao domínio do código numérico, foi proposto um ditado numérico: 2.700, 1.040, 4.080, 9.009, 1.001 e 1.111. A maior parte dos erros foi cometida pelos alunos com dificuldades, e os mais comuns foram relacionados à transcrição total ou parcial do número falado para o escrito. Exemplo*:* 2.700 = *200700; 21000 e 700; 2710.* Quanto a este aspecto, a autora conclui que houve uma influência significativa da numeração oral na escrita, sobretudo para o grupo de alunos com dificuldades.

No que se refere à comparação de números, Teixeira (2006) verificou que os alunos utilizam procedimentos muito variados, mas adequados, tais como: quantidade de algarismos e de zeros, decomposição do número em totalidades significativas, seqüência numérica, comparação com base no algarismo da esquerda. O grupo de alunos sem dificuldades de aprendizagem apoiou-se preferencialmente na decomposição em totalidades significativas para comparar os números, como, por exemplo: 2.050 é maior que 2.005, porque 50 é maior que 5. Já o grupo de crianças com dificuldades baseou-se no valor do algarismo à esquerda. Por exemplo: em 6.012 e 5.800, consideravam 6.012 maior, porque o 6 é maior que o 5. Os alunos usaram também procedimentos impróprios para comparar números, tais como basear-se no algarismo da direita, ou na comparação isolada de algarismos. Quanto ao papel do zero, a pesquisa evidenciou que este não parece estar associado ao critério multiplicativo do sistema de numeração decimal. O zero examinado na escrita foi reconhecido como indicando dezena ou centena, mas não remete necessariamente à idéia de base 10. Os procedimentos usados para comparar números em ambos os grupos foram abstraídos provavelmente do exame da própria escrita numérica; a abstração de certas regularidades da escrita numérica foi feita não a partir dos agrupamentos, mas de princípios extraídos provavelmente do uso de números escritos nas suas relações com a numeração oral, conclui a autora.

4.5 AS INTERAÇÕES SOCIAIS

As interações sociais ocupam um espaço significativo nas pesquisas sobre a construção dos conhecimentos matemáticos e são entendidas como fonte de aprendizado e desenvolvimento conceitual dos alunos, quando possibilitam conflitos sociocognitivos. Após os anos sessenta, um grupo de pós-piagetianos, entre os quais Anne-Nelly Perret-Clermont, passou a examinar a forma pela qual a interação social atuaria na construção cognitiva, trabalhando com a hipótese do conflito socio-cognitivo. Suas pesquisas mostram que o trabalho coletivo apresenta melhores e maiores progressos que os trabalhos realizados individualmente. A atividade do sujeito sobre o real é beneficiada pelas coordenações interindividuais que, em presença de conflitos, desencadeia uma reorganização cognitiva e o progresso operatório. Assim, troca de opiniões, confronto de idéias entre duas ou mais pessoas são fonte de conflitos que desencadeiam desequilíbrios fundamentais à construção de novas estruturas de conhecimento (PERRET-CLERMONT, 1978).

Bednarz (1996) realiza estudos que evidenciam que as interações sociais são um princípio fundamental para a compreensão do sistema de numeração decimal,quando, através de debates e diálogos diante de situações-problema e de situações que geram a necessidade de comunicação e validação de resultados, permitem mudanças conceituais, construção de novas concepções por parte dos alunos e processos de representações externas. A autora realizou uma pesquisa de intervenção que envolveu um grupo de crianças de 6 a 9 anos, de primeira a terceira série do Ensino Fundamental, durante três anos. Nela buscou verificar o processo progressivo de construção de um sistema de escrita numérica por essas crianças, a partir da promoção de diversos tipos de interações sociais no contexto da sala de aula, inspiradas na teoria das situações didáticas (BROUSSEAU, 1996) e na escola socioconstrutivista (PERRET-CLERMONT, 1978). Para que verificassem os princípios que regem o sistema decimal de escrita, organizou situações em que as crianças se confrontassem com a necessidade de agrupar, e em que processos de representação do número fossem provocados. Nestas situações as crianças eram solicitadas a agir sobre os conjuntos e a desenvolver os seus próprios sistemas simbólicos para relatar as coleções e operações com eles efetuadas. Os resultados dos estudos de Bednarz (1996) indicam que a passagem da manipulação a uma primeira representação simbólica não é algo imediato e tampouco consiste numa simples cópia, no plano simbólico, das ações efetuadas sobre coleções, ou numa simples tradução do que foi realizado na ação para o plano simbólico. A escrita numérica constituiu-se para a criança numa ferramenta importante de conceitualização, uma vez que através dela as crianças precisavam comunicar informações acerca de conjuntos, num contexto de interações entre as situações criadas para gerar essas necessidades e o grupo de alunos. A escrita, conclui a autora, é uma construção da criança que procura dar conta de uma realidade provocada por situações de interações que jogam com o confronto entre dois modos de operar (manipulação e representação simbólica). Essas situações de interação e confronto dão significado às escritas simbólicas e contribuem para fazer evoluir progressivamente as representações (escritas) elaboradas pelas crianças. As interações levam as crianças a questionar, procurar novas alternativas, conscientizar-se dos limites e superá-los, e contribuem para o desenvolvimento das escritas inicialmente descritivas, figurativas e trabalhosas em escritas predominantemente esquemáticas, abstratas e eficazes.

Um fator fundamental na construção dos princípios do sistema de numeração a partir das intervenções propostas foram as trocas, as interações constantes entre as crianças no grupo. Ross e Sunflower (2007) observam que em grupos os alunos construíram significados para os dígitos individuais em um numeral multidígito que eram mais consistentes com nosso sistema de numeração de valor de lugar do que aqueles que eles mantinham antes da intervenção instrucional. Estes alunos tornaram-se melhores ao expressar seu pensamento matemático após a experiência de falar e escrever sobre suas idéias, e ouvir e ver as idéias dos outros estudantes, afirmam os autores.

A importância das interações e das trocas estabelecidas entre os alunos para a aprendizagem do valor posicional é atestada por Ross e Sunflower (2007) em uma pesquisa realizada com alunos de terceira a quinta série de classes heterogêneas acostumadas a trabalhar com instruções baseadas em problemas e a trocar pontos de vista a respeito de seu pensamento matemático. Os conhecimentos dos alunos sobre valor posicional foram avaliados em um pré e em um pós-teste, através de uma prova em que precisavam avaliar a quantidade representada por cada algarismo em um dado numeral, semelhante à descrita por Kamii (1992) e utilizada nos pré-testes de nossa pesquisa. Os alunos passaram por sessões instrucionais em que eram solicitados a resolver problemas que envolvessem a análise do valor posicional. Os autores buscavam verificar se os estudantes aprenderiam se compartilhassem com seus companheiros seus pensamentos sobre os significados dos dígitos em tarefas de correspondência de dígito e se os resultados seriam melhores em relação a trabalhos semelhantes desenvolvidos com crianças individualmente. Os resultados dos pré-testes foram considerados desencorajadores. Somente cinco alunos de um total de setenta e um demonstraram compreender o valor posicional, um ou dois alunos em cada sala de aula, o que gerou dúvidas aos pesquisadores em relação a se haveria número insuficiente de companheiros com conhecimento para, na interação social, produzir mudanças nas concepções dos alunos. No entanto os alunos envolveram-se com as lições e através de debates e trocas de ponto de vista deram sentido aos dígitos dos numerais. Houve significativa melhoria nos resultados do pós-teste. Os autores concluíram que os alunos construíram significados mais consistentes do que aqueles que eles possuíam antes da intervenção instrucional para os dígitos individuais em um numeral multidígito. Os autores também chamaram a atenção para o fato de que os alunos tornaram-se melhores em expressar seu pensamento matemático após a experiência de falar e escrever sobre suas idéias, e ouvir e ver as idéias dos outros estudantes, atestando, assim, a importância das interações sociais na construção de conceitos matemáticos.

Em resumo, neste capítulo buscamos compreender as relações entre a compreensão dos princípios operatórios do sistema de numeração decimal e a produção de escritas numéricas. Aspectos não mutuamente excludentes relativos à linguagem, à construção de estruturas cognitivas e invariantes operatórias, às regularidades da escrita, às interações sociais e aos conflitos cognitivos são apontados como relevantes a esta questão pelos autores revisados.

A influência da linguagem e dos aspectos lingüísticos do sistema de numeração foi amplamente destacada. As crianças interpretam números escritos, constroem hipóteses sobre a numeração escrita com base nos conhecimentos obtidos a partir da numeração oral e da seqüência numérica, sendo que esses são transpostos para a escrita num processo de transcodificação oral-escrito (SINCLAIR; TIÈCHE-CRISTINAT; GARIN, 1992; OROZCO; HEDERICH, 2000; OROZCO, 2005); a correspondência entre a fala do nome do número e a escrita exerce um papel fundamental neste processo (LERNER; SADOVSKY, 1996; NUNES; BRYANT, 1997;). A linguagem intervém na conceitualização da escrita numérica, uma vez que as crianças produzem notações numéricas apoiadas na numeração falada, mesmo não tendo compreendido ainda a estrutura do sistema de numeração decimal (LERNER; SADOVSKY, 1996). As crianças que falam palavras para números em sistemas de numeração que não apresentam irregularidades têm maior facilidade para aprender sistemas de numeração (NUNES; BRYANT, 1997; FUSON et al.,1997). A necessidade da construção das estruturas conceituais para a compreensão de números multidígitos foi salientada por Fuson e outros (1997), ao estudarem as relações entre o desenvolvimento das notações numéricas e a compreensão do sistema de numeração, especialmente o valor posicional. A compreensão das regularidades da escrita numérica, considerada fundamental à compreensão do sistema de numeração decimal, foi evidenciada nas pesquisas de Lerner e Sadovsky (1996), Lerner (2005) e Teixeira (2005, 2006).

Nos capítulos iniciais deste tabalho revisamos a literatura no sentido de fundamentar teoricamente a pesquisa que nos propomos a realizar. Na continuidade do mesmo, apresentamos o método utilizado, os resultados obtidos e as análises efetuadas.

5 A PESQUISA

A pesquisa que realizamos fundamenta-se nos pressupostos teóricos de que as aprendizagens de diferentes sistemas simbólicos podem contribuir significativamente para a construção de conceitos e de que o domínio progressivo das notações numéricas desempenha um importante papel na compreensão do sistema de numeração decimal. Parte da hipótese de que a interação crianças-escrita numérica contribui significativamente para a compreensão do valor posicional do número e busca clarificar como se processa(m) essa(s) contribuição (ões) a partir da investigação das concepções manifestadas pelas crianças neste processo. Em específico, busca identificar concepções construídas pelas crianças a partir das escritas numéricas que contribuem para a construção do valor posicional característico do sistema de numeração decimal. Foi realizada em uma escola estadual do Bairro Três Vendas, da cidade de Erechim-RS, com alunos de três turmas de segunda série do Ensino Fundamental.

5.1 OBJETIVOS E QUESTÃO DE PESQUISA

Propomo-nos a investigar concepções presentes e construídas na interação criança-escritas numéricas que contribuem para a construção do valor posicional característico do sistema de numeração decimal, identificar contribuições das notações de números multidígitos à conceituação do valor posicional do número e verificar as formas cognitivas por meio das quais estas contribuições se efetivam.

Nortearam o estudo as seguintes questões: - Que concepções as crianças possuem sobre o valor posicional e como constroem novas concepções? - Como crianças que não compreendem o valor posicional do número passam a compreendê-lo através da interação criança-escritas numéricas? - Que caminhos percorrem? - De que forma os aspectos notacionais do número contribuem para a construção de noções relativas às propriedades do sistema de numeração decimal?

5.2 MÉTODO DE PESQUISA

Consideramos, porém, que, se de um lado a natureza do problema determina o método a ser usado em uma atividade de pesquisa, de outro, a opção filosófica do pesquisador determina o enfoque a ser dado ao fenômeno estudado a partir da opção metodológica realizada. É fundamental definir que na pesquisa que realizamos, observamos os processos cognitivos das crianças a partir da concepção epistemológica construtivista, para a qual a qualidade das interações dos sujeitos com este mundo, eminentemente social, contribui significativamente para a construção dos mecanismos cognitivos. Este "olhar", todavia, não visa apenas a quantificar ou apenas a descrever os processos cognitivos realizados pelos sujeitos da pesquisa, mas busca poder compreendê-los em uma dimensão mais ampla, opção que nos remete à realização de uma pesquisa de caráter qualitativo.

Devido à necessidade, em função do problema e dos objetivos propostos, de um método de pesquisa que possibilitasse estudar detalhadamente os processos cognitivos realizados pelos sujeitos da pesquisa e à opção de fazê-lo em um contexto caracterizado por interações entre sujeitos e objetos bastante próximo de situações reais de aprendizagem em sala de aula, optamos pela realização da investigação em situações didáticas realizadas em trios de alunos, envolvendo nove crianças e o pesquisador.

Definimos, como critérios para a seleção dos componentes dos trios, que as crianças, sujeitos da pesquisa, já tivessem construído as noções de composição aditiva, mas que ainda não tivessem construído a noção do valor posicional do número e não dominassem a escrita de números superiores a mil. Estes critérios determinaram a necessidade de uma fase preliminar da pesquisa que envolveu uma pré-seleção dos sujeitos que as constituiriam. Participaram da fase preliminar da pesquisa 44 crianças das três turmas de segunda série do Ensino Fundamental da escola, na qual foram avaliadas as noções de composição aditiva e de valor posicional e as escritas numéricas, a partir de entrevistas individuais, seguindo os princípios do método clínico piagetiano. Este método consiste numa forma de avaliar as capacidades cognitivas dos sujeitos a partir da realização de inferências sobre estas capacidades. Não objetiva medir, tal como os testes psicométricos comumente usados em psicologia, mas compreender como o sujeito pensa, como analisa situações e como resolve problemas. Realiza-se a partir de situações não totalmente padronizadas, nas quais o examinador, agindo com o sujeito, busca a confirmação de suas inferências sobre o raciocínio do mesmo durante o exame, o que permite que o curso do mesmo seja modificado a partir dessas inferências. Trata-se de um procedimento que permite investigar como as crianças pensam, percebem, agem e sentem e também que procura descobrir o que não é evidente no que os sujeitos fazem ou dizem, em outras palavras, o que está por trás da aparência de sua conduta, seja em ações ou palavras (DELVAL, 2002, p.67).

A essência do método e o que o diferencia dos métodos experimentais, conforme o autor, é a forma de intervenção e de interação que se estabelece entre o entrevistador e o sujeito entrevistado. A partir de uma situação-problema colocada, o entrevistador observa, analisa e procura esclarecer o significado das condutas do sujeito, através da formulação constante de hipóteses sobre estes significados e do questionamento constante sobre os mesmos. Trata-se, portanto, de situações abertas, bastante flexíveis, cujo objetivo é compreender melhor como o sujeito pensa e organiza a sua ação.

A noção de composição aditiva foi avaliada através da “tarefa de compra” (descrita por Nunes e Bryant, 1997, p. 60), e consistiu em solicitar às crianças que comprassem objetos tendo que pagar o preço exato para o experimentador, tendo em mãos cédulas fantasia de diferentes valores, em duas situações. Na primeira situação, poderiam optar por comprar uma boneca por R$ 9,00 ou um carrinho por R$ 7,00, tendo disponível para tal duas cédulas de R$ 5,00 e 4 cédulas de R$ 1,00, totalizando seis cédulas ao todo, o que inviabilizaria a compra caso as crianças não considerassem o valor das cédulas. Na segunda situação, poderiam optar por comprar um carrinho por R$ 7,00, uma boneca por R$ 9,00 ou um dinossauro por R$15,00, tendo disponíveis três cédulas-fantasia de R$ 10,00 e 5 cédulas-fantasia de R$ 1,00, totalizando oito cédulas. Nesse caso apenas a compra do carrinho ficaria viabilizada caso as crianças não considerassem o valor das cédulas. Após a opção, eram questionadas se havia dinheiro suficiente para a compra ou não e era realizada a “compra”, observando-se a forma como as crianças procediam.

A noção de valor posicional foi avaliada através da prova descrita por Kamii (1992, p.38), que consistiu na seguinte seqüência de ações: mostrar à criança um cartão com o número 16 escrito e 16 fichas. Dizer: - Escrevi o número 16 neste cartão e acho que aqui há 16 fichas. Pode conferir? Depois, circundar o número 6 no 16 e perguntar: - Vê esta parte? O que esta parte do número representa? Separe o número de fichas que esta parte do número representa. Circundar o algarismo 1 e perguntar: - Vê esta parte? Separe o número de fichas que esta parte do número representa.

As escritas numéricas foram avaliadas por um ditado de números adaptado de Nunes e Bryant (1997, p. 75): um número de dígito único: 8; quatro números de dois dígitos: 14, 25, 47, 60; três números de três dígitos: 108, 329, 800; dois números de quatro dígitos: 2.569; 5.000; um número de cinco dígitos: 29.235; um número de seis dígitos: 101.246;

A partir das entrevistas, foram selecionadas, por sorteio, nove crianças para participarem da pesquisa, dentre as que faziam parte do grupo de alunos com noção de composição aditiva que não haviam construído as noções de valor posicional e não dominavam as escritas de números superiores a mil (pois este era o critério de seleção da amostra). Este grupo representou 54,5 % do total de crianças entrevistadas, conforme Tabela 1. Constituíram os trios participantes da pesquisa: Grupo I: os alunos: Mat, Raf e Mic; Grupo II: Fel, Sab e Lua; Grupo III: Taa, Tae e Cla.

Tabela 1 - Relação entre composição aditiva, valor posicional e escrita de números superiores a mil

Categorias		Total de crianças	Noções construídas	Percentual
CA VP EN	Não Sim Sim	44	0	0%
CA VP EN	Não Sim Não	44	1	2,2%
CA VP EN	Não Não Sim	44	0	0%
CA VP EM	Não Não Não	44	1	2,2%
CA VP EN	Sim Sim Sim	44	5	11,4%
CA VP EN	Sim Sim Não	44	2	4,5%
CA VP EN	Sim Não Sim	44	11	25%
CA VP EN	Sim Não Não	44	24	54,5%

Fonte: Dados da pesquisa - Erechim – RS, 2005

Ao buscar evidenciar o que está por baixo da “ponta do iceberg” no processo de aprendizagem, Vergnaud (1996a), preocupado com o processo de aprendizagem da matemática, e, mais especificamente, com as aprendizagens que ocorrem no decorrer do processo e não apenas com o produto final, como normalmente se faz, chama a atenção para a necessidade de considerar as microaprendizagens que vão ocorrendo à medida que os sujeitos vão construindo esquemas e conceitos cada vez mais amplos e abrangentes, ao confrontarem-se com diferentes situações. À nossa pesquisa interessam, especialmente, essas microaprendizagens, uma vez que busca analisar, em detalhes, condutas cognitivas individualizadas, embora em contextos mais próximos ao da sala de aula, onde estão envolvidas as interações entre os componentes dos trios entre si e a pesquisadora e destes com o objeto do conhecimento (o sistema de numeração decimal). Com objetivo de acessar os processos de crescimento e evolução destas condutas e as noções relativas às notações de números multidígitos, buscamos analisar as microaprendizagens manifestadas pelas crianças participantes da pesquisa.

Em nossa pesquisa, buscamos microgêneses cognitivas (condutas cognitivas individualizadas) manifestadas pelos sujeitos na interação com o objeto do conhecimento e com outros sujeitos, inclusive com o pesquisador. No método de análises microgenéticas proposto por Inhelder e Cellérier (1996), o pesquisador abstém-se de intervir ativamente, embora esteja atento aos comportamentos que acompanham os processos que sustentam a resolução do problema, no sentido de permitir a manifestação das microgêneses cognitivas do sujeito, individualmente, na interação com o objeto do conhecimento.

Para tal as situações de pesquisa, que denominamos situações didáticas, foram organizadas a partir de situações-problema previamente estruturadas e propostas para a resolução com o objetivo de favorecer a compreensão das relações entre os aspectos notacionais e conceituais envolvidos na compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal.

A opção pela denominação situação didática deve-se à intenção de envolver as crianças numa situação de aprendizagem bastante próxima às vivenciadas na sala de aula, como já referido acima, mas que delas se diferencia no sentido de não se constituir meramente numa situação de ensino cuja ênfase recai na transmissão do conhecimento. Trata-se de promover uma situação de interação entre os alunos (sujeitos da pesquisa), professor (o pesquisador) e o objeto do conhecimento (sistema de numeração decimal), semelhante ao que Brousseau (1996) caracteriza como uma situação-didática: um conjunto de relações que compreende instrumentos, objetos, um sistema educativo (um professor) e um conjunto de relações explicitamente ou implicitamente estabelecidas entre um aluno ou um grupo de alunos com a finalidade de possibilitar um saber constituído ou em vias de constituição e que permita ao aluno reproduzir características do trabalho científico, como forma de construção efetiva de conhecimentos a partir da resolução de problemas.

As situações didáticas foram realizadas com cada grupo em uma sala de aula onde estavam presentes os três componentes, o pesquisador e um monitor responsável pela filmagem, após a familiarização dos sujeitos da pesquisa com o pesquisador, com o monitor e com a câmera, oportunizada pelos pré-testes e por dois encontros em que foram simuladas situações semelhantes, com este objetivo. Foram disponibilizadas aos alunos folhas de papel, lápis e borracha e esclarecido que poderiam usá-los, caso sentissem necessidade de desenhar ou escrever e fichas com diferentes algarismos. Em Inhelder e Cellérier (1996, p.33), encontramos uma importante argumentação no sentido de possibilitar a representação escrita ou pictórica às crianças na resolução dos problemas:

> Certamente, no curso de uma resolução de problemas, o sujeito aplica e especifica os esquemas cujas funções de importância primordial são organizar um conteúdo nocional ou prático e atribuir significações; mas o sujeito também *representa para si mesmo* os fins e certas etapas da resolução, e elabora procedimentos de codificação, cujas características podem ajudar ou obstaculizar a construção de noções. Portanto, a análise das resoluções de problemas não poderia eludir as representações, uma vez que elas constituem um nível do funcionamento psicológico (grifo do autor).

O pesquisador propunha a situação-problema e encorajava a troca de idéias entre os componentes de cada trio para a resolução, intervindo quando necessário. As intervenções do pesquisador foram realizadas no sentido de: orientar as crianças na compreensão do que o problema pedia; desafiar, mediante perguntas, as soluções incompletas ou menos avançadas para a busca de outras soluções e intermediar as diferentes soluções expressas pelas crianças para provocar-lhes alterações e reinterpretações (MORO, 2005). Também foram realizadas com o intuito de promover interações entre as crianças na busca da solução para a situação-problema proposta. Procuramos também pautar as intervenções realizadas na concepção de que, numa situação didática, ao professor cabe “devolver” ao aluno um bom problema - não simplesmente comunicar conhecimentos e “transferir” a responsabilidade da resolução do mesmo ao aluno, agindo de tal forma que este tome para si a necessidade de resolvê-lo, aceitando o desafio intelectual e tornando-se sujeito de sua própria aprendizagem (BROUSSEAU, 1996).

As situações didáticas, num total de onze, foram realizadas ao longo de um semestre (segundo semestre letivo de 2005), semanalmente, sendo que a cada semana era realizada uma intervenção com cada um dos três grupos de sujeitos da pesquisa, videogravada e posteriormente transcrita na íntegra para análise. As situações didáticas 1, 3, 4, 5 e 6 foram projetadas com o objetivo de problematizar a leitura e a produção de escritas numéricas de números multidígitos. A situação didática 7 foi elaborada com o objetivo de provocar relações com agrupamentos a partir de uma escrita numérica dada e as de número 2, 9 e 10 com o intuito de provocar a identificação do valor posicional também a partir de uma escrita numérica. As situações didáticas 8 e 11 visavam a provocar a produção de escritas numéricas a partir de relações com agrupamentos previamente determinados. As situações didáticas 7,8,9,10 e11 foram propostas a partir de uma situação-problema ampla, adaptada de Cobb, Yackel e Wood (1992): “Trabalhamos em uma loja de doces e precisamos empacotá-los em embalagens com capacidades para um, dez, cem, mil doces”.

<table>
<tr><th>OBJETIVOS</th><th>SITUAÇÕES DIDÁTICAS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Leitura e produção de escritas</td><td>Situação didática 1
A professora fez um ditado com o seguinte número: 653. Observamos que os alunos escreveram seiscentos e cinqüenta e três de diferentes maneiras: 600 053, 653, 600 503, 60053. Qual foi a criança que acertou a forma correta de escrever? Por quê? O mesmo para 2.192: 2000 192, 2000 100 902,
200 100 92, 2000 100 92, 2 192.</td></tr>
<tr><td>Situação didática 3
Formar números com as fichas: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,4,2,6,0,0,0,0,0,0,0,0
a) Quatro mil, duzentos e vinte e seis
b) Cinco mil e vinte e quatro
c) Vinte mil, quatrocentos e trinta e seis
d) Duzentos e quarenta e seis mil, cento e trinta e sete</td></tr>
</table>

numéricas de números multidígitos	**Situação didática 4** Com as fichas, formar números: 7,5,3,1,2,0,0,0,0,0,0,0
	a) maiores do que mil b) maiores do que cem **c)** maiores do que dez mil
	Situação didática 5 Formar todos os números possíveis com os algarismos: 3,4,8. Organizar os números formados em ordem crescente.
	Situação didática 6 Tenho 432. Quero formar mil, quatrocentos e trinta e dois. Que número(s) preciso colocar nas fichas anteriores? _, _ _, 4,3,2 Tenho 680. Quero formar dois mil, seiscentos e oitenta. Que número(s) preciso colocar nas fichas anteriores? _,_,_, 6,8,0 Tenho 507. Quero formar dez mil, quinhentos e sete. Que número(s) preciso colocar nas fichas anteriores? _, _, _, 5,0,2 Tenho 9.057. Quero formar dezenove mil e cinqüenta e sete. Que número(s) preciso colocar nas fichas anteriores? _, _, _, 9, 0, 5, 7
Relações com agrupamentos a partir de uma escrita numérica dada	**Situação didática 7** Trabalhamos numa loja de doces. Ao final de um dia de trabalho restam empacotar 456 pirulitos. A loja possui embalagens de cem e de dez doces. Como podemos empacotá-los?
	Situação didática 2 Uma professora lançou o seguinte desafio para seus alunos: Temos 463 pirulitos para a festa do dia da criança. Cada algarismo do número 463 representa uma parte dos pirulitos. Descubram quantos pirulitos cada parte do número representa! Faça o mesmo para o número 2.378!
	Situação didática-9 Precisamos empacotar apenas as balas que correspondem ao algarismo 4 nos números abaixo. Quantas são? a) 345 balas b) 1.345 balas c) 12.345 balas d) 212. 345 balas
	Situação didática 10 Precisamos empacotar muitas balas... Vou dizer quantas. Escrevam. É possível olhar para os números e descobrir quantos pacotes de um, dez, cem, mil ... vamos usar?
Produção de	**Situação didática 8** No estoque de nossa loja de doces há um pote com mil balas, dois potes

escritas numéricas a partir de relações com agrupamentos previamente determinados	com dez balas, cinco potes com cem balas. Quantas balas há no estoque? Escreva o número. Temos guardados no estoque três pacotes de mil pirulitos, quatro pacotes de cem pirulitos, dois pacotes de dez pirulitos e dois pirulitos soltos. Quantos pirulitos tem ao todo no estoque? Escreva o número.
	Situação didática 11 Quantos doces tem empacotados? 10, 100, 1000, 10, 100, 100, 100, 10, 1000, 100, 10, 1000, 1, 100, 100, 1, 100, 1, 100, 10, 100, 10, 10, 1 Temos quatro pacotes de 100, 6 pacotes de 1000, dois pacotes de 10. 000 e três pacotes de 1 pirulito. Quantos doces temos? ___________________ Temos 245 balas empacotadas. A turma que trabalhou acabou de aprontar outros cinco pacotes de cem balas Onde teremos que alterar o número 245 para incluir estas balas?

Quadro 2 - Situações didáticas propostas ao longo da pesquisa[14]
Fonte: Dados da pesquisa

É importante salientar que no decorrer das intervenções realizadas junto aos trios emergiram outras situações relativas às escritas numéricas e ao valor posicional, exploradas pela pesquisadora, o que resultou muitas vezes em novas situações de reflexão para os alunos. Ao longo da apresentação dos dados algumas destas situações, não previamente planejadas, são ilustradas. As situações didáticas consistiram em uma fonte de dados para a pesquisadora, e, ao mesmo tempo uma fonte de novas aprendizagens para os sujeitos da pesquisa, o que permitiu acompanhar o desenvolvimento progressivo ao longo da mesma.

