

**MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ANÁLISE
TRIDIMENSIONAL DE ESTRUTURAS DE CONCRETO
ARMADO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS**

Giuliana Furtado Franca Bono

Porto Alegre
Abril de 2008

GIULIANA FURTADO FRANCA BONO

**MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ANÁLISE
TRIDIMENSIONAL DE ESTRUTURAS DE CONCRETO
ARMADO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Porto Alegre
Abril de 2008

B719m Bono, Giuliana Furtado Franca
Modelos constitutivos para análise tridimensional de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos / Giuliana Furtado Franca Bono. – 2008.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2008.

Orientação: Prof. Dr. Américo Campos Filho

1. Estruturas de concreto armado. 2. Elementos finitos. 3. Modelos matemáticos. I. Campos Filho, Américo, orient. II. Título.

CDU-624.012.45(043)

GIULIANA FURTADO FRANCA BONO

**MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ANÁLISE
TRIDIMENSIONAL DE ESTRUTURAS DE CONCRETO
ARMADO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS**

Porto Alegre, 4 de Abril de 2008

Prof. Américo Campos Filho

Doutor pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Orientador

Prof. Fernando Schnaid

Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Henriette Lebre La Rovere (UFSC)

Ph.D. pela University of California – San Diego

Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)

Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Samir Maghous (UFRGS)

Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées

*Ao meu marido Gustavo, pelo
apoio, incentivo e amor imensuráveis.
E à nossa filha Camila, que trouxe
uma imensa alegria às nossas vidas.*

AGRADECIMENTOS

Ao chegar ao fim de mais essa etapa de minha vida, gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos...

À Deus por tornar tudo possível.

Ao meu orientador, Prof. Américo Campos Filho, pela orientação, amizade e pelo constante estímulo durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Henriette Lebre, Mauro Real e Alexandre Pacheco pela colaboração e valiosas informações transmitidas durante o meu exame de qualificação.

Aos colegas do laboratório CEMACOM, pela convivência, cooperação e amizade.

Aos grandes amigos e compadres, Aline e Charlei, pela alegria de convívio diário e pela grande amizade que se consolidou durante estes anos de convivência.

Aos meus pais, pelo apoio e incentivo em toda a minha vida.

Aos meus irmãos, pela amizade, apoio e carinho.

De forma muito especial, agradeço ao meu marido e à minha filha, que iluminam o meu caminho e trazem amor e paz à minha vida.

Nas grandes batalhas da vida, o primeiro passo para a vitória é o desejo de vencer.

Mahatma Gandhi

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xvii
LISTA DE SÍMBOLOS	xix
RESUMO	xxvi
ABSTRACT	xxvii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.2. MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS DA PESQUISA	3
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	4
2. MODELAGEM DOS MATERIAIS	6
2.1. GENERALIDADES	6
2.2. O CONCRETO	8
2.2.1. O comportamento do concreto	8
2.2.2. Modelos para o concreto	13
2.3. O AÇO	17
2.3.1. O Comportamento do aço	17
2.3.2. Modelos para o aço	20
2.4. ADERÊNCIA	23
2.5. CONCRETO FISSURADO	24
3. MODELAGEM DO CONCRETO	26
3.1. MODELO ELÁSTICO NÃO-LINEAR ORTOTRÓPICO	26
3.1.1. Lei constitutiva tridimensional	27
3.1.2. Deformação uniaxial equivalente	30
3.1.3. Curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes para cargas monótonas ...	34
3.1.4. A superfície de ruptura para o concreto	39
3.1.4.1. Características das superfícies de ruptura do concreto	39
3.1.4.2. A superfície de Willam-Warnke (1975)	43
3.1.4.3. A superfície de Ottosen (1977)	46
3.1.4.4. Determinação das tensões de pico (f_{c1} , f_{c2} , f_{c3})	47
3.1.4.5. Determinação das deformações de pico (ε_{c1} , ε_{c2} , ε_{c3})	50
3.1.5. Ponto de controle da curva de Popovics-Saenz	51

3.1.6. Concreto fissurado e esmagado	52
3.1.7. Coeficiente de Poisson	53
3.1.8. Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para cargas cíclicas	54
3.1.9. Critério de carga, descarga e recarga	58
3.1.10. Transformação das equações constitutivas	59
3.1.11. Conceito de eixos de referência girando	61
3.1.12. Implementação do modelo numérico para o concreto	65
3.2. ESTUDOS COMPARATIVOS	67
3.2.1. Ensaio uniaxiais	67
3.2.2. Ensaio de compressão biaxial	71
3.2.3. Ensaio de tração biaxial	75
3.2.4. Ensaio de compressão-tração	79
3.2.5. Ensaio com carga de compressão axial cíclica	83
4. MODELAGEM DO AÇO	85
4.1. MODELO PROPOSTO	85
4.1.1. Modelo Menegotto e Pinto (1973)	86
4.1.2. Modelo constitutivo bilinear	91
4.2. ESTUDOS COMPARATIVOS	93
5. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	99
5.1. INTRODUÇÃO	99
5.2. ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO	101
5.2.1. Campo de deslocamentos	101
5.2.2. Campo de deformações específicas	104
5.2.3. Campo de tensões	106
5.2.4. Equações de equilíbrio	107
5.2.5. Regra de integração numérica	111
5.3. ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA	113
5.3.1. Modelo incorporado	115
5.3.1.1. Formulação geométrica	116
5.3.1.2. Determinação dos segmentos de armadura localizados no interior de um elemento de concreto	120
5.3.2. Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para a armadura	127
5.4. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES	130
5.4.1. Método de Newton-Raphson	131
5.4.2. Método de Newton-Raphson com rigidez inicial	134

5.4.3. Critério de convergência	135
5.5. TRATAMENTO DOS DESLOCAMENTOS PRESCRITOS NA ESTRUTURA	135
6. COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL DO MODELO NUMÉRICO.....	137
6.1. TIRANTES DE CONCRETO ARMADO	138
6.1.1. Estudo Comparativo I	139
6.1.2. Estudo Comparativo II	145
6.2. VIGAS DE CONCRETO ARMADO	150
6.2.1. Estudo Comparativo dos resultados	154
6.3. PILARES DE CONCRETO ARMADO	157
6.3.1. Confinamento	157
6.3.2. Estudo comparativo	159
6.4. PAREDE SOLICITADA POR CARGA CÍCLICA	163
6.4.1. Detalhes da parede ensaiada por Oesterle et al. (1978).....	163
7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS	167
7.1. CONCLUSÕES	167
7.2. SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA	174
Referências Bibliográficas	176

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2

Figura 2.1: Resposta carga-deslocamento típica de uma peça fletida de concreto armado.	7
Figura 2.2: Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão uniaxial.....	8
Figura 2.3: Curva tensão-deslocamento para o concreto sob tração uniaxial.....	9
Figura 2.4: Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão biaxial	10
Figura 2.5: Curva tensão-deformação para o concreto sob tração-compressão biaxial.....	10
Figura 2.6: Curva tensão-deformação para o concreto sob tração biaxial.....	10
Figura 2.7: Curva da deformações específicas volumétricas do concreto em ensaios de compressão uniaxial e biaxial	11
Figura 2.8: Curvas tensão-deformação em ensaios de compressão multiaxial.....	12
Figura 2.9: Curva tensão-deformação para o concreto solicitado por carga cíclica de compressão uniaxial.....	13
Figura 2.10: Diagrama tensão-deformação para o aço com patamar de escoamento.....	17
Figura 2.11: Diagrama tensão-deformação para o aço sem patamar de escoamento.....	18
Figura 2.12: Curvas típicas para barras de armadura.....	19
Figura 2.13: Principais características do diagrama tensão-deformação do aço.....	20
Figura 2.14: Aproximação elasto-plástica perfeita.....	21
Figura 2.15: Aproximação elástica com endurecimento linear.....	21
Figura 2.16: Aproximação trilinear para o aço.....	21
Figura 2.17: Curva completa para o aço.....	22
Figura 2.18: Mecanismos de transferência de esforços.....	24
Figura 2.19: Modelos empregados na modelagem das fissuras	25

CAPÍTULO 3

Figura 3.1: Deformação uniaxial equivalente para um material elástico-linear.....	31
Figura 3.2: Gráfico ilustrativo do modelo proposto por Saenz (1964).....	35
Figura 3.3: Curvas tensão-deformação para o concreto submetido a cargas monótonas...	38
Figura 3.4: Superfície de ruptura para o concreto.....	41
Figura 3.5: Características das superfícies de ruptura	41
Figura 3.6: Modelo de Willam-Warnke (1975): meridianos de tração e compressão.....	44

Figura 3.7: Modelo de Ottosen (1977) : meridianos de tração e compressão.....	47
Figura 3.8: Determinação das tensões de pico (f_{c1} , f_{c2} , f_{c3}) do concreto.....	48
Figura 3.9: Segunda alternativa para determinação das tensões de pico (f_{c1} , f_{c2} , f_{c3}) do concreto: situações com estado de tensão de compressão triaxial.....	50
Figura 3.10: Ilustração do <i>Ponto de focal</i>	55
Figura 3.11: Comportamento do concreto submetido a carregamento cíclico: curva de carga em compressão.....	56
Figura 3.12: Comportamento do concreto submetido a carregamento cíclico: curva de carga em compressão.....	56
Figura 3.13: Mesma história de carga aplicada em dois diferentes sistemas de eixos de referência: <i>sistema de referência 1</i> e <i>sistema de referência 2</i>	63
Figura 3.14: Ensaios experimentais realizados por Kupfer (1973): placas de concreto sob carregamento biaxial.....	67
Figura 3.15: Ensaio de compressão uniaxial: $f_c = 1,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$	68
Figura 3.16: Ensaio de compressão uniaxial: $f_c = 3,24 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$	69
Figura 3.17: Ensaio de tração uniaxial: $f_c = 1,69 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$	70
Figura 3.18: Ensaio de tração uniaxial: $f_c = 2,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$	70
Figura 3.19: Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,525$): $f_c = 1,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$	72
Figura 3.20: Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,226$): $f_c = 1,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$	72
Figura 3.21: Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,525$): $f_c = 3,24 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$	73
Figura 3.22: Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,226$): $f_c = 3,24 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$	73
Figura 3.23: Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 1,0$): $f_c = 1,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$	74
Figura 3.24: Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 1,0$): $f_c = 3,24 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$	74

Figura 3.25: Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1 = 1,0$): $f_c = 1,69 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$	76
Figura 3.26: Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1 = 0,537$): $f_c = 1,69 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$	77
Figura 3.27: Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1 = 0,244$): $f_c = 1,69 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$	77
Figura 3.28: Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1 = 1,0$): $f_c = 2,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$	78
Figura 3.29: Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1 = 0,546$): $f_c = 2,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$	78
Figura 3.30: Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1 = 0,232$): $f_c = 2,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$	79
Figura 3.31: Ensaio de compressão-tração ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,102$): $f_c = 1,92 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$	80
Figura 3.32: Ensaio de compressão-tração ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,07$): $f_c = 3,23 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,195$	80
Figura 3.33: Ensaio de compressão-tração ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,204$): $f_c = 3,23 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,195$	81
Figura 3.34: Ensaio de compressão-tração ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,102$): $f_c = 6,0 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,24$	81
Figura 3.35: Ensaio de compressão-tração ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,204$): $f_c = 6,0 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,24$	82
Figura 3.36: Comparação dos critérios de ruptura com ensaios biaxiais realizados por Kupfer (1973)	82
Figura 3.37: Ensaios experimentais realizados por Sinha et al. (1964): corpos-de-prova cilíndricos sob carga de compressão axial cíclica	83
Figura 3.38: Ensaios experimental e numérico com carga cíclica: $f_c = 2,65 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,20$	84

CAPÍTULO 4

Figura 4.1: Modelo constitutivo bilinear para o aço.....	86
Figura 4.2: Diagrama para o aço: início do processo cíclico com carga de tração uniaxial.....	87
Figura 4.3: Diagrama para o aço: início do processo cíclico com carga de compressão uniaxial.....	88
Figura 4.4: Gráfico ilustrativo do comportamento cíclico adotado para o aço.....	90
Figura 4.5: Diagrama para o aço: início do processo cíclico com carga de tração uniaxial.....	92
Figura 4.6: Diagrama para o aço: início do processo cíclico com carga de compressão uniaxial.....	93
Figura 4.7: Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Kent e Park (1973) <i>apud</i> Balan et al. (1998): <i>ensaio 6</i>	94
Figura 4.8: Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Kent e Park (1973) <i>apud</i> Balan et al. (1998): <i>ensaio 8</i>	94
Figura 4.9: Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Kent e Park (1973) <i>apud</i> Balan et al. (1998): <i>ensaio 15</i>	95
Figura 4.10: Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Kent e Park (1973) <i>apud</i> Balan et al. (1998): <i>ensaio 17</i>	95
Figura 4.11: Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Panthaki (1991) <i>apud</i> Balan et al. (1998): <i>ensaio P2</i>	96
Figura 4.12: Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Panthaki (1991) <i>apud</i> Balan et al. (1998): <i>ensaio P16</i>	96
Figura 4.13: Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Seckin (1981) <i>apud</i> Elmorsi et al. (1998): <i>ensaio BR01</i>	97
Figura 4.14: Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Seckin (1981) <i>apud</i> Elmorsi et al. (1998): <i>ensaio BR07</i>	97

CAPÍTULO 5

Figura 5.1: Discretização de uma viga em elementos isoparamétricos quadráticos.....	100
Figura 5.2: Sólido tridimensional. Vetor de deslocamentos em um ponto.....	101
Figura 5.3: Elementos hexaédricos: (a) linear ; (b) quadrático.....	103
Figura 5.4: Elemento hexaédrico: (a) com 15 pontos de integração; (b) com 6 pontos de	

integração	112
Figura 5.5: Modelo discreto para armadura.....	114
Figura 5.6: Modelo distribuído para armadura.....	114
Figura 5.7: Modelo incorporado para armadura.....	115
Figura 5.8: Elementos isoparamétricos unidimensionais: (a) linear ; (b) quadrático.....	118
Figura 5.9: Coordenada ao longo do eixo da armadura.....	119
Figura 5.10: Curva de definição da barra de aço.....	122
Figura 5.11: P_l dentro do elemento de concreto.....	125
Figura 5.12: P_l e P_{np} dentro do elemento de concreto.....	125
Figura 5.13: Segmento que liga P_l e P_{np} intercepta o elemento de concreto.....	125
Figura 5.14: Segmento que liga P_l e P_{np} não intercepta o elemento de concreto.....	126
Figura 5.15: Segmento de armadura dentro do elemento de concreto.....	126
Figura 5.16: Método de Newton-Raphson: caso uniaxial.....	133
Figura 5.17: Método de Newton-Raphson modificado: caso uniaxial.....	134

CAPÍTULO 6

Figura 6.1: Curva tensão-deformação média do concreto armado submetido à tração uniaxial.....	138
Figura 6.2: Tirante de concreto armado.....	141
Figura 6.3: Diagrama tensão-deformação específica na barra: $Taxa=0,50\%$	143
Figura 6.4: Diagrama tensão-deformação específica na barra: $Taxa =0,75\%$	143
Figura 6.5: Diagrama tensão-deformação específica na barra: $Taxa =1,00\%$	144
Figura 6.6: Diagrama tensão-deformação específica na barra: $Taxa =1,50\%$	144
Figura 6.7: Diagrama tensão-deformação específica na barra: $Taxa =3,00\%$	145
Figura 6.8: Tirantes testados por Rizkalla et al. (1983).....	146
Figura 6.9: Ensaio #1 realizado por Rizkalla et al. (1983).....	147
Figura 6.10: Ensaio #2 realizado por Rizkalla et al. (1983).....	147
Figura 6.11: Ensaio #3 realizado por Rizkalla et al. (1983).....	148
Figura 6.12: Ensaio #4 realizado por Rizkalla et al. (1983).....	148
Figura 6.13: Ensaio #5 realizado por Rizkalla et al. (1983).....	149
Figura 6.14: Ensaio #6 realizado por Rizkalla et al. (1983).....	149
Figura 6.15: Ensaio #7 realizado por Rizkalla et al. (1983).....	150
Figura 6.16: Detalhes das seções transversais das vigas de Bresler e Scordelis (1963)...	152

Figura 6.17: Desenho esquemático das vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963).	153
Figura 6.18: Discretização e condições de contorno adotadas para análise computacional das vigas ensaiadas por Bresler-Scordelis (1963).....	154
Figura 6.19: Resultados comparativos com as vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963): Série 1.....	155
Figura 6.20: Resultados comparativos com as vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963): Série 2.....	155
Figura 6.21: Resultados comparativos com as vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963): Série 3.....	156
Figura 6.22: Mecanismo do efeito de confinamento.....	158
Figura 6.23: Características geométricas dos pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989).....	160
Figura 6.24: Efeito do espaçamento de estribos na resposta axial do pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989): <i>ensaios #3 e #4</i>	161
Figura 6.25: Efeito do espaçamento de estribos na resposta axial do pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989): <i>ensaio #7</i>	162
Figura 6.26: Efeito do espaçamento de estribos na resposta axial do pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989): <i>ensaios #15 e #16</i>	162
Figura 6.27: Detalhes da seção transversal da parede R2 ensaiada por Oesterle et al. (1978).....	165
Figura 6.28: Discretização em elementos finitos que foi adotada para análise computacional da parede R2 ensaiada por Oesterle et al. (1978)	166
Figura 6.29: Resultados comparativos da parede R2 ensaiada por Oesterle et al. (1978)	166

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 3

Tabela 3.1: Efeito do tipo de agregado no modelo de elasticidade do concreto.....	39
Tabela 3.2: Valores de tensões e deformações obtidos a partir de uma mesma história de carga aplicada em dois sistemas de eixos de referência diferentes.....	64
Tabela 3.3: Fluxograma do modelo constitutivo para o concreto.....	66

CAPÍTULO 4

Tabela 4.1: Propriedades do aço.....	90
Tabela 4.2: Propriedades do aço. Ensaios realizados por Kent e Park (1973) <i>apud</i> Balan et al. (1998): <i>ensaios 6, 8, 15 e 17</i>	94
Tabela 4.3: Propriedades do aço. Ensaios realizados por Panthaki (1991) <i>apud</i> Balan et al. (1998): <i>ensaios P2 e P16</i>	95
Tabela 4.4: Propriedades do aço. Ensaios realizados por Seckin (1981) <i>apud</i> Elmorsi et al. (1998): <i>ensaios BR01 e BR07</i>	97

CAPÍTULO 5

Tabela 5.1: Coordenadas naturais para o elemento hexaédrico de linear.....	103
Tabela 5.2: Fatores de peso e coordenadas dos pontos de integração no sistema de coordenadas naturais.....	112

CAPÍTULO 6

Tabela 6.1: Propriedades dos materiais (concreto e aço).....	141
Tabela 6.2: Dados para os ensaios realizados por Rizkalla et al. (1983).....	146
Tabela 6.3: Detalhes das vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963).....	151
Tabela 6.4: Propriedades dos materiais utilizados nas vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963)	153
Tabela 6.5: Resultados obtidos nas vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963).....	154

Tabela 6.6: Propriedades dos materiais utilizados nos pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989).....	159
Tabela 6.7: Resultados obtidos nos pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989).....	163
Tabela 6.8: Propriedades dos materiais utilizados na parede R2 ensaiada por Oesterle et al. (1978).....	164

SÍMBOLOS

LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

A_c	: área de concreto tracionado
A_s	: área da seção transversal da barra de armadura
$(\mathbf{A}_L)_s^e$: vetor de ações nodais lineares equivalentes para a armadura
$(\mathbf{A}_{NL})_s^e$: vetor de ações nodais não-lineares equivalentes da armadura
\mathbf{B}	: matriz de deformação específica do elemento finito
\mathbf{B}_i	: matriz de deformação específica do nó i
\mathbf{B}_s	: vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura
A, B, C	: fatores de peso usados na integração numérica
\mathbf{D}	: matriz constitutiva referente ao sistema de eixos coordenados global
\mathbf{D}_o	: matriz constitutiva referente ao sistema de eixos coordenados local
D_{ijkl}^s	: tensor de rigidez secante do material
D_{ijkl}^t	: tensor de rigidez tangente do material
E_c	: módulo de deformação longitudinal do concreto intacto
E_i	: módulo de elasticidade secante na direção de ortotropia i
E_o	: módulo de elasticidade inicial do concreto
E_{di}	: módulo de elasticidade no ponto onde iniciou a descarga para a direção de ortotropia i
E_{oi}^t	: módulo de elasticidade no ponto de descarga anterior para a direção de ortotropia i
E_s	: módulo de elasticidade longitudinal do aço
E_{so}	: módulo de elasticidade inicial do aço
E_{s1}	: módulo de elasticidade tangente do trecho de endurecimento do aço

F_{local}	: função de carga local para identificar o processo de descarga e recarga
F_{max}	: máximo valor da função de carga F , em um determinado passo de carga anterior
G_{ij}	: módulo de elasticidade transversal no plano $i - j$
$H(\chi)$: funções de interpolação unidimensionais, expressas em termo de uma coordenada normalizada independente χ
I_1	: primeiro invariante do tensor de tensões
J_2	: segundo invariante do tensor desviador de tensões
J_3	: terceiro invariante do tensor desviador de tensões
\mathbf{K}_L^e	: matriz de rigidez linear do elemento
\mathbf{K}_L	: matriz de rigidez linear global da estrutura
\mathbf{K}_{sl}^e	: matriz de rigidez da armadura contida em um dado elemento de concreto
\mathbf{K}_c	: matriz de rigidez do elemento de concreto
\mathbf{K}_o	: matriz de rigidez inicial
\mathbf{K}_{si}	: matriz de rigidez do segmento de armadura i , contido no interior elemento de concreto
N	: carga axial aplicada
N_r	: carga axial aplicada imediatamente após a formação da 1ª fissura
N_i	: função de forma correspondente ao nó i do elemento finito
N_{inc}	: número de incrementos de carga que serão aplicadas à estrutura
$\mathbf{P}_{NL}^e(\mathbf{U}^e)$: vetor de ações nodais internas não-lineares do elemento finito
$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{U})$: vetor de forças não-lineares da estrutura
\mathbf{P}_{ext}^e	: vetor de ações nodais equivalentes às cargas externas aplicadas sobre o elemento finito
\mathbf{P}_{ext}	: vetor de cargas nodais aplicadas sobre a estrutura
\mathbf{P}_i	: vetor de cargas em uma determinada etapa de carga i

\mathbf{PT}_{ext}	: vetor total de cargas externas;
\mathbf{Q}_{cn}	: vetor de forças internas aplicadas ao elemento de concreto;
\mathbf{Q}_{sni}	: vetor de forças internas aplicadas ao segmento de armadura i , contido no interior elemento de concreto
R	: parâmetro que influencia a forma da curva de transição do aço e representa o efeito Bauschinger
R_o	: parâmetros experimentais usados na curva tensão-deformação do aço
$\mathbf{T}_\epsilon, \mathbf{T}_\sigma$: matrizes que transformam deformações específicas e tensões globais em locais
\mathbf{U}	: vetor de deslocamentos nodais globais da estrutura
\mathbf{U}^e	: vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto
V, S	: volume e superfície carregada, respectivamente, de um elemento finito no sistema indeformado
V_s	: volume da armadura

LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$: constantes usadas na superfície de ruptura proposta por Willam-Warnke (1975)
a_1, a_2	: parâmetros experimentais usados na curva tensão-deformação do aço
b	: relação de endurecimento do aço
\mathbf{b}, \mathbf{t}	: vetores de forças de volume e de superfície, respectivamente
b, c	: coordenadas dos pontos de integração no sistema de coordenadas naturais do elemento
$d\sigma_{ij}$: tensor de incrementos de tensões
$d\epsilon_{kl}$: tensor de incrementos de deformações específicas
$\det \mathbf{J}$: determinante da matriz Jacobiana do elemento
f_c	: resistência à compressão uniaxial do concreto
f_{ci}	: resistência do concreto na direção de ortotropia i (tensão de pico)

f_{cc}	: resistência à compressão biaxial do concreto
f_{fi}	: tensões do ponto de controle na direção de ortotropia i
f_{su}	: tensão última do aço
f_t	: resistência à tração uniaxial do concreto
$f(\chi)$: função de posição ao longo da barra de armadura
f_y	: tensão de escoamento do aço
l_i, m_i, n_i	: cossenos diretores entre os eixos locais e os eixos globais
nc	: número total de incrementos de carga
np	: número de nós do elemento finito
np	: número de pontos que definem a barra de armadura
ng	: número de pontos de integração em cada direção do elemento
nb	: número de segmentos de armadura contidos no interior do elemento de concreto
u, v, w	: deslocamentos de um ponto segundo os eixos cartesianos x, y e z , respectivamente
w_i, w_j, w_k	: fatores de peso usados na integração numérica
x_i, y_i, z_i	: coordenadas globais dos nós do elemento de concreto

LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ	: incremento
ΔF_{local}	: incremento da função de carga local entre dois passos consecutivos
$\Delta \mathbf{U}_r$: vetor incremental de deslocamentos
$\Delta \mathbf{P}$: vetor incremental de cargas externas

LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

σ	: tensão corrente
σ_{ij}	: tensor de tensões
σ_i	: tensão principal corrente na direção de ortotropia i

σ_m	: tensão normal média
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: tensões principais
σ_{oct}^c	: tensão normal octaédrica corrente
σ_s	: tensão na barra de armadura
σ_{di}	: tensão principal na direção i no momento em que ocorreu a <i>descarga</i>
σ_{ri}	: tensão principal na direção i no momento em que ocorreu a <i>recarga</i>
σ_{oi}	: tensão do <i>ponto focal</i> correspondente a direção i
σ_r^2	: tensão do último ponto antes de ocorrer a recarga
σ_s^*	: tensões normalizadas
σ_{sr1}	: tensão na armadura imediatamente após a formação da 1ª fissura
σ_{srn}	: tensão na armadura no instante da formação da última fissura
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: tensões normais, nas direções x, y e z , respectivamente
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: tensões tangenciais
τ_{oct}^c	: tensão de corte octaédrica corrente
ε	: deformação específica corrente
ε_{kl}	: tensor de deformações específicas
ε_s	: deformação genérica no aço
ε_y	: deformação específica correspondente à tensão de escoamento do aço
ε_{su}	: deformação específica correspondente à tensão última do aço
ε_{ui}	: deformação uniaxial equivalente na direção de ortotropia i
ε_{ci}	: deformação específica de pico do concreto na direção ortotrópica i
ε_{fi}	: deformações específicas do ponto de controle na direção de ortotropia i
ε_c	: deformação correspondente à f_c
ε_{ctu}	: deformação limite para a colaboração do concreto entre fissuras

ε_{oi}	: deformação específica do <i>ponto focal</i> correspondente a direção i
ε_{di}	: deformação específica uniaxial equivalente na direção i no momento em que ocorreu a <i>descarga</i>
ε_{ri}	: deformação específica uniaxial equivalente na direção i no momento em que ocorreu a <i>recarga</i>
ε_s^*	: deformação específica normalizada, correspondente à σ_s^*
ε_{s1}	: deformação no concreto antes de sofrer fissuração
ε_{s2}	: deformação da armadura calculada no estágio II
ε_{sr1}	: deformação correspondente à tensão σ_{sr1} no estágio I
ε_{sr2}	: deformação da armadura no estágio II no instante da 1ª fissura
ε_r^1	: deformação específica do último ponto antes de ocorrer a descarga
ε_r^2	: deformação específica do último ponto antes de ocorrer a recarga
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: deformações específicas normais nas direções x, y e z , respectivamente
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: deformações tangenciais
θ	: ângulo de orientação do estado de tensão no plano desviador
ϕ	: energia potencial de deformação
ν_{ij}	: coeficiente de Poisson
ν_{ii}	: coeficiente de Poisson para a direção uniaxial equivalente i
ν_o	: coeficiente de Poisson inicial
ρ	: componente de tensão perpendicular ao eixo hidrostático
ρ	: taxa de armadura
$\rho_f(\sigma_m, \theta)$: curva de ruptura nos planos desviadores
ρ_t	: componentes de tensões perpendiculares ao eixo hidrostático para $\theta = 0^\circ$
ρ_c	: componentes de tensões perpendiculares ao eixo hidrostático para $\theta = 60^\circ$
α	: relação entre o módulo de elasticidade do aço e do concreto
α_t	: coeficiente de redução da tensão de fissuração

α_E	: coeficiente que depende do tipo de agregado
ξ, η, ζ	: coordenadas naturais normalizadas
$\xi_i, \eta_i, \text{ e } \zeta_i$: coordenadas naturais correspondentes ao nó i
$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$: vetor de deformações virtuais
$\delta \mathbf{u}$: vetores de deslocamentos virtuais
$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right)_r$: matriz de $n \times n$, sendo n igual ao número de graus de liberdade da estrutura
$\boldsymbol{\Psi}_r$: vetor de forças desequilibradas

RESUMO

BONO, G.F.F. Modelos Constitutivos para Análise Tridimensional de Estruturas de Concreto Armado através do Método dos Elementos Finitos. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Neste trabalho apresenta-se um modelo numérico abrangente para análise tridimensional de estruturas de concreto armado submetidas a cargas monótonas e cíclicas, utilizando o método dos elementos finitos. O modelo constitutivo proposto para o concreto é um modelo ortotrópico que segue a teoria de elasticidade não-linear. Neste modelo, aplica-se o conceito de deformação uniaxial equivalente para determinar o comportamento triaxial do concreto, através de três curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes, facilitando a simulação de seu comportamento e permitindo uma boa aproximação com os resultados experimentais. O modelo descreve bem a resposta do concreto solicitado por diversos tipos de carregamentos, sendo capaz de representar o esmagamento e a fissuração do concreto. A implementação em elementos finitos está baseada na consideração de fissuras distribuídas com as fissuras girando segundo as direções de tensões principais. Para a simulação de cargas cíclicas, considera-se a curva de *Popovics-Saenz* modificada, introduzindo-se algumas alterações nas coordenadas da origem e do pico desta curva tensão-deformação uniaxial equivalente, quando o concreto for submetido a processos de descarga e recarga. O comportamento do aço é descrito por um modelo constitutivo uniaxial. Para modelar este comportamento quando solicitado por cargas monótonas, considera-se uma curva tensão-deformação elástica bilinear com endurecimento. Para simulação da resposta cíclica do aço, utiliza-se um modelo constitutivo não-linear. Este modelo consegue representar bem o comportamento cíclico do aço, simulando a sua resposta não-linear, após alternância de carga. Os modelos constitutivos dos materiais foram implementados em um programa computacional, que utiliza o Método dos Elementos Finitos, para estruturas de concreto armado. Este programa em Elementos Finitos utiliza elementos isoparamétricos hexaédricos lineares e quadráticos para o concreto. Para representar as barras de armadura, utilizou-se um modelo incorporado. Por fim, para comprovar a eficiência do modelo numérico proposto, realizaram-se diversas simulações numéricas com concreto simples e armado. As comparações com resultados de ensaios demonstraram uma ótima concordância das previsões do modelo numérico com os valores experimentais.

ABSTRACT

BONO, G.F.F. Modelos Constitutivos para Análise Tridimensional de Estruturas de Concreto Armado através do Método dos Elementos Finitos. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

In this work, a 3D finite element model for analyses of reinforced concrete structures subjected to monotonic and cyclic loads is presented. The constitutive model proposed for the concrete is an orthotropic model that follows the nonlinear elasticity theory. In this model, the concept of equivalent uniaxial strain is applied for determination of the triaxial behavior of the concrete through three equivalent uniaxial stress-strain curves, which makes it easier to simulate the concrete's behavior and allows a good approximation with experimental results. The model describes well the response of concrete when subjected to several loading types, being capable of representing crushing and cracking of concrete. The implementation in finite elements is based upon the consideration of smeared cracks with them rotating according to principal stresses' directions. For simulation of the concrete's behavior under cyclic loads, the modified *Popovics-Saenz* curve has been considered, with some changes in the coordinates of the origin and of the peak of this equivalent uniaxial stress-strain curve, when the concrete is subjected to unloading and reloading processes. The behavior of the steel is described by an uniaxial constitutive model. To model this behavior when subjected by monotonic loads, an elastic bilinear stress-strain curve with strain hardening is considered. For simulation of the cyclic response of the steel, a nonlinear constitutive model is used. This model can well represent the cyclic behavior of the steel, simulating its nonlinear response after load reversals. The computational code uses linear and quadratic isoparametric hexahedral finite elements for the concrete. To represent the reinforcing bars, an embedded model is used. Finally, to validate the efficiency of the proposed model, several numerical simulations are carried out in plain and reinforced concrete. The comparisons made with test results show an excellent agreement between the model predictions and experimental data.

CAPÍTULO 1

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, discutem-se aspectos gerais das estruturas de concreto armado e da sua modelagem através do método dos elementos finitos. Mostra-se, também, a necessidade de desenvolvimento de modelos numéricos que determinem de maneira realística o comportamento do concreto armado, quando submetido a variados estados de sollicitação. Estas considerações serviram como motivação para o desenvolvimento desta tese.

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O concreto armado é um dos mais importantes materiais da construção civil, sendo um material formado por concreto e barras de aço, convenientemente dispostas em seu interior. O concreto apresenta uma baixa resistência à tração e, portanto, as barras de aço cumprem, principalmente, a função de absorver os esforços de tração na estrutura.

As estruturas de concreto armado têm sido utilizadas na construção civil desde a metade do século XIX, coincidindo com o período de crescimento acelerado da indústria, do comércio e do transporte, quando surgiu a necessidade de construir um grande número de fábricas, pontes, portos e outras obras. Armaduras de aço em peças de concreto foram utilizadas pela primeira vez na França. Em 1855, Jean Louis Lambot construiu um barco com argamassa de cimento reforçada com ferro. Em 1861, Joseph Monier construiu um vaso de flores de concreto com armadura de arame e, no mesmo ano, François Coignet publicou os princípios básicos para construções em concreto armado e apresentou vigas e tubos de concreto armado na Exposição Internacional de Paris, em 1867.

Atualmente, o concreto armado é um material muito utilizado nas estruturas devido às suas inúmeras vantagens frente a outros materiais, entre as quais podem ser citadas: facilidade na moldagem, resistência ao fogo, aos agentes atmosféricos e ao desgaste mecânico, apresentando, também, um baixo custo.

A ampla utilização deste material e a crescente demanda por arrojados projetos de estruturas de concreto armado têm exigido a utilização de métodos computacionais cada vez mais sofisticados. Um método eficaz para a análise numérica de problemas de engenharia é o método dos elementos finitos. Este método tem alcançado um alto grau de desenvolvimento na simulação do comportamento das estruturas, estabelecendo uma analogia direta entre o sistema físico real (*a estrutura em análise*) e o modelo idealizado (*malha de elementos finitos*). Os modelos numéricos que utilizam o método dos elementos finitos são constituídos pela união de vários modelos reológicos individuais para reproduzir o real comportamento do concreto armado: modelos constitutivos para representar o comportamento do concreto e do aço; modelo para simular a aderência entre os dois materiais e modelo para representar os mecanismos de transferência de esforços através das fissuras.

As primeiras formulações do método dos elementos finitos para concreto armado consideraram problemas planos (vigas, vigas paredes e pórticos). As formulações seguintes abrangeram análises tridimensionais de, por exemplo, placas e cascas. A primeira publicação, utilizando o método dos elementos finitos na análise de estruturas de concreto armado, foi apresentada por Ngo e Scordelis (1967). Neste estudo, foram analisadas vigas de concreto armado, onde o concreto e o aço foram representados por elementos triangulares bidimensionais, tendo relações tensão-deformação elástico-lineares. A aderência da armadura em relação ao concreto foi levada em consideração através de elementos de interface entre os dois materiais. As fissuras foram representadas simplesmente separando os elementos de concreto em cada lado da fissura, através de uma aproximação de fissuras discretas.

Durante o período de publicação dos primeiros trabalhos para análise de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos, a capacidade para simular o funcionamento estrutural havia progredido mais do que o próprio entendimento do comportamento real do material. Com o decorrer do tempo, esta limitação diminuiu devido à realização de ensaios experimentais em peças de concreto armado projetadas, especificamente, para aperfeiçoar os conhecimentos do comportamento do material (Vecchio,

1982). Desde a publicação do trabalho de Ngo e Scordelis (1967), inúmeros aperfeiçoamentos foram feitos nesta área para obtenção de uma melhor representação do comportamento deste material. Melhorias foram introduzidas na modelagem da fissuração, da aderência entre o concreto e o aço, e nos modelos constitutivos para os dois materiais. Na publicação realizada pelo ASCE/ACI 477 (1991), encontram-se referenciados diversos trabalhos publicados até então sobre a aplicação do método dos elementos finitos na análise bidimensional de estruturas de concreto armado.

Os modelos tridimensionais permitem uma representação completa das estruturas, possibilitando uma melhor aproximação da realidade. Inicialmente, poucos trabalhos foram feitos para análise do comportamento tridimensional do concreto armado usando elementos finitos sólidos. Isto ocorreu devido ao esforço computacional envolvido e ao limitado conhecimento do real comportamento do concreto solicitado por estados triaxiais de tensões.

Vale salientar que a integração dos modelos constitutivos individuais dos materiais (concreto e aço), formando um único modelo capaz de prever o comportamento real do concreto armado, quando solicitado por cargas complexas, não é uma tarefa simples. Muitos modelos são desenvolvidos apenas para a análise de um determinado tipo de estrutura para facilitar a sua aplicação e aumentar a precisão dos resultados. Seria altamente desejável se dispor de um modelo constitutivo que permitisse uma completa descrição do comportamento dos materiais, possibilitando uma análise abrangente para diversos tipos de problemas.

1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS DA PESQUISA

O grande interesse na modelagem numérica de estruturas de concreto armado, aliado à necessidade de desenvolvimento de modelos constitutivos que consigam representar o complexo comportamento tridimensional do concreto armado solicitado por diversos tipos de carregamento, serviram como motivação e ponto de partida para o desenvolvimento desta tese.

O objetivo desta tese foi a implementação de um modelo numérico abrangente, capaz de atender às seguintes características: apresentar formulações que representem o real comportamento mecânico do concreto armado, quando solicitado por cargas monótonas ou

cíclicas e estados multiaxiais de tensões, e possuir um algoritmo eficiente para determinação da resposta do material quando submetido a estados quaisquer de solicitações.

Como ponto de partida foi adotado o programa para análise tridimensional não-linear estática e dinâmica de estruturas em concreto armado, apresentado por Hinton (1988). Para a implementação deste modelo numérico, foram utilizados modelos desenvolvidos por outros autores, porém introduzindo sempre modificações com o propósito de aprimorá-los em relação à abrangência, precisão e eficiência.

Para demonstrar a sua validade foi realizado um estudo comparativo entre os resultados do modelo numérico adotado e resultados experimentais e numéricos existentes na literatura. Foram analisados tanto os comportamentos dos materiais (concreto e aço), validando os modelos constitutivos desenvolvidos, como também o comportamento de peças de concreto armado. Como os modelos utilizados são bastante abrangentes, a implementação computacional e comparação entre resultados numéricos e experimentais para diferentes elementos de concreto armado submetidos a diferentes carregamentos foi uma tarefa desafiadora.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este texto está organizado em sete capítulos. No *Capítulo 2*, descreve-se, de uma maneira geral, o comportamento experimental do concreto e do aço quando submetidos a diferentes estados de solicitação. Mostram-se as alternativas disponíveis como modelos constitutivos para os dois materiais.

No *Capítulo 3*, apresentam-se, detalhadamente, as características e formulações do modelo elástico não-linear ortotrópico usado nesta tese para representar o comportamento do concreto. Apresenta-se o fluxograma do modelo numérico implementado no programa computacional. Por fim, são mostrados resultados comparativos com ensaios experimentais para demonstrar a validade do modelo.

No *Capítulo 4*, descrevem-se as características e formulações propostas para o modelo constitutivo do aço quando solicitado por cargas monótonas e cíclicas. Como realizado no *Capítulo 3*, também são mostrados resultados comparativos com ensaios experimentais para

demonstrar a validade destes modelos.

No *Capítulo 5*, são apresentadas as formulações para a análise não-linear de estruturas através do método dos elementos finitos com solução em deslocamentos. Inicialmente, faz-se uma descrição das formulações em deslocamentos para elementos isoparamétricos usados para o concreto e as barras de armadura. Em seguida, descreve-se o método de Newton-Raphson para solução do sistema de equações não-lineares, apresentando o procedimento usado para a consideração de deslocamentos prescritos à estrutura na solução de problemas não-lineares.

No *Capítulo 6*, para validar o modelo numérico, apresentam-se estudos comparativos com ensaios experimentais em peças de concreto armado. Inicialmente, mostram-se dois estudos comparativos com tirantes de concreto armado. Apresenta-se um estudo comparativo entre os resultados numéricos obtidos pelo modelo proposto nesta tese e os valores determinados conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) para uma série de cinco tirantes de concreto armado. Em seguida, mostra-se uma análise comparativa com uma série de ensaios experimentais realizados por Rizkalla et al. (1983). Neste capítulo, também, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados experimentalmente para vigas de concreto armado. Estes resultados experimentais foram apresentados por Bresler e Scordelis (1963) e se referem a um estudo sobre o comportamento, fissuração e cargas de rupturas de doze vigas de concreto armado. Na seqüência, realiza-se um estudo comparativo com valores determinados experimentalmente para pilares de concreto armado confinados, de modo a verificar a aplicabilidade do modelo desenvolvido a este tipo de situação em que a estrutura fica submetida a um estado triplo de tensão. Estes resultados experimentais foram apresentados por Razvi e Saatcioglu (1989), e se referem a um estudo sobre o ganho na carga de ruptura de pilares confinados através da utilização de estribos pouco espaçados. Para finalizar, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados experimentalmente para uma parede de seção retangular de concreto armado. Estes resultados experimentais foram apresentados por Elmorsi et al. (1998) e se referem a um estudo sobre o comportamento cíclico de paredes realizado por Oesterle et al. (1978).

Por fim, as conclusões e as sugestões para a continuação da pesquisa são apresentadas no *Capítulo 7*.

CAPÍTULO 2

2. MODELAGEM DOS MATERIAIS

Neste capítulo, apresentam-se os diversos aspectos do comportamento experimental do concreto e do aço, e os principais modelos matemáticos usados para representação destes materiais na análise computacional de peças de concreto armado.

2.1 GENERALIDADES

Como mencionado no Capítulo 1, o concreto armado é um material formado pela associação do concreto com barras de aço convenientemente colocadas em seu interior. O aço é um material que apresenta, em termos práticos para análise estrutural, propriedades físicas relativamente simplificadas. Entretanto, o funcionamento conjunto do aço e concreto apresenta um comportamento estrutural bastante complexo, devido, entre vários fatores, à significativa diferença entre as resistências à tração e à compressão do concreto; à não-linearidade da relação tensão-deformação do concreto já para níveis de tensão relativamente baixos; aos fenômenos de fluência e retração do concreto; à aderência imperfeita entre o aço e o concreto adjacentes; à fissuração do concreto e à transmissão de esforços através das fissuras.

O comportamento de uma peça fletida de concreto armado pode ser representado, basicamente, por três estágios característicos: o elástico-linear, o de formação de fissuras e o plástico, conforme pode ser observado na Figura 2.1. A sua resposta não-linear é causada, principalmente, pela fissuração do concreto, plastificação do aço e esmagamento do concreto comprimido.

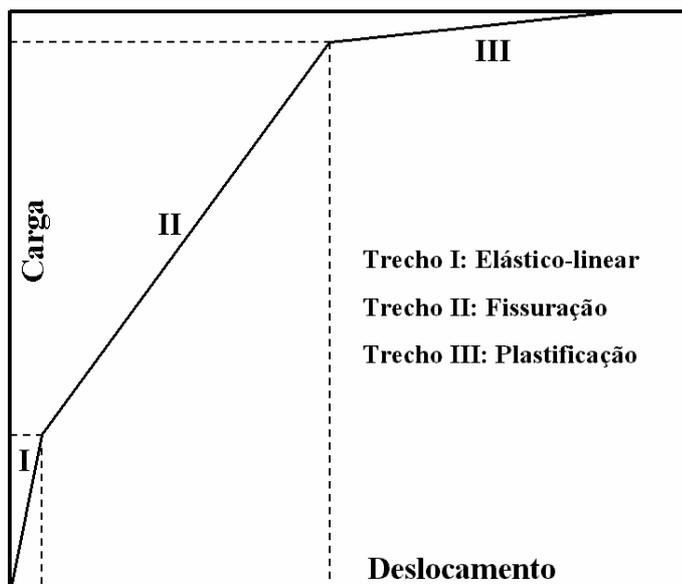


Figura 2.1 – Resposta carga-deslocamento típica de uma peça fletida de concreto armado.

Para uma análise computacional de peças em concreto armado, necessita-se obter um modelo matemático capaz de representar adequadamente o complexo comportamento deste material. Desta maneira, as equações constitutivas, que traduzem o comportamento dos materiais, são de fundamental importância nesta análise.

A seguir, apresenta-se uma descrição do comportamento experimental do concreto e do aço quando submetidos a diferentes solicitações. Estas descrições são essenciais para o desenvolvimento de modelos matemáticos que reproduzam o funcionamento dos dois materiais. Apresentam-se também, os principais modelos matemáticos usados para representação do comportamento destes materiais na análise computacional de peças de concreto armado. O estudo do comportamento e modelagem do concreto e do aço baseou-se nas publicações de Chen e Han (1988), CEB 230 (1996) e ASCE/ACI 477 (1991).

2.2 O CONCRETO

2.2.1 O comportamento do concreto

O concreto é um material formado pela mistura de agregados, cimento e água, apresentando um comportamento complexo. Mesmo antes da aplicação de cargas externas à estrutura, este material já apresenta microfissuras, e estas tendem a aumentar de tamanho e quantidade, com a aplicação de cargas. Este crescimento e formação de nova microfissuras contribuem para um comportamento não-linear deste material. Em ensaios de compressão uniaxial podem-se observar três estágios na curva tensão-deformação do concreto, conforme ilustrado na Figura 2.2. Em um intervalo até, aproximadamente, 30% da resistência à compressão uniaxial, observa-se um comportamento elástico-linear. A partir deste limite de $0,3f_c$, as microfissuras começam a aumentar e o comportamento não-linear torna-se mais evidente. Após atingir o nível de tensão de aproximadamente $0,75f_c$, o comportamento do concreto torna-se bastante não-linear, até atingir a tensão de ruptura, onde perde a capacidade de resistir a incrementos de tensões.

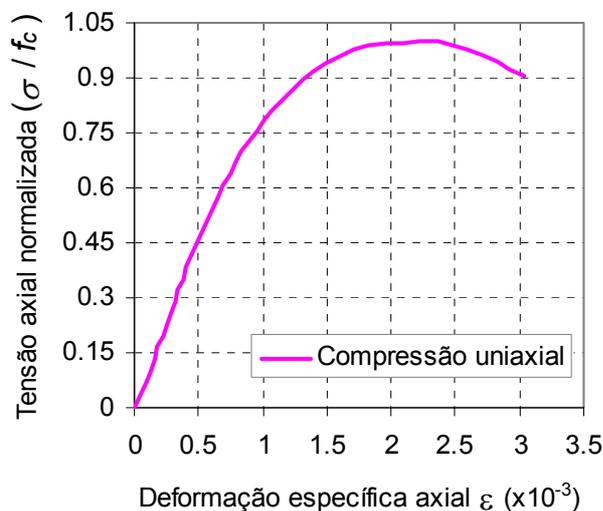


Figura 2.2 – Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão uniaxial.

FONTE: Kupfer et al., 1969.

Em ensaios de tração uniaxial, observam-se algumas diferenças importantes em relação ao comportamento de compressão uniaxial, tais como, na resposta à tração, o limite de elasticidade linear, geralmente, fica entre 60% e 80% da resistência à tração, f_t , e, a partir

deste limite, as microfissuras começam a aumentar rapidamente de tamanho. Assim se observa um comportamento quase elástico-linear até a ruptura, como ilustrado na Figura 2.3.

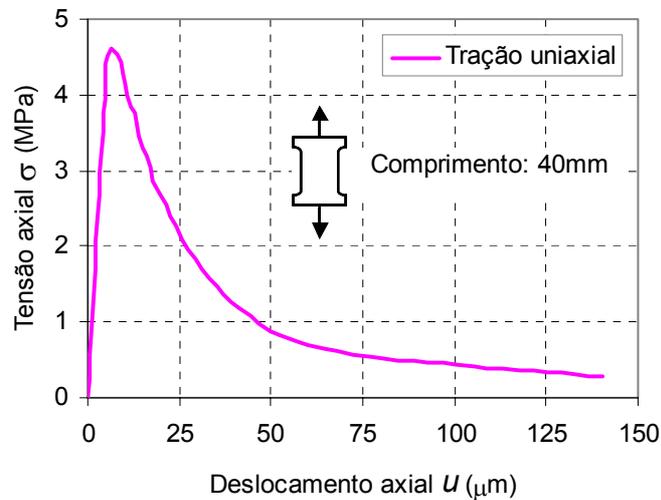


Figura 2.3 – Curva tensão-deslocamento para o concreto sob tração uniaxial.

FONTE: Peterson, 1981 *apud* Chen e Han, 1988.

Nos últimos anos, muitos estudos foram realizados sobre as propriedades mecânicas do concreto sob carregamento biaxial e triaxial, existindo diversos resultados experimentais sobre este assunto. Quando solicitado por diferentes combinações de carregamento biaxial, o concreto apresenta um comportamento tensão-deformação e resistência mecânica diferente das situações uniaxiais. Para uma situação de compressão biaxial com $\sigma_1 = \sigma_2$, ilustrada na Figura 2.4, observa-se um aumento de resistência mecânica de cerca de 16% com relação à resistência à compressão uniaxial, f_c . E para a relação de tensão $\sigma_2/\sigma_1 = 0,5$, este aumento de resistência é de aproximadamente 25%.

Na curva tensão-deformação para o concreto sob tração-compressão biaxial, apresentada na Figura 2.5, a resistência à compressão diminui com o aumento da tensão de tração. Sob tração biaxial, a resistência é aproximadamente a mesma da tração uniaxial, conforme a Figura 2.6.

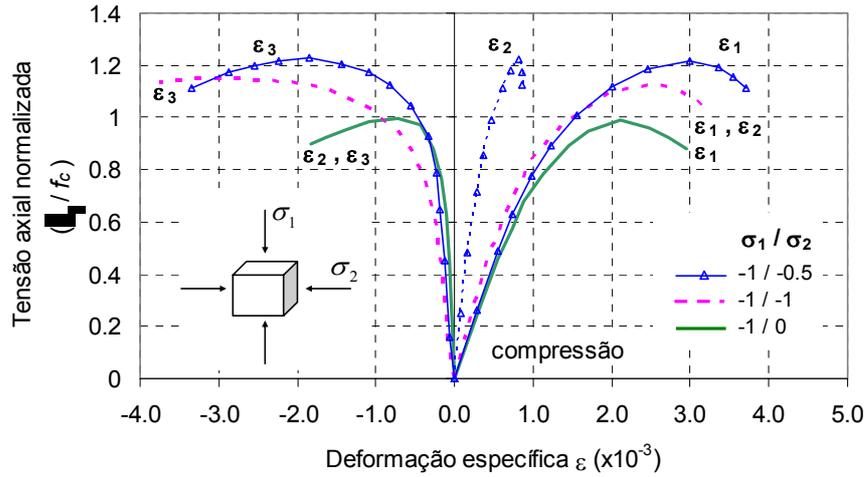


Figura 2.4 – Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão biaxial.

FONTE: Kupfer et al., 1969.

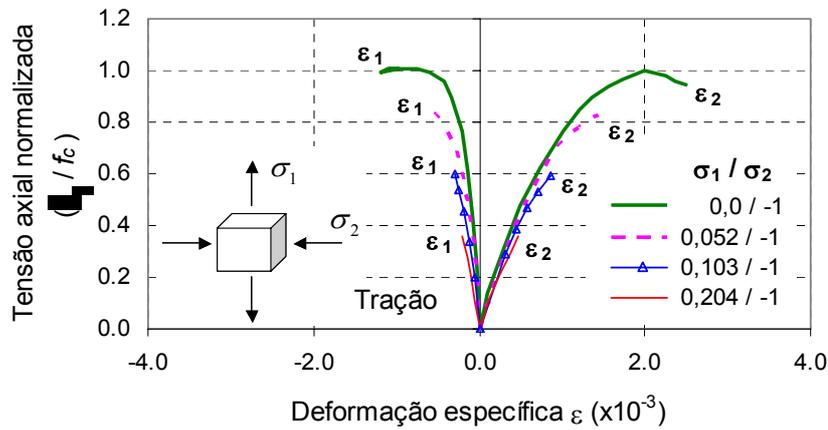


Figura 2.5 – Curva tensão-deformação para o concreto sob tração-compressão biaxial.

FONTE: Kupfer et al., 1969.

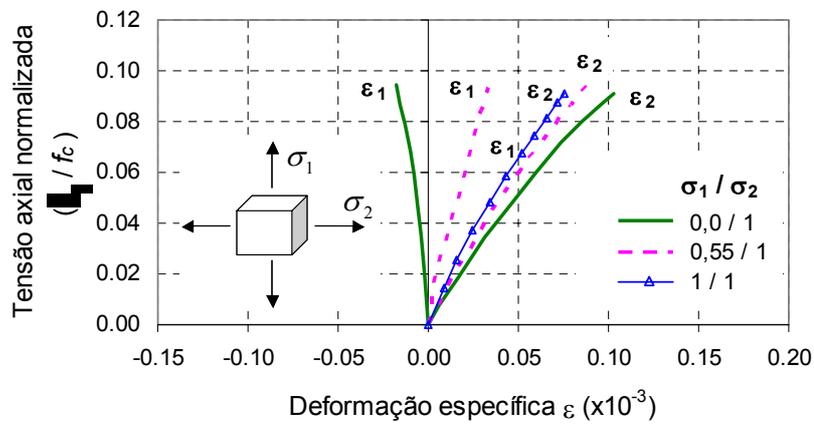


Figura 2.6 – Curva tensão-deformação para o concreto sob tração biaxial.

FONTE: Kupfer et al., 1969.

Nas vizinhanças das tensões de pico das curvas tensão-deformação, o concreto submetido à compressão exibe um aumento relativo no seu volume, como ilustrado na Figura 2.7. Este fenômeno, denominado de expansão volumétrica, é geralmente atribuído ao progressivo crescimento das microfissuras do concreto (Chen e Han, 1988).

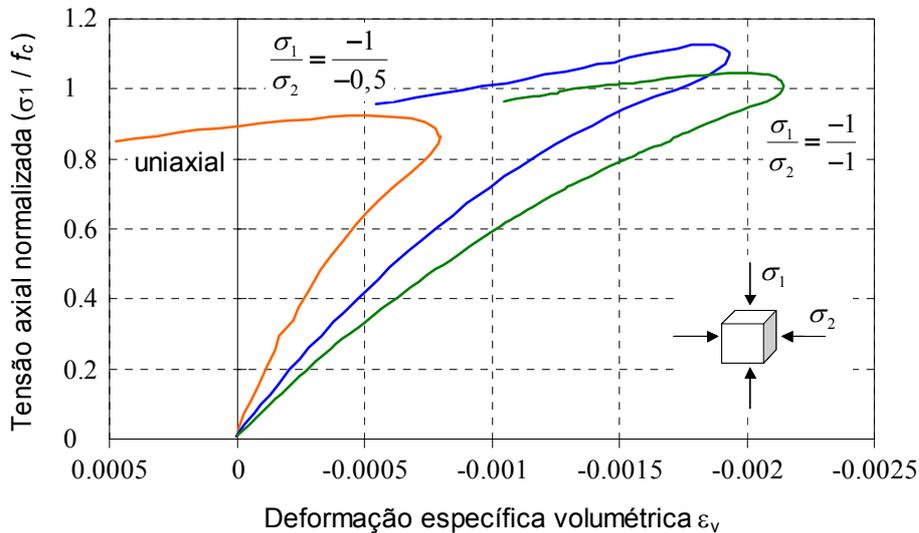


Figura 2.7 – Curvas de deformações específicas volumétricas do concreto em ensaios de compressão uniaxial e biaxial. FONTE: Kupfer et al., 1969.

Um outro aspecto observado experimentalmente é a grande influência que as tensões de confinamento triaxiais exercem no comportamento do concreto. Mostra-se na Figura 2.8, a resposta tensão-deformação deste material quando submetido a diferentes valores de tensões de confinamento. Nestes ensaios, aplicam-se tensões laterais constantes $\sigma_2 = \sigma_3$ nos corpos-de-prova cilíndricos e aumenta-se a tensão axial σ_1 até atingir a ruptura do material. Percebe-se que as deformações específicas transversais e axiais de ruptura, normalmente, crescem com o aumento das tensões de confinamento. Porém, para tensões laterais acima de um determinado valor, aproximadamente 28 MPa, as deformações axiais de ruptura irão diminuir com o aumento destas tensões de confinamento. Também se observa que, comparados com ensaios de compressão uniaxial, ocorrem maiores deformações de ruptura em corpos-de-prova confinados. Pode-se dizer que, quando submetido a cargas de compressão com confinamento lateral, o concreto exibe um certo grau de ductilidade antes da ruptura.

