MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA UNIDIMENSIONAL EM GEOMETRIA CARTESIANA EM NUVENS PELA TRANSFORMADA DE LAPLACE

por

Betine Rost

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, março de 2008.

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA UNIDIMENSIONAL EM GEOMETRIA CARTESIANA EM NUVENS PELA TRANSFORMADA DE LAPLACE

por

Betine Rost

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof^a. Dr^a. Cynthia Feijó Segatto

Aprovada por:

Prof. Dr. Augusto Vieira Cardona (PUCRS)

Prof^a. Dr^a. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez (UFPel)

Prof. Dr. Volnei Borges (PROMEC/UFRGS)

Prof. Dr. Flávio José Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 27 março de 2008.

.

À minha família, em especial

a meu namorado, Guilherme,

e aos meus pais, Nicolina e Eldo.

AGRADECIMENTOS

A amiga e orientadora Cynthia pela oportunidade da realização deste trabalho, pelo conhecimento transmitido, assim como pela sua orientação durante este período.

Aos meus pais Eldo e Nicolina que sempre me deram o apoio necessário para que pudesse estudar.

Aos demais amigos e colegas pela amizade que de alguma forma direta ou indireta contribuíram na realização deste trabalho.

Ao CNP_q *pelo suporte financeiro e ao PROMEC representado em seu corpo de funcionários e docentes.*

Finalmente meu namorado Guilherme, pelo incentivo, paciência e muita compreensão para realização deste trabalho, apesar da distância.

RESUMO

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA UNIDIMENSIONAL EM GEOMETRIA CARTESIANA EM NUVENS PELA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Neste trabalho apresentamos uma solução analítica para problemas de transferência radiativa em uma placa para névoa e nuvem, respectivamente, com grau de anisotropia 82 e 299, pela nova versão do método LTS_N que usa a decomposição espectral para transformar a matriz LTS_N em uma matriz diagonal. Por esse procedimento, resolvemos de uma forma direta, a transformada de Laplace de um sistema simbólico de equações lineares, bem como a inversão do fluxo angular transformado. Isto representa que uma solução analítica é determinada com uma significante redução do tempo computacional. Para validar a nova formulação LTS_N, são apresentadas simulações numéricas e comparações com os resultados disponíveis na literatura.

ABSTRACT

SOLUTION OF THE ONE-DIMENSIONAL RADIATIVE TRANSFER EQUATION WITH CARTESIAN GEOMETRY IN CLOUDS BY LAPLACE TRANSFORM

In this work we report an analytical solution for radiative transfer problems in a slab for Haze and Cloud, respectively, with anisotropy of degree 82 and 299, by the new version of the LTS_N spectral decomposition method based in a transformation of the LTS_N matrix in a diagonal matrix. By this procedure is a straightforward task to solve the Laplace transform symbolic linear system as well to invert the angular flux. It turns out that an analytical solution is determined, with a significant reduction of the computational time. To validate the new formulation, we also present numerical simulations and comparisons with results available in the literature.

ÍNDICE

LISTA DE SÍMBOLOS

1. Caracteres Arábicos

$\mathbf{A}$:	Matriz numérica de ordem N.
a_{ij}:	Elementos da matriz A.
a_{ij}^m:	Elementos da matriz A^m.
$Adj(S_k)$:	Matriz adjunda da matriz S_k.
$\mathbf{B}(x)$:	Matriz transformada inversa de $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$.
$\mathbf{B}^m(x)$:	Matriz transformada inversa de $(s\mathbf{I}-\mathbf{A}^m)^{-1}$.
$\mathbf{C}^m(x)$:	Vetor convolução do vetor $\mathbf{B}^m(x)$ com o vetor $\mathbf{Q}^m(x)$.
$\mathbf{D}$:	Matriz diagonal dos autovalores de $\mathbf{A}$.
$Det(S_k)$:	Determinate da matriz S_k.
d_i:	Elementos da matriz $\mathbf{D}$.
$E^+(x)$:	Matriz diagonal dos autovalores positivos.
$E^-(x)$:	Matriz diagonal dos autovalores negativos.
$e_{ij}^+(x)$:	Elementos da matriz $E^+(x)$.
$e_{ij}^-(x)$:	Elementos da matriz $E^-(x)$.
f:	Intensidade de radiação incidente em $x=0$
f_n:	Intensidade de radiação incidente em $x=0$ na direção μ_n.
$f(\mu)$:	Intensidade de radiação incidente na fronteira $x=0$.
g:	Intensidade de radiação incidente em $x=x_0$
g_n:	Intensidade de radiação incidente em $x=x_0$ na direção μ_n.
$g(\mu)$:	Intensidade de radiação incidente na fronteira $x=x_0$.
$\mathbf{H}(x)$:	Vetor convolução da matriz $\mathbf{B}(x)$ com o vetor $\mathbf{Q}(x)$.
$\mathbf{I}$:	Matriz identidade.
$\mathcal{L}$:	Operador da transformada de Laplace.
$\mathcal{L}^{-1}$:	Operador da transformada inversa de Laplace.
N:	Ordem da quadratura de Gauss.
$P(\mu)$:	Vetor coluna de ordem N.
$P_\ell(\mu)$:	Polinômios de Legendre.

$P_\ell^m(\mu)$: Funções associadas de Legendre.

$p(cos\Theta)$: Função de fase.

$\mathbf{Q}(x)$: Vetor dos termos fonte.

$\mathbf{Q}(x,\mu)$: Termo fonte na posição x e direção μ.

$\overline{\mathbf{Q}}(s)$: Transformada de Laplace do vetor $\mathbf{Q}(x)$.

$\mathbf{Q}^m(x)$: Termo fonte na posição x e na direção μ_m.

$\overline{\mathbf{Q}}^m(s)$: Termo fonte transformado na direção μ_m.

s: Parâmetro complexo proveniente da transformada de Laplace.

S_k: Seqüência de matrizes.

$\mathbf{T}$: Matriz triangular superior.

t_{ii}: Zeros de $\mathbf{Q}(s)$.

$\mathbf{U}$: Matriz unitária.

$\mathbf{V}$: Vetor coluna.

x: Espessura ótica.

$\mathbf{X}$: Matriz dos autovetores de $\mathbf{A}$.

x_0: Espessura da placa.

w_k: Pesos da quadratura de Gauss-Legendre.

2. Caracteres Gregos

β_ℓ : Coeficientes da expansão em polinômio de Legendre.

β_ℓ^m: Coeficientes da expansão em Polinômios de Legendre da função de fase.

η_M: Novas direções discretas, provenientes da "Inclusão dos Nós Fictícios".

γ_{N+M}: Direções da nova quadratura.

μ: Variável angular.

μ_k: Raízes do polinômio de Legendre.

ω: Termo de espalhamento simples do meio(albedo).

ω_n: Termo de espalhamento simples do meio(albedo) na direção n.

$\mathbf{\Psi}(x)$: Vetor intensidade de radiação.

$\mathbf{\Psi}_1(x)$: Intensidade de radiação das direções positivas de μ.

$\mathbf{\Psi}_2(x)$:	Intensidade de radiação das direções negativas de μ.
$\overline{\mathbf{\Psi}}(s)$:	Intensidade de radiação transformada.
$\overline{\mathbf{\Psi}}^m(s)$:	Intensidade de radiação transformada na direção μ_m.
$\mathbf{\Psi}^m(x)$:	Vetor intensidade de radiação.
$\psi_k(x)$:	Intensidade de radiação na posição x e na direção μ_k.
$\psi(x,\mu)$:	Intensidade de radiação na direção μ na posição x.
$\psi(x,\mu,\varphi)$:	Intensidade de radiação.
$\psi^i(x,\mu)$:	Componentes de Fourier.
θ:	Ângulo polar.
Θ:	Ângulo formada entre a direção do fóton antes e depois da colisão.
φ:	Ângulo azimutal.
φ_r:	Ângulo de referência azimutal.
φ_0:	Ângulo de incidência de radiação solar.
ξ:	Vetor desconhecido.

ÍNDICE DE TABELAS

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho, vamos considerar o problema de transferência radiativa sem simetria azimutal em uma camada atmosférica homogênea, na faixa de energia do espectro da luz visível em nuvens e nevoeiros, a qual está sujeita a intensidades de radiação incidentes na fronteira. Em casos reais, a solução do problema de transferência radiativa em nuvens não é simples e desta forma precisamos recorrer à modelagem numérica. Existem duas grandes correntes para a resolução deste problema. A primeira é uma abordagem probabilística, como o método de Monte Carlo, que envolve a simulação direta de problemas físicos através de sua natureza estocástica. A segunda abordagem é chamada de determinística e está embasada em uma modelagem matemática prévia do problema físico. Aqui iremos considerar apenas os métodos determinísticos.

As primeiras técnicas de solução do problema de transferência radiativa em atmosferas com espalhamento tiveram início na década de 40, com Ambarzumian [Ambarzumian, 1944] e Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1946] no estudo de problemas de astrofísica. Em seu livro, Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1960], usando o princípio da invariância e o método de ordenadas discretas, obteve inúmeros resultados formais para problemas de transferência radiativa sem simetria azimutal. Devido à complexidade do problema e a enorme quantidade de cálculos requerida, apenas na década de 60, com o surgimento dos grandes computadores, problemas mais realistas puderam ser resolvidos. Desde então, muitos métodos foram desenvolvidos. Uma boa revisão sobre métodos determinísticos pode ser encontrada nos trabalhos de Lenoble [Lenoble, 1977] e [Chalhoub et al., 2003].

Aqui, citamos alguns dos métodos usados na solução do problema de transferência radiativa considerando dependência azimutal. O método F_N foi introduzido por Siewert [Siewert, 1978] na resolução de problemas de transferência radiativa para o caso de problemas com simetria azimutal. Este método consiste na aplicação da transformada de Laplace em domínio finito na variável espacial e no uso da ortogonalidade das funções generalizadas de Case. Este procedimento unido ao método da colocação gera um sistema linear para o cálculo do fluxo emergente na fronteira. Na década de 80, este método foi estendido por Devaux e Siewert [Devaux and Siewert, 1980] para a solução de problemas sem simetria azimutal. Garcia e Siewert [Garcia and Siewert, 1985] utilizaram o método F_N para resolver problemas de transferência radiativa, considerando condição de contorno genérica, fonte interna e alto grau de anisotropia.

Uma aproximação clássica da equação de transferência radiativa é a P_N, que foi primeiramente sugerida por Jeans [Jeans, 1917]. Esta aproximação consiste na expansão da dependência angular da função intensidade de radiação em harmônicos esféricos, o que, em se tratando de geometria plana, reduz-se a expansão em polinômios de Legendre. E-xistem muitos trabalhos sobre a solução das equações P_N, entre eles citamos os trabalhos de Barichello et al. [Barichello et al., 1997], Benassi et al. [Benassi et al., 1984] e Evans [Evans, 2007], que resolvem, por esta aproximação, problemas de transferência radiativa sem simetria azimutal.

A aproximação de Ordenadas Discretas S_N, foi desenvolvida por Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1960] no estudo de astrofísica que consiste na expansão do termo integral da equação de transferência radiativa por quadratura de Gauss de ordem N e aplicação do método da colocação na variável angular, considerando os pontos de colocação como as N raízes do polinômio de Legendre de grau N. Existe uma vasta literatura sobre métodos que encontram a solução das equações S_N de transferência radiativa. Entre elas citamos os trabalhos de: Conklin e Stamnes [Conklin and Stamnes, 1984], Barichello e Siewert [Barichello and Siewert 2000], Chalhoub e Garcia [Chalhoub et al., 1998], Chalhoub [Chalhoub, 2003] e Brancher et al. [Brancher et al., 1999].

Dentre todos os métodos existentes para resolução das equações S_N nesta dissertação, usaremos o método LTS_N, inicialmente proposto por Barichello e Vilhena [Barichello and Vilhena, 1993]. O método LTS_N (Laplace transform S_N) resolve de forma analítica a aproximação S_N da equação de transporte unidimensional, aplicando a transformada de Laplace no sistema S_N de equações diferenciais ordinárias, obtendo assim um sistema algébrico de N equações e N incógnitas, dependente de um parâmetro complexo s. Este sistema é então resolvido de forma analítica para a intensidade de radiação transformada. A intensidade de radiação é encontrada de forma analítica, invertendo a matriz LTS_N e calculando sua transformada inversa.

Historicamente muitas formas de inversão da matriz LTS_N, que preservam a analiticidade do método, tem sido propostas. Primeiramente Barichello [Barichello, 1992] inverteu a matriz LTS_N usando diretamente a definição de matriz inversa. Esta formulação foi obtida apenas para o caso de problemas isotrópicos e linearmente isotrópicos. A generalização deste método de inversão para problemas de maior grau de anisotropia foi feito por Oliveira [Oliveira, 1993], porém a implementação computacional se mostrou inviável. Em seguida Segatto e Vilhena [Segatto e Vilhena, 1994] resolveram problemas de grau de anisotropia maior usando para inversão da matriz LTS_N o algoritmo de Trzaska [Trzaska, 1987], que foi usado anteriormente por Streck [Streck, 1993] na solução LTP_N do problema de transporte em uma placa, que através da aplicação do Teorema de Cayley-Hamilton inverte qualquer matriz do tipo $s\mathbf{B}-\mathbf{A}$. Este algoritmo usa potenciação de matrizes, apresentando um número muito grande de operações não sendo próprio para uso computacional. A seguir, Brancher et al. [Brancher et al., 1998] através de aplicação de operações elementares sobre a matriz LTS_N isotrópica, reduziram o problema de inversão da matriz $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ para a inversão de uma matriz triangular superior. Esta matriz triangular superior é então invertida de forma recursiva usando particionamento e a inversa da transformada de Laplace é obtida usando Teorema de Heaviside. Seguindo esta mesma idéia, Segatto et al., [Segatto et al., 1999a] procederam a triangularização da matriz LTS_N associada a um problema anisotrópico usando a decomposição de Schur sobre a matriz $\mathbf{A}$. A matriz triangular superior obtida por esta decomposição é invertida recursivamente e a transformada inversa de Laplace é obtida através da aplicação do Teorema de Heaviside. Usando este procedimento foram resolvidos problemas de transferência radiativa com alta ordem de anisotropia (M=82 e M=299) [Segatto et al., 1999a], [Brancher et al., 1999]. Finalmente, Segatto et al. [Segatto et al., 1999b], levando em conta que os autovalores da matriz $\mathbf{A}$, associada ao problema unidimensional de transferência radiativa, são todos distintos, fizeram sua decomposição espectral, reduzindo desta forma o problema de inversão da matriz LTS_N a inversão de uma matriz diagonal. Devemos ainda observar que Gonçalves et al. [Gonçalves et al, 2000], usado a propriedade da invariância das direções discretas reformularam a solução LTS_N para a solução de problemas com alta ordem de quadratura e considerando qualquer tipo de termo fonte integrável.

A solução LTS_N para o problema unidimensional de transferência radiativa sem simetria azimutal foi estendido por Segatto e Vilhena [Segatto e Vilhena, 1994] e [Segatto, 1995]. Neste trabalho, foi resolvido um problema com grau de anisotropia 8 e o método usado para inversão da matriz LTS_N foi o algoritmo de Trzaska. Com a generalização do método de inversão da matriz LTS_N pela decomposição de Schur, Brancher et al. [Brancher et al., 1998] resolveram problemas propostos por Lenoble [Lenoble, 1977] com grau de anisotropia 82 e 299. Simch et al. [Simch et al, 2006] e [Simch, 2004] generalizaram o problema de transferência radiativa sem simetria azimutal para problemas que incluem polarização.

O principal objetivo desta dissertação consiste na reformulação do método LTS_N em problemas sem simetria azimutal de transferência radiativa em nuvens, os quais tem como característica principal o alto grau de anisotropia. Assim, interessados na diminuição do tempo computacional deste tipo de problema, vamos substituir o método recursivo associado à decomposição de Schur, usado anteriormente para inversão da matriz LTS_N, pelo método da decomposição espectral.