5.3 ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos dados obtidos na pesquisa foi realizada a partir do enfoque qualitativo.

A análise qualitativa priorizou a busca das concepções manifestadas e construídas pelas crianças ao longo das intervenções que contribuíram para a compreensão do valor posicional do número. Para tal, as gravações em vídeo foram assistidas e totalmente transcritas para o papel. A partir daí, procedemos a uma

[14] Os algarismos estão entre vírgulas pois representam as fichas apresentadas às crianças nas situações didáticas.

revisão das transcrições, assistindo às fitas várias vezes, e a uma busca de recortes delimitadores das concepções manifestadas pelas crianças. Como referem Inhelder e Cellérier (1996, p.13), “[...] dependendo dos ritmos das condutas e verbalizações, dividir em seqüências as diferentes fases da resolução, analisar as modificações no curso da ação e, enfim, inferir os modelos subjacentes e sua organização funcional” faz-se necessário.

Procedeu-se a uma análise destes recortes, buscando identificar concepções, estratégias cognitivas e esquemas próprios de cada sujeito de pesquisa frente a cada situação-problema. Entendemos esta análise como a apreensão progressiva pelo experimentador do desenrolar e das etapas da construção do sujeito, ou seja, a compreensão da tarefa, a representação da situação final e o como fazer para chegar a realizá-la (INHELDER; CELLÉRIER, 1996). Esses recortes foram assim delimitados:

a) concepções iniciais sobre a leitura e escrita de milhares e sobre o valor posicional presente nas interações com as escritas numéricas;
b) concepções presentes na produção de agrupamentos a partir de escritas numéricas;
c) concepções presentes na produção de escritas a partir de agrupamentos;
d) concepções presentes na identificação do valor posicional a partir de escritas numéricas.

No próximo capítulo, apresentamos os dados obtidos na pesquisa a partir dos recortes referidos acima. As análises relativas aos mesmos são expressas no Capítulo 7.

6 ESCRITAS NUMÉRICAS, AGRUPAMENTOS E VALOR POSICIONAL – APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Os alunos participantes da pesquisa, freqüentadores da segunda série do Ensino Fundamental, já dominavam escritas numéricas envolvendo centenas e já haviam recebido instruções, na escola, sobre o sistema de numeração decimal, tanto na primeira série quanto na segunda. A forma como os conceitos foram trabalhados não difere da metodologia empregada normalmente nas escolas, onde ações de agrupar e reagrupar a partir de materiais, tais como o “cartaz valor de lugar” e o “material dourado” são realizadas no sentido de representar aos alunos a lógica do sistema de numeração decimal e as escritas numéricas são trabalhadas como transcrição das ações realizadas com os materiais.

A vivência destas práticas escolares tradicionais por parte dos sujeitos da pesquisa permitiu inferir a possibilidade de manifestarem suas concepções sobre o valor posicional na produção de escritas numéricas e nas relações com ações de agrupamento e reagrupamento por serem familiares às crianças, o que, por hipótese, facilitaria a expressão das concepções por elas já construídas, no intervalo numérico já trabalhado na escola, relativas à escrita numérica e ao valor posicional do número.

As situações didáticas foram elaboradas no sentido de: problematizar a leitura e a produção de escritas numéricas (mais especificamente, nas situações didáticas 1,3,4,5 e 6); verificar as concepções presentes em ações que envolviam produzir agrupamentos a partir da escrita numérica (situação didática 7); produzir escritas a partir de agrupamentos (situações didáticas 8 e 11); identificar o valor posicional a partir de escritas numéricas (situações didáticas 2, 9 e 10).

Dividimos este capítulo em duas seções. Inicialmente apresentamos concepções identificadas a partir dos dados obtidos na pesquisa, que denominamos iniciais, a respeito da leitura e escrita de números multidígitos. Na segunda seção, apresentamos concepções que identificamos como características de um avanço gradativo rumo às regularidades da escrita numérica de milhares em situações de:

leitura e produção de escritas numéricas, relações com situações de agrupamentos e identificação do valor posicional do número.

6.1 CONCEPÇÕES INICIAIS SOBRE A LEITURA E ESCRITA DE NÚMEROS MULTIDÍGITOS

Denominamos as concepções manifestadas pelos sujeitos da pesquisa, identificadas nestas intervenções e apresentadas nesta seção do trabalho, de "iniciais" por ainda estarem distantes da compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal e das regularidades da escrita numérica. É importante salientar que, embora sejam apresentadas numa perspectiva evolutiva, para fins de facilitar a organização dos dados, trata-se da descrição de um conjunto de diferentes concepções predominantes nas primeiras interações com as escritas, mas presentes ao longo de todas as situações didáticas desenvolvidas na pesquisa.

Na primeira intervenção realizada, apresentamos às crianças diferentes escritas numéricas para o número *dois mil, cento e noventa e dois*: *2192, 200010092, 2000192* e para o número *seiscentos e cinqüenta e três: 653, 60053, 600503, 6053*. Solicitamos às crianças que identificassem a notação convencional através do seguinte questionamento: "A professora fez um ditado de numerais e os alunos escreveram de diferentes maneiras. Qual foi a criança que acertou a forma correta de escrever? Por quê?".

As crianças identificaram de imediato as escritas convencionais de milhares nas situações apresentadas, rejeitando as não-convencionais. Questionadas sobre o porquê desta opção, apresentaram como argumentos a quantidade de zeros e de dígitos presentes na notação:

- é o único jeito certo porque não tem nenhum zero;
- não pode ter nenhum zero senão fica diferente;
- não pode ter nenhum zero, tem que tá tudo junto;
- não tá certo porque tem muitos números; é tudo muito grande, menos este aqui;

Embora as escritas convencionais tenham sido identificadas como corretas, quando solicitadas a ler as outras escritas (*200010092, 2000192)*, as crianças leram todas como *dois mil, cento e noventa e dois*, demonstrando desconfiança na possibilidade de um número ser escrito de diferentes formas.

As crianças participantes da pesquisa já conheciam a leitura e a escrita de números dentro do intervalo da numeração que abrange dezenas e centenas, o que lhes permitiu identificar os números isoladamente, dentro de uma mesma escrita. Por exemplo, em *50124*, leram: cinqüenta cento e vinte quatro ou quinhentos e um e vinte e quatro. Identificavam também os "nós" envolvendo milhares: 1.000, 2.000, e assim por diante. Por exemplo, ao ler a escrita *200010092*, reconheceram o dois mil, o cem e o noventa e dois isoladamente e nomearam cada "parte" do número individualmente, fazendo-a corresponder à fala.

Ao lerem faziam corresponder as "partes" da escrita numérica identificadas à pronúncia dos nomes das respectivas "partes". Repetiam várias vezes o nome destes números, tentando "juntá-los" com os demais. Esta "junção" era feita pelos conectivos "e" e "depois".

> Raf olha para os números *60053, 600503, 653* e os lê como seiscentos e cinqüenta e três. Questionada sobre se o mesmo número (no caso, o seiscentos e cinqüenta e três) pode ser escrito de formas diferentes, passa a ler os números em partes e usa a palavra "depois' e o conectivo "e" para separar as dezenas e centenas já conhecidas. Por exemplo: *seiscentos e depois cinqüenta e três*. Para *600503* lê: *- Seiscentos e... seiscentos e quinhentos e três*. Para *60053* lê: - S*eiscentos e depois 53.* Diante da insistência em decidir qual o certo, analisa os números, e acaba concordando com *653.* Solicitada a dizer o porquê, Raf não consegue justificar sua escolha.

As crianças utilizavam, ao tentar ler os numerais, esquemas, tais como: - o de apontar para a escrita e correr o dedo sobre ela a cada palavra falada, fazendo-a corresponder ao nome do número que identificavam ao longo do espaço e tempo em que o pronunciavam; - o de contar as palavras e partes do número escrito, fazendo corresponder um dedo para cada nome de número falado e cada marca escrita, como que para garantir um lugar na escrita numérica para cada nome de número falado.

Embora não conseguissem encontrar respostas para os porquês de suas escolhas, as crianças demonstraram, desde o início das intervenções, saber que diferentes escritas numéricas não podem ser lidas da mesma forma, do mesmo modo que um mesmo número não pode ser escrito de diferentes maneiras. Esses conhecimentos eram fatores de conflito diante das outras concepções que já possuíam e que coexistiam na leitura e na produção de escritas numéricas.

A interação com o mundo numérico, o mundo da escola, também permite às crianças construírem hipóteses sobre a escrita de números multidígitos, objeto de estudo desta pesquisa. As crianças de nossa pesquisa produziam escritas de números multidígitos envolvendo três algarismos, mas quando envolviam mais de três, escreviam desta forma: para 2.128, por exemplo, escreviam *2000128* ou *21128* ou *20128.* A dificuldade encontrada para escrever dizia respeito às escritas não conhecidas. Uma vez que dominavam a escrita de centenas (já haviam trabalhado na escola), o problema envolvia a questão: como escrever o “mil” ou “os mil” no número?

A busca de respostas a esta questão permitiu a manifestação destas hipóteses. Os argumentos apresentados pelas crianças para justificar as escritas numéricas que produziam e as leituras que realizavam explicitaram suas concepções sobre esta escrita, no momento de sua produção, em relação à: quantidade de algarismos e à existência do número, quantidade de zeros e magnitude do número, uso de “marcas” para o mil e separação dos algarismos na escrita. A seguir apresentamos algumas, significativamente presentes em nossa pesquisa.

a) Quantidade de algarismos e existência do número

Havia dúvidas sobre a existência de escritas numéricas com mais de cinco algarismos:

> Tae concorda com a escrita produzida por Taa para o número nove mil, cento e vinte: *90120*. Argumenta: - *Está certo, porque mil tem quatro números e o que formaram só tem um número a mais*. Quando Taa forma o número *209305,* questiona: - *Será que esse número existe*?

Percebemos, no diálogo acima, a presença de algumas concepções: - os “mil” têm quatro algarismos; - não existem números com mais de 5 algarismos. Ao afirmar que o “mil” tem 4 algarismos, Tae demonstra perceber esta regularidade na escrita do milhar. Ao admitir a possibilidade de um número referente a milhares ser escrito com mais algarismos, manifesta a hipótese de que “se o mil tem 4 algarismos, um número maior do que mil pode ter mais do que 4 algarismos”. Mesmo assim, um número escrito com 6 algarismos causa estranheza e gera dúvidas: - Será que esse número existe?

Estavam presentes conhecimentos já construídos em contextos informais e formais. Conviviam hipóteses conflitantes: enquanto algumas restringiam as escritas de milhares a quatro algarismos e permitiam admitir a necessidade de cinco algarismos, outras questionavam a existência de números com muitos algarismos. É do conflito entre estes diferentes conhecimentos que surge a dúvida: - S*erá que este número existe?* E, conseqüentemente, ocorre um processo de reflexão a respeito da escrita do milhar.

b) Quantidade de zeros e magnitude do número

Ao contrário do que vimos acima, quando os vários algarismos eram zeros, não havia dúvidas sobre a existência dos números. A quantidade de zeros estava relacionada com a escrita de milhares e com a magnitude do número.

Evidenciava-se a convicção da necessidade dos zeros para a escrita do milhar, pois, nas palavras das crianças, "*é preciso ter zeros para formar o mil":*

> Mat corrige Mic na escrita de dois mil, acrescentando o zero: *2000.* Questionado sobre onde está dito que é o mil, aponta o primeiro zero após o dois e diz: - O*s outros dois zeros também dizem que é mil e que é preciso ter zeros para formar o mil.*
>
> Mat escreve *10432* e afirma que é necessário colocar o um e o zero, porque: - *O um e o zero dá mil*. Mic argumenta: - *É o zero que diz que é o mil.*

Os zeros têm que estar associados a outros algarismos para significar mil ou outro número qualquer.

> Formam *30000*. Pergunto onde diz na escrita, que é mil. Sab diz, apontando primeiro para o *30* e depois para o *000*: - *Ó, aqui ó dá trinta e esses aqui dá mil*. Pergunto: - *Os três zeros formam mil?* Sab diz: - *Não, os três zeros formam zero, zero, zero, mas com o três fica mil.*

Quando questionados em relação a como deveriam ser os números para serem maiores do que mil, deixavam claro que, no seu entendimento, a quantidade de zeros presentes no número é um indicativo da magnitude dos milhares.

Formam *20000* e dizem que é maior que dez mil. Pergunto o que precisa um número para ser maior que dez mil. Respondem: - *Quatro zeros.*

Raf domina a escrita dos “nós”: *2000, 5000, 7000, 50000*. Diz que são os zeros do número que indicam que é mil. Coloca mais um zero em *2000* e diz que fica vinte mil. Faz o mesmo com *30000.*
Quando questionada, por que o número é maior que dez mil, Taa diz que é porque tem mais de três zeros, mas não sabe dizer o que precisa um número para ser maior do que mil.

Cla escreve *10000* e lê como mil. Forma o número *500000* e lê *cinco mil zero, zero*. Forma junto com Tae *10000000*. Diz: - T*em que ter um monte de zeros para ter um milhão.*

Solicitados a colocar os números em seqüência (ordem crescente), fazem-no com facilidade, quando se trata de dezenas. Ao comparar números para definir o próximo a ser colocado na série, tanto nos intervalos das centenas quanto dos milhares, baseiam-se nos seguintes critérios: seqüência numérica; é o primeiro quem manda, e, no caso de estes serem iguais, é o segundo quem manda.

No exemplo abaixo, Tae facilmente coloca os números em ordem crescente no domínio das dezenas, apoiada na série numérica, mas, ao precisar ordenar as centenas, encontra dificuldade em perceber qual é o menor número. Taa, ao contrário de Tae, não encontra as mesmas dificuldades: sabe que o próximo começa com o trezentos. Em relação à casa da dezena, sabe que seria 4, porque, se colocar o 8 antes, o número ficará maior.

Após formarem vários números com os algarismos 3,4 e 8, peço para colocarem os números em ordem crescente. Taa diz: - Do pequeninho até o grandão, né? Taa escreve: *3, 4, 8, 34, 38, 43, 48, 83, 84,* todos ditados por Tae. Ao formar centenas, Tae diz: - *Trezentos e quarenta e... não, duzentos e... Trezentos e trinta e quatro...* Taa diz: - *Não, é este aqui ó*, e escreve *348*. Pergunto a Taa, por que acha que é este. Diz que: - *É porque tem quatro e se botar o oito forma um número diferente.* Escreve o próximo e diz: -Tre*zentos e oitenta e quatro e escreve 384.*

Solicito que coloquem os números formados com os algarismos 0, 2, 5 e 8 em ordem crescente. Escrevem 0,2,5,8, 20, 28. Tae diz trinta. Taa diz: -*Tem que ser cinqüenta*. Escrevem 50, 52, 58, 80, 82, 85. Taa diz: - *De três números agora*. Tae diz 2, vamos ver o de dois agora . Taa diz: - *Tem que ser o menor, o mais baixo.* Escreve 205. Procuram. Tae confunde o quinhentos e vinte com 220. Escrevem 250. Depois 280. Procuram se tem mais de duzentos. Tae diz: - Agora vem trezentos. Questiono se tem. Diz: - *Não, então é o quinhentos*. Tae diz: -*Quinhentos e dois... quinhentos e vinte.* Aí encontram o quinhentos e oito. Tae diz que quinhentos e oito vem antes. Pergunto porquê. Diz que é porque 520 é maior que 508. Pergunto como sabe. Não responde.Ri. Apagam e escrevem 502, 508, 520. Tae localiza os números e orienta Taa para escrever. Diz: - *Quinhentos e vinte e oito e quinhentos e oitenta*. Vai

> riscando os números na lista anterior. Diz e só. Taa escreve. Tae diz: - *Agora oitocentos. Bota oitocentos e vinte, oitocentos e vinte e cinco, oitocentos e cinqüenta.* Taa escreve. Taa diz: -Agora vamos pros mil. Procuram. Taa diz: - *É o 2508*. Tae diz: *É o 2580. Depois o 5 280, o 8052 e o 8520.*

Diante de dificuldades que enfrentavam na leitura e na escrita numérica dos milhares, utilizavam outro critério, tanto na organização da seqüência numérica solicitada, quanto na comparação dos números, além dos referidos acima: a decomposição do número em totalidades significativas (partes do número já conhecidas).

> Questionados sobre qual é o maior número: dez mil quinhentos e sete (escritos desta forma: *100507*) ou dezenove mil e cinqüenta e sete (*19057*) Mat inicialmente decide que é o dezenove mil e cinqüenta e sete. Depois fica em dúvida, considerando o quinhentos e sete (507) e o cinqüenta e sete (57). Diz que o *100507* é o maior.

No caso, os algarismos finais, geralmente dezenas ou centenas, cuja escrita já lhes era familiar, definiam a magnitude do número.

c) Marcas para o “mil”

Aos poucos a quantidade de zeros não é mais a única hipótese sobre o que identifica uma escrita numérica como milhares. As crianças participantes da pesquisa demonstraram, de forma bastante significativa, a necessidade de assegurar, através de uma “marca”, o lugar no número que corresponde ao “mil”. Esta marca pode ser “0” , “1” ou “000”.

> Formo o número seiscentos e oitenta com as fichas: *680* e solicito que acrescentem as fichas necessárias para formar dois mil seiscentos e oitenta. Raf pega a ficha com o algarismo 2 e Mat a ficha com 0 e formam *20680.* Pergunto que número ficou e dizem: - *Dois mil, seiscentos e oitenta*. Questiono: - Onde está o mil ali? Apontam para o *0* entre o *2* e o *6.* Questiono: - Para formar o mil, de dois mil, seiscentos e oitenta, então, o que é que tem que ter? Mat responde: - *Tem que pôr o zero*.

A hipótese, ainda muito presente, de que há uma correspondência entre a fala do nome do número e a sua escrita impõe a necessidade de um sinal gráfico que represente o “mil” na escrita. No caso abaixo, devido à necessidade gerada pela correspondência entre o nome do número e a quantidade de algarismos, o “mil” tem que ocupar um lugar, uma posição no número escrito. Neste caso, este lugar é demarcado pelo algarismo **1**.

> Taa estranha o número formado: *41226*. Diz que tem muitos números. Na discussão, diz para Tae: - *Mas tu colocou o 1 ali*. Embora estranhe esta escrita, concorda, quando, em consenso, optam em mantê-la. Taa conta, apontando cada algarismo com o dedo: *um, dois, três, quatro, cinco*. Depois aponta, na folha onde o nome do número está escrito por extenso, contando novamente e fazendo corresponder a fala do nome do número com cada palavra escrita: fala *um*, apontando para a palavra quatro escrita na folha, fala *dois*, apontando para a palavra mil, fala *três*, apontando para a palavra duzentos, fala *quatro,* apontando para a palavra vinte e fala *cinco,* apontando para a palavra seis.

Quando questionada sobre por que fez isto, Tae, a princípio, não soube dizer. Depois conseguiu explicar através da correspondência entre a quantidade de algarismos e o número de dedos de suas mãos e entre a quantidade de algarismos e as palavras escritas. Acreditava que a escrita está correta em função desta correspondência.

O lugar correspondente à palavra “mil” pode ser determinado no número por três zeros (000), pelo algarismo 0, e pelo algarismo 1, como no caso de Taa. Por exemplo: dois mil e vinte e quatro: 2**000**24; quinze mil, cento e vinte e três: 15**000**123; quinze mil, e duzentos: 15**0**200; dois mil, quatrocentos e trinta e seis: 2**0**436; cinco mil e vinte e quatro: 5**1**24; quatro mil, duzentos e vinte e seis: 4**1**226.

> Raf forma o número *735*. Diz que se colocasse um zero entre o sete e o três ficaria sete mil e trinta e cinco: *7**0**35*. Em seguida produz a seguinte escrita: *70**0**20* e a lê como setenta mil e vinte, apontando o segundo zero, quando diz *mil*.

> Raf forma *10**0**507* (dez mil, quinhentos e sete). Mat estranha os dois zeros e questiona Raf que argumenta: - *Por causa que é dez mil, né*.

> Mat diz que é preciso três zeros para formar o mil. Forma *3000* apenas trocando a ficha *2* pela *3,* depois forma o *7000,* apenas alterando a primeira ficha. Idem para *5000*. Diante da escrita *50 **000,*** que produziu, diz que são os zeros que indicam que é mil: - *Nos zeros, nos três últimos zeros*.

As hipóteses das crianças sobre as “marcas de mil” confirmam-se nas escritas convencionais de alguns números. No caso dos “nós”, o uso de *000* como marca da palavra mil coincide com a escrita correta do número: *3.000, 4.000, 12.000*.

> Mat forma *2000*. Coloca mais um zero e diz vinte mil (*20**000***). Troca o 2 pelo 3 e diz *três mil* (*3**000***). Troca o 3 pelo 15 e diz *quinze mil* (*15**000***). Argumenta que são os últimos três zeros que indicam que é mil.

Mat percebeu a importância de colocar mais zeros em *2.000* para formar vinte mil e apenas alterou os primeiros números. Há uma vaga percepção de que existe um lugar para o mil no número, ou seja, os três últimos zeros, mas esse lugar é determinado pela correspondência da marca de mil: *000* com o nome do número: quinze (15) mil (000).

O zero torna-se apropriado, também quando é usado como marcador de mil na posição da centena. Neste caso o *0* corresponde à palavra falada “mil”, como em *5.024* (cinco mil e vinte e quatro), *20.036* (vinte mil e trinta e seis), *19.057* (dezenove mil e cinqüenta e sete).

> Mat, Raf e Mic produzem outras escritas corretas *(5024, 8052, 2058*) sem alterar o lugar da ficha com o algarismo *0*. Questionados sobre por que o único número que não tiram do lugar é o zero, Raf diz que: - *É porque senão não vai ficar mil.*

Este mesmo critério (*0* como marca de mil) é estendido a outras escritas, não produzindo o mesmo efeito. É o que ocorre, quando o zero está na posição da dezena: *8.502*. Neste caso lêem o número como *oitenta e cinco mil e dois*.

> Raf forma *2085* e diz*:- Dois mil e oitenta e cinco*. Mostra com o dedo, fazendo corresponder cada palavra falada a um algarismo. No caso, o zero é o indicado para mil. Mat inverte os algarismos e forma *2580*. Não conseguem ler este número. Mat muda para *8025*. Lêem corretamente *oito mil e vinte e cinco*. Mich forma *8502*. Raf lê: - *Oitenta e cinco mil e dois.*

O zero na casa da unidade, como em 2.580 não foi usado como marca de mil pelas crianças. Seguindo o mesmo critério, a leitura ficaria duzentos e cinqüenta e oito mil. A correspondência fala/escrita sugere uma separação entre o *258* e o *0*, o que tornaria a escrita estranha: *258   0.* Esta escrita é reconhecida como incorreta pelas crianças.

Diferentes “marcas de mil” foram usadas por uma mesma criança, que ora escrevia *dois mil, duzentos e trinta e quatro* como *21234*, ora escrevia *20234*, ora escrevia *200034*. Todas eram reconhecidas por ela como possíveis para a escrita do “mil” no número, embora, na maioria das vezes, tenham usado diferentes marcas em diferentes momentos.

Abaixo é possível perceber que Raf usa a hipótese da possibilidade de usar duas formas diferentes para assegurar o lugar do “mil” como argumento para justificar a forma como resolve o conflito entre as suas concepções: a necessidade de usar o zero como marca de mil e o conhecimento que possui da escrita 2.000.

> Raf corrige a escrita de dois mil produzida por um colega (200), acrescentando o zero: *2000.* Aponta o primeiro zero após o dois e diz que é o mil. Acrescenta: - O*s outros dois zeros também dizem que é mil.*

No decorrer das intervenções, o uso do *1* como marca de mil passou a causar estranheza. Percebemos uma tendência a substituí-lo por zeros e a produzir escritas mais próximas das convencionais.

> Quando questionadas sobre como escrevem o número dois mil e cinco, fazem-no corretamente: *2005*. Embaixo formam o número cinco mil e vinte e quatro assim: *5124.* Questionadas sobre onde, no número, está escrito que é mil, Taa e Cla apontam imediatamente para o *1* do *5124*. Problematizando a situação questiono: - *E no dois mil e cinco (2005) onde a gente vê que é mil?* Tae diz que é no zero, apontando o primeiro zero, logo após o dois. Taa pensa e diz: - *Acho que vamos ter que trocar... Estou pensando se a gente colocasse o zero no lugar do 1.* Faz isto com a ajuda de Tae. Com as fichas, primeiro tira o zero do *2.005* e coloca-o no lugar do 1 em *5124*, formando o *5024.* Depois coloca outro zero no lugar daquele que tirou do 2005. Taa diz: - *Eu acho que o cinco mil ....* Não consegue concluir.
>
> Tae não concorda com o fato de Cla colocar o *1* em *61020* e argumenta lembrando que no número que haviam feito outro dia não colocavam o *1.*

A hipótese da necessidade de uma marca para o “mil” na escrita do número é bastante forte, como observamos na convicção que Sab deposita sobre ela durante o confronto entre esta hipótese e o conhecimento informal que possuíam sobre milhares.

> Problematizo, questionando como escreveriam o ano correspondente à data de nosso encontro: dois mil e cinco. Ao mesmo tempo dizem*:- O dois, zero, zero e o cinco (2005*). Pergunto se este número é maior ou menor do que mil. Sab de imediato, diz: - É *menor que mil, porque está faltando um zero*. Indica o espaço entre zero e cinco *.“Não dá, tipo, dois mil e cinco.* Acrescenta: - *O certo dele era duzentos e cinco.*
>
> Questiono como a professora escreve dois mil e cinco na sala de aula. Afirmam que é *2005*. Pergunto se a professora escreve errado. Dizem que não. Sab acrescenta: - “*Só que a forma dela é esta. Aqui tá faltando um zero pra ler dois mil ... e cinco. Assim, ó com dois zeros dá duzentos .... só que a professora lê de outra manera*. Pergunto como ela lê. Fel diz: - D*ois mil e cinco, mas falta um zero*. Questiono: - A *professora está enganada então?* Fel e Lua balançam a cabeça afirmativamente. Sab fica pensativa. Pergunto, como acham que deveria ser escrito o dois mil e cinco. Lua acrescenta um zero antes do cinco*: 20005*.
>
> Peço para que olhem no calendário. Pergunto: - *Como está escrito o ano em que estamos, dois mil e cinco?* Fel diz: - D*uzentos e cinco. Tem que colocar mais um zero*. Questiono: - *Será que não tem alguma coisa, algum segredo? O calendário poderia estar errado?* ... Sab diz: - *Ah, não sei.*

Num outro momento, problematizamos novamente a escrita de dois mil e cinco. Como podemos ver abaixo, Sab escreve automaticamente *2005,* como escreve diariamente em seu caderno, em função de estarmos no ano dois mil e cinco. Mas, ao ver sua escrita, pára, pensa e a corrige, adequando-a à concepção presente de que é necessária uma marca para o mil.

> Ao escrever dois mil e cinco na folha, Sab escreve *2005*. Pára, olha e corrige, coloca mais um zero. Questiono: - C*omo você escreveu, Sab?* Responde: - *Eu escrevi duzentos e cinco, só que agora eu coloquei mais um zero e ficou dois mil e cinco.* Digo a ela: - Então, tu tinhas escrito errado? Fel diz: - D*ois, zero, zero, cinco e aí ficou duzentos e cinco, agora ela colocou mais um zero e ficou dois mil e cinco.*

Sab e Fel continuavam acreditando que dois mil e cinco devia ser escrito *20005*. A hipótese de que é necessário “marcar o mil” com *000* é tão significativa que faz com que questionem a escrita do dois mil e cinco no calendário e duvidem da forma como a professora e os demais professores da escola escrevem, como foi possível ver acima e como também se observa no diálogo que segue:

> Fel forma o número *50032,* afirmando que é quinhentos e trinta e dois. Sab intervém e argumenta que os dois zeros não são necessários para a escrita de quinhentos e trinta e dois. Questiono por que e Sab afirma: - *Bom, a maneira da professora*

> *escrever ... ela não bota os dois zeros.* Problematizo: - *Mas antes vocês me disseram que achavam que a professora estava escrevendo dois mil e cinco errado no quadro*. Sab responde: - *É! Isso ela faz. Todas as profes daqui fazem assim.*

Se de um lado Sab confia na escrita produzida pela professora para centenas (532), de outro não está bem certa de que possa fazer o mesmo em relação aos milhares. Para acreditar na professora, Sab e seus colegas precisam compreender algo mais e isto implica o reconhecimento de que não são os zeros ou o algarismo 1 que "dizem que é mil" na escrita do número. Aproximam-se mais das escritas convencionais, reconhecendo não ser necessário usar uma marca para o "mil".