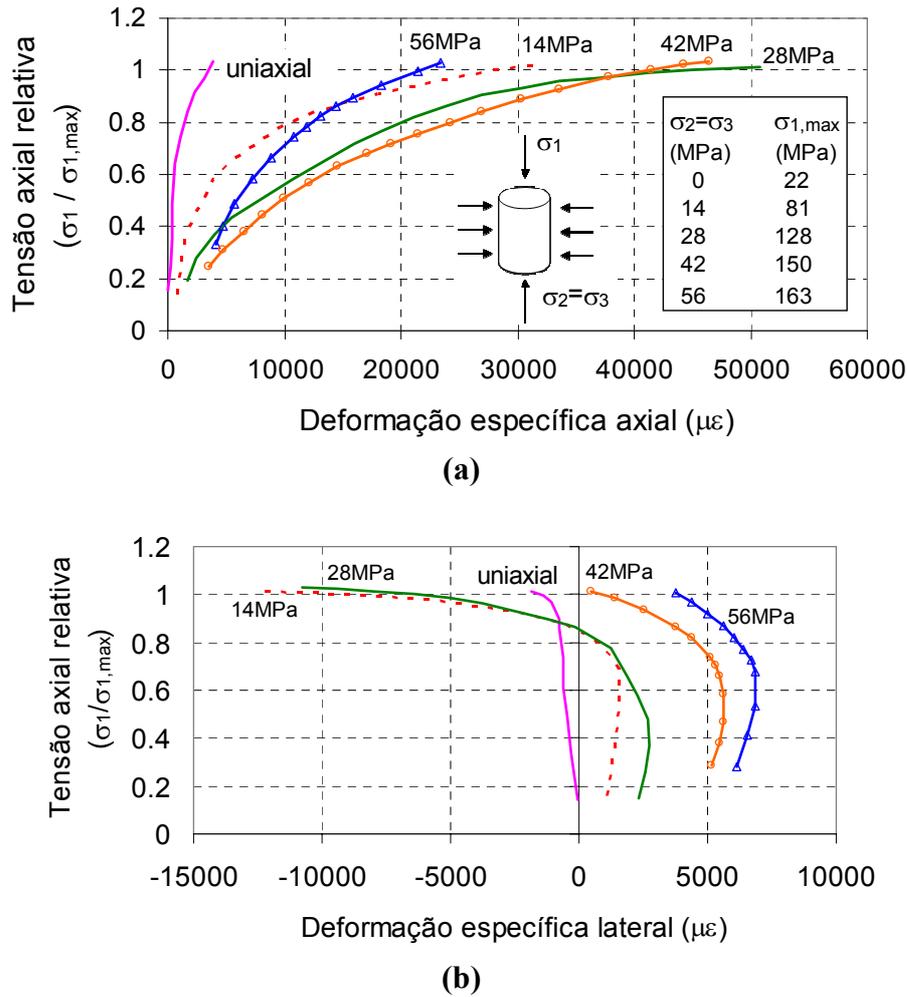


Figura 2.8 – Curvas tensão-deformação em ensaios de compressão multiaxial: (a) deformação específica axial; (b) deformação específica lateral. FONTE: Palaniswamy e Shah, 1974 *apud* Chen e Han, 1988.

Por fim, na Figura 2.9 apresenta-se uma curva típica de compressão uniaxial para o concreto solicitado por carga cíclica. Observa-se que as curvas de descarga e carga não são segmentos de linhas retas e sim laços que apresentam acentuada degradação da rigidez e resistência com o aumento de deformações específicas.

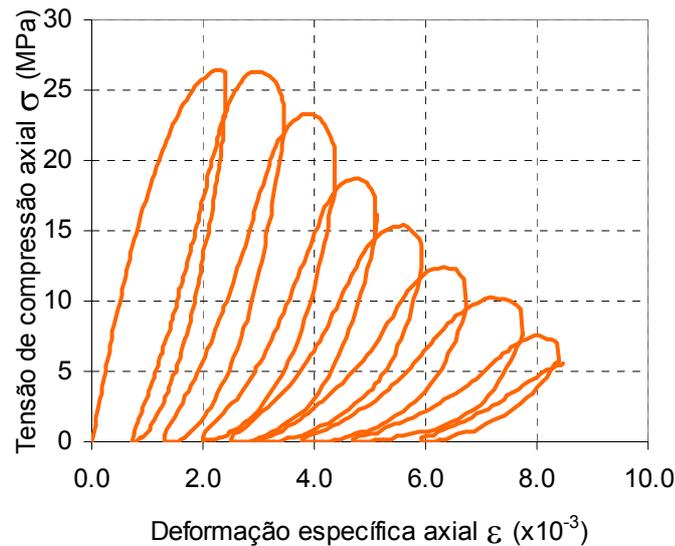


Figura 2.9 – Curva tensão-deformação para o concreto solicitado por carga cíclica de compressão uniaxial. FONTE: Sinha et al., 1964.

2.2.2 Modelos para o concreto

Como mencionado anteriormente, o comportamento estrutural do concreto é complexo. Sendo assim, a construção de equações constitutivas, considerando todas as características do material, não é uma tarefa simples. Nas últimas décadas, têm-se desenvolvido diversos estudos nesta área de modelagem do comportamento do concreto. A maioria dos modelos constitutivos reproduz as relações tensão-deformação macroscópica para diferentes condições de carga, negligenciando o mecanismo microscópico do comportamento. Assim, a nível macroscópico, os modelos podem ser classificados como: modelos baseados na *teoria de elasticidade*, modelos baseados na *teoria de plasticidade* e modelos baseados na *mecânica da fratura e do dano*.

Pela *teoria da elasticidade*, considera-se que um material apresenta deformações instantâneas e reversíveis quando submetido a um dado estado de tensões. As deformações específicas aparecem simultaneamente com as tensões correspondentes e permanecem constantes no tempo se as tensões também permanecerem. As deformações elásticas se anulam caso as tensões que as originaram se anulem. Historicamente, os modelos baseados na teoria da elasticidade foram os primeiros a serem utilizados para a análise de estruturas de concreto armado. Inicialmente, eles eram limitados a situações com cargas proporcionais,

mas, com o desenvolvimento das pesquisas, estes modelos foram utilizados também com cargas repetidas e cíclicas (CEB 230, 1996).

Os modelos que seguem a *teoria da plasticidade* consideram que o material apresenta deformações imediatas e não-reversíveis, ou seja, as deformações não desaparecem totalmente ao serem removidas as forças que lhe deram origem. Esta teoria é tipicamente usada para descrever o comportamento inelástico dos materiais, tendo sido inicialmente desenvolvida para o estudo de metais e materiais geotécnicos.

Os modelos que trabalham com a *mecânica da fratura e do dano* seguem o conceito físico de crescimento gradual das microfissuras. Tentam reproduzir o mecanismo interno de microfissuras e o crescimento de defeitos e microcavidades que surgem em materiais frágeis, como o concreto, com o aumento das deformações (CEB 230, 1996).

A escolha de qual categoria de modelos seguir está vinculada basicamente ao tipo de problema a ser analisado. Para o estudo da fissuração em peças de concreto simples onde normalmente se forma uma fissura predominante, os modelos que seguem a mecânica da fratura e do dano mostram-se mais apropriados. Para análise de peças de concreto armado, podem-se obter bons resultados empregando os modelos que seguem a teoria da elasticidade ou da plasticidade. Isto se deve ao fato que a presença de armadura ocasiona uma redistribuição de tensões, resultando no aparecimento de múltiplas fissuras na estrutura.

Entre as classes de modelos apresentadas, os modelos *elásticos não-lineares* são os mais simples, sendo capazes de fazer uma razoável previsão analítica para o comportamento do concreto. Um compromisso entre simplicidade e precisão pode ser conseguido através de modelos que se baseiam na teoria da elasticidade não-linear. Desta forma, este trabalho apresenta um modelo elástico não-linear ortotrópico para modelagem constitutiva do concreto, cujas formulações são apresentadas no próximo capítulo. Por este modelo se tratar de um modelo elástico não-linear, o presente capítulo se limitará a uma breve revisão dos modelos que seguem apenas a *teoria de elasticidade*.

Inicialmente, as aproximações dos modelos constitutivos representavam o comportamento do concreto como elástico-linear. Esta consideração é aceitável para situações com cargas de tração ou com baixas cargas de compressão, uma vez que o comportamento do concreto nestes casos é praticamente elástico-linear. Entretanto, com o aumento das cargas de compressão, o concreto apresenta uma resposta não-linear, tornando o modelo elástico-linear

inaceitável para representar o seu comportamento. Com a evolução e o desenvolvimento de novas técnicas, passaram a ser usados modelos elásticos não-lineares. Para descrever as relações tensão-deformação, três classes de modelos geralmente têm sido usadas: *modelo elástico de Cauchy*, *modelo hiperelástico* e *modelo hipoeelástico*.

A maneira mais simples de introduzir a não-linearidade é através da utilização de funções não-lineares para definir a relação entre a tensão e a deformação específicas correntes, ou seja, de uma maneira geral, através da seguinte relação:

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (2.1)$$

Muitos modelos uniaxiais têm sido propostos, usando diferentes funções não-lineares para representar a curva tensão-deformação, entre os quais pode-se citar: Desayi e Krishnan (1964), Saenz (1964), Kent e Park (1971), Popovics (1973) e CEB-FIP 1990 (1993), entre outros. Estes modelos são classificados como *modelos elásticos de Cauchy*. Para a situação multiaxial de tensões, podem ser expressos por:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^s(\sigma_{pq}) \varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

onde,

σ_{ij} – é o tensor de tensões;

D_{ijkl}^s – é o tensor de rigidez secante, que é função do estado de tensão corrente σ_{pq} ;

ε_{kl} – tensor de deformações específicas.

Alternativamente, pode-se representar a tensão como derivada de uma energia potencial de deformação ϕ , sendo definida pela seguinte formulação:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.3)$$

Esta classe de modelos, denominados *modelos hiperelásticos*, foi seguida por Evans e Pister (1966). Em geral, uma limitação desta classe de modelos é que as constantes materiais não têm significado físico, tornando difícil quantificar experimentalmente estes valores (ASCE/ACI 477, 1991).

As duas classes de modelos, *elásticos de Cauchy* e *hiperelásticos*, estabelecem uma relação entre o estado de tensão total e a deformação específica correspondente. Assim, por definição, estes modelos são independentes do caminho de deformação, uma vez que as tensões são determinadas unicamente a partir das deformações correntes, ou vice-versa. Todavia, os *modelos hipoeelásticos* consideram a relação constitutiva do material expressa em termos incrementais. Então, esta relação utiliza uma matriz de rigidez tangente, que varia com o estado de tensão corrente e com a história de deformação, ficando expressa por (ASCE/ACI 477, 1991):

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^t (\sigma_{pq}, \varepsilon_{rs}) d\varepsilon_{kl} \quad (2.4)$$

onde,

$d\sigma_{ij}$ – é o tensor de incrementos de tensões;

D_{ijkl}^t – é o tensor de rigidez tangente do material;

$d\varepsilon_{kl}$ – é o tensor de incrementos de deformações específicas.

Darwin e Pecknold (1977) desenvolveram um *modelo hipoeelástico ortotrópico* para a análise de tensões planas. Elwi e Murray (1979) deram continuidade ao usarem-no para a análise tridimensional de estruturas submetidas a cargas monótonas. Continuando esta linha de pesquisa para a análise de estruturas tridimensionais, têm-se também: Balan et al.(1997), Kwon (2000), Balan et al. (2001) e Kwon e Spacone (2002). Balan et al.(1997) propuseram uma lei constitutiva tridimensional para o concreto solicitado por cargas monótonas e cíclicas. Kwon (2000) deu continuidade à pesquisa de Balan et al. (1997) ao usar este tipo de modelo para a análise de elementos de concreto armado. O modelo apresentado por Balan et al. (2001) é bastante semelhante ao proposto por Balan et al. (1997), apresentando algumas pequenas modificações para aprimorá-lo. Estas modificações já aparecem no trabalho de Kwon (2000) e Kwon e Spacone (2002).

Para o modelo numérico adotado na presente tese, foi utilizado como ponto de partida o modelo apresentado por Kwon (2000), por se tratar do mais completo entre os trabalhos mencionados no parágrafo anterior. Entretanto, nesta tese foram introduzidas algumas modificações no modelo de Kwon (2000), com a finalidade de aprimorá-lo. Estas modificações serão apresentadas nos próximos capítulos, a medida que forem discutidas as formulações correspondentes.

2.3 O AÇO

2.3.1 O comportamento do aço

Basicamente, as barras de aço suportam esforços em suas direções axiais, ou seja, as solicitações perpendiculares ao eixo das barras são desprezadas. Assim é suficiente o conhecimento das propriedades das barras relativas a um estado de tensão uniaxial. As características das barras de aço solicitadas por cargas axiais são obtidas a partir de ensaios experimentais e a forma do diagrama tensão-deformação do material é influenciada pelo processo de fabricação. As barras de aço, obtidas por laminação a quente, apresentam um patamar de escoamento no diagrama tensão-deformação, como ilustrado na Figura 2.10. Os fios, obtidos por trefilação, não apresentam um patamar de escoamento definido, como mostrado na Figura 2.11.

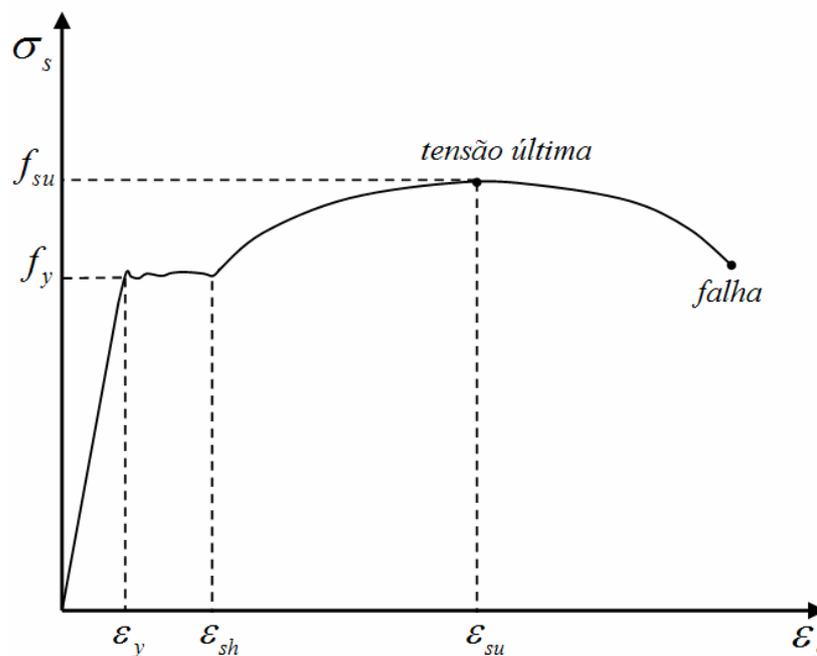


Figura 2.10 – Diagrama tensão-deformação para o aço com patamar de escoamento.

FONTE: Kwon, 2000.

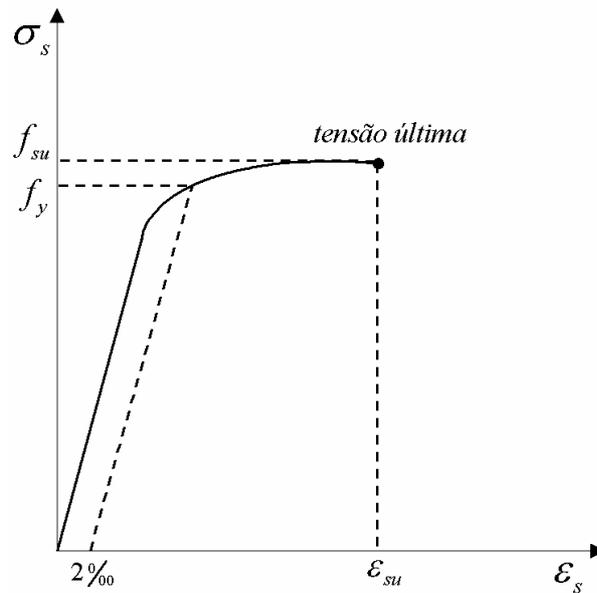


Figura 2.11 – Diagrama tensão-deformação para o aço sem patamar de escoamento.

FONTE: Araújo, 2003.

Na Figura 2.10, mostra-se uma típica curva tensão-deformação do aço solicitado por cargas monótonas. Este comportamento pode ser representado por quatro regiões bem determinadas:

1. A *região elástica*, definida por $0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y$, onde ε_s representa uma deformação arbitrária no aço e ε_y a deformação específica correspondente à tensão de escoamento do aço f_y ;
2. Um *patamar de escoamento*, definido por $\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sh}$, onde ε_{sh} marca o começo da região de endurecimento. O patamar de escoamento, mostrado na Figura 2.10, é basicamente horizontal, apesar de serem observadas pequenas flutuações das tensões. A tensão de escoamento, f_y , é calculada como um valor médio das flutuações observadas;
3. Uma *região de endurecimento*, definida por $\varepsilon_{sh} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su}$, onde ε_{su} é a deformação específica correspondente à tensão última f_{su} ;
4. Uma *região de amolecimento* depois que foi atingida a tensão última do material, definida por $\varepsilon_s > \varepsilon_{su}$. Nesta região ocorre uma perda da capacidade resistente até ocorrer a falha do material.

Através de ensaios experimentais, observa-se que o comprimento do patamar de escoamento e da região de endurecimento tipicamente diminui com o aumento da tensão de escoamento do aço, como observado na Figura 2.12.

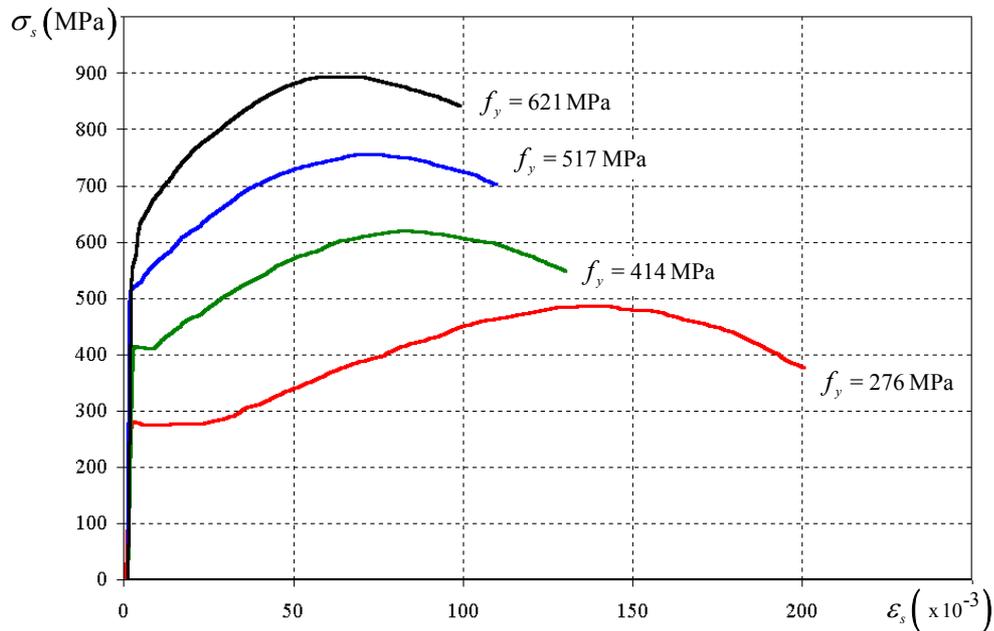


Figura 2.12 – Curvas típicas para barras de armadura.

FONTE: ASCE/ACI 477, 1991.

O comportamento do aço quando solicitado por cargas cíclicas pode ser ilustrado pela Figura 2.13, apresentando as seguintes características:

- Uma curva monótona correspondente a um trecho elástico, um patamar de escoamento e uma região de endurecimento;
- *Efeito Bauschinger*, que consiste no comportamento não-linear do aço, após alternância de carga, com degradação da rigidez e com tensões de escoamento substancialmente mais baixas do que a tensão de escoamento inicial;
- *Endurecimento cíclico isotrópico*, que consiste no aumento da resistência além da tensão de escoamento inicial, após uma alternância de carga.

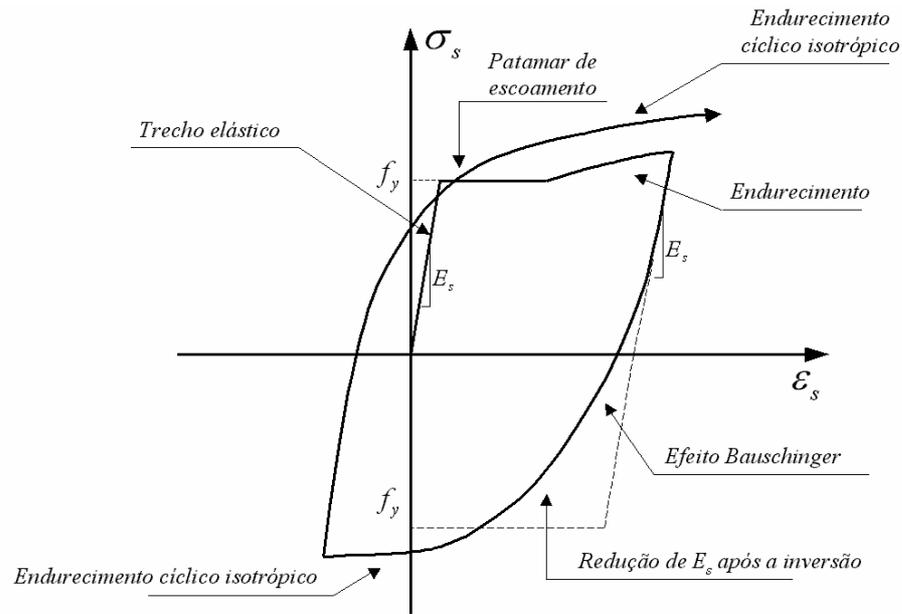


Figura 2.13 – Principais características do diagrama tensão-deformação do aço.

FONTE: CEB (230), 1996.

2.3.2 Modelos para o aço

Como mencionado anteriormente, geralmente a modelagem do comportamento do aço é tratada em um estado de tensão uniaxial. Para cargas monótonas de tração, normalmente, o aço é representado como um material *elásto-plástico perfeito*, ou com *endurecimento linear*, conforme Figuras 2.14 e 2.15, respectivamente. Ocasionalmente, também pode ser representado usando uma curva tensão-deformação trilinear ou uma curva tensão-deformação completa, conforme Figuras 2.16 e 2.17, respectivamente. Destes quatro modelos, a representação *elasto-plástica perfeita* é a mais adotada, seguida da representação elástica com *endurecimento linear*. Ainda, apesar de, normalmente, serem observadas diferenças entre o comportamento à tração e à compressão do aço, é comum adotarem-se curvas idênticas para ambas as situações.

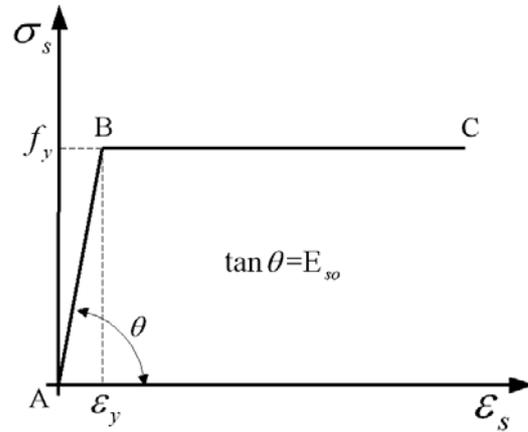


Figura 2.14 – Aproximação elasto-plástica perfeita.

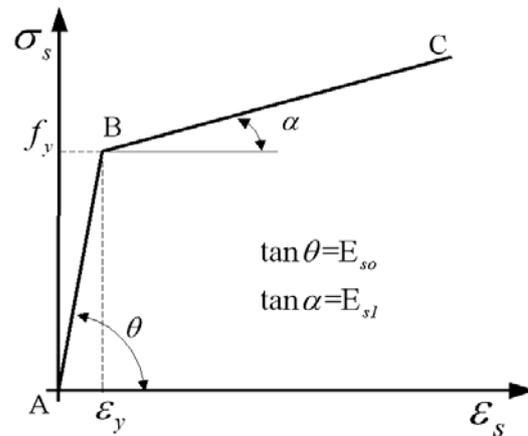


Figura 2.15 – Aproximação elástica com endurecimento linear.

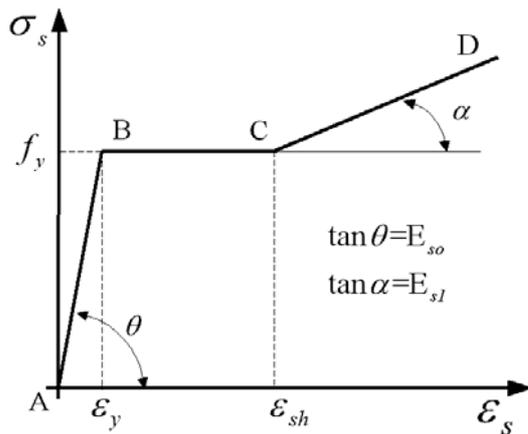


Figura 2.16 – Aproximação trilinear para o aço.

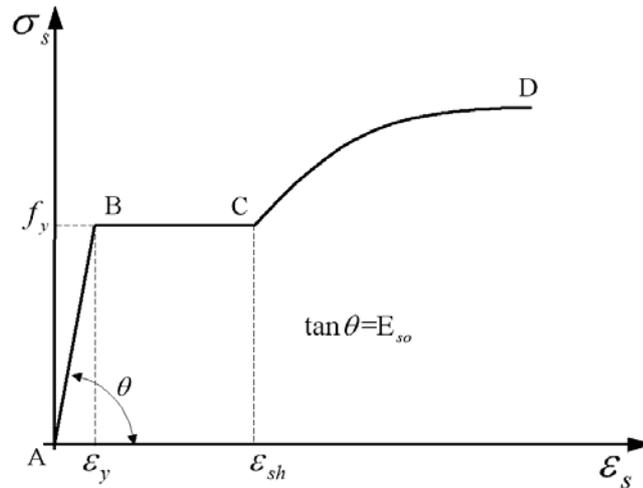


Figura 2.17 – Curva completa para o aço.

Na literatura, há uma diversidade de modelos cíclicos para o aço. Os mais usados descrevem o comportamento do aço por funções explícitas de tensões e deformações específicas. Neste contexto, existem duas abordagens:

1. Utilizando a relação constitutiva na forma $\varepsilon = f(\sigma)$;
2. Considerando a relação tensão-deformação na forma $\sigma = f(\varepsilon)$.

Na primeira classe de modelos, os mais usados são aqueles baseados em modificações feitas no modelo original proposto por Ramberg e Osgood (1943), enquanto que, o mais bem sucedido modelo na segunda categoria é aquele proposto por Menegotto e Pinto (1973). O modelo de Menegotto e Pinto (1973) torna-se vantajoso em situações que utilizam elementos finitos baseados no método dos deslocamentos. Esta vantagem origina-se do fato das tensões no aço serem determinadas diretamente a partir das deformações específicas. O modelo de Ramberg e Osgood (1943) apresenta vantagem computacional quando as formulações em elementos finitos estão baseadas no método das forças.

O programa numérico apresentado neste trabalho utiliza o método dos elementos finitos com solução em deslocamentos. Sendo assim, utilizou-se o modelo de Menegotto e Pinto (1973) para modelagem do comportamento do aço, cujas formulações são apresentadas no Capítulo 4.

2.4 ADERÊNCIA

O comportamento das estruturas de concreto armado é bastante influenciado pela interação entre o concreto e o aço. Entre estes dois materiais ocorre a transmissão de esforços na direção longitudinal das barras pela aderência. A aderência torna-se mais evidente quando ocorre fissuração no concreto. Quando a resistência à tração do concreto é excedida em uma estrutura de concreto armado, considera-se que a peça fissurou e que apenas as barras de armadura contribuem para a resistência aos esforços de tração. No entanto, em uma região entre duas fissuras, a aderência entre concreto e aço restringe o alongamento da armadura, e parte do esforço de tração, normal ao plano da fissura, é transferido ao concreto. Este mecanismo de contribuição do concreto para a rigidez do elemento, possível quando existem armaduras aderentes, é chamado de enrijecimento à tração (*tension stiffening*).

A incorporação da aderência no cálculo por elementos finitos depende da maneira como os elementos de armadura são conectados aos elementos de concreto. Existem duas maneiras principais para modelar a aderência entre o concreto e o aço:

1. Através do uso de elementos especiais de aderência para conectar os elementos de aço aos elementos de concreto;
2. Os elementos de concreto e aço são conectados diretamente através da hipótese de completa compatibilidade entre as barras de armadura e concreto.

Na primeira alternativa, as propriedades de aderência são modeladas na relação tensão-deslocamento dos elementos de aderência. Enquanto na segunda alternativa é possível considerar o mecanismo de acoplamento entre os materiais, através da modificação das leis constitutivas dos materiais (concreto ou do aço), incluindo assim o efeito de enrijecimento à tração.

A melhor alternativa para modelar a aderência depende do problema específico a ser considerado. Se o comportamento carga-deslocamento depende muito da aderência e se as próprias tensões de aderência são de interesse particular, então é necessário considerar elementos especiais de aderência. Geralmente, o uso destes elementos especiais de aderência envolve esforço computacional adicional e, desta maneira, são normalmente usados para a análise de problemas específicos, como por exemplo, em zonas de ancoragem.

Geralmente, para o cálculo global de estruturas admite-se completa compatibilidade entre concreto e armadura através do uso de um mesmo nó na superfície de contato para o elemento de concreto e o elemento de armadura. Então, os dois elementos têm deslocamentos idênticos para a superfície de contato e nenhum deslocamento relativo, como o deslizamento por aderência, pode ser modelado. Entretanto, como nenhuma consideração diferente é feita para a aderência, não é possível obter separadamente a distribuição das tensões de aderência. Normalmente, este método é empregado em problemas onde a aderência não tem influência decisiva no comportamento da estrutura ou quando não se tem interesse na distribuição das tensões de aderência.

2.5 CONCRETO FISSURADO

A fissuração do concreto é um aspecto muito importante na análise de estruturas de concreto armado, pois reduz a rigidez da estrutura, introduzindo um acentuado comportamento não-linear. Qualquer estudo para a determinação das tensões e deformações específicas em uma peça fissurada de concreto armado, necessariamente, deve ser capaz de modelar de forma adequada a transferência de esforços através das fissuras. Esta transmissão de esforços é um fenômeno complexo, que envolve o *engrenamento dos agregados* e o *efeito de pino das barras da armadura*, como ilustrado na Figura 2.18.

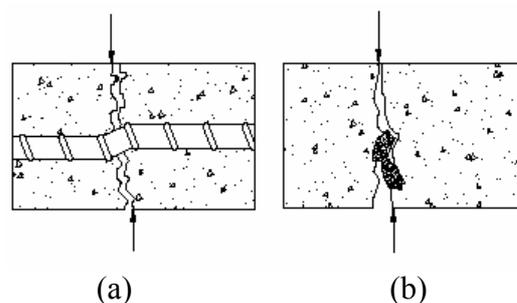


Figura 2.18 – Mecanismos de transferência de esforços:

(a) *efeito de pino da armadura*; (b) *engrenamento dos agregados*. FONTE: Silva, 2003.

No contexto do *Método dos Elementos Finitos*, os dois procedimentos mais utilizados na literatura para representar a fissuração são: *modelo de fissuras discretas* e *modelo de fissuras distribuídas*, ilustrado pela Figura 2.19.

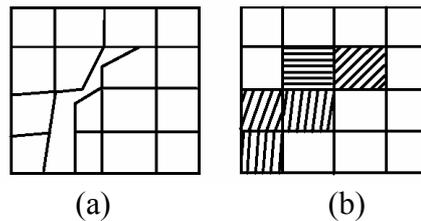


Figura 2.19 – Modelos empregados na modelagem das fissuras:
 (a) *aproximação discreta*; (b) *aproximação distribuída*. FONTE: Claure, 1994.

O *modelo de fissuras discretas* representa cada fissura individualmente, como uma descontinuidade real da malha de elementos finitos. Esta aproximação foi primeiramente usada por Ngo e Scordelis (1967) para analisar vigas de concreto armado. Naquele estudo, as fissuras foram modeladas por separação dos nós que inicialmente ocupavam a mesma posição no espaço. Uma restrição deste modelo é que as fissuras devem se formar apenas ao longo da borda dos elementos finitos. Ficando a resposta fortemente dependente da malha. Nesta aproximação, após a formação da fissura, a topologia da malha varia, exigindo procedimentos para a sua atualização que demandam muito esforço computacional. Posteriormente, Ingraffea e Saoma (1981) consideraram a aproximação de *fissuras discretas*, usando *métodos auto-adaptativos* de refinamento de malha, através da introdução de elementos de fronteira ao longo da propagação das fissuras. Este procedimento diminuiu a dependência dos resultados com relação à malha adotada para o modelo. Contudo, necessita uma redefinição da malha e os novos elementos introduzidos fazem a análise ficar muito mais pesada computacionalmente.

Já o *modelo de fissuras distribuídas* não leva em conta a descontinuidade real da malha. Pelo contrário, supõe-se que o concreto fissurado mantém-se contínuo e as propriedades do material são modificadas de maneira a considerar-se o dano devido à fissuração. Este tipo de modelo é usado na maioria das aplicações da engenharia estrutural. Esta aproximação é atrativa computacionalmente, já que a topologia da malha não muda durante a análise e somente é necessário atualizar a relação tensão-deformação quando ocorrer a fissuração. Dentro da *aproximação distribuída*, existem duas categorias de modelos: aqueles que consideram os *planos de fissuração fixos* e a outra categoria que considera os *planos de fissuração girando* durante os vários processos de carga. Neste trabalho implementou-se um *modelo de fissuras distribuídas*, com as fissuras girando segundo as direções de tensões principais durante o carregamento, como será explicado em detalhes no Capítulo 3.

CAPÍTULO 3

3. MODELAGEM DO CONCRETO

Neste capítulo apresentam-se as características e formulações do modelo constitutivo proposto nesta tese para a modelagem numérica do comportamento do concreto. Apresenta-se o fluxograma deste modelo implementado para o concreto no programa de elementos finitos. E, para finalizar, são apresentados resultados comparativos com ensaios experimentais obtidos na literatura para demonstrar a validade do modelo proposto.

3.1 MODELO ELÁSTICO NÃO-LINEAR ORTOTRÓPICO

Neste trabalho, utiliza-se um modelo constitutivo elástico não-linear ortotrópico para representar o comportamento do concreto. Entre os modelos já existentes nesta categoria, tem-se o apresentado por Darwin e Pecknold (1977), para análise de estados planos de tensão. Elwi e Murray (1979) deram continuidade ao desenvolvimento deste modelo, estendendo sua aplicabilidade para análises tridimensionais. Posteriormente, o modelo foi aperfeiçoado por Balan et al. (1997), Kwon (2000), Balan et al. (2001) e Kwon e Spacone (2002).

O modelo ortotrópico proposto é baseado no modelo apresentado por Kwon (2000), tendo a capacidade de capturar a resposta do concreto quando solicitado por estados multiaxiais de tensões. Como mencionado no Capítulo 2, foi escolhido este modelo proposto por Kwon (2000) por se tratar do mais completo entre os outros trabalhos mencionados no parágrafo anterior. Entretanto, nesta tese foram introduzidas algumas modificações no modelo de Kwon (2000), com a finalidade de aprimorá-lo. Estas modificações serão mencionadas à medida que forem sendo apresentadas as formulações.

3.1.1 Lei constitutiva tridimensional

Inicialmente, Darwin e Pecknold (1977) desenvolveram um procedimento numérico para analisar a resposta do concreto quando solicitado por estados biaxiais de tensões. A relação constitutiva para um estado plano de tensões de um material ortotrópico pode ser expressa por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu_1\nu_2)} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_1\nu_2)G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

onde,

E_i – é o módulo de elasticidade secante na direção de ortotropia i (com $i = 1,2$);

ν_1, ν_2 – são os coeficientes de Poisson;

$G = \frac{(E_1 + E_2 - 2\sqrt{\nu_1\nu_2}\sqrt{E_1E_2})}{4(1-\nu_1\nu_2)}$ – é o módulo de elasticidade transversal no plano 1-2.

No modelo desenvolvido por Darwin e Pecknold (1977), os eixos de ortotropia, coincidindo com os eixos de tensões principais correntes, deixam a relação (3.1) reduzida a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu_1\nu_2)} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 \\ \nu_1 E_2 & E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Considerando a simetria da matriz constitutiva acima, ou seja, $\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1$ e o coeficiente de Poisson equivalente igual a $\nu = \sqrt{\nu_1\nu_2}$, a equação (3.2) pode também ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1E_2} \\ \nu\sqrt{E_1E_2} & E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Elwi e Murray (1979) estenderam o modelo de Darwin e Pecknold (1977) para a análise de situações tridimensionais. A relação tensão-deformação deste modelo pode ser expressa por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.4)$$

onde, os vetores de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e deformações específicas $\boldsymbol{\varepsilon}$ são dados por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

A matriz constitutiva para um material ortotrópico \mathbf{D}_0 é determinada por:

$$\mathbf{D}_0 = \frac{1}{\Omega_c} \begin{bmatrix} E_1(1-\mu_{32}^2) & \sqrt{E_1 E_2}(\mu_{13}\mu_{32} + \mu_{12}) & \sqrt{E_1 E_3}(\mu_{12}\mu_{32} + \mu_{13}) & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{E_1 E_2}(\mu_{31}\mu_{23} + \mu_{21}) & E_2(1-\mu_{13}^2) & \sqrt{E_2 E_3}(\mu_{12}\mu_{13} + \mu_{32}) & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{E_1 E_3}(\mu_{21}\mu_{23} + \mu_{31}) & \sqrt{E_2 E_3}(\mu_{21}\mu_{31} + \mu_{23}) & E_3(1-\mu_{12}^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}\Omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}\Omega_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}\Omega_c \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

onde,

$$\mu_{ij}^2 = \nu_{ij}\nu_{ji} \quad \text{com } i,j=1,2,3;$$

$$\Omega_c = 1 - \mu_{12}^2 - \mu_{23}^2 - \mu_{13}^2 - 2\mu_{12}\mu_{23}\mu_{13};$$

$$G_{12} = \frac{1}{4\Omega_c} \left[E_1 + E_2 - 2\mu_{12}\sqrt{E_1 E_2} - \left(\sqrt{E_1}\mu_{23} + \sqrt{E_2}\mu_{31} \right)^2 \right];$$

$$G_{23} = \frac{1}{4\Omega_c} \left[E_2 + E_3 - 2\mu_{23}\sqrt{E_2 E_3} - \left(\sqrt{E_2}\mu_{31} + \sqrt{E_3}\mu_{12} \right)^2 \right];$$

$$G_{31} = \frac{1}{4\Omega_c} \left[E_3 + E_1 - 2\mu_{31}\sqrt{E_3 E_1} - \left(\sqrt{E_3}\mu_{12} + \sqrt{E_1}\mu_{23} \right)^2 \right].$$

Se os eixos de ortotropia coincidem com os eixos de tensões principais correntes a relação (3.4) fica reduzida a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Omega_c} \begin{bmatrix} E_1(1-\mu_{32}^2) & \sqrt{E_1 E_2}(\mu_{13}\mu_{32} + \mu_{12}) & \sqrt{E_1 E_3}(\mu_{12}\mu_{32} + \mu_{13}) \\ \sqrt{E_1 E_2}(\mu_{31}\mu_{23} + \mu_{21}) & E_2(1-\mu_{13}^2) & \sqrt{E_2 E_3}(\mu_{12}\mu_{13} + \mu_{32}) \\ \sqrt{E_1 E_3}(\mu_{21}\mu_{23} + \mu_{31}) & \sqrt{E_2 E_3}(\mu_{21}\mu_{31} + \mu_{23}) & E_3(1-\mu_{12}^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Para o estado plano de tensões ($\sigma_3 = 0$), considerando $\mu_{12} = \nu$, $\mu_{23} = \mu_{31} = 0$ e eliminando a terceira linha e a terceira coluna, a equação (3.7) reduz-se à forma (3.3) proposta por Darwin e Pecknold (1977).

Como mencionado anteriormente, o modelo proposto nesta tese baseou-se no trabalho apresentado por Kwon (2000). Também, considerou-se uma lei constitutiva ortotrópica, conforme a equação (3.4), com a matriz constitutiva apresentada da seguinte forma:

$$\mathbf{D}_o = \frac{1}{\Omega_c} \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) & E_1(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}) & 0 & 0 & 0 \\ E_2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) & E_2(1-\nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}) & 0 & 0 & 0 \\ E_3(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}) & E_3(\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}) & E_3(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}\Omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}\Omega_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}\Omega_c \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde,

$$\Omega_c = 1 - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13};$$

E_i – é o módulo de elasticidade secante, na direção de ortotropia i (com $i = 1, 2, 3$);

ν_{ij} – é o coeficiente de Poisson (com $i, j = 1, 2, 3$);

G_{ij} – é o módulo de elasticidade transversal no plano $i-j$ (com $i, j = 1, 2, 3$).

Vale salientar que os coeficientes das três primeiras linhas e colunas da matriz (3.8) foram obtidos a partir da equação (3.6), considerando $E_i\nu_{ji} = E_j\nu_{ij}$ e $\mu_{ij} = \sqrt{\nu_{ij}\nu_{ji}}$ que resulta

em $\mu_{ij} = \frac{E_j\nu_{ij}}{\sqrt{E_i E_j}}$. No entanto, os módulos de elasticidade transversais G_{ij} foram modificados,

sendo expressos por:

$$G_{ij} = \frac{E_i E_j}{E_i (1 + \nu_{ij}) + E_j (1 + \nu_{ji})} \quad (3.9)$$

Se os eixos de ortotropia forem considerados paralelos aos eixos das tensões principais correntes, a relação constitutiva fica reduzida a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Omega_c} \begin{bmatrix} E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) & E_1(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}) \\ E_2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) & E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}) \\ E_3(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}) & E_3(\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}) & E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

As variáveis desta equação (3.10) já foram definidas na equação (3.8).

Para empregar a relação (3.10), os valores dos módulos de elasticidade secantes E_i e os coeficientes de Poisson ν_{ij} devem ser determinados. Estes valores são obtidos a partir de curvas tensão-deformação uniaxiais para o concreto, utilizando o conceito de *deformação uniaxial equivalente*, descrito a seguir.

3.1.2 Deformação uniaxial equivalente

Em um estado multiaxial de tensões, a deformação específica real em uma determinada direção não é função apenas da tensão naquela direção, mas também das tensões atuantes nas outras direções ortogonais. Isto torna complexa a determinação da resposta tridimensional do concreto. Para facilitar esta análise tridimensional, pode-se utilizar o conceito de deformação uniaxial equivalente, inicialmente proposto por Darwin e Pecknold (1977) para análises bidimensionais.

Darwin e Pecknold (1977) consideraram este procedimento como um artifício para desacoplar a resposta bidimensional do concreto em duas curvas uniaxiais, facilitando a determinação de seu comportamento. Esta técnica fornece uma maneira de separar o efeito do coeficiente de Poisson das deformações, permitindo uma boa aproximação com os resultados experimentais.

Para melhor compreender a definição da deformação uniaxial equivalente, pode-se

analisar o comportamento de um material elástico-linear, conforme ilustrado na Figura 3.1. Uma das curvas representa o gráfico tensão-deformação para uma situação de compressão uniaxial. A outra curva representa a relação tensão-deformação segundo a direção mais comprimida (direção da tensão σ_2), para um determinado estado de tensões de compressão biaxial, onde $\sigma_1 = \alpha \sigma_2$ com $\alpha < 1$.

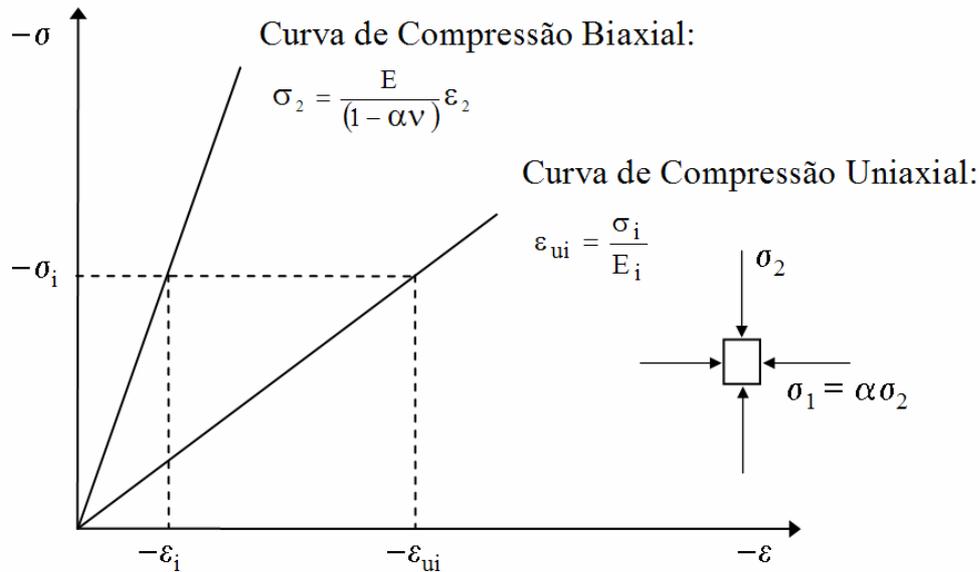


Figura 3.1 – Deformação uniaxial equivalente para um material elástico-linear.

FONTE: Darwin e Pecknold, 1977.

Observa-se que a curva com compressão biaxial apresenta-se muito mais rígida do que a curva uniaxial, devido ao efeito enrijecedor que a compressão transversal exerce no material. Para um determinado valor de tensão principal σ_i , a correspondente deformação real ε_i , para a situação de compressão biaxial, é dependente da relação entre as tensões principais α , existindo diversas curvas tensão-deformação reais para diferentes valores de α . Em contrapartida, a deformação uniaxial equivalente, ε_{ui} , é a deformação correspondente à tensão principal, σ_i , na curva uniaxial, existindo uma única curva para representar esta situação. As deformações uniaxiais equivalentes podem ser determinadas por:

$$\varepsilon_{ui} = \frac{\sigma_i}{E_i} \quad (3.11)$$

onde,

σ_i – é a tensão principal corrente na direção de ortotropia i ;

E_i – é o módulo de elasticidade secante na direção de ortotropia i ;

$i = 1, 2, 3$ – para análise tridimensional.

A relação (3.3) do modelo apresentado por Darwin e Pecknold (1977), pode ser colocada na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{u1} \\ \varepsilon_{u2} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

sendo as deformações uniaxiais equivalentes expressas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{u1} &= \frac{1}{(1-\nu^2)} \left[\varepsilon_1 + \left(\nu \sqrt{E_2/E_1} \right) \varepsilon_2 \right] \\ \varepsilon_{u2} &= \frac{1}{(1-\nu^2)} \left[\left(\nu \sqrt{E_1/E_2} \right) \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

As variáveis da equação (3.13) já foram definidas nas equações (3.1) e (3.2).

Então se observa que as tensões principais σ_1 e σ_2 podem ser obtidas através de relações constitutivas uniaxiais (3.12), a partir das deformações uniaxiais equivalentes ε_{u1} e ε_{u2} . Sendo assim, a introdução destas deformações uniaxiais equivalentes permite representar o comportamento biaxial do concreto através de duas curvas tensão-deformação uniaxiais separadas.

Deve-se salientar que estas deformações uniaxiais equivalentes não são deformações reais. São deformações fictícias definidas nas direções das tensões principais correntes e acumuladas nestas direções. Desta maneira, ε_{ui} não fornece uma história de deformação segundo uma direção fixa, mas em uma direção que muda continuamente em função do estado de tensões principais correntes (Darwin e Pecknold, 1977).

Elwi e Murray (1979) utilizaram também o conceito de deformação uniaxial equivalente para a análise tridimensional do concreto. A relação (3.7) pode ser rescrita da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{u1} \\ \varepsilon_{u2} \\ \varepsilon_{u3} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Ficando as deformações uniaxiais equivalentes dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{u1} &= \frac{(1-\mu_{32}^2)}{\Omega_c} \varepsilon_1 + \frac{\sqrt{E_2/E_1}(\mu_{13}\mu_{32} + \mu_{12})}{\Omega_c} \varepsilon_2 + \frac{\sqrt{E_3/E_1}(\mu_{12}\mu_{32} + \mu_{13})}{\Omega_c} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{u2} &= \frac{\sqrt{E_2/E_1}(\mu_{13}\mu_{32} + \mu_{12})}{\Omega_c} \varepsilon_1 + \frac{(1-\mu_{13}^2)}{\Omega_c} \varepsilon_2 + \frac{\sqrt{E_3/E_2}(\mu_{12}\mu_{13} + \mu_{32})}{\Omega_c} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{u3} &= \frac{\sqrt{E_3/E_1}(\mu_{12}\mu_{32} + \mu_{13})}{\Omega_c} \varepsilon_1 + \frac{\sqrt{E_3/E_2}(\mu_{12}\mu_{13} + \mu_{32})}{\Omega_c} \varepsilon_2 + \frac{(1-\mu_{12}^2)}{\Omega_c} \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (3.15)$$

As variáveis da equação (3.15) já foram definidas na equação (3.6).

No modelo proposto por Kwon (2000), a relação (3.10) pode também ser rescrita por (3.14), ficando as deformações uniaxiais equivalentes iguais a:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{u1} &= \frac{1}{\Omega_c} \left[(1-\nu_{23}\nu_{32}) \varepsilon_1 + (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) \varepsilon_2 + (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}) \varepsilon_3 \right] \\ \varepsilon_{u2} &= \frac{1}{\Omega_c} \left[(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) \varepsilon_1 + (1-\nu_{13}\nu_{31}) \varepsilon_2 + (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}) \varepsilon_3 \right] \\ \varepsilon_{u3} &= \frac{1}{\Omega_c} \left[(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}) \varepsilon_1 + (\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}) \varepsilon_2 + (1-\nu_{12}\nu_{21}) \varepsilon_3 \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Então, como dito anteriormente, estas deformações uniaxiais equivalentes são utilizadas na determinação das propriedades do concreto, ou seja, dos módulos de elasticidade secantes e dos coeficientes de Poisson, usados na relação (3.10). Entretanto, percebe-se pela equação (3.11) que, para se obter as deformações uniaxiais equivalentes em um material não-linear, precisa-se conhecer os módulos de elasticidade secantes E_i nas três direções de tensões principais correntes, tornando-se necessária a utilização de um processo iterativo para determinação destas variáveis. Este processo iterativo será explicado detalhadamente no item 3.1.11.

3.1.3 Curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes para cargas monótonas

Conforme mencionado anteriormente, o modelo adotado para o concreto segue o trabalho de Darwin e Pecknold (1977), admitindo que a lei constitutiva tridimensional possa ser decomposta em três relações uniaxiais com as tensões reais sendo funções das deformações uniaxiais equivalentes.

Têm-se desenvolvido muitas leis uniaxiais para o concreto, como aquelas propostas por Desayi e Krishnan (1964), Saenz (1964), Popovics (1973) e CEB-FIP 1990 (1993). Desayi e Krishnan (1964) propuseram uma curva tensão-deformação para o concreto comprimido que depois foi generalizada por Saenz (1964) como:

$$\sigma_i = f_{ci} \frac{K_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)}{1 + (K_i - 2) \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) + \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^2} \quad \text{com } i=1,2,3 \quad (3.17)$$

onde,

$$K_i = E_o \frac{\varepsilon_{ci}}{f_{ci}};$$

E_o – é o módulo de elasticidade inicial;

ε_{ui} – é a deformação uniaxial equivalente na direção de ortotropia i ;

f_{ci} – é a resistência do concreto, também chamada de tensão de pico;

ε_{ci} – é a deformação específica correspondente à resistência f_{ci} , ou seja, deformação de pico.

Darwin e Pecknold (1977) utilizaram a equação (3.17) para a determinação das duas curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes na análise bidimensional. Elwi e Murray (1979) utilizaram a expressão de Saenz (1964) para descrever a relação tensão-deformação uniaxial equivalente. Esta relação foi adotada tanto para a resposta à compressão quanto para a resposta à tração do concreto, solicitado por cargas monótonas. Desta forma resultou a seguinte equação constitutiva (Figura 3.2):

$$\sigma_i = f_{ci} \frac{K_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)}{1 + A_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) + B_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 + C_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^3} \quad \text{com } i=1,2,3 \quad (3.18)$$

onde,

$$K_i = E_o \frac{\varepsilon_{ci}}{f_{ci}}; \quad K_{ei} = \frac{\varepsilon_{fi}}{\varepsilon_{ci}}; \quad K_{\sigma i} = \frac{f_{ci}}{f_{fi}};$$

$$A_i = C_i + K_i - 2; \quad B_i = 1 - 2C_i; \quad C_i = K_i \frac{(K_{\sigma i} - 1)}{(K_{ei} - 1)^2} - \frac{1}{K_{ei}};$$

f_{fi}, ε_{fi} – são as tensões e as deformações específicas do ponto de controle no ramo descendente da curva. As demais variáveis foram definidas na equação (3.17).

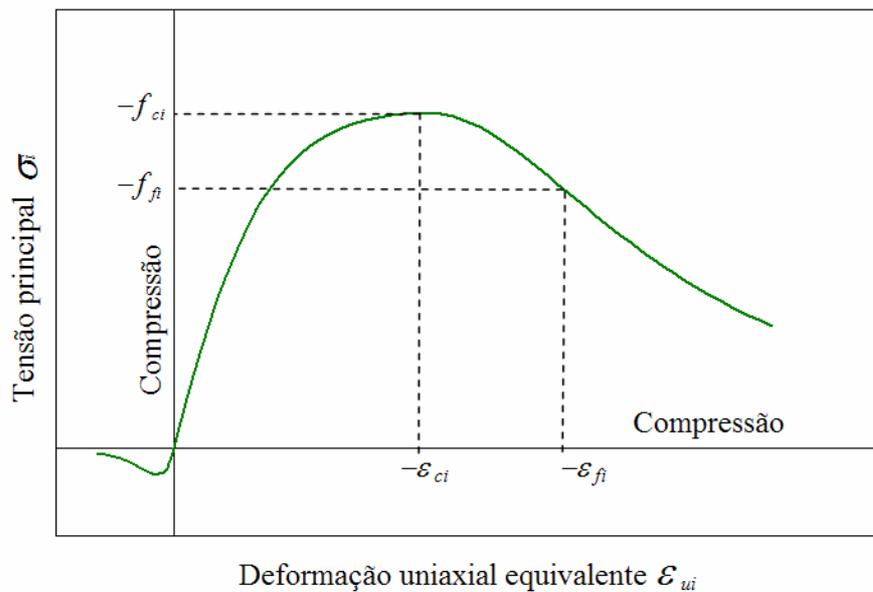


Figura 3.2 – Gráfico ilustrativo do modelo proposto por Saenz (1964).

A curva proposta por Saenz (1964) tem sido bastante utilizada como relação tensão-deformação para o concreto, conseguindo representar através de uma única expressão tanto o ramo ascendente quanto o descendente. Porém, esta curva trabalha bem apenas se $E_o/E_{ci} \geq 2$ (onde $E_{ci} = f_{ci}/\varepsilon_{ci}$), ou seja, quando o módulo de elasticidade secante no ponto de pico, E_{ci} , não for maior do que a metade do módulo de elasticidade inicial, E_o . Caso esta condição não seja satisfeita, a curva apresenta uma dupla curvatura entre a origem e o ponto de pico. Este

problema pode ser parcialmente corrigido fixando-se (E_o/E_{ci}) em um valor igual a 2, independentemente da real relação entre os módulos de elasticidade (Balan et al., 2001).

Popovics (1973) propôs uma outra curva para definir a relação tensão-deformação do concreto, que é expressa por:

$$\sigma_i = f_{ci} \frac{K_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)}{1 + (K_i - 1) \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^{R_i}} \quad \text{com } i=1,2,3 \quad (3.19)$$

onde,

$$R_i = \frac{K_i}{(K_i - 1)}, \text{ e as outras variáveis já foram definidas na equação (3.18).}$$

Esta curva aproxima bem a rigidez inicial real do concreto no ramo ascendente. Entretanto, não se ajusta bem aos resultados experimentais no ramo descendente.

Para evitar qualquer limitação na definição da curva uniaxial equivalente, Kwon (2000) propôs uma mudança na curva usada por Elwi e Murray (1979). Duas curvas são usadas para descrever a resposta à tração e à compressão do concreto: a curva proposta por Popovics (1973) descreve o ramo ascendente até o ponto de pico, enquanto a curva de Saenz (1964) é usada na resposta do ramo descendente. A combinação dos modelos de Popovics (1973) e Saenz (1964), a chamada curva de *Popovics-Saenz*, a partir das equações (3.18) e (3.19), é, então, expressa pela seguinte relação:

$$\sigma_i = f_{ci} \frac{K_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)}{1 + A_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) + B_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 + C_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^3 + D_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^{R_i}} \quad \text{com } i = 1,2,3 \quad (3.20)$$

$$\text{– Ramo ascendente: Se } \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) \leq 1: A_i = B_i = C_i = 0; D_i = (K_i - 1);$$

$$\text{– Ramo descendente: Se } \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) > 1: A_i = C_i + K_i - 2; B_i = 1 - 2C_i;$$

$$C_i = K_i \frac{(K_{\sigma i} - 1)}{(K_{\varepsilon i} - 1)^2} - \frac{1}{K_{\varepsilon i}}; D_i = 0.$$

As outras variáveis estão definidas nas equações (3.18) e (3.19).

O uso da curva de *Popovics-Saenz* [equação (3.20)], como relação uniaxial equivalente, permite a obtenção de ótimos resultados para o concreto simples, conforme apresentado em Franca (2006). Entretanto, para elementos de concreto armado, a curva de *Popovics-Saenz* não se mostrou adequada para considerar a colaboração do concreto entre fissuras (efeito de *tension-stiffening*).