Para cumprirmos o objetivo proposto, organizamos o trabalho da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos o método LTS_N para solução do conjunto de equações S_N com simetria azimutal, apresentando os métodos recursivos associados à decomposição de Schur, usado por Brancher [Brancher, 1998] para resolver problemas sem simetria azimutal, e o método da decomposição espectral da matriz LTS_N que usaremos nesta dissertação; no capítulo 3, procedemos a decomposição do problema sem simetria azimutal em um conjunto de problemas com simetria azimutal, expandindo a solução do problema sem simetria azimutal em uma série de Fourier truncada no angulo azimutal, conforme sugerido por Hill [Hill, 1972]; no capítulo 4, apresentamos técnicas de interpolação angular para o cálculo do fluxo angular em direções distintas; no capítulo 5, apresentamos resultados numéricos de problemas com grau de anisotropia 82 e 299, bem como a comparação na formulação do método LTS_N, entre a aplicação do método da convolução com interpolação angular DNI e a do método dos coeficientes a determinar com interpolação angular considerando μ contínuo. Por fim, no capítulo 6, as conclusões do trabalho e as sugestões de continuidade do mesmo são apresentadas.

2. O MÉTODO LTS_N

Neste capítulo, apresentamos o método LTS_N que resolve a aproximação S_N da equação de transferência radiativa com simetria azimutal unidimensional aplicando a transformada de Laplace no sistema S_N de equações diferenciais ordinárias, obtendo assim um sistema algébrico de N equações e N incógnitas, dependente de um parâmetro complexo s. A intensidade de radiação é encontrada de forma analítica invertendo a matriz LTS_N e calculando sua transformada inversa.

2.1 Problema de Transporte com Simetria Azimutal

Nesta seção, vamos considerar a equação de transferência radiativa unidimensional, estacionária, com simetria azimutal, monoenergética em geometria cartesiana descrita por:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,\mu) + \psi(x,\mu) = \frac{\omega}{2}\sum_{\ell=0}^{L}\beta_\ell P_\ell(\mu)\int_{-1}^{1}P_\ell(\mu')\psi(x,\mu')\,d\mu' + Q(x,\mu) \tag{2.1}$$

e pelas condições de contorno:

$$\psi(0,\mu) = f(\mu), \quad \text{se} \quad \mu > 0 \tag{2.2}$$

e

$$\psi(x_0,\mu) = g(\mu), \quad \text{se} \quad \mu < 0. \tag{2.3}$$

Na equação de transferência temos que:

- x é a variável espacial que varia entre o início e o final da placa, ou seja, $x \in [0, x_0]$;
- $\mu = \cos\theta$, onde θ é o ângulo polar, e varia no intervalo [-1,1];

- $\omega \in [0,1]$ é o termo de espalhamento simples do meio (albedo),
- $Q(x,\mu)$ é uma fonte externa de partículas;
- $\psi(x,\mu)$ é a intensidade de radiação em x na direção μ;
- $f(\mu)$ e $g(\mu)$ são as intensidades de radiação incidentes conhecidas nas fronteiras do domínio, nas direções positiva e negativa, respectivamente.

Para obtermos a aproximação S_N do problema acima, primeiramente aproximamos seu termo integral por quadratura de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(\mu')\psi(x,\mu')\,d\mu' \simeq \sum_{k=1}^{N} P_\ell(\mu_k)\psi_k(x)\mathrm{w}_k \tag{2.4}$$

onde μ_k e w_k são raízes e pesos do polinômio de Legendre de grau N e $\psi_k(x) = \psi(x,\mu_k)$. Depois, aplicamos o método da colocação sobre a Eq.(2.1) considerando como "função teste" a delta de Dirac usando como pontos de colocação as N raízes do polinômio de Legendre $P_N(\mu)$. Desta forma obtemos o seguinte conjunto de equações nas direções discretas

$$\frac{d}{dx}\psi_n(x) + \frac{\psi_n(x)}{\mu_n} = \frac{\omega}{2\mu_n}\sum_{\ell=0}^{L}\beta_\ell P_\ell(\mu_n)\cdot\sum_{k=1}^{N} P_\ell(\mu_k)\psi_k(x)\mathrm{w}_k + \frac{Q_n(x)}{\mu_n} \tag{2.5}$$

para $n = 1,2,\ldots,N$, com as condições de contorno

$$\begin{aligned} \psi_n(0) &= f_n \quad , \quad \text{se} \quad \mu_n > 0 \\ \psi_n(x_0) &= g_n \quad , \quad \text{se} \quad \mu_n < 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $Q_n(x) = Q(x,\mu_n)$. Conforme é usual na literatura, as direções discretas são ordenadas de forma decrescente

$$\mu_N < \ldots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < \ldots < \mu_1. \tag{2.7}$$

Neste ponto, vamos reescrever as equações S_N descritas pelo problema (2.5) na forma matricial, como:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{\Psi}(x) - \mathbf{A}\mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{Q}(x) \tag{2.8}$$

onde A representa uma matriz quadrada de ordem N definida por:

$$a_{i,j} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\mu_i} + \dfrac{\omega \mathrm{w_j}}{2_{\mu_i}} \left[\displaystyle\sum_{\ell=0}^{L} \beta_\ell P_\ell(\mu_i) P_\ell(\mu_i) \right], & \text{se} \quad i = j \\ \\ \dfrac{\omega \mathrm{w_j}}{2_{\mu_i}} \left[\displaystyle\sum_{\ell=0}^{L} \beta_\ell P_\ell(\mu_i) P_\ell(\mu_j) \right], & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}, \tag{2.9}$$

$Q(x)$ é um vetor fonte de ordem N definido por:

$$\mathbf{Q}(x) = \left[\frac{Q_1(x)}{\mu_1}, \frac{Q_2(x)}{\mu_2}, \ldots, \frac{Q_N(x)}{\mu_N} \right]^T \tag{2.10}$$

e o vetor intensidade de radiação é um vetor de ordem N definido por,

$$\mathbf{\Psi}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}_1(x) \\ \mathbf{\Psi}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_{\frac{N}{2}}(x) \\ \psi_{\frac{N}{2}+1}(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Para facilitar a notação na Eq.(2.11), a intensidade de radiação é dividida em dois sub-vetores de ordem $N/2$, onde o primeiro $\mathbf{\Psi}_1(x)$ representa a intensidade de radiação das direções positivas e o segundo $\mathbf{\Psi}_2(x)$ representa a intensidade de radiação das direções negativas de μ. Com esta notação, as condições de contorno podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}_1(0) &= \mathbf{f} \\ \mathbf{\Psi}_2(x_0) &= \mathbf{g} \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_{N/2}]^T$ e $\mathbf{g} = [g_{N/2+1}, g_{N/2+2}, \ldots, g_N]^T$.

O método LTS_N, primeiramente consiste na aplicação da transformada de Laplace sobre a variável espacial desta equação, criando assim uma sistema linear de equações algébricas de N incógnitas e N equações representadas por:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\overline{\mathbf{\Psi}}(s) = \mathbf{\Psi}(0) + \overline{\mathbf{Q}}(s), \tag{2.13}$$

onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade de ordem N, "s" denota um parâmetro complexo e a barra representa a transformada de Laplace. Isto é, $\overline{\mathbf{\Psi}}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{\Psi}(x)]$ e $\overline{\mathbf{Q}}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{Q}(x)]$. Resolvendo a intensidade de radiação transformada da Eq.(2.13), temos:

$$\overline{\mathbf{\Psi}}(s) = \big(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\big)^{-1}\mathbf{\Psi}(0) + \big(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\big)^{-1}\overline{\mathbf{Q}}(s). \tag{2.14}$$

Agora para encontrarmos a intensidade de radiação basta aplicarmos a transformada inversa de Laplace na Eq.(2.14), isto é:

$$\mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{\Psi}(0) + \mathbf{H}(x), \tag{2.15}$$

onde

$$\mathbf{B}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\big(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\big)^{-1}\right], \tag{2.16}$$

e

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{B}(x)*\mathbf{Q}(x) = \int_0^x \mathbf{B}(x-\xi)\mathbf{Q}(\xi)d\xi. \tag{2.17}$$

Observando na Eq.(2.15) podemos notar que apenas conhecemos as $N/2$ primeiras componentes do vetor inicial $\mathbf{\Psi}(0)$, isto é, $\mathbf{\Psi}_1(0)$ é conhecida, mas $\mathbf{\Psi}_2(0)$ não é. Assim, para encontrarmos $\mathbf{\Psi}_2(0)$, primeiramente reescrevemos a solução definida por (2.15) como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}_1(x) \\ \mathbf{\Psi}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}(x) & \mathbf{B}_{12}(x) \\ \mathbf{B}_{21}(x) & \mathbf{B}_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}_1(0) \\ \mathbf{\Psi}_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(x) \\ \mathbf{H}_2(x) \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

a seguir fazemos $x = x_0$ em (2.18) e, usando as $N/2$ últimas equações deste sistema obtemos que

$$\mathbf{\Psi}_2(x_0) = \mathbf{B}_{21}(x_0)\mathbf{\Psi}_1(0) + \mathbf{B}_{22}(x_0)\mathbf{\Psi}_2(0) + \mathbf{H}_2(x_0), \tag{2.19}$$

como os vetores $\mathbf{\Psi}_1(0)$, $\mathbf{\Psi}_2(x_0)$ e $\mathbf{H}_2(x_0)$ são conhecidos, podemos calcular o sub-vetor $\mathbf{\Psi}_2(0)$ da seguinte forma

$$\mathbf{\Psi}_2(0) = \mathbf{B}_{22}^{-1}(x_0)\Big[\mathbf{\Psi}_2(x_0) - \mathbf{B}_{21}(x_0)\mathbf{\Psi}_1(0) - \mathbf{H}_2(x_0)\Big], \tag{2.20}$$

logo a solução da Eq.(2.15) está completamente determinada.

2.2 Métodos de Inversão da Matriz LTS_N

Para mantermos a analiticidade do método LTS_N, muitos métodos para a inversão da matriz LTS_N, $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, já foram estudados. Um dos primeiros foi Barichello [Barichello, 1992] que propôs um algoritmo utilizando a estrutura da matriz LTS_N para espalhamento linearmente anisotrópico e o conceito de matriz inversa. Esta formulação foi expandida para anisotropia de qualquer grau por Oliveira [Oliveira, 1993] e Oliveira e Barichello [Oliveira and Barichello, 1993]. Segatto e Vilhena [Segatto e Vilhena, 1994] usaram a formulação desenvolvida por Tzarska [Trzaska, 1987] para a inversão da matriz. Neste trabalho, vamos discutir dois métodos de inversão. O primeiro é um método recursivo associado à decomposição de Schur da matriz $\mathbf{A}$. Este método foi usado por Brancher [Brancher, 1998] para resolver problemas sem simetria azimutal. O segundo método que apresentamos é o método da diagonalização, o qual será empregado nesta dissertação para resolução de problemas sem simetria azimutal.

2.2.1 Método Recursivo Baseado na Decomposição de Schur

Para explicarmos este método, consideremos a matriz $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada de ordem N. O Teorema de Schur, [Golub et al., 1989], garante que toda matriz quadrada $\mathbf{A}$ pode ser decomposta na seguinte forma,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^H, \tag{2.21}$$

onde $\mathbf{U}$ representa uma matriz unitária, isto é, $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$, $\mathbf{T}$ é uma matriz triangular superior e $\mathbf{U}^H$ representa a matriz hermitiana de $\mathbf{U}$, sendo que $\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^T$, quando $\mathbf{U}$ é uma matriz real. Desta forma, podemos simplificar a inversão da matriz cheia $\big(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\big)^{-1}$ para a inversão de uma matriz triangular do seguinte modo:

$$\begin{array}{l} \big(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\big)^{-1} = \big(s\mathbf{U}\mathbf{U}^H - \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^H\big)^{-1} = \\ \big(\mathbf{U}(s\mathbf{I}-\mathbf{T})\mathbf{U}^H\big)^{-1} = \mathbf{U}\big(s\mathbf{I}-\mathbf{T}\big)^{-1}\mathbf{U}^H \end{array}. \tag{2.22}$$

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\big(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\big)^{-1}\right\} = \mathbf{U}\mathcal{L}^{-1}\left\{\big(s\mathbf{I}-\mathbf{T}\big)^{-1}\right\}\mathbf{U}^H. \tag{2.23}$$

Devemos observar algumas importantes considerações:

1ª) A matriz $(s\mathbf{I}-\mathbf{T})$ tem a forma

$$s\mathbf{I}-\mathbf{T} = \begin{bmatrix} s-t_{11} & -t_{12} & \cdots & -t_{1N-1} & -t_{1N} \\ 0 & s-t_{22} & \ddots & -t_{2N-1} & -t_{2N} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & s-t_{NN} \end{bmatrix}; \tag{2.24}$$

2ª) o determinante desta matriz é dado por:

$$det(s\mathbf{I}-\mathbf{T}) = \prod_{i=1}^{N}(s-t_{ii}); \tag{2.25}$$

3ª) a inversão da matriz bloco a seguir pode ser expressa da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{E}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{2.26}$$

onde $\mathbf{0}$ representa uma matriz nula e supondo que as matrizes $\mathbf{C}^{-1}$ e $\mathbf{E}^{-1}$ existem.

Para calcularmos a inversa da matriz representada pela Eq.(2.24), vamos construir uma sequência de matrizes $\mathbf{S}_k$ de ordem k definida por:

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} s-t_{11} & -t_{12} & \cdots & -t_{1k-1} & -t_{1k} \\ 0 & s-t_{22} & \ddots & -t_{2k-1} & -t_{2k} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & s-t_{kk} \end{bmatrix}, k = 2, \ldots, N. \tag{2.27}$$

Da fórmula acima, notamos que podemos escrever as matrizes $\mathbf{S}_k$ em função de $\mathbf{S}_{k-1}$ como:

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{k-1} & -\mathbf{V} \\ \mathbf{0} & [s-t_{kk}] \end{bmatrix}, \tag{2.28}$$

onde $\mathbf{0} = [0, 0, 0, \ldots, 0]$ representa um vetor linha nulo e $\mathbf{V} = \left[t_{1k}, \ldots, t_{k-1,k}\right]^T$ é um vetor coluna, ambos de ordem $k-1$. A inversa da matriz S_2 é calculada diretamente da Eq.(2.27):

$$\mathbf{S}_2^{-1} = \frac{1}{(s-t_{11})(s-t_{22})} \begin{bmatrix} s-t_{22} & t_{12} \\ 0 & s-t_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-t_{11}} & \frac{t_{12}}{(s-t_{11})(s-t_{22})} \\ 0 & \frac{1}{s-t_{22}} \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Seguindo de forma recursiva e usando a fórmula (2.26), temos

$$\mathbf{S}_k^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{k-1}^{-1} & \frac{\mathbf{S}_{k-1}^{-1}}{s-t_{kk}}\mathbf{V} \\ [0 \ldots 0] & \frac{1}{s-t_{kk}} \end{bmatrix}, k = 3, \ldots, N, \tag{2.30}$$

sendo que $\mathbf{S}_N^{-1} = (s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}$.