> Clá forma o número dez mil: *10 1000*. Questiono se as colegas concordam. Tae diz que não e argumenta: - Porque tem o um e não pode ter o um aqui. (Retira o 1 e fica *10 000*). No entanto não consegue argumentar: - *Porque se põe o um, daí fica, deixa eu ver... Dez mil.*

> Solicito que escrevam dezenove mil quinhentos e sete a partir de *507,* já formado com as fichas. Sab diz: *Tem que botá o um e o nove, formando 19507*. Lua interfere: - *E colocar o zero ali no nove*. Fel acrescenta um zero e fica *190507.* Questiono: *Você acha que tem que ser assim, Fel?* Fel olha para a escrita que formou e responde: *- Não, tira o zero daí fica certo.* (O número fica *19507*).

Outras possibilidades foram gradativamente consideradas em relação a como argumentar a não-necessidade de usar marcas de mil. Percebemos uma preocupação com a separação dos algarismos no número e com a utilização de outras formas, tais como o ponto e a vírgula para "dizer que é mil" na escrita numérica.

d) Separação dos algarismos na escrita

Números escritos separados causaram estranheza às crianças que demonstraram saber que alguma marca gráfica é usada para separar os algarismos na escrita do número e que estes precisam estar juntos na escrita.

> *- Aqui (em 2000 100 92) tudo é separado os números e aqui (em 2000100902) é tudo junto. Todos têm que ser junto*. Lê novamente a escrita 2.192 dizendo: A*qui ó, é dois, ponto, cento e noventa e dois.*

> Fel escreve: *200200537*. Sab coloca uma vírgula na escrita de Fel: *200,200537*. Pergunto por quê. Ela diz que é para separar o número.

Algumas crianças participantes da pesquisa referiram que a separação dos algarismos pode ser feita através do ponto, embora não conseguissem explicar por quê. Apenas Sab referiu também a vírgula. No exemplo acima, Sab demonstrou saber que a vírgula é também usada com a função de separar os algarismos no número.

6.2 COMPREENSÃO DAS REGULARIDADES INTERNAS DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Como referimos, a escrita de milhares não havia sido trabalhada na escola pelos sujeitos de nossa pesquisa, mas já haviam trabalhado com o sistema de numeração decimal no domínio das centenas. A cada situação didática, verificávamos um processo construtivo caracterizado pela tentativa de integrar os conhecimentos já adquiridos às situações que se apresentavam e pela construção de novas hipóteses e concepções rumo à compreensão das regularidades internas do sistema que descrevemos a seguir.

6.2.1 Rumo à escrita numérica convencional de multidígitos

As regularidades da escrita de multidígitos passavam a ser percebidas pelas crianças à medida que com elas se familiarizavam ao longo da pesquisa. As problematizações constantes provocadas pelas situações-problema propostas ao longo das situações didáticas possibilitaram identificar concepções manifestadas pelas crianças sobre como se lê e como se escreve milhares e uma gradativa evolução destas concepções rumo à escrita convencional dos milhares. É o que apresentamos, a seguir, mantendo como subtítulos expressões usadas pelas crianças e transcrevendo os diálogos realizados, por considerarmos ilustrativos em relação às idéias que expressam.

a) É impossível ler esse número

Ler números nem sempre foi uma tarefa fácil. Várias tentativas frustradas eram realizadas na tentativa de ler milhares.

Pesq.: Que número é esse?
Tentam ler, mas não conseguem.
Taa: *Vinte mil dois mil trezentos e quarenta e cinco*
Cla:*Vinte e um mil duzentos e vinte .... ah, não sei ...*
Taa: *Vinte mil ...*
[...]
Pesq.: Que número é?
Taa: *Vinte mil e duzentos e trezentos e* ....
Pesq.: Como se lia esse daqui (refere-se ao número 1.345).
Cla: *Cem mil ... Não... mil ...*
Tae: *É dois mil e duzentos* (referindo-se ao 212 345)
Taa: *Ó é dois mil doze e trezentos e quarenta e cinco* (referindo-se ao 212.345)

b) O número ficou "mais grande"

O reconhecimento da classe dos milhares não se dá de imediato. Inicialmente causa estranheza. Percebem que o número ficou maior e já não é mais possível identificar as casas da unidade, dezena e centena como estavam acostumados, como se observa no diálogo abaixo, em que as crianças estavam envolvidas em identificar as casas das unidades, dezenas e centenas do número.

Pesq.: E aqui embaixo o que aconteceu? (Refere-se ao número 12.345).
Pensam...
Sab: *O número ficou maaais grande... e ...*
Pesq.: O número ficou mais grande. E daí o que tem que acontecer aqui?
Silêncio.Olham-se.

c) Elimina-se um algarismo

Quando se tratava de centenas já haviam assimilado as casas decimais com seus respectivos valores. Percebemos uma tendência de aplicar os conhecimentos já assimilados em situações anteriores sobre unidade, dezena e centena em situações novas, nas ações de representar essas casas decimais com as letras C,D,U, correspondentes a centenas, dezenas e unidades, escrevendo-as sobre os algarismos. No entanto isto não foi possível, quando envolveu milhares. Cla, no exemplo abaixo, encontra uma rápida solução para o problema: eliminar um algarismo.

Pesq.: A professora tinha dois mil, trezentos e setenta e oito pirulitos (*2.378*). O desafio é o mesmo, descobrir quantos pirulitos cada parte do número representa.

Tae: *Se nós fizer igual ao de cima?*
Clá: *É verdade! Duas dezenas, três centenas e sete unidades*. *E aqui daí fica fora* (refere-se ao número oito).
Tae: *Não.*

d) Surgem novas “casinhas”

O exemplo é bastante ilustrativo em relação à tomada de consciência da necessidade de criar uma nova casa decimal.

Pesq.: Exato. E esse número agora. Que número é esse? *(12.345)*
Cla e Taa: *Mil, duzentos e trezentos e quarenta e cinco.*
Pesq.: Não.
Taa: *É doze mil. Doze mil, trezentos e quarenta e cinco né, prof?*
Pesq.: Doze mil,trezentos e quarenta e cinco.
Tae: *Meu Deus... agora tem mais casinha ...Tem que ter mais uma casinha.*
Taa: *Ai, meu Deus*!

e) Inicia-se pela esquerda

Ao identificar as casas decimais com as letras respectivas, as crianças não necessariamente o fazem respeitando o sentido direita-esquerda, que caracteriza a ordem das potências de dez constitutivas do sistema. Geralmente iniciam pela esquerda, respeitando o sentido da leitura do numeral.

Lua apontando para os algarismos da esquerda para a direita em *15.121* diz: - *Milhar, centena, dezena e unidade*.
Pesq.: O Lua disse que o um é o milhar, o cinco é a centena, o um é a dezena... Como é Lua? Explica de novo.
Lua: *Milhar, centena, dezena e unidade.*
Lua escreve as letras sobre os algarismos da esquerda para a direita. O um da unidade sobrou (15.12**1).**

f) Iniciar pela esquerda nem sempre dá certo: faltam casinhas ou sobram algarismos

Percebem que, ao iniciarem pela esquerda para identificarem as casas decimais, sobram algarismos ao final e faltam letras; ao iniciarem pela direita, ocorre o mesmo.

Pesq.: E aí o que aconteceu?

Fel: *O milhar tinha que tá no cinco*.
Pesq.: Por quê?
Fel: *Porque é quinze.*
Lua: *Mas daí falta aqui*. (Refere-se ao primeiro algarismo 1 do número **1**5121).
[...]
Pesq.: Ta, quem é que faltou ali? Oh, unidade, dezena, centena e milhar. Quem é que está faltando? (1**5121**)
Lua: *O um ficou sem* (**1**5121)
Pesq.: O um ficou sem casa? E agora?
Sab: *Mas aqui é quinze mil então não pode ser separado. Então os dois são milhar, Lua.*

g) Todos os algarismos das classes dos milhares são milhares

Consideram a classe dos milhares como um todo, sem cogitar a possibilidade de identificar os algarismos como unidade, dezena e centena de milhar.

Taa escreve as letras correspondentes às posições no número 12.345.
Pesq.: Vamos ver o que você colocou aqui. Milhar, milhar, centena, dezena e unidade.
Cla: *Milhar, milhar, dezena... Ah!* (Se dá conta de algo) Diz: - *Tem três milhares, porque ó: centena, dezena e unidade. (*apontando para o *3,4* e *5* de 12.**345**)
Pesq.: Por que Cla?
Cla: Porque ó milhar, milhar, milhar... (Apontando para os algarismos correspondentes à posição de cada algarismo).

Fel coloca as letras u, d, c correspondentes à posição dos algarismos no número 345.
Fel: *E agora, aqui?*
Sab: *Milhar, eme.*
Lua: *Eme*
Fel: *Coloca M,M,M nas casas dos milhares*

h) As casas decimais ajudam a ler os números

Aos poucos as casas decimais passam a auxiliar na leitura do número.

Pesq.: Agora olha outro número. Eu vou escrever ele maior, para vocês verem. (Escreve 212. 345). Ajuda ler, Fel.
Fel: *Vinte um mil trezentos...*
Alunos tentam ler: - *Dois mil duzentos e... Dois mil...*
Lua: *Dois mil... e duzentos e trezentos e quarenta e cinco.*
Todos riem.
Pesq.: Como é que vocês descobriram antes? Pensem.
Fel: *Por unidade, dezena, centena e milhar.*
Sab: *Separando. A gente separou aqui ó: milhares, dois mil... Dois mil e doze...*

i) O ponto separa os milhares das unidades

O ponto passa a ser reconhecido como recurso para separar a classe dos milhares e das unidades, juntamente com as letras correspondentes às casas decimais.

Pesq.: Vocês já viram números com vírgula?
Todos: *Não.*
Lua: *Só com ponto.*
Pesq.: E para que a gente usa o ponto?
Lua: *Para deixar tipo assim* (aponta para o número *15121*) *e esse aqui (15) fica fora.*
Pesq.: Onde teria o ponto ali no quinze mil, cento e vinte e um?
Lua: *Aqui, oh*. (Coloca um ponto entre o 15 e o 121).
Pesq.: E o que ele separa ali?
Lua: *O cinco do um.*
Pesq.: O cinco do um? Mas esse ponto ali separa o quê?
Sab*: Ele separa o quinze mil do cento e vinte e um.*

Aos poucos o ponto passa a ser reconhecido também como uma forma de "marcar" o "mil" no número, além das letras para identificar as casas decimais e as marcas de mil descritas acima.

Pesq.: Então tá. Agora eu vou ditar outro número para vocês. Cento e oito mil, duzentos e dezesseis.
Pesq: E será que precisa pôr o um para dizer que é o mil? Será que não tem outra coisa que diz que é mil?
Sab escreve as letras correspondentes à posição dos algarismos do número 108 216.
Pesq.: Certo? Milhar, milhar, centena, dezena e unidade. Muito bem. Aqui estão os milhares (aponta para o número 108), cento e oito mil. E aqui (número 216), centena, dezena e unidade. E o que a gente usou antes para separar, o que o Lua disse?
Sab: *Ponto*.
Pesq.: Ponto. E o que o ponto separa?
Sab: *Separa o cento e oito do duzentos e dezesseis*.
Pesq.: E daí, esse ponto ele diz para nós o quê?
Lua: *Para separar, senão o número ia ficar tudo junto.*
Sab: *Ah, aqui ó (número 108) já representa que é mil eu acho*.
Pesq.: Cento e oito mil, duzentos e dezesseis. Então o ponto separa?
Sab: *É.*
Pesq.: E o que é que ele separa?
Lua: Ele separa o cento e dezesseis.
Sab: Que nem aqui é cento e oito mil. Como é que vai representar o mil? Então eu acho que é isso.

Muitas regularidades da notação de multidígitos já foram construídas, mas estas construções não necessariamente estão vinculadas à compreensão do valor posicional:

Pesq.: Quantos pacotes de balas nós teríamos que fazer em 11.111?
Lua: *Dois de mil...*
Pesq.: Dois de mil ...
Lua: *Os dois onze e daí tinha que fazer dois pacotes de mil*
Pesq.: Daí fica com dois mil...
Silêncio

Coexistiram diferentes hipóteses, muitas vezes conflitantes entre si, sobre a leitura e a escrita dos números, como pode ser observado abaixo:

Fel observa o número *150200* escrito por Sab (quinze mil e duzentos) e diz: -M*as eu garantia que não tinha zero*! Depois, ao ver o número *15200* diz: - S*e colocasse o zero ia ficar na mesma, só iria ocupar um pouquinho mais de espaço*. Ao ver o zero colocado novamente no número, diz: - *Não ia ficar*... *(150200*). Argumenta que se colocasse o zero ficaria cento e cinqüenta. Lê o número *150200* como *cento e cinqüenta e duzentos*. Quando questionado sobre isso, lê novamente e diz: - *Quinze mil e duzentos.*

A presença de diferentes hipóteses na leitura de um mesmo número também pode ser observada na forma como Raf justificou a leitura que realizou e na forma como resolveu os conflitos gerados por suas diferentes concepções.

Diante da escrita de quatro mil, duzentos e vinte e seis, produzida por um colega: *402* ***0****26*, aponta o *0* entre os algarismos *2* e diz : -V*ai fora, porque senão não forma o duzentos e vinte e seis*. Argumenta: - *É porque o dois e o vinte e seis ficam separados e por isso ta errado. Fica este: 40226.*

O caso de Cla, descrito abaixo, torna claro que as reflexões sobre como são produzidas as escritas provocaram um confronto entre as concepções já construídas e as novas, produzidas no momento da situação didática.

Clá, tentando formar o “mil” do quatro mil, cento e vinte e seis, diz: - É *três zeros, né*? Observa a escrita das colegas: *41226*. Estranha algo. Pega a folha e lê o número escrito: quatro mil, duzentos e vinte e seis. Diante de *41226* escrito pelas colegas, argumenta que é necessário colocar os zeros para formar o mil. Acaba concordando com os argumentos das colegas que fazem corresponder a cada algarismo um nome de número (ao um, a palavra mil), pois também acredita que na escrita cinco nomes de número devem corresponder a cinco algarismos no número. Aceita o argumento, mas, na hora de escrever, pára e questiona novamente: - P*recisa colocar os zeros após o um para formar quatro mil?*

Foi possível constatar que, ao longo das situações didáticas, diferentes concepções também manifestaram-se no momento da produção de uma mesma escrita, o que gerou a necessidade de resolver conflitos.

> Solicito que formem com as fichas o número duzentos e quarenta e seis mil, cento e trinta e sete. Raf forma com as fichas o número *200460137*. Lê *vinte mil quatrocentos e sessenta cento e trinta e sete*. Diz: - *Não pode, os números têm que estar juntos para formar o duzentos e quarenta e seis e não podem ser separados pelo zero*. Forma novamente o número solicitado desta forma: *2460137*.

No exemplo abaixo, verifica-se uma situação em que Sab, ao final das intervenções realizadas com seu grupo, ainda se vale da hipótese de que é necessário acrescentar o 1 como marca de mil e acaba por tomar consciência de outras possibilidades de fazê-lo, ao estabelecer relações entre os diferentes conhecimentos já construídos. Questionada em relação ao fato de não ter utilizado o *1* como marca de mil em outras escritas, se dá conta de que esta marca não é necessária.

> Lua escreve *108216.* Leio o número: - *Olha ali oh, cento e oito mil duzentos e dezesseis.* Sab observa que falta o *1* (um) entre o 108 e o 216. Questiono: - *Por que tinha que pôr o um ali Sab?* Afirma que o um representa o mil. Argumento: - *Mas olha, no quinze mil cento e vinte e um (15121) você escreveu este um entre o quinze e o cento e vinte e um para dizer que era mil?* Sab aponta o *15121* e diz*: - Não precisa pôr o um.*
>
> Questiono: - *Que número é esse: 3456?* Sab lê corretamente: - *Três mil quatrocentos e cinqüenta e seis.* Questiono se nesta escrita tem o *1* e se ele é necessário para dizer que é “mil”. Sab responde: - *Acho que não.* Solicito que leiam o número *108216*. Sab e Fel dizem ao mesmo tempo: - *Cento e oito mil duzentos e dezesseis*. Sab se dá conta de algo e diz: - *É! Tá certo, não precisa pôr o um.*

Dias depois, no decorrer de outra situação didática, Sab, problematizada no sentido de como escrever o “mil” diante do fato de que não poderia ser através do algarismo *1*, recorre aos conhecimentos construídos na escola e durante as intervenções sobre casas decimais e sobre o uso do ponto para separar os “mil” dos demais algarismos e se dá conta de algo mais.

> Pergunto à Sab: - *E será que precisa pôr o um para dizer que é o mil? Será que não tem outra coisa que diz que é mil?* Sab escreve as letras correspondentes à posição dos algarismos do número *108216:* m,m,m,c,d,u, sobre os mesmos. Concordo com ela, mas continuo a problematizá-la: - *E o que a gente usou antes para separar? O*

> *que o Lua disse antes?* Diz - *Ponto.* Pergunto: - *E o que o ponto separa?* Sab responde que o ponto separa o cento e oito do duzentos e dezesseis. Insisto para que diga qual é a função do ponto no número. Lua intervém no diálogo e afirma: - *Pra separar, senão o número ia ficar tudo junto.* Sab se dá conta de algo e afirma**: -** *Ah, aqui ó (108) já representa que é mil eu acho. Que nem aqui é cento e oito mil. Como é que vai representar o mil? Então eu acho que é isso.*

Sab toma consciência de que a posição ocupada pelo 108 no 108.216 pode significar os "mil" no número.

6.2.2 Rumo à compreensão do valor posicional do número

Algumas questões nortearam esta etapa da investigação: A escrita numérica sugere agrupamentos de dez, cem, mil? Os agrupamentos sugerem a escrita numérica correspondente? Quais relações se estabelecem entre escritas e agrupamentos? Como se processa a compreensão do valor posicional a partir da reflexão sobre a escrita numérica? Na expectativa de esclarecê-las, projetamos uma situação-problema ampla, e, a partir dela, propusemos várias situações didáticas que envolvessem relações com ações de agrupar doces a partir de escritas numéricas e produzir a escrita numérica correspondente "à quantidade de doces já agrupados": "Trabalhamos em uma loja de doces e precisamos empacotá-los em embalagens com capacidades para um, dez, cem, mil doces" (Adaptado de COBB; YACKEL; WOOD, 1992). As situações didáticas foram elaboradas no sentido de verificar as concepções presentes em ações que envolviam produzir agrupamentos a partir da escrita numérica (Intervenção 7); produzir escritas a partir de agrupamentos (Intervenções 8 e 11); identificar o valor posicional a partir de escritas numéricas (Intervenções 2, 9 e 10). Em todas essas intervenções foi possível identificar concepções das crianças em direção à compreensão do valor posicional, como descrevemos a seguir.

6.2.2.1 A escrita numérica e os agrupamentos

Solicitamos às crianças que imaginassem a situação: - Trabalhamos numa loja de doces. Ao final de um dia de trabalho restam para empacotar 456 pirulitos. A loja possui embalagens de cem e de dez doces. Buscamos problematizar situações em que a formação de grupos fosse necessária, questionando como os doces poderiam ser “empacotados” em embalagens de um, dez, cem e mil doces, a partir de uma escrita numérica através das seguintes questões: Como podemos empacotá-los? **-** Precisamos empacotar 3.432 balas. Como podemos fazer? É possível usar as embalagens da loja?

Ao serem problematizados a imaginar situações de agrupamentos de dez, cem e mil, a partir de um número escrito, verificamos que, nas primeiras solicitações neste sentido, a preocupação inicial demonstrada pelos alunos foi com a quantidade total representada pela escrita e com a formação de grupos a partir desta quantidade. Percebemos uma tendência inicial de formar os grupos através das seguintes estratégias: distribuir a quantidade de doces entre si, dividir a quantidade por 2 ou por 3 ou subtrair quantidades aleatórias da quantidade total de doces. Seguem alguns exemplos de diálogos entre as crianças e entre elas e o pesquisador, que tornam explícitas estas concepções.

a) Distribuição da quantidade inicial entre si

Pesq.: Tae, como tu achas que nós poderíamos empacotar quatrocentos e cinqüenta e seis pirulitos?
Silêncio
Cla: *Oh, um pouco pra ela, pra ela, um pouco pra tu e um pouco pra mim, dái ... ah...*
Taa: *Cada um fica com cinco*
Cla: *Não, cada um ...*
Tae: *Fica com dez ...*
Cla: *Não... fica com cem*
Pesq.: Ficaria quanto pra cada um? Cem?
Cla: *Não, dez pra cada um.*
Pesq.: Como faremos então? Nós vamos ter que pôr os pirulitos nos saquinhos.
Silêncio...

b) Divisão da quantidade inicial por 2 ou 3

Sab: *A gente tem que dividir. Daí vai dar.*
Pesq.: Dividir?
Sab: *Eu acho que sim.*
Fel: *Dividir por três.*
Pesq.: E se vocês dividissem por três?
Fel: *Eu acho que ia dar certo. Se não der, fizemos de outro jeito*.
Pesq.: Mas nós temos os pacotes. Nós temos os saquinhos para colocar os pirulitos.
Sab: E nesses saquinhos cabem quantos?

Pesq.: Tem uns saquinhos em que cabem cem, tem outros saquinhos em que cabem dez.
Fel e Lua: *Dividir por dois.*
Sab: *Dois?*
Sab faz a divisão de 456 por dois.
Pesq.: Então como é que vocês vão colocar os pirulitos nos pacotes?
Lua: *Dividindo por dois.*
Pesq.: Então como é que vai ficar, Lua? Imagine os pacotes aqui e me mostra como é que ia ficar.
Lua: *Dividindo por dois pacotes.*
Fel: *Dois pacotes de dez e dois pacotes de cem.*

c) Subtração de quantidades aleatórias da quantidade inicial, ignorando a capacidade das embalagens

Pesq.: A gente tem aqui três mil, quatrocentos e trinta e duas balas. A gente vai começar a empacotar, como? Dá uma sugestão, Tae.
Cla faz cálculos.
Tae: *Ah!* (Começa a fazer cálculos na folha).
Cla faz 3432 –10 =
Tae continua fazendo cálculos.
Cla faz 3432 – 32 = Diz que sua conta está errada.
Tae faz 3432 – 36 =
Pesq.: Você está fazendo menos trinta e seis por que, Tae?
Tae apaga o que fez.
Silêncio.

A gente tem aqui três mil, quatrocentos e trinta e duas balas. Como vamos empacotar?
Pesq.: E agora?
Fel: *Agora pega um pacote de dez.*
Pesq.: Oh, sobraram mil quatrocentos e trinta e duas.
Fel: *Então pega mais um de mil.*
Pesq.: Fazendo gestos diz: Mil. Empacotei. Quanto sobrou lá?.
Fel: *Quatrocentos e trinta e duas.*
Pesq.: E quantos pacotes de mil você já fez?
Fel: *Três.*
Pesq.: E essas quatrocentos e trinta e duas agora? O que eu faço?
Fel: *De quatrocentos se tiver.*
Pesq.: Só tem de cem, de dez e de mil.

Quando novamente problematizados e esclarecidos em relação ao fato de que seria necessário empacotar doces em embalagens já prontas, que deveriam conter mil, cem, dez ou um doce, as crianças partiram da quantidade inicial e usaram a subtração para formar os grupos de quantidades de 10, 100 e 1.000, aleatoriamente, sem seguir uma ordem na formação dos grupos. Num primeiro momento, não se deram conta da possibilidade de seguir uma seqüência no empacotamento, que resultaria num processo mais rápido e econômico, o que justificou a intervenção seguinte:

> Após várias subtrações de 3.432 para empacotar as balas.
> **Pesq.**: Quanto sobrou? Duas mil, trezentos e doze balas.
> **Cla:** *Ainda tá longe...*
> **Pesq.**: Então, será que nós precisamos fazer um pacote grande ou pequeno?
> **Taa**: *De cem.*
> **Pesq.:** Não dava para fazer de mais?
> **Taa:** *Dá para fazer de mais, profe?*
> **Pesq.**: De mais balas dentro do pacote.
> **Taa** faz cálculos.
> **Pesq.**: Fez mais um pacote de?
> **Taa**: *Cem.*
> **Pesq.**: Mas ainda tem muitas balas.Oh, duas mil, duzentas e doze.
> **Taa** faz menos dez.

Quando problematizados no sentido de encontrarem uma forma mais rápida de empacotar os doces, passaram a subtrair do total quantidades maiores, mas não perceberam a possibilidade de formar todos os pacotes de mil, todos os de cem e assim sucessivamente.

> **Pesq.:** Fel, tem três mil quatrocentos e trinta e duas balas aqui em cima. E agora? Temos que empacotar as balas com pacotes de dez, cem e de mil. Como é que você faria os pacotes?
> **Fel:** *Eu acho que tudo de mil que daí acaba mais ligeiro.*
> **Pesq.**: Ta, então você faria pacotes de mil. Quantas balas você ocuparia para formar estes pacotes?
> **Fel:** *Eu acho que a metade delas.*
> **Pesq.**: Oh, você tem três mil quatrocentas e trinta e duas balas.
> **Fel**: *Três mil? Então só ia tirar mil. Porque no pacote cabe mil balas.*
> **Pesq.**: Ta, eu tiro mil e ponho num pacote.(Fazendo gestos) O que sobrou?
> **Fel:** *Mil... era...*
> **Pesq.**: Três mil quatrocentos e trinta e dois.
> **Fel:** *Ficou dois mil trezentos e quarenta e dois...Então a gente pega mais um de mil.*
> **Pesq.:** Tá, eu pego mil e ponho dentro do pacote. (Fazendo gestos da ação)
> **Fel**: *E agora vai ficar mil e... quatrocentos e trinta e do*is.
> **Pesq.**: E agora?
> **Fel**: *Agora pega um pacote de dez*

Verificamos que para nossas crianças a escrita numérica não sugeriu, de imediato, a formação de agrupamentos de dez, cem, mil. O exemplo abaixo é bastante ilustrativo em relação a isto.

> **Pesq.**: Quanto diz aqui?
> **Tae e Cla**: *Três mil quatrocentos e trinta e dois.*
> **Pesq.**: Isso. E agora quantos pacotes de mil tem?

> **Tae** conta os pacotes formados. Todas contam juntas novamente: um mil, dois mil, três mil.
> **Pesq.**: Tem algum lugar no número que diz que é três mil?
> **Tae**: *Não.*
> **Pesq.**: Não tem nenhum lugar ali no número que tem relação com os pacotes?
> **Tae:** *Eu acho que não.*

Tae não relaciona a escrita do número com os pacotes de mil que já havia desenhado. Para ela não está claro que o primeiro *3* do ***3****.432* indica a quantidade de pacotes de mil que podem ser feitos com a quantidade, o que evidencia que a escrita, por si só, não é transparente para a criança.

Somente nas últimas intervenções, após vivenciarem as diferentes situações propostas pela pesquisa (que problematiza relações entre escritas e agrupamentos), os constantes questionamentos sobre a existência de "algo" no número que indicasse a quantidade de pacotes a serem formados, feitos pelo pesquisador, passou a fazer sentido para algumas crianças.

> **Sab** começa a fazer uma soma: *20000 + 400 + 20 + 6000= 26420* e diz: - *Vinte e seis mil quatrocentos e vinte*.
> **Pesq.**: Vinte e seis mil quatrocentos e vinte. Onde está dito ali no número que eu tenho seis pacotes de mil?
> **Lua** aponta para o algarismo *6* do número *2****6.****420*.
> **Pesq.**: Onde está dito que eu tenho quatro pacotes de cem?
> **Lua e Sab** apontam para o algarismo quatro: *26.****4****20*
> **Lua e Fel** apontam para o segundo algarismo dois do número
> *26 4****2****0.*
> **Sab** discorda e aponta para o primeiro algarismo dois do número: ***2****6420.*

Foi também nas últimas intervenções que algumas crianças demonstraram saber a quantidade de grupos de um, dez, cem e mil representada pelos algarismos, olhando para o numeral escrito. Em outras palavras, que deram mostras de estarem mais próximas da compreensão do valor relativo dos algarismos no número e da compreensão do princípio da posicionalidade, característico do sistema de numeração decimal.

> **Pesq.**: Muito bem. Três mil, quatrocentos e cinqüenta e seis balas *(3456).* E agora como é que nós poderíamos descobrir quantos pacotes nós teríamos que fazer de um, dez, cem, mil?
> **Sab**: *A gente poderia fazer três de mil que dá três mil, ah..., daí quatro pacotes de cem que dá quatrocentos.*
> [...]
> **Pesq.**: Como é que você sabe, Sab?