Assim no modelo proposto no presente trabalho utiliza-se a curva de *Popovics-Saenz* (3.20) para descrever apenas a resposta à compressão do concreto solicitado por cargas monótonas, como ilustrado na Figura 3.3. Para a resposta à tração do concreto é utilizada a formulação descrita a seguir. Quando $\varepsilon_{ui} \leq \varepsilon_{ci}$ tem-se que:

$$\sigma_i = E_o \varepsilon_{ui} \quad \text{com } i = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

Porém, quando $\varepsilon_{ui} > \varepsilon_{ci}$, vale a expressão:

$$\sigma_i = \alpha_t f_{ci} \left(1 - \frac{\varepsilon_{ui}}{0,01}\right) \quad \text{com } i = 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

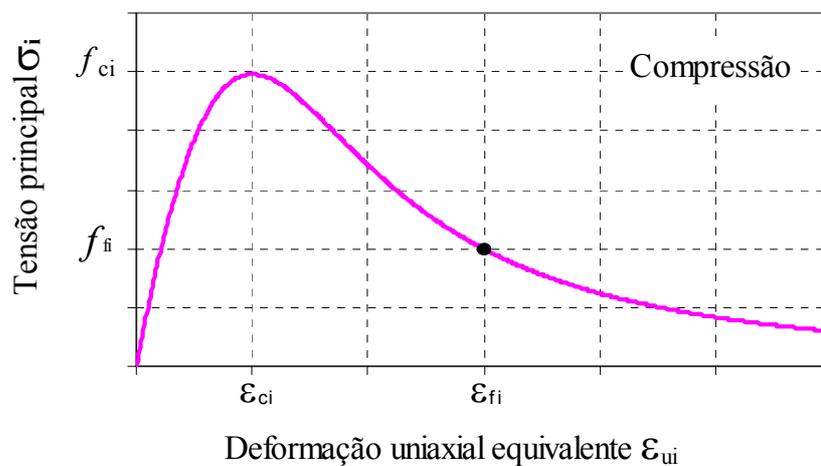
onde,

α_t – é o coeficiente de redução da tensão de fissuração. E as demais variáveis foram definidas na equação (3.17).

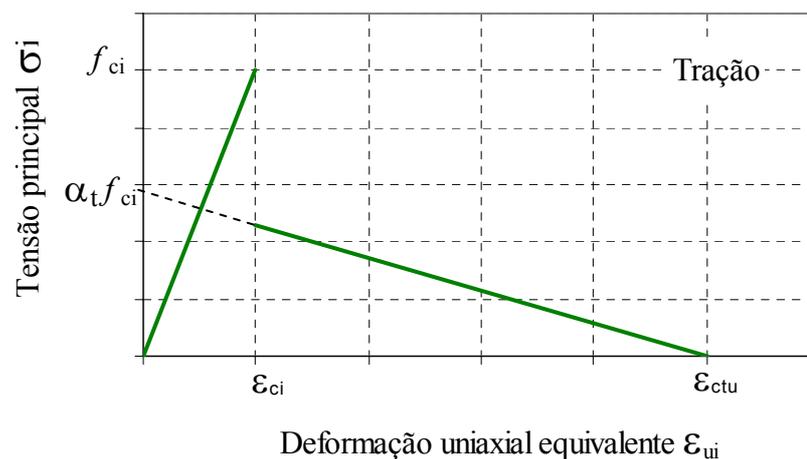
A relação constitutiva (3.22) é a mesma que foi adotada por Prates Júnior (1992) para simular a colaboração do concreto entre as fissuras. A variável ε_{ctu} apresentada na Figura 3.3 indica a deformação limite para a qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada. O valor limite da deformação ε_{ctu} deveria estar relacionado ao escoamento da armadura que atravessa a fissura, uma vez que após o escoamento não existe mais colaboração do concreto entre fissuras. Porém, por simplicidade pode-se adotar um valor fixo para ε_{ctu} . Prates Júnior (1992) adotou o valor 0,002 para esta deformação ε_{ctu} e 0,8 para o coeficiente α_t . Real (2000) e Martinelli (2003) também adotaram esta relação constitutiva para o concreto tracionado após a fissuração. Real (2000) admitiu os valores $\alpha_t = 0,6$ e

$\varepsilon_{ctu} = 0,002$, enquanto Martinelli (2003) considerou $\alpha_t = 0,6$ e $\varepsilon_{ctu} = 0,001$.

No presente estudo, para permitir um melhor ajuste com resultados experimentais adotou-se para a deformação ε_{ctu} o valor 0,01, como indicado na equação (3.22). O valor do parâmetro α_t depende do elemento a ser analisado, conforme será apresentado no Capítulo 6. Para ensaios com concreto simples, o modelo numérico não considera o amolecimento por tração do concreto, considerando a contribuição do concreto para rigidez do elemento apenas até o momento de fissuração do concreto, ou seja, $\alpha_t = 0$.



(a)



(b)

Figura 3.3 – Curvas tensão-deformação para o concreto submetido a cargas monótonas: (a) resposta à compressão; (b) resposta à tração.

Nas equações (3.20), (3.21) e (3.22), adotou-se para o módulo de elasticidade inicial, E_o , a expressão proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993):

$$E_o = 2,15 \times 10^4 \alpha_E \left[\frac{f_c}{10} \right]^{1/3} \quad (MPa) \quad (3.23)$$

onde,

α_E – é um coeficiente que depende do tipo de agregado, como apresentado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Efeito do tipo de agregado no módulo de elasticidade do concreto.

FONTE: CEB-FIP 1990, 1993.

Tipo de agregado	α_E
Basáltico, Calcário denso	1,2
Quartzoso	1,0
Calcário	0,9
Arenítico	0,7

Através destas equações (3.20), (3.21) e (3.22), pode-se definir os módulos de elasticidade secantes, usados na equação (3.10), considerando $E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_{ii}}$, com $i=1,2,3$.

3.1.4 A superfície de ruptura para o concreto

Para definição das três curvas uniaxiais equivalentes é necessário a determinação das variáveis $K_i, K_{\varepsilon_i}, K_{\sigma_i}$, usadas na equação (3.20), que são funções das tensões e deformações específicas de pico f_{ci} e ε_{ci} , respectivamente. Estas tensões e deformações específicas de pico para um determinado estado de tensão corrente são calculadas a partir de superfícies de ruptura no espaço de tensões principais ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

3.1.4.1 Características das superfícies de ruptura do concreto

A superfície de ruptura do concreto pode ser expressa como função dos invariantes I_1, J_2, J_3 , através da seguinte expressão:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (3.24)$$

onde,

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ – é o primeiro invariante do tensor de tensões;

J_2 – é o segundo invariante do tensor desviador de tensões, dado por:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2];$$

J_3 – é o terceiro invariante do tensor desviador de tensões, igual a:

$$J_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m), \text{ onde:}$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \text{ – é a tensão normal média.}$$

Esta superfície de ruptura também pode ser representada, no espaço de tensões *Haigh-Westergaard*, em função das coordenadas ξ, ρ, θ :

$$f(\xi, \rho, \theta) = 0 \quad (3.25)$$

$$\text{sendo, } \xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}}; \rho = \sqrt{2J_2}; \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}.$$

Uma outra forma alternativa é expressar a superfície de ruptura como função das tensões normal e tangencial octaédricas (σ_{oct}, τ_{oct}), como ilustrado na Figura 3.4, ou seja:

$$f(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta) = 0 \quad (3.26)$$

$$\text{onde, } \sigma_{oct} = \sigma_m \text{ e } \tau_{oct} = \left(\frac{\rho}{\sqrt{3}} \right).$$

Para estudar a superfície de ruptura em um espaço tridimensional de tensões, analisem-se as suas seções transversais e seus meridianos, conforme Figura 3.5. As seções transversais são curvas de interseção entre a superfície de ruptura e um plano desviador, que é perpendicular ao eixo hidrostático, considerando ξ constante. Os meridianos da superfície de ruptura são curvas de interseção entre esta superfície e um plano meridiano, que contém o eixo hidrostático, considerando θ constante (Chen e Han, 1988).

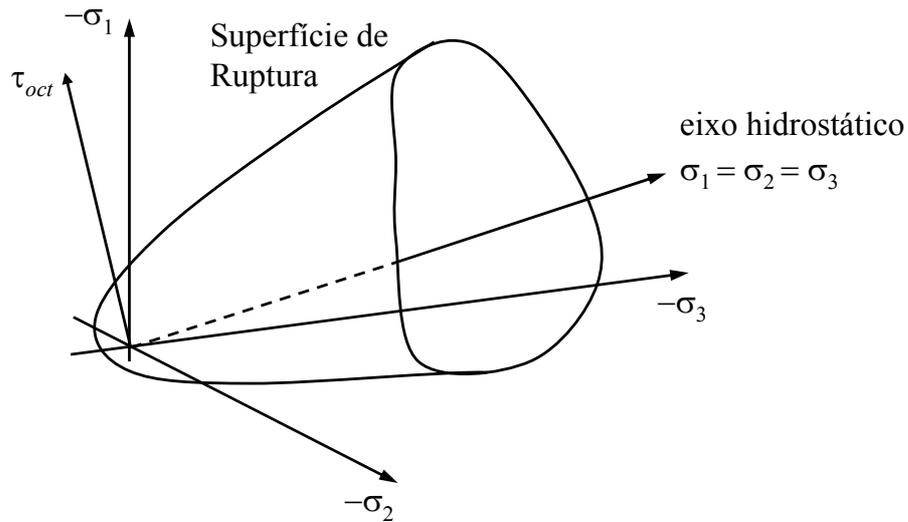


Figura 3.4 – Superfície de ruptura para o concreto.

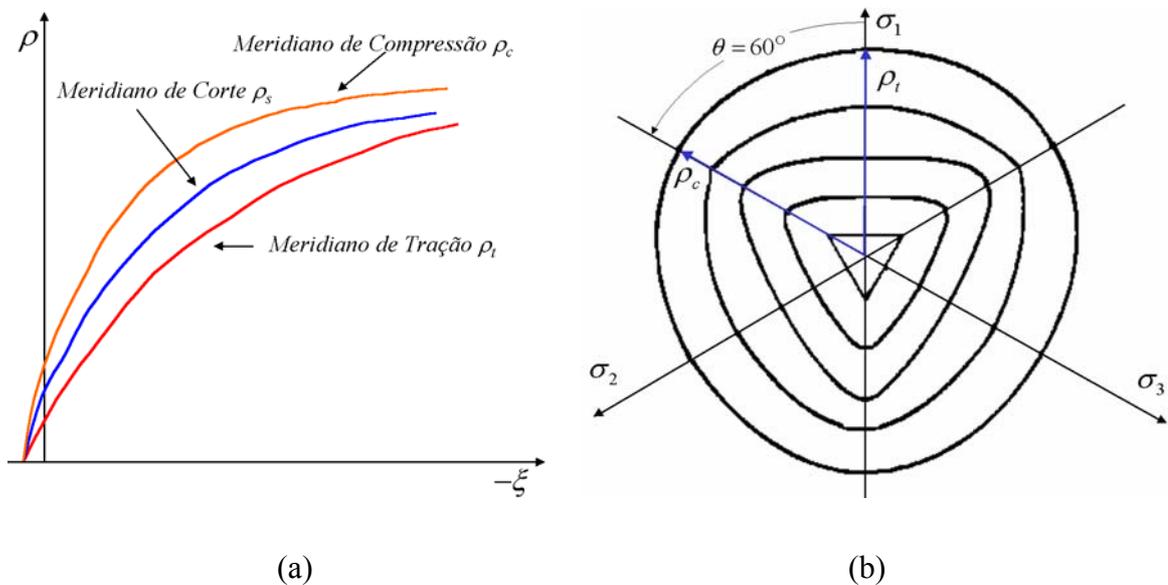


Figura 3.5 – Características das superfícies de ruptura:
(a) meridianos da superfície de ruptura; (b) seções dos planos desviadores.

FONTE: Chen e Han, 1988.

Observa-se, na Figura 3.5, que as seções transversais das superfícies de ruptura apresentam setores de simetria e, assim, torna-se necessário analisar apenas o setor de $\theta = 0^\circ$ a $\theta = 60^\circ$, ficando os demais setores conhecidos por simetria. Estas seções transversais são dependentes do ângulo θ , definido como ângulo de orientação do estado de tensão no plano

desviador. Este ângulo pode ser obtido a partir das tensões principais $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ pela seguinte equação:

$$\cos\theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}} \quad (3.27)$$

O trecho entre $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 60^\circ$, mostrado na Figura 3.5, segue a convenção $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ adotada para as tensões principais. Dentro desta convenção, existem dois casos extremos:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3 \text{ para } \theta = 60^\circ \quad (3.28)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3 \text{ para } \theta = 0^\circ$$

O meridiano correspondente à $\theta = 60^\circ$ é chamado *meridiano de compressão*, e o meridiano determinado por $\theta = 0^\circ$ é chamado *meridiano de tração*. Além disso, o meridiano determinado por $\theta = 30^\circ$ é chamado *meridiano de corte*. Como observado na Figura 3.5, estes três meridianos satisfazem a seguinte relação $\rho_t < \rho_s < \rho_c$.

A superfície de ruptura do concreto, segundo evidências experimentais, apresenta as seguintes características (Chen e Han, 1988):

- É uma superfície suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- Os meridianos são parabólicos e abrem no sentido do eixo hidrostático negativo;
- A curva de ruptura é aproximadamente triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão, ficando mais circular à medida que as tensões de compressão aumentam.

Numerosas expressões têm sido desenvolvidas para a superfície de ruptura do concreto. Por exemplo, diversos critérios de ruptura são apresentados em Chen e Han (1988) e Menétrey e Willam (1995), onde a classificação é feita de acordo com a quantidade de parâmetros que aparecem nas expressões. Entre as superfícies de ruptura mais utilizadas para descrição da resistência triaxial do concreto, têm-se as superfícies de quatro parâmetros de Ottosen (1977) e de cinco parâmetros de Willam-Warnke (1975). Estas superfícies têm sido amplamente utilizadas porque os pontos de ruptura determinados por estas aproximam-se

bastante dos resultados experimentais, como apresentado em Chen e Han (1988). Além de serem atrativas pela simplicidade e facilidade de aplicação das equações empregadas.

Kwon (2000) utiliza a superfície de Willam-Warnke (1975) para determinação da resistência do concreto. No presente trabalho, foram adotadas duas superfícies de ruptura para o concreto: a superfície de Ottosen (1977) e a superfície de Willam-Warnke (1975). Estas duas superfícies foram implementadas com o intuito de fazer uma análise comparativa das vantagens e desvantagens apresentadas pelas mesmas. As equações usadas nestas duas superfícies são apresentadas em detalhes nas próximas seções. E a análise comparativa é apresentada no final deste capítulo, na seção (3.2).

3.1.4.2 A superfície de Willam-Warnke (1975)

Esta superfície de ruptura pode ser expressa pela seguinte equação:

$$f(\sigma_m, \rho, \theta) = \rho - \rho_f(\sigma_m, \theta) = 0 \quad |\theta| \leq 60^\circ \quad (3.29)$$

sendo:

$\rho = \sqrt{3}\tau_{oct}$ – componente de tensão perpendicular ao eixo hidrostático;

$\rho_f(\sigma_m, \theta)$ – define a curva de ruptura nos planos desviadores, sendo determinada por:

$$\rho_f(\sigma_m, \theta) = \frac{s+t}{v} \quad (3.30)$$

onde,

$$s = s(\sigma_m, \theta) = 2\rho_c(\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos \theta$$

$$t = t(\sigma_m, \theta) = \rho_c(2\rho_t - \rho_c) u^{1/2}$$

$$v = v(\sigma_m, \theta) = 4(\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos^2 \theta + (\rho_c - 2\rho_t)^2$$

A superfície de cinco parâmetros de Willam-Warnke (1975) apresenta curvas parabólicas para os meridianos de compressão e tração (Figura 3.6) expressas por:

$$\sigma_m = a_0 + a_1\rho_t + a_2\rho_t^2 \quad \text{meridiano de tração } (\theta = 0^\circ) \quad (3.31)$$

$$\sigma_m = b_0 + b_1 \rho_c + b_2 \rho_c^2 \quad \text{meridiano de compressão } (\theta = 60^\circ)$$

onde,

σ_m – é a tensão normal média, definida na equação (3.24);

ρ_t, ρ_c – são as componentes de tensões perpendiculares ao eixo hidrostático para $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 60^\circ$, respectivamente;

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ – são constantes do material.

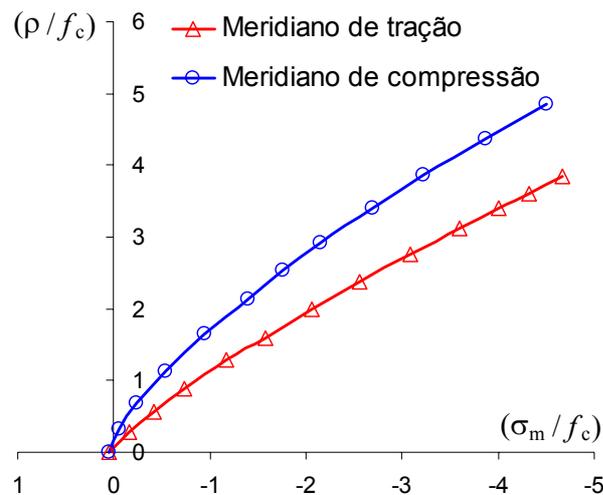


Figura 3.6 – Modelo de Willam-Warnke (1975): meridianos de tração e compressão.

A partir da equação (3.31), as componentes de tensões perpendiculares ao eixo hidrostático, ρ_c e ρ_t , são determinadas por:

$$\rho_t = -\frac{1}{2a_2} \left[a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2(a_0 - \sigma_m)} \right] \quad \text{para o meridiano de tração} \quad (3.32)$$

$$\rho_c = -\frac{1}{2b_2} \left[b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2(b_0 - \sigma_m)} \right] \quad \text{para o meridiano de compressão}$$

Todas as tensões são normalizadas por f_c , ou seja, na equação (3.31) σ_m , ρ_t e ρ_c representam $\frac{\sigma_m}{f_c}$, $\frac{\rho_t}{f_c}$ e $\frac{\rho_c}{f_c}$, respectivamente.

Como os dois meridianos devem interceptar o eixo hidrostático no mesmo ponto, deve-se ter que: $a_0 = b_0$. Baseando-se em ensaios biaxiais apresentados por Kupfer et al. (1969) e outros ensaios triaxiais, os cinco parâmetros da superfície de Willam-Warnke (1975) podem

ser determinados a partir dos seguintes valores na superfície de ruptura (Chen e Han, 1988):

f_c – resistência à compressão uniaxial ($\theta = 60^\circ$);

$f_t = 0,1f_c$ – resistência à tração uniaxial ($\theta = 0^\circ$);

$f_{cc} = 1,15f_c$ – resistência à compressão biaxial ($\theta = 0^\circ$);

$(\sigma_{mc}, \rho_c) = (-1,95f_c; 2,770f_c)$ – resistência à compressão biaxial confinada com $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$;

$(\sigma_{mt}, \rho_t) = (-3,90f_c; 3,461f_c)$ – resistência à compressão biaxial confinada com $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$.

A partir destes estados de ruptura, podem-se determinar os cinco parâmetros usados nos meridianos de compressão (ρ_c) e de tração (ρ_t) da superfície de Willam-Warnke (1975):

$a_0 = b_0 = 0,1025$, $a_1 = -0,8403$, $a_2 = -0,0910$, $b_1 = -0,4507$ e $b_2 = -0,1018$.

Adicionalmente, no presente estudo, foram utilizadas as expressões para f_t e f_{cc} recomendadas pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). Desta forma, a resistência à tração uniaxial (f_t) é determinada por:

$$f_t = \bar{\alpha} \left[\frac{f_c - 8}{10} \right]^{2/3} \quad (MPa) \quad (3.33)$$

sendo: $0,95 \leq \bar{\alpha} \leq 1,85$ (MPa). Adicionalmente, considera-se a resistência à compressão biaxial igual a $f_{cc} = 1,20f_c$, como também é recomendado pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993). De acordo com o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), a resistência à tração do concreto é mais variável que sua resistência à compressão e pode ser reduzida substancialmente por efeitos ambientais. Desta forma, o valor médio proposto é muito cauteloso e, em virtude de comparações com valores experimentais, preferiu-se adotar o valor máximo de $\bar{\alpha}$ (1,85MPa).

A partir dos estados de ruptura mencionados anteriormente, foram determinadas

expressões para a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1 e b_2 , funções de $\alpha_u = \frac{f_t}{f_c}$. Estas expressões são dadas por:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -\frac{11,36\alpha_u + 1,05\alpha_u^2}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2} & b_0 &= a_0 \\
 a_1 &= \frac{0,88 + 0,55\alpha_u + 0,31\alpha_u^2}{-1,26 + 1,35\alpha_u - 0,25\alpha_u^2} & b_1 &= \frac{0,36 + 1,41\alpha_u + 0,24\alpha_u^2}{-1,26 + 1,35\alpha_u - 0,25\alpha_u^2} \\
 a_2 &= -\frac{-1,58 + 5,04\alpha_u}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2} & b_2 &= -\frac{-1,86 + 7,0\alpha_u + 0,010\alpha_u^2}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

3.1.4.3 A superfície de Ottosen (1977)

Através do critério de ruptura proposto por Ottosen (1977), a superfície de ruptura para o concreto, submetido a estados multiaxiais de tensões, pode ser definida por:

$$\alpha \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + \beta \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0 \tag{3.35}$$

sendo,

$$\lambda = c_1 \cos \left[(1/3) \arccos (c_2 \cos 3\theta) \right], \text{ para } \cos 3\theta \geq 0;$$

$$\lambda = c_1 \cos \left[(\pi/3) - (1/3) \arccos (-c_2 \cos 3\theta) \right], \text{ para } \cos 3\theta < 0;$$

$$J_2 = \left(\frac{3}{2} \right) \tau_{oct}^2 - \text{o segundo invariante do tensor desviador de tensões;}$$

$$I_1 = 3\sigma_{oct} - \text{o primeiro invariante do tensor de tensões.}$$

Os quatro parâmetros (α , β , c_1 e c_2), usados nesta superfície de ruptura, podem ser determinados a partir das seguintes situações de ruptura:

f_c – resistência à compressão uniaxial ($\theta = 60^\circ$);

f_t – resistência à tração uniaxial ($\theta = 0^\circ$);

$f_{cc} \cong 1,16f_c$ – resistência à compressão biaxial ($\theta = 0^\circ$);

$(\xi, \rho) = (-5f_c ; 4f_c)$ – estado triaxial no meridiano de compressão ($\theta = 60^\circ$).

A Figura 3.7 mostra os meridianos de compressão e tração apresentados pela superfície de Ottosen (1977).

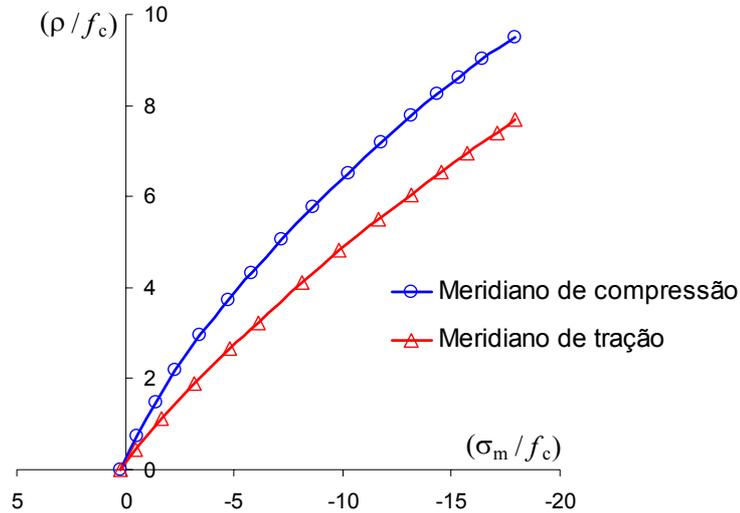


Figura 3.7 – Modelo de Ottosen (1977): meridianos de tração e compressão.

No presente trabalho determinam-se os parâmetros α , β , c_1 e c_2 a partir da relação

$k = \frac{f_t}{f_c}$, através das expressões recomendadas pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993):

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{9k^{1,4}} \\ \beta &= \frac{1}{3,7k^{1,1}} \\ c_1 &= \frac{1}{0,7k^{0,9}} \\ c_2 &= 1 - 6,8(k - 0,07)^2\end{aligned}\tag{3.36}$$

3.1.4.4 Determinação das tensões de pico (f_{c1}, f_{c2}, f_{c3})

A partir da superfície de ruptura de Willam-Warnke (1975) ou de Ottosen (1977), podem-se determinar os valores das tensões de pico (f_{c1}, f_{c2}, f_{c3}) referentes às três direções

para um determinado estado de tensões principais correntes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Para calcular os valores destas tensões de pico utiliza-se o seguinte procedimento:

1. Determina-se uma reta que passa pela origem do sistema de tensões principais e pelo ponto $M_c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de tensões correntes;
2. Em seguida, prolonga-se esta reta até atingir a superfície de ruptura no ponto $M_r(f_{c1}, f_{c2}, f_{c3})$, conforme a Figura 3.8.

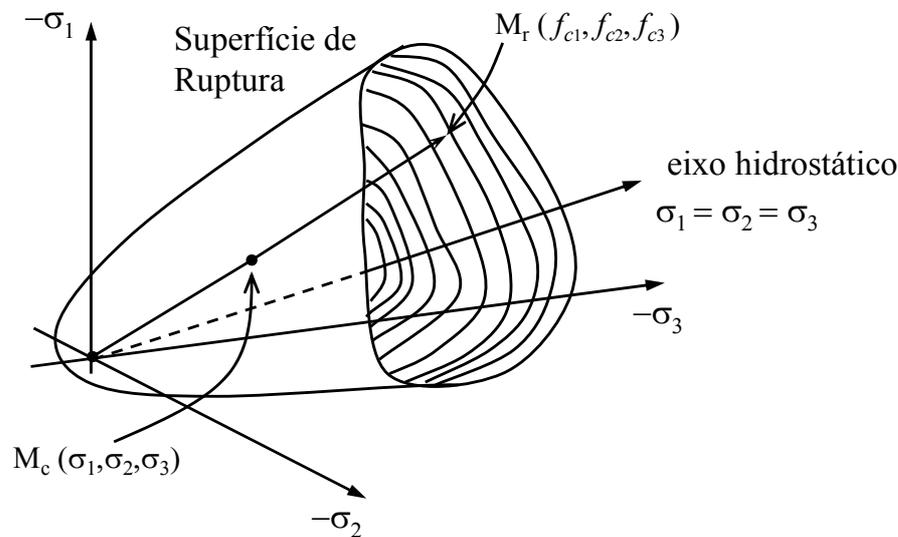


Figura 3.8 – Determinação das tensões de pico (f_{c1}, f_{c2}, f_{c3}) do concreto.

A equação da reta que passa pela origem e pelo estado de tensões principais correntes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ pode ser expressa como função das tensões octaédricas σ_{oct} e τ_{oct} , ou seja:

$$\sigma_{oct} - \left(\frac{\sigma_{oct}^c}{\tau_{oct}^c} \right) \tau_{oct} = 0 \quad (3.37)$$

onde,

$$\sigma_{oct}^c = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \text{ – tensão normal octaédrica corrente;}$$

$$\tau_{oct}^c = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}}{3} \text{ – tensão tangencial octaédrica corrente.}$$

Numericamente, o procedimento é feito através da resolução de um sistema de equações que corresponde à determinação da interseção da reta, equação (3.37), com a superfície de ruptura de Willam-Warnke (1975), equação (3.29), ou de Ottosen (1977), equação (3.35). Este cálculo é realizado através da subrotina *DNEQNF*, apresentada pela IMSL Fortran 90 MP Library (2000), para resolução de sistema de equações não-lineares, usando um algoritmo híbrido de Powell modificado e uma aproximação de diferenças-finitas para o Jacobiano.

Com a solução numérica do sistema de equações, obtém-se as tensões octaédricas $(\sigma_{oct}^r, \tau_{oct}^r)$ no ponto de interseção da reta com a superfície de ruptura especificada. Com estas tensões octaédricas, podem-se determinar as tensões de pico através das expressões abaixo:

$$\begin{aligned} f_{c1} &= \sigma_{oct}^r + \sqrt{2}\tau_{oct}^r \cos(\theta) \\ f_{c2} &= \sigma_{oct}^r + \sqrt{2}\tau_{oct}^r \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ f_{c3} &= \sigma_{oct}^r + \sqrt{2}\tau_{oct}^r \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Através da Figura 3.8, pode-se observar que a superfície de ruptura tem origem em um ponto de ruptura de tração hidrostática e abre na direção negativa do eixo hidrostático. Assim, um carregamento hidrostático de compressão não pode causar ruptura (Chen e Han, 1988). Com o aumento do confinamento lateral, o estado de tensão corrente $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ aproxima-se do eixo hidrostático. Nesta situação, dependendo do estado de tensão de compressão triaxial, a equação (3.37) utilizada para definição das tensões de pico pode não interceptar a superfície de ruptura, não permitindo a obtenção dos valores para f_{c1} , f_{c2} e f_{c3} . Para este caso, utiliza-se uma segunda alternativa para definição das tensões últimas. Considera-se a tensão normal octaédrica σ_{oct} constante, enquanto a tensão tangencial octaédrica τ_{oct} varia até atingir a superfície de ruptura (Figura 3.9). Este procedimento é semelhante ao anterior, apenas trocando a equação (3.37) por:

$$\sigma_{oct} - \sigma_{oct}^c = 0 \quad (3.39)$$

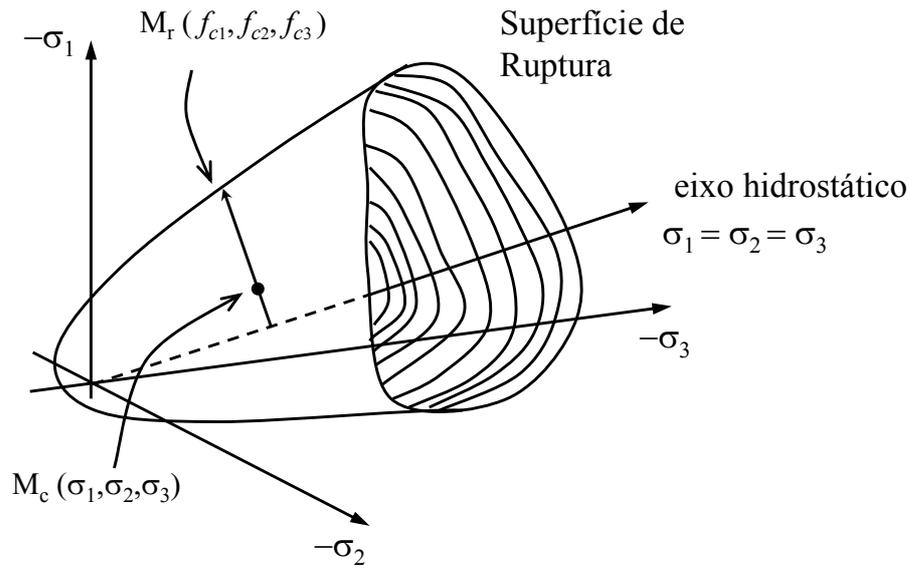


Figura 3.9 – Segunda alternativa para determinação das tensões de pico (f_{c1}, f_{c2}, f_{c3}) do concreto: situações com estado de tensão de compressão triaxial.

3.1.4.5 Determinação das deformações de pico ($\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{c2}, \varepsilon_{c3}$)

Após a determinação das tensões de pico, empregam-se as expressões adotadas por Bouzaiene e Massicotte (1997) para calcular as deformações específicas de pico ($\varepsilon_{c1}, \varepsilon_{c2}, \varepsilon_{c3}$).

Estas expressões são dadas por:

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_c \left[-1,6 \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right)^3 + 2,25 \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right)^2 + 0,35 \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) \right], \text{ para } \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) \leq 1 \quad (3.40)$$

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_c \left[3,0 \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) - 2,0 \right], \text{ para } 1 < \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) \leq 1,27 \quad (3.41)$$

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_c \left[5,312 \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) - 4,936 \right], \text{ para } \left(\frac{f_{ci}}{f_c} \right) > 1,27 \quad (3.42)$$

onde,

$i=1,2,3$;

f_c – Resistência à compressão uniaxial do concreto;

ε_c – Deformação específica correspondente à f_c .

Segundo Bouzaiene e Massicotte (1997), a equação (3.42) foi calibrada através de ensaios experimentais, respeitando a continuidade com a expressão (3.41). Para as direções tracionadas considera-se $\varepsilon_{ci} = \varepsilon_t$, sendo ε_t a deformação específica correspondente à resistência à tração uniaxial f_t .

3.1.5 Ponto de controle da curva de Popovics-Saenz

Como descrito no Capítulo 2, o concreto exibe um amolecimento na curva tensão-deformação depois que se atingem as tensões de pico. Este comportamento de amolecimento é um fenômeno que depende das dimensões e forma dos corpos-de-prova, como também das condições de contorno dos ensaios experimentais. A curva no ramo pós-pico apresenta muita variabilidade em função das características dos ensaios (Balan et al., 2001). Assim, para efetuar uma análise realística torna-se essencial a definição de um modelo apropriado para descrição do comportamento pós-pico do material. Através da curva de *Popovics-Saenz*, pode-se alcançar uma previsão adequada para a resposta à compressão do concreto utilizando-se um ponto de controle localizado no ramo pós-pico da curva tensão-deformação uniaxial equivalente. Segundo Balan et al. (1997), a partir de ensaios experimentais, os seguintes valores são propostos para as tensões e deformações específicas deste ponto de controle:

$$\begin{aligned} f_{fi} &= 0,85 f_{ci} \\ \varepsilon_{fi} &= 1,41 \varepsilon_{ci} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} f_{fi} &= 0,25 f_{ci} \\ \varepsilon_{fi} &= 4,0 \varepsilon_{ci} \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde,

f_{ci} – é a resistência do material na direção i , com $i=1,2,3$;

ε_{ci} – é a deformação correspondente à resistência f_{ci} .

Para corpos-de-prova confinados, verificou-se que o aumento das tensões de confinamento em ensaios de compressão triaxial afeta a resistência, a ductilidade, a dilatação e o modo de ruptura do concreto. Com o aumento do confinamento lateral, o modo de ruptura do concreto muda de frágil para dúctil (Balan et al., 2001). Entretanto os valores estabelecidos

em (3.43) e (3.44) definem a superfície de amolecimento do material como uma superfície que tem sua forma proporcionalmente reduzida em relação à superfície de ruptura, independentemente das condições de aplicação de carga. Então, para melhor considerar o comportamento experimental do concreto submetido à compressão, os valores das tensões f_{fi} do ponto de controle são definidos em função das tensões de pico que dependem das tensões de confinamento aplicadas à estrutura (Balan et al., 1997). Através de resultados experimentais apresentados por Smith et al. (1989), Kwon (2000) definiu as seguintes coordenadas para o ponto de controle:

$$f_{fi} = \frac{f_{ci}}{\left(5 - \frac{f_{ci}}{f_c}\right)} \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_{fi} = 4\varepsilon_{ci}$$

onde, f_c é a resistência à compressão uniaxial do concreto. Nesta tese, as relações acima também foram adotadas para o ponto de controle utilizado na definição da curva tensão-deformação uniaxial equivalente do concreto solicitado à compressão.

3.1.6 Concreto fissurado e esmagado

Nesta pesquisa, implementou-se um *modelo de fissuras distribuídas*, com as fissuras girando segundo as direções de tensões principais correntes, como proposto por Kwon (2000). Nenhum tratamento especial é dado para o comportamento pós-pico do concreto, depois do esmagamento ou da fissuração. Isto ocorre porque as leis uniaxiais equivalentes governam inteiramente a resposta do material.

Para a verificação do estado de esmagamento ou de fissuração, adota-se o seguinte critério: quando a deformação uniaxial equivalente, em uma determinada direção, ultrapassar a deformação correspondente à tensão de pico, pode-se considerar que ocorreu fissuração ou esmagamento do concreto, dependendo do sinal da tensão atuante.

3.1.7 Coeficiente de Poisson

Para completar a definição da lei constitutiva representada pela equação (3.10), deve-se determinar os valores dos coeficientes de Poisson, ν_{ij} .

Como mencionado no Capítulo 2, o volume do concreto, em um corpo-de-prova comprimido, inicialmente diminui e, depois, passa a aumentar nas proximidades da ruptura. Este fenômeno de dilatação ocorre devido à abertura (ou expansão) das microfissuras existentes no material. Para simular esta variação volumétrica, vários trabalhos existentes na literatura, como os publicados por Elwi e Murray (1979), Balan et al. (1997) e Kwon (2000), sugerem a utilização de uma função crescente para o coeficiente de Poisson.

Neste trabalho, utiliza-se a expressão proposta por Kwon (2000) para definir o coeficiente de Poisson:

$$\nu_{ij} = \sqrt{\nu_{ui}\nu_{uj} \frac{E_i}{E_j}} \quad (3.46)$$

onde,

ν_{ui} – é o coeficiente de Poisson para a direção uniaxial equivalente i .

Através da equação acima, garante-se a simetria da matriz constitutiva \mathbf{D}_o , expressa pela equação (3.8). Para definição de ν_{ui} , utiliza-se a expressão abaixo:

$$\nu_{ui} = \nu_o \left[1 + \frac{1}{K_{vi}} \left\{ A_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right) + B_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^2 + C_i \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ci}} \right)^3 \right\} \right], \text{ com } i=1,2,3 \quad (3.47)$$

onde,

ν_o – coeficiente de Poisson inicial;

$$K_i = \frac{1}{2\nu_o}; \quad K_{ei} = \frac{\varepsilon_{fi}}{\varepsilon_{ci}}; \quad K_{\sigma i} = \frac{f_{ci}}{f_{fi}}; \quad K_{vi} = E_o \frac{\varepsilon_{ci}}{f_{ci}};$$

$$A_i = C_i + K_i - 2; \quad B_i = 1 - 2C_i; \quad C_i = K_i \frac{(K_{\sigma i} - 1)}{(K_{ei} - 1)^2} - \frac{1}{K_{ei}}.$$

A equação (3.47) é similar à expressão cúbica definida por Elwi e Murray (1979), que

mais tarde foi utilizada por Balan et al. (1997). Kwon (2000) propôs a adição do coeficiente K_v a esta função cúbica para evitar que Ω_c usado na equação (3.8) aproxime-se de zero ou torne-se negativo. Um valor nulo para Ω_c criaria problemas numéricos na implementação da lei constitutiva em elementos finitos.

3.1.8 Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para cargas cíclicas

Para a consideração de um carregamento cíclico, utiliza-se a curva de *Popovics-Saenz*, representada pela equação (3.20), introduzindo-se algumas modificações nas coordenadas da origem e do ponto de pico da curva tensão-deformação uniaxial equivalente, para as situações de descarga e recarga.

Através de observações experimentais, pode-se dizer que o concreto apresenta uma degradação no módulo de elasticidade e na resistência a medida que se sucedem os ciclos de descarga e recarga durante o processo de carregamento cíclico. No trabalho de Lee e Willam (1997), é apresentado um procedimento que considera a degradação da rigidez através da introdução de um ponto focal, conforme ilustrado pela Figura 3.10. Estes autores apresentam expressões para a determinação deste ponto focal $(\varepsilon_o, \sigma_o)$. Entretanto, por simplicidade numérica, no modelo proposto por Kwon (2000), define-se o ponto focal como sendo o ponto de resistência à tração uniaxial do concreto (ε_t, f_t) . No presente trabalho, também se adota este procedimento de utilização de um *ponto focal* para simular a degradação da rigidez.

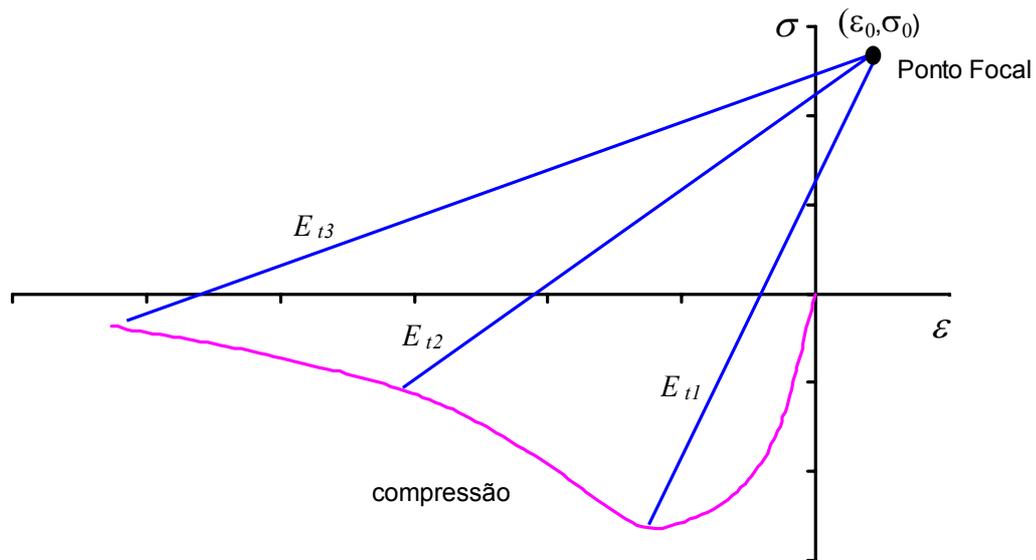


Figura 3.10 – Ilustração do *Ponto focal*. FONTE: Lee e Willam, 1997.

Ao considerar uma situação de carga em compressão, a descarga no comportamento cíclico do concreto é modelada substituindo a origem da curva tensão-deformação uniaxial equivalente pelo ponto $(\varepsilon_d, \sigma_d)$ onde iniciou o processo de descarga e o pico da curva é substituído pelo ponto focal (ε_t, f_t) , como pode ser observado na Figura 3.11. Já para a situação de recarga, a origem é substituída pelo ponto $(\varepsilon_r, \sigma_r)$ onde começou a recarga e o pico da curva reversível é substituído pelo ponto $(\varepsilon_d, \sigma_d)$ onde iniciou a descarga, formando ciclos de histerese fechados, como mostrado na Figura 3.11. Ao atingir este ponto de descarga, utiliza-se novamente a curva monótona representada pela equação (3.20).

Para uma situação de carga em tração, utiliza-se o mesmo procedimento mencionado no parágrafo anterior, com a única diferença que o ponto focal é definido como sendo o ponto de resistência à compressão uniaxial do concreto (ε_c, f_c) , como apresentado na Figura 3.12.

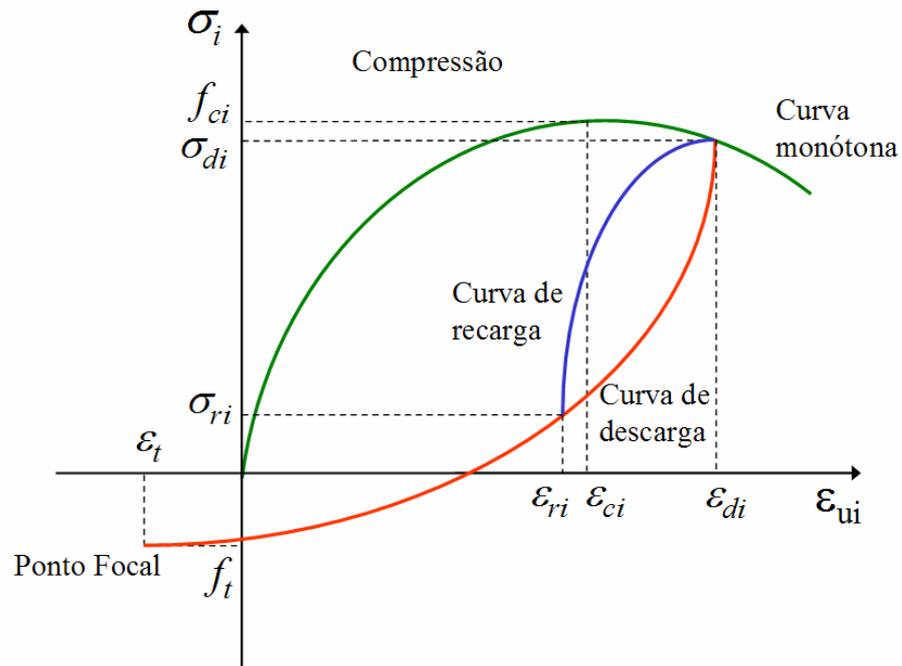


Figura 3.11 – Comportamento do concreto submetido a carregamento cíclico: curva de carga em compressão.

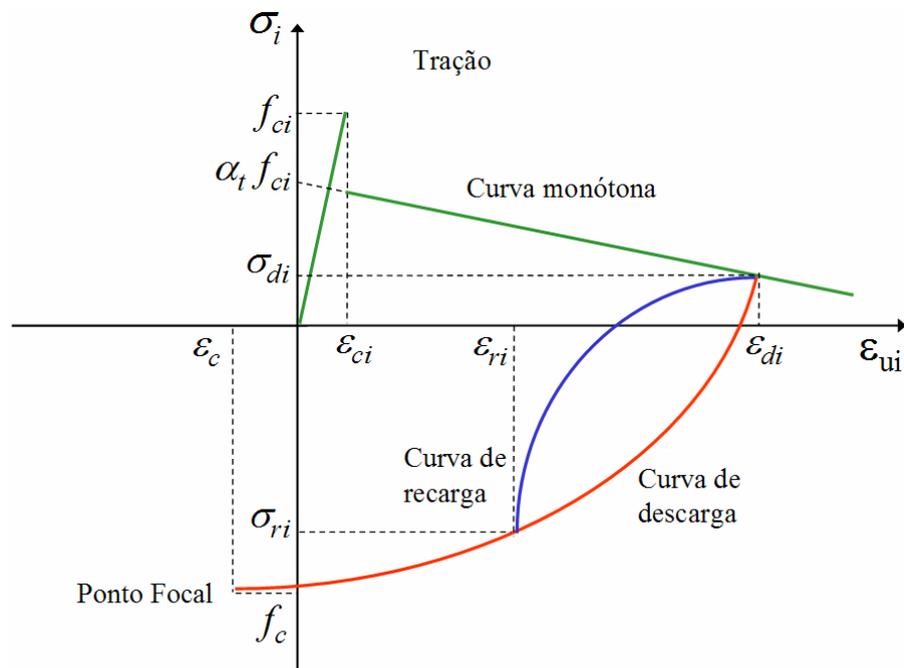


Figura 3.12 – Comportamento do concreto submetido a carregamento cíclico: curva de carga em tração.

Com as modificações nestes pontos da origem e do pico da curva tensão-deformação uniaxial equivalente, as expressões originais da curva de *Popovics-Saenz* ficam alteradas para simulação dos processos de descarga e recarga no comportamento cíclico. Assim as equações para o *processo de descarga* são as seguintes:

– Ramo ascendente: Se $\left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}}\right) \leq 1$: $A_i = B_i = C_i = 0$; $D_i = (K_i - 1)$

$$\sigma_i = \sigma_{di} - \frac{(\sigma_{di} - \sigma_{oi})K_i \left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}}\right)}{1 + D_i \left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}}\right)^{R_i}} \quad \text{com } i = 1, 2, 3 \quad (3.48)$$

onde,

$$K_i = E_{di} \left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}}{\sigma_{di} - \sigma_{oi}}\right); \quad R_i = \frac{K_i}{(K_i - 1)};$$

ε_{di} , σ_{di} – são a deformação específica uniaxial equivalente e a tensão principal na direção i no momento em que ocorreu a *descarga*;

ε_{oi} , σ_{oi} – são a deformação específica e a tensão do *ponto focal* correspondente a direção i ;

– Ramo descendente: Se $\left(\frac{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{di} - \varepsilon_{oi}}\right) > 1$: *curva monótona* – equação (3.20) ou equação (3.22).

O parâmetro E_{di} é o módulo de elasticidade no ponto onde iniciou a descarga, para as três direções ortotrópicas ($i = 1, 2, 3$). Segundo Moon (1994), a partir de observações experimentais, este módulo de elasticidade E_{di} pode ser determinado pela seguinte equação:

$$E_{di} = e^{-\frac{\varepsilon_{di}}{10\varepsilon_{ci}}} E_{oi}^t \quad (3.49)$$

onde E_{oi}^t é o módulo de elasticidade no ponto de descarga anterior. Para a primeira descarga considera-se $E_{oi}^t = E_o$, onde E_o é o módulo de elasticidade inicial do concreto. As demais variáveis já foram definidas anteriormente.

O processo de recarga é obtido pelas seguintes equações:

– Ramo ascendente: Se $\left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}}\right) \leq 1$: $A_i = B_i = C_i = 0$; $D_i = (K_i - 1)$

$$\sigma_i = \sigma_{ri} - \frac{(\sigma_{ri} - \sigma_{di})K_i \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}}\right)}{1 + A_i \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}}\right) + B_i \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}}\right)^2 + C_i \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}}\right)^3 + D_i \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}}\right)^{R_i}} \quad (3.50)$$

com $i = 1, 2, 3$

onde,

$$K_i = E_{di} \left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}}{\sigma_{ri} - \sigma_{di}}\right); R_i = \frac{K_i}{(K_i - 1)};$$

ε_{di} , σ_{di} – são a deformação específica uniaxial equivalente e a tensão principal na direção i no momento em que ocorreu a *descarga*;

ε_{ri} , σ_{ri} – são a deformação específica uniaxial equivalente e a tensão principal na direção i no momento em que ocorreu a *recarga*;

– Ramo descendente: Se $\left(\frac{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{ui}}{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{di}}\right) > 1$: *curva monótona* – equação (3.20) ou equação (3.22).

3.1.9 Critério de carga, descarga e recarga

Para identificação dos processos de carga e descarga, adota-se uma função de carga, F , conforme apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} F &> F_{max}, && \text{Carga} \\ F &\leq F_{max}, && \text{Descarga} \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde,

F_{max} – é o valor máximo da função de carga, F , em um determinado passo de carga anterior.

Esta função de carga é definida em termos das deformações uniaxiais equivalentes como sendo:

$$F = \sqrt{\varepsilon_{u1}^2 + \varepsilon_{u2}^2 + \varepsilon_{u3}^2} \quad (3.52)$$

Para a identificação do processo de descarga e recarga em um determinado ciclo de histerese, necessita-se definir uma outra função de carga local, F_{local} . Segundo Kwon (2000), esta função é calculada pela seguinte equação:

$$F_{local} = \sqrt{(\varepsilon_{u1} - \varepsilon_{d1})^2 + (\varepsilon_{u2} - \varepsilon_{d2})^2 + (\varepsilon_{u3} - \varepsilon_{d3})^2} \quad (3.53)$$

onde,

ε_{di} – é a deformação específica onde iniciou a descarga, com $i=1,2,3$.

Esta função F_{local} identifica a descarga e a recarga dentro da curva reversível, como segue:

$$\begin{aligned} \Delta F_{local} &\geq 0, & \text{Descarga} \\ \Delta F_{local} &< 0, & \text{Recarga} \end{aligned} \quad (3.54)$$

sendo,

$$\Delta F_{local} = F_{local}^j - F_{local}^{j-1} \quad (3.55)$$

onde ΔF_{local} é o incremento da função de carga local entre dois passos consecutivos j e $(j-1)$. Quando o processo de recarga atingir o ponto onde iniciou a descarga do ciclo de histerese, a resposta seguirá novamente a curva de carga monótona.

3.1.10 Transformação das equações constitutivas

Um vez determinada a relação constitutiva associada aos eixos locais de ortotropia, conforme o estado do concreto esteja íntegro, fissurado ou esmagado, deve-se estabelecer a transformação da equação constitutiva para o sistema de eixos globais.

As tensões referenciadas aos sistemas de eixos globais e locais podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma^{global} &= \mathbf{D} \varepsilon^{global} \\ \sigma^{local} &= \mathbf{D}_0 \varepsilon^{local} \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde, \mathbf{D} e \mathbf{D}_0 são as matrizes constitutivas referentes aos sistemas de eixos coordenados globais e locais, respectivamente.

Para a transformação da matriz constitutiva do sistema local para o global, ou vice-versa, a notação do sistema de referência será (x, y, z) para o global e $(1, 2, 3)$ para o local. Segundo Balan et al. (1997), as matrizes que transformam deformações específicas e tensões globais em locais vêm dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & l_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 \\ 2l_1 l_3 & 2m_1 m_3 & 2n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & l_1 n_3 + l_3 n_1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

e

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1 m_1 & 2m_1 n_1 & 2l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2 m_2 & 2m_2 n_2 & 2l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3 m_3 & 2m_3 n_3 & 2l_3 n_3 \\ l_1 l_2 & m_1 m_2 & n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 \\ l_2 l_3 & m_2 m_3 & n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & l_2 n_3 + l_3 n_2 \\ l_1 l_3 & m_1 m_3 & n_1 n_3 & l_1 m_3 + l_3 m_1 & m_1 n_3 + m_3 n_1 & l_1 n_3 + l_3 n_1 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

onde l_i, m_i, n_i são os cossenos diretores entre os eixos locais e os eixos globais.

Vale salientar que a matriz de cossenos diretores entre os eixos locais e globais é dada por:

$$\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(1, x) & \cos(1, y) & \cos(1, z) \\ \cos(2, x) & \cos(2, y) & \cos(2, z) \\ \cos(3, x) & \cos(3, y) & \cos(3, z) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Desta forma, qualquer transformação do sistema local para o global, ou vice-versa, tanto para deformações específicas quanto para tensões, pode ser feita utilizando as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{local} &= \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}^{global} \\ \boldsymbol{\sigma}^{local} &= \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma}^{global} \end{aligned} \quad (3.60)$$

ou

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{global} &= \mathbf{T}_{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^{local} \\ \boldsymbol{\sigma}^{global} &= \mathbf{T}_{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^{local}\end{aligned}\quad (3.61)$$

A matriz constitutiva do material no sistema global em função desta mesma matriz no sistema local é determinada por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_{\varepsilon}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{T}_{\varepsilon} \quad (3.62)$$

3.1.11 Conceito de eixos de referência girando

Nos modelos ortotrópicos, o conceito de eixo girando implica que os eixos de ortotropia são paralelos às direções principais durante o processo de carga (Bonzaine e Massicotte, 1997).

Bonzaine e Massicotte (1997) comentam as vantagens numéricas em admitir os eixos ortotrópicos sendo paralelos às direções principais (tensões ou deformações). Os eixos ortotrópicos orientados arbitrariamente deveriam complicar enormemente a formulação da lei constitutiva, cuja principal vantagem é realmente simplicidade e concisão.

Alguns autores argumentaram que os modelos ortotrópicos não são consistentes. Isso implica dizer que a mesma história de carga aplicada em diferentes eixos de referência deveria levar a diferentes resultados, em particular a diferentes deformações principais e diferentes direções de deformação. Esta possível falta de invariância é analisada detalhadamente por Bazant (1983) onde exemplos específicos ilustram a falta de invariância. Ele afirma que somente quando as tensões principais são consideradas paralelas às deformações principais, levando a uma única expressão para o módulo de elasticidade transversal, consegue-se que o modelo seja tensorialmente invariante e completamente consistente. A maioria dos modelos ortotrópicos com fissuras girando tem coaxialidade entre as tensões e deformações principais.

Para o modelo adotado nesta tese, como são utilizados os mesmos cossenos diretores (equação 3.59) para determinação das matrizes de rotação \mathbf{T}_{ε} (equação 3.57) e \mathbf{T}_{σ} (equação

3.58), admite-se que os eixos de tensões principais coincidem com os eixos de deformações principais. A direção das fissuras é considerada normal às direções de tensões principais.

Balan et al. (2001) reproduziram os mesmos exemplos de Bazant (1983) e muitos outros, e comprovaram que o modelo com as fissuras girando segundo as direções de tensões principais durante o carregamento é tensorialmente invariante e completamente consistente.

A principal razão para a invariância do modelo proposto nesta tese encontra-se no fato que as tensões totais são determinadas a partir das tensões principais (σ_1 , σ_2 e σ_3) e da matriz de rotação \mathbf{T}_ε^T , ao invés de utilizar a matriz constitutiva \mathbf{D} (equação 3.62). Com o modelo proposto, a rotação das tensões e deformações leva a resultados idênticos, independente dos eixos de referência para tensões aplicadas em diferentes magnitudes com relação à resposta de pico.

Neste item mostra-se um exemplo, extraído de Bazant (1983) e também reproduzido por Kwon (2000), para comprovar que o modelo proposto é tensorialmente invariante e completamente consistente.

Este exemplo numérico mostra que o modelo proposto é tensorialmente invariante quando submetido a uma mesma história de carga aplicada em dois diferentes sistemas de eixos de referência (Figura 3.13). O *sistema de referência 2* está girado 45° com relação ao *sistema de referência 1*. Para esta verificação, foram usadas as seguintes propriedades para o concreto: $E_o = 3240 \text{ kN/cm}^2$, $f_c = 3,2 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,2$.

Observa-se pela Tabela 3.2, que foram obtidos os mesmos valores de tensões e deformações principais, independente do sistema de eixos de referência considerado, verificando que o modelo proposto é tensorialmente invariante, como já havia sido comprovado anteriormente por Kwon (2000).