Então, para calcularmos a transformada inversa de Laplace da matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}$ usamos o Teorema de Heaviside. Para isto precisamos conhecer sua adjunta, que calculamos da seguinte forma:

$$Adj(\mathbf{S}_N) = \mathbf{S}_N^{-1} det(\mathbf{S}_N). \tag{2.31}$$

Considerando que a fórmula acima vale para $Adj(\mathbf{S}_k)$, com $k = 2, \ldots, N$, chegamos a fórmula recursiva para a determinação da adjunta da matriz $\mathbf{S}_k$

$$Adj(\mathbf{S}_k) = \mathbf{S}_k^{-1} det(\mathbf{S}_k) = \left[\begin{array}{c|c} (s - t_{kk}) Adj(\mathbf{S}_{k-1}) & Adj(\mathbf{S}_{k-1})\mathbf{V} \\ \hline [0 \ldots 0] & det(\mathbf{S}_{k-1}) \end{array}\right], k = 3, \ldots, N, \tag{2.32}$$

e

$$Adj(\mathbf{S}_2) = \begin{bmatrix} s - t_{22} & t_{12} \\ 0 & s - t_{11} \end{bmatrix}.$$

Quando $\omega \neq 1$, os autovalores de A são distintos. Assim, o Teorema de Expansão de Heaviside garante que, se temos uma função racional do tipo $\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)}$, onde o grau de $\mathbf{P}(s)$ é menor que o grau de $\mathbf{Q}(s)$ que é igual a N e $d_i = t_{ii}$ são os zeros distintos de $\mathbf{Q}(s)$, então:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathbf{P}(s)}{\mathbf{Q}(s)}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathbf{P}(d_i)}{\frac{d}{ds}\mathbf{Q}(s)|_{s=d_i}} e^{-d_i x}, \tag{2.33}$$

Desta forma, quando $\omega \neq 1$ a matriz $\mathbf{B}(x)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\right) \\
&= \mathbf{U}\mathcal{L}^{-1}\left[\left(s\mathbf{I}-\mathbf{T}\right)^{-1}\right]\mathbf{U}^{H} \\
&= \mathbf{U}\mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{S}_N^{-1}\right]\mathbf{U}^{H} \\
&= \mathbf{U}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Adj(\mathbf{S}_N)}{det(\mathbf{S}_N)}\right]\mathbf{U}^{H} \\
&= \mathbf{U}\left[\sum_{i=1}^{N}\left.\frac{Adj(\mathbf{S}_N)}{\frac{d}{ds}det(\mathbf{S}_N)}\right|_{s=t_{ii}} e^{-t_{ii}x}\right]\mathbf{U}^{H}. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

2.2.2 O Método da Diagonalização

Nesta seção, faremos um estudo sobre o método da diagonalização, o qual foi usado no desenvolvimento do algoritmo deste trabalho. Para isso, primeiramente vamos observar que os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são simétricos, não-nulos e distintos, quando $\omega \neq 1$. Desta forma a matriz $\mathbf{A}$ possui decomposição espectral como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1},$$

onde $\mathbf{D}$ é a matriz diagonal formada pelos autovalores de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \cdots & 0 \\ & d_2 & & & \vdots \\ & & d_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & d_N \end{bmatrix} \qquad (2.35)$$

e $\mathbf{X}$ é a matriz que tem como colunas os autovetores de A. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(s\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}-\mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}\right)^{-1}\right] = \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\mathbf{X}(s\mathbf{I}-\mathbf{D})\mathbf{X}^{-1}\right)^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{X}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{D}\right)^{-1}\mathbf{X}^{-1}\right]. \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{X}$ é uma matriz constante, então podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}\mathcal{L}\left[\left(s\mathbf{I} - \mathbf{D}\right)^{-1}\right]\mathbf{X}^{-1}. \tag{2.37}$$

Escrevendo a matriz diagonal $s\mathbf{I} - \mathbf{D}$ na sua forma matricial, temos

$$s\mathbf{I} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} s - d_1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & s - d_2 & & & \\ & & s - d_3 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & s - d_N \end{bmatrix},$$

onde os elementos d_i são os autovalores de $\mathbf{A}$. Logo a sua inversa fica

$$\left(s\mathbf{I} - \mathbf{D}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-d_1} & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-d_2} & & & \\ & & \frac{1}{s-d_3} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & \frac{1}{s-d_N} \end{bmatrix}. \tag{2.38}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na equação acima,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\left(s\mathbf{I} - \mathbf{D}\right)^{-1}\right] = \begin{bmatrix} e^{d_1 x} & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2 x} & & & \\ & & e^{d_3 x} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & e^{d_N x} \end{bmatrix} = e^{\mathbf{D}x}. \tag{2.39}$$

Logo a matriz $\mathbf{B}(x)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1}. \tag{2.40}$$

Devemos ainda observar que este procedimento para inversão da matriz LTS_N pode ser facilmente extendido para o caso $\omega = 1$ onde existe autovalor zero com multiplicidade dois, [Segatto et al, 2008].

2.3 Tratando do Caráter Exponencial da Solução

Como vimos nas subseções anteriores, quando $\omega \neq 1$, os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são distintos e simétricos entre si. O comportamento exponencial da solução, combinado com o fato de que os autovalores d_i da matriz LTS_N crescem em função de N, mostra que a solução não é apropriada para resolver problemas de grandes espessuras ou problemas com altos graus de anisotropia. Na seção 2.1, vimos que a solução LTS_N do problema (2.5) e (2.6) é dado por:

$$\mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{\Psi}(0) + \int_0^x \mathbf{B}(x-\xi)\mathbf{Q}(\xi)\, d\xi \tag{2.41}$$

onde

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1}. \tag{2.42}$$

Podemos notar pela Eq.(2.41), que o caráter exponencial da solução pode gerar problemas computacionais quando temos grandes espessuras ou alta ordem de quadratura (por que a magnitude dos autovalores aumenta com N). Para eliminar este problema, primeiramente, Barichello [Barichello, 1995] propôs uma mudança de base na solução do problema homogêneo, porém, para problemas não homogêneos, o overflow é repassado para o termo da fonte externa. Para contornar isto, Brancher [Brancher, 1998] resolveu o problema de overflow, para o caso não-homogêneo, quando a fonte é da forma exponencial, utilizando o método dos coeficientes a determinar. Mas foi com Gonçalves et al. [Gonçalves et al, 2000] que o problema de overflow foi completamente eliminado, através de uma mudança de base, trocando a variável dos argumentos relativos às raízes positivas de x por $(x - x_0)$. Fisicamente, essa mudança de base corresponde a tratar a radiação que se desloca da direita para esquerda ($\mu_n < 0$), igualmente a radiação que se desloca da esquerda para direita ($\mu_n > 0$). Para tanto, utiliza-se o fato de que as direções μ_n são simétricas em relação a

$\mu = 0$. Essa propriedade é conhecida como invariância das direções discretas. Assim, para descrever matematicamente este raciocínio, fazemos [Cardona, 2008]:

$$e^{\mathbf{D}x} = \mathbf{E}^{+}(x) + \mathbf{E}^{-}(x),$$

onde $\mathbf{E}^{+}(x)$ e $\mathbf{E}^{-}(x)$ são matrizes diagonais com os autovalores positivos e negativos, cujos elementos são dados, respectivamente, por:

$$e^{+}_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ e^{dix} & \text{se} \quad i = j \quad \text{e} \quad di > 0 \\ 0 & \text{se} \quad i = j \quad \text{e} \quad di < 0 \end{cases}$$

e

$$e^{-}_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ 0 & \text{se} \quad i = j \quad \text{e} \quad di > 0 \\ e^{dix} & \text{se} \quad i = j \quad \text{e} \quad di < 0 \end{cases}$$

Assim:

$$\mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{X}\big(\mathbf{E}^{+}(x) + \mathbf{E}^{-}(x)\big)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{\Psi}(0) + \int_0^x \mathbf{X}\big(\mathbf{E}^{+}(x-\xi) + \mathbf{E}^{-}(x-\xi)\big)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\xi)d\xi \quad (2.43)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}(x_0) = \quad & \mathbf{X}\big(\mathbf{E}^{+}(x_0) + \mathbf{E}^{-}(x_0)\big)X^{-1}\mathbf{Psi}(0) + \\ & \int_0^{x_0} \mathbf{X}\big(\mathbf{E}^{+}(x_0-\xi) + \mathbf{E}^{-}(x_0-\xi)\big)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\xi)d\xi \end{aligned} \quad (2.44)$$

e isolando $\psi(0)$ em (2.44), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}(0) = \quad & \mathbf{X}\big(\mathbf{E}^{+}(-x_0) + \mathbf{E}^{-}(-x_0)\big)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{\Psi}(x_0) - \\ & \int_0^{x_0} X\big(\mathbf{E}^{+}(-\xi) + \mathbf{E}^{-}(-\xi)\big)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\xi)d\xi, \end{aligned} \quad (2.45)$$

pois $\mathbf{E}^{\pm}(a)\mathbf{E}^{\pm}(b) = \mathbf{E}^{\pm}(a+b)$, $\mathbf{E}^{+}(a)\mathbf{E}^{-}(b) = 0$ e $(\mathbf{E}^{\pm}(a))^{-1} = \mathbf{E}^{\pm}(-a)$. Assim, substituindo a expressão (2.45) em (2.43) que contém $\mathbf{E}^{+}(x)$, para eliminar as exponenciais de argumento positivo, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Psi}(x) = \quad & \mathbf{X}\mathbf{E}^{+}(x)\mathbf{X}^{-1}\Big[\mathbf{X}\big(\mathbf{E}^{+}(-x_0) + \mathbf{E}^{-}(-x_0)\big)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{\Psi}(x_0) - \\
& \int_0^{x_0} \mathbf{X}\big(\mathbf{E}^{+}(-\xi) + \mathbf{E}^{-}(-\xi)\big)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\xi)d\xi\Big] + \mathbf{X}\mathbf{E}^{-}(x)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{\Psi}(0) + \\
& \int_0^{x} \mathbf{X}\big(\mathbf{E}^{+}(x-\xi) + \mathbf{E}^{-}(x-\xi)\big)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\xi)d\xi = \\
& \mathbf{X}\mathbf{E}^{+}(x-x_0)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{\Psi}(x_0) + \mathbf{X}\mathbf{E}^{-}(x)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{\Psi}(0) - \int_0^{x_0} \mathbf{X}\mathbf{E}^{+}(x-\xi)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\xi)d\xi \\
& + \int_0^{x} \mathbf{X}\big(\mathbf{E}^{+}(x-\xi) + \mathbf{E}^{-}(x-\xi)\big)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\xi)d\xi. \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Finalmente, somando as integrais da Eq.(2.46), obtemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Psi}(x) = \quad & \mathbf{X}\mathbf{E}^{+}(x-x_0)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{\Psi}(x_0) + \mathbf{X}\mathbf{E}^{-}(x)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{\Psi}(0) + \\
& \int_0^{x} \mathbf{X}\mathbf{E}^{-}(x-\xi)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\xi)d\xi + \int_{x_0}^{x} \mathbf{X}\mathbf{E}^{+}(x-\xi)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\xi)d\xi. \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Por último, devemos observar que os argumentos das exponenciais da Eq.(2.47) são todos negativos. E mais, quando $\mathbf{E}^{+}(x)$ e $\mathbf{E}^{-}(x)$ multiplicam um vetor, apenas $N/2$ componentes deste vetor são utilizadas, sendo diferentes para cada uma das matrizes. Desta forma, a Eq.(2.47) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Psi}(x) = \quad & \mathbf{X}\big(\mathbf{X}\mathbf{E}^{+}(x-x_0) + \mathbf{E}^{-}(x)\big)\boldsymbol{\xi} + \int_0^{x} \mathbf{X}\mathbf{E}^{-}(x-\xi)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\xi)d\xi + \\
& \int_{x_0}^{x} \mathbf{X}\mathbf{E}^{+}(x-\xi)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Q}(\xi)d\xi \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ é um vetor desconhecido a ser determinado pelas condições de contorno (2.6).

2.4 Método dos Coeficientes à Determinar

Podemos observar que, se o vetor $\mathbf{Q}(x)$ é da forma exponencial, podemos usar o método dos coeficientes a determinar, evitando assim a inversão da matriz dos autovalores.

Consideremos que o termo fonte seja da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}(x) = \mathbf{F}e^{-x/\mu_0}. \tag{2.49}$$

Assim, a Eq.(2.8) é escrita como:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{\Psi}(x) - \mathbf{A}\mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{F}e^{-x/\mu_0}. \tag{2.50}$$

Como o termo fonte tem caráter exponencial, utilizando o método dos coeficientes a determinar para obter a solução particular da Eq.(2.50), obtemos uma performance computacional melhor, e a intensidade de radiação assume a expressão

$$\mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{\Psi}(0) + \mathbf{C}e^{-x/\mu_0}, \tag{2.51}$$

onde $\mathbf{B}(x)$ é dado pela Eq.(2.40) junto com as condições de contorno (2.12). Para determinarmos as componentes desconhecidas do vetor $\mathbf{C}$, subtituimos a seguinte solução particular

$$\mathbf{\Psi}_p(x) = \mathbf{C}e^{-x/\mu_0} \tag{2.52}$$

na Eq.(2.50), chegando assim na expressão

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \tag{2.53}$$

onde

$$\mathbf{M} = \left(-\frac{1}{\mu_0}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right). \tag{2.54}$$

Para não haver a inversão da matriz $\mathbf{M}$ afim de encontrar as componentes de $\mathbf{C}$, resolvemos um sistema linear dado

$$\mathbf{MC} = \mathbf{F}. \tag{2.55}$$

Assim, reescrevendo o problema (2.51) como

$$\mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{X}E(x)\xi + \mathbf{C}e^{-x/\mu_0} \tag{2.56}$$

onde $\mathbf{E}(x)$ é uma matriz diagonal, tal que

$$\mathbf{E}(x) = \begin{cases} e^{dix} & se \quad di < 0 \\ e^{di(x-x_0)} & se \quad di > 0 \end{cases} \tag{2.57}$$

e ξ é um vetor desconhecido.

Encontrando o vetor ξ pela aplicação das condições de contorno (2.12), obtemos a intensidade de radiação $\mathbf{\Psi}(x)$ em (2.56), sem a necessidade de inverter a matriz dos autovalores $\mathbf{X}$.

3. PROBLEMA SEM SIMETRIA AZIMUTAL

Neste capítulo, apresentamos a formulação LTS_N aplicada a problemas sem simetria azimutal. Para isto, expandimos a solução do problema em uma série de Fourier truncada na variável azimutal, conforme proposto por Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1960], cujos coeficientes são soluções de um conjunto de problemas semelhantes ao problema com simetria azimutal, que serão então resolvidos pelo método LTS_N.

3.1 A Equação de Transporte sem Simetria Azimutal

Vamos considerar a equação de transferência radiativa para um comprimento de onda em geometria plana, descrita por:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,\mu,\varphi) + \psi(x,\mu,\varphi) = \frac{\omega}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} p(\cos\Theta)\psi(x,\mu',\varphi')\, d\varphi'\, d\mu', \tag{3.1}$$

com condições de contorno de intensidade de radiação incidente conhecida:

$$\psi(0,\mu,\varphi) = \pi\delta(\mu-\mu_0)\delta(\varphi-\varphi_0), \quad \text{se} \quad \mu > 0 \tag{3.2}$$

e

$$\psi(x_0,\mu,\varphi) = 0, \quad \text{se} \quad \mu < 0. \tag{3.3}$$

onde

- $\psi(x,\mu,\varphi)$ é a intensidade de radiação;
- $x \in [0, x_0]$ é a espessura ótica;
- as direções $\mu \in [-1,1]$ e $\varphi \in [0,2\pi]$ são, respectivamente, o cosseno do ângulo polar e o ângulo azimutal;

- $\omega \in [0,1]$ é o termo de espalhamento simples do meio (albedo); e
- $p(\cos\Theta)$ representa a função de fase, sendo Θ o ângulo formado entre a direção do fóton antes e depois da colisão com o alvo, isto é, o ângulo formado entre um fóton com direção (μ', φ') que interage com o alvo resultando em um fóton com direção (μ, φ).

Neste trabalho, consideramos que a função de fase pode ser expandida como uma série truncada de polinômios de Legendre, isto é:

$$p(\cos\Theta) = \sum_{\ell=0}^{L} \beta_\ell P_\ell(\cos\Theta). \tag{3.4}$$

Usando o Teorema de adição para os polinômios de Legendre na expressão acima temos que:

$$p(\cos\Theta) = \sum_{m=0}^{L}(2-\delta_{0,m}) \sum_{\ell=m}^{L} \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu) P_\ell^m(\mu') \cos\left[m(\varphi-\varphi')\right], \tag{3.5}$$

onde os coeficientes β_ℓ^m são dados por,

$$\beta_\ell^m = \beta_\ell \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \tag{3.6}$$

sendo $\beta_0 = 1$ e $|\beta_\ell| < 2\ell+1, \ell = 1, 2, \ldots, L$, e

$$P_\ell^m(\mu) = \left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} P_\ell(\mu), \tag{3.7}$$

são as funções associados de Legendre.