Sab: *Porque já diz ali três mil quatrocentos e cinqüenta e seis. Três mil é, mil, mais mil, mais mil. Quatrocentos, ó.... cem, duzentos, trezentos, quatrocentos.* (Conta nos dedos). Dá quatro de cem e o cinco representa o dez, e o seis de um.

6.2.2.2 Os agrupamentos e a escrita numérica

Solicitamos às crianças que imaginassem situações semelhantes a esta: “No estoque de nossa loja de doces há um pote com mil balas, dois potes com dez balas, cinco potes com cem balas”. A partir daí solicitamos que escrevessem o número correspondente a quantas balas havia no estoque. Buscávamos investigar se as crianças seriam capazes de produzir a escrita numérica correspondente aos agrupamentos previamente formados, relacionando a quantidade dos potes aos valores relativos dos algarismos no número.

A reação inicial das crianças diante da situação-problema foi representar a quantidade de balas em cada pote, através de desenhos e obter o numeral correspondente à quantidade total através de cálculos.

Sab e Lua lêem o enunciado em voz alta: *Temos guardados no estoque três pacotes de mil pirulitos, quatro pacotes de cem pirulitos, dois pacotes de dez pirulitos e dois pirulitos soltos. Quantos pirulitos têm ao todo no estoque? Escreva o núm*ero.
Pesq.: Lua, tem como escrever o número direto ali?
Lua: *Tem*
Sab *Tem que fazer a conta primeiro.*
Pesq.: Será que precisa fazer a conta Sab?
Sab: *Eu acho que precisa.*

A primeira estratégia utilizada pelos grupos foi desenhar os agrupamentos, ou seja, os pacotes, anotar as respectivas quantidades de balas que continham e somar as respectivas quantidades. A necessidade de representar através do desenho cada pacote enunciado no problema foi bastante significativa nas primeiras interações com o problema. No exemplo abaixo, percebemos claramente a necessidade de visualizar cada pacote com seus respectivos conteúdos e só então somar um a um.

Pesq.: Temos vinte e quatro pacotes de dez bombons e doze pacotes de cem bombons e mais quatro bombons soltos. Quantos bombons nós temos ao todo?
Taa lê o enunciado e diz: - *Dá para fazer os vinte e quatro aqui? Pacotes?*
Pesq.: O que é para fazer?
Taa: *Pacotes de vinte e quatro ... Vinte e quatro pacotes.*
Pesq.: E precisa fazer os pacotes? O que vocês acham?

Tae: *Eu acho que precisa.*
Pesq.: desenha os pacotes vazios. Pergunta: Quanto tem que colocar dentro?
Taa: *Dez.*
Pesq.:. Escreve as quantidades em todos os pacotes ...
Elas dizem: dez, dez, dez, dez,..... acompanhando a Pesq.
Pesq.: Não tinha um jeito mais rápido? E agora?
Taa: *Doze pacotes de cem.*
Pesq.: Desenha e elas acompanham contando de dez em dez
Pesq.: E agora o que tem que fazer? Está pronto?
Tae: *Mais quatro bombons soltos.*
Pesq.: Mais quatro bombons soltos.
Taa desenha os bombons soltos.
Pesq.: Então quantos bombons temos ao todo?
Taa começa a contar pelos pacotes de dez: - *Dez, vinte, trinta ......cem. Cento e dez, cento e vinte, cento e trinta ...Duzentos, Duzentos e dez, duzentos e vinte ....* até duzentos e quarenta.
Pesq.: Até aqui tem quanto?
Taa: *Duzentos e quarenta* (Escreve o número).

Ambas as formas de representação, desenho e cálculo, tornavam claro o uso do raciocínio aditivo na resolução do problema. Assim foram desenhados vinte e quatro pacotes e escrito *dez* dentro, doze pacotes e escrito *cem* em cada e quatro bombons soltos e após as quantidades respectivas a cada pacote foram somadas.

Aos poucos os desenhos dos “pacotes” foram sendo substituídos pela escrita das quantidades que continham: *1000 100 100 100 100 100 10 10* (*um pacote de mil, cinco de cem e dois de dez)* e por cálculos de adição: *1000 + 100 + 100 +100 +100 +100 +10 +10* . A escrita do número era obtida através da soma das quantidades correspondentes a cada pacote desenhado.

Pesq.:Temos guardados no estoque três pacotes de mil, quatro de cem, dois de dez e dois pirulitos soltos. Quantos pirulitos temos ao todo?
Taa: *Dá para fazer os pacotinhos?*
Pesq.: Explica como é que você vai fazer.
Taa: *Fazer os pacotinhos e depois fazer de mais....*
Pesq.: Fazer todos os pacotinhos e depois somar? E não tem um jeito mais fácil de fazer?
Tae: *Tem. Fazê toooodos os cálculos ou fazê só um cálculo (*Enfatizando o todos).
Taa lê o enunciado. Pensa e diz: - *Três pacotes de mil ...* Desenha um pote e escreve 100 dentro.
Tae chama a atenção para a falta do zero. Taa arruma, acrescentando o zero e desenha mais dois potes escrevendo 1.000 dentro.
Tae: *Três mil*
Pesq.: Três de mil e agora?
Taa: *Quatro pacotes de cem.*
Taa faz os pacotes com as quantidades.
Pesq.: E agora como é que ela poderia fazer?
Tae: *Fazendo o cálculo.*

Nas primeiras tentativas de resolução dos problemas as crianças desenhavam ou somavam as quantidades, respeitando a ordem do enunciado, embora nem sempre o mesmo apresentasse os pacotes de acordo com a ordem gerada pelas potências de dez .

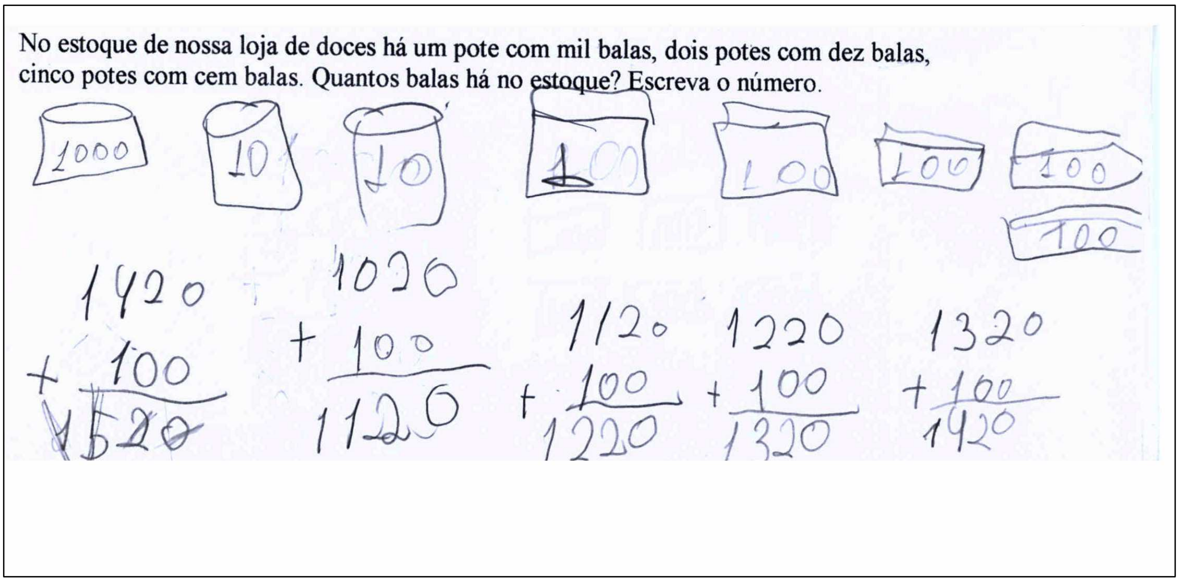

Figura 4 – Registro produzido pelas crianças
Fonte: Dados da pesquisa

Aos poucos, percebiam a possibilidade de organizar os cálculos, agrupando os potes de mesma quantidade. Mesmo assim, ora iniciavam a desenhar, contar ou somar pelos grupos de dez, ora pelos de cem ou mil.

Raf: *Tem quatro mil, novecentos e setenta e quatro.*
Pesq.: Mas como é que você fez isso?
Raf: *Contando os de mil, os de cem, os de dez e depois os de um.*

Pesq.: Quantos doces nós temos empacotados na nossa loja de doces? Lua, como é que nós vamos fazer? Estão aqui os pacotes.
Silêncio
Tem pacotes de quanto?
Sab e Lua: *Dez, cem, mil.*
Pesq.: E como é que nós vamos fazer para poder ver?
Fel: *Em ordem.*
Pesq.: Como?
Fel: *Os de dez com dez.*
Pesq.: Pegar todos os de dez?
Fel: *Os de cem com cem e os de mil com mil.*
Sab. *Aí soma.*

A tendência inicial foi usar a adição para encontrar a quantidade correspondente aos números formados. Alguns alunos, no decorrer das intervenções, passaram a utilizar a multiplicação para calcular o total correspondente aos grupos de dez ou de cem, o que tornava o cálculo mais rápido. Aos poucos esta estratégia passou a ser utilizada pelos demais. No exemplo abaixo, Sab calcula direto o valor de cinco potes com cem balas, desenvolvendo o seguinte raciocínio: 1000 + 10 + 5 x 100

> As crianças lêem o enunciado do problema na folha: No estoque de nossa loja de doces há um pote com mil balas, dois potes com dez balas, cinco potes com cem balas. Quantas balas há no estoque? Escreva o número.
> **Sab**: *Tem que somar ... Olha aí ó, mil balas, mais dez balas, cinco potes de ...*
> **Lua**: Escreve a conta: *1000 + 10 .*
> **Sab**: *Mais quinhentos*.
> **Lua** escreve *55.*
> **Sab** apaga e Lua escreve *500*. Ficou *1000+ 10+ 500 = 1510*
> **Pesq.:** O que vocês fizeram lá? Tinha um pote com mil balas, dois potes com dez balas e cinco potes com mil balas.
> **Fel e todos**: *O total deu mil, quinhentos e dez.*
> **Pesq.:** Está certo, será? Tem uma coisinha que não está. Quantos potes nós temos?
> **Fel** lê o problema novamente.
> **Sab** vê o erro e ajuda Lua a refazer o cálculo *1000 + 20 + 500 = 1520*
> **Pesq.**: Você descobriu o erro, Sab?
> **Sab**: *Sim, porque era dois potes de dez*.
> **Pesq.:** O que tinha acontecido?
> **Sab**: *Ele fez só um.*
> **Pesq.**: Então quanto é que fica?
> **Sab**: *Mil quinhentos e vinte.*
> **Pesq.**: Muito bem. Esse mil, quinhentos e vinte .... vocês poderiam ter feito direto esse número sem fazer aquela soma?
> **Todos**: *Não*.

Em algumas situações, ao calcular a quantidade equivalente aos potes de mesma quantidade através da multiplicação, deparavam-se com cálculos envolvendo dois algarismos no multiplicador. Nestes casos, encontravam dificuldades, pois ainda não haviam aprendido o algoritmo para tal e contavam com o auxílio do pesquisador para realizar o cálculo.

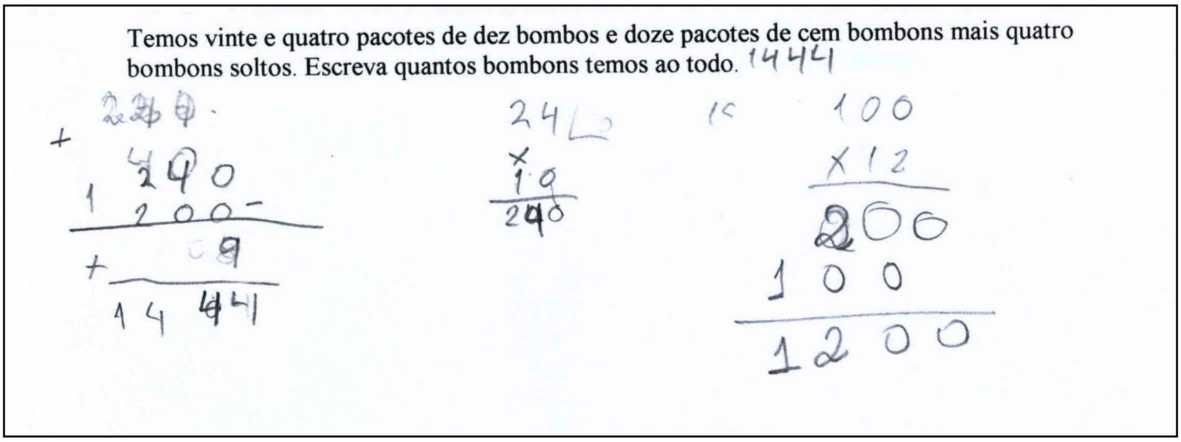

Figura 5 – Registro produzido pelas crianças
Fonte: Dados da pesquisa

Na busca por esse processo da escrita numérica correspondente à quantidade de balas nos potes, manifestavam-se as hipóteses que possuíam sobre a escrita de números (descritas no capítulo anterior deste trabalho) e as dificuldades no cálculo.

> **Mat** conta os quatro pacotes de mil e os nove de cem, calcula mentalmente e diz: - *Quatro mil e novecentos...*
> **Pesq.**: Quantos pacotes de cem, Mic?
> **Mat**: *Tem nove*.
> **Raf** *É.*
> **Pesq.**: E de dez?
> **Raf**: *Sete.*
> **Raf** ajuda **Mat** a contar os pacotes de um e diz: - *Quatro.*
> **Ma**t acrescenta quatro aos números que estava escrevendo. A escrita fica assim: *400090074*

Embora soubessem da necessidade de considerar as casas das unidades, dezenas e centenas para fazer os cálculos, cometiam muitos erros por não “armarem” corretamente a conta, inclusive no domínio da numeração já trabalhada na escola.

Foi possível perceber que as dificuldades na realização dos cálculos e a demora em conseguir “armar” a conta faziam com que perdessem a seqüência do raciocínio que estavam desenvolvendo, gerando a necessidade de seguidas intervenções da pesquisadora, no sentido de retomarem a situação-problema inicial e problematizarem a construção de outras formas de registro e organização.

Desafiávamos as crianças no sentido de encontrarem outras formas, além do desenho e dos cálculos, para produzirem as escritas solicitadas. Questionávamos seguidamente se haveria outra possibilidade e se lembravam de alguns conteúdos vistos em aula que pudessem estar relacionados. Percebemos inicialmente uma relação bastante incipiente e confusa com o que haviam visto sobre unidade, dezena e centena.

Pesq.: E se eu dissesse para vocês tentarem de um jeito sem fazer conta.
Sab: *Só fazendo os potes.*
Pesq.: Outro jeito seria o desenho, então?
Sab: *É.*
Pesq.: E se tivesse outro jeito ainda.
Sab: *Outro jeito...*
Fel: *Pensando em unidade, dezena, centena?*

A sugestão de usar embalagens de 10, 100 e 1.000 para "empacotar" a quantidade sugerida a partir de uma escrita numérica não gerou nenhuma relação imediata com os conceitos de unidade, dezena e centena vistos na escola. Problematizamos esta relação, uma vez que tínhamos como objetivo identificar os caminhos, as concepções que levam à compreensão do valor posicional a partir da reflexão sobre a escrita do número.

Quando questionados, reconheceram as "casas" da unidade, dezena, centena e milhar na escrita numérica, mas não relacionaram estes conhecimentos com os agrupamentos feitos anteriormente.

Pesq.: Isso. Oh, por exemplo, aqui vocês empacotaram três saquinhos de mil, quatro de cem, três de dez, dois de um. Tem alguma coisa a ver com o que vocês aprenderam na aula? Unidade, dezena, centena? Antes você falou nisso, Raf, unidade, dezena, centena.
Silêncio
Pesq.: Apontando para o algarismo dois do número 3.43**2** pergunta: Em que casinha está esse número?
Raf: *Da unidade*
Pesq.: apontando para o segundo três do número 3.4**3**2 diz: E este?
Raf: *Dezena.*
Pesq.: apontando para o algarismo 4 do número 3.**4**32 diz: E este aqui?
Raf: *Da centena.*
Pesq.: apontando para o primeiro três do número **3.**432 diz: E este aqui?
Raf: *Milhar*.
Pesq.: Milhar? Mic tem alguma coisa a ver com os pacotes que fizemos, então?
Mic: *Não.*

Mesmo que identificassem as casas decimais, armavam o cálculo da adição indevidamente. Ficou evidente a dificuldade inicial de relacionar as quantidades com as casas decimais correspondentes, tanto na escrita numérica quanto no cálculo.

Pesq.: Temos: quatro pacotes de 100, 6 pacotes de 1.000, dois pacotes de 10.000 e três pacotes de 1 pirulito. Quantos doces temos ao todo? Escreva o número.
Cla faz a soma e diz: - *Vinte seis mil e quatrocentos.*
Pesq.: Está bem certo. Só está faltando uma coisa...
Taa: *O três.*
Pesq.: O três. Os pacotes de um. Como vamos fazer?
Cla: *Profe, nós temos que colocá aqui mais três* (Indica a casa do milhar na conta armada).
Pesq.: Mas três é o quê? É unidade, dezena, centena?
Cla: *Centena.*
Pesq.: Três?
Taa: *Unidade.*
Cla: *Ah é.*
Pesq.: Cla, onde você vai escrever o três ali na conta?
Cla coloca três na casa do milhar.
Pesq.: Você colocou na casa do milhar. Aí vai ficar três mil.
Cla reescreve na casa da centena.
Pesq..: Ali você colocou na centena.
Cla reescreve e acrescenta na casa do milhar.
Tae: *Tem que colocar na unidade*!
Pesq.: Isso. Que número deu?
Cla e Tae: *Vinte e seis mil, quatrocentos e três.*

As crianças somente conseguiram produzir escritas a partir de agrupamentos, após sucessivas problematizações e tomadas de consciência sobre essa possibilidade ao longo das intervenções. Foi também nas últimas intervenções que algumas crianças demonstraram saber a quantidade de grupos de um, dez, cem e mil representada pelos algarismos, olhando para o numeral escrito. Em outras palavras, que deram mostras de estarem mais próximas da compreensão do valor relativo dos algarismos no número, como mostra Sab, no exemplo abaixo, ao usar a escrita convencional para marcar a quantidade de pacotes formados.

Sab: *Ah, eu já descobri. É trezentos mil, quatro pacotes dá quatrocentos, dois pacotes dá... dá pirulitos, só que agora eu me perdi*.
Pesq.: Lua, ajuda a Sab.
Lua: *Tem que marcar...*
Sab: *Marcar em algum lugar* ...
Sab lê novamente e vai escrevendo à medida que pronuncia o nome do número: 3 4 2 2 .
Sab: *Acho que é três mil, quatrocentos e vinte e dois*
Pesq.: Três mil, quatrocentos e vinte e dois.
Sab: *É.*

Pesq.: Por que, Sab?
Sab: *Porque aqui oh, três pacotes de mil é três mil, quatro pacotes de cem é quatrocentos, dois pacotes de dez é vinte e dois pirulitos soltos daí forma dois*. (Aponta para cada algarismo no número, respectivamente).

6.2.2.3 A escrita numérica e o valor posicional

Ao problematizarmos especificamente a relação dos algarismos dos números e seu valor posicional, solicitando, no decorrer das intervenções, que indicassem a quantidade de objetos que cada algarismo representa na escrita numérica, foi possível identificar as concepções a respeito do valor posicional presente nas primeiras intervenções e a progressão dessas concepções, uma vez que foram sendo reconstruídas ao longo da pesquisa, à medida que surgiam novas hipóteses e novos conhecimentos a esse respeito.

Foi possível organizá-las numa ordem evolutiva, das mais distantes às mais próximas à compreensão do valor posicional. É fundamental ressaltar que esta ordem não foi elaborada a partir da percepção de uma suposta evolução linear e temporal das concepções dos sujeitos de nossa pesquisa. Pelo contrário, essas concepções coexistiram ao longo das intervenções.

Dois fatores possibilitaram essa organização: a heterogeneidade que caracterizou os grupos de pesquisa, uma vez que havia em cada grupo crianças em diferentes graus de desenvolvimento das noções pesquisadas e o processo individual dos seus componentes, profundamente caracterizado pela construção de novas concepções à medida que interagiam com os colegas e com o objeto do conhecimento em questão: a escrita numérica.

a) Os algarismos representam seu valor absoluto

Solicitamos às crianças que anotassem nos balões correspondentes a cada algarismo, nos números, o seu valor relativo através da seguinte situação-problema: Uma professora lançou o seguinte desafio para seus alunos: temos 463 pirulitos para a festa do dia da criança. Cada algarismo do número 463 representa uma parte dos pirulitos. Descubram quantos pirulitos cada parte do número representa!

Mic desenhou quatro pirulitos para o algarismo 4, seis para o algarismo 6 e três para o algarismo 3. Problematizamos, questionando quantos pirulitos havia ao todo. Surpreendeu-se ao contar e encontrar treze.

Pesq.: O que você vai fazer aí, Mat?
Mat: *Pirulitos*. (desenha 6 pirulitos no segundo balão.
Depois Raf desenha 3 pirulitos no terceiro balão.
Pesq.: Então, o quatro representa quantos pirulitos?
Todos respondem: - *Quatro*.
Pesq.: E o seis?
Todos: *Seis pirulitos.*
Pesq.: E o três?
Todos: *Três pirulitos*.
Pesq.: E ao todo quantos pirulitos são?
Todos: *Quatrocentos e sessenta e três?*
Pesq.: Ao todo são quatrocentos e sessenta e três pirulitos.
Mic pega a folha e conta os pirulitos desenhados: - *Um, dois ...* até treze. Fica espantado ao ver que ali estão desenhados apenas 13.

O mesmo aconteceu com Fel e Lua, que também fizeram corresponder aos algarismos o seu valor absoluto.

Pesq.: Quantos vocês acham que cada parte do número representa?
Fel e Lua: *Quatro, seis, três, apontando para os balões*
Sab: *Mas não é assim. Oh, quatro seis e três dá treze e é...*
É ...quatrocentos e sessenta e três.
Fel: *Falta...*
Lua: *É, falta...*

b) Os algarismos representam unidades aleatórias

Diante da mesma situação-problema, atribuíram aos algarismos valores aleatórios, demonstrando apenas a preocupação com a soma das quantidades atribuídas a cada balão. Os algarismos, portanto, representam unidades aleatórias que, somadas, resultam na quantidade representada pelo número. Mic pensa em unidades, ou seja, procura colocar nos balões quantidades que, somadas, resultam em quatrocentos e sessenta e três. Fel pensa da mesma forma.

Mat: *Sessenta aqui, sessenta aqui e sessenta aqui (*apontando com o lápis para os balões).
Mic tenta somar os valores.
Raf: *Sessenta mais sessenta dá ...*
Mic: *Duzentos e quarenta.*
Raf: *Mas só que daí tem que dá quatrocentos e sessenta e três.*

Fel: *Eu acho que a gente tem que fazer dez e dez* (apontando os balões).
Sab escreve estes valores na folha e diz: *- Dez mais dez ...quantos dez?*
Fel: *Quatro dez. Três dez.*
Fel vê a soma que Sab faz e diz: *- Trinta! Ainda falta! Eu acho que tem que ser de 5 em 5 .*
Sab: *Não dá Felipe, três vezes cinco é quinze.*
Fel: *Mas a gente tenta para vê o que é que vai dá*.

c) Os algarismos representam valores similares ao nome do número

Para algumas crianças é a similaridade com o nome do número que indica os valores que os algarismos representam. No exemplo abaixo, Taa e Cla, após atribuírem aos algarismos de *463* seus valores absolutos e perceberem que não somam quatrocentos e sessenta e três, apagam o que fizeram e atribuem outros valores, parecidos com o nome do número. Assim, quarenta para o *4*, sessenta para o *6* e trinta para o *3.*

Pesq.: Quantos pirulitos será que o quatro representa?
Taa: *Quarenta, sessenta e trinta.*
Pesq.: Põe aí os números. Vamos ver.
Taa escreve no primeiro balão, quarenta, no segundo, sessenta e no terceiro trinta.
Pesq.: Se o quatro vale quarenta, o seis, sessenta e o três, trinta, somando tudo será que dá quatrocentos e sessenta e três pirulitos?
Clá: *Professsora, tem uma folha em branco?*
Fazem os cálculos e dizem*: - Cento e trinta. Não dá.*

O mesmo acontece com o grupo de Fel, Lua e Sab, ao atribuir valores aos algarismos do número *2.378*.

Pesq.: O número é dois mil, trezentos e setenta e oito. O que você fez ali? O dois vale quanto, então?
Fel: Duzentos
Pesq.: O três vale?
Fel: *Trinta.* (Pega a folha e escreve 30)
Pesq.: E o sete7?
Lua: *Setenta*
Fel: *Setenta* (Continua escrevendo)
Pesq.: E o oito?
Fel: *Oito*
Pesq.: E aí quanto deu tudo isso?
Fel: *Duzentos e trinta e sete.*

No exemplo abaixo, solicitamos às crianças que identificassem o valor do algarismo quatro em diferentes números escritos em uma folha, através da seguinte situação: Precisamos empacotar apenas as balas que correspondem ao algarismo 4 nos números abaixo. A relação estabelecida por Cla é com o *ento* de c*ento* e de trez*entos*, como é possível observar no diálogo que segue:

Pesq.: E se eu mudasse o lugar do quatro e o colocasse aqui (Escreve o número 1.**4**35 e indica o algarismo 4). Quantas balas nós teríamos que empacotar?
Cla: *Dez ... Centena...* (Ainda atenta à posição do 4 no número anterior, na dezena)
Taa escreve as letras correspondentes às posições de cada algarismo.
Cla: *E as quatro dezenas?*
Pesq.: Mas mudou o lugar do quatro agora. Ele não está mais ali (Refere-se ao lugar da dezena) ele está aqui (Aponta a casa da centena).
Taa: *É quatrocentos. Quatro**centos** ... Centos... Cento...* (Enfatizando)
Pesq.: Ele representa quantas balas?
Taa: *Cem balas*
Pesq.: Cem balas. Então quantos pacotes nós temos que fazer ali?
Cla: *Quatro.*
Taa desenha os pacotes.
Pesq.: De quanto cada pacote?
Taa: *Cem.*

Fel: *Seis de cem, seis de dez e dois de um.*
Pesq.: Como é que você sabe que tem que fazer seis de cem?
Fel: *Porque é seis ali.*
Sab: *Porque aqui já tá dizendo que é seis.* (Apontando para a casa da centena em **6**62)
Pesq.: Onde que diz?
Sab aponta para o primeiro algarismo seis.
Pesq.: Por que aqui diz que é de seis?
Sab: *Porque é seiscentos.*

d) Os algarismos podem assumir valores diferentes, conforme a casa que ocupam

Como já referimos nas primeiras intervenções, as crianças demonstraram uma relação bastante confusa com os conhecimentos sobre unidade, dezena e centena trabalhados na escola. Isto também pode ser observado na tentativa de Taa e Cla de encontrarem o valor relativo dos algarismos 4, 6 e 3 no número 463. Cla confunde a casa da centena com a da unidade, mas sabe que o 3, nesta casa, não pode valer trinta. Cla também se dá conta de que “cento e trinta” não pode ser o resultado esperado, pois o número envolve o quatrocentos.

Taa: Escreve no primeiro balão: 40; no segundo: 60 e no terceiro: 30.
Pesq.: Se o quatro vale quarenta, o seis, sessenta, o três, trinta, somando tudo será que dá quatrocentos e sessenta e três pirulitos?
Fazem os cálculos: 60 + 40 + 30. Dizem: cento e trinta!
Tae: *Cento, é cento.*
Cla: *Olha aqui profe, não dá, porque aqui é centena* (aponta para o três dos balões, que está na casa da unidade: 46**3**) *e aqui é trinta*. (mostrando a soma que fizeram).
Tae: *Cento e trinta.*
Cla: *Não dá, porque é quatrocentos.*

Embora identificassem as casas da centena, dezena e unidade, conteúdo já trabalhado em aula, demonstraram não compreender o que representam.

Pesq.: Mas olha: trezentos e quarenta e cinco. Onde o quatro está, aqui? Vocês me disseram que ele está na dezena. E a dezena diz para a gente fazer pacotinhos de quanto?
Cla: *De dez.*
Tae: *De cem.*
Taa: *Vamos combinar então. Dezena... dezena....*
Pesq.: O que a professora ensinou na sala de aula? Dezena o que é?
Cla: *Mas eu acho que é de dez.*
Pesq.: E se dezena é de dez eu posso fazer pacotes de cem?
Tae e Cla: *Não*.
Cla: *É de dez, dezena.*
Pesq.: A Cla está certa. Então, aqui, quantos pacotinhos de dez nós temos que fazer?