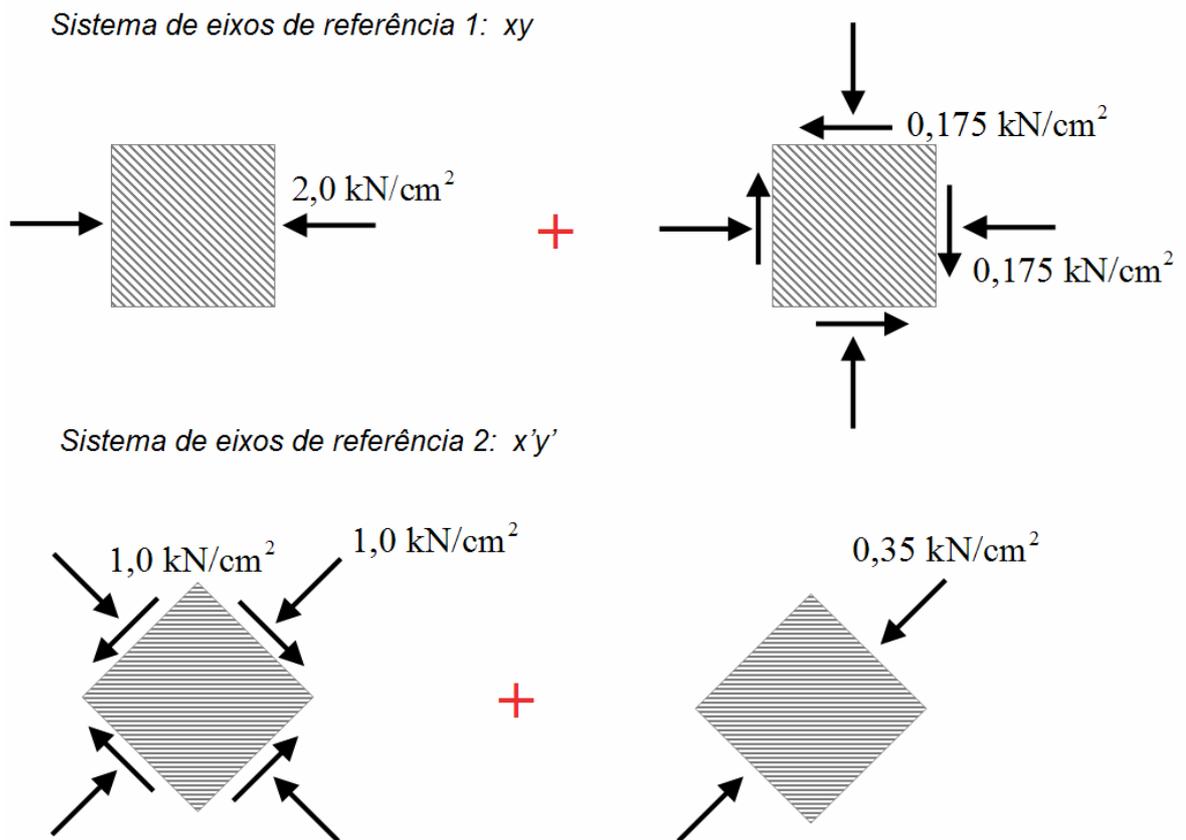


Figura 3.13 – Mesma história de carga aplicada em dois diferentes sistemas de eixos de referência: *sistema de referência 1* e *sistema de referência 2*.

Tabela 3.2 – Valores de tensões e deformações obtidos a partir de uma mesma história de carga aplicada em dois sistemas de eixos de referência diferentes.

Sistema de eixos de referência 1	Tensões (kN/cm ²)	Tensões principais (kN/cm ²)	Deformações	Deformações principais
Situação inicial	$\sigma_x = -2,0$ e demais tensões iguais a zero	$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = -2,0$	$\varepsilon_x = -7,11106 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_y = 1,43063 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_z = 1,43063 \times 10^{-4}$	$\varepsilon_1 = 1,43063 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_2 = 1,43063 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_3 = -7,11106 \times 10^{-4}$
Situação final	$\sigma_x = -2,175$ $\sigma_y = -0,175$ $\tau_{xy} = -0,175$	$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = -0,1598$ $\sigma_3 = -2,1879$	$\varepsilon_x = -8,01748 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_y = 9,96839 \times 10^{-5}$ $\varepsilon_z = 1,65722 \times 10^{-4}$ $\gamma_{xy} = -1,57802 \times 10^{-4}$	$\varepsilon_1 = 1,65722 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_2 = 1,06538 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_3 = -8,08602 \times 10^{-4}$
Sistema de eixos de referência 2	Tensões (kN/cm ²)	Tensões principais (kN/cm ²)	Deformações	Deformações principais
Situação inicial	$\sigma_{x'} = -1,0$ $\sigma_{y'} = -1,0$ $\tau_{x'y'} = -1,0$	$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = -2,0$	$\varepsilon_{x'} = -2,84021 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_{y'} = -2,84021 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_{z'} = 1,43063 \times 10^{-4}$ $\gamma_{x'y'} = -8,5417 \times 10^{-4}$	$\varepsilon_1 = 1,43063 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_2 = 1,43063 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_3 = -7,11106 \times 10^{-4}$
Situação final	$\sigma_{x'} = -1,35$ $\sigma_{y'} = -1,0$ $\tau_{x'y'} = -1,0$	$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = -0,1598$ $\sigma_3 = -2,1879$	$\varepsilon_{x'} = -4,29933 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_{y'} = -2,72131 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_{z'} = 1,65722 \times 10^{-4}$ $\gamma_{x'y'} = -9,01431 \times 10^{-4}$	$\varepsilon_1 = 1,65722 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_2 = 1,06538 \times 10^{-4}$ $\varepsilon_3 = -8,08602 \times 10^{-4}$

3.1.12 Implementação do modelo numérico para o concreto

Para determinar a solução do sistema de equações não-lineares resultante da aplicação do modelo de elementos finitos se utiliza o método de Newton-Raphson com rigidez inicial, que será analisado no Capítulo 5. Neste item, pretende-se explicar a determinação das tensões no concreto dentro deste processo iterativo.

Inicialmente, admite-se um comportamento isotrópico para o concreto, considerando os módulos de elasticidade secantes iguais ao módulo de elasticidade inicial, ou seja, $E_1^s = E_2^s = E_3^s = E_o$. Com estes módulos de elasticidade secantes e as deformações específicas correntes para um determinado passo de carga, calculam-se as tensões totais, como apresentado no fluxograma da Tabela 3.3. Com estas tensões totais relacionadas ao sistema de referência global, determinam-se as tensões principais correntes (σ_1 , σ_2 e σ_3).

A partir destas tensões principais, determinam-se as deformações uniaxiais equivalentes para as três direções principais. Com as tensões principais e a superfície de ruptura escolhida para o concreto, também se determinam os valores das tensões e deformações específicas de pico, como explicado nos itens 3.1.4.4 e 3.1.4.5. Com estas tensões e deformações específicas, são obtidas, também, as tensões e deformações específicas do ponto de controle usado no ramo descendente da curva de *Popovics-Saenz* (equação (3.20)). Com a obtenção destas variáveis, definem-se as novas curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes para as três direções de tensões principais. A partir destas três curvas uniaxiais equivalentes, calculam-se os novos valores das tensões principais correntes. E, finalmente, a partir destas tensões principais, atualizam-se as tensões totais relacionadas ao sistema de referência global. E, de maneira iterativa, repete-se todos os passos descritos anteriormente até que ocorra a convergência do processo iterativo, conforme esquematizado na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Fluxograma do modelo constitutivo para o concreto.

Cálculos iniciais:

1. Dados iniciais: f_c , E_o e ν_o ;

Análise iterativa:

SE ($tol_res > 10^{-3}$) FAÇA:

1. Cálculo das deformações específicas correntes no *passo* $i+1$: $\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}$;

Subrotina Concreto

2. Determinação da matriz de rotação \mathbf{T}^i e da matriz constitutiva do material \mathbf{D}_o^i ;

3. Com as matrizes \mathbf{T}^i e \mathbf{D}_o^i , determinar-se a matriz: $\mathbf{D}^i = \mathbf{T}^{Ti} \mathbf{D}_o^i \mathbf{T}^i$;

4. Calculam-se as tensões correntes: $\boldsymbol{\sigma}_{tentativa}^{i+1}$;

5. A partir das tensões correntes, determinam-se as tensões principais: $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$;

6. Com as tensões principais, calculam-se as deformações uniaxiais equivalentes nas três direções principais ($j=1,2,3$):

Para $i=1$: $E_1^1 = E_2^1 = E_3^1 = E_o$;

$$\varepsilon_{u_j}^{i+1} = \frac{\sigma_j^{i+1}}{E_j}$$

7. A partir das tensões $\boldsymbol{\sigma}_{tentativa}^{i+1}$ e $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$, atualiza-se a matriz de rotação $\mathbf{T}_{tentativa}^{i+1}$;

8. Com as tensões principais $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$, determinam-se as tensões de pico \mathbf{f}_c^{i+1} e suas correspondentes deformações de pico $\boldsymbol{\varepsilon}_c^{i+1}$;

9. Com \mathbf{f}_c^{i+1} e $\boldsymbol{\varepsilon}_c^{i+1}$, determinam-se as tensões e deformações \mathbf{f}_f^{i+1} e $\boldsymbol{\varepsilon}_f^{i+1}$ do ponto de controle no ramo pós-pico.

10. Com \mathbf{f}_c^{i+1} , $\boldsymbol{\varepsilon}_c^{i+1}$, \mathbf{f}_f^{i+1} e $\boldsymbol{\varepsilon}_f^{i+1}$, atualizam-se as tensões principais $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$, analisando o *Critério de Carga-Descarga-Recarga* a partir das funções de carga F e F_{local} , ou seja:

Carga: $F > F_{max}$, $\Delta F_{local} = 0$

Descarga: $F < F_{max}$, $\Delta F_{local} > 0$

Recarga: $F > F_{max}$, $\Delta F_{local} < 0$

11. A partir das tensões principais atualizadas $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$ e da matriz de rotação $\mathbf{T}_{tentativa}^{i+1}$, determinam-se as tensões globais: $\boldsymbol{\sigma}_{tentativa}^{i+1} = \mathbf{T}_{tentativa}^{i+1T} \boldsymbol{\sigma}^{i+1}$;

Final da subrotina Concreto

SE ($tol_res > 10^{-3}$): Retorna-se ao passo 1.

Fim do processo iterativo.

3.2 ESTUDOS COMPARATIVOS

Para verificar a validade do modelo adotado para o concreto, foram feitos alguns estudos comparativos entre os resultados numéricos obtidos pelo programa e os ensaios experimentais realizados por Kupfer (1973), para cargas monótonas, e por Sinha et al. (1964), para cargas cíclicas.

Para estudar as propriedades mecânicas do concreto sob carregamento biaxial, Kupfer (1973) realizou ensaios experimentais em espécimes (placas de concreto) com as dimensões 20 x 20 x 5 cm (Figura 3.14). Neste estudo, os ensaios foram realizados para diferentes estados de tensões biaxiais ($\alpha_s = \sigma_1 / \sigma_2$), como podem ser observados nos itens a seguir.

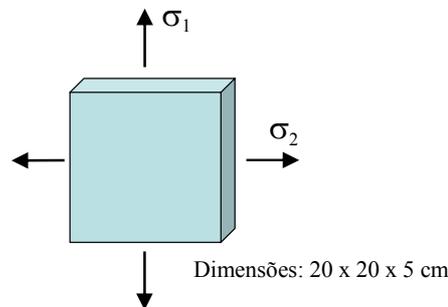


Figura 3.14 – Ensaios experimentais realizados por Kupfer (1973): placas de concreto sob carregamento biaxial.

3.2.1 Ensaios uniaxiais

Para analisar o comportamento do concreto, quando solicitado por cargas de compressão uniaxial, foram reproduzidos dois ensaios que podem ser observados nas Figuras 3.15 e 3.16.

Para o ensaio da Figura 3.15, utilizou-se um concreto com $f_c = 1,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$. Já para o exemplo da Figura 3.16 foram considerados $f_c = 3,24 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$. Para a simulação numérica destes ensaios foi utilizado um elemento hexaédrico quadrático, com aplicação de deslocamentos prescritos nos nós de uma de suas faces, a fim de

poder determinar também o comportamento do concreto pós-pico.

Os exemplos numéricos foram analisados considerando a superfície de ruptura de Willam-Warnke (1975) e a superfície de Ottosen (1977), apresentando, em ambas situações uma boa precisão frente aos resultados experimentais obtidos por Kupfer (1973). Nestes ensaios pôde-se verificar que o concreto apresentou um comportamento linear até aproximadamente 30% da resistência à compressão uniaxial, f_c . A partir deste limite o comportamento passou a ser não-linear e, ao atingir a ruptura, o concreto apresentou perda em sua capacidade para resistir a incrementos de tensões.

A partir dos resultados das Figuras 3.15 e 3.16, pôde-se observar também que para as direções transversais ($\varepsilon_1=\varepsilon_2$), os resultados do modelo numérico apresentaram-se mais frágeis que os resultados experimentais. Estas diferenças podem ser justificadas pela variabilidade existente nos ensaios experimentais. Como também, as expressões usadas para representa os coeficientes de v_{ij} podem não ter conseguido representar perfeitamente bem o comportamento pós-pico das direções transversais, sendo necessário uma melhor calibração com os resultados experimentais dos parâmetros utilizados naquelas expressões.

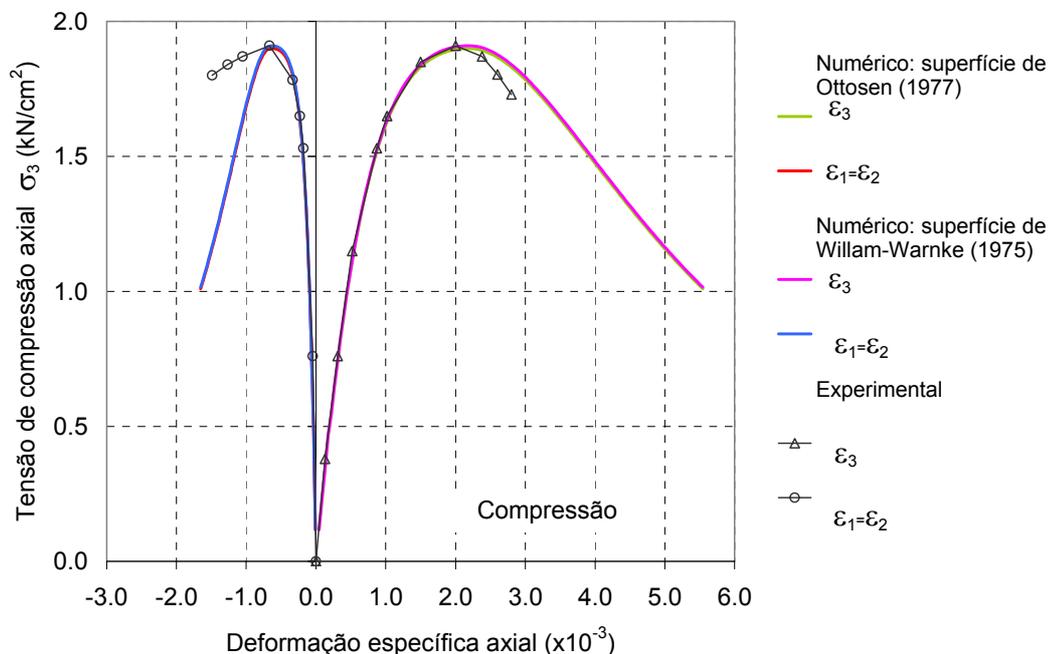


Figura 3.15 – Ensaio de compressão uniaxial: $f_c = 1,91 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$.

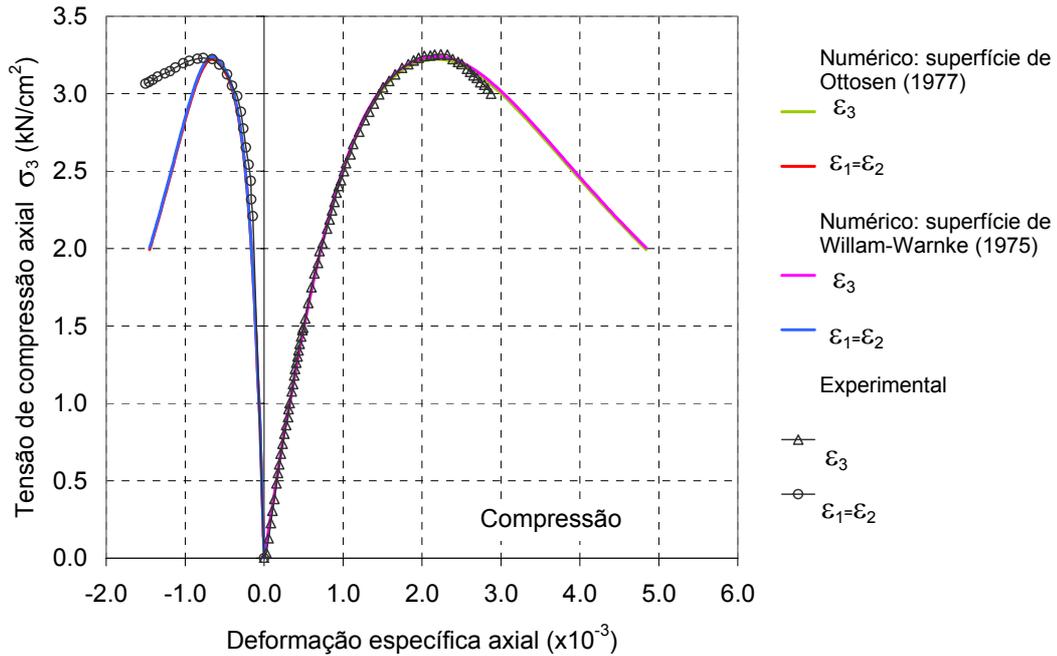


Figura 3.16 – Ensaio de compressão uniaxial: $f_c = 3,24 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$.

Também, foram analisados dois ensaios de tração uniaxial apresentados por Kupfer (1973) e cujos resultados estão nas Figuras 3.17 e 3.18. Para o concreto da Figura 3.17 considerou-se $f_c = 1,69 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$, enquanto que, para o ensaio da Figura 3.18, admitiu-se $f_c = 2,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$. Como nos ensaios de compressão uniaxial, utilizou-se também um elemento hexaédrico quadrático para a simulação numérica destes ensaios de tração uniaxial. Novamente, aplicaram-se deslocamentos prescritos em uma das faces do elemento finito.

As análises foram realizadas usando tanto a superfície de ruptura de Willam-Warnke (1975) como a de Ottosen (1977). Observou-se, para ambas, uma boa precisão com os resultados experimentais. Nestes ensaios, o comportamento linear se estendeu até a ruptura do concreto.

Deve-se observar que nestes ensaios uniaxiais, não existe diferença nos resultados numéricos pela mudança da superfície de ruptura.

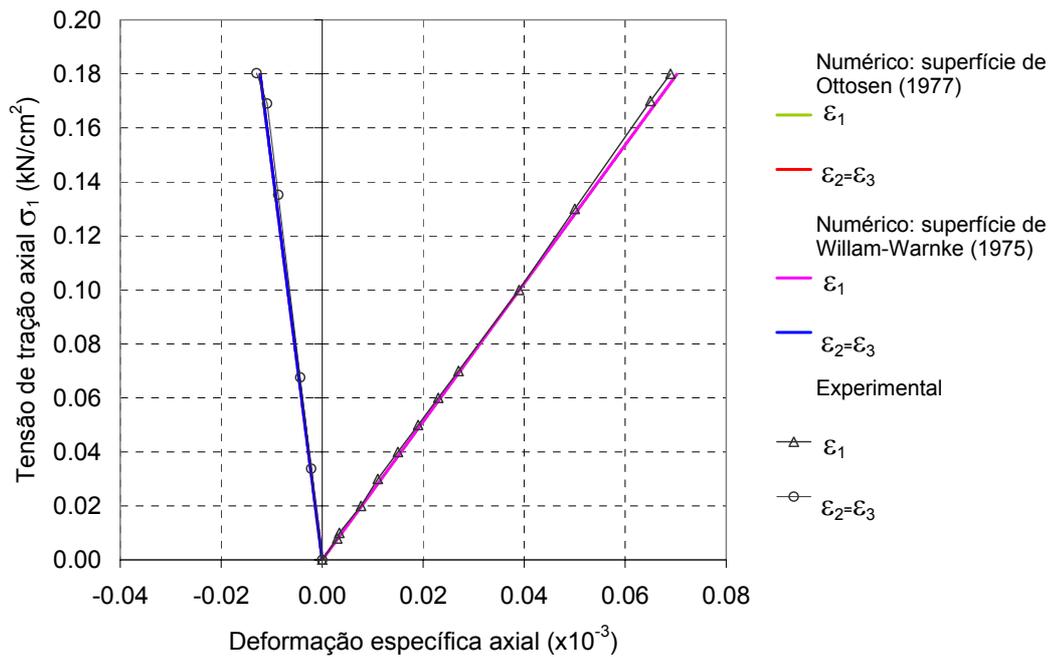


Figura 3.17 – Ensaio de tração uniaxial: $f_c = 1,69 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$.

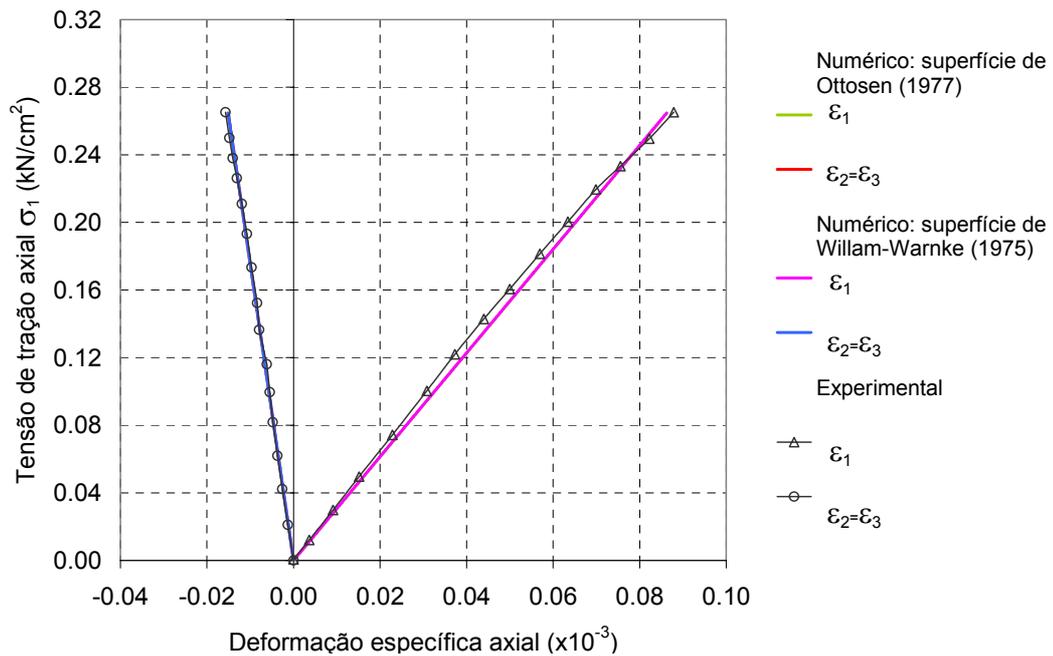


Figura 3.18 – Ensaio de tração uniaxial: $f_c = 2,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$.

3.2.2 Ensaio de compressão biaxial

Nesta situação foram analisados seis ensaios experimentais apresentados por Kupfer (1973) para diferentes estados de tensões biaxiais ($\alpha_s = \sigma_2 / \sigma_3$). Em todos os ensaios foram usadas as superfícies de Willam-Warnke (1975) e de Ottosen (1977) na comparação numérica com os resultados experimentais.

Para os ensaios apresentados nas Figuras 3.19 a 3.22, foram aplicadas cargas externas em duas das faces do elemento hexaédrico quadrático. Para as situações das Figuras 3.19 e 3.20, consideraram-se $f_c = 1,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$. Já para os ensaios das Figuras 3.21 e 3.22 tomaram-se $f_c = 3,24 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$. Nestes ensaios foram considerados os seguintes estados de tensões biaxiais ($\alpha_s = \sigma_2 / \sigma_3$): $\alpha_s = 0,525$ (Figuras 3.19 e 3.21) e $\alpha_s = 0,226$ (Figuras 3.20 e 3.22).

Nos ensaios ilustrados nas Figuras 3.23 e 3.24, foram aplicados deslocamentos prescritos em duas das faces do elemento hexaédrico quadrático. No ensaio mostrado na Figura 3.23, consideraram-se $f_c = 1,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$. Para o ensaio da Figura 3.24, utilizaram-se $f_c = 3,24 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$. Neste dois ensaios de tensões biaxiais considerou-se $\sigma_2 = \sigma_3$.

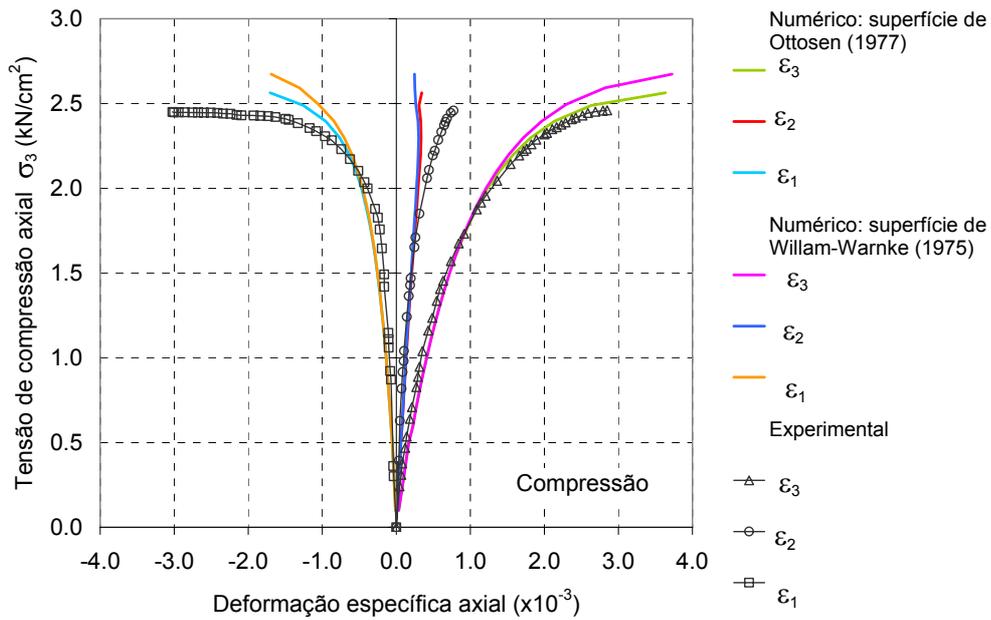


Figura 3.19 – Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,525$): $f_c = 1,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$.

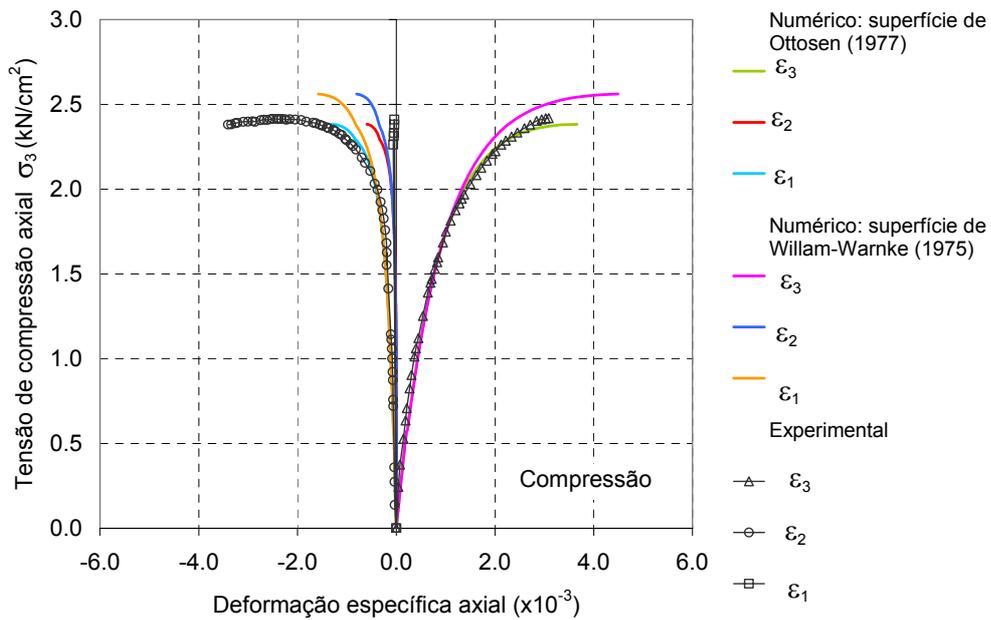


Figura 3.20 – Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,226$): $f_c = 1,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$.

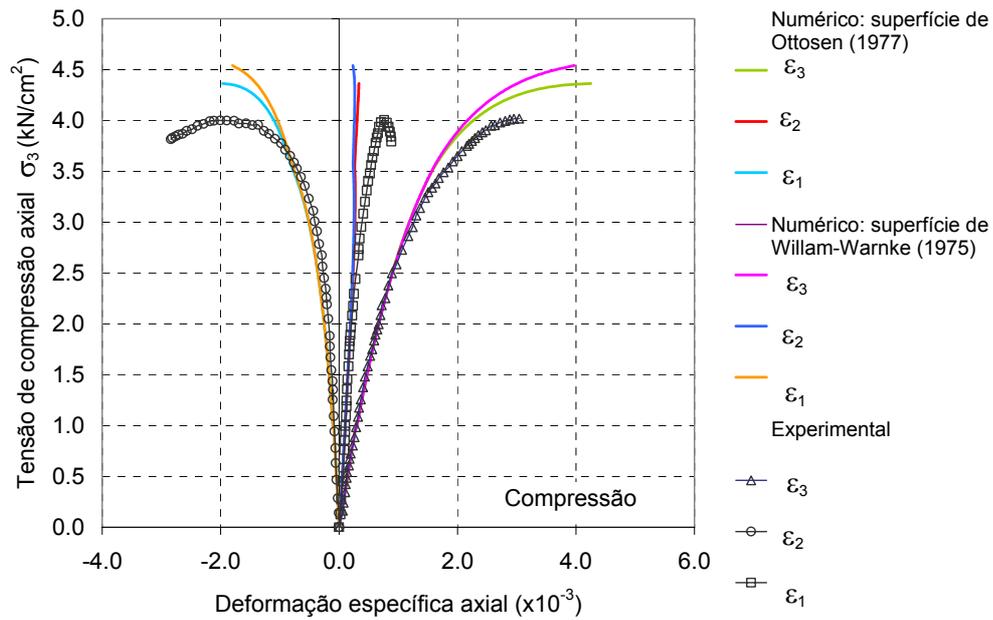


Figura 3.21 – Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,525$): $f_c = 3,24 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$.

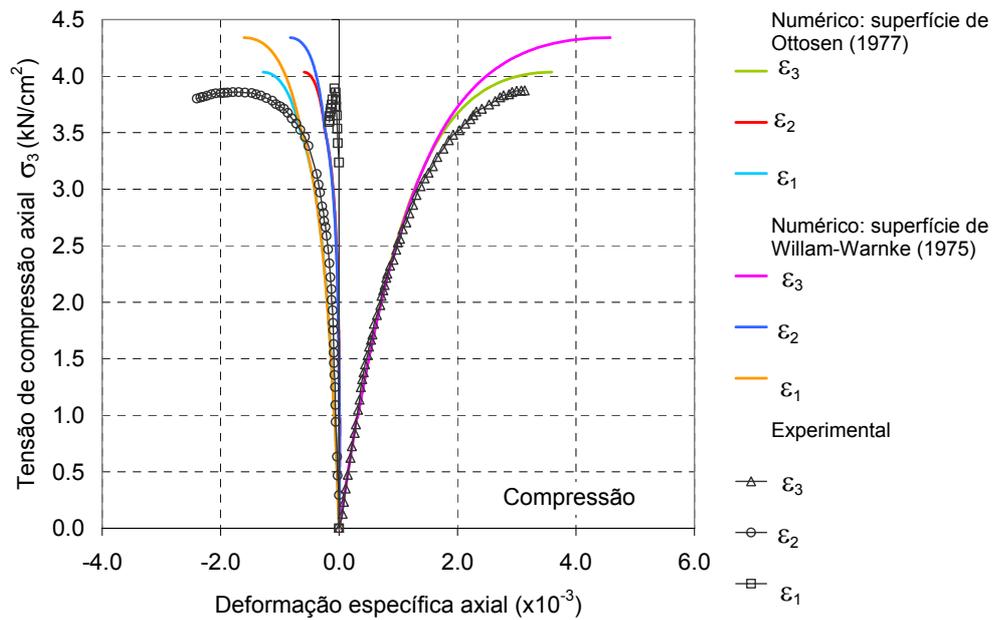


Figura 3.22 – Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 0,226$): $f_c = 3,24 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$.

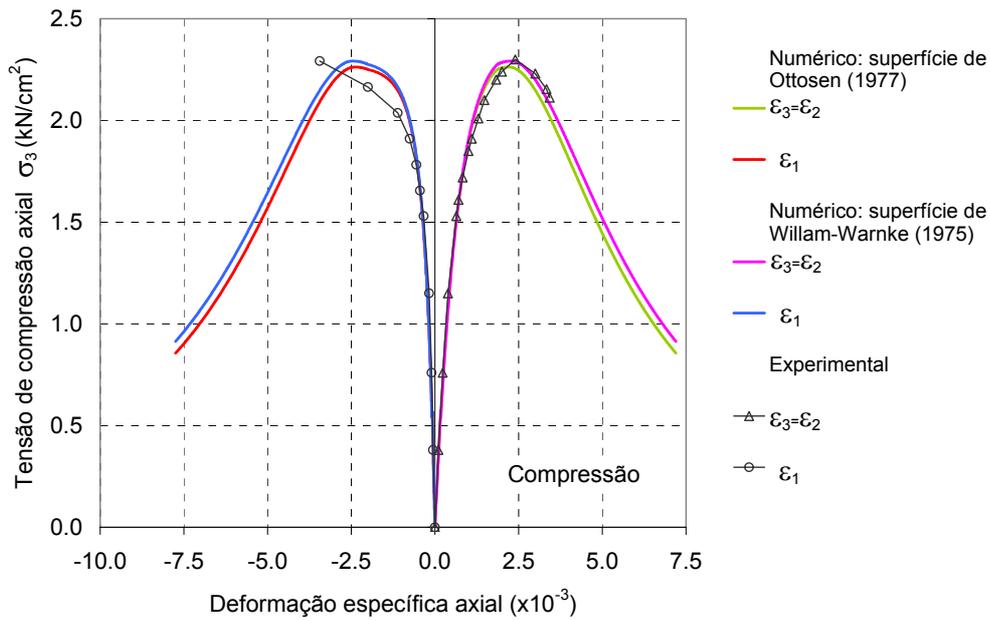


Figura 3.23 – Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 1,0$): $f_c = 1,91 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$.

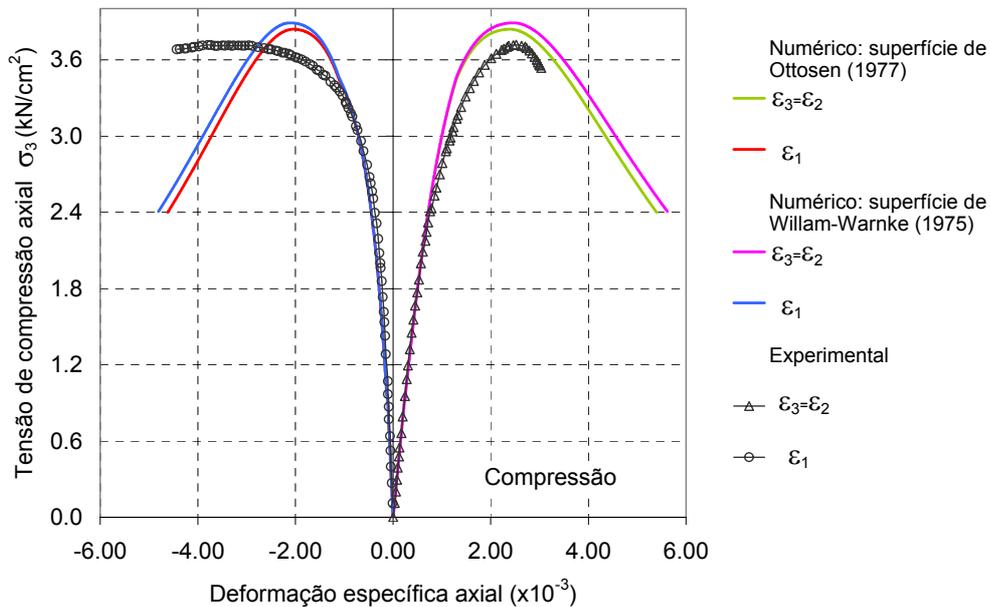


Figura 3.24 – Ensaio de compressão biaxial ($\sigma_2 / \sigma_3 = 1,0$): $f_c = 3,24 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$.

Nos ensaios de compressão biaxial, apresentados nas Figuras 3.19 a 3.24, novamente foram obtidos bons resultados comparados com os ensaios experimentais de Kupfer (1973). Os resultados dos ensaios que utilizaram a superfície de ruptura de Willam-Warnke (1975) apresentaram cargas de ruptura maiores que as cargas de rupturas obtidas com a superfície

Ottosen (1977), ficando estas últimas mais próximas dos resultados experimentais.

Para os ensaios com as mesmas propriedades para o concreto, observou-se um aumento nas tensões e deformações específicas de pico nas direções axiais destas curvas de compressão biaxial comparadas com as curvas de compressão uniaxial.

Como já comentado no item 3.2.1 (ensaios uniaxiais), a partir dos resultados das Figuras 3.19 a 3.24, pôde-se observar que para as direções transversais (ϵ_1), os resultados do modelo numérico apresentaram-se mais frágeis que os resultados experimentais. Para as Figuras 3.19 e 3.20, observaram-se pequenas diferenças entre estes resultados, e estas diferenças aumentaram para os resultados das Figuras 3.21 a 3.24.

3.2.3 Ensaio de tração biaxial

Nas Figuras de 3.25 a 3.30, apresentam-se ensaios de tração biaxial realizados por Kupfer (1973) para diferentes estados de tensões biaxiais ($\alpha_s = \sigma_2 / \sigma_1$). Na análise numérica, foram aplicadas cargas externas em duas das faces do elemento hexaédrico quadrático. Para todos os ensaios, também se utilizaram as superfícies de Willam-Warnke (1975) e de Ottosen (1977) na comparação numérica com os resultados experimentais.

Para os ensaios das Figuras 3.25, 3.26 e 3.27, considerou-se o concreto com as seguintes propriedades: $f_c = 1,69 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$. Enquanto que, nos ensaios das Figuras 3.28, 3.29 e 3.30 utilizaram-se as seguintes propriedades: $f_c = 2,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$. Nestes ensaios foram considerados os seguintes estados de tensões biaxiais ($\alpha_s = \sigma_2 / \sigma_1$): $\alpha_s = 1,0$ (Figuras 3.25 e 3.28), $\alpha_s = 0,546$ (Figura 3.29), $\alpha_s = 0,537$ (Figura 3.26), $\alpha_s = 0,244$ (Figura 3.27) e $\alpha_s = 0,232$ (Figura 3.30).

Nos ensaios de tração biaxial, apresentados nas Figuras 3.25 e 3.28, foram obtidos ótimos resultados comparados aos experimentais. As cargas de rupturas obtidas nestes ensaios foram iguais à resistência à tração uniaxial do concreto. Nestes ensaios, a rigidez do modelo numérico mostrou-se igual ao modelo experimental. Para os demais ensaios (Figuras 3.26, 3.27, 3.29 e 3.30) pode-se dizer que também foram obtidos bons resultados ao se comparar

com os resultados experimentais, porém as cargas de ruptura dos ensaios numéricos resultaram ligeiramente inferiores às cargas de ruptura dos ensaios experimentais. Como também, a rigidez do modelo numérico mostrou-se um pouco diferente do modelo experimental, principalmente para os resultados apresentados na Figura 3.26.

Deve-se observar que nestes ensaios de tração biaxial, não existe diferença nos resultados numéricos pela mudança da superfície de ruptura.

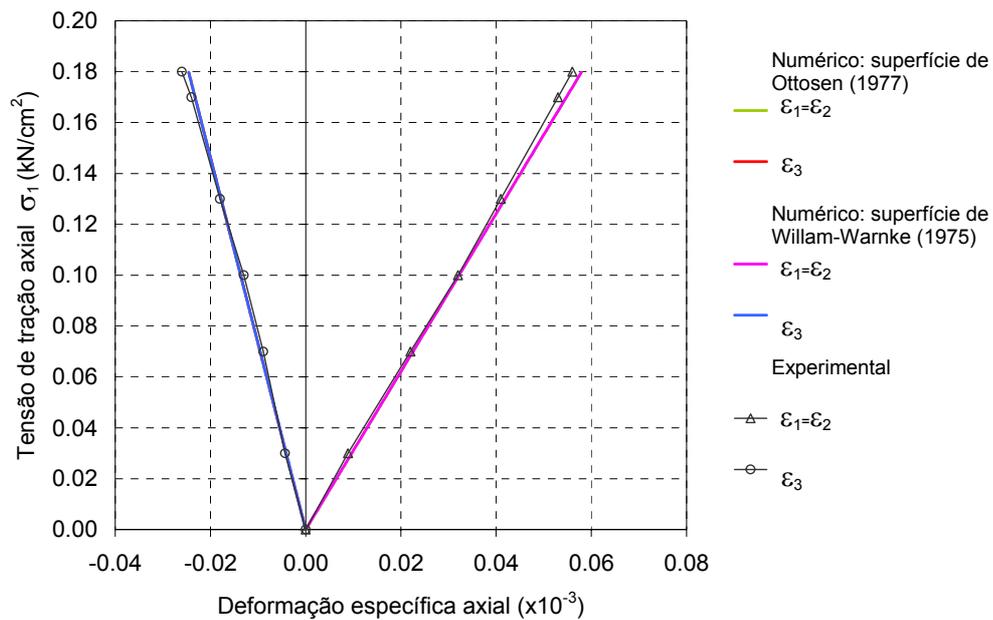


Figura 3.25 – Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1=1,0$): $f_c = 1,69 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$.

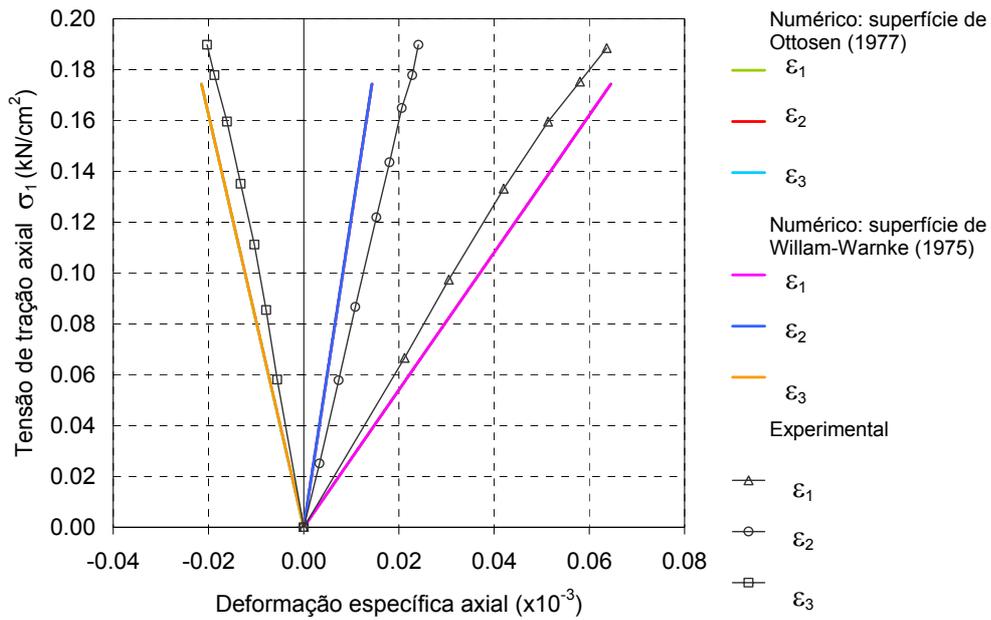


Figura 3.26 – Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1=0,537$): $f_c = 1,69 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$.

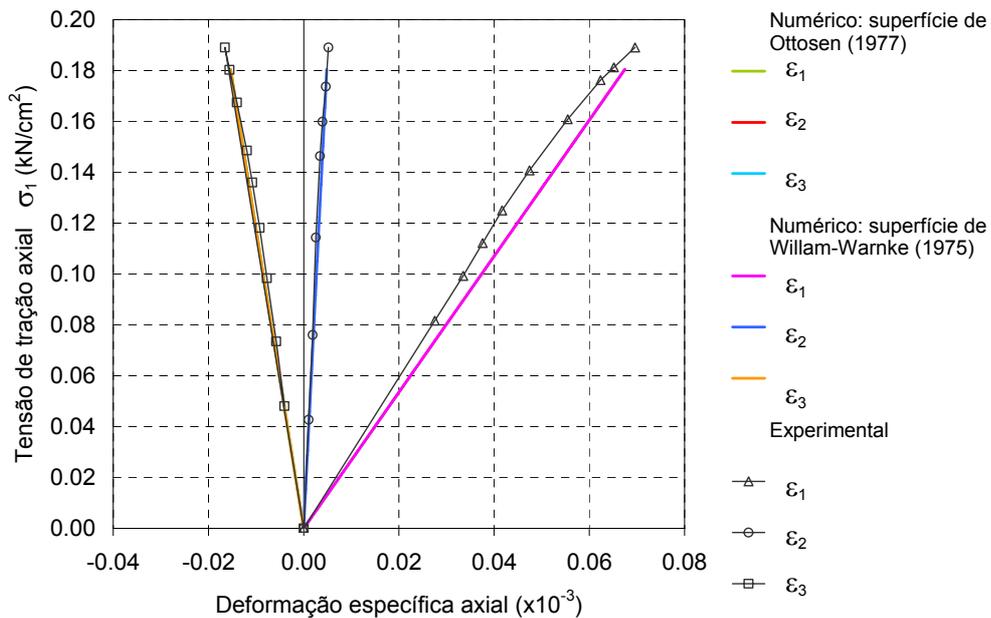


Figura 3.27 – Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1=0,244$): $f_c = 1,69 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$.

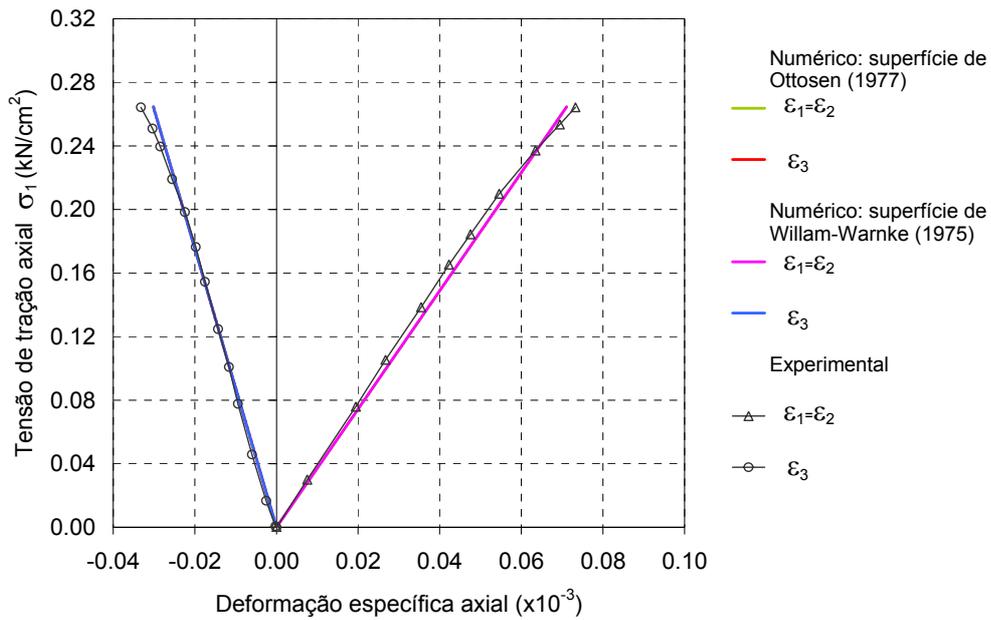


Figura 3.28 – Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1=1,0$): $f_c = 2,91 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$.

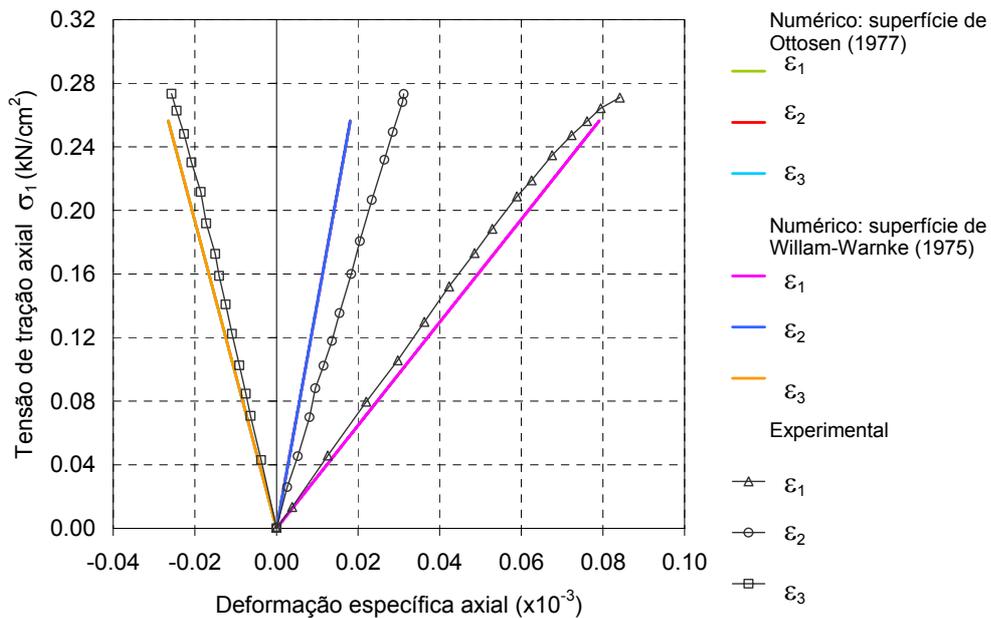


Figura 3.29 – Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1=0,546$): $f_c = 2,91 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$.

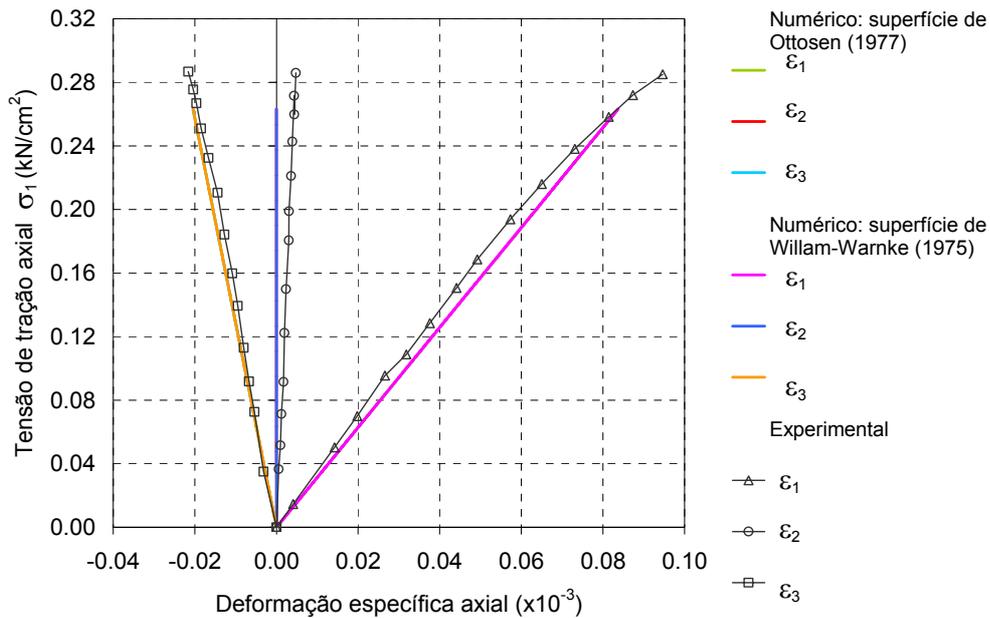


Figura 3.30 – Ensaio de tração biaxial ($\sigma_2 / \sigma_1 = 0,232$): $f_c = 2,91 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,175$.

3.2.4 Ensaio de compressão-tração

Nas Figuras de 3.31 a 3.35, apresentam-se ensaios de compressão-tração realizados por Kupfer (1973) para diferentes estados de tensões biaxiais ($\alpha_s = \sigma_2 / \sigma_3$). Na análise numérica, foram aplicadas cargas externas em duas das faces do elemento hexaédrico quadrático.

Na Figura 3.31, foram consideradas as seguintes propriedades para o concreto: $f_c = 1,92 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$. Enquanto que nas Figuras 3.32 e 3.33 foram utilizados $f_c = 3,23 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,195$. Para os ensaios apresentados nas Figuras 3.34 e 3.35, consideraram-se as seguintes características para o concreto: $f_c = 6,0 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,24$. Nestes ensaios foram considerados os seguintes estados de tensões biaxiais ($\alpha_s = \sigma_2 / \sigma_3$): $\alpha_s = 0,204$ (Figuras 3.33 e 3.35), $\alpha_s = 0,102$ (Figuras 3.31 e 3.34) e $\alpha_s = 0,07$ (Figura 3.32).

Pelas Figuras 3.31 a 3.35, pôde-se observar que os resultados numéricos apresentaram diferenças em relação aos resultados experimentais, tanto nos valores das cargas de rupturas quanto da rigidez. Para os resultados das Figuras 3.31 e 3.32, o modelo numérico apresentou-se bem mais flexível que o experimental, na direção longitudinal ϵ_3 . Para os demais resultados

(Figuras 3.33 a 3.35), o modelo numérico apresentou cargas de ruptura maiores que os valores determinados experimentalmente. Estas diferenças podem ser justificadas pela variabilidade existente nos ensaios experimentais.

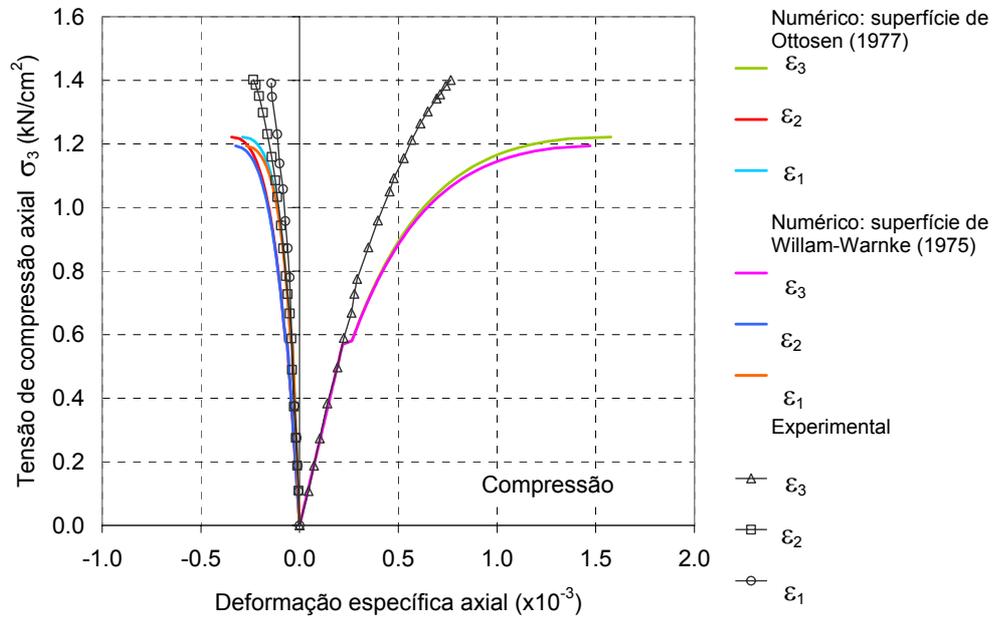


Figura 3.31 – Ensaio de compressão-tração ($\sigma_2 / \sigma_3=0,102$): $f_c = 1,92 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,19$.

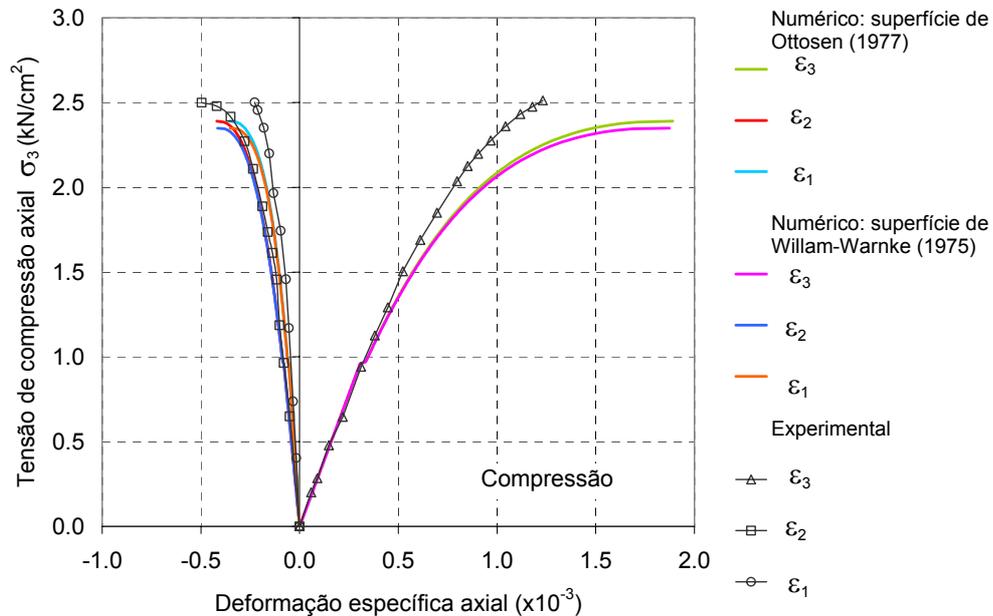


Figura 3.32 – Ensaio de compressão-tração ($\sigma_2 / \sigma_3=0,07$): $f_c = 3,23 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,195$.