Para resolver o problema de transferência radiativa dado pelas Eqs.(3.1)-(3.3) poderiamos usar o raiocínio apresentado por Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1960] ou [Hill, 1972]. No entanto, optamos pela solução alternativa proposta por Chalhoub e Garcia [Chalhoub e Garcia, 1997], onde a intensidade de radiação é escrita como:

$$\psi(x,\mu,\varphi) = \psi^*(x,\mu,\varphi) + \pi\delta(\mu-\mu_0)\delta(\varphi-\varphi_0)e^{-x/\mu}. \tag{3.8}$$

E substituindo no problema (3.1)-(3.3), resultando o seguinte problema a ser satisfeito por $\psi^*(x,\mu,\varphi)$:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,\mu,\varphi)+\psi^*(x,\mu,\varphi)=\frac{\omega}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}p(\cos\Theta)\psi^*(x,\mu',\varphi')\,d\varphi'\,d\mu'+Q(x,\mu,\varphi), \quad (3.9)$$

$$\psi^*(0,\mu,\varphi)=0 \quad \text{se} \quad \mu>0 \quad (3.10)$$

e

$$\psi^*(x_0,\mu,\varphi)=0 \quad \text{se} \quad \mu<0, \quad (3.11)$$

onde

$$Q(x,\mu,\varphi)=\frac{\omega}{4}\sum_{m=0}^{L}(2-\delta_{0,m})\sum_{\ell=m}^{L}\beta_\ell^m P_\ell^m(\mu)P_\ell^m(\mu_0)\cos\big[m(\varphi-\varphi_0)\big]e^{-x/\mu_0}. \quad (3.12)$$

Então, expandimos a intensidade colimada de radiação $\psi^*(x,\mu,\varphi)$ em uma série de Fourier na variável azimutal:

$$Q^*(x,\mu,\varphi)=\psi_c^0(x,\mu)+\sum_{i=1}^{\infty}\Big[\psi_c^i(x,\mu)\cos\big[i(\varphi-\varphi_0)\big]+\psi_s^i(x,\mu)\sin\big[i(\varphi-\varphi_0)\big]\Big]. \quad (3.13)$$

Substituímos no problema (3.9)-(3.11):

$i)$ Multiplicamos as equações resultantes por $\sin\big[k(\varphi-\varphi_0)\big]$, com $k=1,2,\ldots$, e integramos em $\varphi\in[0,2\pi]$, resultando nos problemas diferenciais dados pelas equações:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\psi_s^k(x,\mu)+\psi_s^k(x,\mu)=\frac{\omega}{2}\sum_{\ell=k}^{L}\beta_\ell^k P_\ell^k(\mu)\int_{-1}^{1}P_\ell^k(\mu')\psi_s^k(x,\mu')d\mu', \quad (3.14)$$

para $k=1,\ldots,L$, ou pela equação

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\psi_s^k(x,\mu)+\psi_s^k(x,\mu)=0, \quad (3.15)$$

para $k = L+1, L+2, \ldots$, e pelas condições de contorno

$$\psi_s^k(0,\mu) = \psi_s^k(x_0,-\mu) = 0, \quad \text{se} \quad \mu > 0. \tag{3.16}$$

Mediante a ausência de fonte e as condições de contorno serem nulas, podemos afirmar que a solução para os problemas diferenciais acima tem solução nula, $\psi_s^k(x,\mu) = 0$, para $k = 1, 2, \ldots$.

ii) Multiplicamos as equações resultantes por $\cos\big[k(\varphi - \varphi_0)\big]$, com $k = 0, 1, 2, \ldots$, e integramos em $\varphi \in [0, 2\pi]$, resultando nos problemas diferenciais dados pelas equações:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\psi_c^k(x,\mu) + \psi_c^k(x,\mu) = \frac{\omega}{2}\sum_{\ell=k}^{L}\beta_\ell^k P_\ell^k(\mu)\int_{-1}^{1}P_\ell^k(\mu')\psi_c^k(x,\mu')d\mu' + Q^k(x,\mu) \tag{3.17}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, L$, onde

$$Q^k(x,\mu) = \frac{\omega}{2}\sum_{\ell=k}^{L}\beta_\ell^k P_\ell^k(\mu)P_\ell^k(\mu_0)e^{-x/\mu_0}, \tag{3.18}$$

ou pela equação

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\psi_c^s(x,\mu) + \psi_c^s(x,\mu) = 0, \tag{3.19}$$

para $k = L+1, L+2, \ldots$, e pelas condições de contorno

$$\psi_c^k(0,\mu) = \psi_c^k(x_0,-\mu) = 0, \quad \text{se} \quad \mu > 0. \tag{3.20}$$

Novamente, podemos afirmar que $\psi_c^k(x,\mu) = 0$, para $k = L+1, L+2, \ldots$, restando, assim, resolver o problema diferencial dado pela Eqs.(3.17), (3.18) e (3.20).

Desta forma, a solução do problema sem simetria azimutal (3.1) e (3.3) pode ser reescrita como:

$$\psi(x,\mu,\varphi) = \sum_{m=0}^{L} \psi_c^m(x,\mu)\cos\big[m(\varphi-\varphi_0)\big] + \pi\delta(\mu-\mu_0)\delta(\varphi-\varphi_0)e^{-x/\mu}, \tag{3.21}$$

onde as funções $\psi_c^m(x,\mu)$ são soluções do problema diferencial (3.17), (3.18) e (3.20), para $m = 0, 1, \ldots, L$, sendo que sua resolução é apresentada na seção 3.2 a seguir.

3.2 Solução LTS_N

Nesta seção, vamos resolver o problema sem simetria azimutal aplicando o método LTS_N com diagonalização.

Logo, resolver o problema de transferência radiativa (3.1), (3.2) e (3.3) é equivalente a resolver $L+1$ problemas com simetria azimutal descrito pelas Eqs.(3.17) e (3.19). A aproximação S_N deste problema é feita com a aproximação do termo integral por Quadratura Gaussiana de ordem N e aplicando o método da colocação usando como "função teste" o Delta de Dirac nas N direções discretas, resultando

$$\mu_n \frac{d}{dx}\psi_n^m(x) + \psi_n^m(x) = \frac{\omega}{2}\sum_{\ell=m}^{L} \beta_\ell^m P_\ell^m(\mu_n)\left[\sum_{k=1}^{N} P_\ell^m(\mu_k)\psi_k^m(x)\mathrm{w}_k + Q_n^m(x)\right] \tag{3.22}$$

com as condições de contorno homogêneas. Onde temos que a intensidade de radiação e o termo fonte nas direções discretas podem ser representados respectivamente como, $\mathbf{\Psi}_n^m(x) = \mathbf{\Psi}_c^m(x,\mu_n)$ e $\mathbf{Q}_n^m(x) = \mathbf{Q}_c^m(x,\mu_n)$.

Dividindo a Eq.(3.22) por μ_n, aplicando a transformada de Laplace na variável espacial e fazendo uso da Eq.(3.6) para exprimir β_ℓ^m, obtemos para $n = 1, 2, \ldots, L$ as n equações

$$\begin{aligned}&\left(s + \frac{1}{\mu_n} - \frac{\omega}{2\mu_n}\sum_{\ell=m}^{L}\beta_\ell \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(\mu_n)P_\ell^m(\mu_n)\mathrm{w}_n\right)\overline{\Psi}_n^m(s) - \\ &\frac{\omega}{2\mu_n}\sum_{\ell=m}^{L}\beta_\ell\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m(\mu_n)\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{N} P_\ell^m(\mu_k)\mathrm{w}_k\overline{\Psi}_k^m(s) = \psi_n^m(0) + \frac{\overline{Q}_n^m(s)}{\mu_n}\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde a barra denota a transformada de Laplace.

Logo se $n = 1, 2, \ldots, N$ na Eq.(3.23), chegamos em $L + 1$ sistemas algébricos de equações na seguinte forma matricial

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^m)\overline{\mathbf{\Psi}}^m(s) = \mathbf{\Psi}^m(0) + \overline{\mathbf{Q}}^m(s), \tag{3.24}$$

com $m = 0, 1, \ldots, L$ onde cada elemento $a^m(i, j)$, da matriz $\mathbf{A}^m$, é definido por:

$$a^m_{i,j} = \begin{cases} s + \frac{1}{\mu_i} - \frac{\omega}{2\mu_i}\left[\sum_{\ell=m}^{L} \beta_\ell \dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P^m_\ell(\mu_i) \mathrm{w}_j P^m_\ell(\mu_j)\right], & \text{se} \quad i = j \\ \\ -\frac{\omega}{2\mu_i}\left[\sum_{\ell=m}^{L} \beta_\ell \dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P^m_\ell(\mu_i) \mathrm{w}_j P^m_\ell(\mu_j)\right], & \text{se} \quad i \neq j, \end{cases} \tag{3.25}$$

e os vetores $\overline{\mathbf{\Psi}}^m(s)$, $\mathbf{\Psi}^m(0)$ e $\overline{\mathbf{Q}}^m(s)$ são expressos da seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{\Psi}}^m(s) = \begin{bmatrix} \overline{\psi}^m_1(s) \\ \overline{\psi}^m_2(s) \\ \vdots \\ \overline{\psi}^m_N(s) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Psi}^m(0) = \begin{bmatrix} \psi^m_1(0) \\ \psi^m_2(0) \\ \vdots \\ \psi^m_N(0) \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{Q}}^m(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\overline{Q}^m_1(s)}{\mu_1} \\ \dfrac{\overline{Q}^m_2(s)}{\mu_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\overline{Q}^m_N(s)}{\mu_N} \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Resolvendo a Eq.(3.24), obtemos para cada $m = 0, 1, \ldots, L$ os fluxos transformados:

$$\overline{\Psi}^m(s) = \big(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^m\big)^{-1}\big[\mathbf{\Psi}^m(0) + \overline{\mathbf{Q}}^m(s)\big]. \tag{3.27}$$

Lembrando que a inversão da matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^m)^{-1}$ pode ser feita analiticamente para qualquer grau de anisotropia [Barichello and Vilhena, 1993] e como cada elemento da matriz inversa é uma função racional, cujo denominador é dado pelo determinante da matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^m)$, que possui N raízes r_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, simétricas e não repetidas, a inversão da transformada de Laplace também é feita de forma analítica através da técnica de expansão de Heaviside, Streck [Streck, 1993]. Assim, o vetor de intensidade de radiação $\mathbf{\Psi}^m(x)$ é obtido em função do vetor $\mathbf{\Psi}^m(0)$:

$$\mathbf{\Psi}^m(x) = \mathbf{B}^m(x)\mathbf{\Psi}^m(0) + \mathbf{C}^m(x), \tag{3.28}$$

onde

$$\mathbf{B}^m(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^m\right)^{-1}\right]. \tag{3.29}$$

O vetor $\mathbf{C}^m(x)$ pode ser calculado de duas formas distintas, uma delas através da convolução, outra, por seu caráter exponencial, podemos calcular pelo método dos coeficientes a determinar. Logo pela convolução, temos:

$$\mathbf{C}^m(x) = \mathbf{B}^m(x) * \mathbf{Q}^m(x), \tag{3.30}$$

onde $*$ indica a convolução.

4. TÉCNICAS DE INTERPOLAÇÃO ANGULAR

Como já vimos, no capítulo anterior obtemos uma formulação da solução para a intensidade de radiação, calculado discretamente nas direções μ_i, onde $i = 1, 2, \ldots, N$. O cálculo da intensidade de radiação em uma direção distinta das N direções discretas μ_i pode ser feito através da utilização de interpolação polinominal, porém trabalhamos aqui outras duas técnicas. A primeira técnica inclui nós fictícios na formulação do problema, considerando os pesos da quadratura nulos nestes pontos. Esta técnica é conhecida como DNI, "Inclusão de Nós Fictícios". A segunda técnica, aproxima o termo integral da equação de transporte através da quadratura Gausiana e os fluxos angulares nas direções discretas que aparecem nesta formulação de quadratura são substituidos pela solução LTS_N. Este procedimento resulta em uma EDO linear que possui solução conhecida de forma analítica. Chamamos este procedimento de LTS_N com depedência angular continua.

4.1 DNI (Dummy Nodes Inclusion) - "Inclusão de Nós Fictícios"

A técnica DNI [Segatto, 2007] é uma técnica de interpolação angular que também pode ser usada para determinar a intensidade de radiação das direções discretas μ_i. Esta técnica consiste na inclusão dos chamados "nós fictícios" no esquema de quadratura, associados a pesos cujo valor é zero.

Assim, é possível determinar a solução angular de partículas em M novas direções discretas onde queremos calcular a intensidade de radiação, sendo $\zeta_1 > \zeta_2 > \ldots > \zeta_{\frac{M}{2}} > 0 > \zeta_{\frac{M}{2}+1} > \ldots > \zeta_M$ as direções e cujos pesos associados são nulos. Desta forma redefimos as direções como:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = \zeta_1 &\longrightarrow \omega_1 = 0 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\gamma_{\frac{M}{2}} = \zeta_{\frac{M}{2}} &\longrightarrow \omega_{\frac{M}{2}} = 0 \\
\gamma_{\frac{N}{2}+1} = \mu_1 &\longrightarrow \omega_{\frac{M}{2}+1} = \mathrm{w}_1 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\gamma_{\frac{M}{2}+N} = \mu_N &\longrightarrow \omega_{\frac{M}{2}+N} = \mathrm{w}_N \\
\gamma_{N+\frac{N}{2}+1} = \zeta_{\frac{M}{2}+1} &\longrightarrow \omega_{\frac{N}{2}+N+1} = 0 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\gamma_{N+M} = \zeta_M &\longrightarrow \omega_{N+M} = 0
\end{aligned}$$

mantendo desta forma que as $\frac{N+M}{2}$ primeiras direções da nova quadratura são positivas e as restantes negativas.

Assim o método LTS_N é aplicado sobre o novo sistema de $M+N$ equações.

$$\mu\frac{d}{dx}\psi_n(x) + \frac{1}{\gamma_n}\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{N}\omega_i\psi_i(x) + Q_n(x)$$

onde $i = 1, 2, \ldots, N+M$. Logo com a inclusão dessas novas M direções a ordem da matriz LTS_N passa a ter ordem $N+M$.

Estudos recentes mostram uma equivalência entre os resultados obtidos pelos métodos LTS_N com dependência angular contínua e o DNI ("Inclusão de Nós Fictícios"). No caso do método LTS_N, esta formulação aumenta a matriz da qual devemos encontrar autovalores e autovetores, aumentando assim o tempo computacional. Este problema já não ocorre quando usamos a formulação LTS_N com μ contínuo, conforme iremos descrever a seguir.

4.2 Formulação LTS_N com Dependência Angular Contínua

Inicialmente, consideremos a equação de transferência radiativa na seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,\mu) + \frac{1}{\mu}\psi(x,\mu) = \frac{\omega}{2\mu}\int_{-1}^{1}\mathcal{P}(\mu,\mu')\psi(\mu,\mu')d\mu' + \frac{1}{\mu}Q(x,\mu), \tag{4.1}$$

com as seguintes condicões de contorno

$$
\begin{aligned}
\psi(0,\mu) &= f(\mu), \quad \text{se} \quad \mu > 0 \\
\psi(x_0,\mu) &= g(\mu), \quad \text{se} \quad \mu < 0,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

onde

$$
\mathcal{P}(\mu,\mu') = \frac{\omega}{2}\sum_{\ell=m}^{L}\beta_\ell P_\ell(\mu)P_\ell(\mu') \tag{4.3}
$$

e $Q(x,\mu)$ pode ser considerada pela Eq.(3.18) onde temos $Q^k(x,\mu)$.