Raf pega a folha e apontando com o lápis diz: - *Porque... aqui é o quatrocentos e sessenta e três. Aqui vai o quatro, né? Quatro pirulitos, aqui seis e aqui três. Porque essa é uma centena, essa a dezena e essa a unidade.*
Pesq.: Quanto representa cada parte do número?
Raf: *Quatro, seis e três.*

Essa não-compreensão ficava bastante clara, da mesma forma que fica evidente o fato de as crianças centrarem-se nos aspectos figurativos da escrita numérica, como se observar no diálogo em que Taa expressa o seu conceito de unidade: "é o número que fica por último":

Tae aponta para o algarismo dois do número 3.43**2**.
Pesq.: Unidade é grupo de quanto?
Tae.: *De três*.
Pesq.: O que é uma unidade?
Taa: *É sempre aquele número que fica por último.*
Pesq.: O número que fica por último? Onde? Mostra no número.
Taa aponta para o algarismo dois do número 343**2**.
Pesq.: Esse é a unidade. Quantas unidades têm aí?
Taa e **Tae**: *Duas*.
Pesq.: Então unidade é o número que ficou por último?

Taa e **Tae**: *É.*
Pesq.: E a dezena?
Tae circula o segundo algarismo três do número 34**3**2.
Pesq.: E a centena?
Taa circula o algarismo quatro do número 3**4**32.
Pesq.: E o milhar?
Taa circula o primeiro algarismo três do número **3**432.

Embora reconhecessem as casas e os valores que representam, as crianças atribuíam a elas o valor absoluto dos algarismos, o que gerou a necessidade de problematizar o estabelecimento de relações entre as atividades propostas na pesquisa e as tarefas escolares que realizavam em sala de aula.

Aos poucos evidencia-se o reconhecimento, por parte dos alunos, de que os algarismos assumem valores diferentes, conforme o lugar que ocupam. Esta compreensão não se deu de imediato, mas foi possível ao longo das intervenções. Inicialmente, as crianças identificavam os valores dos algarismos nas respectivas casas, manifestando uma compreensão muito incipiente do valor posicional.

Pesq.: Aqui (aponta o três do número123) representa saquinhos de quantos?
Mic: *Três.*
Pesq.: Três saquinhos?
Mic: *De um.*
Pesq.: E aqui? (Refere-se ao segundo 3 do número 3**3**6), saquinhos de quantos?
Mic: *Dez.*
Pesq.: E aqui? (Refere-se ao primeiro 3 do número **3**36).
Mic: *De cem.*
Pesq.: Então se ele muda de lugar tem algum problema?
Mic: *Não.*
Raf: *Eu não sei.*
Pesq.: Mas muda a quantidade de saquinhos, se ele muda de lugar? A quantidade de coisas que tem que pôr dentro?
Ninguém responde.
Silêncio.

O reconhecimento de um valor relativo não se deu para todos os algarismos do número ao mesmo tempo. Tae identificou a relação existente entre os últimos números e agrupamentos de um (unidades), mas não o fez para agrupamentos de mil.

Tae e Cla: *Três mil quatrocentos e trinta e dois.*
Pesq.: Isso! E agora quantos pacotes de mil temos?
Tae conta os pacotes formados. A professora ajuda e todas contam juntas: um mil, dois mil, três mil.
Pesq.: Tem algum lugar no número que diz que é três mil?

Tae: *Não.*
Pesq.: Não. Não tem nenhum lugar ali no número que tenha relação com os pacotes de mil?
Tae: *Eu acho que não.*
Pesq.: E quantos pacotes de um vocês fizeram?
Taa: *Dois.*
Pesq.: E não tem nenhum lugar ali no número que diz que são dois pacotes?
Taa: *Tem um.*
Pesq.: Por quê?
Taa: *Porque é os últimos números, daí sobrou dois pacotes de um. Aqui* (refere-se ao algarismo dois do número *3.43**2***) *tem dois e aqu*i (pacotes desenhados) *tem dois pacotes de um.*

Lua reconhece o valor relativo da classe das unidades simples (unidade, dezena e centena), mas ainda não estende esta compreensão para as ordens da classe dos milhares, atribuindo a todos os algarismos o mesmo valor: mil.

Pesq.: Muito bem. E se a gente fosse fazer pacotinhos de balas aqui nesse cento e oito mil, duzentos e dezesseis (*108 216*).
Fel: *Tinha que ser dez pacotes de cem..., oito de...*
Pesq.: Dez pacotes de cem? Mas esse aqui *(**108.** 216*) é o quê?
Fel: *Cento e oito pacotes de...*
Sab: *Aqui é o milhar.* Aponta para o *108* do ***108**.216.*
Lua: *Tem que fazer um pacote de mil, zero pacote de... milhar, oito, de novo de milhar, o dois de cem, o um de dez e seis de unidade.*

e) O valor do algarismo é dado pela posição que ocupa

A compreensão do valor posicional, como vimos, é fruto de um processo que envolve relações variadas e não se dá de imediato. Em nossa pesquisa, foi precedida de momentos em que as crianças reconheciam que cada algarismo possui um valor diferente no número, mas não eram capazes de justificar por que os algarismos assumem valores diferentes, conforme a posição que ocupam. É o que pode ser observado nos diálogos que seguem.

Sab*: Porque aqui, oh profe* (***6**63), esse daqui* (primeiro seis) *é de centenas. Esse* (segundo seis) *é seis dezenas e esse* (dois) *é duas unidades.*
Pesq.: Então, quando temos seis centenas o que acontece?
Sab: *Daí o número se transforma em seiscentos*.
Pesq.: E se eu escrevesse assim oh, ao invés de colocar o seis aqui no começo, eu escrevesse um número em que o seis está aqui no fim (escreve o número *236*). Faz diferença?
[...]
Sab: *Desse número faz* (Comparando *662* com *236*).
Pesq.: Por quê?

Sab: *Porque eles não são igual.*
Pesq.: Mas faz diferença ele estar aqui (primeiro seis do número ***6**62*) por primeiro e aqui (algarismo seis do número *23**6***) por último?
Sab: *São números muuuito distantes. Seiscentos e sessenta e dois até chegar...*

Esta justificativa passou a ser construída aos poucos. Foi possível perceber que os argumentos aproximavam-se da compreensão do valor posicional, no domínio das dezenas, mas ainda não se estendia para as centenas e os milhares.

Pesq.: Se eu escrevesse esse número? (Escreve *1.023*)
Raf e Mat: *Mil e vinte e três.*
Pesq.: Mil e vinte e três. Quantos pacotinhos de dez nós teríamos que fazer?
Raf: *Dois.*
Pesq: Onde você olhou e disse que tinha que fazer dois?
[...]
Mat aponta para o dois do número 10**2**3.
Pesq.: Ali?
Mat: *É.*
Pesq.: Como é que você sabe que ali indica pacotes de dez?
Mat: *Porque ali é o lugar do vinte.*
Pesq.: E quantos de cem?
Mat: *Um ... dois*.
Pesq.: Por quê?
Silêncio
Pesq.: E quantos de mil?
Raf: *Um.*
Pesq.: Um. Onde você viu isso?
Raf: *Aqui* (apontando para o algarismo um do número **1.**023).
Pesq.: Ali no um. Como é que você sabe que ali é de mil?
Raf: *Porque eu sei.*

No diálogo acima verificamos que o nome do número ainda é uma importante referência na identificação do seu valor posicional, quando Mat afirma saber o valor do algarismo *2,* no número *1023,* porque ele está no lugar do vinte. A influência da linguagem oral é clara e também é percebida no diálogo abaixo.

Taa afirma que um número tem que ter quatro algarismos para ser mil.
Pesq.: Então tem que ter quatro números para ser mil. E como é que olhando para o número você sabe que é mil?
Taa: *Porque o três já fala que é mil.*
Pesq.: Já fala que é mil?
Cla: *É três mil* (enfatiza o mil).
Pesq.: Mas e se o três estivesse aqui (Refere-se ao três estar como último algarismo).
Cla: *Daí ia ficar quatro mil, porque daí fica primeiro o quatro*.
Taa: *Quatro mil, quinhentos e sessenta e três.*
Pesq.: Então o primeiro é o mil?
Taa e Cla: *É.*

Além da influência da linguagem, percebemos a coexistência de diferentes concepções no processo de compreensão do valor posicional: Taa acredita que são necessários quatro algarismos para escrever mil e faz corresponder o nome do número ao valor atribuído ao algarismo correspondente à sua fala na escrita numérica. A compreensão do valor posicional ficou mais evidente nas últimas intervenções, quando propusemos às crianças a seguinte situação-problema: Precisamos empacotar apenas as balas que correspondem ao algarismo *4,* nos números abaixo. Quantas são? No exemplo abaixo, Mat, Mic e Raf manifestam-se.

Pesq.: E aqui? (Mostra *212.3**4**5*).
Mat: *Duzentos e doze mil, trezentos e quarenta e cinco.*
Pesq.: Muito bem. Mas e o quatro agora? Onde está e o que está "mandando" fazer? (*212.3**4**5*)
Todos: *Na dezena.*
Pesq.: Mudou de lugar?
Alunos: *Não.*
Pesq: Então o que ele representa ali? Quantas balas nós temos que empacotar?
Raf: Quatro saquinhos de dez. Quarenta balas.
[..]
Pesq.: Por que deu sempre quatro saquinhos de dez?
Raf: *Porque o quatro não muda de lugar*.
[...]
Pesq.: Nesse número aqui (Escreve *1.**4**35*) o que aconteceu com o *4*?
Mat: *Ele mudou de lugar e foi para a centena.*
Pesq.: Quantas balas nós teríamos que empacotar, então, e quantos saquinhos?
Mat: *Quatrocentas. Quatro saquinhos de cem.*
Pesq.: Quatro saquinhos de cem. E se ele estivesse aqui oh? (Escreve **4**.325).
Mat: *Ia mudar para o milhar.*
Raf e Mat: *Quatro saquinhos de mil.*

Pesq.: Tae explica por que a Taa fez quatro pacotes de cem ali.
Tae: *Porque o quatro mudou de lugar, por isso tem que ser de cem.*
Pesq.: Isso. E se eu mudasse de novo o lugar do quatro. (Escreve **4**325).
Tae: *De mil.*
Pesq.: Quanto ele vai representar?
Taa: *Milhar.*
Pesq.: Milhar?
Taa: *Milhar, então vai ser quatro pacotinhos de...de... milhar ....*

O reconhecimento da importância e do papel da posição que o algarismo ocupa no número seguiu-se da compreensão de que o algarismo assume diferentes valores no número, dependendo da posição que ocupa.

Pesq.: Muito bem. Mil trezentos e quarenta e cinco.
Cla: *Aqui* (refere-se ao número 1345) *deu quarenta também.*

Pesq.: Por que aqui (refere-se ao número 345) deu quarenta e aqui (refere-se ao número 1345) deu quarenta também?
Tae: *Porque é mil trezentos e ....*
Cla: *Porque ele não saiu da dezena*
Taa: *Porque ele não saiu do lugar.*

A seguir apresentamos reflexões sobre os dados da pesquisa, buscando analisar as concepções sobre o valor posicional manifestadas pelos sujeitos na interação com as escritas numéricas, bem como situar o avanço qualitativo observado em relação à compreensão das regularidades desta escrita e da compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal num processo amplo de construção de conhecimentos.

7 ANÁLISE DOS DADOS

A riqueza de dados numéricos disponíveis no entorno sociocultural permite o contato bastante precoce com números escritos, usados com propósitos diferentes (número de telefones, preços, número da casa, quantidade de objetos) que representam uma grande variedade de conceitos numéricos e quantitativos. Imersas neste mundo desde que nascem, as crianças constroem diferentes sentidos de número e elaboram, muito antes de entrar na escola, hipóteses relativas às suas escritas numéricas. A gênese das notações numéricas e as hipóteses que crianças pequenas constroem a respeito desta escrita têm sido estudadas por diversos autores: Sastre e Moreno, 1976; Sinclair e Sinclair, 1984; Sinclair, Mello e Siegrist, 1989; Danyluk, 1998; Brizuela, 2005.

Há consenso na literatura de que as crianças elaboram vários conhecimentos sobre as escritas numéricas e seus usos em diferentes contextos socioeconômicos e culturais, muito antes de tê-las como objeto de estudo em práticas educativas formais. Os dados de nossa pesquisa em relação às concepções iniciais sobre a escrita numérica de números multidígitos não diferem dos já apresentados por diversos autores e descritos na literatura, como é possível observar na revisão teórica desta pesquisa (SINCLAIR; SINCLAIR, 1984; KAMII; JOSEPH, 1992; SINCLAIR; TIÈCHE-CHRISTINAT; GARIN, 1992; LERNER; SADOVSKY, 1996; NUNES; BRYANT, 1997; TOLCHINSKY 1997; OROZCO; HEDERICH, 2000; SCHEUER et al., 2000; BRIZUELA, 2006; TEIXEIRA, 2006). Orozco (2001) observa que a coincidência e a universalidade destas escritas (que denomina erros sintáticos e são denominadas pelos demais como escritas não-convencionais) permitem considerá-las como erros de construção que surgem no curso da aprendizagem, quando as crianças ainda trabalham com as regras morfossintáticas próprias das expressões numéricas verbais.

Há concordância também em relação ao fato de que a leitura e a escrita de números multidígitos produzidas por crianças não necessariamente se alicerçam no conhecimento dos princípios que fundamentam a construção do sistema de numeração decimal, mesmo quando já escolarizadas (SINCLAIR; SINCLAIR, 1984; KAMII; JOSEPH, 1992; LERNER; SADOVSKY, 1996; TEIXEIRA, 2006; BRIZUELA, 2006), mas fundamentam-se nos conhecimentos que elaboram sobre as escritas e seus usos referidos acima. Esta pesquisa evidenciou estes aspectos e possibilitou acompanhar o processo construtivo de novos conhecimentos sobre o sistema de numeração decimal (Capítulo 6) que caracterizou as onze situações didáticas vivenciadas com os sujeitos da pesquisa.

7.1 CONCEPÇÕES INICIAIS SOBRE A LEITURA E ESCRITA DE NÚMEROS MULTIDÍGITOS

As concepções que denominamos “iniciais” por ainda estarem distantes da compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal e das regularidades da escrita numérica manifestaram-se em diferentes ações das crianças relativas às propostas de leitura e produção de escritas de milhares: reconhecimento da escrita convencional, mesma leitura para diferentes escritas; escritas diferentes para o mesmo número; diferentes leituras para uma mesma escrita produzida pela própria criança; uso de marcas de mil e uso de pontos para separar os números.

Foi possível identificar, nas ações referidas, um avanço gradativo; em outras palavras, uma evolução nas concepções iniciais sobre notações de números multidígitos, o que permitiu traçar um possível caminho inicial em direção às notações convencionais, não numa perspectiva evolutiva linear, uma vez que estas concepções manifestaram-se ao longo de várias situações didáticas convivendo com as que iam sendo construídas pelas crianças ao longo do processo: inicialmente convivem dúvidas sobre a existência de números escritos com muitos algarismos e a hipótese de que são necessários muitos zeros para “dizer que é mil”, ou seja, para escrever milhares. Aos poucos surge a necessidade de diminuir a quantidade de zeros e o uso de *0*, ou *000*, ou *1* para “dizer que é mil”. Percebe-se também a tendência de excluir o *1* como marca de mil e a atribuição desta função aos zeros. Segue-se a necessidade de organizar os números, separando-os com o ponto e a vírgula.

No desenrolar desse processo manifestaram-se hipóteses já construídas pelas crianças sobre as notações numéricas relativas à quantidade de algarismos e existência do número, à quantidade de zeros e magnitude do número, à necessidade de usar "marcas" para os "mil" e de separar os algarismos na escrita numérica. A seguir detemo-nos um pouco mais sobre elas.

As crianças participantes da pesquisa reconheceram de imediato as escritas convencionais de milhares frente às diferentes notações apresentadas: *2192, 200010092, 2000192.* Os argumentos de que dispunham para justificar sua escolha vinculavam-se à estranheza em relação à quantidade de zeros e de algarismos no número ("*não pode ter nenhum zero, tem que tá tudo junto", "não tá certo, porque tem muitos números*"). No entanto, a leitura realizada foi idêntica para todas as notações. Conflitos entre os conhecimentos já construídos sobre notações numéricas foram gerados a partir da constatação, pelas crianças, de que todas as escritas a elas apresentadas corresponderiam a um mesmo número. Demonstraram uma desconfiança imediata diante dessa possibilidade, embora produzissem a mesma leitura para cada notação apresentada. Se, de um lado, esses conflitos permitiam admitir, num primeiro momento, que o mesmo número pudesse ser escrito de diferentes formas, de outro, ainda não eram suficientes para justificar essa impossibilidade e produzir escritas convencionais. A identificação da escrita numérica convencional e os argumentos usados para justificar essa opção não estavam vinculados à compreensão das razões que tornam as escritas corretas de acordo com o sistema de numeração decimal, tampouco à possibilidade de produção das mesmas escritas, mas aos conhecimentos já construídos até então sobre notações numéricas nos diferentes contextos socioculturais. Esses conhecimentos constituíram o ponto de partida das futuras construções realizadas pelas crianças ao longo da pesquisa.

A leitura inicial produzida pelas crianças apoiava-se na correspondência entre um nome de número e uma determinada marca gráfica, evidenciando a forte influência do uso de esquemas e da linguagem oral na leitura de números multidígitos e na identificação de "partes" já conhecidas no número. A correspondência entre a fala do nome do número e as marcas gráficas é considerada essencial no processo de leitura e produção de escrita e na compreensão das regularidades da escrita por vários autores (LERNER;SADOVSKY, 1996; NUNES;BRYANT,1997; TEIXEIRA, 2005; SEVILLA; OROZCO, 2006). O uso dos esquemas de apontar e fazer correr o dedo sobre os algarismos da escrita, buscando uma correspondência com a fala do nome dos números, revela uma forma de organização das ações da criança frente às problematizações geradas pela situação. Estes esquemas atuam como organizadores da leitura e geradores de ações, no sentido atribuído por Piaget (1973) e Vergnaud (1996a), ou seja, como uma totalidade dinâmica organizadora das ações do sujeito, das atividades de representação simbólica e da própria linguagem, para uma classe de situações especificadas.

Na leitura, as crianças pesquisadas identificavam, na escrita numérica, “partes” que correspondiam a números já conhecidos e faziam corresponder a elas o nome do número identificado nas respectivas “partes”. Nesse processo demonstravam maior facilidade em ler os números correspondentes aos “nós” (dezenas, centenas, milhares exatos) e os números correspondentes a um período igual ou inferior ao trabalhado na escola, ou seja, correspondentes a dezenas e centenas. Observa-se claramente uma tentativa de transpor para o formato verbal falado as marcas de potência de dez da expressão numérica escrita, ou seja, de transcodificação numérica (OROZCO; HEDERICH, 2000). Lerner e Sadovsky (1996) já haviam observado que as crianças fazem corresponder os nomes dos números que pronunciam às escritas que já conhecem. A facilidade de leitura dos “nós” é atribuída, possivelmente, à facilidade de memorização (LERNER; SADOVSKY, 1996; NUNES; BRYANT, 1997; SCHEUER et al., 2000) e ao fato de sua leitura não exigir composição numérica alguma, apenas estabelecer uma correspondência entre a palavra numérica que codifica o dígito no numeral arábico numa palavra que explicita o número de posições, como, por exemplo: mil, milhar (SEVILLA;OROZCO, 2006). Ler numerais, em um período numérico superior ao ensinado pela escola, é uma tarefa que impõe desafios para as crianças, independentemente da série em que estudam. Quando as crianças não sabem codificar o numeral no todo, utilizam uma estratégia de segmentação. Ao ler, segmentam os dígitos do numeral em números que podem ler (SEVILLA;OROZCO, 2006). Assim, diante de *2.192,* as crianças lêem: *vinte e um noventa e dois* ou *duzentos e dezenove dois.* Em *200010092* e em *2000192*, provavelmente identificam os nós e os numerais já conhecidos: *2.000, 100, 92 ou 192* e os transcrevem para o formato verbal falado.

Na fase inicial da pesquisa, as crianças demonstraram dúvidas em relação à existência de escritas numéricas com muitos algarismos: “*- não tá certo, porque tem muitos números; é tudo muito grande”.* Números grandes (expressão usada pelas crianças da pesquisa para escritas numéricas que envolvem vários algarismos, tais como centenas de milhares ou milhões) não estão tão presentes no entorno sociocultural das crianças pequenas e, no caso das crianças de nossa pesquisa, freqüentadoras da segunda série do Ensino Fundamental, ainda não foram trabalhadas na escola, fator que pode contribuir para esta hipótese inicial. Observamos que as hipóteses das crianças apóiam-se nos invariantes operatórios presentes nas interações crianças-escritas numéricas. Em relação à quantidade de algarismos e à existência do número, por exemplo, observam-se conceitos-em-ação que permitem à Tae, diante da escrita numérica *90120* (produzida para *nove mil, cento e vinte*), afirmar que: “os mil têm quatro algarismos” e “- não existem números com mais de 5 algarismos”. Apoiadas nesses conceitos-em-ação, estranha a escrita *209305*, por ter seis algarismos, questionando sua existência. Ao questionar-se sobre a existência ou não de um número escrito, tal como 209305: “- Será que este número existe?”, Tae demonstra claramente o processo construtivo de conhecimentos em que se encontra. Como diz Vergnaud (1996a), estes conceitos-em-ação são saberes provisórios que orientam o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes à situação e à tomada de informação a tratar, no momento, e ainda não se constituem em conceitos. A provisoriedade a que se refere o autor fica evidente no fato de que Tae considera a possibilidade de um número maior que mil, por ser maior, ter mais do que quatro algarismos, colocando em dúvida suas concepões anteriores.

Conceitos-em-ação também podem ser observados em relação às hipóteses das crianças relativas aos números com “zeros”. Quando os vários algarismos do número eram zeros, não havia dúvidas sobre a existência do número. Os zeros foram reconhecidos pelas crianças de nossa pesquisa como importantes e necessários para a escrita de milhares e sua presença e quantidade determinam a magnitude do número. Manifestaram saber que: - os zeros são necessários para a escrita numérica de milhares: “*é preciso ter zeros para formar o mil*”; - quanto mais zeros, maior será o número: *“ tem que ter um monte de zeros para ter um milhão*”; - os zeros somente têm valor, quando associados a outros algarismos: *“os três zeros formam zero, zero, zero, mas com o três fica mil*”.

A rejeição das escritas não-convencionais e os argumentos apresentados relativos à presença dos zeros e à quantidade de algarismos no número assemelham-se aos descritos por Lerner e Sadovsky (1996), na análise de uma situação de pesquisa semelhante. Para as autoras, são evidências de que as crianças detectam regularidades no contato com as escritas numéricas e elaboram critérios próprios para produzir representações numéricas. Lerner (1995) já havia observado que as crianças pequenas não atribuem valor aos zeros isolados na escrita numérica e consideram que o zero passa a ter valor quando aparece depois de outro número ou entre dois números.

Em nossa pesquisa observamos que além da quantidade de zeros, outros critérios definiram a magnitude do número: é o primeiro quem manda, e, no caso de serem iguais, é o segundo quem manda; identificação de totalidades significativas, seqüência numérica. A seqüência numérica já conhecida no domínio das dezenas serviu como apoio para a construção da seqüência numérica no domínio das centenas bem como o critério de que é o primeiro quem manda e da identificação de totalidades significativas. Critérios semelhantes aos manifestados pelos sujeitos de nossa pesquisa para a definição da magnitude do número também foram descritos por Teixeira (2006): a quantidade de zeros, a seqüência numérica, a comparação da quantidade de algarismos e a comparação dos algarismos da esquerda e da direita de dois números, identificando totalidades significativas. No que se refere a este último critério, Teixeira (2006) descreve os argumentos produzidos pelos sujeitos de sua pesquisa: 2.050 é maior que 2.005, porque 50 é maior que 5. Quando o primeiro algarismo dos dois números era igual, como em 7.105 e 7.099, comparavam o segundo algarismo dos dois: 1 é maior que 0, então 7.105 é maior. Retomamos aqui o exemplo descrito no Capítulo 6, de Mat, que identifica totalidades significativas à esquerda do número e as utiliza como critério definidor da magnitude do número, embora tenha reconhecido totalidades significativas também nos algarismos à esquerda.

Os critérios construídos e utilizados pelas crianças em situações de comparação funcionam como conteúdos dos esquemas que organizam suas ações, como no caso de Taa e Tae. As meninas, inicialmente apóiam-se na série numérica já conhecida e gradativamente vão construindo esquemas que lhes permitem ampliá-la. Tae orienta-se por dois caminhos: a série numérica já familiar (dezenas e centenas) e o reconhecimento de que o primeiro algarismo do número tem que ser o menor. Fixa o primeiro algarismo (2, depois 5 e depois 8) e segue usando este esquema de organização, que se torna ineficiente para os milhares, intervalo numérico em que a série numérica ainda não foi assimilada totalmente. Estes esquemas conferem às ações de Tae maior agilidade e rapidez, inclusive a possibilidade de assumir o comando da situação. Tae, no entanto, não consegue justificar por que 520 é maior que 508, o que permite inferir que se trata de um processo progressivo de coordenação de ações, característico de um fazer ainda não conceitual.

Ficou evidente a coexistência de escritas convencionais e não-convencionais no processo de construção de escritas de multidígitos realizado por nossas crianças, o que não difere dos achados de outros autores. Para Nunes e Bryant (1997), as crianças podem usar dois sistemas na produção de escritas. Em nossa pesquisa, um sistema é observado na escrita de números de dois ou três dígitos e números redondos (já conhecidos e dominados pelas crianças) e outro sistema é observado na produção de escritas de milhares, ao concatenar uma seqüência de números correspondentes aos rótulos numéricos: 2000569. Para Lerner e Sadovsky (1996), quando as crianças dominam dezenas e centenas, escrevem-nas convencionalmente. Quando não dominam, apelam à correspondência com a numeração falada, tentando fazer corresponder aos nomes de números pronunciados as escritas que conhecem. É o que ocorre com nossas crianças que, raramente, produziam escritas, tais como: *200010028*, ou *20000100208.* Orozco e Hederich (2000) identificam esse tipo de escrita e a caracterizam como erros devidos à codificação das partículas sintáticas, usando zero (0). Supõem que a criança diferencia as partículas que, no formato verbal, marcam a quantidade das partículas que marcam as potências de dez (partículas sintáticas).

Constatamos que, além do zero (0), nossas crianças utilizam o algarismo um (1) e/ou três zeros (000) como “marcas de mil”, ou seja, para marcar potências de dez, especialmente o “mil”, tornando claro que se utilizam da correspondência referida por Orozco e Hederich (2000) e fazem a diferenciação entre as partículas do formato verbal, usando o zero para marcar as potências de dez. Escritas semelhantes a estas, produzidas a partir do que denominamos de marcas para o mil[15], foram anteriormente descritas na literatura (LERNER;SADOVSKY, 1996; NUNES; BRYANT, 1997; TEIXEIRA, 2006; OROZCO, 2001, 2005). Em relação a isto, Orozco (2001, 2005) observa que esse tipo de escrita, que denomina erros sintáticos, varia em função da série escolar que as crianças freqüentam. É o que

[15]Denominamos marcas para o mil, em função de as crianças de nossa pesquisa referirem a necessidade de escrever um ou mais algarismos que correspondessem à palavra “mil” de forma bastante significativa em suas produções, como que para “marcar” na escrita esta correspondência.

demonstram as pesquisas realizadas com crianças colombianas de primeira a terceira série, já referidas, as quais tendem a escrever corretamente números dentro dos intervalos numéricos que constam no programa para cada série e a cometer erros, ao escreverem numerais do intervalo imediatamente superior. Assim, crianças de primeira série escrevem *duzentos e um* desta forma: *2001*. Na segunda série já escrevem *201*, mas, por sua vez, escrevem numerais correspondentes a um intervalo numérico superior, como *mil, quatrocentos e cinqüenta e dois,* assim: *1000452.* É o que ocorre com as crianças de nossa pesquisa, freqüentadoras da segunda série do Ensino Fundamental brasileiro. Dominam a escrita do intervalo numérico correspondente às dezenas e centenas e cometem erros na escrita do milhar. Fica clara a tentativa de aplicar às produções escritas as regras do formato verbal. Fragmentam os nomes de número que pronunciam em partículas de quantidade e partículas sintáticas e as codificam sem levar em conta as regras características do formato arábico.