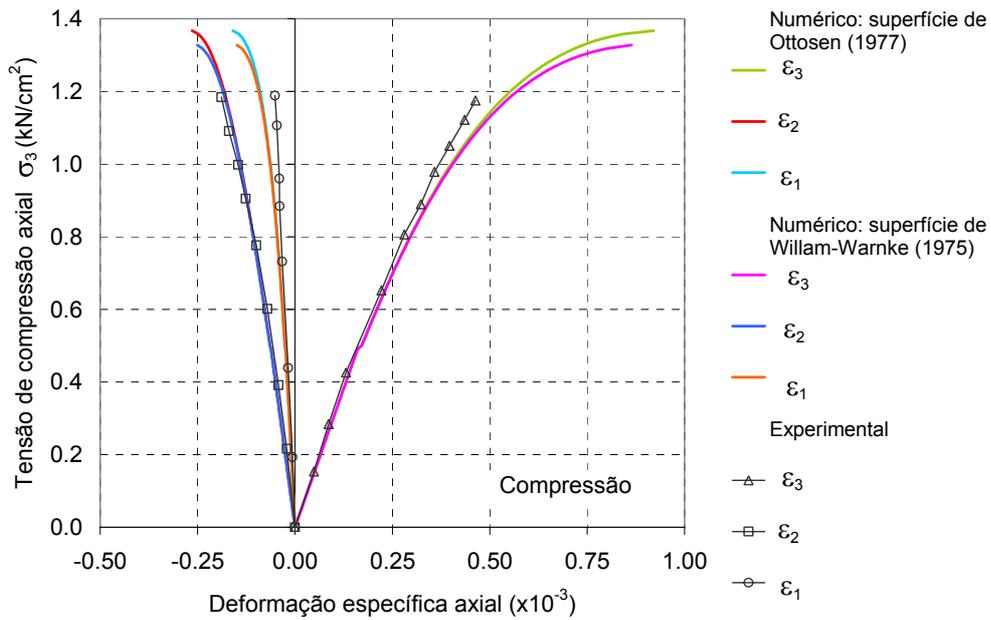


Figura 3.33 – Ensaio de compressão-tração ($\sigma_2 / \sigma_3=0,204$): $f_c = 3,23 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,195$.

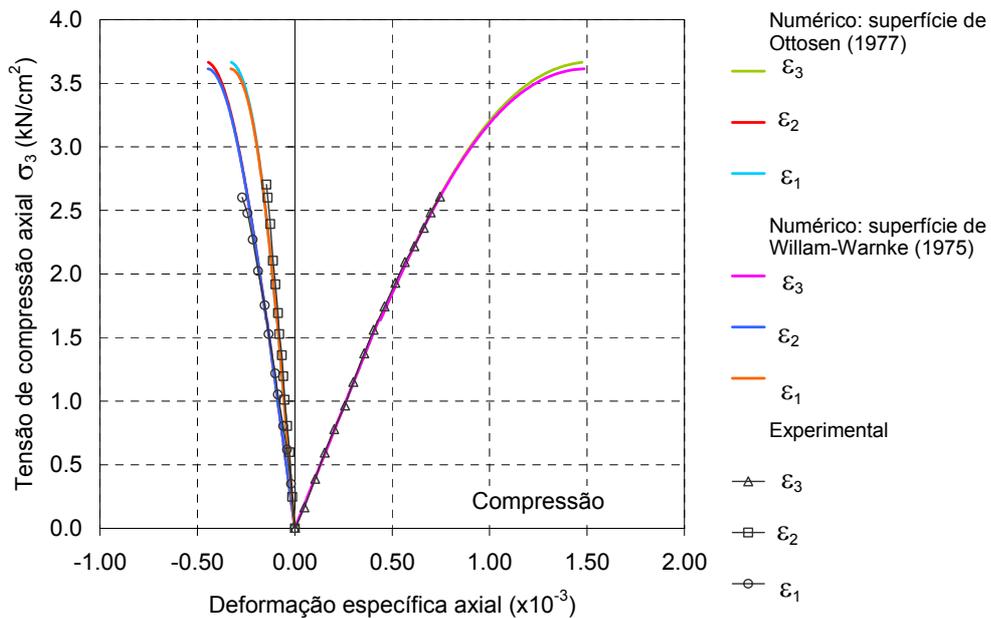


Figura 3.34 – Ensaio de compressão-tração ($\sigma_2 / \sigma_3=0,102$): $f_c = 6,0 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,24$.

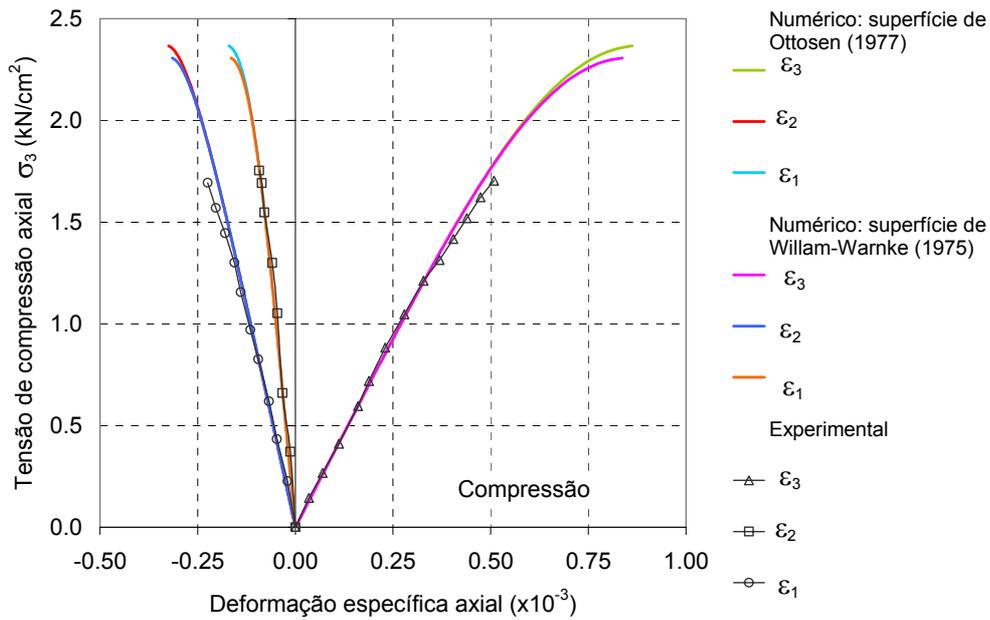


Figura 3.35 – Ensaio de compressão-tração ($\sigma_2 / \sigma_3=0,204$): $f_c = 6,0 \text{ kN} / \text{cm}^2$ e $\nu_o = 0,24$.

Na Figura 3.36, apresentam-se as cargas de rupturas obtidas nos ensaios mencionados acima (Figuras 3.15 a 3.35) para as situações numéricas utilizando a superfície de ruptura de Willam-Warke (1975) e a superfície de Ottosen (1977). Comparam-se estes resultados com as cargas de ruptura experimentais apresentadas por Kupfer (1973). Observa-se que os pontos de ruptura determinados por estas duas superfícies aproximam-se bastante dos resultados experimentais apresentados por Kupfer (1973).

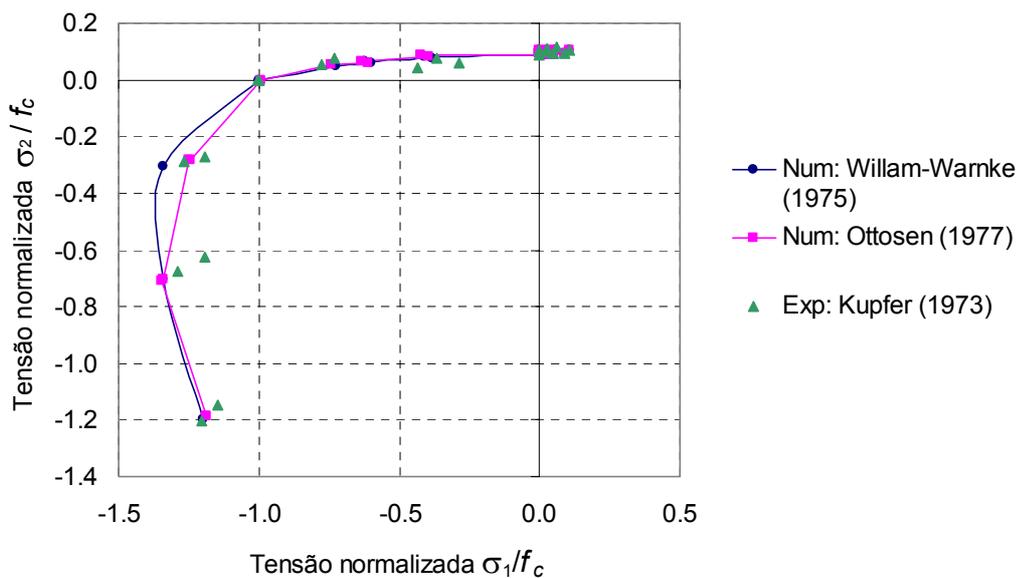


Figura 3.36 – Comparação dos critérios de ruptura com ensaios biaxiais realizados por Kupfer (1973).

3.2.5 Ensaio com carga de compressão axial cíclica

Neste item, apresenta-se um ensaio experimental realizado por Sinha et al. (1964) para comparação com o resultado do modelo numérico adotado para situações com cargas cíclicas. Sinha et al. (1964) realizaram ensaios experimentais para diferentes resistências do concreto em corpos-de-prova cilíndricos sujeitos à carga de compressão axial cíclica (Figura 3.37).



Figura 3.37 – Ensaio experimental realizado por Sinha et al. (1964): corpos-de-prova cilíndricos sob carga de compressão axial cíclica.

Para a simulação numérica deste ensaio, utilizou-se um concreto de resistência à compressão uniaxial $f_c = 2,65 \text{ kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu_o = 0,20$. Foram aplicados incrementos de deslocamentos prescritos em uma das faces do elemento hexaédrico linear.

Comparando com o resultado experimental, observou-se que o modelo adotado consegue representar bem a degradação da rigidez e da resistência do concreto quando submetido a diversos processos de carga, descarga e recarga (Figura 3.38). Apesar da boa concordância com o resultado experimental, o modelo numérico apresentou os laços de histerese (descarga-recarga) mais abertos que os experimentais, ocorrendo assim uma maior perda de energia que o ensaio experimental.

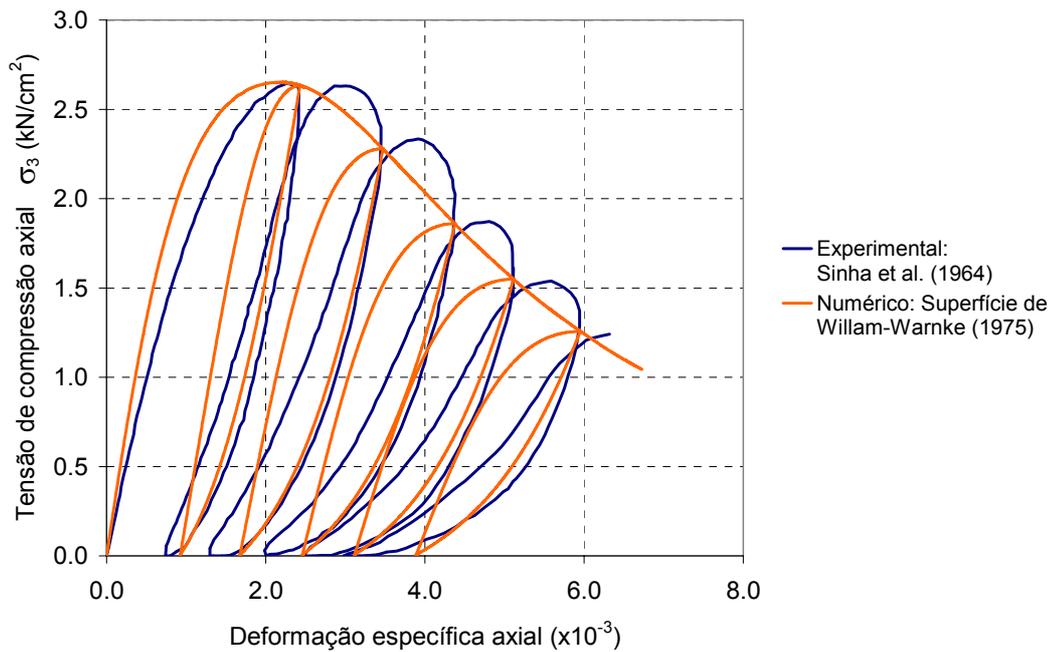


Figura 3.38 – Ensaio experimental e numérico com carga cíclica: $f_c = 2,65 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_o = 0,20$.

A partir dos diversos ensaios realizados e apresentados neste Capítulo 3, pode-se dizer que o modelo proposto para o concreto apresenta uma boa precisão frente aos valores experimentais apresentados por Kupfer (1973) e Sinha et al. (1964).

CAPÍTULO 4

4. MODELAGEM DO AÇO

Neste capítulo, apresentam-se as formulações adotadas neste trabalho para a representação numérica do comportamento do aço.

4.1 MODELO PROPOSTO

Como exposto no Capítulo 2, a forma geral do diagrama tensão-deformação para o aço, quando solicitado por cargas monótonas, pode ser representada por quatro regiões: uma região elástica, um patamar de escoamento, uma região com endurecimento e uma região com amolecimento. Na literatura existem diversas representações simplificadas para simular o comportamento tensão-deformação uniaxial do aço, entre as quais pode-se citar: elasto-plástica perfeita, elástica com endurecimento linear, aproximação tri-linear ou uma curva tensão-deformação completa. Neste trabalho, adotou-se para a curva tensão-deformação monótona um diagrama bilinear com endurecimento definido por (Figura 4.1):

$$\begin{aligned}
 \sigma_s &= \varepsilon_s E_{so} & \text{se } |\varepsilon_s| < \varepsilon_y \\
 \sigma_s &= +f_y + (\varepsilon_s - \varepsilon_y) E_{s1} & \text{se } \varepsilon_s \leq \varepsilon_s \\
 \sigma_s &= -f_y + (\varepsilon_s + \varepsilon_y) E_{s1} & \text{se } \varepsilon_s \leq -\varepsilon_y
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde,

σ_s , ε_s – são a tensão e a deformação específica na barra de armadura;

f_y , ε_y – são a tensão e a deformação específica de escoamento;

E_{so} – é o módulo de elasticidade inicial;

E_{s1} – é o módulo de elasticidade tangente do trecho de endurecimento.

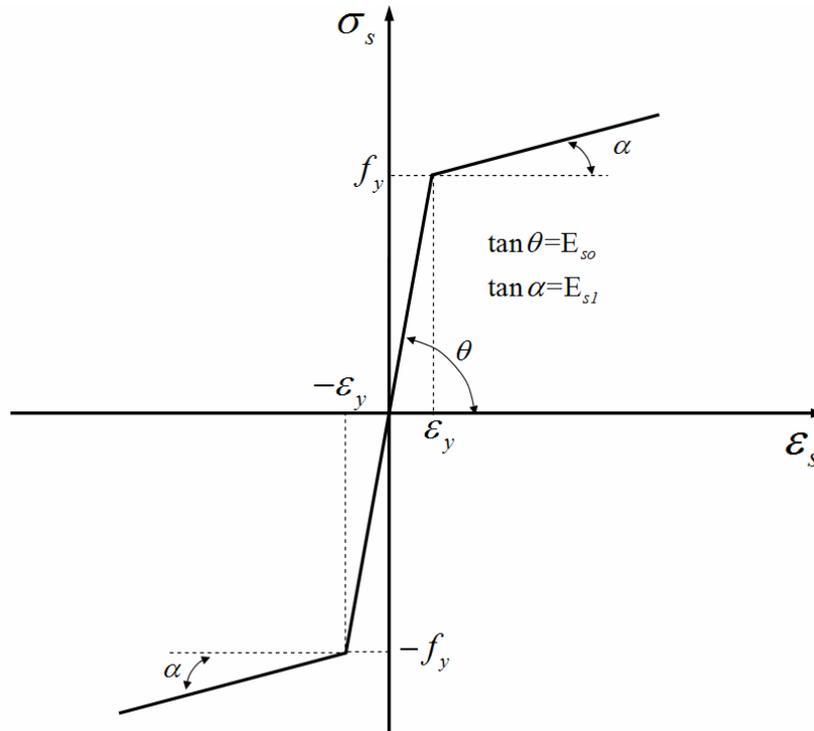


Figura 4.1 – Modelo constitutivo bilinear para o aço.

Muitos modelos uniaxiais foram propostos para simular o comportamento cíclico de barras de aço e, de acordo com o Boletim CEB 230 (1996), estes modelos são geralmente baseados nas leis propostas por Ramberg e Osgood (1943) ou por Menegotto e Pinto (1973).

Na presente tese, para modelagem do comportamento cíclico, implementou-se o modelo desenvolvido por Menegotto e Pinto (1973) e um modelo constitutivo bilinear.

4.1.1 Modelo Menegotto e Pinto (1973)

Neste modelo cíclico, antes de ocorrer a primeira descarga, utilizam-se as equações (4.1). A partir da primeira inversão de carga, os trechos de descarga e recarga são definidos como segue abaixo.

Para definição das curvas de descarga e recarga, inicialmente tem-se que determinar os valores das deformações específicas e tensões nos pontos A e B, mostrados nas Figuras 4.2 e 4.3. O ponto A(ϵ_r, σ_r) é o último ponto antes de ocorrer uma inversão de carga, ou seja, antes de ocorrer uma descarga ou recarga no processo cíclico. O ponto B(ϵ_o, σ_o) é o ponto onde as

retas (a) e (b) se interceptam, como mostrado nas Figura 4.2 e 4.3. Observa-se que a reta (a) é uma reta com inclinação E_{so} que passa pelo ponto $A(\varepsilon_r, \sigma_r)$, enquanto que a reta (b) possui uma inclinação E_{sl} e passa pelo ponto $C(-\varepsilon_y, -f_y)$, conforme Figura 4.2.

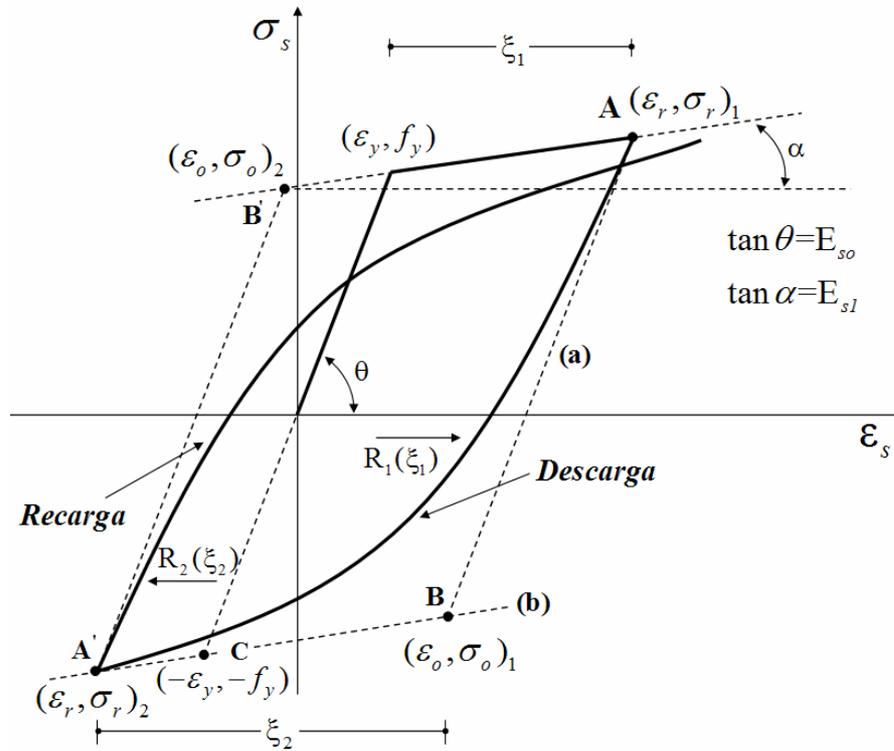


Figura 4.2 – Diagrama para o aço: início do processo cíclico com carga de tração uniaxial.

Quando o aço é submetido a uma *situação de descarga*, após uma aplicação de carga de tração uniaxial, o ponto $B(\varepsilon_o, \sigma_o)_1$ é determinado pela seguinte equação (Figura 4.2):

$$\begin{aligned}\varepsilon_o^1 &= \varepsilon_r^1 - 2\varepsilon_y \\ \sigma_o^1 &= -f_y + E_{sl}(\varepsilon_r^1 - \varepsilon_y)\end{aligned}\quad (4.2)$$

onde,

ε_r^1 – é a deformação específica do último ponto antes de ocorrer a descarga (*ponto A*).

As demais variáveis já foram definidas na equação (4.1).

Caso o aço tenha sido solicitado por carga de compressão uniaxial, antes de ocorrer a inversão de carga (*descarga*), o ponto $B(\varepsilon_o, \sigma_o)_1$ é determinado por (Figura 4.3):

$$\varepsilon_o^1 = \varepsilon_r^1 + 2\varepsilon_y \quad (4.3)$$

$$\sigma_o^1 = f_y + E_{s1}(\varepsilon_r^1 + \varepsilon_y)$$

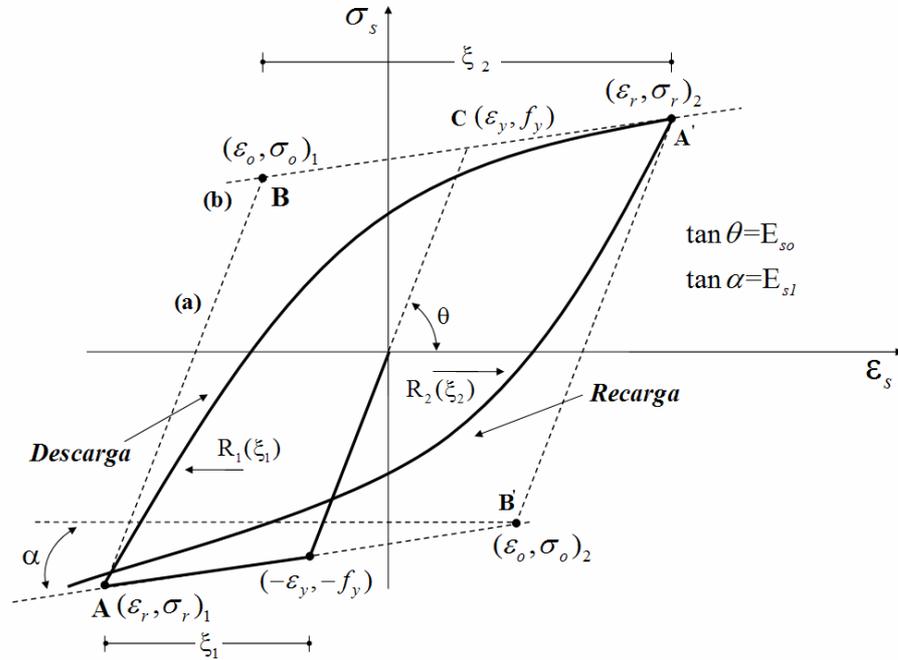


Figura 4.3 – Diagrama para o aço: início do processo cíclico com carga de compressão uniaxial.

De maneira similar, para uma *situação de recarga*, após ocorrer uma descarga no processo cíclico, pode-se determinar o ponto B' $(\varepsilon_o, \sigma_o)_2$, como descrito a seguir. Caso tenha iniciado o processo cíclico com carga de tração uniaxial, ou seja $\varepsilon_r^1 > 0$, tem-se (Figura 4.2):

$$\sigma_o^2 = \frac{f_y + (\varepsilon_r^2 - \varepsilon_y - \frac{\sigma_r^2}{E_{so}})E_{s1}}{(1-b)} \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_o^2 = \varepsilon_r^2 + \frac{(\sigma_o^2 - \sigma_r^2)}{E_{s1}}$$

onde,

$b = \frac{E_{s1}}{E_{so}}$ – é uma relação de endurecimento do aço;

$\varepsilon_r^2, \sigma_r^2$ – são a deformação específica e a tensão do último ponto antes de ocorrer a recarga (*ponto A'*). As demais variáveis já foram definidas na equação (4.1).

Contudo, se o processo cíclico iniciar com carga de compressão uniaxial, ou seja $\varepsilon_r^1 < 0$, tem-se (Figura 4.3):

$$\sigma_o^2 = \frac{-f_y + (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_y - \frac{\sigma_r^2}{E_{so}})E_{s1}}{(1-b)} \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_o^2 = \varepsilon_r^2 + \frac{(\sigma_o^2 - \sigma_r^2)}{E_{s1}}$$

Com a determinação dos valores das tensões e deformações específicas nos pontos A e B para uma determinada inversão de carga (*descarga ou recarga*), pode-se definir o comportamento cíclico através da equação:

$$\sigma_s = \sigma_r + \sigma_s^* (\sigma_o - \sigma_r) \quad (4.6)$$

onde,

σ_o , ε_o – são a tensão e a deformação específica no ponto B, definido anteriormente;

σ_r , ε_r – são a tensão e a deformação específica no ponto A, último ponto antes de ocorrer uma inversão de carga.

As tensões normalizadas σ_s^* são determinadas por:

$$\sigma_s^* = b\varepsilon_s^* + (1-b) \frac{\varepsilon_s^*}{\sqrt[R]{1 + (\varepsilon_s^*)^R}} \quad (4.7)$$

onde,

$b = \frac{E_{s1}}{E_{so}}$ – é uma relação de endurecimento do aço;

$\varepsilon_s^* = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_r}{\varepsilon_o - \varepsilon_r}$ – é a deformação específica normalizada correspondente à σ_s^* ;

$R = R_o - \frac{a_1 \xi}{a_2 + \xi}$ – é um parâmetro que influencia a forma da curva de transição e

representa o *efeito Bauschinger*;

R_o , a_1 , a_2 – parâmetros determinados experimentalmente.

O parâmetro R é função de ξ (ξ_1 ou ξ_2) que é a diferença de deformações específicas entre o ponto B corrente e o ponto de inversão de carga anterior (ponto A), conforme observado nas Figuras 4.2 e 4.3. Este parâmetro ξ é atualizado depois de cada inversão de carga (*descarga ou recarga*).

Nesta tese, admite-se para as constantes do material os seguintes valores: $R_0 = 20$, $a_1 = 18,5$ e $a_2 = 0,0015$, conforme proposto por Elmorsi et al. (1998). Apresenta-se na Figura 4.4 um gráfico ilustrativo do comportamento do aço quando submetido a processos de descarga e recarga, que foi obtido através do modelo adotado nesta tese. As propriedades do aço, usadas nesta simulação numérica, estão apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Propriedades do aço.

Aço	
Tensão de escoamento (kN/cm^2)	50
Módulo de elasticidade inicial ($E_{s0} - \text{kN/cm}^2$)	21000
Módulo de elasticidade tangente do trecho de endurecimento ($E_{s1} - \text{kN/cm}^2$)	210

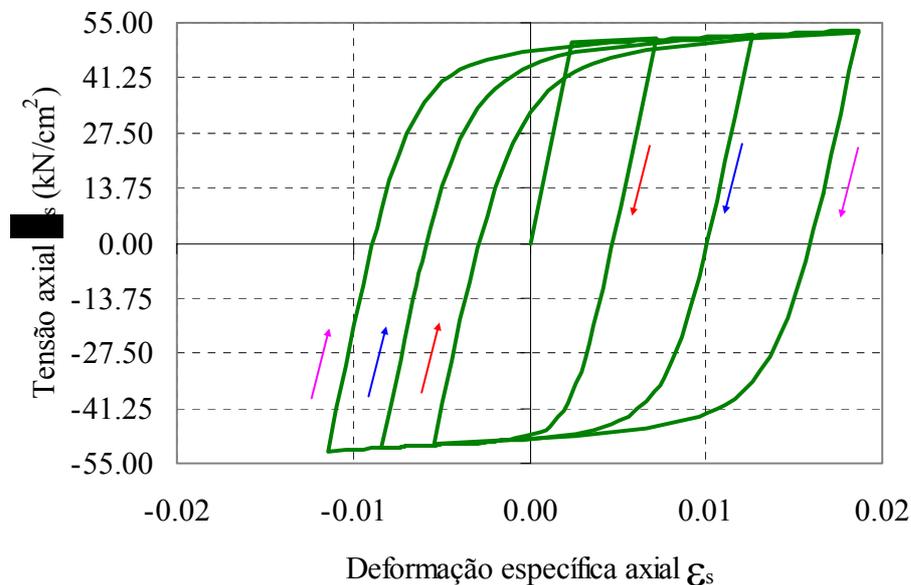


Figura 4.4 – Gráfico ilustrativo do comportamento cíclico adotado para o aço.

4.1.2 Modelo constitutivo bilinear

A lei constitutiva deste modelo é constituída por dois trechos, um elástico linear e um patamar de endurecimento. Este modelo foi adotado por Kwon (2000).

De maneira similar ao modelo de Menegotto e Pinto (1973), antes de ocorrer a primeira descarga, utilizam-se as equações (4.1). A partir da primeira inversão de carga, os trechos de descarga e recarga são definidos como segue abaixo.

Quando o aço é submetido a uma *situação de descarga*, após uma aplicação de carga de tração uniaxial, a curva tensão-deformação na armadura é definida por (Figura 4.5):

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \sigma_r + (\varepsilon_s - \varepsilon_r)E_{s0} & \text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_o \\ \sigma_s &= \sigma_o + (\varepsilon_s - \varepsilon_o)E_{s1} & \text{se } \varepsilon_s < \varepsilon_o\end{aligned}\quad (4.8)$$

onde,

σ_r , ε_r – são a tensão e a deformação específica no *ponto A*, último ponto antes de ocorrer uma inversão de carga (*descarga*);

σ_o , ε_o – são a tensão e a deformação específica no *ponto B*, equação (4.2). As demais variáveis já foram definidas na equação (4.1).

Caso ocorra uma situação de compressão uniaxial antes da aplicação de *descarga*, as equações são iguais as anteriores, modificando apenas o intervalo de aplicação destas equações, ou seja (Figura 4.6):

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \sigma_r + (\varepsilon_s - \varepsilon_r)E_{s0} & \text{se } \varepsilon_s < \varepsilon_o \\ \sigma_s &= \sigma_o + (\varepsilon_s - \varepsilon_o)E_{s1} & \text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_o\end{aligned}\quad (4.9)$$

onde,

σ_o , ε_o – são a tensão e a deformação específica no *ponto B*, equação (4.3). As demais variáveis já foram definidas nas equações anteriores.

De maneira similar, para uma *situação de recarga*, após ocorrer uma descarga no processo cíclico, pode-se determinar a curva tensão-deformação, como descrito a seguir. Caso tenha iniciado o processo cíclico com carga de tração uniaxial tem-se (Figura 4.5):

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \sigma_r + (\varepsilon_s - \varepsilon_r)E_{s0} & \text{se } \varepsilon_s < \varepsilon_o \\ \sigma_s &= \sigma_o + (\varepsilon_s - \varepsilon_o)E_{s1} & \text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_o\end{aligned}\quad (4.10)$$

onde,

σ_r, ε_r – são a tensão e a deformação específica no *ponto A'*, último ponto antes de ocorrer uma inversão de carga (*recarga*);

σ_o, ε_o – são a tensão e a deformação específica no *ponto B'*, equação (4.4). As demais variáveis já foram definidas na equação (4.1).

Contudo, se o processo cíclico iniciar com carga de compressão uniaxial tem-se (Figura 4.6):

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \sigma_r + (\varepsilon_s - \varepsilon_r)E_{s0} & \text{se } \varepsilon_s \geq \varepsilon_o \\ \sigma_s &= \sigma_o + (\varepsilon_s - \varepsilon_o)E_{s1} & \text{se } \varepsilon_s < \varepsilon_o\end{aligned}\quad (4.11)$$

onde,

σ_o, ε_o – são a tensão e a deformação específica no *ponto B'*, equação (4.5). As demais variáveis já foram definidas nas equações anteriores.

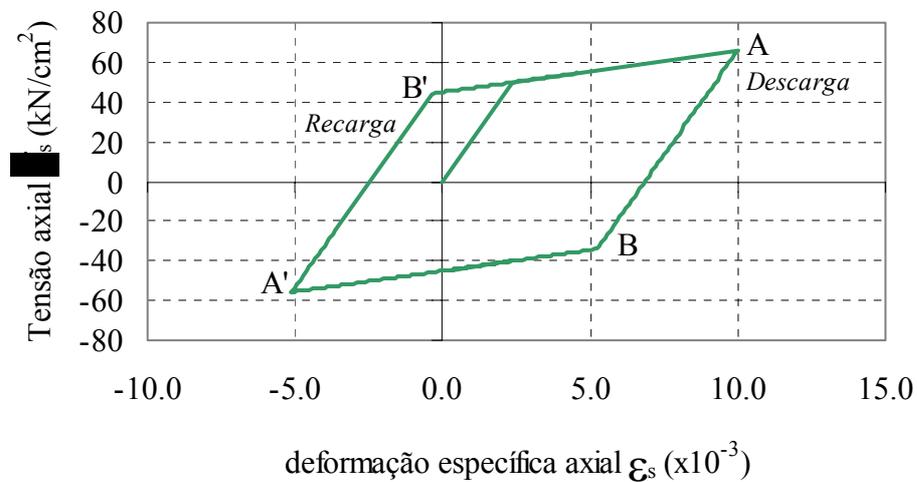


Figura 4.5 – Diagrama para o aço: início do processo cíclico com carga de tração uniaxial.

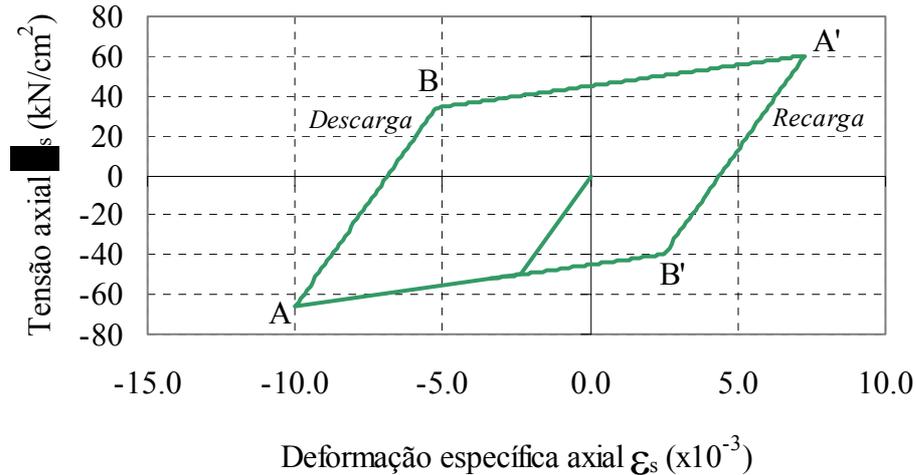


Figura 4.6 – Diagrama para o aço: início do processo cíclico com carga de compressão uniaxial.

4.2 ESTUDOS COMPARATIVOS

Para verificar a validade do modelo proposto por Menegotto e Pinto (1973), adotado para o aço, foram feitos alguns estudos comparativos entre os resultados numéricos obtidos pelo programa e os ensaios experimentais realizados por Kent e Park (1973) *apud* Balan et al. (1998), Panthaki (1991) *apud* Balan et al. (1998) e Seckin (1981) *apud* Elmorsi et al. (1998). Como o modelo bilinear, apresentado no item 4.1.2, é uma simplificação do modelo proposto por Menegotto e Pinto (1973), o presente item limitou-se apenas à análise do modelo não-linear.

A primeira análise refere-se a uma série de ensaios realizados por Kent e Park (1973) *apud* Balan et al. (1998). Para esta análise, as propriedades do aço tracionado estão apresentadas na Tabela 4.2. Os resultados experimentais e numéricos destes ensaios cíclicos são mostrados nas Figuras 4.7 a 4.10.

Tabela 4.2 – Propriedades do aço. Ensaios realizados por Kent e Park (1973) *apud* Balan et al. (1998): *ensaios 6, 8, 15 e 17.*

Aço	
Tensão de escoamento (kN/cm ²)	31
Módulo de elasticidade inicial (E _{so} – kN/cm ²)	19914
Módulo de elasticidade tangente do trecho de endurecimento (E _{s1} – kN/cm ²)	199,14

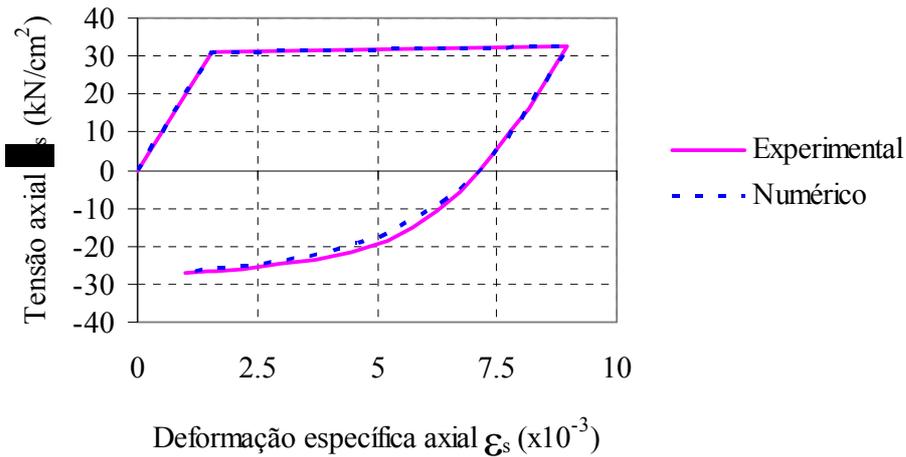


Figura 4.7 – Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Kent e Park (1973) *apud* Balan et al. (1998): *ensaio 6.*

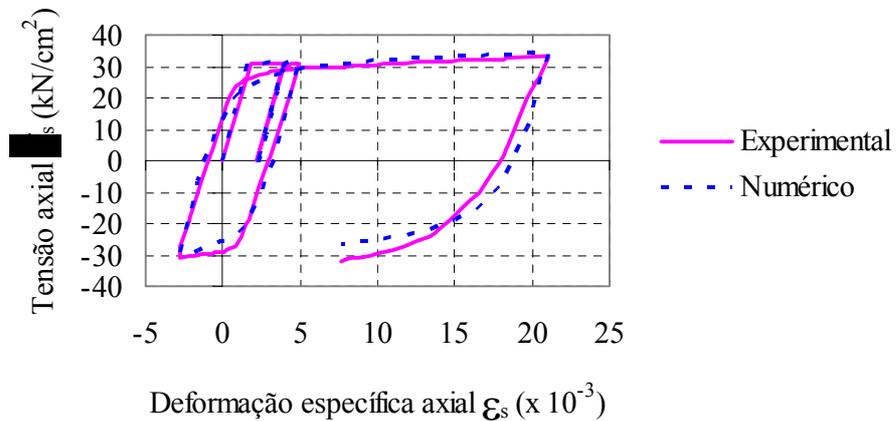


Figura 4.8 – Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Kent e Park (1973) *apud* Balan et al. (1998): *ensaio 8.*

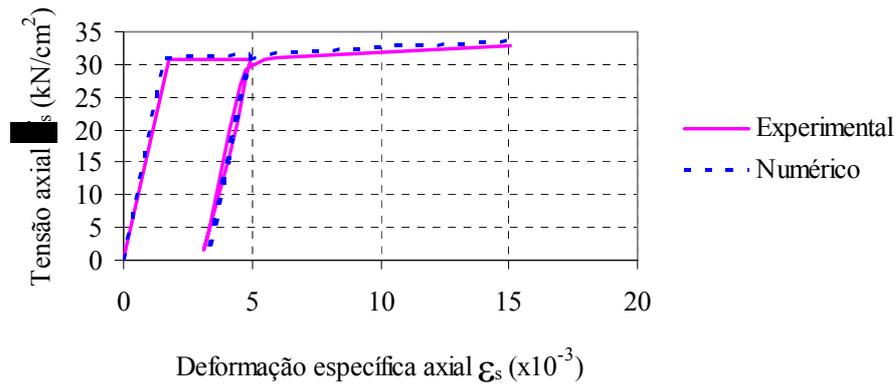


Figura 4.9 – Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Kent e Park (1973) *apud* Balan et al. (1998): *ensaio 15*.

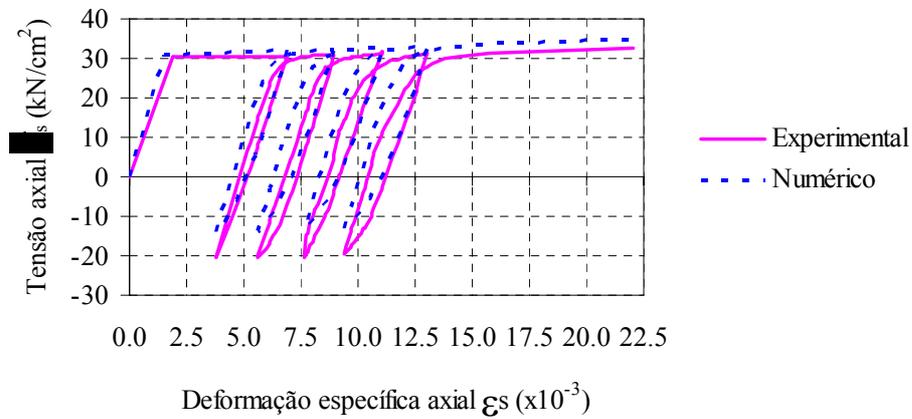


Figura 4.10 – Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Kent e Park (1973) *apud* Balan et al. (1998): *ensaio 17*.

A segunda análise refere-se a uma série de ensaios realizados por Panthaki (1991) *apud* Balan et al. (1998). Para esta análise, as propriedades do aço estão apresentadas na Tabela 4.3 e os resultados experimentais e numéricos são mostrados nas Figura 4.11 e 4.12.

Tabela 4.3 – Propriedades do aço. Ensaios realizados por Panthaki (1991) *apud* Balan et al. (1998): *ensaios P2 e P16*.

Aço	
Tensão de escoamento (kN/cm ²)	86,5
Módulo de elasticidade inicial (E _{so} – kN/cm ²)	22043
Módulo de elasticidade tangente do trecho de endurecimento (E _{s1} – kN/cm ²)	480,70

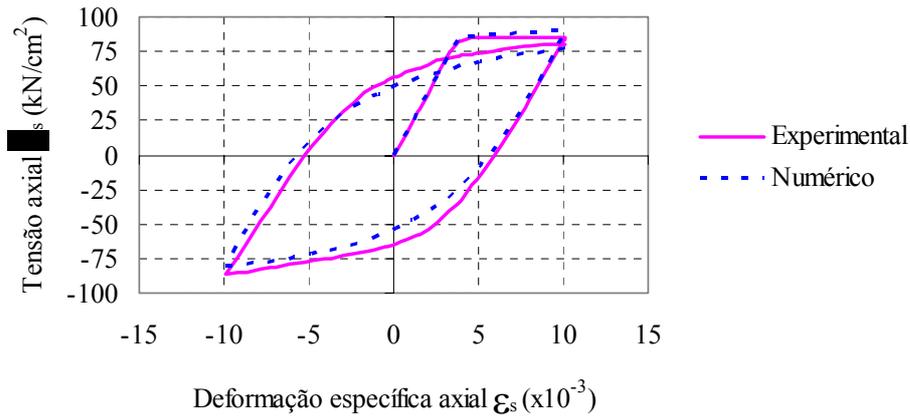


Figura 4.11 – Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Panthaki (1991) *apud* Balan et al. (1998): *ensaio P2*.

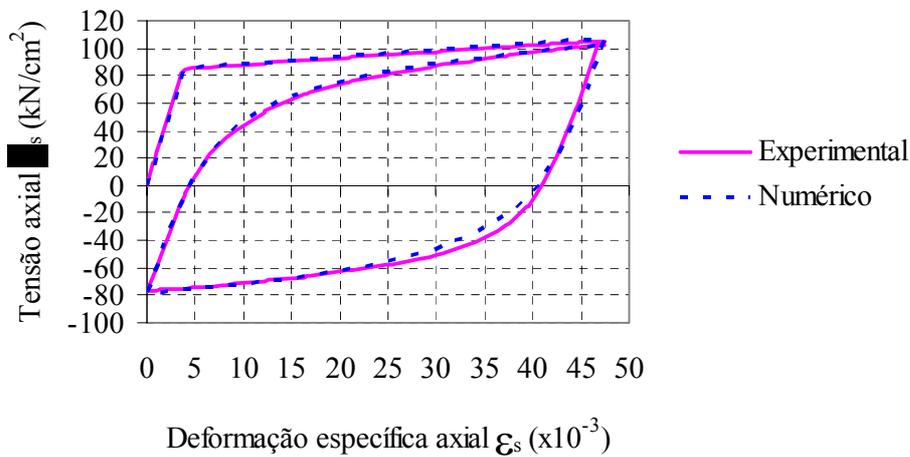


Figura 4.12 – Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Panthaki (1991) *apud* Balan et al. (1998): *ensaio P16*.

Por fim, a terceira análise refere-se a uma série de ensaios realizados por Seckin (1981) *apud* Elmorsi et al. (1998). Para esta análise, as propriedades do aço estão apresentadas na Tabela 4.4 e os resultados experimentais e numéricos destes ensaios cíclicos são mostrados nas Figura 4.13 e 4.14.

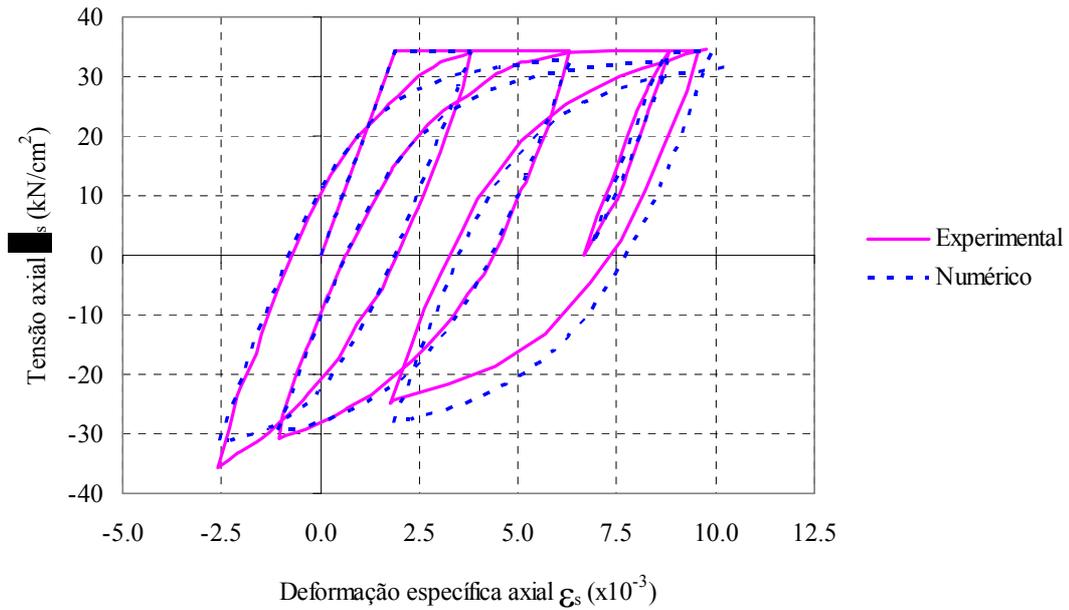


Figura 4.13 – Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Seckin (1981) *apud* Elmorsi et al. (1998): *ensaio BR01*.

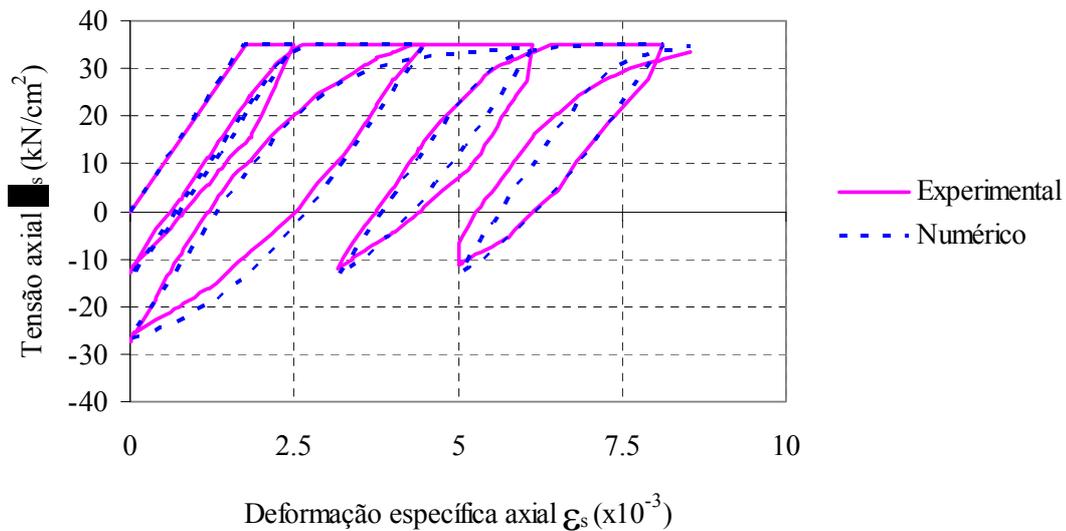


Figura 4.14 – Resposta tensão-deformação numérica e experimental para os ensaios realizados por Seckin (1981) *apud* Elmorsi et al. (1998): *ensaio BR07*.

Tabela 4.4 – Propriedades do aço. Ensaio realizado por Seckin (1981) *apud* Elmorsi et al. (1998): *ensaios BR01 e BR07*.

Aço	BR01	BR07
Tensão de escoamento (kN/cm ²)	34	35
Módulo de elasticidade inicial (E _{so} – kN/cm ²)	18010,5	20000

Observa-se, nas Figuras 4.7 a 4.14, que o modelo de Menegotto e Pinto (1973) consegue representar bem o comportamento cíclico do aço, simulando a sua resposta não-linear, após alternância de carga.

CAPÍTULO 5

5. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo, são apresentadas as formulações para a análise não-linear de estruturas através do método dos elementos finitos com solução em deslocamentos. Inicialmente, é feita uma descrição das formulações em deslocamentos para os elementos isoparamétricos usados para o concreto. Em seguida, descreve-se, detalhadamente, o modelo de elementos finitos para a armadura. E, finalmente, apresenta-se o método de Newton-Raphson para a solução do sistema de equações não-lineares. Apresenta-se, também, o procedimento usado para a consideração de deslocamentos prescritos à estrutura na solução de problemas não-lineares.

5.1 INTRODUÇÃO

Com o avanço dos trabalhos científicos, têm-se desenvolvido vários modelos matemáticos para se analisar o comportamento tridimensional das estruturas. Geralmente, a utilização desses modelos requer o uso de métodos numéricos eficazes, entre os quais pode-se citar o método dos elementos finitos. Como já mencionado anteriormente, o programa desenvolvido neste trabalho utiliza o método dos elementos finitos por ser um método eficaz que propicia modelagens realísticas, confiáveis e de aplicação prática na engenharia.

O procedimento do método dos elementos finitos consiste, inicialmente, em dividir o domínio da estrutura analisada em subdomínios ou elementos não superpostos, de dimensões finitas, denominados de elementos finitos, que são interligados por meio de pontos nodais, como ilustrado pela Figura 5.1. Este método é bastante amplo, existindo atualmente inúmeros tipos de elementos finitos disponíveis para a modelagem das estruturas, como apresentado, entre outros, em Bathe (1996), Crisfield (1986) e Zienkiewicz e Taylor (2000). O programa

em Elementos Finitos apresentado nesta tese utiliza elementos isoparamétricos hexaédricos lineares e quadráticos para a modelagem das estruturas de concreto. Cabe salientar que os elementos isoparamétricos quadráticos permitem modelar mais adequadamente os contornos irregulares das peças que se pretende discretizar, uma vez que possibilitam a geração de elementos finitos com lados curvos (Assan, 2003). Para a modelagem das barras de armadura, utilizam-se elementos finitos unidimensionais isoparamétricos, que permitem a modelagem de barras retas ou curvas.

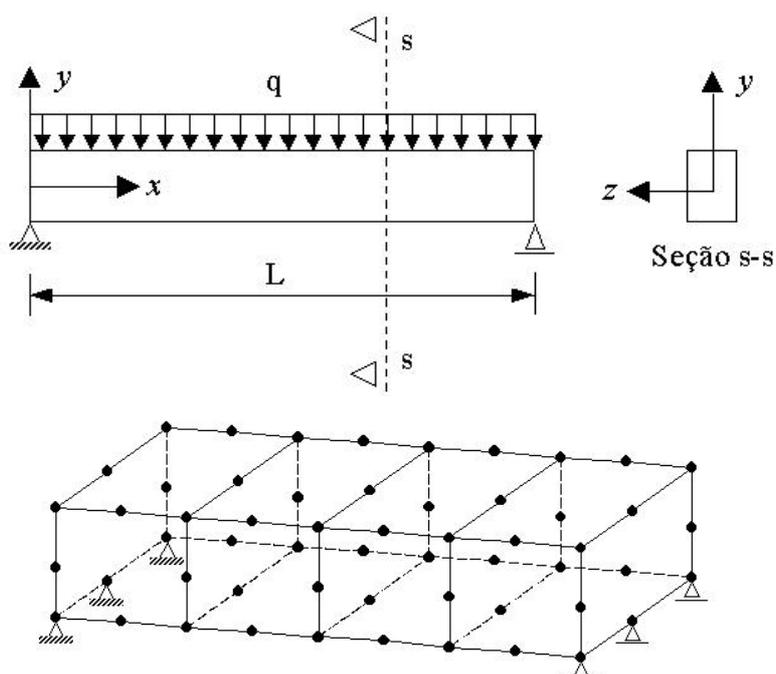


Figura 5.1 – Discretização de uma viga em elementos isoparamétricos quadráticos.

O método dos elementos finitos consiste não apenas em transformar o sólido contínuo em uma associação de elementos discretos e escrever as equações de compatibilidade e equilíbrio entre eles, mas admitir funções contínuas que representem, por exemplo, o campo de deslocamentos no domínio de um elemento e , a partir daí, obter o estado de deformações específicas correspondente que, associado às relações constitutivas do material, permitem definir o estado de tensões em todo o elemento. Este estado de tensões é transformado em esforços internos que têm de estar em equilíbrio com as ações externas, como será explicado a seguir.

5.2 ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO

5.2.1 Campo de deslocamentos

Para um sólido tridimensional, o movimento de qualquer ponto neste sólido fica perfeitamente definido pelas três componentes do vetor deslocamento apresentado abaixo, conforme Figura 5.2:

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T \quad (5.1)$$

onde,

u, v, w – são os deslocamentos de um ponto segundo os eixos cartesianos x, y e z , respectivamente.

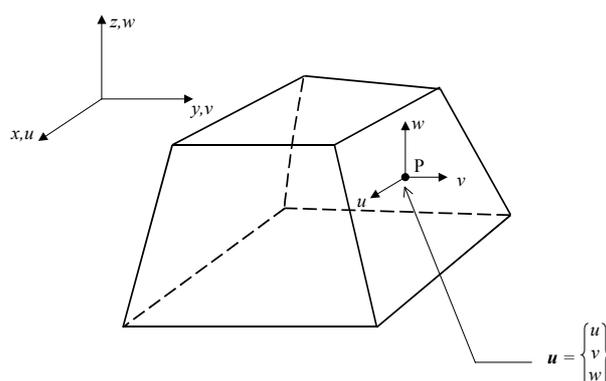


Figura 5.2 – Sólido tridimensional. Vetor de deslocamentos em um ponto.

Neste trabalho, utiliza-se o método dos elementos finitos com solução em deslocamentos. Assim, nas formulações para o método dos elementos finitos, o campo de deslocamentos no interior de cada elemento é obtido através dos deslocamentos nodais, mediante o emprego de funções de interpolação (Oñate, 1995). Considerando o elemento hexaédrico linear, os deslocamentos no interior deste elemento podem ser representados por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 + N_5u_5 + N_6u_6 + N_7u_7 + N_8u_8 \\ N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4 + N_5v_5 + N_6v_6 + N_7v_7 + N_8v_8 \\ N_1w_1 + N_2w_2 + N_3w_3 + N_4w_4 + N_5w_5 + N_6w_6 + N_7w_7 + N_8w_8 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Escrevendo esta equação de uma maneira geral para um número genérico de pontos nodais np de um elemento, tem-se:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{np} \mathbf{N}_i \mathbf{U}_i^e = \mathbf{N} \mathbf{U}^e \quad (5.3)$$

onde,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_i, \dots, \mathbf{N}_{np}]; \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

e,

$$\mathbf{U}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^e \\ \mathbf{U}_2^e \\ \vdots \\ \mathbf{U}_i^e \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{np}^e \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{U}_i^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

são, respectivamente, a matriz das funções de forma e o vetor de deslocamentos do elemento para um determinado nó i . Como já dito anteriormente, a variável np é o número de nós do elemento, apresentando valor igual a oito para o elemento hexaédrico linear e vinte para o elemento hexaédrico quadrático. As funções de interpolação (ou funções de forma) têm como variáveis as coordenadas normalizadas (ξ, η, ζ) , sendo apresentadas, segundo Oñate (1995), pelas formulações de (5.6) a (5.10). Para o elemento *hexaédrico linear*, como ilustrado na Figura 5.3(a), tem-se:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_o)(1 + \eta_o)(1 + \zeta_o) \quad \text{para } i=1,2,3,\dots,8 \quad (5.6)$$

onde,

$$\xi_o = \xi \xi_i, \quad \eta_o = \eta \eta_i, \quad \zeta_o = \zeta \zeta_i;$$

ξ_i, η_i , e ζ_i – são as coordenadas naturais dos nós em consideração, apresentando valores iguais a -1 ou 1 , conforme a Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Coordenadas naturais para o elemento hexaédrico linear.