Aproximando o termo integral da Eq.(4.1) através da quadratura de Gauss-Legendre e utilizando a intensidade de radiação obtida pelo método LTS_N, dado pela Eq.(2.56), obtém-se a equação diferencial

$$
\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,\mu) + \frac{1}{\mu}\psi(x,\mu) = F(x,\mu), \tag{4.4}
$$

onde F é definida por

$$
F(x,\mu) = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{N}\big(\mathcal{P}(\mu,\mu_i)\mathrm{w}_i\big)\big(\psi_i(x)\big) + \frac{1}{\mu}Q(x,\mu), \tag{4.5}
$$

a qual pode ser escrita da seguinte forma

$$
F(x,\mu) = \frac{\mathbf{P}^T(\mu)\cdot\mathbf{\Psi}(x)}{\mu} + \frac{1}{\mu}Q(x,\mu), \tag{4.6}
$$

onde o ponto indica produto interno vetorial,

$$
\mathbf{P}(\mu) = \big[\mathcal{P}(\mu,\mu_1)\mathrm{w}_1, \mathcal{P}(\mu,\mu_2)\mathrm{w}_2, \ldots, \mathcal{P}(\mu,\mu_N)\mathrm{w}_N\big]^T \tag{4.7}
$$

e

$$
\mathbf{\Psi}(x) = \big[\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_N(x)\big]^T. \tag{4.8}
$$

A solução da Eq.(4.1) é dada por:

$$\psi(x,\mu) = e^{\frac{-x}{\mu}} \left[\psi(0,\mu) + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu} \cdot \int_0^x \mathbf{\Psi}(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \frac{1}{\mu} \int_0^x Q(\eta,\mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right]. \tag{4.9}$$

Como conhecemos $\Psi(0,\mu)$ para $\mu > 0$ apenas, então faremos $x = x_0$ na equação acima

$$\psi(x_0,\mu) = e^{\frac{-x_0}{\mu}} \left[\psi(0,\mu) + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu} \cdot \int_0^{x_0} \mathbf{\Psi}(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \frac{1}{\mu} \int_0^{x_0} Q(\eta,\mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right], \tag{4.10}$$

agora isolando $\psi(0,\mu)$ e substituindo na Eq.(4.9) temos:

$$\psi(x,\mu) = e^{\frac{-x}{\mu}} \Bigg[\psi(x_0,\mu) e^{\frac{x_0}{\mu}} - \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu} \cdot \int_0^{x_0} \mathbf{\Psi}(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta - \frac{1}{\mu} \int_0^{x_0} Q(\eta,\mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu} \cdot \int_0^{x} \mathbf{\Psi}(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \frac{1}{\mu} \int_0^{x} Q(\eta,\mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \Bigg]. \tag{4.11}$$

Esta será a solução considerada para $\mu < 0$. Substituindo as condições de contorno (4.2) nas Eqs.(4.9) e (4.11), obtemos:

$$\psi(x,\mu) = \begin{cases} e^{\frac{-x}{\mu}} \left[f(\mu) + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu} \cdot \int_0^{x} \mathbf{\Psi}(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \frac{1}{\mu} \int_0^{x} Q(\eta,\mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right], & \text{se} \quad \mu > 0, \\ e^{\frac{-x}{\mu}} \left[g(\mu) e^{\frac{x_0}{\mu}} + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu} \cdot \int_{x_0}^{x} \mathbf{\Psi}(\eta) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta + \frac{1}{\mu} \int_{x_0}^{x} Q(\eta,\mu) e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta \right], & \text{se} \quad \mu < 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

A Eq.(4.12) pode ser utilizada para determinar a intensidade de radiação em qualquer direção. Este procedimento só é viável devido ao caráter analítico do método LTS_N. Do ponto de vista computacional, um dos fatores que contribuem para o bom desempenho deste método é que, dependendo do termo fonte, as integrais que aparecem nesta equação podem ser calculadas analíticamente.

4.2.1 Desenvolvimento Considerando Fonte Exponencial

No problema a ser considerado, o termo fonte é escrito como:

$$Q(x,\mu) = \mathcal{P}(\mu,\mu_0)e^{\frac{-x}{\mu_0}}, \tag{4.13}$$

onde $\mathcal{P}(\mu,\mu_0)$ é dado pela Eq.(4.3).

De acordo com a Eq.(4.12), tem-se duas situações a considerar:

a) $\mu > 0$

$$\begin{aligned}\psi(x,\mu) = \quad & e^{\frac{-x}{\mu}}\left[f(\mu) + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu}\cdot\int_0^x \mathbf{\Psi}(\eta)e^{\frac{\eta}{\mu}}d\eta + \frac{1}{\mu}\int_0^x Q(\eta,\mu)e^{\frac{\eta}{\mu}}d\eta\right] = \\ & e^{\frac{-x}{\mu}}\left[f(\mu) + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu}\cdot\int_0^x \left(\mathbf{XE}(\eta)\xi + \mathbf{C}e^{\frac{-\eta}{\mu_0}}\right)e^{\frac{\eta}{\mu}}\,d\eta + \frac{1}{\mu}\int_0^x \mathcal{P}(\mu,\mu_0)e^{\frac{-\eta}{\mu_0}}e^{\frac{\eta}{\mu}}\,d\eta\right],\end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $E(x)$ é dado pela Eq.(2.57)

Reescrevendo o segundo membro da Eq.(4.14), obtemos:

$$e^{\frac{-x}{\mu}}f(\mu) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\mathcal{P}(\mu,\mu_i)\mathrm{w}_i x_{ij}\xi_j E_j(x,\mu) + F(x,\mu)\left(\sum_{i=1}^{N}\mathcal{P}(\mu,\mu_i)\mathrm{w}_i c_i + \mathcal{P}(\mu,\mu_0)\right) \tag{4.15}$$

onde x_{ij}, ξ_j e c_i são elementos das matrizes $\mathbf{X}, \xi$ e $\mathbf{C}$, respectivamente,

$$E_j(x,\mu) = \frac{e^{\frac{-x}{\mu}}}{\mu}\int_0^x e^{d_j(\eta-\eta_j)}e^{\frac{\eta}{\mu}}\,d\eta = \begin{cases} \dfrac{e^{d_j(x-x_0)} - e^{\frac{-x}{\mu}}e^{-d_j x_0}}{d_j\mu + 1}, & \text{se} \quad d_j > 0, \\ \\ \dfrac{e^{xd_j} - e^{\frac{-x}{\mu}}}{d_j\mu + 1}, & \text{se} \quad d_j < 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

onde

$$\eta_j = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad d_j < 0 \\ x_0, & \text{se} \quad d_j > 0 \end{cases}$$

e

$$F(x,\mu) = \frac{e^{\frac{-x}{\mu}}}{\mu}\int_0^x e^{\frac{-\eta}{\mu_0}} e^{\frac{\eta}{\mu}} d\eta = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\left(e^{\frac{-x}{\mu}} - e^{\frac{-x}{\mu_0}}\right)}{\mu-\mu_0}, & \text{se} \quad \mu \neq \mu_0 \\ \\ \dfrac{e^{\frac{-x}{\mu}}x}{\mu}, & \text{se} \quad \mu = \mu_0; \end{cases} \tag{4.17}$$

b) $\mu < 0$

$$\begin{aligned} \psi(\mu,x) = \quad & e^{\frac{-x}{\mu}}\left[g(\mu)e^{\frac{x_0}{\mu}} + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu}\cdot\int_{x_0}^x \mathbf{\Psi}(\eta)e^{\frac{\eta}{\mu}}\,d\eta + \frac{1}{\mu}\int_{x_0}^x Q(\eta,\mu)e^{\frac{\eta}{\mu}}\,d\eta\right] = \\ & e^{\frac{-x}{\mu}}\left[g(\mu)e^{\frac{x_0}{\mu}} + \frac{\mathbf{P}^T(\mu)}{\mu}\cdot\int_{x_0}^x \left(\mathbf{XE}(\eta)\xi + \mathbf{C}e^{\frac{-\eta}{\mu_0}}\right)e^{\frac{\eta}{\mu}}\,d\eta + \frac{1}{\mu}\int_{x_0}^x \mathcal{P}(\mu,\mu_0)e^{\frac{-\eta}{\mu_0}}e^{\frac{\eta}{\mu}}\,d\eta\right]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Reescrevendo o segundo membro da equação acima temos:

$$e^{\frac{-x}{\mu}}g(\mu)e^{\frac{x_0}{\mu}} + \sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\mu,\mu_i)\mathrm{w}_i x_{ij}\xi_j G_j(x,\mu) + H(x,\mu)\left(\sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\mu,\mu_i)\mathrm{w}_i c_i + \mathcal{P}(\mu,\mu_0)\right), \tag{4.19}$$

onde

$$G_j(x,\mu) = \frac{e^{\frac{-x}{\mu}}}{\mu}\int_{x_0}^x e^{d_j(\eta-\eta_j)}e^{\frac{\eta}{\mu}}\,d\eta = \begin{cases} \dfrac{e^{d_j(x-x_0)} - e^{\frac{x_0-x}{\mu}}}{d_j\mu+1} & , \quad \text{se} \quad d_j > 0 \\ \\ \dfrac{e^{xd_j} - e^{\frac{x_0\left(d_j\mu+1\right)-x}{\mu}}}{d_j\mu+1} & , \quad \text{se} \quad d_j < 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

e

$$H(x,\mu) = \frac{e^{\frac{-x}{\mu}}}{\mu}\int_{x_0}^x e^{\frac{-\eta}{\mu_0}}e^{\frac{\eta}{\mu}}\,d\eta = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\left(e^{\frac{-x}{\mu_0}} - e^{\frac{x_0(\mu_0-\mu)}{\mu_0\mu}}e^{\frac{-x}{\mu}}\right)}{\mu_0-\mu} & , \quad \text{se} \quad \mu \neq \mu_0 \\ \\ \dfrac{e^{\frac{-x}{\mu}}(x-x_0)}{\mu} & , \quad \text{se} \quad \mu = \mu_0. \end{cases} \tag{4.21}$$

Com isso, a Eq.(4.12) que representa intensidade de radiação $\psi(x,\mu)$, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\psi(x,\mu) = \begin{cases} e^{\frac{-x}{\mu}} f(\mu) + \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \mathcal{P}(\mu,\mu_i)\mathrm{w}_i x_{ij}\xi_j E_j(x,\mu) + \\ F(x,\mu)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathcal{P}(\mu,\mu_i)\mathrm{w}_i c_i + \mathcal{P}(\mu,\mu_0)\right) & \text{se} \quad \mu > 0 \\ \\ e^{\frac{-x}{\mu}} g(\mu) e^{\frac{x_0}{\mu}} + \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \mathcal{P}(\mu,\mu_i)\mathrm{w}_i x_{ij}\xi_j G_j(x,\mu) + \\ H(x,\mu)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathcal{P}(\mu,\mu_i)\mathrm{w}_i c_i + \mathcal{P}(\mu,\mu_0)\right) & \text{se} \quad \mu < 0, \end{cases}$$

onde $E_j(x), F(x), G_j(x)$ e $H(x)$ são defindos respectivamente pelas Eqs.(4.16), (4.17), (4.20) e (4.21).

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, vamos apresentar os resultados numéricos obtidos pela formulação LTS_N para problemas de transferência radiativa em nuvens considerando alto grau de anisotropia, fazendo a comparação numérica entre os resultados encontrados com os resultados da literatura.

5.1 Problema Anisotrópico de Grau 82 Sem Simetria Azimutal

Nesta seção, apresentamos os resultados de dois problemas sem simetria azimutal com grau de anisotropia 82. Os mesmos foram selecionados dos casos propostos por Garcia e Siewert, [Garcia and Siewert, 1985].

Os erros percentuais foram calculados da seguinte forma:

$$E = \left(\frac{V_l - V_e}{V_e} \right) * 100,$$

onde V_l é o valor da literatura e V_e é o valor encontrado pelo método LTS_N.

Os dados de entrada dos problemas são dados na Tabela 5.1:

Tabela 5.1 – Dados de entrada - para problemas de anisotropia de grau 82

	$P1$	$P2$
μ_0	0.5	1
x_0	1	1
ω	0.9	0.9

As Tabelas 5.2 e 5.4 apresentam resultados para os problemas P1 considerando $\varphi - \varphi_0 = 0$ e usando $N = 400$. Na Tabela 5.2 a solução particular é obtida usando convolução e interpolação DNI, já na Tabela 5.4 a solução particular é obtida usando o método dos coeficientes a determinar e interpolação μ contínuo.

Tabela 5.2 – Intensidade de Radiação - referente à P1 por convolução e interpolação DNI

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	2.28189×10^{-2}	2.14170×10^{-2}	1.99920×10^{-2}	1.71574×10^{-2}	9.34718×10^{-3}	4.02510×10^{-3}	–
-0.9	4.11124×10^{-2}	3.86276×10^{-2}	3.60558×10^{-2}	3.08702×10^{-2}	1.64541×10^{-2}	6.81042×10^{-3}	–
-0.8	6.49978×10^{-2}	6.12969×10^{-2}	5.73955×10^{-2}	4.93997×10^{-2}	2.66075×10^{-2}	1.10211×10^{-2}	–
-0.7	9.99439×10^{-2}	9.47417×10^{-2}	8.91206×10^{-2}	7.73505×10^{-2}	4.26128×10^{-2}	1.79324×10^{-2}	–
-0.6	1.50992×10^{-1}	1.44082×10^{-1}	1.36342×10^{-1}	1.19657×10^{-1}	6.81165×10^{-2}	2.95061×10^{-2}	–
-0.5	2.24766×10^{-1}	2.16262×10^{-1}	2.06168×10^{-1}	1.83478×10^{-1}	1.09067×10^{-1}	4.93118×10^{-2}	–
-0.4	3.29332×10^{-1}	3.20180×10^{-1}	3.08043×10^{-1}	2.78888×10^{-1}	1.75209×10^{-1}	8.41043×10^{-2}	–
-0.3	4.72530×10^{-1}	4.65518×10^{-1}	4.52952×10^{-1}	4.18717×10^{-1}	2.82080×10^{-1}	1.47237×10^{-1}	–
-0.2	6.56823×10^{-1}	6.58388×10^{-1}	6.49493×10^{-1}	6.15205×10^{-1}	4.51464×10^{-1}	2.66180×10^{-1}	–
-0.1	8.70297×10^{-1}	8.94521×10^{-1}	8.97443×10^{-1}	8.72170×10^{-1}	6.97513×10^{-1}	4.91552×10^{-1}	–
-0.0	2.27819×10^{-1}	4.20308×10^{-1}	5.29758×10^{-1}	6.55501×10^{-1}	7.12973×10^{-1}	6.16363×10^{-1}	–
0.0	–	4.20308×10^{-1}	5.29758×10^{-1}	6.55501×10^{-1}	0.71297×10^{-1}	6.16363×10^{-1}	4.15370×10^{-1}
0.1	–	6.07530×10^{-1}	9.98580×10^{-1}	0.13847×10^{-1}	0.14118×10^{-1}	0.11580×10^{-1}	8.76455×10^{-1}
0.2	–	5.08874×10^{-1}	9.07215×10^{-1}	0.14378×10^{-1}	0.18263×10^{-1}	0.16127×10^{-1}	0.12914×10^{-1}
0.3	–	5.49990×10^{-1}	9.99893×10^{-1}	0.16482×10^{-1}	0.23078×10^{-1}	0.21558×10^{-1}	0.18054×10^{-1}
0.4	–	6.38613×10^{-1}	0.11692×10^{-1}	0.19577×10^{-1}	0.28730×10^{-1}	0.27782×10^{-1}	0.24010×10^{-1}
0.5	–	6.34269×10^{-1}	0.11686×10^{-1}	0.19832×10^{-1}	0.30333×10^{-1}	0.30342×10^{-1}	0.27105×10^{-1}
0.6	–	4.18259×10^{-1}	7.78086×10^{-1}	0.13461×10^{-1}	0.21839×10^{-1}	0.22950×10^{-1}	0.21536×10^{-1}
0.7	–	2.04882×10^{-1}	3.85809×10^{-1}	6.83932×10^{-1}	0.11933×10^{-1}	0.13320×10^{-1}	0.13268×10^{-1}
0.8	–	8.64750×10^{-2}	1.65149×10^{-1}	3.01013×10^{-1}	5.69582×10^{-1}	6.78607×10^{-1}	7.19933×10^{-1}
0.9	–	3.13662×10^{-2}	6.09008×10^{-2}	1.14611×10^{-1}	2.37335×10^{-1}	3.03206×10^{-1}	3.43477×10^{-1}
1.0	–	5.07111×10^{-3}	1.01191×10^{-2}	2.00435×10^{-2}	4.76083×10^{-2}	6.73491×10^{-2}	8.37578×10^{-2}