A tendência observada nos sujeitos da pesquisa em codificar as potências de dez, inicialmente através do “0” e posteriormente através da vírgula (,) e do ponto (.), também já consiste num avanço progressivo em direção à integração das regras do formato arábico, pois ao invés de escrever literalmente os numerais que permitem codificar as expressões “centos”, “mil”, utilizam signos convencionais para fazê-lo. O uso do ponto e da vírgula na escrita numérica foi objeto de estudo de Brizuela (2006) e Orozco e Hederich (2000). Brizuela (2006) descreve um estudo realizado com Thomas, uma criança de 6 anos que utiliza o ponto e a vírgula nas escritas que produz, como sinais de pontuação para organizar os números em lotes de três algarismos. A construção desses sinais pelas crianças é considerada pela autora fruto de um processo construtivo e operativo que se assemelha, embora não implique uma relação causal, com o uso de pontuação na escrita alfabética e com a história das notações numéricas, na qual também se observou a criação de marcas para agrupar algarismos e para marcar as partes inteiras e decimais do número (pontos, vírgulas, barras verticais, arcos, ponto e vírgula, dois pontos). Orozco e Hederich (2000) entendem que a tendência de codificar as potências de dez, inicialmente literalmente e posteriormente através de zeros e ponto (.), de um lado expressa as dificuldades enfrentadas pelas crianças na produção de escritas numéricas, embora, de outro, já consista num avanço em direção à integração progressiva de regras do formato arábico, pois já não escrevem literalmente os numerais que permitem codificar as expressões centos, mil, entre outras, mas utilizam signos convencionais para fazê-lo.

Embora, como já salientamos, as concepções acima apresentadas sobre a escrita numérica de multidígitos manifestadas pelas crianças de nossa pesquisa coexistiram ao longo das intervenções, foi possível perceber um avanço em direção às escritas convencionais. Verifica-se que, à medida que avançam as interações crianças-escritas numéricas, aproximavam-se cada vez mais das escritas convencionais e da identificação de suas regularidades. No entanto o conjunto das concepções descritas acima que caracterizaram as primeiras intervenções ainda está distante da compreensão dos princípios que regem o sistema de numeração decimal. Se, de um lado, esses conhecimentos permitiam admitir que o mesmo número não pode ser escrito de diferentes formas, de outro ainda não eram suficientes para a compreensão das regularidades internas do sistema e para a produção de escritas convencionais. Existe uma diferença significativa entre produzir e identificar uma escrita numérica e compreender que esta escrita requer que o algarismo represente a quantidade determinada pela posição que ocupa, ou seja, que cada espaço ocupado pelo algarismo escrito implica que represente uma quantidade determinada. Mesmo assim, como diz Tolchinsky (2002) e fica evidente em nosso trabalho, o notacional em si impõe sua problemática no processo que permite avançar do conhecimento das propriedades formais do sistema para as propriedades instrumentais, que permite usar as representações para representar e comunicar conteúdos específicos.

Brizuela (2006, p.57) atribui à interação entre o que o indivíduo traz para a situação (as invenções) e o que a ordem social apresenta (as convenções), o conhecimento dos aspectos notacionais do sistema de numeração. “Por meio da interação entre convenções e invenções, as invenções tornam-se mais ricas, e as convenções passam a ter significado pessoal para o aprendiz”. Concordamos com a autora, quando afirma que os processos de aprendizagem deveriam enfatizar as invenções, por serem meios de provocar processos criativos e a construção do conhecimento. Entendemos, como Sinclair (1989) e Brizuela (2006), que as idéias das crianças anteriores ao conhecimento convencional das notações matemáticas podem ser constitutivas de seus entendimentos convencionais posteriores sobre matemática. As concepções iniciais descritas foram o que no momento dava sentido às produções de nossas crianças. Assim, a leitura e a escrita dos números multidígitos esteve apoiada nos conhecimentos que as crianças já tinham sobre números e deram suporte às construções que se seguiram. As crianças valeram-se do que sabiam acerca de números baixos, como um trampolim para reconstituir grandes números, como diz Ackermann (1996, p.185). A autora reitera que as crianças inventam meios, heurísticas para tirar proveito daquilo que sabem, e que estes processos são difíceis, mas necessários: “Os caminhos rumo à abstração são cheios de armadilhas que, entretanto, desempenham um papel necessário”.

Ao nosso olhar interessava acompanhar o processo de leitura e produção de escritas, para identificar concepções que podem constituir-se nas origens da compreensão do valor posicional. Identificamos ações e algumas concepções limitadas e rudimentares que, possivelmente, foram suporte para a construção posterior deste conceito:

- o uso de esquemas, tais como os de apontar e corresponder um nome de número para cada parte da escrita numérica;

- a necessidade de garantir uma marca para o “mil” na escrita numérica - permite inferir a presença de uma preocupação incipiente em garantir um lugar, uma posição no número para cada nome de número escrito ou falado;

- a percepção de que há muitos algarismos na escrita numérica e o fato de considerarem que isso não pode ocorrer - pode ser indício da compreensão futura da propriedade do sistema de numeração decimal: a possibilidade de escrever números grandes de forma econômica, ou seja, com poucos algarismos;

- a concepção de que são necessários vários zeros para formar o “mil” e o milhão, por exemplo, vinculando a quantidade de zeros com a magnitude do número - pode revelar uma percepção incipiente da propriedade aditiva do sistema, ou seja, de que o valor da expressão é a soma dos valores representados por cada dígito individual, daí a necessidade de muitos dígitos para números grandes;

- o reconhecimento de que os números são separados por ponto ou vírgula - revela o reconhecimento da necessidade de uma certa organização dos algarismos na escrita e de que os algarismos que indicam milhares precisam diferenciar-se de alguma forma dos que indicam centenas, dezenas ou unidades simples.

- a necessidade de nominar unidades, dezenas e centenas e separar as classes das unidades e milhares - revela preocupação com os lugares ou posições dos algarismos dos números; há o reconhecimento de que os lugares ocupados pelos algarismos fazem diferença na organização da escrita numérica, mas não há compreensão do porquê isto ocorre.

Os conhecimentos incipientes sobre o valor posicional encontrados aproximam-se das primeiras estruturas identificadas por Fuson e outros (1997) para números multidígitos. Estas estruturas contêm conhecimentos superficiais sobre números multidígitos e permitem a transcodificação de expressões numéricas orais em escritas numéricas, mas não contêm o conhecimento necessário para compreender numericamente as expressões e para compreender que, enquanto os valores dos nomes dos números são explicitados na linguagem oral, na escrita dependem da posição que ocupam. Mais especificamente, essas estruturas aproximam-se da estrutura identificada pela autora como *concepção de dezenas e unidades* que permite à criança separar as séries de dez no nome do número e relacionar cada parte do nome do número, separadamente, à quantia a que ela se refere. É essa estrutura, dizem Fuson e outros (1997), ainda unitária, que conduz a uma forma de escrita não-convencional e aos erros típicos, próprios de crianças que falam idiomas europeus, nos quais os nomes dos números são transcritos para o papel concatenados. Assim, escreve *quarenta e três* desta forma: *403.* A criança "vê" a escrita de quarenta e três como quarenta mais três e não como quatro grupos de dez mais três grupos de um, por exemplo.

Se, de um lado, verificamos as primeiras idéias sobre posicionalidade nas ações cognitivas das crianças descritas acima, de outro constatamos que essas ainda estão longe da compreensão do valor posicional e das demais propriedades do sistema de numeração decimal.

7.2 COMPREENSÃO DAS REGULARIDADES INTERNAS DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Como já referimos, projetamos situações didáticas com o objetivo de problematizar a leitura e a produção de escritas numéricas de números multidígitos. O envolvimento das crianças e os processos que as mesmas vivenciaram na busca de soluções às situações-problema propostas permitiram-nos observar a evolução nas suas concepções em relação às notações convencionais e em relação às propriedades do sistema de numeração decimal.

As situações didáticas caracterizaram-se como momentos de construção de novos conhecimentos para as crianças, ou, em outras palavras, de avanços cognitivos em direção à compreensão das regularidades internas do sistema de numeração decimal, tanto no que se refere às notações convencionais de multidígitos quanto no que se refere às propriedades operatórias do sistema.

7.2.1 A escrita convencional de milhares

No que se refere aos caminhos percorridos pelos sujeitos da pesquisa rumo à notação convencional de milhares, também foi possível identificar, ao longo das onze situações didáticas, tanto em ações que envolviam leitura quanto naquelas que envolviam produção de escritas de milhares, um avanço gradativo e não-linear em direção à compreensão das regularidades das notações convencionais deste intervalo numérico (Seção 6.2.1).

Salientam-se, inicialmente: não-identificação imediata de notações de milhares pelos sujeitos da pesquisa, fato evidenciado pela estranheza inicial demonstrada frente a elas (embora não seja possível afirmar que se tratava de um objeto totalmente desconhecido, como é possível nas concepções iniciais descritas na Seção 6.1); tentativa de aplicação de esquemas e conhecimentos já adquiridos no reconhecimento das ordens e classes dos números (através das letras C,D,U habitualmente usadas na sala de aula para identificar unidades, dezenas e centenas).

Das dificuldades geradas pelas situações e pelas impossibilidades sentidas frente a elas, decorre a necessidade de solucionar os problemas, construindo novas possibilidades: eliminar algarismos da notação ou admitir uma nova “casinha”, ou seja, ampliar o domínio das ordens numéricas para a classe dos milhares, admitindo a existência de uma nova ordem: a do milhar.

Novas situações-problema surgem com a constatação de que a nova ordem construída, o milhar, não dá conta de resolver todos os problemas: em algumas escritas sobram algarismos e faltam letras. Percebe-se uma tendência em iniciar a identificação das casas decimais pela esquerda (sentido em que se lê o numeral), embora as potências de base dez aumentem no sentido direita-esquerda, na escrita numérica, fato este não considerado até então pelos sujeitos da pesquisa. Diante de algumas notações (com cinco algarismos ou mais), iniciar a identificação das ordens e classes pela esquerda (M,C,D,U) não produz os efeitos esperados, uma vez que sobram algarismos e faltam letras. Ocorre o mesmo invertendo a direção. Como solução a este impasse, observa-se uma espécie de generalização deste novo conhecimento, uma vez que todas as ordens da classe dos milhares passam a ser identificadas como milhares, ou seja, pela letra M, igorando-se possíveis diferenças entre as três ordens que compõem a classe dos milhares: unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar. Assim, a um número de seis algarismos corresponde a seguinte identificação: M,M,M,C,D,U, a um número de cinco algarismos: M,M,C,D,U.

Aos poucos, a identificação das casas decimais com as letras “M” sobre os algarismos passa a auxiliar a leitura de números “grandes”, uma vez que delimita a classe dos milhares. Constituem-se em novas “marcas” para o mil, anteriormente representadas pelos algarismos “0”, “e “000”. Aos poucos, também o ponto (.) passa a ser incorporado a esta função.

Ao longo de todo o processo descrito conviveram diferentes hipóteses, conflitantes entre si, que promoveram processos reflexivos e tomadas de consciência sobre as regularidades da escrita numérica, o que nos permitiu caracterizar o progresso em direção à compreensão dessas regularidades como não linear. Isto fica claro na situação em que Sab, embora já tenha admitido a não-necessidade de utilizar o 1 como marca de mil, tende a fazê-lo novamente dias depois. Problematizada, reconhece a possibilidade de fazê-lo de outras formas, recorrendo aos recursos já utilizados anteriormente: letras sobre as casas decimais e o ponto.

Lerner e Sadovsky (1996) já haviam observado que o conflito entre diferentes hipóteses assumiu um papel fundamental no processo de apropriação das regularidades da escrita numérica pelas crianças por elas pesquisadas, o que lhes permitiu considerá-lo característico do processo de apropriação das escritas convencionais.

No que tange a identificar concepções sobre o valor posicional do número construídas na interação criança-escrita numérica, pudemos verificar um envolvimento maior das crianças com as questões relativas à posicionalidade, à medida que novas regularidades da escrita passavam a ser percebidas:

- existem novas casas decimais: a admissão de novas ordens na composição do número, embora todas ainda identificadas como milhares e ainda distantes da compreensão da composição multiplicativa que fundamenta a construção das unidades do sistema (qualquer unidade no sistema é produto da potenciação 10^n e da formação dos numerais que o configuram);

- a cada algarismo deve corresponder uma letra indicativa da casa decimal;

- a direção a ser seguida na identificação das casas decimais: direita-esquerda ou esquerda-direita, altera a leitura do número;

- o número aumenta à medida que novos algarismos são incorporados à escrita numérica; estes algarismos indicam milhares;

- as casas decimais à esquerda do número que não correspondem às letras C,D,U correspondem aos “mil” e são identificadas pelas letras M;

- o ponto separa “os mil” no número.

A necessidade de separar as classes das unidades das dos milhares, manifestada pelas crianças, já revela uma preocupação mais significativa com os lugares ou posições dos algarismos que compõem os números e um avanço em direção às escritas convencionais, como vimos acima, embora seja possível perceber - no exemplo em que Lua (Seção 6.2.1, p. 144) “vê” nos algarismos *1* que ocupam as casas dos milhares no numeral 11.111, uma soma: 1+1= 2, concluindo que indicam dois pacotes de mil - que muitos conhecimentos sobre a escrita numérica e suas regularidades são construídos sem necessariamente estarem vinculados à compreensão do valor posicional pelas crianças.

Nossos dados reiteram o que já foi descrito na literatura em relação à importância do reconhecimento das regularidades sintáticas da escrita numérica para a construção do conceito de valor posicional (LERNER;SADOVSKY, 1996; NUNES; BRYANT, 1997; OROZCO, 2001, 2005; TOLCHINSKY,1997; TEIXEIRA, 2006). Trata-se de um dos aspectos do conhecimento notacional, embora não seja o único indicador do que pode saber uma criança sobre o uso do sistema como instrumento de comunicação.

7.2.2 A compreensão do valor posicional

Em relação à compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal, como referimos no capítulo anterior deste trabalho, algumas questões nortearam a investigação de concepções manifestadas pelas crianças em interação com escritas numéricas que contribuem para a compreensão do valor posicional: A escrita numérica sugere agrupamentos de dez, cem, mil? Os agrupamentos sugerem a escrita numérica correspondente? Quais relações se estabelecem entre escritas e agrupamentos? Como se processa a compreensão do valor posicional a partir da reflexão sobre a escrita numérica?

Nas situações didáticas em que as crianças eram solicitadas a produzir agrupamentos a partir de escritas numéricas - intencionalmente planejadas para verificar se a escrita numérica sugeriria agrupamentos de dez, cem ou mil e identificar suas concepções sobre o valor posicional - as relações por elas estabelecidas inicialmente diziam respeito à quantidade total representada pela escrita, sem nenhuma relação com a possibilidade de cada algarismo representar um determinado grupo. Em outras palavras, a escrita numérica significou para as crianças, num primeiro momento, um valor absoluto, ou seja, a quantidade total de elementos do conjunto. Não houve relação com uma possível composição de algarismos na qual cada um deles pudesse representar um determinado valor.

A formação dos grupos apoiava-se em ações próximas à operação de divisão envolvendo situações quotição ("um pouco pra mim, um pouco pra ti...") e partição (dividir a quantidade por 2 ou por 3) e de subtração (subtrair quantidades do todo inicial). Os agrupamentos formados a partir de sucessivas subtrações de quantidades do todo (inicialmente aleatórias), de certa forma correspondiam às ações de fazer um pacote de cada vez, sempre calculando o todo restante e dele retirando a quantidade do próximo pacote.

O número foi tomado em sua totalidade e a escrita numérica, como representando o valor cardinal do todo. Isto fica evidente na interpretação dada pelas crianças à situação proposta como de divisão e no fato de ignorarem inicialmente a informação de que os pacotes a serem formados deveriam ser de dez, cem ou mil balas, o que denota a possível ausência de uma *concepção de seqüência de dezenas* (FUSON et al., 1997) que lhes permitissem decompor o número em potências de dez. Podemos inferir que para este intervalo numérico as crianças inicialmente trabalharam com uma concepção *multidígito unitária,* uma vez que o nome do número, a sua escrita e a quantidade, não foram compreendidas como grupos de mil, cem ou dez elementos.

Foram necessárias intervenções no sentido de esclarecer que a capacidade das embalagens era, necessariamente, de *um, dez, cem e mil,* para que, aos poucos, as crianças se organizassem no sentido de seguir uma seqüência nos "empacotamentos", próxima às convenções do sistema de numeração decimal. Percebemos um conjunto de ações que avançam em direção à compreensão destas convenções e se aproximam do princípio aditivo do sistema, embora ainda não o contemplem:

- subtração de quantidades aleatórias da quantidade representada pela escrita numérica. Ex: *3.432 – 32; 3.432 – 36.*

- subtração de potências de dez, sem obedecer à organização do sistema. Ex: *3.432 – 1.000 = 2.432 – 10 = 2.422 – 100 = 2.322...*

Entendemos que a subtração de potências de dez, neste momento, ainda não é motivada pela possibilidade inferida por Fuson e outros (1997) de "ver" os mil, os cem e os dez que compõem o número (*concepção de seqüência de dezenas*) mas, possivelmente, um caminho que possibilita esta compreensão. Ficou evidente que a escrita do número passou a ser mais transparente para as crianças, no que se refere à estrutura do sistema de numeração decimal, somente a partir de um conjunto de reflexões provocadas pelos questionamentos da pesquisadora e que a escrita numérica, até então, não se constituiu num caminho para a compreensão conceitual do sistema.

As escritas numéricas passaram a sugerir às crianças agrupamentos de dez, cem ou mil, embora já tivessem trabalhado com conteúdos relativos ao sistema de numeração decimal na escola, somente após várias problematizações em que foram instigadas a pensar sobre esta possibilidade. Em outras palavras, foi necessário um tempo e a vivência de situações desafiadoras no contexto das interações estabelecidas no grupo e das intervenções do professor para que elas denotassem a presença de concepções mais avançadas. Dentre essas situações, está a de produzir escritas numéricas a partir de agrupamentos representados por potes de balas de capacidades equivalentes às potências de dez.

Produzir a escrita numérica correspondente à expressão “um pote com mil balas, dois potes com dez balas, cinco potes com cem balas” (1x 1000 + 2 x 10 + 5 x 100 + 0 x 1) por exemplo, requer que a criança faça corresponder o algarismo relativo à quantidade de potes de cada potência de dez (1, 2, 5 e 0) à posição ocupada por esta na organização do sistema (1520). Esse processo envolve considerar simultaneamente a quantidade de potes e a quantidade de balas em cada pote, integrando-as pelos princípios multiplicativo, aditivo e posicional que caracterizam o sistema de numeração decimal.

Quando solicitadas a produzirem escritas a partir de agrupamentos – nas situações didáticas em que deveriam escrever o número correspondente ao total de balas armazenadas em potes com capacidades variando entre dez, cem e mil, elaboradas para verificar se os agrupamentos sugeririam às crianças as escritas numéricas correspondentes – as crianças não conseguiram expressar a quantidade de cada pote com um único algarismo, tampouco fazê-lo corresponder à posição adequada na escrita numérica. Fica claro que inicialmente compreendem a escrita a ser produzida como a expressão do número de balas em sua totalidade. Daí a reação inicial de calcular a quantidade total de balas a partir da soma das quantidades de todos os potes. Ainda não compreendem que, no sistema, a quantidade total correspondente a cada potência de dez pode ser expressa por um único algarismo em uma determinada posição. A escrita numérica é entendida como uma expressão de um valor absoluto e não como uma composição de algarismos, como poderiam sugerir os potes, o que permite supor que as ações das crianças apoiavam-se em uma *concepção multidígito unitária* (FUSON et al., 1997).

Percebemos uma organização progressiva nas ações das crianças em direção a produzir escritas numéricas a partir de relações com agrupamentos e à compreensão dos princípios do sistema de numeração decimal:

- soma de quantidades aleatórias: 100 + 1000 + 1000 +100 + 10 + 100 + 1, até contemplar todos os pacotes;

- soma das quantidades iguais, sem seguir a organização do sistema: 100 + 100 + 100 + 1.000 + 1.000 + 1 + 10;

- soma das quantidades iguais, de acordo com a organização do sistema: 1.000 + 1.000 + 100 + 100 + 100 + 10 + 1.

- multiplicação para calcular o total correspondente a cada potência de dez: 2 x 1.000 + 3 x 100 + 10 + 1

A adição é usada inicialmente no sentido de compor a totalidade, sem a preocupação de obedecer a uma organização ou seqüência próxima à organização do sistema, ou seja, todos os potes de 1.000, todos os de 100, todos os de 10 e todos os de 1. Antecede esta organização a tendência em agrupar quantidades aleatórias e agrupar quantidades iguais próximas ao princípio aditivo que rege o sistema. Segue-se a ela a construção do princípio multiplicativo, como uma alternativa para compor a totalidade de forma mais rápida, o que vem ao encontro da afirmação de Nunes e Bryant (1997), Orozco e Hederich (2000), Teixeira (2005), de que o manejo dos princípios operatórios do sistema, simultaneamente aditivo e multiplicativo, está na base da compreensão que as crianças alcançam da escrita de numerais.

Evidencia-se um processo construtivo em direção às estruturas multidígitos. O uso da multiplicação para calcular o total correspondente a cada potência de dez, como faz Sab (e gradativamente os demais colegas), aproxima-se da *concepção de* *dezenas separadas* (FUSON et al., 1997), que permite focalizar e contar os grupos de dez, ao invés dos objetos nos grupos, em uma situação de quantidade com dezenas agrupadas.

Os agrupamentos não sugeriram de imediato a escrita numérica, como ficou evidente nos relatos. Não foi possível perceber nenhuma relação espontânea entre os grupos de dez, cem e mil representados nos agrupamentos com instruções já recebidas em sala de aula, quais sejam, com os termos “dezenas, centenas e milhares”, ou com a possibilidade de algarismos representarem quantidades, menos ainda com o respectivo lugar que deveriam ocupar na escrita do número. Estas relações somente foram sendo estabelecidas a partir das intervenções da pesquisadora, o que leva a crer que as instruções recebidas na escola sobre valor posicional não foram suficientes para a sua compreensão, o que não é estranho à literatura, que questiona os tradicionais métodos utilizados para o ensino de valor posicional. Pesquisas realizadas por Kamii e Joseph (1992), Sinclair, Tièche-Christinat e Garin (1992) e Teixeira (2006), evidenciaram que crianças que vivenciam situações de ensino baseadas na composição e decomposição do número através de agrupamentos de base dez e na transcrição destas ações para um formato notacional não se utilizam destes procedimentos, quando questionadas sobre a escrita numérica. Lerner e Sadovsky (1996) defendem que as crianças elaboram os princípios do sistema de numeração decimal a partir de sua ação intelectual sobre as escritas numéricas e não a partir de ações de agrupar e reagrupar. Fuson e colaboradores (1997), embora considerem que ações de agrupar e reagrupar com materiais concretos possam favorecer a compreensão do valor posicional, alertam para o fato de que são as problematizações provocadas pelas ações sobre os materiais e as interações entre diferentes formas de pensar que provocam a aprendizagem. Em nossa pesquisa ficou evidente a necessidade e a importância da realização de ações intelectuais sobre a escrita numérica no processo de compreensão do valor posicional.

Como vimos no capítulo de descrição dos dados, inicialmente os algarismos representaram seu valor absoluto. Foi assim que, diante de *436*, o *4* representa quatro pirulitos, o 3 representa três pirulitos e o *6* representa seis pirulitos. Embora o domínio das centenas já fosse familiar às crianças, tanto na produção quanto na leitura das escritas numéricas, o valor posicional não alcançava o mesmo status, o que confirma os achados da literatura que referem que as crianças podem ler e escrever números convencionais sem necessariamente compreender os princípios lógicos que regem estas escritas (LERNER;SADOVSKY, 1996; NUNES; BRYANT,1997; OROZCO; HEDERICH, 2000; OROZCO, 2005; KAMII; JOSEPH, 2005; TEIXEIRA, 2005). Atribuímos os avanços em direção a estas compreensões às tomadas de consciência provocadas pelas ações sobre estas escritas a partir das problematizações provocadas pelas atividades, pela pesquisadora e pelas próprias crianças que compunham o trio. Neste sentido, foi possível identificar, também, ao longo da pesquisa e numa perspectiva evolutiva não linear, concepções que gradativamente se aproximam da compreensão do valor posicional.

Se os algarismos não representam seus valores absolutos, devem representar valores quaisquer (o que denominamos unidades aleatórias), desde que somados totalizem a quantidade representada pela escrita numérica. Esses valores inicialmente escolhidos aleatoriamente, aos poucos passam a ser escolhidos a partir de critérios:

- similaridade com o nome do número, como quando atribuem o valor quarenta para o 4 de 463, relacionando o prefixo “qua” de quatro e quarenta ou quando atribuem o valor cem, relacionando o sufixo *ento* de c*ento* e de quatroc*entos,* como o faz Taa: - *É quatrocentos. Quatro**centos** ... Centos... Cento...*;

- similaridade com o nome do número associado às relações estabelecidas com conhecimentos sobre centenas, dezenas e unidades, como no caso de Sab, que argumenta que é necessário fazer seis pacotes de cem para o ***6*** de ***6**62* : - *Porque é **seis**centos;*

São estabelecidas relações confusas entre os conhecimentos já trabalhados na escola sobre unidade, dezena e centena, observando-se que atenção maior é dispensada aos aspectos figurativos da escrita numérica (Taa expressa o que entende por unidade: “é o número que fica por último”) o que permite inferir a não-compreensão destes conceitos. Gradativamente observa-se o reconhecimento, pelas crianças, de que os algarismos podem assumir valores diferentes, conforme a casa que ocupam e a construção progressiva de argumentos que permitem justificar. Inicialmente as crianças reconheciam que cada algarismo possui um valor diferente no número conforme a posição que ocupam, mas não conseguiam justificar esse reconhecimento, como fica evidente nas palavras de Sab, quando questionada sobre por que o algarismo **6** assume valores diferentes em ***6**62* e em *23**6***: - *São números muuuito distantes. Seiscentos e sessenta e dois até chegar....*

Argumentos foram sendo construídos aos poucos. O reconhecimento do valor relativo deu-se inicialmente no domínio da numeração já conhecida e bastante familiar às crianças, ou seja, a que envolvia dezenas e centenas. Crianças que identificavam o valor posicional dos algarismos das dezenas não o faziam para algarismos na casa das centenas e milhares. Como se observa na fala de Lua**: -** *Tem que fazer um pacote de mil, zero pacote de... milhar, oito, de novo de milhar, o dois de cem, o um de dez e o seis de unidade,* o reconhecimento do valor relativo dos algarismos da classe dos milhares foi mais tardio.

O reconhecimento do valor dos algarismos nas ordens relativas à classe dos milhares foi apoiado, inicialmente, pela linguagem. A fala do nome do número permitiu, por correspondência, identificar o valor do algarismo correspondente à unidade de milhar e construir o conceito em ação de que qualquer algarismo nesta casa vale mil, porque corresponde à palavra *mil* do nome do número. Taa é bastante clara em relação a isto, quando afirma: *- Porque o três já fala que é mil.* O mesmo ocorre com Cla, que generaliza que o primeiro algarismo do número vale mil: - *Daí ia ficar quatro mil, porque daí fica primeiro o quatro.*

O processo de compreensão do valor posicional também foi marcado pela coexistência de diferentes concepções. No exemplo de Cla, referido acima e transcrito no capítulo anterior, percebe-se que a menina acredita que “os mil” têm quatro algarismos e que o primeiro deles sempre vale mil. O conjunto de concepções presentes provocou um processo reflexivo, muitas vezes a partir do conflito entre elas, fundamental ao avanço em direção ao reconhecimento de que os algarismos assumem valores diferentes conforme a posição que ocupam.

É importante ressaltar, como já o fizemos em outros momentos, que essas concepções coexistiam ao longo da pesquisa, o que não nos permite pensar num processo evolutivo linear de construção dos princípios do sistema de numeração decimal. Consideramos que foi uma compreensão construída em decorrência das coordenações de ações realizadas ao longo de um processo que envolveu abstrações reflexionantes e tomadas de consciência das ações cognitivas sobre a escrita numérica, o que geralmente não acontece nas salas de aula, onde os conceitos tratados neste estudo são trabalhados a partir de diferentes situações de codificação e decodificação, como referem Bednarz e Janvier (1986). Neste tipo de ensino, alertam, a aprendizagem é realizada por simples associação, uma vez que se solicita às crianças que escrevam os números de elementos de uma dada coleção ou que desenhem a coleção a partir de uma simbolização dada, prática que gera nos alunos uma falta de sentido em relação às escritas numéricas.