Número local			
do Nó	ξ_i	η_i	ζ_i
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

Para o elemento *hexaédrico quadrático*, conforme a Figura 5.3(b), tem-se:

Nós de canto:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_o)(1 + \eta_o)(1 + \zeta_o)(\xi_o + \eta_o + \zeta_o - 2) \text{ para } i=1,3,5,7,13,15,17,19 \quad (5.7)$$

Nós intermediários:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_o)(1 + \zeta_o) \text{ para } i=2,6,14,18 \quad (5.8)$$

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_o)(1 + \zeta_o) \text{ para } i=4,8,16,20 \quad (5.9)$$

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_o)(1 + \eta_o) \text{ para } i=9,10,11,12 \quad (5.10)$$

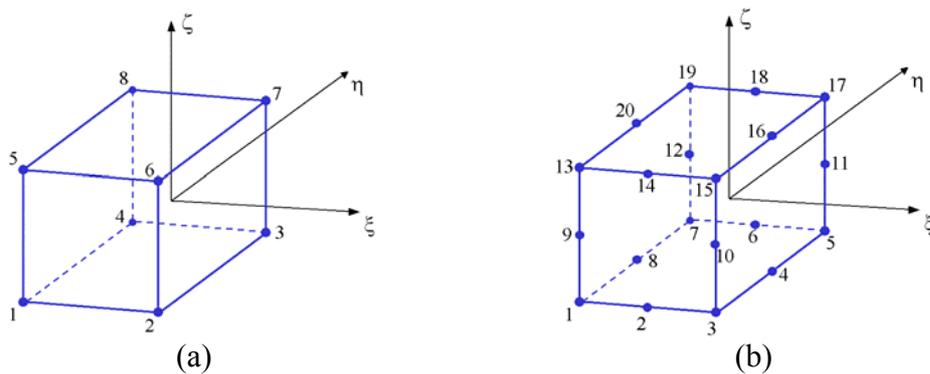


Figura 5.3 – Elementos hexaédricos: (a) linear; (b) quadrático.

Vale salientar que, para o elemento hexaédrico linear, o campo de deslocamentos possui variação linear e os campos de tensões e deformações específicas são constantes ao longo das bordas do elemento, enquanto que, para o elemento hexaédrico quadrático, o campo de

deslocamentos possui variação quadrática e os campos de tensões e deformações específicas apresentam variações lineares.

Quando são fornecidas as coordenadas naturais de um determinado nó do elemento, as funções de interpolação têm valor unitário neste nó e valores nulos nos outros nós do elemento, atendendo a condição de compatibilidade nodal, ou seja:

$$N_i(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (5.11)$$

Ainda, em um ponto no interior do elemento, a soma dos valores das funções de interpolação para as coordenadas naturais deste ponto deve ser igual à unidade, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{np} N_i(\xi, \eta, \zeta) = 1 \quad (5.12)$$

Nos elementos isoparamétricos, define-se a geometria do elemento com as mesmas funções de interpolação utilizadas na definição do campo de deslocamentos, interpolando as coordenadas dos pontos nodais. Então, as coordenadas cartesianas (x, y, z) de um ponto no interior deste elemento são obtidas da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{np} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

onde,

N_i – é a função de forma correspondente ao nó i do elemento com coordenadas cartesianas (x_i, y_i, z_i) ;

np – número de nós do elemento.

5.2.2 Campo de deformações específicas

Pela teoria clássica da elasticidade tridimensional, o vetor de deformações específicas em um ponto do contínuo está definido por seis componentes como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \quad (5.14)$$

com,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} ; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} ; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde,

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – são as deformações específicas normais;

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – são as deformações específicas tangenciais.

Uma vez definido o campo de deslocamentos pelo método dos elementos finitos, as componentes de deformações específicas são obtidas a partir dos deslocamentos, substituindo a equação (5.3) nas formulações (5.14) e (5.15), e obtendo a seguinte expressão para um elemento genérico com np nós:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{np} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} w_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} v_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{np} \mathbf{B}_i \mathbf{U}_i^e = \mathbf{B} \mathbf{U}^e \quad (5.16)$$

onde,

\mathbf{B} – é a matriz de deformação específica do elemento, dada por:

$$\mathbf{B} = [B_1, B_2, \dots, B_i, \dots, B_{np}]$$

sendo, \mathbf{B}_i a matriz de deformação específica do nó i , expressa por:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

5.2.3 Campo de tensões

O vetor de tensões em um ponto do elemento contém seis componentes de tensões, sendo representado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T \quad (5.18)$$

onde,

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – são tensões normais;

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – são tensões tangenciais.

Sabendo-se que, a relação entre as tensões e deformações específicas pode ser representada pela seguinte equação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.19)$$

sendo,

\mathbf{D} – é a matriz constitutiva do material, como já mencionado no capítulo 3.

Substituindo a equação (5.16), na expressão acima, pode-se reescrever $\boldsymbol{\sigma}$ da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBU}^e \quad (5.20)$$

5.2.4 Equações de equilíbrio

Uma das etapas fundamentais no cálculo das estruturas, utilizando o método dos elementos finitos, consiste na obtenção do sistema de equações de equilíbrio da estrutura analisada, que relaciona as forças atuantes com os deslocamentos nodais.

Considere-se um corpo sujeito a um conjunto de forças de volume e de superfície que lhe provocam uma deformação. Com base no seu estado de equilíbrio estático, a configuração do corpo é modificada por um conjunto de deslocamentos, pequenos e compatíveis com as condições de contorno, que se designam deslocamentos virtuais. O Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece que, provocando deslocamentos virtuais em um sólido em equilíbrio sob a ação de forças externas (de superfície e/ou de volume), o trabalho (virtual externo) dessas forças é igual ao trabalho (virtual interno) das correspondentes tensões (que, quando multiplicadas por seus respectivos elementos infinitesimais de área, são numericamente iguais às forças internas). O Princípio dos Trabalhos Virtuais é condição necessária e suficiente para garantir o equilíbrio de toda a estrutura, bem como de qualquer uma de suas partes (Soriano, 2003). Sendo assim, este princípio é bastante utilizado para obtenção das equações de equilíbrio da estrutura analisada. Apresenta-se a seguir, o Princípio dos Trabalhos Virtuais, representada pela seguinte expressão:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS = 0 \quad (5.21)$$

onde,

$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\delta \mathbf{u}$ – referem-se aos vetores de deformações virtuais e deslocamentos virtuais, respectivamente;

$\boldsymbol{\sigma}$ – é o vetor que contém as componentes de tensão;

V , S – referem-se ao volume e à superfície carregada, respectivamente, de um elemento finito no sistema indeformado;

\mathbf{b} , \mathbf{t} – são os vetores de forças de volume e de superfície, respectivamente.

Esta expressão acima representa uma expressão geral, para qualquer tipo de elemento finito, através da qual pode-se deduzir a matriz de rigidez e o vetor de forças aplicadas usados no sistema de equações de equilíbrio da estrutura, como será visto a seguir.

Partindo-se da equação (5.16), pode-se determinar a deformação virtual $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$, usada na equação (5.21), pela seguinte equação:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{U}^e \quad (5.22)$$

que é equivalente a:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T = \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{B}^T \quad (5.23)$$

De maneira similar, a partir da equação (5.3), determina-se o deslocamento virtual por:

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{N}\delta\mathbf{U}^e \quad (5.24)$$

podendo ser reescrita da seguinte maneira:

$$\delta\mathbf{u}^T = \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{N}^T \quad (5.25)$$

Substituindo as equações (5.23) e (5.25) na equação (5.21), o Princípio dos Trabalhos Virtuais passa a ser expresso por:

$$\int_V \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{N}^T\mathbf{b} dV - \int_S \delta\mathbf{U}^{eT}\mathbf{N}^T\mathbf{t} dS = 0 \quad (5.26)$$

De acordo com o Princípio dos Trabalhos Virtuais, a equação acima é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, concluindo-se assim que:

$$\int_V \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \mathbf{N}^T\mathbf{b} dV - \int_S \mathbf{N}^T\mathbf{t} dS = 0 \quad (5.27)$$

A equação acima expressa a condição de equilíbrio para um elemento, podendo ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{P}_{NL}^e(\mathbf{U}^e) = \mathbf{P}_{ext}^e \quad (5.28)$$

onde,

$$\mathbf{P}_{NL}^e(\mathbf{U}^e) = \int_V \mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma} dV \quad (5.29)$$

e,

$$\mathbf{P}_{ext}^e = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \quad (5.30)$$

sendo,

$\mathbf{P}_{NL}^e(\mathbf{U}^e)$ – vetor de ações nodais internas não-lineares do elemento;

\mathbf{P}_{ext}^e – vetor de ações nodais equivalentes às cargas externas aplicadas sobre o elemento.

Para cada grau de liberdade dos nós da estrutura discretizada, somam-se as contribuições dos elementos que neles concorrem, obtendo:

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}_{ext} \quad (5.31)$$

onde $\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{U})$ é o vetor de forças não-lineares da estrutura e \mathbf{P}_{ext} é o vetor de cargas nodais aplicadas sobre a estrutura. Esta equação de equilíbrio global da estrutura pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{P}_{ext} - \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{U}) = 0 \quad (5.32)$$

onde,

\mathbf{U} – é o vetor de deslocamentos nodais globais da estrutura.

Se \mathbf{U} não for a solução exata da equação (5.32), surgirá um vetor de forças desequilibradas, expresso por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}_{ext} - \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{U}) \quad (5.33)$$

Sendo assim, este problema de análise não-linear consiste em encontrar o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{U} que torne o vetor de forças desequilibradas nulo, ou seja:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}) = 0 \quad (5.34)$$

Para solução de sistemas de equações não-lineares, existem diversos métodos de resolução, como apresentado em Bathe (1996). Neste trabalho, utiliza-se o método de

Newton-Raphson, que será descrito mais adiante. Todavia, para encontrar a solução da equação (5.32), necessita-se estabelecer a equação de equilíbrio da estrutura, e para isso, como já dito anteriormente, utiliza-se a equação (5.27) do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Substituindo a equação (5.20), na expressão (5.27), tem-se:

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{U}^e dV - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV - \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS = 0 \quad (5.35)$$

Comparando esta equação com a relação de rigidez que é utilizada no método dos deslocamentos,

$$\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{P}_{ext}^e \quad (5.36)$$

tem-se:

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (5.37)$$

$$\mathbf{P}_{ext}^e = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \quad (5.38)$$

onde,

\mathbf{K}^e – é a matriz de rigidez do elemento.

Realizando o somatório em cada grau de liberdade nodal da estrutura das contribuições dos elementos que incidem em um mesmo nó, através da expressão (5.36), chega-se:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}_{ext} \quad (5.39)$$

onde,

\mathbf{K} – é a matriz de rigidez global da estrutura.

A equação (5.39) resulta em um sistema de equações lineares da estrutura que fornecerá os deslocamentos nodais para o carregamento aplicado. Com estes deslocamentos nodais pode-se, agora, calcular as deformações específicas e as tensões a partir das formulações (5.16) e (5.20), respectivamente. Para solução do sistema de equações não-lineares (equação (5.32)), será empregada a equação acima (5.39).

5.2.5 Regra de integração numérica

Devido à complexidade das funções que devem ser integradas para obter a matriz de rigidez e os vetores de forças nodais equivalentes, utiliza-se a integração numérica para resolução destas integrais. Neste trabalho, as integrais são resolvidas numericamente, conforme as regras de integração apresentadas em Irons (1971) e recomendada por Hinton (1988). Esta regra de integração é expressa da seguinte forma (Hinton, 1988):

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$A f(0, 0, 0) +$$

$$B [f(-b, 0, 0) + f(b, 0, 0) + f(0, -b, 0) + \dots] +$$

$$C [f(-c, -c, -c) + f(c, -c, -c) + \dots]$$
(5. 40)

onde,

A, B, C – são os fatores de peso;

b, c – são as coordenadas dos pontos de integração no sistema de coordenadas naturais do elemento.

Os coeficientes usados na expressão anterior são apresentados na Tabela 5.2, para a regra com 15 pontos de integração, e a regra que usa 6 pontos de integração. Para os elementos hexaédricos quadráticos, o programa utiliza 15 pontos de integração, enquanto que, para os elementos hexaédricos lineares, utiliza-se a regra para 6 pontos de integração.

Tabela 5.2 – Fatores de peso e coordenadas dos pontos de integração no sistema de coordenadas naturais.

Regra de integração	A	B	C	b	c
Regra 15	1,564444	0,355556	0,537778	1,0	0,674100
Regra 6	0,00	1,333333	0,0	1,0	0,0

Para as duas regras, com 6 e 15 pontos de integração, estes pontos são dispostos simetricamente no domínio 3D dos elementos hexaédricos lineares e quadráticos, respectivamente, conforme está ilustrado na Figura 5.4. Segundo Hinton (1988), as duas regras têm a vantagem de possuírem pontos de integração no centro das faces dos elementos. Estas localizações são posições convenientes para a determinação mais precisa das tensões de

pico, já que estas tensões geralmente ocorrem nas faces dos elementos. Hinton (1988) verificou, também, que esta regra diminui consideravelmente o esforço computacional e apresenta resultados bastante satisfatórios.

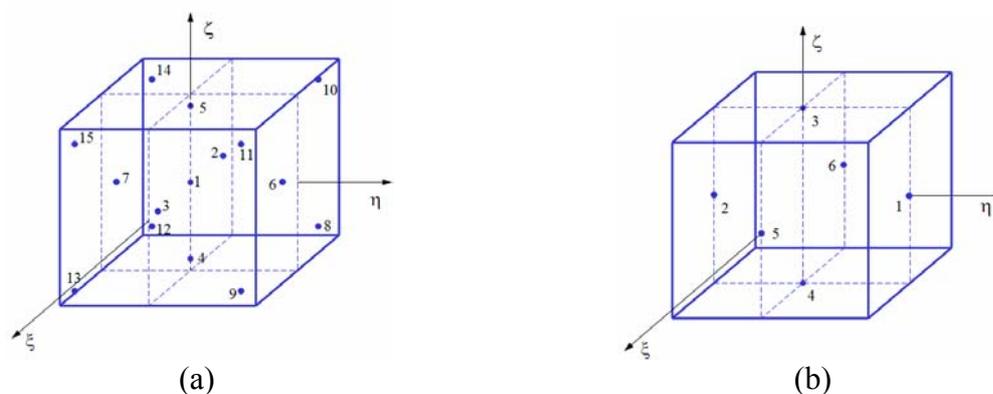


Figura 5.4 – Elemento hexaédrico: (a) com 15 pontos de integração ; (b) com 6 pontos de integração.

O programa usado neste trabalho oferece, também, a opção da regra de integração numérica de 3x3x3 de Gauss, podendo assim, utilizar 27 pontos de integração para os elementos hexaédricos quadráticos. Entretanto, Buyukozturk e Shareef (1985) argumentam que os elementos hexaédricos quadráticos tornam-se excessivamente rígidos quando se utiliza a regra de 3x3x3 de Gauss.

Utilizando as regras de integração mencionadas acima, pode-se determinar a matriz de rigidez e os vetores de forças nodais equivalentes através das formulações apresentadas a seguir. A partir da equação (5.37), pode-se determinar numericamente a matriz de rigidez. Sabe-se que o diferencial de volume $d\Omega$ no sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z) está relacionado ao diferencial de volume no sistema de coordenadas naturais (ξ, η, ζ) pela seguinte expressão:

$$dV = (\det \mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \quad (5.41)$$

Então, a equação (5.37), pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{K}_L^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (5.42)$$

E, utilizando a integração numérica mencionada anteriormente, esta matriz é calculada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{K}_L^e = \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=1}^{ng} \sum_{k=1}^{ng} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} w_i w_j w_k \det \mathbf{J} \quad (5.43)$$

onde,

ng – é o número de pontos de integração em cada direção do elemento;

\mathbf{B} – é a matriz de relações deformações-deslocamentos calculada no ponto de integração;

\mathbf{D} – é a matriz constitutiva elástica para o estado triaxial de tensões;

w_i, w_j, w_k – são fatores de peso;

$\det \mathbf{J}$ – é o determinante da matriz Jacobiana do elemento, calculada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

De maneira similar, determina-se o vetor de forças nodais internas, \mathbf{P}_{NL}^e , apresentado pela equação (5.29).

5.3 ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

Para a análise não-linear de estruturas de concreto armado pelo Método dos Elementos Finitos é necessária uma representação simples e precisa da armadura. Existem, basicamente, três métodos para a inclusão das barras de armadura em um modelo de elementos finitos: modelo discreto, modelo distribuído e modelo incorporado. No modelo discreto, utilizam-se elementos de barra para representar a armadura, com os seus nós das extremidades coincidindo com os da malha de elementos finitos de concreto. Esta forma de representação tem a desvantagem de limitar a disposição das barras de armadura com a malha de elementos de concreto. Além do mais, como os elementos de barra apresentam um campo de

deslocamentos linear, para que haja a compatibilidade de deslocamentos, os elementos finitos que representam o concreto ficam limitados a elementos lineares. Este modelo está ilustrado na Figura 5.5.

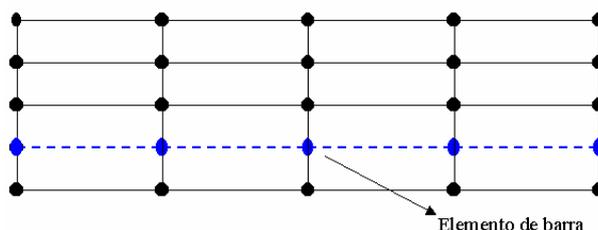


Figura 5.5 – Modelo discreto para a armadura.

No modelo distribuído, considera-se o aço uniformemente distribuído no elemento de concreto. Cada conjunto de barras de armadura é substituído por uma camada bi-dimensional com espessura e área equivalentes. Para este tipo de representação, admite-se aderência perfeita entre o aço e o concreto, sendo apropriada para o caso onde a armadura está densamente distribuída, como no caso de placas e cascas, conforme ilustrado pela Figura 5.6.

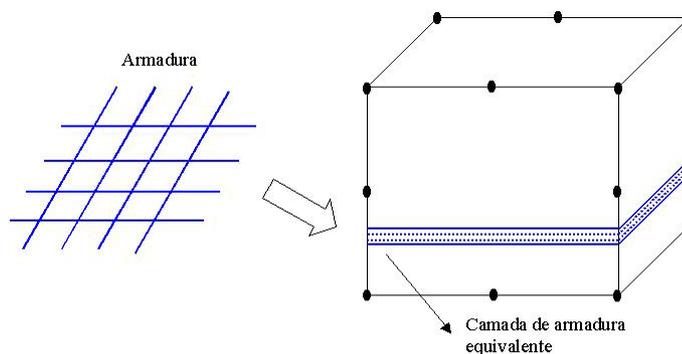


Figura 5.6 – Modelo distribuído para a armadura.

Já no modelo incorporado, as barras de armadura são consideradas como linhas de um material mais rígido no interior do elemento de concreto. Os deslocamentos do elemento da armadura são iguais aos deslocamentos do elemento isoparamétrico de concreto em que se encontra disposta, resultando em um campo de deslocamentos único no domínio do elemento. Sendo assim, pode-se colocar a barra de armadura em uma posição arbitrária dentro do elemento de concreto, sem precisar introduzir incógnitas adicionais ao sistema de equações de equilíbrio da estrutura, como se pode observar na Figura 5.7.

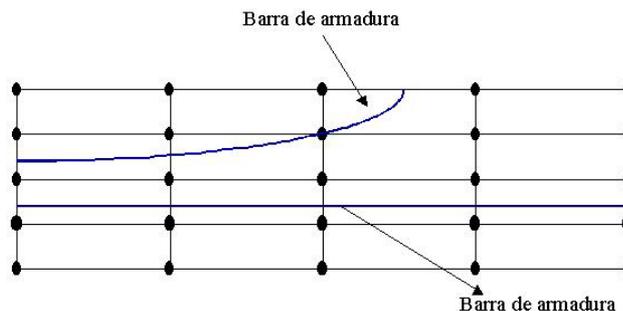


Figura 5.7 – Modelo incorporado para a armadura.

Neste trabalho, empregou-se o modelo incorporado para simular o comportamento das barras de aço, devido a maior generalidade na disposição das armaduras em relação aos modelos distribuído e discreto, baseando-se nos trabalhos de Elwi e Hrudey (1989) e Clure (1994).

5.3.1 Modelo incorporado

Neste modelo, admite-se que os elementos das barras de armadura resistem apenas a esforços nas suas direções longitudinais. Como já mencionado anteriormente, os deslocamentos de um ponto genérico da barra de armadura são iguais aos deslocamentos do elemento de concreto naquela mesma posição. Sendo assim, os deslocamentos ao longo da barra de armadura são obtidos a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto correspondentes. Então, a matriz de rigidez da armadura tem dimensão idêntica à matriz de rigidez do elemento de concreto, e a matriz de rigidez total do concreto armado resulta da superposição das matrizes dos dois materiais. Desta maneira, a expressão final da matriz de rigidez do elemento de concreto armado é obtida pela seguinte expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \sum_{i=1}^{nb} \mathbf{K}_{si} \quad (5.45)$$

onde,

nb – é o número de segmentos de armadura contidos no interior do elemento de concreto;

\mathbf{K}_c – é a matriz de rigidez do elemento de concreto;

\mathbf{K}_{si} – é a matriz de rigidez do segmento de armadura i , contido no interior elemento de concreto.

A matriz de rigidez para cada barra de armadura é dada por:

$$\mathbf{K}_s = A_s E_s \int_L \mathbf{B}_s \mathbf{B}_s^T ds \quad (5.46)$$

onde,

A_s – é a área da seção transversal da barra de armadura;

E_s – é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;

\mathbf{B}_s – é o vetor das relações de deformações-deslocamentos para a armadura.

De maneira análoga, o vetor de forças internas equilibradas, aplicado ao elemento de concreto armado, é obtido por:

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_{cn} + \sum_{i=1}^{nb} \mathbf{Q}_{sni} \quad (5.47)$$

onde,

\mathbf{Q}_{cn} – é o vetor de forças internas aplicadas ao elemento de concreto;

\mathbf{Q}_{sni} – é o vetor de forças internas aplicadas ao segmento de armadura i , contido no interior elemento de concreto.

5.3.1.1 Formulação geométrica

Neste trabalho, a formulação utilizada para o modelo incorporado da armadura em elementos tridimensionais de concreto é baseada na formulação bidimensional apresentada por Elwi e Hrudey (1989) e também implementada por Claire (1994) para o caso tridimensional.

Como já mencionado anteriormente, na modelagem das barras de armadura, utilizam-se elementos finitos unidimensionais isoparamétricos, permitindo a modelagem de barras retas ou curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos, enquanto que, para as barras curvas são necessários três pontos para a sua definição.

Uma grande vantagem desta formulação é que a malha de elementos finitos do concreto pode ser gerada sem se considerar previamente a localização e a geometria da barra de armadura. Uma vez estabelecida a malha de elementos para o concreto, as barras de armadura devem ser especificadas por um conjunto de pontos nodais. Como estas barras de aço são especificadas por um conjunto de pontos nodais independentes dos elementos de concreto, então, devem-se criar nós intermediários nas posições onde a armadura atravessa o elemento de concreto, para garantir uma adequada continuidade entre os elementos. As coordenadas dos nós da barra de aço, posicionados entre os nós de definição da mesma, são obtidas por interpolação.

Considerando-se (x_{sj}, y_{sj}, z_{sj}) as coordenadas globais dos nós de uma barra de armadura, associada a um determinado elemento de concreto, as coordenadas de qualquer outro ponto ao longo da barra, dentro deste elemento, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{nb} \begin{bmatrix} H_j(\chi) & 0 & 0 \\ 0 & H_j(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & H_j(\chi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{sj} \\ y_{sj} \\ z_{sj} \end{Bmatrix} \quad (5.48)$$

onde,

$H(\chi)$ – são funções de interpolação unidimensionais, expressas em termo de uma coordenada normalizada independente χ ;

nb – é o número de barras de armadura dentro do elemento de concreto.

O grau destas funções e, deste modo, o número de pontos nodais, dependerá da complexidade da geometria do elemento de armadura, bem como da compatibilidade requerida com o elemento de concreto. As funções de interpolação para o elemento da armadura são polinômios de Lagrange, conforme proposto por Zienkiewicz e Taylor (2000), e são geradas pela expressão:

$$H_k^m(\chi) = \frac{(\chi - \chi_1) \dots (\chi - \chi_{k-1})(\chi - \chi_{k+1}) \dots (\chi - \chi_n)}{(\chi_k - \chi_1) \dots (\chi_k - \chi_{k-1})(\chi_k - \chi_{k+1}) \dots (\chi_k - \chi_n)} \quad (5.49)$$

Esta função é um polinômio de grau $m = n - 1$ em χ , e tem valor unitário em $\chi = \chi_k$ e nulo para $\chi = \chi_i$, quando $i \neq k$, onde n é o número de nós do elemento.

Para o *elemento unidimensional de 2 nós*, conforme a Figura 5.8(a), tem-se:

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{(1-\chi)}{2} \\ H_2(\chi) &= \frac{(1+\chi)}{2} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Para o *elemento unidimensional de 3 nós*, conforme a Figura 5.8(b), tem-se:

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{(\chi^2 - \chi)}{2} \\ H_2(\chi) &= (\chi^2 - \chi) \\ H_3(\chi) &= \frac{(\chi^2 + \chi)}{2} \end{aligned} \quad (5.51)$$

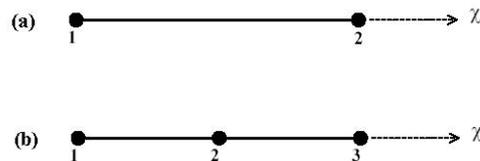


Figura 5.8 – Elementos isoparamétricos unidimensionais: (a) linear ; (b) quadrático.

No cálculo da rigidez associada a uma barra de armadura, é necessário fazer integrações ao longo da mesma. Para isto é necessário determinar um elemento diferencial de comprimento ds , disposto ao longo da armadura, que pode ser obtido pela equação (5.48). A orientação da tangente à barra, conforme a Figura 5.9, é dada pelos ângulos α , β e γ , onde:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} \\ \cos \beta &= \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} \\ \cos \gamma &= \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\chi} \frac{d\chi}{ds} \end{aligned} \quad (5.52)$$

sendo, $\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\cos \gamma$ os cossenos diretores da reta tangente a barra de aço no ponto considerado.

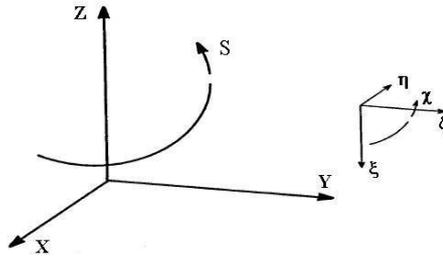


Figura 5.9 – Coordenada ao longo do eixo da armadura.

Pelo teorema de Pitágoras,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (5.53)$$

segue que,

$$\frac{ds}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\chi}\right)^2} \quad (5.54)$$

onde,

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{d\chi} \\ \frac{dy}{d\chi} \\ \frac{dz}{d\chi} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{nb} \begin{bmatrix} \frac{dH_j}{d\chi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dH_j}{d\chi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dH_j}{d\chi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{sj} \\ y_{sj} \\ z_{sj} \end{Bmatrix} \quad (5.55)$$

Sendo assim, pelas equações (5.54) e (5.55), determinam-se o fator de mapeamento $\left(\frac{ds}{d\chi}\right)$, bem como os cossenos diretores da reta tangente em qualquer ponto ao longo da armadura, expressos pela seguinte equação:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{dx}{d\chi}}{\frac{ds}{d\chi}} ; \quad \cos \beta = \frac{\frac{dy}{d\chi}}{\frac{ds}{d\chi}} ; \quad \cos \gamma = \frac{\frac{dz}{d\chi}}{\frac{ds}{d\chi}} \quad (5.56)$$

Um elemento diferencial de volume da barra de armadura, dV_s , pode ser expresso em função do diferencial de comprimento, ds , e da área da seção transversal da barra, A_s , através da expressão:

$$dV_s = A_s ds \quad (5.57)$$

Empregando o fator de mapeamento descrito pela equação (5.54), pode-se escrever as integrais envolvendo elementos de volume ao longo da armadura como função da coordenada normalizada χ , ou seja:

$$\int_{V_s} f(\chi) dV_s = \int_{\chi} f(\chi) A_s \frac{ds}{d\chi} d\chi \quad (5.58)$$

onde,

$f(\chi)$ – é a função de posição ao longo da barra de armadura.

5.3.1.2 Determinação dos segmentos de armadura localizados no interior de um elemento de concreto

Como já mostrado anteriormente, pelas equações (5.45) e (5.46), para determinação da matriz de rigidez total de um determinado elemento de concreto armado, precisa-se saber quais barras de armadura interceptam este elemento, atribuindo-lhe assim uma rigidez adicional. De forma análoga, as forças internas associadas com a armadura são integradas e adicionadas àquelas do elemento de concreto para obter o vetor total de forças internas do elemento.

A determinação dos segmentos de barras de armadura que ficam no interior de cada elemento de concreto é feita de forma automática, através de subrotinas computacionais que foram implementadas neste programa computacional, a partir do trabalho de Clure (1994).

Como já visto anteriormente, as coordenadas das barras de aço são posicionadas nos elementos de concreto através de suas coordenadas globais. Inicialmente, deve-se transformar as coordenadas globais, $P_j(x_p, y_p, z_p)$, dos pontos que definem a geometria da barra, para coordenadas naturais locais, $P_j(\xi_p, \eta_p, \zeta_p)$, dos mesmos. Sabe-se, pela equação (5.13), que a

relação entre estas coordenadas, para elementos isoparamétricos, é dada por:

$$\begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{np} \begin{bmatrix} N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (5.59)$$

onde,

(x_i, y_i, z_i) – são as coordenadas globais dos nós do elemento de concreto;

$N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p)$ – são as funções de forma do elemento de concreto, para as coordenadas naturais dos pontos que definem a geometria das barras localizadas neste elemento;

np – é o número de pontos nodais no elemento de concreto.

A determinação das coordenadas naturais ξ_p , η_p e ζ_p , a partir de uma formulação explícita para a relação inversa da equação (5.59), não é uma tarefa simples de ser realizada. Todavia, o mapeamento inverso pode ser obtido numericamente, usando o método de Newton-Raphson, como sugerido por Elwi e Hruday (1989). Sendo assim, a determinação das coordenadas locais, (ξ_p, η_p, ζ_p) , está baseada no fato de que estas coordenadas são raízes do sistema de equações não-lineares apresentado abaixo:

$$\{f(\xi_p, \eta_p, \zeta_p)\} = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^{np} \begin{bmatrix} N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.60)$$

Empregando-se o método de Newton-Raphson, após $(k+1)$ iterações, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}_p^k + \begin{Bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \\ \Delta \zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1} \quad (5.61)$$

sendo,

$$\begin{Bmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \\ \Delta \zeta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = [J^k]^{T^{-1}} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_p - \sum_{i=1}^{np} \begin{bmatrix} N_i(\xi_p^k, \eta_p^k, \zeta_p^k) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\xi_p^k, \eta_p^k, \zeta_p^k) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\xi_p^k, \eta_p^k, \zeta_p^k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (5.62)$$

onde,

$[J^k]^{T^{-1}}$ – é a inversa da matriz Jacobiana transposta do elemento de concreto, na iteração k ;

$N_i(\xi_p^k, \eta_p^k, \zeta_p^k)$ – são as funções de forma do elemento de concreto, na iteração k .

Com a determinação das coordenadas naturais dos pontos $P_j(\xi_p, \eta_p, \zeta_p)$, parte-se para a definição da curva que passa por estes pontos, como ilustrado na Figura 5.10. Mais especificamente, nesta segunda etapa do processo, necessita-se determinar as coordenadas naturais da intersecção do plano que contém a face do elemento de concreto com a barra de armadura. Os lados do elemento de concreto são definidos fixando-se uma das coordenadas naturais como l ou $-l$. Sendo assim, cada lado do elemento de concreto é definido por uma coordenada fixa, com valor l ou $-l$, e as outras coordenadas podendo assumir valores entre l e $-l$.

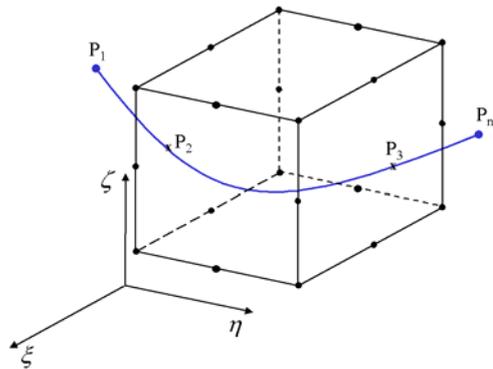


Figura 5.10 – Curva de definição da barra de aço.

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), quando a coordenada ξ é conhecida, calculam-se η e ζ pelas expressões:

$$\begin{aligned}\eta &= \sum_{i=1}^{np} f_i(\xi) \eta_i \\ \zeta &= \sum_{i=1}^{np} f_i(\xi) \zeta_i\end{aligned}\tag{5.63}$$

De forma análoga, quando η é conhecida, ξ e ζ são determinados por:

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_{i=1}^{np} g_i(\eta) \xi_i \\ \zeta &= \sum_{i=1}^{np} g_i(\eta) \zeta_i\end{aligned}\tag{5.64}$$

Como também, quando a coordenada ζ é conhecida, ξ e η são obtidos por:

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_{i=1}^{np} h_i(\zeta) \xi_i \\ \eta &= \sum_{i=1}^{np} h_i(\zeta) \eta_i\end{aligned}\tag{5.65}$$

onde, np é o número de pontos que definem a barra de armadura, e as funções f , g e h (polinômios de Lagrange) são calculadas por:

$$\begin{aligned}f_i(\xi) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \\ g_i(\eta) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)} \\ h_i(\zeta) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\zeta - \zeta_j)}{(\zeta_i - \zeta_j)}\end{aligned}\tag{5.66}$$

A terceira etapa consiste em verificar a existência de intersecção da curva P_1, P_2, \dots, P_{np} com cada uma das seis faces que definem o elemento de concreto. Para isso, fixa-se a coordenada $\xi = \pm 1$ do elemento de concreto e calculam-se as coordenadas η e ζ da intersecção *face do concreto x curva da barra*. Caso $-1 \leq \eta \leq 1$ e $-1 \leq \zeta \leq 1$, a barra estará interceptando esta face do elemento. Define-se, então, um elemento unidimensional representativo da parte de armadura situada no interior deste elemento de concreto. De

maneira análoga, repete-se este procedimento, fixando-se a coordenada $\eta = \pm 1$ ou $\zeta = \pm 1$, e verificando os limites das coordenadas que variam na face em análise do elemento de concreto.

Neste estágio do processo, considera-se a possibilidade de existir um único ponto de intersecção com o elemento de concreto. Esta situação corresponde ao caso em que a barra intercepta somente um vértice do elemento. Neste caso, o programa considera que a barra não intercepta o elemento de concreto.

A próxima etapa consiste em verificar qual trecho de armadura está efetivamente contido no elemento de concreto. Destacam-se as seguintes situações possíveis:

Situação 1: Um dos nós, que definem as extremidades do elemento de armadura, encontra-se localizado dentro do elemento de concreto. Isto se evidencia quando as coordenadas naturais de P_1 ou P_{np} , em módulo, são menores que l . Neste caso, o programa se encarrega de distinguir a intersecção verdadeira da falsa e assim obter, de forma completa, o comprimento real do segmento de armadura contido no interior do elemento de concreto. Na Figura 5.11, ilustra-se esta situação onde I_V é a intersecção verdadeira e I_F a falsa.

Situação 2: Os dois nós que definem a geometria da barra encontram-se localizados no interior do elemento de concreto. Neste caso, o programa toma para as coordenadas naturais dos pontos de intersecção, as mesmas coordenadas naturais dos pontos P_1 e P_{np} , já obtidos anteriormente. Na Figura 5.12, ilustra-se esta situação.

Situação 3: Nenhum dos nós que definem a barra estão situados dentro do elemento de concreto. Para este caso existem duas possibilidades: a primeira, quando o segmento que liga os dois pontos P_1 e P_{np} intercepta o elemento, como ilustrado pela Figura 5.13. E a segunda, em caso contrário, conforme a Figura 5.14.

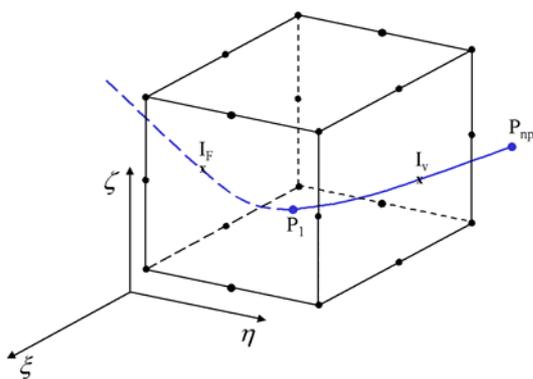


Figura 5.11 – P_1 dentro do elemento de concreto.

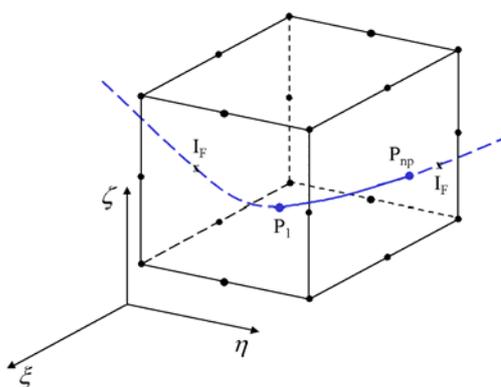


Figura 5.12 – P_1 e P_{np} dentro do elemento de concreto.

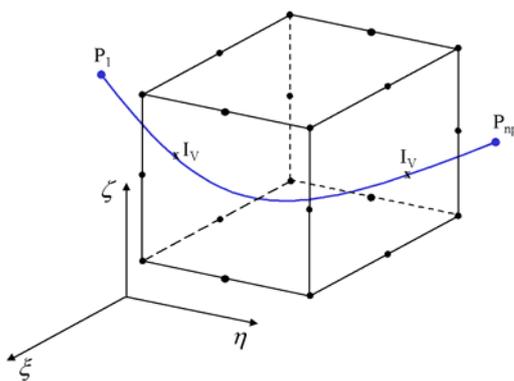


Figura 5.13 – Segmento que liga P_1 e P_{np} intercepta o elemento de concreto.

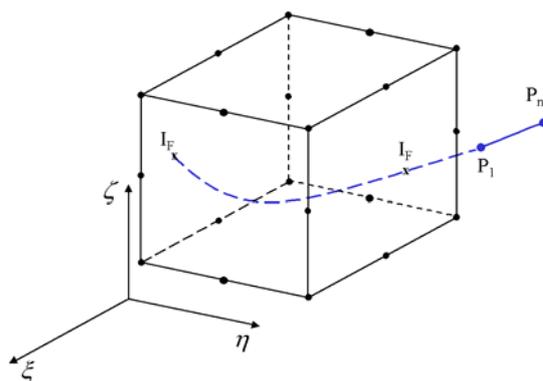


Figura 5.14 – Segmento que liga P_1 e P_{np} não intercepta o elemento de concreto.

Esta próxima etapa consiste na criação, se necessária, de um nó intermediário no segmento de armadura contido no interior do elemento de concreto, e posterior determinação das coordenadas globais e naturais dos nós extremos do segmento, bem como do nó intermediário. Quando o elemento isoparamétrico em análise for o linear, não se processa a geração do nó intermediário, como ilustrado na Figura 5.15.

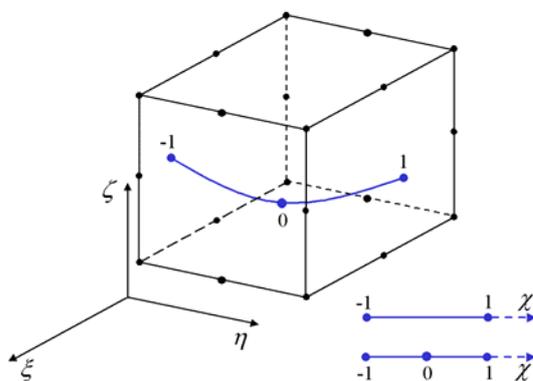


Figura 5.15 – Segmento de armadura dentro do elemento de concreto.

Para finalizar este processo, verifica-se se o segmento de armadura encontra-se disposto ao longo de uma face ou ao longo de uma aresta em um determinado elemento. Deste modo, pode-se prever se a rigidez associada com a armadura será distribuída a dois ou a quatro elementos de concreto.

5.3.2 Matriz de rigidez e vetor de ações nodais para a armadura

A deformação ao longo da barra de aço é igual à deformação normal, no elemento de concreto, na direção tangente ao eixo da barra, como mencionado por Claire (1994). Sendo assim, considerando-se a hipótese de aderência perfeita entre o concreto e o aço, a deformação da armadura, na direção tangente ao eixo da barra, conforme proposto por Elwi e Hrudehy (1989), fica expressa por:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \beta + \varepsilon_z \cos^2 \gamma + \gamma_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \gamma_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + \gamma_{yz} \cos \beta \cos \gamma \quad (5.67)$$

onde,

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – são as componentes de deformação no elemento de concreto.

Estas componentes de deformação são obtidas diretamente do campo de deslocamentos do elemento de concreto. A equação acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s = & \cos^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \cos \alpha \cos \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \cos \alpha \cos \gamma \frac{\partial u}{\partial z} + \\ & \cos \alpha \cos \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \cos^2 \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial v}{\partial z} + \\ & \cos \alpha \cos \gamma \frac{\partial w}{\partial x} + \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial w}{\partial y} + \cos^2 \gamma \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.68)$$

E, substituindo a equação (5.3) em (5.68), esta equação pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s = & \sum_{i=1}^{np} \left(\cos^2 \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} + \cos \alpha \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} + \cos \alpha \cos \gamma \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) u_i + \\ & \sum_{i=1}^{np} \left(\cos \alpha \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \cos^2 \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} + \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) v_i + \\ & \sum_{i=1}^{np} \left(\cos \alpha \cos \gamma \frac{\partial N_i}{\partial x} + \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial N_i}{\partial y} + \cos^2 \gamma \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) w_i \end{aligned} \quad (5.69)$$

A expressão acima, também pode ser escrita na forma de um produto escalar entre dois vetores, ficando:

$$\varepsilon_s = \mathbf{B}_s^T \mathbf{U}^e \quad (5.70)$$

onde,

\mathbf{U}^e – é o vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto;

\mathbf{B}_s – é o vetor de relações deformação-deslocamento para a armadura, expresso por:

$$\mathbf{B}_s^T = [\mathbf{B}_{s1}^T, \mathbf{B}_{s2}^T, \dots, \mathbf{B}_{si}^T, \dots, \mathbf{B}_{sn}^T] \quad (5.71)$$

sendo os vetores B_{si} representados pela seguinte expressão:

$$\mathbf{B}_{si} = \begin{Bmatrix} \cos^2 \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x} + \cos \alpha \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} + \cos \alpha \cos \gamma \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \cos \alpha \cos \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} + \cos^2 \beta \frac{\partial N_i}{\partial y} + \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \cos \alpha \cos \gamma \frac{\partial N_i}{\partial x} + \cos \beta \cos \gamma \frac{\partial N_i}{\partial y} + \cos^2 \gamma \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (5.72)$$

As derivadas das funções de forma em relação às coordenadas cartesianas (x,y,z) são calculadas a partir das derivadas das funções de forma em relação às coordenadas naturais (ξ, η, ζ) , ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{np} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (5.73)$$

Aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, determina-se a variação do trabalho interno, referente à armadura, pela seguinte expressão:

$$\delta W_s = \delta \mathbf{U}^{e,T} (\mathbf{A}_{NL})_s^e = \int_{V_s} \delta \varepsilon_s \sigma_s dV \quad (5.74)$$

onde,

$(\mathbf{A}_{NL})_s^e$ – é o vetor de ações nodais não-lineares equivalentes da armadura;

σ_s – é a tensão normal atuante na armadura;

V_s – é o volume da armadura.

Pela equação (5.70), sabe-se que a primeira variação da deformação na armadura é dada por:

$$\delta \varepsilon_s = \mathbf{B}_s^T \delta \mathbf{U}^e \quad (5.75)$$

Substituindo (5.75) em (5.74), tem-se:

$$\delta \mathbf{U}^{e,T} (\mathbf{A}_{NL})_s^e = \int_{V_s} \delta \mathbf{U}^{e,T} \mathbf{B}_s \sigma_s dV \quad (5.76)$$

Como a primeira variação do vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto é arbitrária, tem-se:

$$(\mathbf{A}_{NL})_s^e = \int_{V_s} \delta \mathbf{U}^{e,T} \mathbf{B}_s \sigma_s dV \quad (5.77)$$

ou ainda, a partir da equação (5.58), pode-se escrever:

$$(\mathbf{A}_{NL})_s^e = \int_{\chi} \mathbf{B}_s \sigma_s A_s \frac{ds}{d\chi} d\chi \quad (5.78)$$

A relação constitutiva elástico-linear para a armadura pode ser escrita como segue:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad (5.79)$$

onde, E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço.

Assim, substituindo (5.70) em (5.79) e em seguida substituindo (5.79) em (5.78), tem-se:

$$(\mathbf{A}_L)_s^e = \int_{\chi} \mathbf{B}_s E_s \mathbf{B}_s^T A_s \frac{ds}{d\chi} d\chi \mathbf{U}^e \quad (5.80)$$

onde,

$(\mathbf{A}_L)_s^e$ – é o vetor de ações nodais lineares para a armadura.

A equação acima pode ser rescrita da seguinte maneira:

$$\left(\mathbf{A}_L\right)_s^e = \mathbf{K}_{sL}^e \mathbf{U}^e \quad (5.81)$$

onde, \mathbf{K}_{sL}^e é a matriz de rigidez da armadura contida em um dado elemento de concreto, expresso por:

$$\mathbf{K}_{sL}^e = \int_{\chi} \mathbf{B}_s E_s \mathbf{B}_s^T A_s \frac{ds}{d\chi} d\chi \quad (5.82)$$

As integrações das equações (5.80) e (5.82) são realizadas numericamente, de forma semelhante à utilizada nos elementos de concreto. A diferença agora, é que a integração é feita em uma direção, usando as mesmas coordenadas e fatores de peso aplicados anteriormente. Para a matriz de rigidez, emprega-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{K}_{sL}^e = \sum_{i=1}^{ng} \left(\mathbf{B}_s\right)_i E_s \left(\mathbf{B}_s^T\right)_i A_s \frac{ds}{d\chi} w_i \quad (5.83)$$

onde, ng é o número de pontos de integração de Gauss, as grandezas associadas ao índice i são calculadas na posição do ponto de integração i , e w_i é o fator de peso de integração associado ao ponto de integração i .

O vetor de ações internas equilibradas é calculado numericamente de maneira análoga.

5.4 SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

O objetivo desta seção é apresentar um método numérico para solução do sistema de equações não-lineares, apresentado anteriormente pela equação (5.33). A literatura para solução de um conjunto de equação não-lineares é extensa, entretanto, serão apresentados aqui, apenas os métodos iterativos disponíveis no programa em elementos finitos utilizado neste trabalho. Este item baseou-se nas publicações de Bathe (1996) e Real (2000).

Primeiramente, descreve-se o método de Newton-Raphson, para solução do sistema de equações não-lineares. Entretanto, a fim de reduzir o custo computacional do processo iterativo, introduz-se o método de Newton-Raphson com rigidez inicial, com a matriz de

rigidez calculada apenas no início do processo iterativo e mantida constante durante todas as iterações subsequentes. No final deste item, mostram-se também os critérios de convergência usados nestes dois métodos.

5.4.1 Método de Newton-Raphson

Como visto anteriormente, o sistema de equações não-lineares é representado pela seguinte expressão:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}_{ext} - \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{U}) \quad (5.84)$$

Expandindo-se a equação acima em série de Taylor, em relação ao vetor de deslocamentos nodais, tem-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{f}_{r+1} \cong \mathbf{f}_r + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right)_r \Delta \mathbf{U}_r \quad (5.85)$$

onde,

\mathbf{f}_r – é o vetor de desequilíbrio da iteração corrente;

$\Delta \mathbf{U}_r = (\mathbf{U}_{r+1} - \mathbf{U}_r)$ – é o vetor incremental de deslocamentos;

$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right)_r$ – é uma matriz de $n \times n$, sendo n igual ao número de graus de liberdade da estrutura.

A componente da matriz $\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right)_r$ na posição i e coluna j é dada por:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial U_j} \right)_r = - \frac{\partial (P_{NL})_i}{\partial U_j} = -K_{ij} \quad (5.86)$$

sendo, K_{ij} um termo genérico da matriz de rigidez tangente da estrutura, \mathbf{K}_T .

Reescrevendo a equação (5.85) na forma matricial, tem-se:

$$\mathbf{f}_{r+1} \cong \mathbf{f}_r - (\mathbf{K}_T)_r \Delta \mathbf{U}_r \quad (5.87)$$

Mencionou-se, anteriormente, que o problema da análise não-linear de estruturas, através do método dos elementos finitos, com solução em deslocamentos, consiste em encontrar o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{U} , que torne o vetor de forças desequilibradas nulo, ou seja, $\mathbf{f}(\mathbf{U})$.

Então, considerando que este vetor de forças desequilibradas seja nulo na iteração $(r+1)$, tem-se:

$$\mathbf{f}_{r+1} \cong \mathbf{f}_r - (\mathbf{K}_T)_r \Delta \mathbf{U}_r = 0 \quad (5.88)$$

Sabendo-se que $\mathbf{f}_r(\mathbf{U}) = \mathbf{P}_{ext} - \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{U}_r)$, e substituindo na equação acima, tem-se:

$$[\mathbf{P}_{ext} - \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{U}_r)] - (\mathbf{K}_T)_r \Delta \mathbf{U}_r = 0 \quad (5.89)$$

ou seja,

$$\Delta \mathbf{U}_r = (\mathbf{K}_T^{-1})_r [\mathbf{P}_{ext} - \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{U}_r)] \quad (5.90)$$

Vale salientar que:

$$\Delta \mathbf{U}_r = \mathbf{U}_{r+1} - \mathbf{U}_r \quad (5.91)$$

ou seja,

$$\mathbf{U}_{r+1} = \mathbf{U}_r + \Delta \mathbf{U}_r \quad (5.92)$$

Com o vetor de deslocamentos \mathbf{U}_r , pode-se calcular a matriz de rigidez tangente da estrutura, \mathbf{K}_T , e o vetor de ações não-lineares, $\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{U}_r)$, sendo possível determinar o vetor de incrementos de deslocamentos, $\Delta \mathbf{U}_r$, pela equação (5.90), e o vetor de deslocamentos na próxima iteração, \mathbf{U}_{r+1} , pela equação (5.92).

Vale ressaltar aqui que o vetor total de cargas externas, $\mathbf{P}_{T_{ext}}$, é dividido em um certo número de partes iguais, obtendo-se assim o vetor incremental de cargas externas, $\Delta \mathbf{P}$, ou

seja:

$$\Delta \mathbf{P} = \frac{\mathbf{P}\mathbf{T}_{ext}}{N_{inc}} \quad (5.93)$$

onde,

N_{inc} – é o número de incrementos de carga que serão aplicadas a estrutura.

No final de cada etapa de carga, o vetor de cargas, \mathbf{P}_i , é obtido adicionando-se o vetor incremental de cargas $\Delta \mathbf{P}$ ao vetor de cargas da etapa anterior, \mathbf{P}_{i-1} , ou seja:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-1} + \Delta \mathbf{P} \quad (5.94)$$

Como o cálculo do vetor de incrementos de deslocamentos está baseado em uma forma linearizada das equações incrementais de equilíbrio, torna-se necessário efetuar correções iterativas sobre ΔU_r , a fim de alcançar o equilíbrio no passo de corrente. Sendo assim, procede-se, iterativamente, até ser satisfeito o critério de convergência adotado, o qual será apresentado mais adiante. A Figura 5.16 ilustra este método para o caso uniaxial.

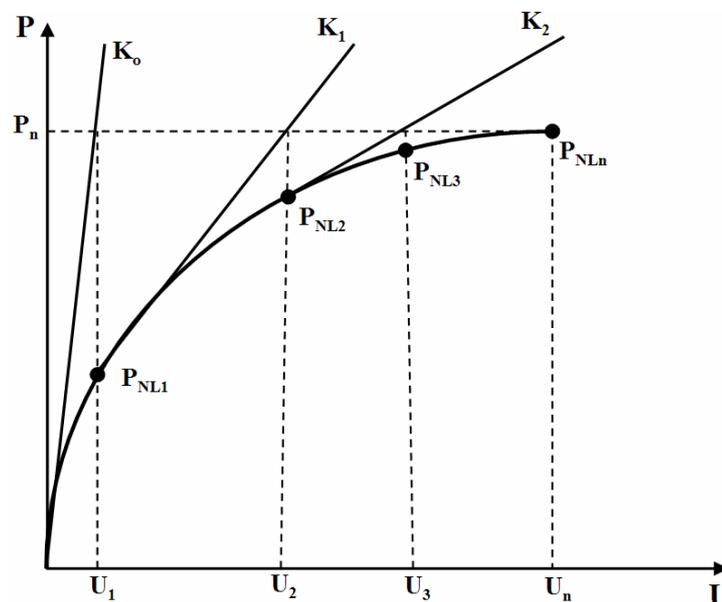


Figura 5.16 – Método de Newton-Raphson: caso uniaxial.

5.4.2 Método de Newton-Raphson com rigidez inicial

No método anterior, a atualização e a inversão da matriz de rigidez tangente da estrutura em cada iteração tornam aquele método computacionalmente oneroso, inviabilizando a sua utilização para problemas com muitos graus de liberdade. Este problema pode ser contornado realizando-se o cálculo e a inversão da matriz de rigidez apenas no início do processo, trabalhando assim com a matriz de rigidez inicial, \mathbf{K}_o , em todas as iterações. Sendo assim, neste método, a equação (5.90) passa a ser escrita da seguinte maneira:

$$\Delta \mathbf{U}_r = (\mathbf{K}_o^{-1})_r [\mathbf{P}_{ext} - \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{U}_r)] \quad (5.95)$$

A utilização deste método traz grande economia computacional em relação ao anterior. Todavia, o número de iterações deverá ser maior, uma vez que a matriz de rigidez não é atualizada, conforme mencionado em Real (2000). Na Figura 5.17, mostra-se este processo para o caso unidimensional.

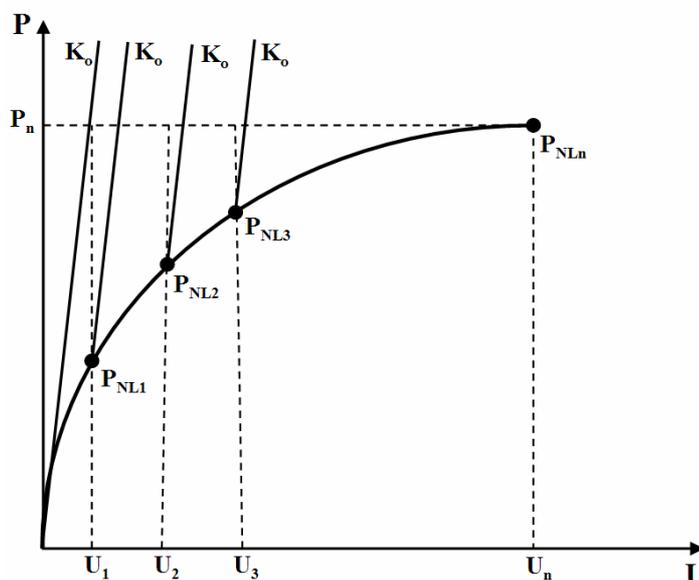


Figura 5.17 – Método de Newton-Raphson com rigidez inicial: caso uniaxial.

5.4.3 Critério de convergência

Neste programa, utilizam-se dois critérios de convergência para solução do sistema de equações não-lineares: o critério de carga e o critério de deslocamentos. Em uma determinada etapa do processo, considera-se que tenha sido atingida a convergência quando forem satisfeitos simultaneamente os dois critérios abaixo:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{P}\|}{\|\boldsymbol{\Psi}_r\|} \leq 10^{-3} \quad ; \quad \frac{\|\Delta \mathbf{U}_r\|}{\|\mathbf{U}_r\|} \leq 10^{-3} \quad (5.96)$$

onde,

$\|\boldsymbol{\Psi}_r\|$ – é a norma euclidiana do vetor de forças desequilibradas;

$\|\Delta \mathbf{P}\|$ – é a norma euclidiana do vetor de incremento de cargas externas;

$\|\Delta \mathbf{U}_r\|$ – é a norma euclidiana do vetor de incremento de deslocamentos;

$\|\mathbf{U}_r\|$ – é a norma euclidiana do último vetor de deslocamentos obtido.

5.5 TRATAMENTO DOS DESLOCAMENTOS PRESCRITOS NA ESTRUTURA

A solução do sistema de equações não-lineares permite obter deslocamentos nodais quando cargas externas são aplicadas à estrutura em um determinado passo de carga. Todavia, se ocorrem deslocamentos prescritos na estrutura, estes deslocamentos são conhecidos e as forças nodais necessárias para mantê-los tornam-se as incógnitas do problema. Implementou-se, neste trabalho, um algoritmo numérico para aplicar estes deslocamentos prescritos à estrutura, e permitir, assim, a obtenção da curva *carga x deslocamento* pós-pico. A solução, usando cargas aplicadas, apresenta dificuldades numéricas na obtenção da região pós-pico da curva.

Um artifício usado para introduzir um deslocamento prescrito na direção i de um determinado nó da estrutura consiste em fazer o termo da diagonal principal da matriz de rigidez correspondente à linha i igual a 1, e anular todas as posições restantes pertencentes a esta linha e coluna. Além disso, deve-se colocar o valor do deslocamento conhecido u_i na posição anteriormente ocupada por P_i , bem como passar para o vetor de cargas aplicadas à

estrutura \mathbf{P} a parcela $(K_{ji} u_i)$, correspondente às forças nodais equivalentes a estes deslocamentos prescritos (Santos e Klein, 1984). As reações correspondentes aos deslocamentos prescritos são calculadas separadamente, a partir das forças internas equilibradas que correspondem a estes nós.