Tabela 5.3 – Erro Percentual - referente à P1 por convolução e interpolação DNI

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
−1.0	0.0004	–	–	–	0.0001	0.0007	–
−0.9	0.0002	–	0.0003	0.0003	0.0006	0.0010	–
−0.8	0.0008	0.0005	0.0005	0.0006	0.0011	0.0018	–
−0.7	0.0007	0.0005	0.0004	0.0005	0.0009	0.0022	–
−0.6	0.0007	0.0007	0.0007	–	0.0006	0.0013	–
−0.5	0.0009	0.0005	0.0005	0.0005	0.0009	0.0014	–
−0.4	0.0012	0.0006	0.0006	0.0004	0.0006	0.0015	–
−0.3	–	0.0004	0.0004	0.0005	0.0007	0.0013	–
−0.2	0.0017	0.0003	0.0003	0.0001	0.0004	0.0011	–
−0.1	0.0032	0.0003	0.0003	0.0002	0.0001	0.0006	–
−0.0	77.9180	63.3782	55.4038	45.1188	29.3176	22.5429	–
0.0	–	63.3782	55.4038	45.1188	29.3179	22.5429	20.7562
0.1	–	0.0030	0.0012	–	–	–	0.0017
0.2	–	0.0018	0.0009	0.0069	–	–	–
0.3	–	–	0.0005	–	–	–	–
0.4	–	0.0003	–	–	–	–	–
0.5	–	0.0003	–	–	–	–	–
0.6	–	0.0002	0.0001	0.0074	–	–	–
0.7	–	0.0005	0.0003	–	–	–	–
0.8	–	0.0002	0.0006	–	0.0002	0.0001	0.0001
0.9	–	0.0006	0.0003	0.0009	–	0.0003	0.0003
1.0	–	0.0004	–	–	–	0.0001	0.0001

Temos representado na Tabelas 5.3 o erro percentual comparado com Garcia e Siewert [Garcia and Siewert, 1985] referente ao caso P1 onde a solução particular foi obtida usando convolução com interpolação DNI.

Tabela 5.4 – Intensidade de Radiação - referente à P1 por coeficientes a determinar e interpolação μ contínuo

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	2.28189×10^{-2}	2.14170×10^{-2}	1.99920×10^{-2}	1.71574×10^{-2}	9.34718×10^{-3}	4.02510×10^{-3}	–
-0.9	4.11124×10^{-2}	3.86276×10^{-2}	3.60558×10^{-2}	3.08702×10^{-2}	1.64541×10^{-2}	6.81042×10^{-3}	–
-0.8	6.49978×10^{-2}	6.12969×10^{-2}	5.73955×10^{-2}	4.93997×10^{-2}	2.66075×10^{-2}	1.10211×10^{-2}	–
-0.7	9.99439×10^{-2}	9.47417×10^{-2}	8.91206×10^{-2}	7.73505×10^{-2}	4.26128×10^{-2}	1.79324×10^{-2}	–
-0.6	1.50992×10^{-1}	1.44082×10^{-1}	1.36342×10^{-1}	1.19657×10^{-1}	6.81165×10^{-2}	2.95061×10^{-2}	–
-0.5	2.24766×10^{-1}	2.16262×10^{-1}	2.06168×10^{-1}	1.83478×10^{-1}	1.09067×10^{-1}	4.93118×10^{-2}	–
-0.4	3.29332×10^{-1}	3.20180×10^{-1}	3.08043×10^{-1}	2.78888×10^{-1}	1.75209×10^{-1}	8.41043×10^{-2}	–
-0.3	4.72530×10^{-1}	4.65518×10^{-1}	4.52952×10^{-1}	4.18717×10^{-1}	2.82080×10^{-1}	1.47237×10^{-1}	–
-0.2	6.56823×10^{-1}	6.58388×10^{-1}	6.49493×10^{-1}	6.15205×10^{-1}	4.51464×10^{-1}	2.66180×10^{-1}	–
-0.1	8.70297×10^{-1}	8.94521×10^{-1}	8.97443×10^{-1}	8.72170×10^{-1}	6.97513×10^{-1}	4.91552×10^{-1}	–
-0.0	0.10317×10^{-1}	0.11477×10^{-1}	0.11879×10^{-1}	0.11944×10^{-1}	0.10087×10^{-1}	7.95747×10^{-1}	–
0.0	–	0.11477×10^{-1}	0.11879×10^{-1}	0.11944×10^{-1}	0.10087×10^{-1}	7.95747×10^{-1}	5.24172×10^{-1}
0.1	–	6.07530×10^{-1}	9.98580×10^{-1}	0.13847×10^{-1}	0.14118×10^{-1}	0.11580×10^{-1}	8.76455×10^{-1}
0.2	–	5.08874×10^{-1}	9.07215×10^{-1}	0.14378×10^{-1}	0.18263×10^{-1}	0.16127×10^{-1}	0.12914×10^{-1}
0.3	–	5.49990×10^{-1}	9.99893×10^{-1}	0.16482×10^{-1}	0.23078×10^{-1}	0.21558×10^{-1}	0.18054×10^{-1}
0.4	–	6.38613×10^{-1}	0.11692×10^{-1}	0.19577×10^{-1}	0.28730×10^{-1}	0.27782×10^{-1}	0.24010×10^{-1}
0.5	–	6.34269×10^{-1}	0.11686×10^{-1}	0.19832×10^{-1}	0.30333×10^{-1}	0.30342×10^{-1}	0.27105×10^{-1}
0.6	–	4.18259×10^{-1}	7.78086×10^{-1}	0.13461×10^{-1}	0.21839×10^{-1}	0.22950×10^{-1}	0.21536×10^{-1}
0.7	–	2.04882×10^{-1}	3.85809×10^{-1}	6.83932×10^{-1}	0.11933×10^{-1}	0.13320×10^{-1}	0.13268×10^{-1}
0.8	–	8.64750×10^{-2}	1.65149×10^{-1}	3.01013×10^{-1}	5.69582×10^{-1}	6.78607×10^{-1}	7.19933×10^{-1}
0.9	–	3.13662×10^{-2}	6.09008×10^{-2}	1.14611×10^{-1}	2.37335×10^{-1}	3.03206×10^{-1}	3.43477×10^{-1}
1.0	–	5.07111×10^{-3}	1.01191×10^{-2}	2.00435×10^{-2}	4.76083×10^{-2}	6.73491×10^{-2}	8.37578×10^{-2}

Na Tabela 5.5 abaixo temos o erro percentual comparado com Garcia e Siewert [Garcia and Siewert, 1985] referente ao caso P1 onde a solução particular foi obtida usando coeficientes a determinar e interpolação μ contínuo.

Tabela 5.5 – Erro Percentual - referente à P1 por coeficientes a determinar e interpolação μ contínuo

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
−1.0	0.0004	–	–	–	0.0001	0.0007	–
−0.9	0.0002	–	0.0003	0.0003	0.0006	0.0010	–
−0.8	0.0008	0.0005	0.0005	0.0006	0.0011	0.0018	–
−0.7	0.0007	0.0005	0.0004	0.0005	0.0009	0.0022	–
−0.6	0.0007	0.0007	0.0007	–	0.0006	0.0013	–
−0.5	0.0009	0.0005	0.0005	0.0005	0.0009	0.0014	–
−0.4	0.0012	0.0006	0.0006	0.0004	0.0006	0.0015	–
−0.3	–	0.0004	0.0004	0.0005	0.0007	0.0013	–
−0.2	0.0017	0.0003	0.0003	0.0001	0.0004	0.0011	–
−0.1	0.0032	0.0003	0.0003	0.0002	0.0001	0.0006	–
−0.0	–	–	–	–	–	0.0001	–
0.0	–	–	–	–	–	0.0001	0.0009
0.1	–	0.0030	0.0012	–	–	–	0.0017
0.2	–	0.0018	0.0009	0.0007	–	–	–
0.3	–	–	0.0005	–	–	–	–
0.4	–	0.0003	–	–	–	–	–
0.5	–	0.0003	–	–	–	–	–
0.6	–	0.0002	0.0001	0.0074	–	–	–
0.7	–	0.0005	0.0003	–	–	–	–
0.8	–	0.0002	0.0006	–	0.0002	0.0001	0.0001
0.9	–	0.0006	0.0003	0.0009	–	0.0003	0.0003
1.0	–	0.0004	–	–	–	0.0001	0.0001

Podemos notar que a intensidade de radiação calculada na direção $\mu = 0$ pelo método da convolução com interpolção angular DNI, apresentado na Tabela 5.2, nos mostra uma diferença significativa em relação a Tabela 5.4 e a literatura, diferença essa que pode ser observada com mais clareza na Tabela 5.3 de erro percentual. Isto ocorre porque para calculá-lo criamos um nó falso, $\mu = 10^{-12}$, para aproximar o valor em $\mu = 0$ [Segatto et al., 2005]. Já no caso de interpolação feita usando μ contínuo representado na Tabela 5.4, nenhuma aproximação é feita.

A solução apresentada na Tabela 5.4 exigiu um tempo computacional de 3960 segundos, enquanto que a solução apresentada na Tabela 5.5 consumiu um tempo computacional de 1532 segundos. Essa diferença no tempo computacional entre as duas soluções ocorre pelo fato de que quando usamos o método da convolução com interpolação DNI, representado na Tabela 5.2, temos que fazer a inversão da matriz dos autovetores e diagonalizamos uma matriz de ordem $N + M$, o que nos toma mais tempo, enquanto que na solução representada pela Tabela 5.4, onde aplicamos o método dos coeficientes a determinar com interpolação μ contínuo, onde não precisamos inverter a matriz dos autovalores e diagonalizar apenas uma matriz de ordem N, o tempo computacional se torna menor.

Observando as Tabelas 5.3 e 5.5 onde apresentamos os erros percentuais dos resultados encontrados comparados com os da literatura [Garcia and Siewert, 1985], notamos que os resultados encontrados pelo método dos coeficientes a determinar com interpolação de μ contínuo, apresentam uma boa precisão, por isso, os próximos serão calculados a partir deste método apenas.

Vamos analisar agora o caso P1 mas com o ângulo azimutal $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi - \varphi_0 = \pi$, respectivamente. Consideremos ainda $N = 400$ e $\omega = 0.9$:

Tabela 5.6 – Intensidade de Radiação - referente à P1 com $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	2.28189×10^{-2}	2.14170×10^{-2}	1.99920×10^{-2}	1.71574×10^{-2}	9.34718×10^{-3}	4.02510×10^{-3}	–
-0.9	2.69857×10^{-2}	2.53998×10^{-2}	2.37697×10^{-2}	2.04883×10^{-2}	1.12505×10^{-2}	4.83990×10^{-3}	–
-0.8	3.23249×10^{-2}	3.05432×10^{-2}	2.86840×10^{-2}	2.48815×10^{-2}	1.38575×10^{-2}	5.98681×10^{-3}	–
-0.7	3.90912×10^{-2}	3.71286×10^{-2}	3.50362×10^{-2}	3.06622×10^{-2}	1.74616×10^{-2}	7.63425×10^{-3}	–
-0.6	4.75187×10^{-2}	4.54441×10^{-2}	4.31582×10^{-2}	3.82269×10^{-2}	2.24926×10^{-2}	1.00583×10^{-2}	–
-0.5	5.76957×10^{-2}	5.56798×10^{-2}	5.33272×10^{-2}	4.79964×10^{-2}	2.95694×10^{-2}	1.37240×10^{-2}	–
-0.4	6.92915×10^{-2}	6.76840×10^{-2}	6.55502×10^{-2}	6.02589×10^{-2}	3.95482×10^{-2}	1.94419×10^{-2}	–
-0.3	8.09709×10^{-2}	8.04074×10^{-2}	7.90366×10^{-2}	7.47147×10^{-2}	5.34547×10^{-2}	2.86756×10^{-2}	–
-0.2	8.94074×10^{-2}	9.08990×10^{-2}	9.11594×10^{-2}	8.93861×10^{-2}	7.18221×10^{-2}	4.41108×10^{-2}	–
-0.1	8.86295×10^{-2}	9.36074×10^{-2}	9.65666×10^{-2}	9.91639×10^{-2}	9.15409×10^{-2}	6.94484×10^{-2}	–
-0.0	6.76009×10^{-2}	8.16002×10^{-2}	8.92208×10^{-2}	9.83753×10^{-2}	1.03483×10^{-2}	9.32363×10^{-2}	–
0.0	–	8.16002×10^{-2}	8.92208×10^{-2}	9.83753×10^{-2}	1.03483×10^{-2}	9.32363×10^{-2}	6.29167×10^{-2}
0.1	–	2.74455×10^{-2}	4.83605×10^{-2}	7.57563×10^{-2}	1.04621×10^{-1}	1.04386×10^{-1}	8.95878×10^{-2}
0.2	–	1.41320×10^{-2}	2.75936×10^{-2}	5.09054×10^{-2}	9.28864×10^{-2}	1.04678×10^{-1}	1.01176×10^{-1}
0.3	–	9.26821×10^{-3}	1.87286×10^{-2}	3.68729×10^{-2}	7.85462×10^{-2}	9.73997×10^{-2}	1.02989×10^{-1}
0.4	–	6.96611×10^{-3}	1.42407×10^{-2}	2.88241×10^{-2}	6.68030×10^{-2}	8.82944×10^{-2}	9.95173×10^{-2}
0.5	–	5.75701×10^{-3}	1.17844×10^{-2}	2.40716×10^{-2}	5.82336×10^{-2}	8.01152×10^{-2}	9.43188×10^{-2}
0.6	–	5.11011×10^{-3}	1.04248×10^{-2}	2.12815×10^{-2}	5.23826×10^{-2}	7.37539×10^{-2}	8.93292×10^{-2}
0.7	–	4.79694×10^{-3}	9.73431×10^{-3}	1.97630×10^{-2}	4.87194×10^{-2}	6.93675×10^{-2}	8.54623×10^{-2}
0.8	–	4.71109×10^{-3}	9.50501×10^{-3}	1.91500×10^{-2}	4.68395×10^{-2}	6.68824×10^{-2}	8.31199×10^{-2}
0.9	–	4.80631×10^{-3}	9.64232×10^{-3}	1.92633×10^{-2}	4.64995×10^{-2}	6.62127×10^{-2}	8.24986×10^{-2}
1.0	–	5.07111×10^{-3}	1.01191×10^{-2}	2.00435×10^{-2}	4.76083×10^{-2}	6.73491×10^{-2}	8.37578×10^{-2}

Tabela 5.7 – Erro Percentual - referente à P1 com $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	0.0004	–	–	–	0.0001	0.0007	–
-0.9	0.0015	0.0012	0.0013	0.0010	0.0018	0.0016	–
-0.8	0.0006	0.0003	0.0003	0.0004	0.0007	0.0010	–
-0.7	0.0007	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0013	–
-0.6	0.0015	0.0011	0.0011	0.0013	0.0013	0.0020	–
-0.5	0.0005	0.0003	0.0015	0.0004	0.0007	0.0022	–
-0.4	0.0009	0.0004	0.0006	0.0005	0.0007	0.0020	–
-0.3	0.0017	0.0010	0.0009	0.0009	0.0015	0.0021	–
-0.2	0.0016	0.0003	0.0003	0.0003	0.0005	0.0013	–
-0.1	0.0036	0.0004	0.0003	0.0003	0.0004	0.2870	–
-0.0	0, 0007	0.0020	0.0013	0.0009	0.0010	0.0006	–
0.0	–	0.0020	0.0013	0.0009	0.0010	0.0006	0.0004
0.1	–	0.0073	0.0029	0.0011	0.0009	0.0009	0.0032
0.2	–	0.0070	0.0033	0.0014	0.0004	–	0.0020
0.3	–	0.0071	0.0043	0.0022	0.0010	0.0007	0.0010
0.4	–	0.0042	0.0028	0.0010	0.0006	0.0003	0.0007
0.5	–	0.0033	0.0025	0.0008	0.0003	0.0002	0.0004
0.6	–	0.0037	0.0029	0.0018	0.0009	0.0006	0.0006
0.7	–	0.0019	0.0009	0.0005	0.0004	0.0002	0.0003
0.8	–	0.0013	0.0005	0.0005	0.0002	0.0001	0.0002
0.9	–	0.0019	0.0011	0.0010	0.0006	0.0004	0.0005
1.0	–	0.0004	–	0.0150	–	0.0001	0.0001