Nossos dados permitem questionar as tentativas de ensinar a criança, transformando os princípios lógicos da construção do sistema em procedimentos de ensino usuais nas escolas, como também o fazem Kamii e Joseph (1992), Bednarz (1996) e Teixeira, Fleury e Yessad (1996). Esta prática não leva à compreensão desses princípios, afirmam os autores, uma vez que as crianças não vêem a razão de ser das regras e princípios que regem o sistema de numeração decimal e dão pouco significado aos símbolos utilizados.

O método de ensino adotado pelas escolas para o ensino do valor posicional também é questionado por Orozco e Hederich (2000). As autoras afirmam que as escolas realizam um ensino simplista a respeito do valor posicional e isto gera a construção, pelos alunos, de concepções erradas e limitadas sobre o sistema, ao ensinar que cada dígito no numeral é compreendido como unidade, dezena, centena, unidade de milhar e, assim, sucessivamente. Os professores ensinam que "1" na casa das dezenas representa 10 unidades, na casa das centenas representa 100 e assim por diante, transmitindo um conhecimento de tipo figurativo. Simplesmente utilizam os nomes sem relacionar com o significado operativo, com o valor de posição. Tais nomes apenas permitem responder algumas perguntas corretamente, mas não são indicativos da compreensão do sistema. Críticas à forma tradicional de ensino do sistema de numeração também são feitas por Rico, Castro e Romero (2000). A aprendizagem das estruturas operatórias não pode se reduzir, afirmam os autores, com os quais concordamos plenamente, à automatização de regras, mas deve consistir na coordenação de diferentes sistemas de representação, nos quais as regras adquirem significado e os conceitos tornam-se precisos.

Ficou claro em nossa pesquisa que, embora as crianças identificassem as casas decimais e seus valores, não compreendiam efetivamente o sistema de numeração decimal. Concepções mais próximas ao valor posicional passaram a ser construídas nas situações didáticas em que as crianças eram solicitadas a formar agrupamentos a partir de escritas numéricas e a produzir as escritas a partir de agrupamentos, o que nos permite inferir que as problematizações provocadas pelas situações didáticas da pesquisa contribuíram para o avanço em direção à compreensão dos princípios aditivo, multiplicativo e de posicionalidade que caracterizam o sistema de numeração decimal.

7.2.3 O processo de construção

Buscamos saber como crianças que não escrevem convencionalmente milhares e não compreendem o valor posicional do número passam a fazê-lo, e, de que forma a interação criança-escrita numérica contribui para tal. Até então, nos ocupamos em explicitar os caminhos percorridos pelos sujeitos da pesquisa desde suas concepções iniciais até a construção de concepções bem próximas à compreensão das propriedades do sistema de numeração decimal, em especial, o valor posicional. Voltamos o olhar, neste momento, para os processos, buscando compreendê-los à luz do referencial teórico.

Observamos, ao longo do trabalho, que o processo de compreensão das regularidades da escrita convencional de milhares e do valor posicional do número foi eminentemente construtivo, permeado por tomadas de consciência e abstrações reflexionantes e dinamizado por interações sociais e conflitos cognitivos.

a) Interações sociais e conflitos cognitivos

As situações didáticas constituíram-se num espaço de interação social, na perspectiva preconizada por Bednarz (1996), ao considerar que interações sociais podem dar lugar a confrontações de pontos de vista, através de debates entre os alunos, permitindo uma dialética na qual cooperação e conflito sociocognitivo, de um lado, e o papel do professor e do meio, de outro, completam-se e equilibram-se. As interações que se estabeleceram entre os componentes do trio corresponderam ao que defende a autora: nesses confrontos os alunos expõem suas concepções, situam-se em relação aos outros, argumentam contra certas posições, adotam modelos, se necessário, abandonam outros, constroem novas estratégias e concepções sendo fundamentais para a conceitualização.

A realização da pesquisa em trios favoreceu a expressão das concepções das crianças e dinamizou o processo de resolução dos problemas propostos pela interação que se estabeleceu entre: criança-criança; criança-escrita numérica; conhecimentos prévios-novos conhecimentos. Os diálogos constantes e as trocas de conhecimentos ao longo das intervenções constituíram-se numa significativa fonte de aprendizado e desenvolvimento conceitual das crianças participantes da pesquisa. Para isto também contribuiu significativamente a diversidade que caracterizou cada trio. Durante as onze situações didáticas vivenciadas ficaram evidentes os diferentes processos de desenvolvimento dos componentes de cada uma. No grupo de Sab, Fel e Lua, observou-se que Sab avançou mais rapidamente em direção às compreensões esperadas. O mesmo ocorreu com Raf, na tríade composta com Mat e Mich. Já o grupo de Taa, Tae, Cla permaneceu mais homogêneo até o final da pesquisa. Em alguns momentos, Sab e Raf atuavam como mediadoras, "explicando" aos colegas o que já haviam compreendido, ao mesmo tempo que também vivenciavam conflitos em relação ao objeto do conhecimento com o qual interagiam. É o que se observa no diálogo entre Fel, Lua e Sab. Sab: *Aqui ó, quarenta e cinco, já tá dizendo quarenta e cinco que nem o de antes*. Sab desenha os potes e as quantidades. Sab conversa com a Lua. Lua: *Duzentos...* Sab: *Ó é mil duzentos e quarenta e cinco ... representa quarenta* ...Lua: *Dois...* Sab: *O dois representa o quatro*? Fel: *O dois representa a metade do quatro*... Sab: *Como assim, não entendi*. Silêncio.

Como dizem Ross e Sunflower (2007),posição que também assumimos, os alunos tornam-se melhores ao expressar seu pensamento matemático após a experiência de falar e escrever sobre suas idéias, e ouvir e ver as idéias dos outros estudantes. Perret-Clermont (1978) já havia observado que a troca de opiniões e o confronto de idéias entre duas ou mais pessoas são fonte de conflitos que desencadeiam desequilíbrios fundamentais à construção de novas estruturas de conhecimento.

As interações que caracterizaram as situações didáticas também se estabeleceram entre os diferentes conhecimentos das crianças: os construídos e os em construção, como fica evidente nos constantes conflitos cognitivos gerados a partir da coexistência de concepções - nem sempre convergentes - e conhecimentos já construídos sobre escrita de números no pensamento da criança. Inhelder, Bovet e Sinclair (1977) chamam atenção para a importância dos conflitos cognitivos na aprendizagem, ao afirmar que as situações de conflito que emergem do confronto do sujeito com o objeto do conhecimento promovem a alimentação dos esquemas preexistentes, o confronto entre eles, desequilíbrios, tomada de consciência e a conseqüente construção de novos esquemas, novas coordenações e novos conhecimentos. Consideramos que a interação social e os conflitos cognitivos influenciaram significativamente as mudanças conceituais e a construção de novas concepções por parte dos alunos.

Nas concepções manifestadas nas primeiras situações didáticas já era possível perceber que nas interações criança-escrita numérica, conviviam hipóteses conflitantes entre si. Entre elas, alguns exemplos:

- Sab afirmava que "os mil" têm quatro algarismos, mas, no mesmo momento, produzia escritas de milhares com cinco algarismos, acreditando ser necessário demarcar o "mil" com o algarismo *1*;

- algumas crianças duvidavam da existência de números escritos com muitos algarismos e estranhavam a necessidade de muitos algarismos para escrever o número, mas também acreditavam na necessidade de usar muitos zeros para escrever milhares;

- no decorrer das leituras, durante as primeiras intervenções, interagiram conhecimentos já construídos sobre número e escritas numéricas que, embora inicialmente permitissem ler diferentes números da mesma forma, também permitiam desconfiar da possibilidade de todas as escritas representarem o mesmo número;

- o principal argumento utilizado pelas crianças, quando solicitadas a justificar as razões de sua opção pela escrita convencional dos números, dizia respeito à quantidade de algarismos presentes na escrita do número, em especial de zeros: "*O número não é escrito com tantos zeros*", embora em suas produções de escritas de milhares utilizassem muitos zeros: *20003000405*. Mais adiante, estas mesmas escritas concatenadas (*600503 ou 2000346*) causaram estranheza às mesmas crianças que as produziram.

Concepções conflitantes entre si também foram observadas ao longo do caminho à medida que novas regularidades da escrita numérica e da organização do sistema iam sendo percebidas. Consideramos que tenham sido fonte de constantes conflitos cognitivos e reflexões a respeito de como se lê e de como se escreve milhares, fator significativo de avanços em direção às escritas convencionais e à compreensão do valor posicional. As diferentes concepções manifestaram-se em vários momentos que envolviam tanto a produção de uma escrita quanto a leitura de um número. Muitas vezes, hipóteses conflitantes entre si conviviam na leitura ou na produção da mesma notação, como se observa na situação vivenciada por Fel, descrita na apresentação dos dados (Seção 6.2.1) em relação à presença dos zeros na escrita numérica. O menino demonstra saber que não se utiliza zero na escrita de *quinze mil e duzentos* e por isso estranha a notação *150200*, tanto que afirma: - *Mas eu garantia que não tinha zero.* Busca justificar sua estranheza, argumentando que a presença do zero não alteraria muita coisa: - S*e colocasse o zero ia ficar na mesma, só iria ocupar um pouquinho mais de espaço*. Mesmo assim, a dúvida persiste ao ver o zero colocado novamente no número: - *Não ia ficar*... *(150200*). Recorre à leitura do número na tentativa de encontrar uma saída para o impasse. Não consegue ler o número todo como milhar, por isso o lê, inicialmente, segmentando-o em fragmentos já conhecidos: cento e cinqüenta (*150*) e duzentos (*200*). Ao ler novamente vale-se da hipótese de que, na notação, o *0* corresponde ao mil. Observamos que o menino encontra-se numa situação de conflito frente às contradições que caracterizam suas ações, ou seja, numa situação de desequilibro fundamental à conceituação, como observa Piaget (1977, 1978a, 1978b). Ao buscar justificativas, Fel ainda não consegue elaborar outros argumentos para justificar a escrita que julga correta e as razões de ter lido o número desta forma. Os argumentos que utiliza baseiam-se nos conhecimentos que já construiu e nas hipóteses que possui sobre a escrita, mas evidencia as coordenações de ações que realiza. Estas, como diz Piaget (1977), ocorrem inicialmente por assimilações recíprocas dos esquemas utilizados que, progressivamente, orientam-se na direção de formas cada vez mais gerais e independentes de seu conteúdo (estruturas operatórias de conjunto).

Desequilíbrios e assimilações recíprocas de esquemas também podem ser observados na situação em que Raf se apóia no conhecimento já construído sobre centenas, no enfrentamento de uma situação em que outras hipóteses sobre a escrita causavam-lhe conflitos (Seção 6.2.1). Diante da solicitação para formar o número duzentos e quarenta e seis mil, cento e trinta e sete, o faz da seguinte forma: *200460137.* Ao ler a primeira parte do número que produziu, como vinte mil, quatrocentos e sessenta (*200460),* Raf reafirmou sua convicção de que há uma correspondência entre fala e escrita e de que é necessário usar o zero como marca de mil. No entanto essa crença entrou em choque com o conhecimento que já possuía sobre centenas, ou seja, de que duzentos e quarenta e seis é escrito como 246. Expressou esse conhecimento ao argumentar que *os números têm que estar juntos para formar o 246* e *não podem ser separados por 0.* Ao concluir que o número deveria ser escrito como *246013*7, Raf abriu mão da correspondência entre fala e escrita e manteve seu conhecimento sobre centenas e a convicção da necessidade de zero como marca de mil.

Em um outro momento, Raf justificou a leitura que realizou e a forma como resolveu os conflitos gerados por suas diferentes concepções, também descritos na Seção 6.2.1. Diante da escrita de quatro mil, duzentos e vinte e seis, produzida por um colega: *402* ***0****26*, aponta o *0* entre os algarismos *2* e considera que ele está inadequado naquela posição. Argumentando com segurança, diz : “- Vai fora, porque senão não forma o duzentos e vinte e seis”; “- o dois e o vinte e seis ficam separados e por isso tá errado”. Quanto ao zero depois do algarismo *4*, não soube dizer se era necessário ou não. Quando questionada sobre onde diz que é “mil” na escrita do número *40226,* apontou de imediato para o *0*. Quando questionada sobre qual número ficaria, se retirássemos o zero (*4226*), leu o número como quatrocentos e vinte e dois, identificando a centena formada pelos três primeiros algarismos. Leu novamente o número, como quatrocentos e vinte e seis, omitindo um dos algarismos *2*. Podemos observar claramente que a conceituação não é uma simples leitura dos objetos, como diz Piaget (1977), mas uma reconstrução que introduz características novas sob a forma de ligações lógicas. Estas ligações são buscadas por Raf, quando coloca em uso os esquemas de que dispõe e busca uma coerência entre eles. O próprio processo faz com que surjam novas inadaptações que geram novos problemas e que exigem a aplicação e a construção de novos esquemas. Caracterizamos as situações de conflito vivenciadas pelas crianças da pesquisa como fontes inesgotáveis de tomadas de consciência, na perspectiva preconizada por Piaget (1977). A constatação de inadaptações dos esquemas construídos frente às novas situações, a busca dos motivos que as ocasionaram fazia com que buscassem as falhas da adaptação dos conhecimentos que já possuíam sobre escritas e concentrassem a atenção nos meios empregados, nas correções ou substituições.

Situações de conflito entre diferentes concepções sobre a escrita também foram descritas nas pesquisas de Lerner e Sadovsky (1996). Para as autoras, o progresso para a produção de escritas convencionais se dá a partir do momento em que há a tomada de consciência do conflito e a elaboração de ferramentas para superá-lo. Isto ocorre a partir do momento em que as crianças passam a sentir insatisfação e perplexidade diante de suas próprias escritas. Aí, tendem a efetuar correções, tais como reduzir a quantidade de algarismos nos números ou excluir zeros. À medida que estas concepções se tornam mais avançadas e que conhecimentos relativos ao sistema de numeração decimal vão sendo assimilados, tornam-se recursos importantes na produção das escritas numéricas convencionais. Os dados de nossa pesquisa nos permitem assumir esta mesma posição. Trata-se de um intenso e construtivo processo de construção, rico em elaborações mentais em que interagem e convivem diferentes concepções e diferentes conhecimentos.

.

b) Das ações aos conceitos

As situações didáticas objetivavam promover a ação dos sujeitos da pesquisa sobre as escritas numéricas. Ficou claro, ao longo das mesmas, que a compreensão do valor posicional requer algo mais que simples interação criança-escrita numérica, uma vez que ficou evidente a possibilidade de obtenção de êxito sem compreensão das razões, como observou Piaget (1977), da mesma forma que ficaram claros os processos de coordenação de ações, tomada de consciência e conceituação que caracterizaram os caminhos percorridos rumo à compreensão do valor posicional do número.

Ações sobre este objeto, ou seja, leitura e produção de escritas numéricas convencionais características do que Piaget denominou “um fazer inicial” ainda não-conceitual, mas que permite o sucesso nas ações, estiveram presentes significativamente no início e podem ser observadas no decorrer de todo o trabalho, à medida que novos problemas exigiam novas conceituações, e, em virtude dos diferentes tempos de aprendizagem das crianças participantes da pesquisa. Um exemplo significativo deste “fazer” é o fato de as crianças reconhecerem as escritas convencionais de imediato, dentre outras, como no caso de Raf que, embora leia as escritas numéricas *60053, 600503, 653* como seiscentos e cinqüenta e três, identifica a escrita convencional como sendo a correspondente ao número *seiscentos e cinqüenta e três*, sem conseguir, no entanto, justificar sua escolha. Trata-se, pois, de um saber não-conceitual de que diferentes escritas numéricas não podem ser lidas da mesma forma, do mesmo modo que um mesmo número não pode ser escrito de diferentes maneiras.

As situações didáticas evidenciaram também que, para além de simples constatações, os progressos em direção à conceituação consistem em coordenações progressivas das ações num movimento que conduz da “periferia ao centro”, conforme Piaget (1977). Por “periferia”, caracterizamos, neste trabalho, em consonância com o conceito atribuído por Piaget (1977), o conjunto de ações que permitiram às crianças expressar e pôr em ação conhecimentos que ainda não podiam explicar, bem como construir hipóteses sobre a escrita de milhares, tais como as descritas no capítulo anterior em relação à: quantidade de algarismos e existência do número, quantidade de zeros, magnitude do número, marcas para o mil e separação dos algarismos na escrita, bem como o conjunto de coordenações que conduziram – da constatação da impossibilidade de ler e escrever notações de milhares, de que o número “ficou mais grande” e de que surgiram mais “casinhas” além das já conhecidas – a construir possíveis alternativas para solucionar estes novos problemas, tais como eliminar um algarismo, iniciar a nominar as casas decimais pela esquerda.

A pesquisa tornou claro o papel fundamental desempenhado pela coordenação das ações que se tornavam necessárias em função dos problemas gerados pelas escritas. Novos problemas surgiam, em função das novas possibilidades construídas para a resolução de velhos problemas, como, por exemplo, iniciar pela esquerda nem sempre dá certo: faltam casinhas ou sobram algarismos. E novas hipóteses eram construídas: todos os algarismos das classes dos milhares são milhares; o ponto é quem separa as classes e não são mais necessárias “marcas de mil”. Nominar as casas decimais com as letras M,C,D,U passa a ter sentido, pois auxilia a leitura dos números.

A situação vivenciada por Sab, ao final das intervenções realizadas com seu grupo, descrita na Seção 6.2.1, é bastante esclarecedora neste sentido. A menina ainda se vale da hipótese de que é necessário acrescentar o *1* como marca de mil na escrita numérica e acaba por tomar consciência de que não é necessário fazê-lo ao estabelecer relações entre os diferentes conhecimentos já construídos. Questionada em relação ao fato de não ter utilizado o *1* como marca de mil em outras escritas, toma consciência de que esta marca não é necessária. Problematizada no sentido de como escrever o “mil” diante do fato de que não poderia ser através do algarismo *1*, Sab recorre aos conhecimentos construídos na escola e durante as intervenções sobre casas decimais (sobrepor as letras M,C,D,U indicativas de milhar, centena, dezena e unidade aos algarismos) e sobre o uso do ponto para separar os "mil" dos demais algarismos.

Como diz Piaget (1977,1978b), as crianças inicialmente colocam em ação esquemas isolados de assimilação na tentativa de ligá-los a outros objetos, possibilitando acomodações momentâneas, mas estas ainda não-necessariamente envolvem tomadas de consciência. Em relação à conceituação do valor posicional, observamos ações em que os sistemas de esquemas utilizados já se constituíam em um saber bem elaborado, embora sem tomadas de consciência, características do primeiro nível de conceituação descrito por Piaget (1977). Observamos, também, um processo de interiorização das ações materiais por meio de representações semiotizadas (linguagem, imagens mentais, etc.) e um processo geral de tomada de consciência da ação característica do segundo nível. Neste, a abstração empírica fornece uma conceituação descritiva das características materiais da ação e a abstração refletidora extrai das coordenações da ação o necessário para construir as coordenações inferenciais que permitem, no nível do conceito, ligar e interpretar os dados observados, embora os mecanismos que lhe permitem fazê-lo permaneçam inconscientes.

À medida que os problemas se impunham e a inadaptação das concepções construídas ia sendo constatada, um processo de busca de explicações se instalava. A tomada de consciência de que algumas de suas concepções falham fez com que as ciranças começassem a perguntar-se a respeito das diferenças entre as situações em que obtinham êxito e as que fracassavam, observando sempre algo a mais. Esta busca gerou o intenso movimento interativo criança-escrita numérica que conduziu gradativamente aos porquês e à interiorização progressiva das ações em direção à compreensão dos seus mecanismos centrais e em direção às propriedades intrínsecas à escrita numérica de multidígitos e ao sistema de numeração decimal, ou seja, ao que Piaget (1977) denominou "centro". A constatação de Sab, já nas últimas situações didáticas, de que a posição ocupada pelo *108* na notação de cento e oito mil, duzentos e dezesseis (*108.216*) pode significar os "mil", no número, é um exemplo de tomada de consciência que conduzirá à compreensão das propriedades intrínsecas ao sistema: - *Ah, aqui ó (108) já representa que é mil eu acho. Que nem aqui é cento e oito mil.*

As interações criança-escrita numérica permitem o êxito e a elaboração de regras, bem como a constatação das regularidades da escrita, mas não promovem a compreensão do valor posicional, se permanecerem na "periferia" e não conduzirem à apropriação dos mecanismos internos das ações dos sujeitos e das propriedades intrínsecas ao sistema. Cabe aqui a observação de que, no contexto escolar, muitas vezes as interações criança-escrita numérica não ultrapassam o plano da "periferia", o que contribui para a não-compreensão dos conceitos trabalhados nas aulas de matemática. Isto ficou evidente na não compreensão das propriedades do sistema de numeração pelas crianças da pesquisa, apesar do êxito que obtinham na leitura e na escrita de numerais no domínio numérico das dezenas e centenas, e no fato de a escrita numérica não sugerir, de imediato, a possibilidade de formar agrupamentos de acordo com as propriedades do sistema de numeração decimal, do mesmo modo que os agrupamentos (organizados dentro destes princípios) não sugeriram de imediato a escrita numérica correspondente. A compreensão do valor posicional não foi devida às escritas numéricas em si, mas às abstrações realizadas pelo sujeito a partir das ações realizadas sobre esta escrita, o que equivale a dizer que requer mais do que constatações das propriedades da escrita por experiência física. Abstrações reflexionantes são necessárias para garantir a dialética e contínua relação entre forma e conteúdo que promove a construção dos conhecimentos, relação esta a ser priorizada no processo de ensino da disciplina matemática.

É fundamental considerar a observação de Lerner (2005) de que o uso regular das escritas numéricas pode levar à descoberta de regularidades e à elaboração de regras que permitem ter êxito, mas este êxito pode estar centrado só nos significantes (na notação em si). A autora faz um alerta, com o qual concordamos, que centrar a atenção só nos significantes pode produzir um divórcio temporal entre os significantes e o significado a que remetem. Daí a importância, em acordo com a teoria piagetiana, de que as situações didáticas propostas nas aulas de matemática promovam a marcha da periferia ao centro, ou seja, a tensão constante entre o êxito e a compreensão, que caracterizam a tomada de consciência, ou seja, a conceituação.

Identificamos o caminho percorrido por nossas crianças em direção à compreensão do valor posicional com o caminho descrito por Lerner (2005). Inicialmente as crianças põem em ação conhecimentos que ainda não podem explicar. Com apoio nas modificações que se operam nos significantes e nas estratégias compreendidas por todos, refletindo sobre elas e comparando resultados, determinam em quais condições os procedimentos são eficazes. Interrogam-se sobre as razões que podem explicar o êxito, buscando explicitar aspectos originalmente implícitos no procedimento. As relações entre os significantes e os significados se estabelecem. Assim, concordamos com Lerner (2005) quando afirma que o uso das notações e a descoberta de suas regularidades pode levar à compreensão dos princípios que regem o sistema de numeração decimal, posição esta que supera o entendimento de que a compreensão do valor posicional se dê a partir de simples ações sobre os significantes.

c) As representações

Neste trabalho assumimos a posição de que a representação envolve um processo operatório que vai além da recordação-imagem, como preconiza Piaget (1978a). Várias foram as representações da escrita de milhares feitas pelas crianças, apoiadas em diferentes hipóteses, até o reconhecimento e a compreensão da notação convencional. A apropriação da escrita convencional de multidígitos pelas crianças da pesquisa está longe de poder ser interpretada como um processo de reprodução ou cópia, mas sim como um processo representativo que caracterizamos como construtivo.

Observamos que, como refere Piaget (1978a), há um processo de apropriação do signo que evolui de significações próprias, não conceituais, para os significantes coletivos que envolvem conceitos. A situação vivenciada por Sab e seus colegas de trio em relação à notação convencional de 2005, ano em que foram realizadas as situações didáticas (descritas na seção 6.1, item c) é ilustrativa neste sentido. Sab, Luan e Fel escrevem 2005 de imediato, quando solicitados, uma vez que se trata de uma notação presente no mundo dos signos sociais, com a qual estão familiarizados. Desafiada a pensar sobre a magnitude do número, Sab, em função das hipóteses que possui sobre escritas de milhares, discorda da forma como a professora e até o mesmo o calendário “escreve” dois mil e cinco. O mesmo ocorre com os demais componentes do trio. Uma nova leitura produzida a partir das hipóteses que possuem leva-os a identificar o número como duzentos e cinco (**200**5) e à conclusão de que o ano deveria ser escrito como *20005* .

A representação inicial de 2005, das crianças, aproxima-se do que Piaget (1978a) denominou representação no sentido estrito, ou seja, uma representação que fica reduzida à imagem mental ou à recordação-imagem, isto é, à evocação simbólica das realidades ausentes; representação simbólica ou imaginada, sendo a imagem entendida como cópia do objeto. Ao que se assiste, no decorrer do diálogo do trio, no entanto, é a um processo de sucessivas tomadas de consciência a partir da inadaptação vivenciada por Sab. A menina não se mostra muito segura, embora reafirme a necessidade de "marcas para o mil", na notação de dois mil e cinco. Acredita na propriedade da escrita produzida pela professora para o domínio das centenas, mas não faz o mesmo em relação ao domínio dos milhares (Sab: - *Bom, a maneira da professora escrever ... ela não bota os dois zeros.* Problematizo: - *Mas antes vocês me disseram que achavam que a professora estava escrevendo dois mil e cinco errado, no quadro*. Sab responde: - *É! Isso ela faz. Todas as profes daqui fazem assim*).

Fica claro que a representação vai além da recordação-imagem ou reprodução-cópia do 2005 no calendário e no quadro-de-giz da sala de aula. Como diz Piaget (1978a), implica processos que envolvem a conceituação e a constituição de uma nova realidade no ato representativo, por meio de um movimento dialético de assimilações e acomodações realizadas pelo sujeito que evoluem em direção ao equilíbrio, confundindo-se com a própria capacidade de pensar e interligar significantes e significados, ou seja, como um processo operatório que envolve sistemas de conceitos.

Nossos resultados permitem afirmar que as crianças da pesquisa abstraíram da numeração escrita conhecimentos novos sobre o sistema de numeração decimal no decorrer das situações didáticas. Para essa abstração, certamente contribuíram os conhecimentos já construídos na escola, embora tenha sido possível verificar que os mesmos foram insuficientes para tal. Podemos afirmar que para essa compreensão também contribuiu um conjunto de reflexões provocadas sobre escrita numérica e agrupamentos, bem como sobre agrupamentos e escrita, caracterizado pela manifestação de concepções e reconstrução destas concepções na interação com o grupo. Apresentamos, a seguir, uma síntese das questões aqui analisadas.

8 CONCLUSÕES

Cabe-nos agora retomar os objetivos e as questões que nortearam este estudo. Propomo-nos a investigar concepções presentes e construídas na interação criança-escrita numérica que contribuem para a construção do valor posicional característico do sistema de numeração decimal.

As interações iniciais com as escritas numéricas nas situações de pesquisa possibilitaram a manifestação de conhecimentos já construídos pelas crianças sobre o sistema de numeração decimal, e caracterizaram-se , essencialmente, por um processo de construção de novos conhecimentos. As crianças podiam ler e escrever números multidígitos, tais como os “nós” e outras escritas relacionadas a situações significativas, apoiadas em conhecimentos construídos na interação com o mundo numérico e em situações formais de ensino, sem compreender os princípios básicos do sistema de numeração. Produziam escritas a partir de um processo de transcodificação numérica, sem compreender os princípios do sistema. Elas também sabiam que zeros são necessários para “dizer que é mil” e que é preciso diminuir a quantidade de zeros para que as escritas se aproximem das convencionais.

Esses conhecimentos iniciais, no entanto, não foram suficientes para estender esta possibilidade à produção de escritas convencionais de milhares. À medida que se valiam deles e vivenciavam situações de conflito, quando solicitadas a ler e escrever escritas ainda não conhecidas, novas hipóteses iam sendo elaboradas pelas crianças por um processo essencialmente construtivo. As tentativas frustradas de aplicar os conhecimentos já assimilados, a socialização de saberes e o estabelecimento de novas relações entre os diferentes conhecimentos que interagiam em cada situação caracterizaram o caminho percorrido em direção às escritas convencionais.

Nesse caminho coexistiram concepções já construídas, tanto em relação às escritas numéricas quanto ao valor posicional, não relacionadas entre si. O estabelecimento de relações e a construção de novos conhecimentos sobre ambos foram desencadeados por um processo fundamentalmente problematizador, possibilitado por alguns fatores, tais como: - as intervenções terem sido realizadas em trios e não com crianças individualmente; o “diálogo” entre os conhecimentos anteriores e os conhecimentos presentes nas situações vivenciadas pelas crianças; a constante troca de saberes entre os componentes dos trios; a diversidade que caracterizava cada trio participante da pesquisa.