CAPÍTULO 6

6. COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL DO MODELO NUMÉRICO

Ao longo dos Capítulos 3, 4 e 5, foram apresentadas as principais características do modelo numérico proposto. Com o objetivo de verificar a eficiência deste modelo para análise não-linear de estruturas de concreto armado, neste capítulo são apresentados estudos comparativos com peças de concreto armado.

A verificação do modelo numérico proposto inicia-se com tirantes de concreto armado. Primeiramente, apresenta-se um estudo comparando os resultados numéricos obtidos pelo modelo proposto e os valores determinados conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) para uma série com cinco tirantes de concreto armado. Em seguida, a partir de dados experimentais disponíveis, mostra-se uma análise comparativa com uma série de ensaios experimentais realizados por Rizkalla et al. (1983).

Na seqüência da verificação, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados experimentalmente para vigas de concreto armado. Estes resultados experimentais foram apresentados por Bresler e Scordelis (1963) e referem-se a um estudo sobre a resistência ao esforço cortante de doze vigas de concreto armado. Exemplos com pilares de concreto armado confinados também são apresentados, de modo a verificar a aplicabilidade do modelo desenvolvido a este tipo de situação em que a estrutura fica submetida a um estado triplo de tensões. Estes resultados experimentais foram apresentados por Razvi e Saatcioglu (1989), e se referem a um estudo sobre o ganho na carga de ruptura de pilares confinados através da utilização de estribos pouco espaçados.

Por fim, a resposta à carga cíclica é verificada, considerando a análise de uma parede de seção retangular de concreto armado. Estes resultados experimentais foram apresentados por

Elmorsi et al. (1998) e referem-se a um estudo sobre o comportamento cíclico de paredes, realizado por Oesterle et al. (1978).

6.1 TIRANTES DE CONCRETO ARMADO

As peças de concreto armado submetidas à tração uniaxial apresentam um comportamento típico com curva tensão-deformação dividida normalmente em três regiões (Figura 6.1), como já mencionado no Capítulo 2. A *Região I* representa o comportamento elástico da peça tracionada até a formação da primeira fissura. A segunda região representa o comportamento entre o período de formação da primeira fissura e o ponto de fissuração final. E a *Região III* representa o comportamento entre o último ponto de fissuração e o escoamento da armadura. Observa-se na Figura 6.1 que depois da formação da primeira fissura, a contribuição do concreto começa a diminuir devido à formação de fissuras subsequentes.

Na simulação do comportamento em tração do concreto armado fissurado, devem ser considerados dois fenômenos descritos no Capítulo 2: o *amolecimento* e o *enrijecimento à tração*. A rigidez da peça terá contribuição das rigidezes da armadura, do concreto simples (*amolecimento*) e do concreto entre fissuras (*enrijecimento à tração*).

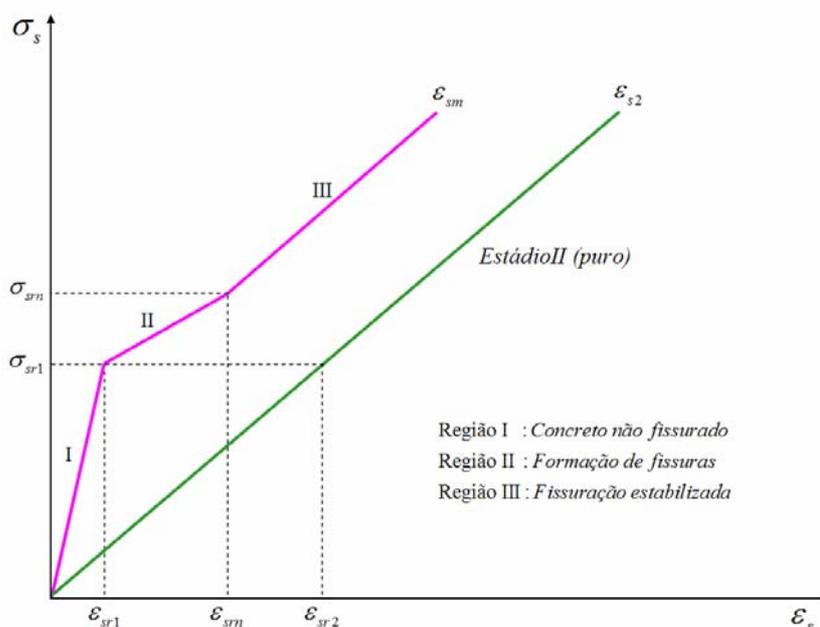


Figura 6.1 – Curva tensão-deformação média do concreto armado submetido à tração uniaxial.

6.1.1 Estudo Comparativo I

O Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) utiliza um modelo simplificado para representar o comportamento de tirantes de concreto armado, apresentando uma curva tensão-deformação média com os seguintes trechos (Figura 6.1):

Região I: relativo ao concreto não fissurado;

Região II: relativo ao período de formação de fissuras;

Região III: relativo ao período de fissuração estabilizada.

Antes do concreto fissurar, considerando a deformação na armadura igual à deformação no concreto adjacente, pode-se determinar a deformação específica no tirante através da expressão abaixo:

$$\varepsilon_{s1} = \frac{N}{E_s A_s + E_c A_c} \quad (6.1)$$

onde,

ε_{s1} – é a deformação específica no concreto antes de sofrer fissuração;

N – é a carga axial aplicada;

A_s – é a área da seção da armadura;

A_c – é a área do concreto tracionado;

E_s – é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;

E_c – é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto intacto.

Segundo o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), o comportamento de tirantes de concreto armado pode ser determinado a partir de uma modificação na relação *tensão-deformação média* das armaduras incorporadas no concreto (Figura 6.1), como se apresenta a seguir:

Concreto não fissurado:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s1}, \quad \text{para } 0 < \sigma_s \leq \sigma_{sr1} \quad (6.2)$$

Formação de fissuras:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \frac{\beta_t(\sigma_s - \sigma_{sr1}) + (\sigma_{srn} - \sigma_s)}{(\sigma_{srn} - \sigma_{sr1})} (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}), \quad \text{para } \sigma_{sr1} < \sigma_s \leq \sigma_{srn} \quad (6.3)$$

Fissuração estabilizada:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \beta_t(\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}), \quad \text{para } \sigma_{srn} < \sigma_s \leq f_y \quad (6.4)$$

onde,

$\sigma_{sr1} = N_r / A_s$ – é a tensão na armadura imediatamente após a formação da primeira fissura;

$N_r = A_c f_t (1 + \alpha \rho)$ – é a carga axial atuante imediatamente após a formação da primeira fissura;

A_s – é a área da seção da armadura;

A_c – é a área de concreto tracionado;

$\rho = \frac{A_s}{A_c}$ – é a taxa de armadura;

f_t – é a resistência à tração uniaxial do concreto;

$\alpha = \frac{E_{so}}{E_c}$ – é a relação entre o módulo de elasticidade do aço E_{so} e do concreto E_c ;

$\sigma_{srn} = 1,3\sigma_{sr1}$ – é a tensão na armadura no instante da formação da última fissura;

ε_{s2} – é a deformação específica da armadura calculada no estágio II (totalmente fissurado);

ε_{sr1} – é a deformação específica da armadura correspondente à tensão σ_{sr1} no estágio I;

ε_{sr2} – é a deformação específica da armadura no estágio II no instante da primeira fissura;

$\beta_t = 0,4$ – para cargas de curta-duração (tração pura);

$\beta_t = 0,25$ – para cargas de longa-duração ou cargas repetidas (tração pura);

f_y – é a tensão de escoamento do aço.

A fim de verificar os resultados obtidos pelo modelo numérico proposto nesta tese,

foram feitas simulações com uma série de cinco tirantes de concreto armado. Os resultados foram comparados com aqueles obtidos através das expressões (6.2) a (6.4).

Os cinco tirantes analisados têm as dimensões mostradas na Figura 6.2. Estes tirantes apresentam taxas de armadura com os seguintes valores: 0,50%, 0,75%, 1,00%, 1,50% e 3,00%, e as propriedades dos materiais (concreto e aço) são apresentadas na Tabela 6.1.

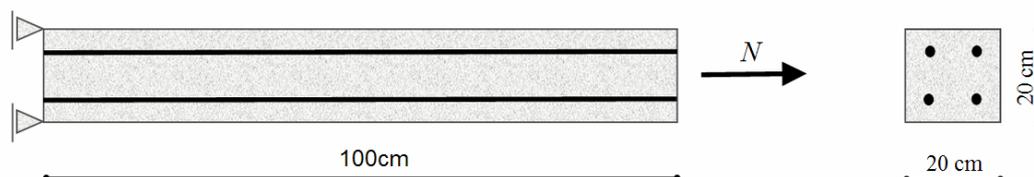


Figura 6.2 – Tirante de concreto armado.

Tabela 6.1 – Propriedades dos materiais (concreto e aço).

Concreto	
Resistência à compressão uniaxial (kN/cm ²)	2,0
Resistência à tração uniaxial (kN/cm ²)	0,158
Módulo de elasticidade (kN/cm ²)	3224
Coefficiente de Poisson	0,2
Aço	
Tensão de escoamento (kN/cm ²)	50
Módulo de elasticidade (kN/cm ²)	21000

Para simular o comportamento de enrijecimento à tração em tirante de concreto armado (itens 6.1.1 e 6.1.2), no modelo numérico considerou-se o coeficiente de redução da tensão de fissuração igual à $\alpha_t=0,4$. Optou-se por este valor depois da calibração do modelo numérico a partir dos diversos tirantes de concreto armado analisados.

Os resultados numéricos do modelo foram obtidos empregando um elemento hexaédrico de linear, com aplicação de cargas nos nós de uma de suas faces. Nestas simulações, considerou-se apenas um quarto da seção transversal e aplicaram-se condições de contorno adequadas para preservar a simetria do elemento tanto na seção transversal quanto na direção longitudinal. Para isso, foram vinculados os nós pertencentes a três faces do elemento hexaédrico linear, nas direções perpendiculares a cada face.

As comparações com os resultados apresentados pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) são apresentadas nas Figuras 6.3 a 6.7. Nestes gráficos, mostram-se as relações entre a

deformação específica total média do tirante e a tensão P/A_s . Apresentam-se também os resultados obtidos considerando apenas a rigidez da armadura (*Estádio II puro*). Para os resultados do modelo computacional, as deformações específicas foram determinadas em uma das barras de armadura.

Através dos gráficos apresentados nas Figuras 6.3 a 6.7, observa-se uma ótima concordância entre os resultados computacionais, obtidos pelo modelo proposto nesta tese, e aqueles determinados através da formulação proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993).

Como mencionado no Capítulo 2, o efeito de enrijecimento à tração (*tension stiffening*) representa a capacidade do concreto intacto entre fissuras continuar a suportar tensões de tração, contribuindo assim para a rigidez da peça tracionada. Nas figuras 6.3 a 6.7 pode-se observar que o modelo numérico proposto nesta tese consegue simular bem este comportamento de enrijecimento à tração. Através dos gráficos, pôde-se comprovar também uma formação mais rápida da primeira fissura (início da *Região II*) e uma conseqüente diminuição do efeito de enrijecimento à tração com o aumento da taxa de armadura.

Nestas figuras pôde-se observar também uma diferença entre os resultados do modelo apresentado nesta tese e aqueles determinados através da formulação proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), logo após a formação da primeira fissura. Esta diferença pode ser justificada pela descontinuidade existente entre o ramo ascendente e o ramo descendente do modelo proposto para representar o comportamento à tração do concreto. Enquanto que o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) utiliza um diagrama gradual para representar este comportamento à tração do concreto.

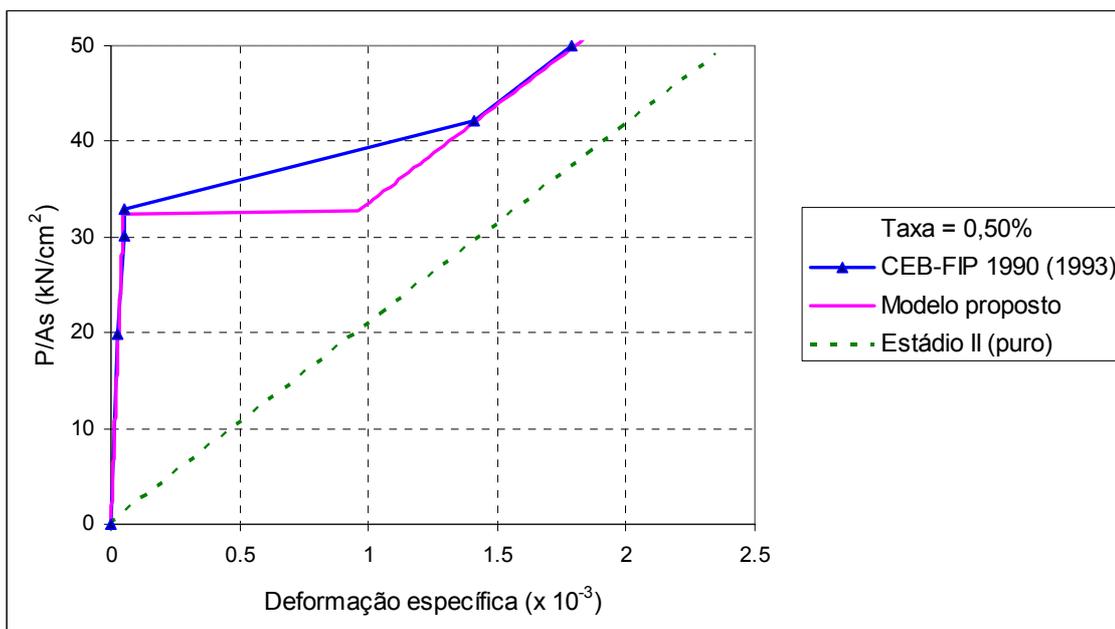


Figura 6.3 – Diagrama tensão-deformação específica na barra: Taxa=0,50%.

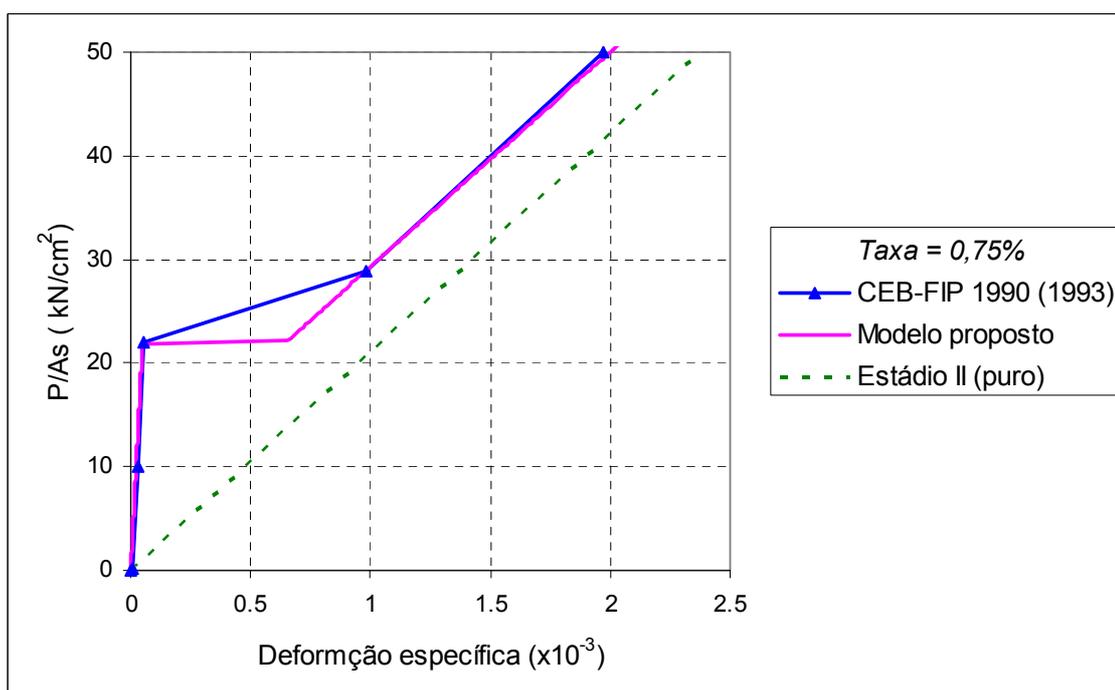


Figura 6.4 – Diagrama tensão-deformação específica na barra: Taxa=0,75%.

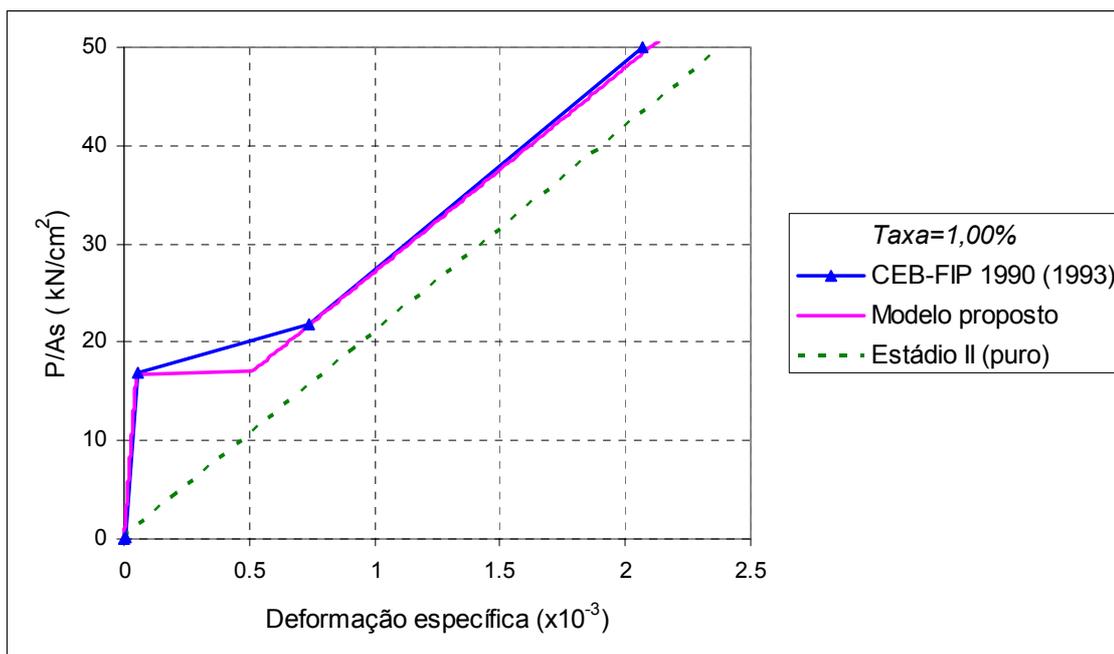


Figura 6.5 – Diagrama tensão-deformação específica na barra: Taxa=1,00%.

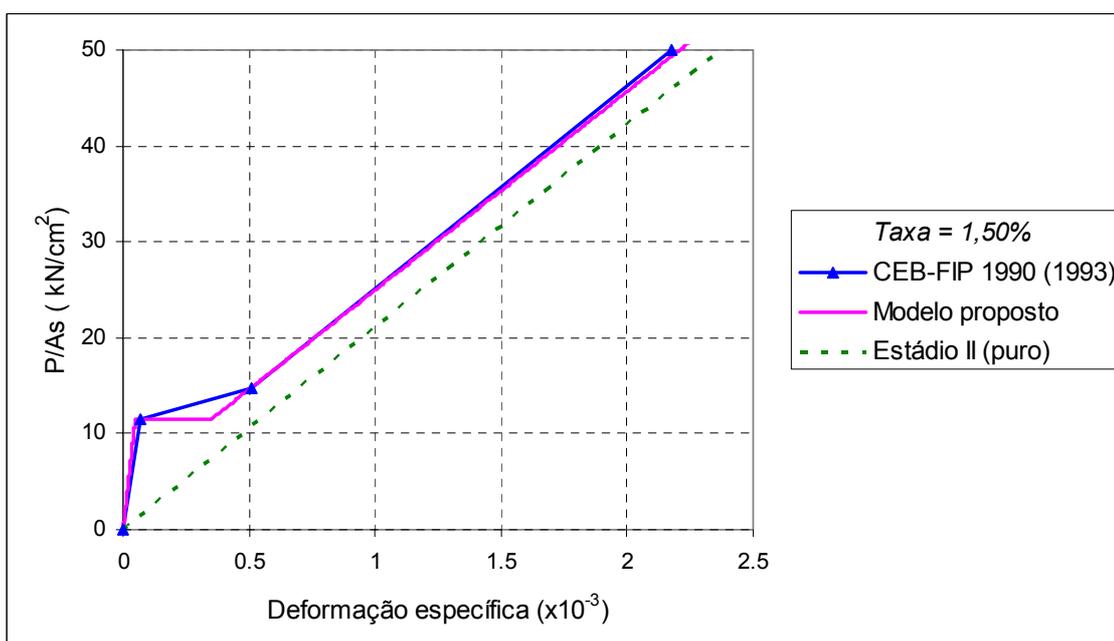


Figura 6.6 – Diagrama tensão-deformação específica na barra: Taxa=1,50%.

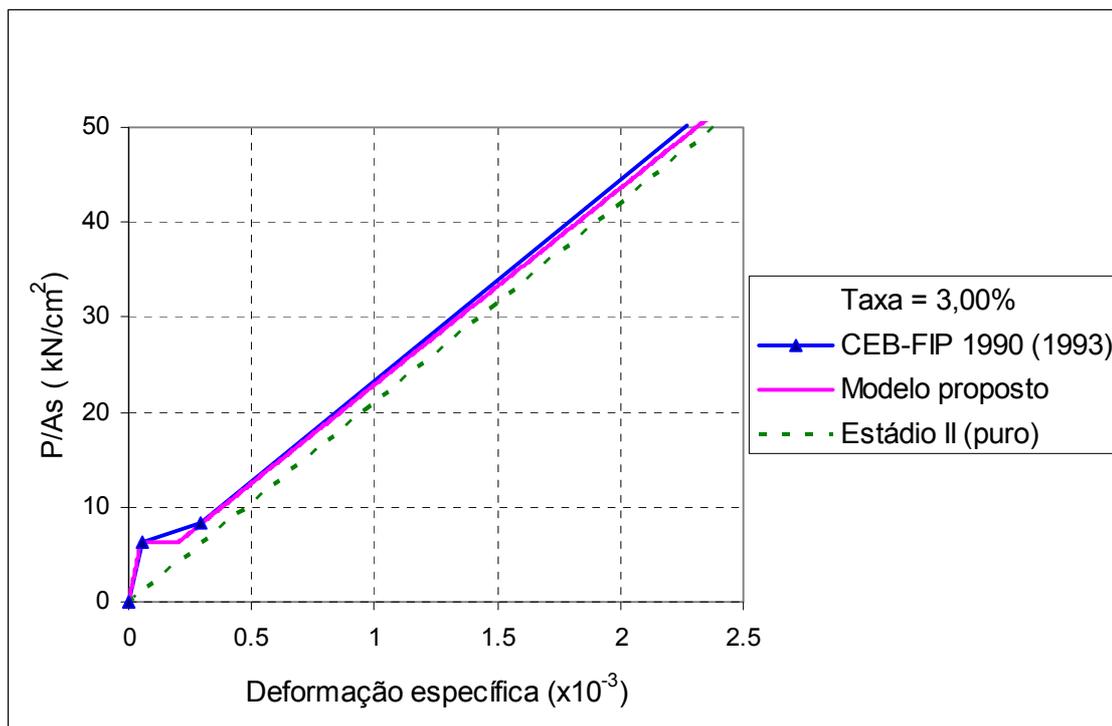


Figura 6.7 – Diagrama tensão-deformação específica na barra: $Taxa=3,00\%$.

6.1.2 Estudo Comparativo II

Como parte de um programa experimental desenvolvido pela Universidade de Manitoba, Canadá, sete corpos-de-prova, submetidos à tração uniaxial, foram ensaiados por Rizkalla et al. (1983) (Maestrini, 1987). O principal objetivo deste estudo era determinar os efeitos da armadura transversal sobre a fissuração de peças de concreto armado submetida à tração uniaxial pura. Assim a principal variável foi o espaçamento entre as armaduras transversais. Embora dirigido a um objetivo diferente, esta pesquisa apresentou um conjunto de dados apropriados para a comparação com o modelo numérico proposto.

Todos os corpos-de-prova tinham dimensões de 30,5x17,8x76,2 cm. As barras longitudinais foram espaçadas 7,6 cm de eixo a eixo. Apenas dois parâmetros foram variados entre os corpos-de-provas, que são o espaçamento entre os estribos (s_t) e o cobrimento da armadura (c). Cabe ressaltar que os corpos-de-prova dos ensaios #2 e #7 possuíam apenas armadura longitudinal. Dados relevantes sobre os corpos-de-prova são apresentados na Tabela 6.2 e na Figura 6.8.

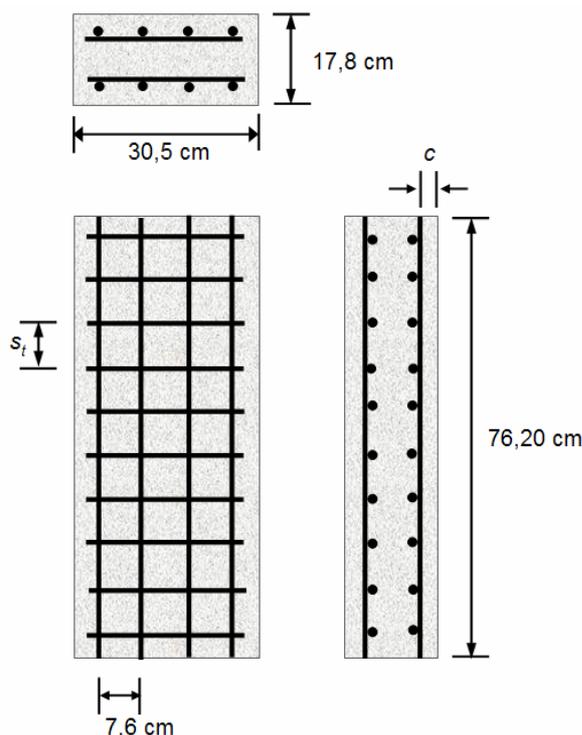


Figura 6.8 – Tirantes testados por Rizkalla et al. (1983).

Tabela 6.2 – Dados para os ensaios realizados por Rizkalla et al. (1983).

Ensaio	Concreto				Aço				
	f_c (kN/cm ²)	f_t (kN/cm ²)	E_c (kN/cm ²)	c (cm)	f_y (kN/cm ²)	E_s (kN/cm ²)	ρ (%)	s_t (cm)	ϕ (cm)
#1	3,01	0,31	2199,37	1,9	44,97	19995,50	1,476	21,59	1,13
#2	2,78	0,29	3020,15	1,9	45,30	19995,50	1,476	-	1,13
#3	2,70	0,28	2478,61	3,8	48,07	19995,50	1,476	5,08	1,13
#4	2,55	0,27	1467,46	3,8	45,69	19995,50	1,476	10,16	1,13
#5	2,58	0,27	3600,22	3,8	48,40	19995,50	1,476	15,24	1,13
#6	2,48	0,26	2636,03	3,8	45,52	19995,50	1,476	26,67	1,13
#7	2,55	0,27	2779,51	3,8	46,91	19995,50	1,476	-	1,13

Como já mencionado no item 6.1.1, os resultados numéricos do modelo foram obtidos empregando um elemento hexaédrico linear, com aplicação de cargas nos nós de uma de suas faces. Nestas simulações, considerou-se apenas um quarto da seção transversal e aplicaram-se condições de contorno adequadas para preservar a simetria do elemento tanto na seção transversal quanto na direção longitudinal. Para isso, foram vinculados os nós pertencentes a três faces do elemento hexaédrico linear, nas direções perpendiculares a cada face.

Através dos gráficos apresentados nas Figuras 6.9 a 6.15, observa-se uma ótima concordância entre os resultados numéricos e experimentais. Como já mencionado no estudo do item anterior, pôde-se comprovar novamente que o modelo proposto nesta tese consegue simular bem o comportamento de enrijecimento à tração.

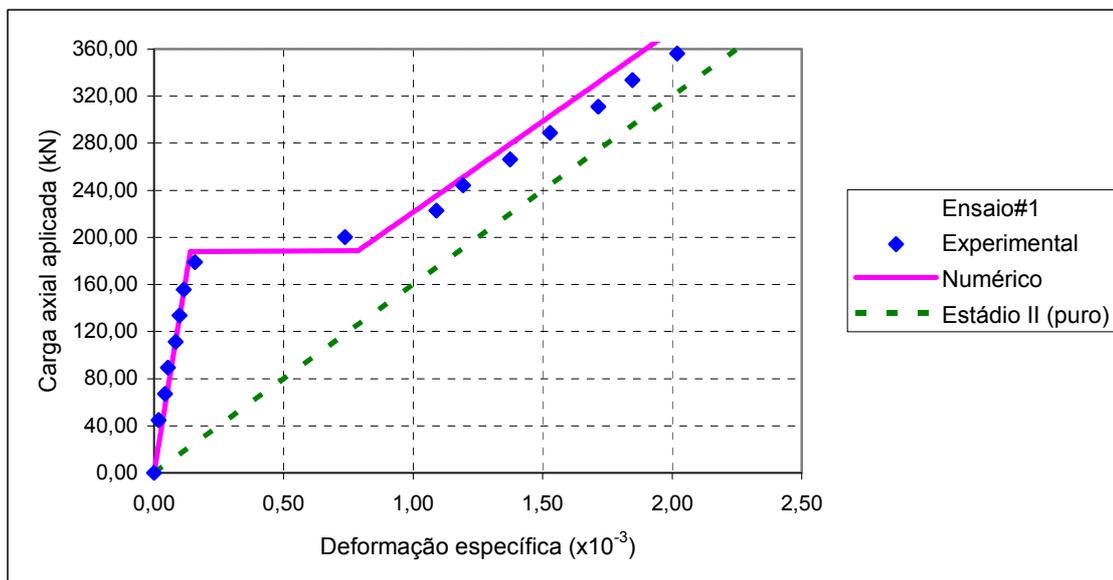


Figura 6.9 – Ensaio #1 realizado por Rizkalla et al. (1983).

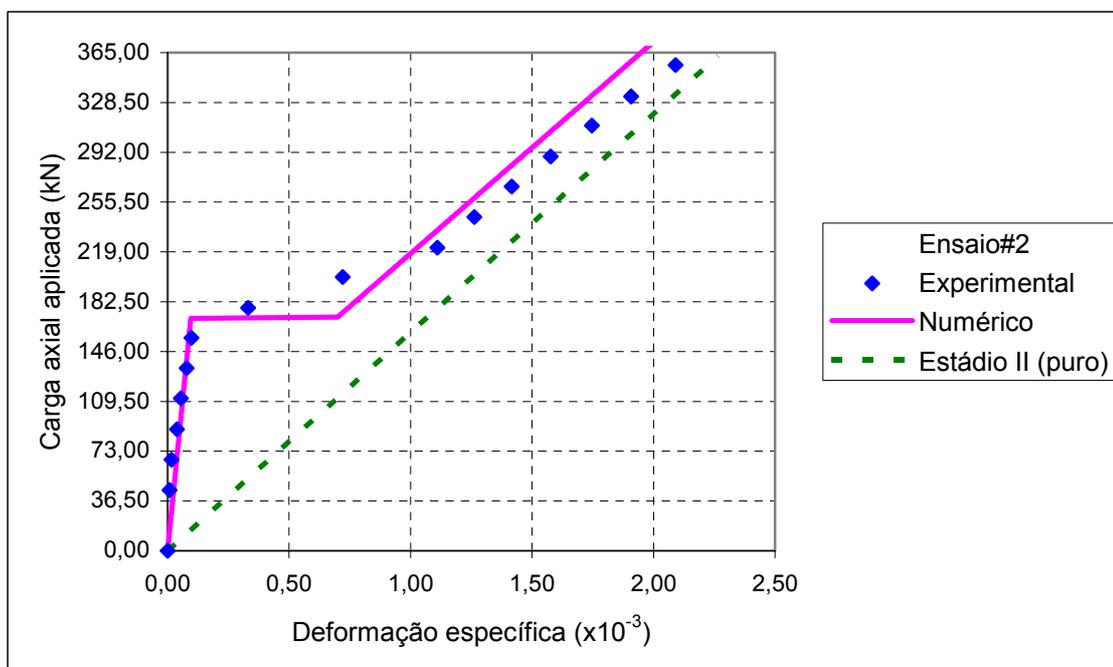


Figura 6.10 – Ensaio #2 realizado por Rizkalla et al. (1983).

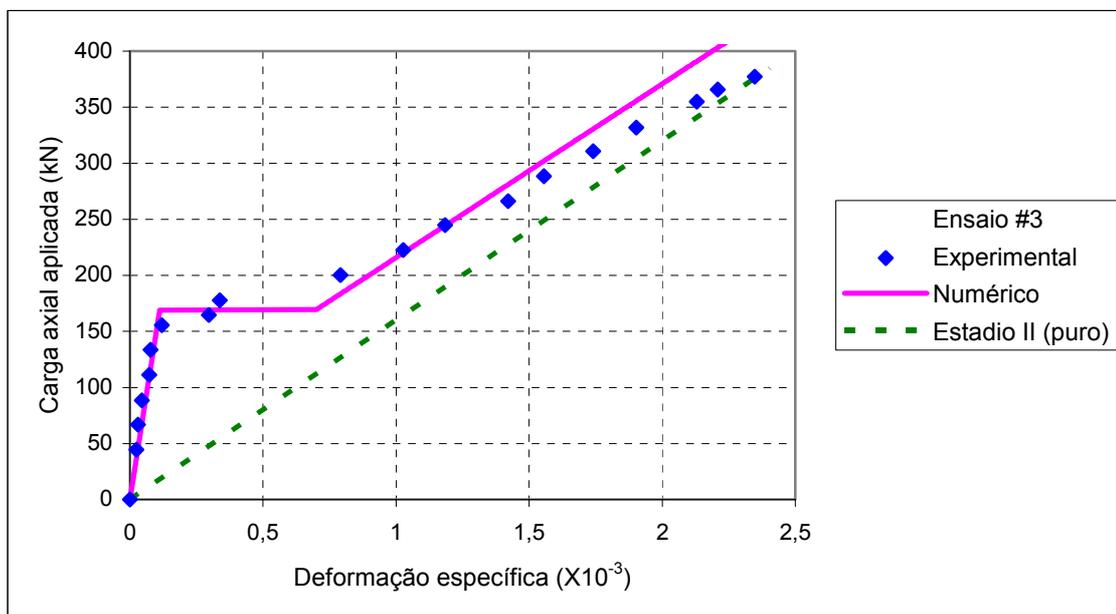


Figura 6.11 – Ensaio #3 realizado por Rizkalla et al. (1983).

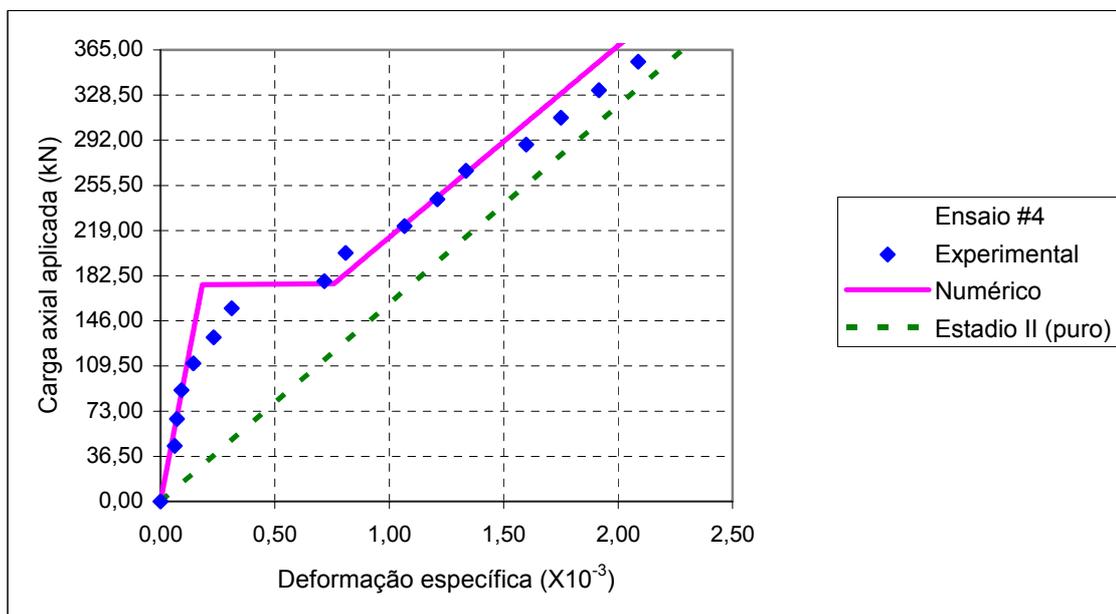


Figura 6.12 – Ensaio #4 realizado por Rizkalla et al. (1983).

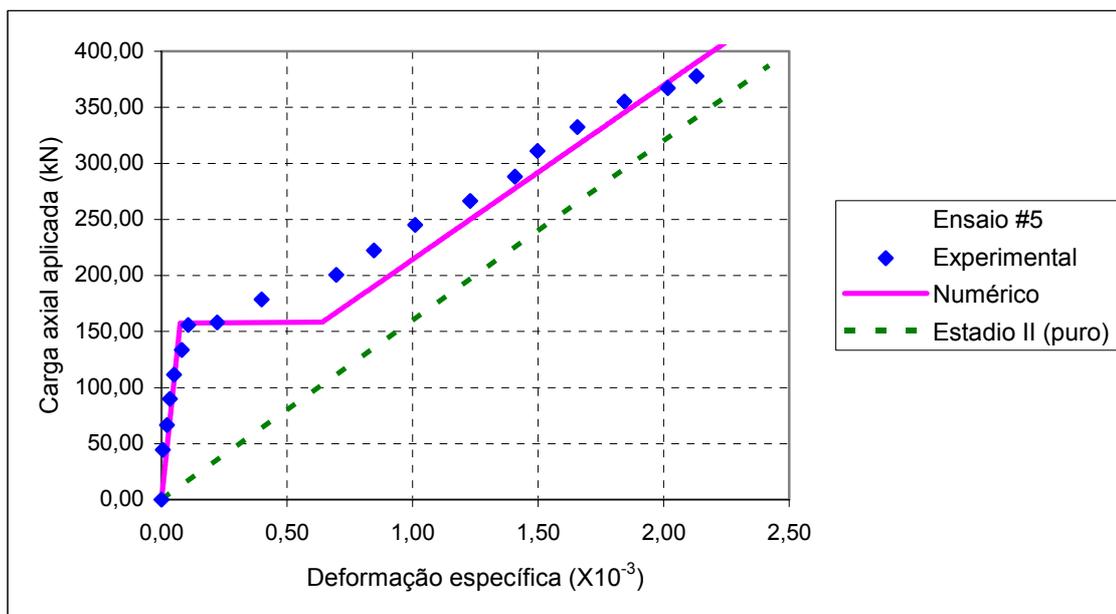


Figura 6.13 – Ensaio #5 realizado por Rizkalla et al. (1983).

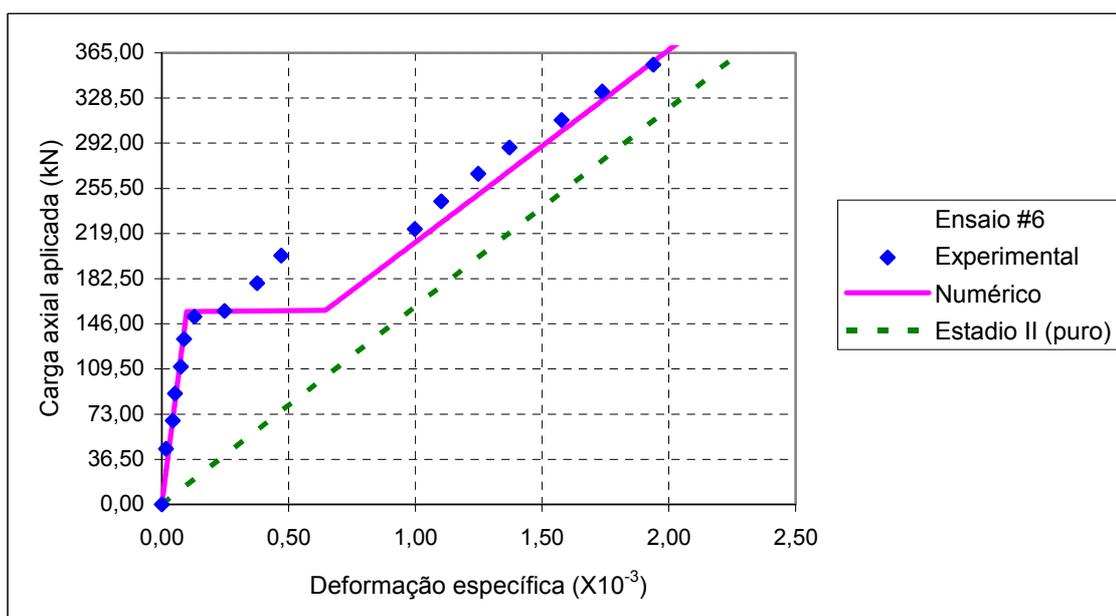


Figura 6.14 – Ensaio #6 realizado por Rizkalla et al. (1983).

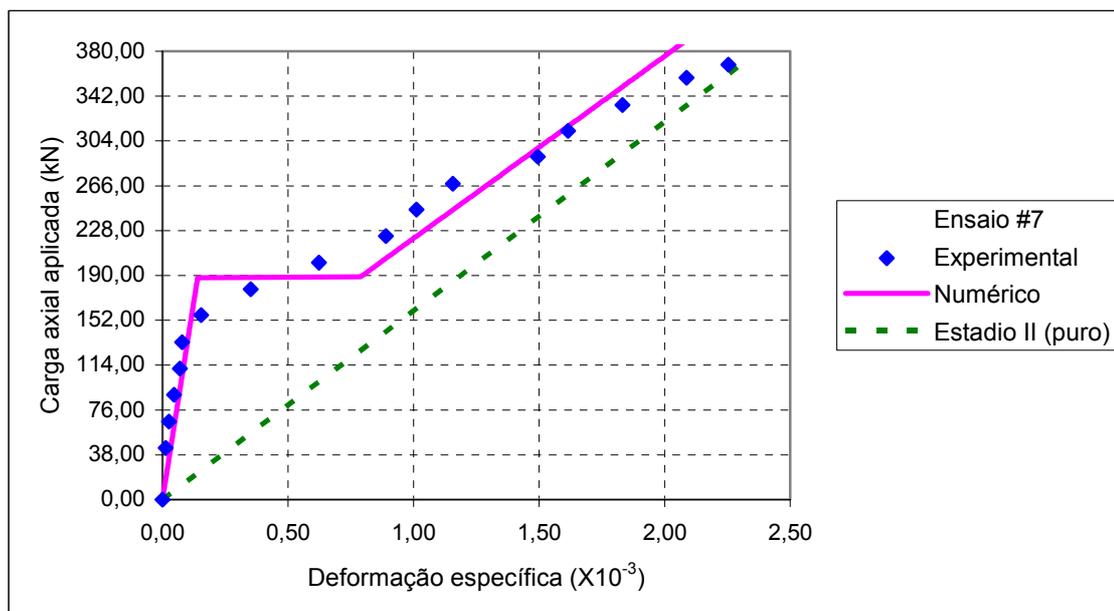


Figura 6.15 – Ensaio #7 realizado por Rizkalla et al. (1983).

6.2 VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Neste item, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados experimentalmente para vigas de concreto armado. Estes resultados experimentais foram apresentados por Bresler e Scordelis (1963) e referem-se a um estudo sobre a resistência ao esforço cortante de doze vigas de concreto armado.

As doze vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963) foram divididas em quatro séries de três vigas. Cada série se diferenciava pela quantidade de armadura longitudinal e transversal, pelo comprimento do vão, pelas dimensões da seção transversal e pela resistência do concreto. Todas as vigas possuíam seção transversal retangular e os detalhes destas seções transversais podem ser observados na Figura 6.16. Detalhes adicionais são apresentados na Tabela 6.3. As barras da armadura longitudinal tracionada tinham um diâmetro de 28,7 mm e as barras da armadura comprimida um diâmetro de 12,7 mm. Quando usados, os estribos tinham uma bitola de 6,4 mm. Vale salientar que as vigas da série OA não contêm estribos. As propriedades dos materiais estão apresentadas na Tabela 6.4. Todas as vigas foram submetidas a cargas concentradas monotonamente aplicadas em seu centro, como pode ser observado na Figura 6.17.

Para a simulação numérica do comportamento de enrijecimento à tração em vigas de concreto armado, considerou-se o coeficiente de redução da tensão de fissuração igual à $\alpha_t=0,6$. Como mencionado no item 6.1, optou-se por este valor depois da calibração do modelo numérico a partir da análise das vigas de concreto armado. Pode-se justificar a utilização de um valor maior para o coeficiente α_t com relação ao utilizado para os tirantes de concreto armado ($\alpha_t=0,4$), o fato das vigas possuírem uma menor taxa de armadura e assim um maior efeito de enrijecimento à tração, ou seja, um maior coeficiente de redução da tensão de fissuração.

Para o estudo computacional adotou-se uma malha de elementos finitos constituída por dez elementos hexaédricos quadráticos. Como estas vigas apresentavam simetria de geometria e de carregamento, adotou-se a malha e condições de contorno indicadas na Figura 6.18.

Tabela 6.3 – Detalhes das vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963).

Viga	b (cm)	h (cm)	d (cm)	L (cm)	As (cm ²)	As' (cm ²)	Estribos
OA-1	31,0	55,6	46,1	366	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	-	-
OA-2	30,5	56,1	46,6	457	32,35 (5 ϕ 28,7mm)	-	-
OA-3	30,7	55,6	46,2	640	38,81 (6 ϕ 28,7mm)	-	-
A-1	30,7	56,1	46,6	366	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm
A-2	30,5	55,9	46,4	457	32,35 (5 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm
A-3	30,7	56,1	46,6	640	38,81 (6 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm
B-1	23,1	55,6	46,1	366	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 19cm
B-2	22,9	56,1	46,6	457	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 19cm
B-3	22,9	55,6	46,1	640	32,35 (5 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 19cm
C-1	15,5	55,9	46,4	366	12,94 (2 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm
C-2	15,2	55,9	46,4	457	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm
C-3	15,5	55,4	45,9	640	25,88 (4 ϕ 28,7mm)	2,53 (2 ϕ 12,7mm)	ϕ 6,4mm c / 21cm

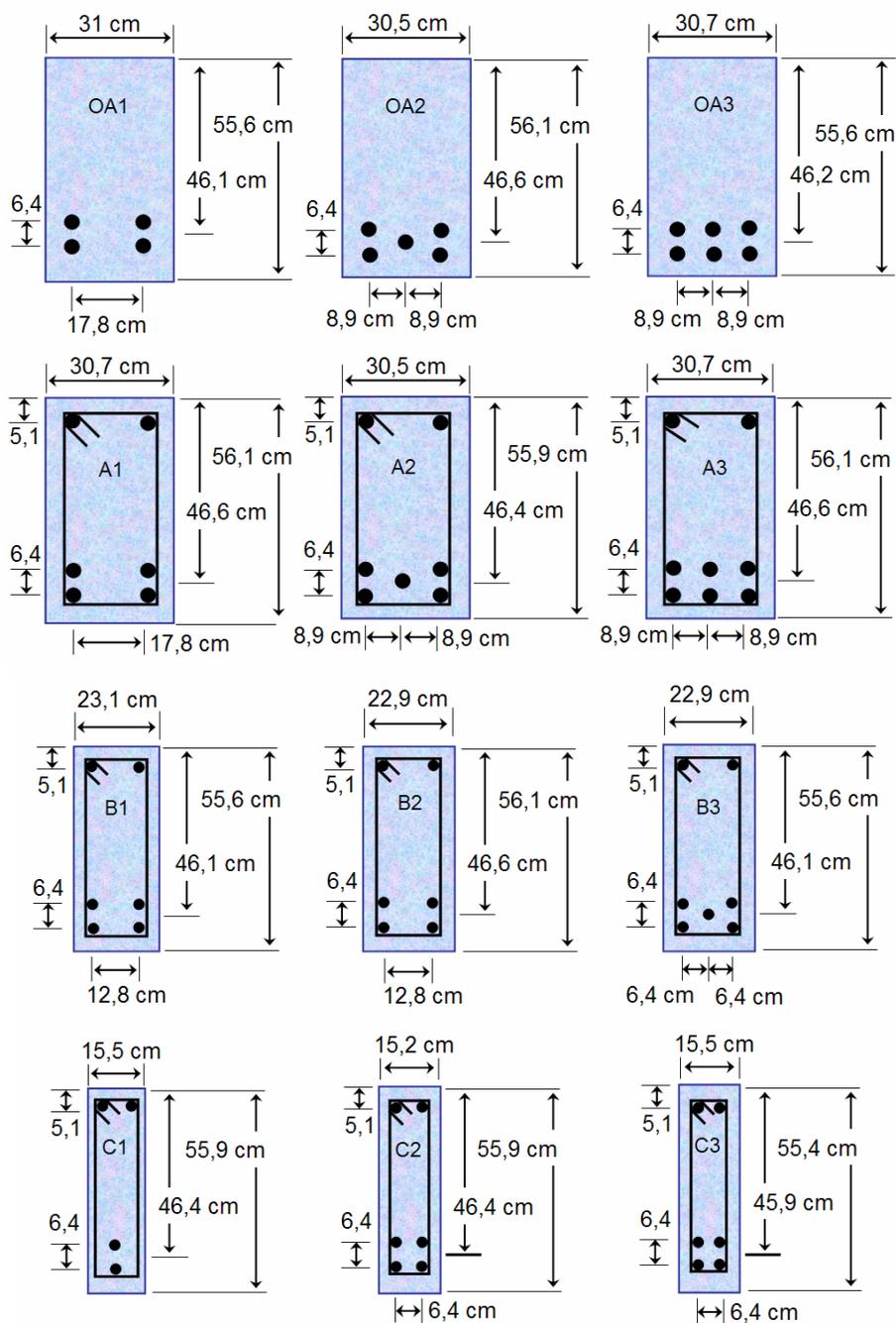


Figura 6.16 – Detalhes das seções transversais das vigas de Bresler e Scordelis (1963).

Tabela 6.4 – Propriedades dos materiais utilizados nas vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963).

CONCRETO			
Viga	f_c (kN/cm ²)	f_r (kN/cm ²)	f_t (kN/cm ²)
OA-1	2,25	0,396	0,264
OA-2	2,37	0,434	0,289
OA-3	3,76	0,414	0,276
A-1	2,41	0,385	0,257
A-2	2,43	0,372	0,248
A-3	3,50	0,434	0,289
B-1	2,48	0,399	0,266
B-2	2,32	0,376	0,251
B-3	3,87	0,421	0,281
C-1	2,96	0,422	0,281
C-2	2,38	0,393	0,262
C-3	3,50	0,385	0,257
ARMADURA			
	ϕ (cm)	f_y (kN/cm ²)	E_s (kN/cm ²)
estribos	0,64	32,5	18961,3
Longitudinal superior	1,27	34,5	20133,4
Longitudinal inferior – Séries 1 e 2	2,87	55,5	21788,2
Longitudinal inferior – Séries 3	2,87	55,2	20547,1

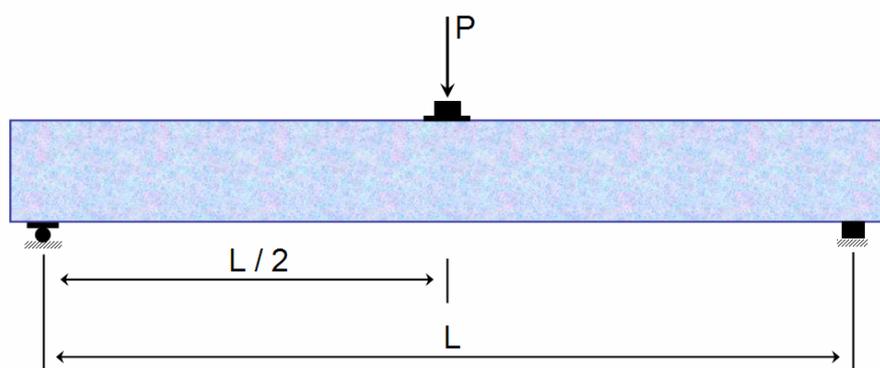


Figura 6.17 – Desenho esquemático das vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963).

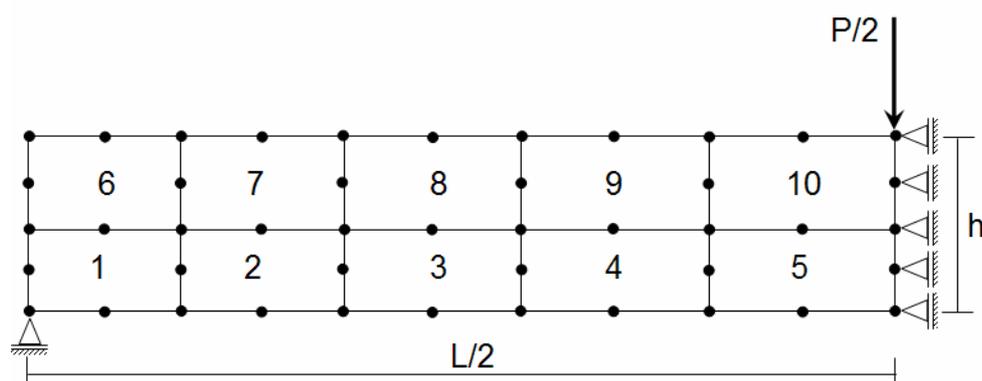


Figura 6.18 – Discretização e condições de contorno adotadas para análise computacional das vigas ensaiadas por Bresler-Scordelis (1963).

6.2.1 Estudo Comparativo dos resultados

Neste item, comparam-se os resultados numéricos com os clássicos resultados experimentais produzidos por Bresler e Scordelis (1963). Para a validação da análise numérica foram traçadas curvas do tipo carga-deslocamento, conforme apresentado nas Figuras 6.19 a 6.21. Na Tabela 6.5, apresentam-se as cargas de ruptura obtidas pelo programa computacional e os correspondentes resultados experimentais.

Tabela 6.5 – Resultados obtidos nas vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963).

Carga de ruptura			
Viga	P_{u-exp} (kN)	P_{u-num} (kN)	P_{u-exp} / P_{u-num}
OA-1	334	368	0,91
OA-2	356	387	0,92
OA-3	378	366	1,03
A-1	467	491	0,95
A-2	489	467	1,05
A-3	468	474	0,99
B-1	443	422	1,05
B-2	400	384	1,04
B-3	354	378	0,94
C-1	311	305	1,02
C-2	325	290	1,12
C-3	269	273	0,99
Média			1,001
Coefficiente de variação (%)			6,39

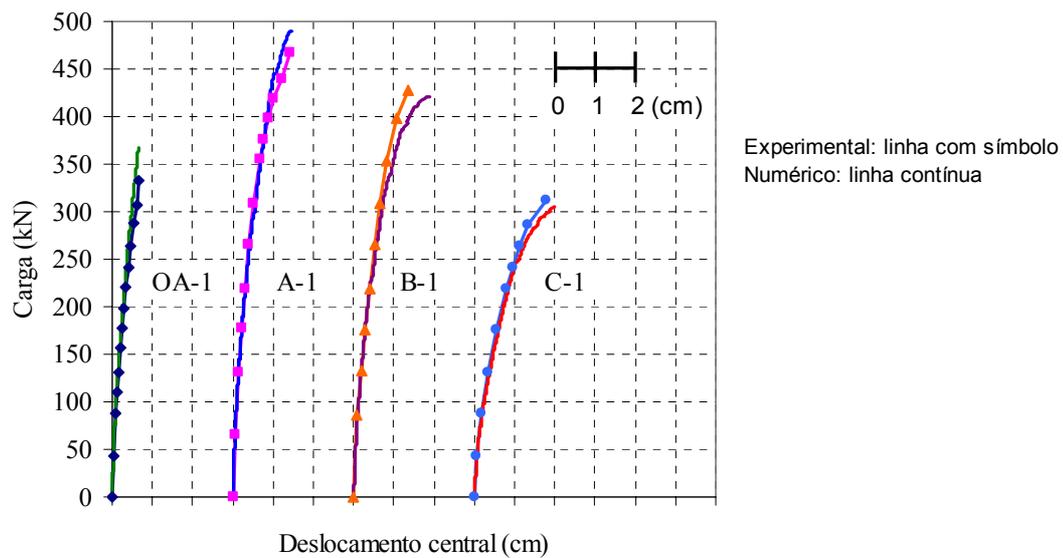


Figura 6.19 – Resultados comparativos com as vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963):
Série 1.

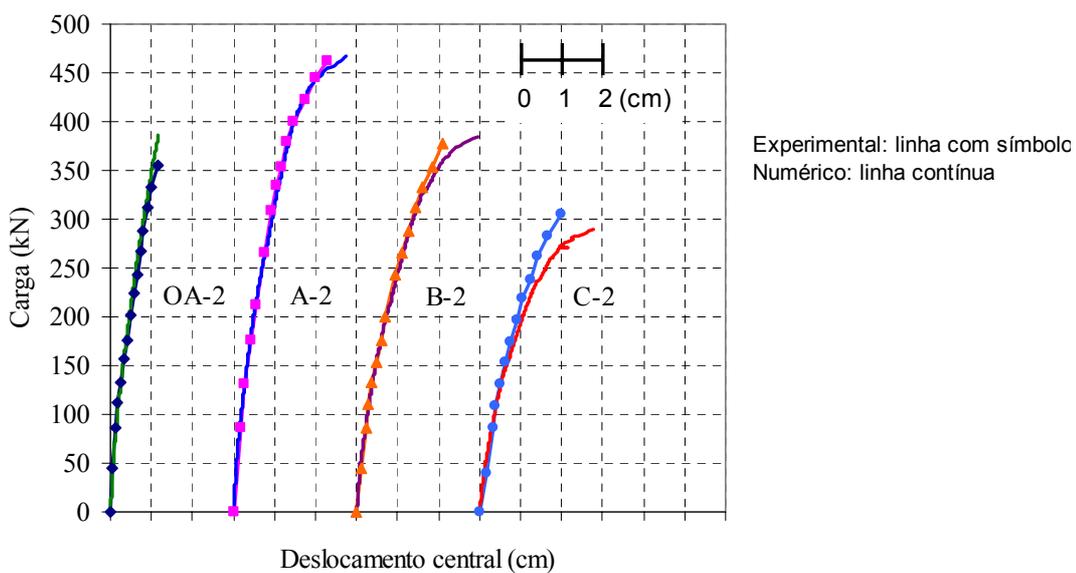


Figura 6.20 – Resultados comparativos com as vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963):
Série 2.