Tabela 5.8 – Intensidade de Radiação - referente à P1 com $\varphi - \varphi_0 = \pi$

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	2.28189×10^{-2}	2.14170×10^{-2}	1.99920×10^{-2}	1.71574×10^{-2}	9.34718×10^{-3}	4.02510×10^{-3}	–
-0.9	2.61851×10^{-2}	2.46216×10^{-2}	2.30414×10^{-2}	1.99041×10^{-2}	1.11588×10^{-2}	4.97192×10^{-3}	–
-0.8	3.20369×10^{-2}	3.01732×10^{-2}	2.82832×10^{-2}	2.45152×10^{-2}	1.38927×10^{-2}	6.24447×10^{-3}	–
-0.7	3.74819×10^{-2}	3.54360×10^{-2}	3.33333×10^{-2}	2.90812×10^{-2}	1.67591×10^{-2}	7.61009×10^{-3}	–
-0.6	4.12141×10^{-2}	3.92702×10^{-2}	3.72013×10^{-2}	3.28686×10^{-2}	1.95280×10^{-2}	9.02297×10^{-3}	–
-0.5	4.99438×10^{-2}	4.77777×10^{-2}	4.54323×10^{-2}	4.04501×10^{-2}	2.46586×10^{-2}	1.16631×10^{-2}	–
-0.4	5.50137×10^{-2}	5.32398×10^{-2}	5.11571×10^{-2}	4.64345×10^{-2}	2.98816×10^{-2}	1.47742×10^{-2}	–
-0.3	6.44929×10^{-2}	6.30130×10^{-2}	6.10799×10^{-2}	5.64127×10^{-2}	3.85983×10^{-2}	2.04382×10^{-2}	–
-0.2	7.08850×10^{-2}	7.03664×10^{-2}	6.91442×10^{-2}	6.55313×10^{-2}	4.91140×10^{-2}	2.92037×10^{-2}	–
-0.1	6.95582×10^{-2}	7.10897×10^{-2}	7.13780×10^{-2}	7.01216×10^{-2}	5.90301×10^{-2}	4.25266×10^{-2}	–
-0.0	5.47761×10^{-2}	6.23317×10^{-2}	6.55275×10^{-2}	6.81197×10^{-2}	6.39393×10^{-2}	5.39410×10^{-2}	–
0.0	–	6.23317×10^{-2}	6.55275×10^{-2}	6.81197×10^{-2}	6.39393×10^{-2}	5.39410×10^{-2}	3.42190×10^{-2}
0.1	–	1.99908×10^{-2}	3.42541×10^{-2}	5.10055×10^{-2}	6.25003×10^{-2}	5.80162×10^{-2}	4.66784×10^{-2}
0.2	–	9.41088×10^{-3}	1.79856×10^{-2}	3.18927×10^{-2}	5.27233×10^{-2}	5.56536×10^{-2}	5.06952×10^{-2}
0.3	–	5.52947×10^{-3}	1.10115×10^{-2}	2.10533×10^{-2}	4.15035×10^{-2}	4.87977×10^{-2}	4.91251×10^{-2}
0.4	–	3.67281×10^{-3}	7.45139×10^{-3}	1.48047×10^{-2}	3.24692×10^{-2}	4.12521×10^{-2}	4.48008×10^{-2}
0.5	–	2.67303×10^{-3}	5.46398×10^{-3}	1.10689×10^{-2}	2.59260×10^{-2}	3.47945×10^{-2}	3.99908×10^{-2}
0.6	–	2.11010×10^{-3}	4.31929×10^{-3}	8.82239×10^{-3}	2.14933×10^{-2}	2.99722×10^{-2}	3.59327×10^{-2}
0.7	–	1.81100×10^{-3}	3.69980×10^{-3}	7.56868×10^{-3}	1.88389×10^{-2}	2.69597×10^{-2}	3.33327×10^{-2}
0.8	–	1.72238×10^{-3}	3.50570×10^{-3}	7.15356×10^{-3}	1.79611×10^{-2}	2.61127×10^{-2}	3.29717×10^{-2}
0.9	–	1.93238×10^{-3}	3.91318×10^{-3}	7.93851×10^{-3}	1.98733×10^{-2}	2.90534×10^{-2}	3.70747×10^{-2}
1.0	–	5.07111×10^{-3}	1.01191×10^{-2}	2.00435×10^{-2}	4.76083×10^{-2}	6.73491×10^{-2}	8.37578×10^{-2}

Tabela 5.9 – Erro Percentual - referente à P1 com $\varphi - \varphi_0 = \pi$

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	0.0004	–	–	–	0.0001	0.0007	–
-0.9	0.0004	0.0004	0.0004	0.0005	0.0009	0.0008	–
-0.8	0.0003	0.0007	0.0003	0.0004	0.0007	0.0002	–
-0.7	0.0005	0.0006	0.0006	0.0003	–	0.0001	–
-0.6	0.0004	0.0005	0.0005	0.0003	–	0.0003	–
-0.5	0.0052	0.0046	0.0044	0.0040	0.0036	0.0046	–
-0.4	0.0005	0.0007	0.0008	0.0007	0.0003	0.0006	–
-0.3	0.0008	0.0003	0.0003	0.0003	0.0005	0.0015	–
-0.2	0.0025	0.0012	0.0011	0.0012	0.0010	0.0017	–
-0.1	0.0026	0.0003	0.0003	0.0001	0.0001	0.0007	–
-0.0	–	0.0011	0.0008	0.0006	0.0005	0.0003	–
0.0	–	0.0011	0.0008	0.0006	0.0005	0.0003	0.0003
0.1	–	0.0085	0.0041	0.0020	0.0009	0.0007	0.0036
0.2	–	0.0060	0.0028	0.0009	0.0002	0.0002	0.0012
0.3	–	0.0074	0.0045	0.0024	0.0012	0.0006	0.0012
0.4	–	0.0079	0.0047	0.0027	0.0015	0.0012	0.0013
0.5	–	0.0041	0.0017	0.0009	0.0004	0.0003	0.0005
0.6	–	0.0028	0.0009	0.0002	0.0005	–	0.0002
0.7	–	0.0039	0.0022	0.0012	0.0011	0.0007	0.0009
0.8	–	0.0035	0.0020	0.0012	0.0011	0.0008	0.0006
0.9	–	0.0010	–	0.0003	–	–	0.0002
1.0	–	0.0004	–	–	–	0.0001	0.0001

Os casos representados pelas Tabelas 5.6 e 5.8 foram calculados usando coeficientes a determinar com interpolação de μ contínuo. Seus respectivos erros percentuais estão expressos nas Tabelas 5.7 e 5.9 comparados com a literatura [Garcia and Siewert, 1985].

Agora, para o caso P2, usaremos o mesmo método e a mesma interpolação usada nas Tabelas 5.6 e 5.8, considerando os dados de entrada apresentados na Tabela 5.1, $N = 400$, $\omega = 0.9$ e $\varphi - \varphi_0 = 0$.

Tabela 5.10 – Intensidade de Radiação - referente à P2

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	2.79696×10^{-2}	2.65815×10^{-2}	2.51777×10^{-2}	2.23406×10^{-2}	1.37510×10^{-2}	6.70394×10^{-3}	–
-0.9	3.01800×10^{-2}	2.87426×10^{-2}	2.72762×10^{-2}	2.42822×10^{-2}	1.50369×10^{-2}	7.32788×10^{-3}	–
-0.8	3.14473×10^{-2}	3.00703×10^{-2}	2.86407×10^{-2}	2.56617×10^{-2}	1.60959×10^{-2}	7.85491×10^{-3}	–
-0.7	3.43834×10^{-2}	3.30553×10^{-2}	3.16402×10^{-2}	2.86056×10^{-2}	1.83139×10^{-2}	9.00247×10^{-3}	–
-0.6	3.91304×10^{-2}	3.78906×10^{-2}	3.65131×10^{-2}	3.34275×10^{-2}	2.20975×10^{-2}	1.10617×10^{-2}	–
-0.5	4.56379×10^{-2}	4.46172×10^{-2}	4.33840×10^{-2}	4.04032×10^{-2}	2.80085×10^{-2}	1.45142×10^{-2}	–
-0.4	5.35112×10^{-2}	5.29854×10^{-2}	5.21410×10^{-2}	4.96861×10^{-2}	3.68539×10^{-2}	2.02305×10^{-2}	–
-0.3	6.15410×10^{-2}	6.19908×10^{-2}	6.19780×10^{-2}	6.08857×10^{-2}	4.96160×10^{-2}	2.98271×10^{-2}	–
-0.2	6.69555×10^{-2}	6.90563×10^{-2}	7.04995×10^{-2}	7.20371×10^{-2}	6.66967×10^{-2}	4.63001×10^{-2}	–
-0.1	6.55280×10^{-2}	7.00041×10^{-2}	7.34324×10^{-2}	7.85904×10^{-2}	8.44628×10^{-2}	7.36106×10^{-2}	–
-0.0	5.17481×10^{-2}	6.17086×10^{-2}	6.80155×10^{-2}	7.74658×10^{-2}	9.39973×10^{-2}	9.74831×10^{-2}	–
0.0	–	6.17086×10^{-2}	6.80155×10^{-2}	7.74658×10^{-2}	9.39973×10^{-2}	9.74831×10^{-2}	7.93128×10^{-2}
0.1	–	2.24939×10^{-2}	3.95175×10^{-2}	6.26527×10^{-2}	9.62543×10^{-2}	1.08718×10^{-1}	1.08186×10^{-1}
0.2	–	1.31001×10^{-2}	2.53396×10^{-2}	4.67725×10^{-2}	9.15915×10^{-2}	1.13814×10^{-1}	1.24210×10^{-1}
0.3	–	1.01939×10^{-2}	2.02698×10^{-2}	3.94717×10^{-2}	8.74669×10^{-2}	1.16619×10^{-1}	1.35711×10^{-1}
0.4	–	9.52893×10^{-3}	1.90675×10^{-2}	3.77702×10^{-2}	8.83323×10^{-2}	1.22502×10^{-1}	1.48267×10^{-1}
0.5	–	1.02636×10^{-2}	2.05023×10^{-2}	4.06492×10^{-2}	9.64184×10^{-2}	1.35816×10^{-1}	1.67515×10^{-1}
0.6	–	1.25292×10^{-2}	2.49093×10^{-2}	4.90654×10^{-2}	1.15336×10^{-1}	1.62230×10^{-1}	2.00700×10^{-1}
0.7	–	1.74170×10^{-2}	3.44150×10^{-2}	6.70809×10^{-2}	1.53981×10^{-1}	2.13562×10^{-1}	2.61671×10^{-1}
0.8	–	2.85621×10^{-2}	5.60203×10^{-2}	1.07696×10^{-1}	2.38485×10^{-1}	3.22549×10^{-1}	3.86920×10^{-1}
0.9	–	6.16330×10^{-2}	1.19763×10^{-1}	2.26123×10^{-1}	4.76102×10^{-1}	6.19703×10^{-1}	7.17744×10^{-1}
1.0	–	3.28123×10^{-1}	6.29064×10^{-1}	0.11563×10^{-1}	2.24839×10^{0}	0.27414×10^{-1}	0.29776×10^{-1}

Tabela 5.11 – Erro Percentual - referente à P2

μ	$x=0$	$x=x_0/20$	$x=x_0/10$	$x=x_0/5$	$x=x_0/2$	$x=3x_0/4$	$x=x_0$
-1.0	0.0075	0.0071	0.0071	0.0067	0.0065	0.0067	–
-0.9	0.0007	0.0003	0.0004	0.0008	0.0007	0.0007	–
-0.8	0.0015	0.0020	0.0014	0.0016	0.0019	0.0016	–
-0.7	0.0014	0.0012	0.0016	0.0014	0.0016	0.0018	–
-0.6	0.0010	0.0010	0.0011	0.0008	0.0009	0.0018	–
-0.5	–	0.0002	–	–	0.0003	0.0007	–
-0.4	0.0002	–	–	0.0002	0.0002	0.0015	–
-0.3	0.0016	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0020	–
-0.2	0.0010	0.0001	0.0001	0.0001	0.0004	0.0011	–
-0.1	0.0024	–	–	–	–	0.0005	–
-0.0	0.0008	0.0016	0.0012	0.0009	0.0006	0.0006	–
0.0	–	0.0016	0.0012	0.0009	0.0006	0.0006	0.0002
0.1	–	0.0044	0.0015	0.0005	–	–	0.0028
0.2	–	0.0046	0.0020	0.0008	0.0001	0.0009	–
0.3	–	0.0039	0.0025	0.0012	0.0007	0.0008	0.0007
0.4	–	0.0014	0.0010	0.0003	–	0.0008	0.0006
0.5	–	0.0010	–	–	0.0001	0.0007	0.0006
0.6	–	0.0008	0.0008	0.0004	–	–	0.0005
0.7	–	0.0005	0.0006	0.0003	0.0006	0.0005	0.0004
0.8	–	0.0007	0.0002	0.0009	0.0004	0.0003	0.0003
0.9	–	0.0001	–	0.0004	0.0002	–	0.0001
1.0	–	0.0003	0.0001	–	–	–	–

Podemos observar que os todos resultados encontrados nas Tabelas 5.2, 5.4, 5.6, 5.8 e 5.10 apresentam uma coincidência em 5 casas decimais com mais ou menos um algarismo significativo com os resultados da literaura [Garcia and Siewert, 1985]. Mas devemos levar em conta uma diferença na direção $\mu = -1.0$ que encontramos no caso P2, representado na Tabela 5.10, quando comparado com os da literatura, diferença essa não compreendida.

Finalizando, para os problemas com grau de anisotropia 82, como já visto, reproduzidos para N=400 pelo método dos coeficientes a determinar utilizando μ contínuo, temos uma equivalência de resultados com os encontrados na literatura [Garcia and Siewert, 1985] em todos os casos.

5.2 Problema Anisotrópico de Grau 299 Sem Simetria Azimutal

Foram resolvidos três problemas, nos quais o albedo de espalhamento é $\omega = 0.9$ e o grau de anisotropia é 299. Os dados de entrada nesta seção foram obtidos de Chaloub, [Chalhoub, 1997] e Garcia e Siewert, [Garcia and Siewert, 1985], sendo apresentados na Tabela 5.12 os dados de entrada:

Tabela 5.12 – Dados de entrada - para problemas de anisotropia de grau 299

	$P3$	$P4$	$P5$
μ_0	0.2	0.2	1
x_0	1	64	64
$\varphi - \varphi_0$	0	0	0

Os resultados apresentados na Tabela 5.13 foram encontrados para o problema P3 utilizando o método da convolução com interpolação angular DNI, já os resultados apresentados na Tabela 5.14 foram encontrados utilizando o método dos coeficientes a determinar com interpolação usando μ contínuo, para nível de comparação de tempo computacional.