Identificamos um conjunto de ações que caracterizaram a interação criança-escrita numérica fundamentais à compreensão do valor posicional: - correspondência entre a fala do nome do número e as escritas numéricas; - uso de esquemas de apontar e fazer correr o dedo sobre os algarismos da escrita, buscando garantir esta correspondência; - identificação de “partes”, na escrita numérica, correspondentes a números já conhecidos; - correspondência entre estas partes e o nome do número identificado; - maior facilidade em ler os números correspondentes aos “nós” (dezenas, centenas, milhares exatos) e os números correspondentes a um período igual ou inferior ao trabalhado na escola, ou seja, correspondentes a dezenas e centenas. De uma forma bastante significativa, as crianças manifestaram a concepção de que são necessárias “marcas para o mil”, ou seja, de que é necessário utilizar, além do zero (0), o algarismo um (1) e/ou três algarismos zeros (000), como “marcas de mil” ou potências de dez. Observamos a tendência em codificar as potências de dez, inicialmente através do “0” e posteriormente através da vírgula (,) e do ponto (.) no decorrer das situações didáticas.

Consideramos que algumas dessas ações e concepções dão suporte à construção do conceito de valor posicional, uma vez que, de certa forma, já revelam uma preocupação incipiente com o lugar ou a organização dos algarismos nos números:

- o uso de esquemas, tais como os de apontar e corresponder um nome de número para cada parte da escrita numérica;

- a necessidade de garantir uma marca para o “mil” na escrita numérica;

- a percepção de que há muitos algarismos na escrita numérica e o fato de considerarem que isto não pode ocorrer;

- a possibilidade de escrever números grandes de forma econômica, ou seja, com poucos algarismos;

- a concepção de que são necessários vários zeros para formar o "mil" e o milhão, por exemplo, vinculando a quantidade de zeros com a magnitude do número;

- o reconhecimento de que os números são separados por ponto ou vírgula;

- a necessidade de nominar unidades, dezenas e centenas e separar as classes das unidades.

No que se refere às notações convencionais de números multidígitos, foi possível observar a construção de novas concepções sobre essas escritas que caracterizaram um percurso evolutivo (não linear) em direção à compreensão das regularidades da escrita numérica convencional de milhares. As crianças dominavam a leitura e escrita de multidígitos nos intervalos numéricos referentes a unidades, dezenas e centenas. À estranheza inicial de notações com mais algarismos, à grande dificuldade inicial de ler multidígitos e à constatação de que o número ficou maior, seguiu-se a construção de possíveis soluções para o problema, tais como eliminar um algarismo ou criar uma nova casa decimal. Na tentativa de "aplicar" conhecimentos já trabalhados na escola, atribui-se às casas decimais letras respectivas às ordens já conhecidas, iniciando pela esquerda do numeral, tal como o fazem para ler: C, D, U. Surgiram novos problemas, pois iniciar pela esquerda nem sempre dá certo: faltam casas, sobram algarismos. Passaram a nominar todos os algarismos da classe dos milhares com a letra M, considerando-os todos como representativos da classe, sem identificar unidades, dezenas e centenas de milhar. Perceberam que organizar o numeral identificando as casas decimais auxilia na leitura dos números e reconheceram a possibilidade de fazê-lo através do ponto, que separa os milhares das unidades simples.

Inicialmente as crianças estabeleciam uma relação muito incipiente com os conteúdos trabalhados em aula, sobre unidades, dezenas e centenas; identificavam as "casas decimais" na escrita numérica, mas não as relacionavam com os agrupamentos. Os algarismos representam seu valor absoluto e a alusão a representarem outros valores faz com que inicialmente considerem a possibilidade de representarem quantidades aleatórias, os similares ao nome do número. Após sucessivas problematizações direcionadas ao estabelecimento de relações entre posição do algarismo e quantidades de elementos que representa, é que as crianças participantes consideraram a possibilidade de os algarismos representarem valores diferentes, conforme a casa decimal que ocupam, e algumas passaram a atribuir-lhes o valor relativo que assumem na escrita numérica.

Nas primeiras intervenções o número escrito não sugeriu alguma relação com agrupamentos. Num primeiro momento não houve tomada de consciência da relação existente entre a posição dos algarismos no número e o valor que representam. Observou-se:

- a presença de hipóteses e concepções já construídas em relação tanto às escritas numéricas quanto ao valor dos algarismos nos números;

- a coexistência de hipóteses e concepções relativas às escritas numéricas e ao valor posicional, mas não relacionadas entre si;

Foi preciso problematizar no sentido de possibilitar que os conhecimentos sobre a escrita e o valor posicional se "integrassem", ou seja, que fossem estabelecidas relações entre conhecimentos já existentes no sentido de construir um novo conhecimento.

Retomando as questões que nos propomos a investigar, podemos afirmar que a escrita numérica não sugeriu, de imediato, às nossas crianças, a possibilidade de formarem agrupamentos de acordo com as propriedades do sistema de numeração decimal, do mesmo modo que os agrupamentos (organizados dentro destes princípios) não sugeriram a escrita numérica correspondente. Ambos, escritas e agrupamentos, num primeiro momento, significaram para as crianças a quantidade total representada tanto pelas escritas numéricas quanto pelos objetos contados.

Diante da escrita numérica e da solicitação de formar os agrupamentos correspondentes, as crianças inicialmente buscaram decompor a quantidade total, formando agrupamentos a partir da subtração de quantidades aleatórias do total ou da divisão da quantidade total em grupos (envolvendo ações de quotição e partição), ações próximas aos princípios aditivo e multiplicativo do sistema. Ignoram a organização do sistema em potências de dez, como se observa na subtração e divisão de quantidades aleatórias da quantidade total representada pela escrita numérica.

Diante de agrupamentos e da solicitação de produzir as escritas numéricas correspondentes, as crianças, inicialmente buscaram compor o número e a escrita que representa a quantidade total através da soma das quantidades dos agrupamentos, não respeitando a ordem da organização do sistema (aumento progressivo das potências de dez, da direita para a esquerda), mas respeitando a ordem do enunciado do problema. Passaram a organizar as somas, respeitando a ordem de organização do sistema. Não se valeram do princípio multiplicativo do sistema quando somaram sucessivas vezes quantidades semelhantes.

Quando desafiadas a considerar a possibilidade de pensar em grupos de dez, cem, mil, dez mil, nas duas situações: produção de agrupamentos a partir da escrita e produção de escritas a partir de agrupamentos, as crianças, aos poucos, perceberam a possibilidade de agrupar quantidades iguais de 10, 100 ou 1.000 e multiplicar pelo número de vezes que aparecem, evidenciando, assim, concepções mais próximas do princípio multiplicativo do sistema. Observamos, portanto, uma construção progressiva dos princípios aditivo e multiplicativo do sistema, bem como da compreensão da organização do sistema em potências de dez, elementos fundamentais ao reconhecimento do valor relativo do algarismo.

A análise dos dados torna claro que todas as crianças construíram concepções próximas à compreensão do valor posicional, como observamos no Capítulo 6 deste trabalho, embora em tempos diferentes entre si, o que vem ao encontro da tese de Piaget (1977) de que o processo de conceituação envolve mecanismos análogos, que se repetem em níveis hierarquizados com defasagens cronológicas. Evidencia, também, que as interações promovidas pelas situações didáticas possibilitaram avanços em relação ao domínio da escrita numérica convencional e em relação à compreensão do valor posicional, mas não permitem concluir que todas as crianças participantes da pesquisa tenham construído esses conhecimentos. Por se tratar de compreensões complexas, pode-se inferir que um número maior de situações didáticas e a continuidade do processo contribuiriam para tal. Nossos resultados estão consonantes com a afirmação de Nunes e Bryant (1997, p.218) em relação à compreensão das crianças: “Dizer que a compreensão das crianças de cada conceito matemático muda muitas vezes durante a infância significa que a aquisição do conhecimento matemático jamais é uma questão de tudo-ou-nada”. Nossas crianças trouxeram conhecimentos sobre escritas numéricas e valor posicional para as situações didáticas e suas compreensões mudaram, significativamente, no decorrer das mesmas, do mesmo modo que continuarão mudando sensivelmente ao longo de suas vidas.

Em nosso trabalho partimos do pressuposto de que as interações crianças-escritas numéricas promovem a construção do valor posicional. Buscávamos verificar como se processa cognitivamente a compreensão do valor posicional a partir destas interações e identificar contribuições das notações de números multidígitos à conceituação do valor posicional do número. Verificamos que as crianças construíram concepções bastante próximas ao valor posicional do número, não de imediato, mas à medida que as situações didáticas provocavam reflexões e sucessivas tomadas de consciência sobre as notações em si e sobre as relações entre escritas e agrupamentos. Ficou claro que as notações, por si só, não são "transparentes" às crianças e o aprendizado do valor posicional a partir da interação com a escrita numérica é possível, desde que promova a reflexão sobre as relações entre os resultados das ações e sobre as próprias reflexões realizadas ou, em outras palavras, os processos fundamentais à construção dos conceitos: abstrações reflexionantes, tomadas de consciência e a superação do fazer pelo compreender (PIAGET,1977; LERNER, 2005). Nesta perspectiva também podem adquirir sentido outras ações pedagógicas que caracterizam o ensino do sistema de numeração decimal nas salas de aula: o uso de materiais concretos e a realização de agrupamentos.

Os achados da pesquisa estão em consonância com o conjunto de produções da área que consideram que as interações crianças-aspectos notacionais do sistema de numeração decimal podem promover a compreensão dos princípios operatórios do sistema desde que promovam um processo reflexivo sobre suas regularidades (FUSON,1990; LERNER;SADOVSKY, 1996; NUNES;BRYANT, 1997; OROZCO, 2001, 2005; KAMII;JOSEPH, 2005; LERNER, 2005; BRIZUELA, 2006; TEIXEIRA, 2006).

Descrevemos, no projeto de pesquisa que originou este trabalho, nosso sentimento de inconclusão frente àquela etapa concluída. Naquele momento escrevíamos: "Como em toda ação marcada pela dialeticidade do ato de construir o novo e como em todo o projeto de futuro, o já realizado passa por revisões e análises e pela redefinição de concepções, metas e ações. Portanto, a chegada é, na realidade, sempre um novo ponto de partida. Trata-se de um momento em que a satisfação pelo trabalho concluído confunde-se com a sensação que advém da constatação de que, na realidade, o término desta etapa significa o início do trabalho propriamente dito". Entendíamos o final do projeto como início do percurso que nos levaria ao conhecimento do objeto de nosso estudo. Neste momento em que finalizamos o trabalho, deparamo-nos novamente com a mesma inquietante sensação de incompletude. O já realizado, embora já tenha passado por revisões e análises, e pela relutância em concluir, ainda teima em visualizar novas possibilidades e perspectivas, tornando este ponto de chegada, novamente, um ponto de partida. Construímos a certeza de que contribuímos um pouco mais para o entendimento de como as crianças compreendem o valor posicional do número, mas também a certeza de que novas pesquisas são necessárias devido às respostas que não obtivemos ou à insuficiente profundidade nas análises, naturais incompletudes de um trabalho de pesquisa. Enfim, esta é a beleza infinita do ato humano de conhecer, que nos propomos a continuar realizando.

REFERÊNCIAS

ACKERMANN,E. Reconstruir a mesma quantidade: como fazem as crianças pequenas? In: INHELDER, B.; CELLÉRIER, G. **O desenrolar das descobertas da criança**: um estudo sobre as microgêneses cognitivas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p.169-185.

AGRANIONIH, N. T. **O ensino e a aprendizagem da matemática:** uma intervenção construtivista**.** 1991. 173 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1991.

_________. **Escritas numéricas x conceitos matemáticos**: um estudo sobre as inter-relações possíveis entre notações e conceitos na aprendizagem da matemática. Projeto de tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

BEDNARZ, N. Interações sociais e construção de um sistema de números no ensino fundamental. In: GARNIER, C., BEDNARZ, N.; ULANOVSKAYA, I. **Após Vygotsky e Piaget.** Perspectivas social e construtivista. Escolas russa e ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

BEDNARZ; N.; JANVIER, B. O. Un étude dês conceptions inapproprieés par lês efants dans l"apprentissage de la numération au primaire. **European Journal of Psychology of Education**, Lisboa,ISPA,v.1, n.2, p. 17-23,1986.

BRIZUELA, B. M. Relaciones entre representaciones: el caso de Jennifer, Nathan y Jeffrey. In: ALVARADO, M.; BRIZUELA, B. (Comp.). **Haciendo números.** Las notaciones numéricas vistas desde la psicologia, la didáctica y la historia. México: Paidós, 2005. p.198-219.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança**: explorando notações. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Jean Piaget, 1996.

BRUNER, J.S. The course of cognitive growth. **American Psychologist**, Washington, n. 19, p. 1-19, 1964.

CARRAHER, T.N. O desenvolvimento mental e o sistema de numeração decimal. In: ________ . (Org.). 2.ed. **Aprender pensando**: contribuições da psicologia cognitiva para a educação. Petrópolis: Vozes, 1982.

_________. The decimal system: understanding and notation. In: SREEFLAND, L. (Ed.). **Proceedings of te 9th International Conference for 9th Psychoology of Mathematics Education.** Utrecht, v. 1., p.288-303, 1985.

_________. **O método clínico**: usando os exames de Piaget. 5.ed. São Paulo: Cortez, 1998.

CARRAHER, T. N.;SCHLIEMANN, A. D. Fracasso escolar: uma questão social. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 45, p. 3-19, 1983.

CASTRO, E.; CASTRO, E. Representaciones y modelización. In: ROMERO, L.R. (Org.). **La educación matemática en la ensenãnza secundária**. Barcelona: Horsori, 1997. p. 95-124.

COBB, P; YACKEL, E.; WOOD, T. A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, v.23, n. 1, p. 2-33, 1992.

D'AMORE, B. Matemática em algumas culturas da América do Sul: uma contribuição à Etnomatemática. **Bolema**, Rio Claro, ano 16, n.19, p. 73-89, 2003.

DANYLUK, O. **Alfabetização Matemática**. As primeiras manifestações da escrita infantil. Porto Alegre: Sulina; Passo Fundo: EDIUPF, 1998.

DELVAL, J. **Introdução à prática do método clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. Porto Alegre: Artmed, 2002.

DUVAL, R.Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 11-34.

FONT, V. Algunos pountos de vista sobre las representaciones en didática de las matemáticas. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, Exeter, n. 14, may 2001. Disponível em: <http;//www. ex.ac.uk./%ePErnest/pome14/-contents.htm> Acesso em: 10 set. 2007.

FUSON, K. Conceptual structures for multiunit numbers:implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction and place value. **Cognition and Instruction**, New Haven, v. 7, n.4, p. 343-403, 1990.

FUSON, K. et al. Children’s conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition an subtraction. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston**,** v. 28, n. 2, p. 130-162, 1997.

GOLDIN, G.; KAPUT, J. A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In: STEFFE, N. ;GOLDIN, G. **Theories of Mathematical Learning**. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1996.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T. Learning and teaching with understanding. In: GROUWS, D.A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics Teaching and learning**. New York: Macmillan Publishing Company, p. 65-97, 1992.

HUGHES, M. **Children and number**. Cambridge, MA: Blackwell, 1986.

IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. 8.ed. São Paulo: Globo, 1996.

IFRAH, G.. **História Universal dos Algarismos:** A Inteligência dos Homens contada pelos números e pelo cálculo. Tomo 2. Rio de Janeiro:Nova Fronteira, 1997.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**. São Paulo: Pioneira, 1976.

INHELDER,B.; BOVET,M.;SINCLAIR, H. **Aprendizagem e estruturas do conhecimento**. São Paulo: Saraiva, 1977.

INHELDER, B.; CELLÉRIER, G. **O desenrolar das descobertas da criança**: um estudo sobre as microgêneses cognitivas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

INHELDER;B.; CAPRONA, D. Rumo ao construtivismo psicológico: estruturas? Procedimentos? Os dois “indissociáveis”. In: INHELDER, B.; CELLÉRIER, G. **O desenrolar das descobertas da criança**: um estudo sobre as microgêneses cognitivas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

KAMII, C.; JOSEPH, L. L. **Aritmética**: novas perspectivas. Campinas: Papirus, 1992.

__________. **Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética** (séries iniciais): implicações da teoria de Piaget. 2.ed. Porto Alegre: Artmed, 2005.

KAMII, C.; JOSEPH, L. L. **Aritmética**: novas perspectivas. Campinas: Papirus, 1992.

KAPUT, J. The representational roles of technolgy in connecting mathematics with authentic experience. In: BIER et al. (Eds.). **Mathematics didactics as a scientific discipline**. Dordecht, The Netherlands:Kluwer, 1994. Tradução em espanhol de Mariela Armenta Castro, Disponível em: <http://www.mat.uson.mx/calculadora/KAPUTMAC.htm>. Acesso em: 12 set. 2007.

KARMILOFF-SMITH, A. **Más allá de la modularidad**. La ciencia cognitiva desde la perspectiva del desarrolo. Madrid: Alianza Editorial, 1994.

KATO, Y et al. Young Children’s representations of groups of objects: the relationship betweem abstraction and representation. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston,v.3, n.1, p. 30-45, 2002.

KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna**.São Paulo: IBRASA, 1976.

KREBS, G; SQUIRE, S; BRYANT, P. Childrens’s understanding of the additive composition of number and of the decimal structure: what is the relationship? **International Journal of Educational Research**, Elsevier, v.39, n.7, p. 677-694, 2003.

LEE, K.; KARMILOFF-SMITH, A. The development of cognitive constraints on notations. **Archives de Psychologie**, n. 64 , p. 3-26, 1996.

LERNER, D. **A matemática na escola:** aqui e agora. 2.ed. Porto Alegre: Artmed, 1995.

_________ ?Tener éxito o comprender?Uma tensión costante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración. In: ALVARADO, M.; BRIZUELA, B. (Comp.). **Haciendo números**. Las notaciones numéricas vistas desde la psicologia, la didáctica y la historia. México: Paidós, 2005. p. 147-197.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. (Org.). **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, l996.

LURIA, A. R. On the pathology of computational operations. In: KILPATRIK;J.; WIRSZUP, I. (Eds.) **Soviet studies em the psychology of learning and teaching mathematics**. Chicago: University for Chicago Prees, 1969.

MARTÍ, E. **Representar el mundo externamente**. Madrid: Machado Livros, 2003.

_________. Aspectos semióticos dela evolución histórica de la aritmética y el álgebra. In: ALVARADO, M.; BRIZUELA, B. (Comp.). **Haciendo números**. Las notaciones numéricas vistas desde la psicologia, la didáctica y la historia. México: Paidós, 2005. p. 51-80.

MARTÍ, E. ;POZO, J. I. Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. **Infancia y Aprendizaje**,n. 90, p. 11-30, 2000.

MACARUSO, P.; MCCLOSKEY, M.;ALIMINOSA, D. The Functional Architectures of the Cognitive Numerical-processing System: evidence from a Patient with Multiple Impairments. **Cognitive Neuropsychology**, v. 10, n.4, p. 341-376, 1993.

MCCLOSKEY, M.;CARAMAZZA, A.; BASILI, A.M. Cognitive Mechanisms in Number Processing and Calculation: Evidence from Dyscalculia. **Brain and Cognition,** n.4, p. 171-196, 1985.

MORO, M. L.F. A epistemologia genética e a interação social de crianças. Psicologia: **Reflexão e Crítica**, Porto Alegre, v. 13, n. 2, 2000.

MORO, M. L.F. Estruturas multiplicativas e tomada de consciência: repartir para dividir. **Psicologia: Teoria e Pesquisa,** Brasília, v. 21, n. 2, maio/ago. 2005.

NOEL, M.; SERON, X. Arabic number reading deficit: A Single Case Study or When 236 is Read (2306) and Judged Superior to 1258. **Cognitive Neuropsychology**, v. 10, n. 4, p.317-339, 1993.

NOEL, M.;TURCONI, E. Assessing number transcoding in children. **European Review of Applied Psychology,** v. 49, n. 4, p. 295-302, 1999.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OROZCO, G. H.; HEDERICH, C. Construcción de la operación multiplicativa y del sistema notacional em base 10: uma relación posible. Informe técnico final. Centro de Investigaciones y Estúdios Avanzados em Psicologia, Cognición y Cultura. Universidad del Valle. Colômbia. Jul 2000. Disponível em: <redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/335/33590305.pdf.> Acesso em: 12 fev. 2007.

OROZCO, G. H..Construcción de la operación multiplicativa y del sistema notacional em base 10: uma relación posible. Informe técnico final. II Etapa. Centro de Investigaciones y Estúdios Avanzados em Psicologia, Cognición y Cultura. Universidad del Valle. Colômbia. Out. 2001. Disponível em: <redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/335/33590305.pdf.> Acesso em: 12 fev. 2007.

__________. Os erros sintáticos das crianças ao aprender a escrita dos numerais. In: MORO, M. L. F.; SOARES, M.T.C. **Desenhos, palavras e números**: as marcas da matemática na escola.(Orgs.). Curitiba: Editora da UFPR, 2005, p. 77-106.

ORRANTIA, J. **El aprendizaje de la aritméitca y sus dificultades**. Documento de trabalho do Curso de Doutorado da Universidade de Salamanca. Departamento de Psicologia Evolutiva y de la Educación. Mar., 2001. Fotocópia.

__________. **Las dificuldades en el aprendizaje del cálculo desde el punto de vista cognitivo**. Disponível em: <http://www.mec.es/cide/publicaciones/textos/col150/col15003.pdf.> File://A:\ Orrantia.htm. Acesso em: 30 ago 2004.

PERRET-CLERMONT, A.N. A construção da inteligência pela interação social. Lisboa: Sciocultur, 1978.

PIAGET, J. **Biologia e conhecimento.** Ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognoscitivos. Petrópolis: Vozes, 1973.

_________. **A tomada de consciência**. São Paulo: Melhoramentos; Ed. Da Universidade de São Paulo, 1977,

_________. **A formação do símbolo na criança**: imitação, jogo e sonho. Imagem e representação. Rio de Janeiro: Zahar, 1978a.

_________ . **Fazer e compreender**. São Paulo: Melhoramentos; Ed. da Universidade de São Paulo, 1978b.

__________. **Problemas de psicologia genética**. 5.ed. Lisboa: Don Quixote, 1983.

__________. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e de ordem nas relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A imagem mental na criança.** Estudo sobre o desenvolvimento das representações imagéticas. Porto: Livraria Civilização,1977.

POWER, R.D.; DAL MARTELLO, M.F. The dictation of Italian numerals. **Language and Cognitive Processes,** v.5, p. 237-254, 1990.

RICO, L.;CASTRO,E.;ROMERO, I. Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. In: LLERA, Jesus A. B. et al. **Intervención psicopedagógica y curriculum escolar**. Madrid: Ediciones Pirámide, 2000.

ROSS, S.; SUNFLOWER, E. **Place-value: problem-solving and written assessment using digit-correspondence tasks**. NCTM Meeting in San Diego. Disponível em: <http:// mathforum.org/mathed/nctm96/construct/ross/method.html>. Acesso em:6 jan. 2007.

SASTRE, G.; MORENO, M. Représentations graphiques de la quantitié.**Bulletin de Psychologie de l'Université de Paris**,Paris, n. 30, p. 346-355, 1976.

SCHEUER et al. Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. **Infancia y Aprendizaje**, n. 90, p. 31-50, 2000.

SELVA, A. C. V.; BRANDÃO, A.C.P. A notação escrita na resolução de problemas por crianças pré-escolares. **Psicologia: Teoria e Pesquisa,** Brasília,DF, v. 16, n.3, p.241-249, set./dez. 2000.

SEVILLA , Y. S. O.; OROZCO, M. H. Por qué 7345 se lee como "setenta y tres cuarenta y cinco? **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**. v.9, n. 3, p. 407-433, nov. 2006.

SERON, X.; FAYOL, M. Number transcoding in children: a functional analysis. **British Journal of Developmental Psychology**, v.12, p. 281-300, 1994.

SINCLAIR, A.; SINCLAIR, H. Preescchool children's interpretation of written numbers. **Human Learning**, n.3, p. 73-184, 1984.

SINCLAIR, A.; MELLO, D.; SIEGRIST, F. A notação numérica na criança. In: SINCLAIR, H. (Org.). **A produção de notações na criança**. São Paulo: Cortez, 1989.

SINCLAIR, A.; TIÈCHE CHRISTINAT, C.; GARIN, A. Constructing and understanding of place value. **European Journal of Psychology of Education**. v.7 n.3, p. 191-207, 1992.

SINCLAIR, H. **La production de notations chez le jeune enfant.** Langage, nombre, rythmes et melodies. Paris: Presses Universitaires de France, 1988.

TEIXEIRA, L. R. M. As representações da escrita numérica: questões para pensar o ensino e a aprendizagem. In: MORO, M.L.F.; SOARES, M.T.C. **Desenhos, palavras e números: as marcas da matemática na escola**. (Orgs.). Curitiba: Editora da UFPR, 2005. p. 19-38.

_________ .Interpretação da numeração escrita. In: BRITO, M.R.F. (Org.). **Solução de problemas e a matemática escolar.**Campinas, SP: Alínea, 2006.

TEIXEIRA, L. R. M.; FLEURY, I.;YESSAD, Y. A aprendizagem inIcial do valor posicional dos números: In: NOVAES ,M.H. e BRITO,M.R.F.(Org.). **Psicologia na educação:** articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica. Coletâneas da ANPEPP. Rio de Janeiro, v.1, n.5, set.1996.

TOLCHINSKY, L. Desenhar, escrever, fazer números. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. (Org.). **Além da alfabetização.** A aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo, SP: Ática, 1997.

__________. **Aprendizagem da linguagem escrita**: processos evolutivos e implicações didáticas. 3.ed. São Paulo, SP: Ática, 2002.

TOLCHINSKY, L; KARMILOFF-SMITH, A. Children's understanding of notations as domain of knowledge versus referential-communicative tools. **Cognitive Development**, n.7, p. 287-300, 1992.

__________. Las restricciones del conocimiento notacional. **Infância y aprendizaje**, n.62-62, p. 19-54,1993.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie operatoire de la représentation. **Revista Psychologie Française**, n.30, p. 245-252, nov.1985. (Tradução Anna Franchi e Dione Luchesi de Carvalho, mimeografada)

__________. Piaget, Vigotsky – Convergências e controvérsias. **Revista do GEEMPA**, Porto Alegre, n.2, p.75-83, nov. 1993.

__________. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Jean Piaget, 1996a. p. 155-191.

__________. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEEMPA**, Porto Alegre, n.4, p.9-19, jul.1996b.

_________. Entrevista. **Revista Pátio**,Porto Alegre, ano 2, n. 5, p. 23-25, maio,jul. 1998.

VYGOTSKI, L. S. **Thought and language**. Cambridge, MA:MIT Press, 1962.

VON GLASERSFELD, E. **Construtivismo radical.** Uma forma de conhecer e aprender. Lisboa: Instituto PIAGET, 1995.

__________. Aspects of radical constructuvism and its educational recomendation. In: STEFFE, Nesher, COOB, Goldin, Greer. **Theories of Mathematical Learning**. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1996.

APÊNDICE – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Pelo presente documento, eu, ________________________________, portador (a) do doc. de identidade nº _______________________ , autorizo meu filho (a)____ a participar das entrevistas relacionadas à pesquisa de Doutorado da professora Neila Tonin Agranionih intitulada: Escritas numéricas de milhares e valor posicional: um estudo sobre as concepções iniciais das crianças", sob a orientação da Professora Doutora Beatriz Vargas Dorneles da Universidade Federal do Rio Grande Do Sul.

Estou ciente de que o objetivo do estudo é definir as contribuições das notações de números multidígitos à conceituação do valor posicional do número característico do sistema de numeração decimal, bem como verificar as formas cognitivas por meio das quais estas contribuições se efetivam.

Fui informada (o) de que os procedimentos serão compostos de entrevistas videogravadas realizadas com meu filho (a), individualmente ou em pequenos grupos, durante o horário de aula. Estou ciente de que em parte alguma do trabalho impresso, nem nas defesas de projeto e dissertação os nomes das crianças e do local da pesquisa de campo serão revelados. Em relação aos vídeos, estou ciente de que os mesmos somente serão exibidos com minha autorização prévia. Estou ciente, também, de que serei informada (o) dos resultados do mesmo, se assim o desejar.

Para contribuir com o avanço do conhecimento matemático na área educacional, declaro ceder à pesquisa referida a plena propriedade e os direitos autorais dos depoimento prestado por meu/minha filho(a) durante as sessões de pesquisa. A autora da pesquisa fica, conseqüentemente, autorizada a utilizar, divulgar e publicar, para fins culturais, os dados das entrevistas.

____

Pai / Mãe ou responsável

Data: ____________________