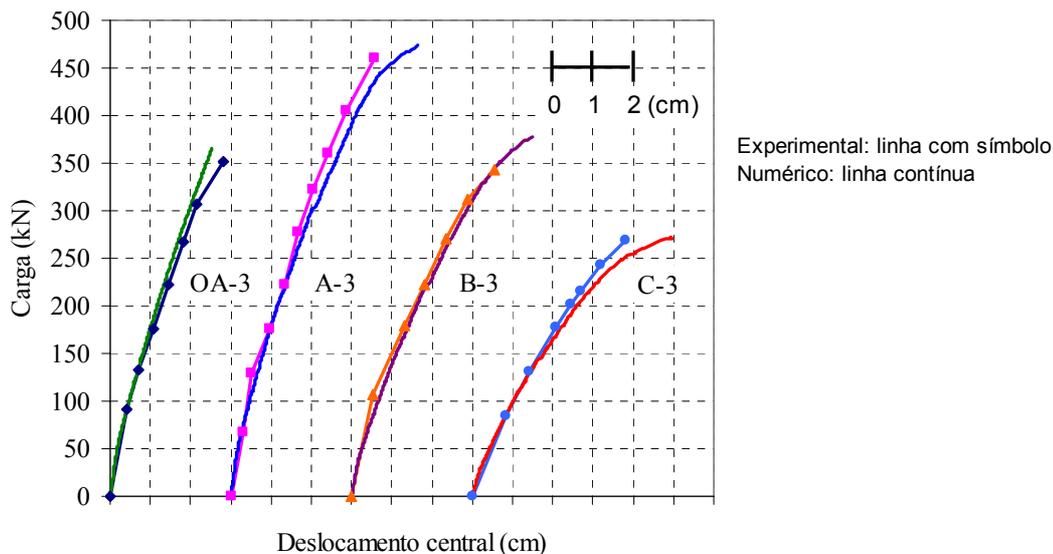


Figura 6.21 – Resultados comparativos com as vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963):
Série 3.

As vigas da série OA (vigas sem estribos) rompem por corte, ocorrendo a ruptura imediatamente depois da formação da primeira fissura crítica. As vigas de maiores comprimentos de vãos (série 3) rompem por flexão, ocorrendo um pequena influência do cisalhamento. E as vigas de comprimentos de vãos intermediários (série 1 e 2) rompem por flexão e cisalhamento. Porém, como ainda não foram implementadas no programa rotinas para visualização gráfica tridimensional dos resultados, não foi possível a visualização gráfica destes resultados.

De um modo geral obteve-se ótima correlação entre as respostas numéricas e os resultados experimentais de Bresler e Scordelis (1963), como observado nas Figuras 6.19 a 6.21. As cargas de ruptura obtidas pelo modelo numérico ficaram muito próximas das respostas experimentais para a maioria das vigas analisadas (Tabela 6.5). Os maiores valores destas cargas de ruptura foram obtidos pelas vigas da série C, ou seja, as vigas com menores dimensões de seções transversais.

6.3 PILARES DE CONCRETO ARMADO

Neste item, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados experimentalmente para pilares de concreto armado confinados, de modo a verificar a aplicabilidade do modelo desenvolvido a este tipo de situação em que a estrutura fica submetida a um estado triplo de tensões. Os resultados experimentais foram apresentados por Razvi e Saatcioglu (1989) e se referem a um estudo sobre o ganho na capacidade de carga de pilares confinados através da utilização de estribos pouco espaçados.

6.3.1 Confinamento

Quando um elemento de concreto é comprimido axialmente, são induzidas, por efeito de Poisson, deformações transversais que resultam na expansão lateral do concreto. Sob baixos níveis de carregamento, as deformações transversais são proporcionais às deformações longitudinais, relacionando-se entre si através do coeficiente de Poisson.

Para valores críticos de tensão, normalmente situados entre 75% e 80% da resistência à compressão do concreto, a formação de microfissuras na matriz de concreto conduz a grandes incrementos de deformações transversais, para acréscimos relativamente pequenos de deformações longitudinais. A propagação e o agrupamento destas microfissuras conduzem ao esgotamento da capacidade resistente do concreto, geralmente caracterizada pela presença de trincas paralelas à direção do carregamento (Santarosa et al., 2001).

O confinamento de peças comprimidas permite diminuir o desenvolvimento da microfissuração do concreto, retardando a ruptura do elemento estrutural, através do controle de sua expansão lateral. Quando o concreto confinado é comprimido axialmente, o mesmo é parcial ou totalmente impedido de se expandir na direção lateral, resultando em uma pressão na interface entre o concreto e o material confinante, conforme ilustrado na Figura 6.22. Esta pressão de confinamento induz um estado triaxial de tensões de compressão no concreto, o que proporciona um comportamento superior, tanto em resistência quanto em ductilidade, em relação ao concreto não confinado, submetido apenas à compressão uniaxial.

O confinamento do concreto é geralmente obtido pelo envolvimento do elemento comprimido por materiais com boas características de resistência à tração, disposto de maneira a resistir ao aumento das deformações transversais. O grau de confinamento de um elemento estrutural, do qual sua resistência e ductilidade são extremamente dependentes, é fortemente influenciado pela forma de sua seção transversal e pelo material utilizado para o seu confinamento. As seções circulares são geralmente as mais eficientemente confinadas, por permitirem uma pressão de confinamento uniforme em toda a seção, enquanto que nas peças de seção prismática ocorre concentração de tensões em seus vértices. A continuidade do material confinante ao longo da peça comprimida também influencia na uniformidade da pressão de confinamento, e suas propriedades mecânicas definem, sobretudo, a variação da pressão de confinamento com o aumento da carga axial.

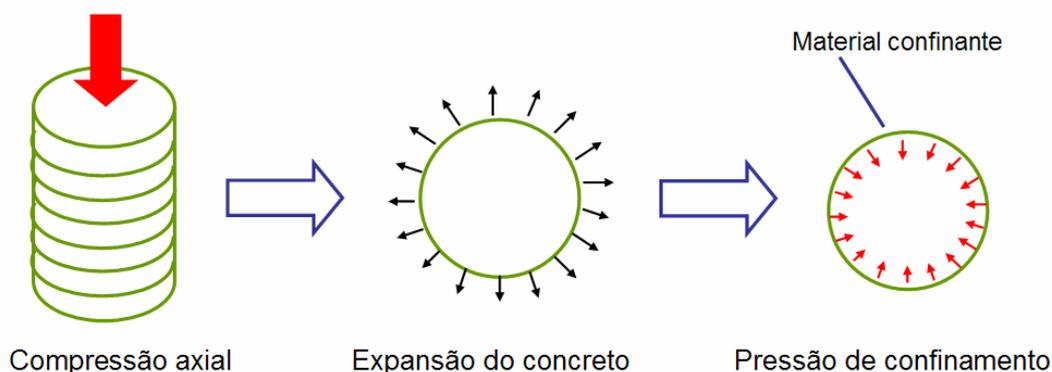


Figura 6.22 – Mecanismo do efeito de confinamento.

Os primeiros estudos dos efeitos do confinamento no comportamento do concreto foram realizados em concretos confinados de forma ativa por pressões hidrostáticas laterais. Em 1929, Richart et al. verificou que a resistência do concreto confinado por pressão hidrostática podia ser obtida por confinamento passivo, resultante da colocação de espirais de aço pouco espaçadas.

A partir de então, um grande número de ensaios foi realizado por diferentes pesquisadores, onde se estudou a quantidade e distribuição das barras de aço que poderiam proporcionar um maior confinamento do concreto. Comprovou-se principalmente que a colocação de estribos pouco espaçados e uma boa distribuição das barras longitudinais ao longo do perímetro da seção são essenciais para se obter um confinamento efetivo do concreto.

6.3.2 Estudo comparativo

Como mencionado anteriormente, serão analisadas, neste item, situações de confinamento em pilares de concreto armado, de modo a verificar a aplicabilidade do modelo desenvolvido a este tipo de situação em que a estrutura fica submetida a um estado triplo de tensões.

Em seu estudo sobre o comportamento de pilares confinados por estribos, Razvi e Saatcioglu (1989) ensaiaram alguns pilares curtos de seção quadrada, executados com concreto de resistência normal e submetidos à compressão axial. Estes corpos-de-prova foram confinados no topo e na base e as cargas foram aplicadas por intermédio de placas de aço.

Os pilares numerados por #3 e #4 foram reforçados transversalmente pela utilização de estribos e diferem apenas quanto ao espaçamento dos mesmos, de modo que no pilar #3 o espaçamento dos estribos é a metade do espaçamento utilizado no pilar #4. De maneira semelhante, os pilares numerados por #15 e #16 diferem apenas quanto ao espaçamento dos estribos, sendo o espaçamento dos estribos no pilar #16 igual à metade do espaçamento utilizado no pilar #15. Estes pilares juntamente com o pilar #7, cujas características geométricas estão indicadas na Figura 6.23, foram analisados através do modelo desenvolvido nesta tese. Os pilares #3 e #16 possuem estribos espaçados a 3,5 cm e os pilares # 4, #7 e #15 possuem estribos espaçados a 7 cm. Adotou-se 210 GPa para o módulo de deformação longitudinal das armaduras. As propriedades dos materiais podem ser observadas na tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Propriedades dos materiais utilizados nos pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989).

Pilar	Concreto	Armadura longitudinal		Estribos		
	f_c (kN/cm ²)	As (cm ²)	f_y (kN/cm ²)	f_y (kN/cm ²)	ϕ (mm)	s (cm)
#3	3,2	8,04 (4 ϕ 16mm)	47	37,3	6,53	3,5
#4	3,2	8,04 (4 ϕ 16mm)	47	37,3	6,53	7,0
#7	3,9	4,01 (4 ϕ 11,3mm)	48	37,3	6,53	7,0
#15	2,9	8,04 (4 ϕ 16mm)	47	37,3	6,53	7,0
#16	2,9	8,04 (4 ϕ 16mm)	47	37,3	6,53	3,5

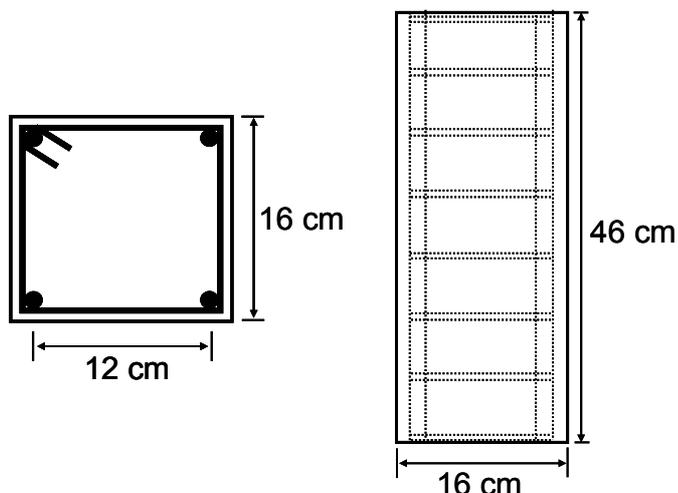


Figura 6.23 – Características geométricas dos pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989).

Os resultados numéricos do modelo foram obtidos empregando-se elementos hexaédricos quadráticos. Nestas simulações, considerou-se apenas um quarto do pilar, aplicando condições de contorno adequadas para preservar a simetria do elemento. Para isso, utilizou-se uma malha de elementos finitos de $2 \times 2 \times 5$ elementos, totalizando 20 elementos. Estes pilares foram analisados aplicando-se incrementos de deslocamento de 0,002 cm no topo do pilar, na face superior do elemento mais próximo do eixo longitudinal do pilar. A resistência do concreto dos pilares foi determinado como sendo de 32 MPa.

Nas Figuras 6.24, 6.25 e 6.26, mostram-se as curvas carga-deformação axial para os pilares analisados numericamente, juntamente com os resultados dos ensaios experimentais. A deformação axial foi medida com relação ao ponto nodal mais próximo do eixo longitudinal do pilar localizado na face superior deste elemento.

Verifica-se que os resultados numéricos e experimentais são muito próximos. A razão entre a carga de ruptura prevista pelo modelo e aquela medida no ensaio para cada um dos cinco pilares é apresentada na Tabela 6.7.

Os resultados confirmam estudos prévios realizados por diversos autores, na medida em que se constata que a redução no espaçamento dos estribos, conduzindo a uma maior taxa de armadura transversal, resulta numa maior pressão de confinamento, melhorando a resistência dos pilares. Os pilares #3 e #16, cujas taxas de armaduras transversais são o dobro das taxas

dos pilares #4 e #15, respectivamente, apresentaram resistências maiores que estes pilares menos confinados.

Apesar dos resultados em geral terem sido muito próximos, para o pilar #7 (Figura 6.25) o resultado numérico apresentou o efeito de confinamento um pouco superestimado em comparação com o resultado experimental.

Em todos os ensaios (experimentais e numéricos), observou-se também uma melhora na ductilidade dos pilares. A ductilidade apresenta uma substancial importância na resistência das estruturas a determinados fenômenos da natureza, como por exemplo, o terremoto. Porém, devido à natureza frágil do concreto simples, a ductilidade requerida é de difícil obtenção, especialmente em elementos com tensões altamente compressíveis (Razvi e Saatcioglu, 1989).

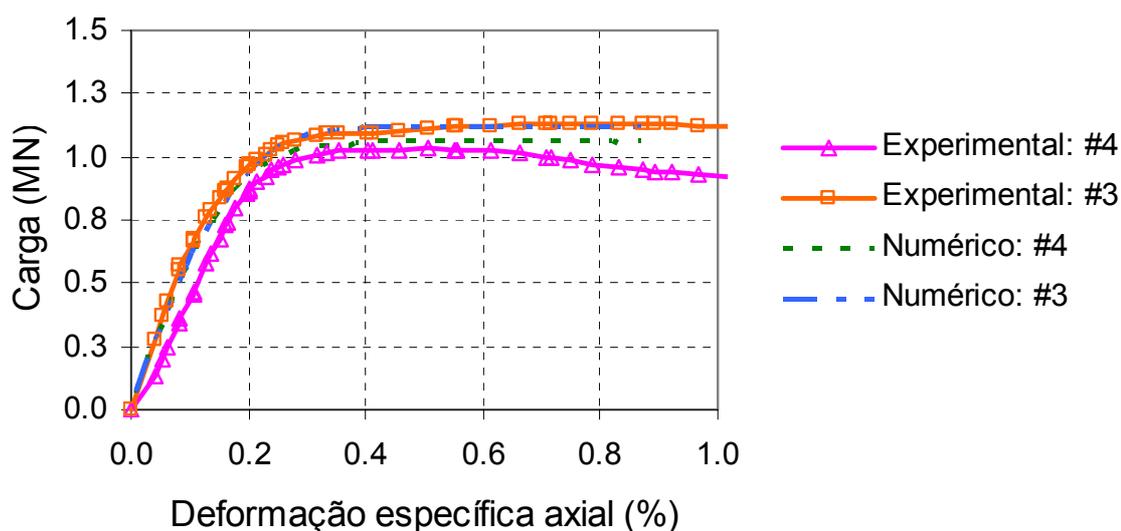


Figura 6.24 – Efeito do espaçamento de estribos na resposta axial do pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989): *ensaios #3 e #4*.

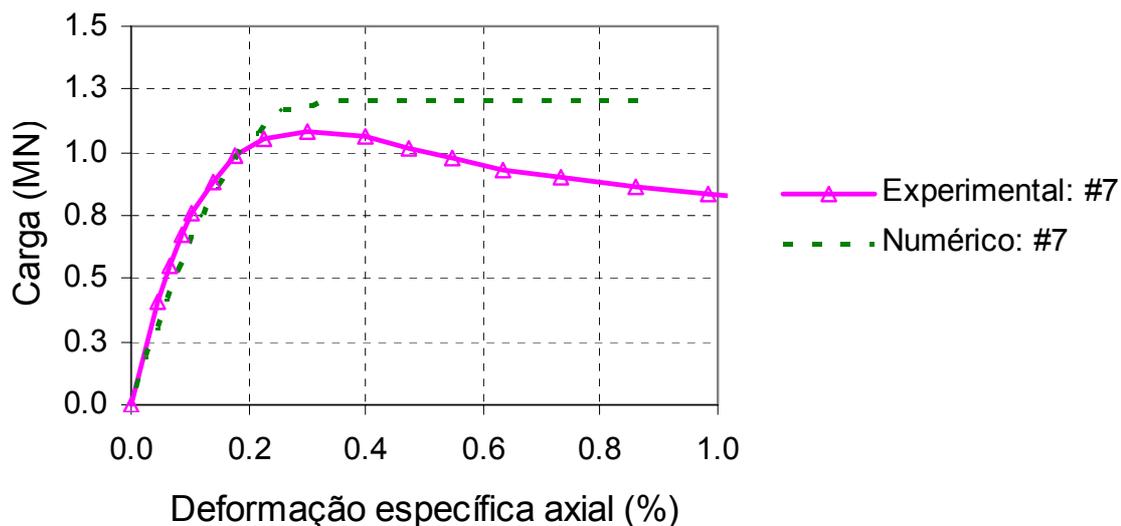


Figura 6.25 – Efeito do espaçamento de estribos na resposta axial do pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989): *ensaio #7*.

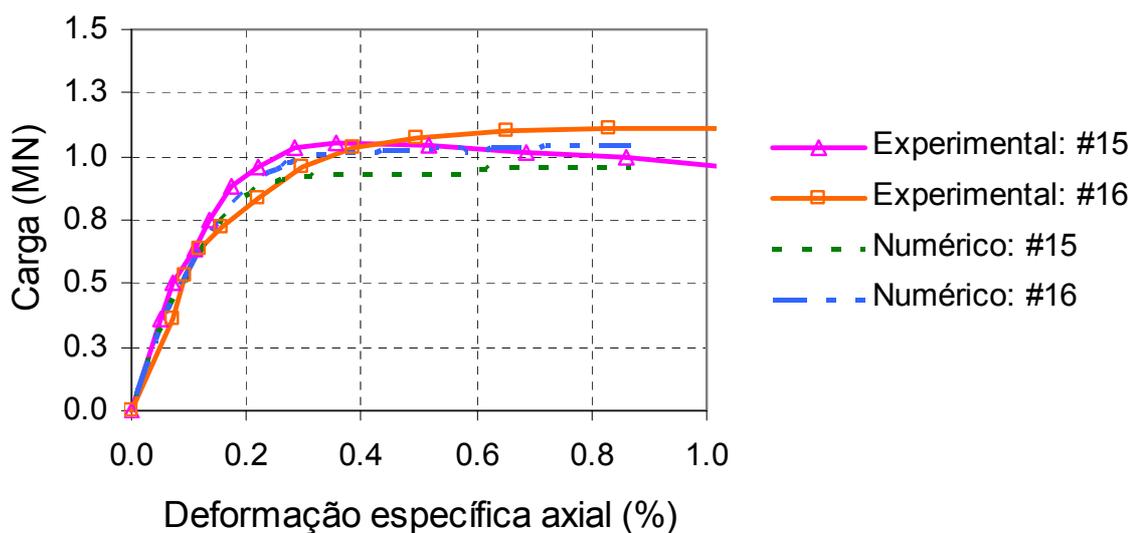


Figura 6.26 – Efeito do espaçamento de estribos na resposta axial do pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989): *ensaios #15 e #16*.

Tabela 6.7 – Resultados obtidos nos pilares ensaiados por Razvi e Saatcioglu (1989).

Carga de ruptura			
Pilar	P_{u-exp} (kN)	P_{u-num} (kN)	P_{u-exp} / P_{u-num}
#3	1141	1123,5	1,02
#4	1023	1102,4	0,93
#7	1042	1205	0,86
#15	1028	958,87	1,07
#16	1117	1037,4	1,08
Média			0,99
Coefficiente de variação (%)			9,28

6.4 PAREDE SOLICITADA POR CARGA CÍCLICA

Nesta seção, comparam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados experimentalmente para uma parede de seção retangular de concreto armado. Estes resultados experimentais foram apresentados por Elmorsi et al. (1998) e referem-se a um estudo sobre o comportamento cíclico de paredes, realizado por Oesterle et al. (1978).

6.4.1 Detalhes da parede ensaiada por Oesterle et al. (1978)

Os resultados experimentais de uma parede de seção retangular (R2) ensaiada por Oesterle et al. (1978) *apud* Elmorsi et al. (1998) são usados para verificar a validade do modelo adotado para simular o comportamento cíclico do concreto armado.

As dimensões da parede de seção transversal retangular (R2) usada nesta pesquisa são mostradas na Figura 6.27. As propriedades dos materiais e taxas de armadura são apresentadas na Tabela 6.8.

Tabela 6.8 – Propriedades dos materiais utilizados na parede R2 ensaiada por Oesterle et al. (1978).

Seção transversal	Parede R2
Resistência à compressão do concreto f_c (kN/cm ²)	4,65
Tensão de escoamento da armadura vertical: <i>armadura 1</i> (kN/cm ²)	45,02
Tensão de escoamento da armadura vertical: <i>armadura 2</i> (kN/cm ²)	53,51
Tensão de escoamento da armadura horizontal (kN/cm ²)	53,51
Taxa de armadura: <i>armadura 1</i> (%)	4,00
Taxa de armadura: <i>armadura 2</i> (%)	0,25
Taxa de armadura horizontal (%)	0,31

A discretização da parede usada na presente análise numérica está ilustrada na Figura 6.28. A parede completa de concreto é modelada usando 32 elementos hexaédricos quadráticos. Os nós da base da parede são restritos para movimentos de translação nas três direções. A história de carga cíclica é imposta no lado superior esquerdo da parede, e para simulação numérica desta história de carga foram considerados deslocamentos prescritos aplicados no topo da malha de elementos finitos. Como a placa do topo é considerada rígida, foram aplicados deslocamentos prescritos iguais em todos os nós do topo da parede.

Para a simulação numérica do comportamento de enrijecimento à tração, considerou-se o coeficiente de redução da tensão de fissuração igual à $\alpha_t=0,6$.

A figura 6.29 mostra curvas carga-deslocamento numérica e experimental para a parede em estudo. De um modo geral, obteve-se ótima correlação entre a resposta numérica e o resultado experimental ensaiado por Oesterle et al. (1978). Porém, o Método de Newton-Raphson não se mostrou muito estável para descrever o comportamento cíclico de elementos de concreto armado, apresentando problemas de convergência nos processos de descarga e recarga. Por isso, até o presente momento, não foi possível ensaiar numericamente todos os ciclos de histerese apresentados no comportamento desta parede de concreto armado solicitada por carga cíclica.

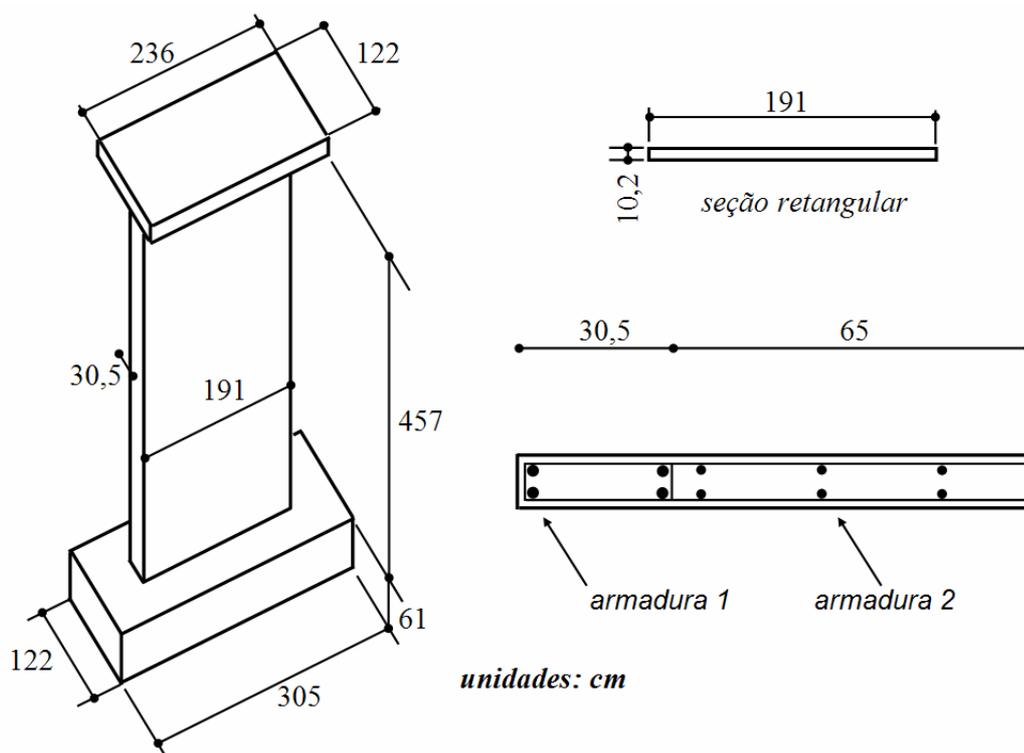


Figura 6.27 – Detalhes da seção transversal da parede R2 ensaiada por Oesterle et al. (1978).

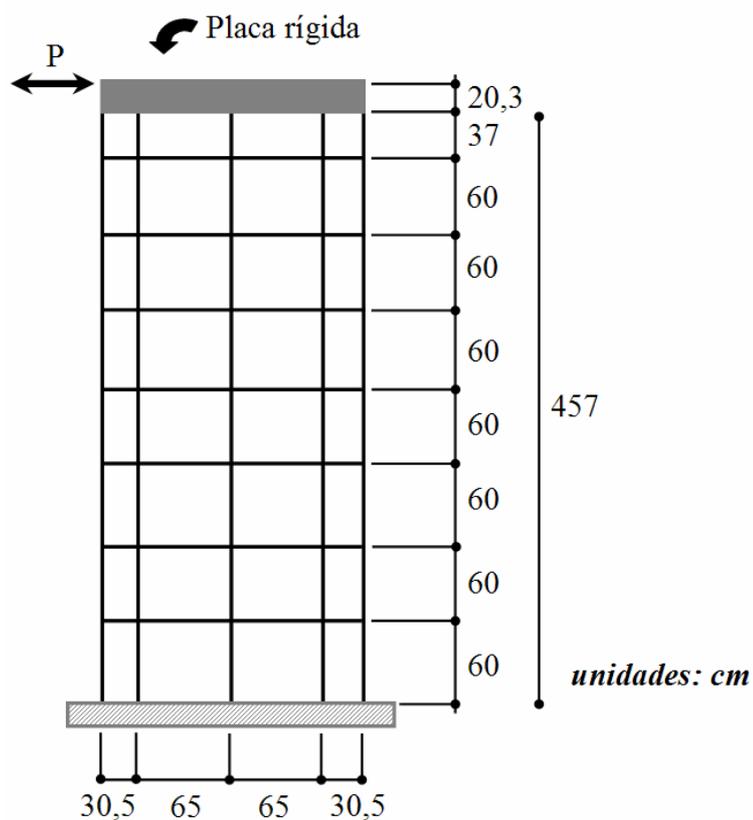


Figura 6.28 – Discretização em elementos finitos que foi adotada para análise computacional da parede R2 ensaiada por Oesterle et al. (1978).

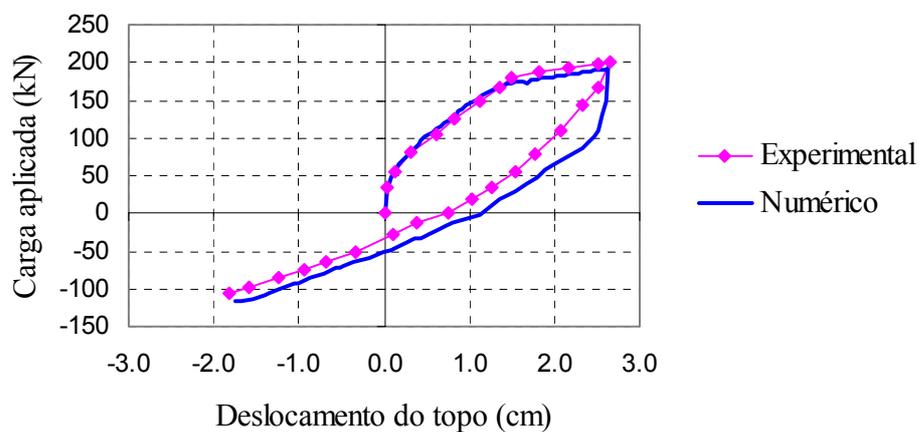


Figura 6.29 – Resultados comparativos da parede R2 ensaiada por Oesterle et al. (1978).

CAPÍTULO 7

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Neste capítulo, apresentam-se as conclusões obtidas com o presente trabalho. Também, procuram-se indicar alguns tópicos de pesquisas para trabalhos futuros.

7.1 CONCLUSÕES

Apresentou-se, no presente trabalho, uma formulação geral para análise não-linear tridimensional por elementos finitos de peças de concreto armado solicitadas por cargas monótonas ou cíclicas e estados multiaxiais de tensões.

A lei constitutiva utilizada para o concreto é uma lei ortotrópica que segue a teoria da elasticidade não-linear, com eixos de ortotropia paralelos aos eixos de tensões principais correntes. O modelo utiliza também o conceito de deformação uniaxial equivalente, inicialmente apresentado por Darwin e Pecknold (1977). Estas deformações uniaxiais equivalentes permitem determinar o comportamento triaxial do concreto, através de três curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes, facilitando a simulação de seu comportamento e permitindo uma boa aproximação com os resultados experimentais.

Para determinação das tensões de pico em cada uma das direções de tensões principais, o programa permite a utilização de dois critérios de ruptura tridimensionais: o critério de Willam-Warnke (1975) e o critério de Ottosen (1977).

O modelo descreve bem a resposta do concreto submetido a diversos tipos de carregamentos, sendo capaz de representar o esmagamento e a fissuração do concreto. Para consideração do concreto fissurado, utilizou-se o conceito de fissuras distribuídas. O uso da

curva de *Popovics-Saenz*, proposta por Kwon (2000), como relação uniaxial equivalente, permite a obtenção de ótimos resultados para o concreto simples. Entretanto, para elementos de concreto armado, a curva *Popovics-Saenz* não se mostrou adequada para considerar a colaboração do concreto entre fissuras (efeito de *tension-stiffening*). Assim propõe-se a utilização da curva de *Popovics-Saenz* para descrever apenas a resposta à compressão do concreto solicitado por cargas monótonas.

Para a resposta à tração do concreto, utiliza-se uma outra formulação, introduzindo-se um ramo descendente linear, como foi descrito no Capítulo 3. Esta relação constitutiva é a mesma que foi adotada por Prates Júnior (1992) para simular a colaboração do concreto entre as fissuras. A variável ε_{ctu} indica a deformação limite para a qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada. O valor limite da deformação ε_{ctu} deveria estar relacionado ao escoamento da armadura que atravessa a fissura, uma vez que após o escoamento não existe mais colaboração do concreto entre fissuras. Porém, por simplicidade adotou-se um valor fixo para ε_{ctu} . No presente estudo, para permitir um melhor ajuste com resultados experimentais adotou-se para a deformação ε_{ctu} o valor 0,01. O valor do parâmetro α_t depende do elemento a ser analisado, conforme foi apresentado no Capítulo 6. Para ensaios com concreto simples, o modelo numérico não considera o amolecimento por tração do concreto, considerando a contribuição do concreto para rigidez do elemento apenas até o momento de fissuração do concreto, ou seja, $\alpha_t = 0$.

O comportamento pós-pico foi ajustado para considerar os efeitos de confinamento e descrever a mudança na resposta do concreto quando submetido ao aumento de tensões laterais. Para simulação de cargas cíclicas, utilizou-se a curva de *Popovics-Saenz* modificada. Introduziram-se modificações nas coordenadas da origem e do pico desta curva, quando o concreto for submetido à descarga ou recarga. Utilizando-se o trabalho de Lee e Willam (1997), apresentou-se um procedimento para considerar a degradação da rigidez durante o processo cíclico através da introdução de um *ponto focal*. Para identificação dos processos de carga e descarga, determina-se uma função de carga F definida em termos das deformações uniaxiais equivalentes. Para a identificação do processo de descarga e recarga em um determinado ciclo, necessita-se definir uma outra função de carga local F_{local} , função das deformações uniaxiais equivalentes e das deformações no momento em que iniciou a descarga, em cada uma das três direções principais.

Os modelos foram implementados em um programa em elementos finitos desenvolvido inicialmente por Hinton (1988). Este programa utiliza elementos isoparamétricos hexaédricos lineares e quadráticos para a modelagem do concreto. Para representar as barras de armadura, estendeu-se para o caso tridimensional o modelo incorporado, proposto por Elwi e Hrudey (1989), e também implementado por Clure (1994). Este modelo incorporado possibilita uma disposição arbitrária das barras de aço no interior dos elementos de concreto, podendo considerar a utilização de barras retas ou curvas. Cada barra de armadura é considerada como uma linha rígida dentro do elemento de concreto, que resiste apenas a esforços axiais. Considera-se a hipótese de aderência perfeita entre o concreto e o aço, sendo a degradação da aderência considerada indiretamente através do ramo descendente linear introduzido nas curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes utilizadas para o concreto. Como este modelo considera que as barras de aço resistem apenas a esforços axiais, implementou-se um modelo constitutivo uniaxial para representar o comportamento do aço. A curva tensão-deformação adotada para o aço é elástica bilinear com endurecimento. A resposta cíclica do aço é obtida através do modelo proposto por Menegotto e Pinto (1973). Este modelo consegue representar bem o comportamento cíclico do aço, simulando a sua resposta não-linear, após alternância de carga.

Nos *Capítulos 3 e 4*, apresentaram-se diversos resultados comparativos com ensaios experimentais para demonstrar a validade dos modelos propostos para o concreto simples e para o aço.

As análises numéricas para o concreto simples foram realizadas utilizando tanto a superfície de ruptura de Willam-Warnke (1975) como a de Ottosen (1977). Para a grande maioria dos resultados, observou-se, para ambas, uma boa precisão com os resultados experimentais. Nos ensaios de compressão biaxial sob cargas monótonas, os resultados dos ensaios que utilizaram a superfície de ruptura de Willam-Warnke (1975) apresentaram cargas de ruptura maiores que as cargas de rupturas obtidas com a superfície Ottosen (1977), ficando estas últimas mais próximas dos resultados experimentais. Para as demais situações solicitadas por cargas monótonas (Kupfer, 1973), praticamente não foram observadas diferenças entre os resultados numéricos utilizando as superfícies de ruptura de Willam-Warnke (1975) ou de Ottosen (1977).

Além dos ensaios com cargas monótonas, apresentou-se também um ensaio

experimental realizado por Sinha et al. (1964) para comparação com o resultado do modelo numérico adotado para situações com cargas cíclicas em concreto simples. Sinha et al. (1964) realizaram ensaios experimentais para diferentes resistências do concreto em corpos-de-prova cilíndricos sujeitos à carga de compressão axial cíclica. Comparando com o resultado experimental, observou-se que o modelo adotado consegue representar bem a degradação da rigidez e da resistência do concreto quando submetido a diversos processos de carga, descarga e recarga. Apesar da boa concordância com o resultado experimental, o modelo numérico apresentou os laços de histerese (descarga-recarga) mais abertos que os experimentais, ocorrendo assim uma maior perda de energia que o ensaio experimental.

Para verificar a validade do modelo proposto por Menegotto e Pinto (1973), adotado para o aço, foram feitos alguns estudos comparativos entre os resultados numéricos obtidos pelo programa e os ensaios experimentais realizados por Kent e Park (1973) *apud* Balan et al. (1998), Panthaki (1991) *apud* Balan et al. (1998) e Seckin (1981) *apud* Elmorsi et al. (1998). Como o modelo bilinear é uma simplificação do modelo proposto por Menegotto e Pinto (1973), a presente tese limitou-se apenas à análise do modelo não-linear. A partir destes ensaios apresentados no Capítulo 5, observou-se que o modelo de Menegotto e Pinto (1973) consegue representar bem o comportamento cíclico do aço, simulando a sua resposta não-linear, após alternância de carga.

Analisando todos os estudos apresentados acima, pode-se dizer que os modelos constitutivos para representar o comportamento dos materiais (concreto e aço), apresentam uma boa precisão frente aos resultados experimentais para situações com cargas monótonas e cíclicas.

Para determinar a solução do sistema de equações não-lineares, resultante da aplicação do modelo de elementos finitos, utiliza-se o método de Newton-Raphson com rigidez inicial.

Para comprovar a eficiência do modelo numérico proposto nesta tese, realizaram-se também diversas simulações numéricas com peças de concreto armado. A verificação do modelo numérico proposto iniciou-se com tirantes de concreto armado. Primeiramente, apresentou-se um estudo comparando os resultados numéricos obtidos pelo modelo proposto e os valores determinados conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) para uma série com cinco tirantes de concreto armado. Em seguida, a partir de dados experimentais disponíveis, mostrou-se uma análise comparativa com uma série de ensaios experimentais

realizados por Rizkalla et al. (1983).

Para simular o comportamento de enrijecimento à tração em tirante de concreto armado, no modelo numérico considerou-se o coeficiente de redução da tensão de fissuração igual à $\alpha_t=0,4$. Optou-se por este valor depois da calibração do modelo numérico a partir dos diversos tirantes de concreto armado analisados.

Através destes ensaios com tirantes de concreto armado, observou-se uma ótima concordância entre os resultados numéricos e os resultados experimentais. Pôde-se observar que o modelo numérico proposto consegue simular bem o comportamento de enrijecimento à tração. Comprovou-se uma formação mais rápida da primeira fissura e uma conseqüente diminuição do efeito de enrijecimento à tração com o aumento da taxa de armadura.

Nestes ensaios pôde-se verificar também uma diferença entre os resultados do modelo apresentado nesta tese e aqueles determinados através da formulação proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993), logo após a formação da primeira fissura. Esta diferença pode ser justificada pela descontinuidade existente entre o ramo ascendente e o ramo descendente do modelo proposto para representar o comportamento à tração do concreto. Enquanto que o Código Modelo CEB-FIP 1990 (1993) utiliza um diagrama gradual para representar este comportamento à tração do concreto.

Na seqüência da verificação, compararam-se os resultados obtidos através do modelo computacional com valores determinados experimentalmente para vigas de concreto armado. Estes resultados experimentais foram apresentados por Bresler e Scordelis (1963) e referem-se a um estudo sobre a resistência ao esforço cortante de doze vigas de concreto armado.

Para a simulação numérica do comportamento de enrijecimento à tração em vigas de concreto armado, considerou-se o coeficiente de redução da tensão de fissuração igual à $\alpha_t=0,6$. Pode-se justificar a utilização de um valor maior para o coeficiente α_t com relação ao utilizado para os tirantes de concreto armado ($\alpha_t=0,4$), o fato das vigas possuírem uma menor taxa de armadura e assim um maior efeito de enrijecimento à tração, ou seja, um maior coeficiente de redução da tensão de fissuração.

As vigas da série OA (vigas sem estribos) romperam por corte, ocorrendo a ruptura imediatamente depois da formação da primeira fissura crítica. As vigas de maiores comprimentos de vãos (série 3) romperam por flexão, ocorrendo um pequena influência do cisalhamento. E as vigas de comprimentos de vãos intermediários (série 1 e 2) romperam por flexão e cisalhamento. Porém, como ainda não foram implementadas no programa rotinas para visualização gráfica tridimensional dos resultados, não foi possível a visualização gráfica destes resultados.

De um modo geral, obteve-se ótima correlação entre as respostas numéricas e os resultados experimentais de Bresler e Scordelis (1963). As cargas de ruptura obtidas pelo modelo numérico ficaram muito próximas das respostas experimentais para a maioria das vigas analisadas. Os maiores valores destas cargas de ruptura foram obtidos pelas vigas da série C, ou seja, as vigas com menores dimensões de seções transversais.

Exemplos com pilares de concreto armado confinados também foram apresentados, de modo a verificar a aplicabilidade do modelo desenvolvido a este tipo de situação em que a estrutura fica submetida a um estado triplo de tensões. Estes resultados experimentais foram apresentados por Razvi e Saatcioglu (1989), e se referem a um estudo sobre o ganho na carga de ruptura de pilares confinados através da utilização de estribos pouco espaçados.

Verificou-se que os resultados numéricos e experimentais são muito próximos. Estes resultados confirmam estudos prévios realizados por diversos autores, na medida em que se constata que a redução no espaçamento dos estribos, conduzindo a uma maior taxa de armadura transversal, resulta numa maior pressão de confinamento, melhorando a resistência dos pilares. Os pilares #3 e #16, cujas taxas de armaduras transversais são o dobro das taxas dos pilares #4 e #15, respectivamente, apresentaram resistências maiores que estes pilares menos confinados.

Apesar dos resultados em geral terem sido muito próximos, para o pilar #7 o resultado numérico apresentou o efeito de confinamento um pouco superestimado em comparação com o resultado experimental.

Em todos os ensaios (experimentais e numéricos), observou-se também uma melhora na ductilidade dos pilares. A ductilidade apresenta uma substancial importância na resistência das estruturas a determinados fenômenos da natureza, como por exemplo, o terremoto. Porém,

devido à natureza frágil do concreto simples, a ductilidade requerida é de difícil obtenção, especialmente em elementos com tensões altamente compressíveis (Razvi e Saatcioglu, 1989).

Por fim, a resposta à carga cíclica foi verificada, considerando a análise de uma parede de seção retangular de concreto armado. Estes resultados experimentais foram apresentados por Elmorsi et al. (1998) e referem-se a um estudo sobre o comportamento cíclico de paredes, realizado por Oesterle et al. (1978).

De um modo geral, obteve-se ótima correlação entre a resposta numérica e o resultado experimental ensaiado por Oesterle et al. (1978). Porém, o Método de Newton-Raphson não se mostrou muito estável para descrever o comportamento cíclico de elementos de concreto armado, apresentando problemas de convergência nos processos de descarga e recarga. Por isso, até o presente momento, não foi possível ensaiar numericamente todos os ciclos de histerese apresentados no comportamento desta parede de concreto armado solicitada por carga cíclica.

Através de todos os ensaios apresentados no *Capítulo 6*, de um modo geral, observou-se uma ótima concordância entre os resultados numéricos e aqueles obtidos através dos ensaios experimentais. Então, pode-se dizer que o modelo numérico consegue simular adequadamente o comportamento do concreto armado.

Mesmo tendo sido observado nos ensaios cíclicos uma ótima concordância entre os resultados numéricos e experimentais, sugere-se dar continuidade a estes estudos, realizando um número maior de comparações tanto com paredes de concreto armado quanto com outras peças estruturais.

7.2 SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA

Como sugestões para continuação da pesquisa, podem-se citar os itens mencionados abaixo:

O modelo proposto nesta tese consegue simular bem o comportamento de enrijecimento à tração. Como mencionado no *Capítulo 3*, este modelo é função de uma variável ε_{ctu} que indica a deformação limite para a qual a colaboração do concreto entre fissuras não deve mais ser considerada. Como também de um coeficiente α_f de redução da tensão de fissuração, onde o valor deste coeficiente depende do elemento a ser analisado. Seria interessante aprimorar este modelo para considerar a colaboração do concreto entre fissuras de maneira mais automatizada, levando em consideração o diâmetro das barras de armadura, taxa de armadura, inclinação das fissuras em relação às barras de armadura, espaçamento entre as barras e o número de camadas de estribos.

Também, para ampliar a aplicabilidade do modelo, seria importante a inclusão dos efeitos de deformações por fluência e retração do concreto para permitir a análise com cargas de longa duração.

Sabe-se que o comportamento de uma estrutura pode ser de amolecimento (*softening*) ou enrijecimento (*stiffening*), o caminho de equilíbrio pode ser estável ou instável, e a estrutura pode estar em carga ou descarga. Todos estes fenômenos são identificados pela ocorrência de pontos críticos na curva carga-deflexão. Para vencer os problemas numéricos associados com cada tipo de comportamento, o método de solução não-linear deve satisfazer três critérios. Primeiramente, o método deve se auto-adaptar às mudanças da direção do carregamento nos pontos limites. Além disso, a estabilidade numérica para as iterações deve ser mantida em todas as regiões, incluindo aquelas próximas aos pontos críticos. Finalmente, ajustes no tamanho dos passos de carga devem ser feitos automaticamente para refletir o comportamento *stiffening* ou *softening* da estrutura (Yang et al., 1990). Na presente tese, o Método de Newton-Raphson não se mostrou muito estável para vencer os problemas numéricos mencionados acima. Então, seria conveniente a implementação de um outro algoritmo para a resolução do sistema de equações não-lineares. Entre os diversos métodos apresentados na literatura técnica, podem-se citar o Método do Comprimento de Arco e o Método do Controle por deslocamentos generalizados (MCDG), entre outros.

Como mencionado no Capítulo 3, para determinação da resistência do concreto foram adotadas duas superfícies de ruptura para o concreto: a superfície de Ottosen (1977) e a superfície de Willam-Warnke (1975). Verificou-se uma certa instabilidade numérica causada pela imprecisão no cálculo de alguns valores das tensões de pico determinados nas direções em que não ocorrem aplicações de carga. Este problema provavelmente é decorrente do uso de determinadas funções trigonométricas existentes na linguagem Fortran, adotadas nas expressões para determinação das duas superfícies de ruptura. Além disto o procedimento para determinação das tensões principais correntes também utiliza estas funções. Sendo assim, seria conveniente estudar melhor esta questão da instabilidade numérica do modelo em função do uso de funções trigonométricas já existentes na linguagem Fortran. Este problema já foi minimizado, pela utilização de séries para determinação destas funções trigonométricas.

Seria interessante, também, introduzir no programa a possibilidade do armazenamento dos resultados parciais em determinadas etapas de carga, permitindo a reinicialização da análise em um dado momento, sem repetição dos cálculos já realizados e, conseqüentemente, reduzindo o tempo de processamento.

Para finalizar, são prioridades para a continuidade da pesquisa, o desenvolvimento de uma interface amigável para a entrada de dados do programa e a implementação de rotinas para visualização gráfica tridimensional dos resultados. E desta maneira, permitir uma maior e melhor análise dos resultados fornecidos pelo modelo tridimensional para análise de estruturas de concreto armado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **Finite element analysis of reinforced concrete structures II**. Proceedings of the International Workshop, ASCE/ACI 447, New York, 1991.
- ARAÚJO, J.M. **Curso de concreto armado: Volume 1**. Editora Dunas, 2ª edição, Rio Grande, 2003.
- ASSAN, A.E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. Editora da UNICAMP, 2ª edição, Campinas, 2003.
- BALAN, T.A.; FILIPPOU, F.C.; POPOV, E.P. Constitutive model for 3D cyclic analysis of concrete structures. **Journal of Engineering Mechanics**, ASCE, v. 123, n. 2, p. 143-153, 1997.
- BALAN T.A.; FILIPPOU F.C.; POPOV E.P. Hysteretic model of ordinary and high-strength reinforcing steel. **Journal of Structural Engineering**; v. 124, n. 3, p. 288-297, 1998.
- BALAN, T.A.; SPACONE, E.; KWON, M. A 3D hypoplastic model for cyclic analysis of concrete structures. **Engineering Structures**, v. 23, p. 333-342, 2001.
- BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. Prentice-Hall Inc., New Jersey, USA, 1996.
- BAZANT Z.P. Comment on orthotropic models for concrete and geomaterials. **Journal of Engineering Mechanics**, ASCE, v. 109, n. 3, p. 849-865, 1983.
- BOUZAIENE, A.; MASSICOTTE, B. Hypoelastic tridimensional model for nonproportional loading of plain concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, ASCE, v. 123, n. 11, p. 1111-1120, 1997.
- BRESLER, B.; SCORDELIS, A.C. Shear strength reinforced concrete beams. **ACI Journal**, v. 60, n. 1, p. 51-72, 1963.
- BUYUKOZTURK, O.; SHAREEF, S.S. Constitutive modeling of concrete in Finite element analysis. **Computers & Structures**, v. 21, n. 3, p. 581-610, 1985.
- CHEN, W.F.; HAN, D.J. **Plasticity for structural engineers**. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1988.
- CLAURE, J.D. **Análise tridimensional elasto-viscoplástica de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos**. Dissertação de Mestrado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, Agosto, 1994.

- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model code 1990**. Thomas Telford Services Ltda, 1993.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **RC elements under cyclic loading**. State-of-the-art report, Bulletin d'Information N^o 230, 1996.
- CRISFIELD, M.A. **Finite elements and solution procedures for structural analysis. Volume 1: Linear analysis**, Swansea, UK, Pineridge Press, 1986.
- DARWIN, D. E.; PECKNOLD, D.A. (1977). Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. **Journal of Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 103, n. EM2, p. 229-241, 1977.
- D'AVILA, V.M.R. **Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos**. Tese de Doutorado, PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, Fevereiro, 2003.
- DESAYI, P.; KRISHNAN, S. Equation for the stress-strain curve of concrete. **American Concrete Institute Journal, Proceedings**, v. 61, n. 3, p. 345-350, 1964.
- ELMORSI, M.; REZA KIANOUSH, M.; TSO, W.K. Nonlinear analysis of cyclically loaded reinforced concrete structures. **ACI Structural Journal**, v. 95, n. 6, p. 725-739, 1998.
- ELWI, A.E.; HRUDEY, M. Finite element model for curved embedded reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics**, New York, ASCE, v. 115, n. 4, p. 740-754, 1989.
- ELWI, A.A.; MURRAY, D.W. A 3D hypoelastic concrete constitutive relationship. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 105, n. EM4, p. 623-641, 1979.
- EVANS, R.J.; PISTER, K.S. Constitutive equations for a class of nonlinear elastic solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 2, n. 3, p. 427-445, 1966.
- FRANCA, G.F. **Modelos constitutivos para análise de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos**. Exame de qualificação (Doutorado), PPGEC/UFRGS, Porto Alegre, 2006.
- HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press, 1988.
- IMSL Fortran 90 MP Library. Fortran 90 Subrotines and Functions. Ed. 6.5, 2000.
- INGRAFFEA, A.R.; SAOMA, V.E. Fracture mechanics analysis of discrete cracking. In: **Colloquim on advanced mechanics of reinforced concrete**, Final report, Zurich: IABSE, p. 393-416, 1981.

- IRONS, B.M. Quadrature rules for brick based finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 3, p. 293-294, 1971.
- KENT, D.C.; PARK, R. Flexural members with confined concrete. **Journal of the Structural Division**, Proceedings of ASCE, v. 97 (ST7), p. 1964-1990, 1971.
- KENT, D.C.; PARK, R. Cyclic load behavior of reinforcing steel. **J. British Soc. for strain measurement**; v.9, n. 3, p. 98-103, 1973. (*apud* Balan et al., 1998)
- KUPFER, H. Das verhalten des betons unter mehrachsiger kurzzeitbelastung unter besonderer berücksichtigung der zweiachsigen beanspruchung. **Deutscher Ausschuss Fur Stahlbeton**, HEFT 229, p. 1-105, 1973.
- KUPFER, H.B.; HILSDORF, H.K.; RUSCH, H. Behavior of concrete under biaxial stress. **American Concrete Institute Journal**, v. 66, n. 8, p. 656-666, 1969.
- KWON, M. **Three dimensional finite element analysis for reinforced concrete members**. Thesis – Graduate School, University of Colorado, USA, 2000.
- KWON, M.; SPACONE, E. Three-dimensional finite element analyses of reinforced concrete columns. **Computers and Structures**, v. 80, p. 199-212, 2002.
- LEE, Y-H.; WILLAM, K. Mechanical properties of concrete in uniaxial compression. **ACI Materials Journal**, v. 94, n. 6, p. 457-471, 1997.
- MAESTRINI, S.R. **Behavior of reinforced concrete shell elements including tension-stiffening**. Thesis – Graduate School, North Carolina State University, USA, 1987.
- MARTINELLI, M. **Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGECC, 2003. 149 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- MENEGOTTO, M.; PINTO, P.E. Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending. **Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well Defined Repeated Loads**, IABSE Reports, v. 13, Lisboa, 1973.
- MENÉTREY, PH.; WILLAM, K.J. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. **ACI Structural Journal**, v. 92, n. 3, p. 311-318, 1995.
- MILFORD, R.V. The application of the rotating crack model to the analysis of reinforced concrete shells. **Computers and Structures**, v. 20, n. 1-3, p. 225-234, 1985.

- MOON, J. **Time dependent analysis of behavior and strength for prestressed concrete members with bonded and unbonded tendons**. Dissertation (PhD) – Graduate School, University of Texas, Austin, 1994.
- NGO, D.; SCORDELIS, A.C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. **Journal of American Concrete Institute**, v. 65, n. 3, p. 152-163, 1967.
- OESTERLE, R.G.; FIORATO, A.E.; JOHAL, J.E.; CARPENTER, H.G.; RUSSEL, H.G.; CORLEY, W.G. Earthquake resistance structural walls – Tests of isolated walls – Phase II. **SPCA Construction Technology Laboratory / National Science Foundation, Portland Cement Association**, Washington, 1978. (*apud* Elmorsi et al., 1998)
- OÑATE, E. **Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos: Análisis estático lineal**, Centro internacional de métodos numéricos en ingeniería, Barcelona, España, 2ª edição, 1995.
- OTTOSEN, N.S. A failure criterion for concrete. **Journal of Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 103, n. EM4, p. 527-627, 1977.
- PALANISWAMY, R.; SHAH, S.P. Fracture and stress-strain relationship of concrete under triaxial compression. **Journal of Structural Division**, ASCE 100 (ST5), p. 901-916, 1974. (*apud* Chen e Han, 1988)
- PANTHAKI F.D. **Low cycle fatigue behavior of high strength and ordinary reinforcing steels**. MS thesis, Department of Civil Engineering, State University of New York at Buffalo, New York, 1991. (*apud* Balan et al., 1998)
- PETERSON, P.E. **Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials**. Report No TVBM-1106, Division of Building Materials, University of Lund, Lund, Sweden, 1981. (*apud* Chen e Han, 1988)
- POPOVICS, S. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 3, n. 5, p. 583-599, 1973.
- PRATES JÚNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, CPGEC, 1992. 130 p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- RAMBERG, R.; OSGOOD, W.R. Description of stress-strain curves by three parameters. Technical Note 902, **National Advisory Committee for Aeronautics, N.A.C.A.**, 1943.
- RAZVI, S. R., SAATCIOGLU, M. Confinement of reinforced columns with welded wire fabric. **ACI Structural Journal**, v. 86, n. 5, p. 615-623, 1989.

- REAL, M.V. **Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob o estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos.** Tese de Doutorado, PPGE/UFGRS, Porto Alegre, Junho, 2000.
- RICHART, F. E., BRANDTZAEG, A., BROWN, R. L. **The failure of plain and spirally reinforced concrete in compression.** Bulletin 190, Univ. of Illinois Engineering Experimental Station, Champaign, Ill, 1929.
- RIZKALLA, L.S; HWANG, L.S.; EL SHAHAWI, M. Transverse reinforcement effect on cracking behaviour of R.C. members. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 10, n. 4, p. 566-581, 1983.
- SAENZ, L.P. Discussion of the paper: Equation for the stress-strain curve of concrete, by P. Desayi and S. Krishman. **American Concrete Institute Journal**, Proceedings, v. 61, n. 9, p. 1229-1235, 1964.
- SANTAROSA, D.; CAMPOS, A.; CAMPAGNOLO, J. L.; BEBER, A. J. Desempenho de elementos comprimidos de concreto confinados com fibra de carbono. **Conpat 2001 – VI Congresso Iberoamericano de Patologia de Las Construcciones y VIII Congreso de Control de Calidad**, 2001.
- SANTOS, M.I.G; KLEIN, S.P. **Análise matricial de estruturas de barras pelo método da rigidez.** Caderno Técnico, CT-66, Porto Alegre – UFRGS, 1984.
- SECKIN M. **Hysteretic behavior of cast-in-place exterior beam-column sub-assemblies.** PhD thesis, University of Toronto, 1981. (*apud* Elmorsi et al., 1998)
- SILVA, S.J.H. **Análise de estruturas de concreto armado sujeitas à corrosão de armadura por cloretos através do método dos elementos finitos.** Dissertação de Mestrado, PPGE/UFGRS, Porto Alegre, Agosto, 2003.
- SINHA, B.P.; GERSTLE, K.H.; TULIN, L.G. Stress-strain relations for concrete under cyclic loading. **ACI Journal**, Proceedings, v. 61, n. 2, p. 195-211, 1964.
- SMITH, S.S.; WILLAM K.J.; GERSTLE, K.H.; STURE S. Concrete over the top, or: is there life after peak?. **ACI Material Journal**, v. 86, n. 5, p. 491-497, 1989.
- SORIANO, H.L.; LIMA S.S. **Método de elementos finitos em análise de estruturas**, Universidade de São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 2003.
- VECCHIO, F.J. Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes. **ACI Structural Journal**, v. 86, n. 1, p. 26-35, 1982.
- WILLAM, K.J.; WARNKE, E.P. Constitutive models for the triaxial behavior of concrete. **International Association of Bridge Structures, Proceeding**, v. 19, p. 1-30, 1975.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points”, **AIAA Journal.**, vol. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. **The finite element method. Volume 2: Solid Mechanics**, 5^a edition, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.