Tabela 5.13 – Intensidade de Radiação - referente à P3 por convolução e interpolação DNI

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	6.90053×10^{-3}	6.24321×10^{-3}	5.62525×10^{-3}	4.52096×10^{-3}	2.11193×10^{-3}	8.38967×10^{-4}	–
-0.9	1.99909×10^{-2}	1.78407×10^{-2}	1.58316×10^{-2}	1.23058×10^{-2}	5.11130×10^{-3}	1.79461×10^{-3}	–
-0.8	4.09026×10^{-2}	3.64932×10^{-2}	3.23660×10^{-2}	2.51262×10^{-2}	1.04126×10^{-2}	3.65994×10^{-3}	–
-0.7	7.54494×10^{-2}	6.73560×10^{-2}	5.97701×10^{-2}	4.64607×10^{-2}	1.94179×10^{-2}	6.92897×10^{-3}	–
-0.6	1.30972×10^{-1}	1.17058×10^{-1}	1.03991×10^{-1}	8.10431×10^{-2}	3.43245×10^{-2}	1.25055×10^{-2}	–
-0.5	2.20271×10^{-1}	1.97153×10^{-1}	1.75394×10^{-1}	1.37141×10^{-1}	5.90603×10^{-2}	2.20751×10^{-2}	–
-0.4	3.65073×10^{-1}	3.27334×10^{-1}	2.91717×10^{-1}	2.29020×10^{-1}	1.00696×10^{-1}	3.88704×10^{-2}	–
-0.3	6.03804×10^{-1}	5.42577×10^{-1}	4.84582×10^{-1}	3.82354×10^{-1}	1.72733×10^{-1}	6.96742×10^{-2}	–
-0.2	0.10074×10^{-1}	9.08071×10^{-1}	8.13250×10^{-1}	6.45788×10^{-1}	3.03056×10^{-1}	1.31053×10^{-1}	–
-0.1	0.17190×10^{-1}	0.15586×10^{-1}	0.14011×10^{-1}	0.11201×10^{-1}	5.51529×10^{-1}	2.73137×10^{-1}	–
-0.0	6.69223×10^{-1}	0.13877×10^{-1}	0.15196×10^{-1}	0.14833×10^{-1}	9.28439×10^{-1}	5.53745×10^{-1}	–
0.0	–	0.13877×10^{-1}	0.15196×10^{-1}	0.14833×10^{-1}	9.28439×10^{-1}	5.53745×10^{-1}	2.46566×10^{-1}
0.1	–	0.18811×10^{-1}	0.30880×10^{-1}	0.41510×10^{-1}	0.32209×10^{-1}	0.18999×10^{-1}	0.10356×10^{-1}
0.2	–	0.76738×10^{-2}	0.12225×10^{-3}	1.55364×10^{-1}	0.10090×10^{-3}	5.00688×10^{-1}	0.22512×10^{-2}
0.3	–	6.48490×10^{-1}	0.11662×10^{-1}	1.88030×10^{-1}	0.24392×10^{-1}	0.21113×10^{-1}	0.16260×10^{-1}
0.4	–	1.93970×10^{-1}	3.55816×10^{-1}	5.96406×10^{-1}	8.74570×10^{-1}	8.47526×10^{-1}	7.37379×10^{-1}
0.5	–	1.02118×10^{-1}	1.89568×10^{-1}	3.25438×10^{-1}	5.14082×10^{-1}	5.31710×10^{-1}	4.94805×10^{-1}
0.6	–	5.60116×10^{-2}	1.04942×10^{-1}	1.83555×10^{-1}	3.07335×10^{-1}	3.34332×10^{-1}	3.27580×10^{-1}
0.7	–	2.97955×10^{-2}	5.62909×10^{-2}	1.00127×10^{-1}	1.76548×10^{-1}	2.00712×10^{-1}	2.05565×10^{-1}
0.8	–	1.47591×10^{-2}	2.81215×10^{-2}	5.08775×10^{-2}	9.44231×10^{-2}	1.12010×10^{-1}	1.19625×10^{-1}
0.9	–	6.26438×10^{-3}	1.20544×10^{-2}	2.22410×10^{-2}	4.37401×10^{-2}	5.43718×10^{-2}	6.07358×10^{-2}
1.0	–	1.01865×10^{-3}	2.00948×10^{-3}	3.88547×10^{-3}	8.68024×10^{-3}	1.18615×10^{-2}	1.44337×10^{-2}

Tabela 5.14 – Intensidade de Radiação - referente à P3 por coeficientes a determinar e interpolação μ contínuo

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	6.90053×10^{-3}	6.24321×10^{-3}	5.62525×10^{-3}	4.52096×10^{-3}	2.11193×10^{-3}	8.38967×10^{-4}	–
-0.9	1.99909×10^{-2}	1.78407×10^{-2}	1.58316×10^{-2}	1.23058×10^{-2}	5.11130×10^{-3}	1.79461×10^{-3}	–
-0.8	4.09026×10^{-2}	3.64932×10^{-2}	3.23660×10^{-2}	2.51262×10^{-2}	1.04126×10^{-2}	3.65994×10^{-3}	–
-0.7	7.54494×10^{-2}	6.73560×10^{-2}	5.97701×10^{-2}	4.64607×10^{-2}	1.94179×10^{-2}	6.92897×10^{-3}	–
-0.6	1.30972×10^{-1}	1.17058×10^{-1}	1.03991×10^{-1}	8.10431×10^{-2}	3.43245×10^{-2}	1.25055×10^{-2}	–
-0.5	2.20271×10^{-1}	1.97153×10^{-1}	1.75394×10^{-1}	1.37141×10^{-1}	5.90603×10^{-2}	2.20751×10^{-2}	–
-0.4	3.65073×10^{-1}	3.27334×10^{-1}	2.91717×10^{-1}	2.29020×10^{-1}	1.00696×10^{-1}	3.88704×10^{-2}	–
-0.3	6.03804×10^{-1}	5.42577×10^{-1}	4.84582×10^{-1}	3.82354×10^{-1}	1.72733×10^{-1}	6.96742×10^{-2}	–
-0.2	0.10074×10^{-1}	9.08071×10^{-1}	8.13250×10^{-1}	6.45788×10^{-1}	3.03056×10^{-1}	1.31053×10^{-1}	–
-0.1	0.17190×10^{-1}	0.15586×10^{-1}	0.14011×10^{-1}	0.11201×10^{-1}	5.51529×10^{-1}	2.73137×10^{-1}	–
-0.0	0.23665×10^{-1}	0.27096×10^{-1}	0.25491×10^{-1}	0.21077×10^{-1}	0.10677×10^{-1}	5.93663×10^{-1}	–
0.0	–	0.27096×10^{-1}	0.25491×10^{-1}	0.21077×10^{-1}	0.10677×10^{-1}	5.93663×10^{-1}	2.58003×10^{-1}
0.1	–	0.18811×10^{-1}	0.30880×10^{-1}	0.41510×10^{-1}	0.32209×10^{-1}	0.18999×10^{-1}	0.10356×10^{-1}
0.2	–	7.67387×10^{-1}	1.22255×10^{-2}	1.55364×10^{-2}	1.00900×10^{-2}	5.00688×10^{-1}	2.25120×10^{-1}
0.3	–	6.48490×10^{-1}	0.11662×10^{-1}	0.18803×10^{-1}	0.24392×10^{-1}	0.21113×10^{-1}	0.16260×10^{-1}
0.4	–	1.93970×10^{-1}	3.55816×10^{-1}	5.96406×10^{-1}	8.74570×10^{-1}	8.47526×10^{-1}	7.37379×10^{-1}
0.5	–	1.02118×10^{-1}	1.89568×10^{-1}	3.25438×10^{-1}	5.14082×10^{-1}	5.31710×10^{-1}	4.94805×10^{-1}
0.6	–	5.60116×10^{-2}	1.04942×10^{-1}	1.83555×10^{-1}	3.07335×10^{-1}	3.34332×10^{-1}	3.27580×10^{-1}
0.7	–	2.97955×10^{-2}	5.62909×10^{-2}	1.00127×10^{-1}	1.76548×10^{-1}	2.00712×10^{-1}	2.05565×10^{-1}
0.8	–	1.47591×10^{-2}	2.81215×10^{-2}	5.08775×10^{-2}	9.44231×10^{-2}	1.12010×10^{-1}	1.19625×10^{-1}
0.9	–	6.26438×10^{-3}	1.20544×10^{-2}	2.22410×10^{-2}	4.37401×10^{-2}	5.43718×10^{-2}	6.07358×10^{-2}
1.0	–	1.01865×10^{-3}	2.00948×10^{-3}	3.88547×10^{-3}	8.68024×10^{-3}	1.18615×10^{-2}	1.44337×10^{-2}

Tabela 5.15 – Erro Percentual - referente à P3 por convolução e interpolação DNI

μ	$x=0$	$x=x_0/20$	$x=x_0/10$	$x=x_0/5$	$x=x_0/2$	$x=3x_0/4$	$x=x_0$
-1.0	0.0010	0.0002	0.0009	0.0009	0.0014	0.0015	–
-0.8	0.0010	0.0005	–	0.0008	0.0038	0.0016	–
-0.6	0.0015	0.0017	0.0010	0.0001	0.0014	0.0040	–
-0.4	0.0020	0.0018	0.0010	–	0.0040	0.0015	–
-0.2	0.0100	0.0001	–	0.0003	0.0014	0.0023	–
-0.0	71.7210	48.7877	40.3891	29.6247	13.0512	6.7235	–
0.0	–	48.7877	40.3891	29.6247	13.0512	6.7235	4.4021
0.2	–	0.0013	0.0082	0.0026	–	0.0004	–
0.4	–	–	0.0011	0.0007	–	0.0005	0.0001
0.6	–	0.0007	0.0019	0.0027	0.0016	0.0006	–
0.8	–	0.0007	0.0018	0.0010	0.0001	–	0.0042
1.0	–	0.0050	0.0010	0.0008	0.0007	0.0042	0.0021

Tabela 5.16 – Erro Percentual - referente à P3 por coeficientes a determinar e interpolação μ contínuo

μ	$x=0$	$x=x_0/20$	$x=x_0/10$	$x=x_0/5$	$x=x_0/2$	$x=3x_0/4$	$x=x_0$
-1.0	0.0010	0.0002	0.0009	0.0009	0.0014	0.0015	–
-0.8	0.0010	0.0005	–	0.0008	0.0038	0.0016	–
-0.6	0.0015	0.0017	0.0010	0.0001	0.0014	0.0040	–
-0.4	0.0020	0.0018	0.0010	–	0.0040	0.0015	–
-0.2	0.0100	0.0001	–	0.0003	0.0013	0.0023	–
-0.0	–	0.0037	0.0039	–	0.0094	0.0005	–
0.0	–	0.0037	0.0039	–	0.0094	0.0005	0.03218
0.2	–	0.0004	0.0040	0.0026	–	0.0004	–
0.4	–	–	0.0011	0.0007	–	0.0005	0.0001
0.6	–	0.0007	0.0019	0.0027	0.0016	0.0006	–
0.8	–	0.0007	0.0018	0.0010	0.0001	–	0.0042
1.0	–	0.0050	0.0010	0.0008	0.0007	0.0042	0.0021

Podemos observar nas Tabelas 5.15 e 5.16, respectivamente, os erros percentuais calculados referentes as Tabelas 5.13 e 5.14, comparados com Chalhoub [Chalhoub, 1997].

A solução apresentada na Tabela 5.13 exigiu um tempo computacional de 17343 segundos, enquanto a solução apresentada na Tabela 5.14 consumiu um tempo computacional de 7758 segundos. Essa diferença no tempo computacional entre as soluções ocorre pelo fato de que quando usamos o método da convolução com interpolação DNI, representado na

Tabela 5.13, temos que fazer a inversão da matriz dos autovetores e diagonalizamos uma matriz de ordem $N+M$, o que nos toma mais tempo, enquanto que na solução representada pela Tabela 5.14, onde aplicamos o método dos coeficientes a determinar com interpolação μ contínuo, onde não precisamos inverter a matriz dos autovalores e diagonalizar apenas uma matriz de ordem N o tempo computacional se torna menor. Ainda levando em consideração o grau de anisotropia. Por esse fato os próximos casos P4 e P5 serão obtidos através do método dos coeficientes a determinar e interpolação μ contínuo.

Tabela 5.17 – Intensidade de Radiação - referente à P4

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	1.56934×10^{-2}	4.31091×10^{-3}	1.91727×10^{-3}	4.17706×10^{-4}	4.69283×10^{-6}	1.11761×10^{-7}	–
-0.9	3.14606×10^{-2}	4.48308×10^{-3}	1.95660×10^{-3}	4.32180×10^{-4}	4.89712×10^{-6}	1.16674×10^{-7}	–
-0.8	5.58197×10^{-2}	5.13013×10^{-3}	2.11071×10^{-3}	4.57169×10^{-4}	5.16875×10^{-6}	1.23165×10^{-7}	–
-0.7	9.44517×10^{-2}	6.06882×10^{-3}	2.33464×10^{-3}	4.91076×10^{-4}	5.51929×10^{-6}	1.31525×10^{-7}	–
-0.6	1.54445×10^{-1}	7.34403×10^{-3}	2.63382×10^{-3}	5.35018×10^{-4}	5.96296×10^{-6}	1.42094×10^{-7}	–
-0.5	2.48008×10^{-1}	9.03817×10^{-3}	3.02084×10^{-3}	5.90617×10^{-4}	6.51657×10^{-6}	1.55272×10^{-7}	–
-0.4	3.95629×10^{-1}	1.12706×10^{-2}	3.51386×10^{-3}	6.59956×10^{-4}	7.20016×10^{-6}	1.71537×10^{-7}	–
-0.3	6.33514×10^{-1}	1.42105×10^{-2}	4.13714×10^{-3}	7.45639×10^{-4}	8.03769×10^{-6}	1.91458×10^{-7}	–
-0.2	0.10302×10^{-1}	1.80990×10^{-2}	4.92255×10^{-3}	8.50901×10^{-4}	9.05805×10^{-6}	2.15721×10^{-7}	–
-0.1	0.17319×10^{-1}	2.32933×10^{-2}	5.91199×10^{-3}	9.79760×10^{-4}	1.02962×10^{-5}	2.45156×10^{-7}	–
-0.0	0.23727×10^{-1}	3.03777×10^{-2}	7.16109×10^{-3}	1.13721×10^{-3}	1.17947×10^{-5}	2.80773×10^{-7}	–
0.0	–	3.03777×10^{-2}	7.16109×10^{-3}	1.13721×10^{-3}	1.17947×10^{-5}	2.80773×10^{-7}	3.31412×10^{-9}
0.1	–	4.07949×10^{-2}	8.74532×10^{-3}	1.32949×10^{-3}	1.36057×10^{-5}	3.23806×10^{-7}	5.91259×10^{-9}
0.2	–	6.67340×10^{-2}	1.07739×10^{-2}	1.56439×10^{-3}	1.57932×10^{-5}	3.75775×10^{-7}	7.55759×10^{-9}
0.3	–	9.39506×10^{-2}	1.34340×10^{-2}	1.85167×10^{-3}	1.84365×10^{-5}	4.38557×10^{-7}	9.32972×10^{-9}
0.4	–	1.11783×10^{-1}	1.69797×10^{-2}	2.20357×10^{-3}	2.16342×10^{-5}	5.14490×10^{-7}	1.13415×10^{-8}
0.5	–	1.23052×10^{-1}	2.13664×10^{-2}	2.63509×10^{-3}	2.55097×10^{-5}	6.06498×10^{-7}	1.36867×10^{-8}
0.6	–	1.20146×10^{-1}	2.57858×10^{-2}	3.16192×10^{-3}	3.02183×10^{-5}	7.18270×10^{-7}	1.64672×10^{-8}
0.7	–	1.05251×10^{-1}	2.89527×10^{-2}	3.78865×10^{-3}	3.59567×10^{-5}	8.54494×10^{-7}	1.98044×10^{-8}
0.8	–	8.33078×10^{-2}	2.97751×10^{-2}	4.48325×10^{-3}	4.29737×10^{-5}	1.02117×10^{-7}	2.38489×10^{-8}
0.9	–	5.81230×10^{-2}	2.75113×10^{-2}	5.14011×10^{-3}	5.15791×10^{-5}	1.22607×10^{-6}	2.87903×10^{-8}
1.0	–	2.45440×10^{-2}	1.83656×10^{-2}	5.22681×10^{-3}	6.20349×10^{-5}	1.47919×10^{-6}	3.48739×10^{-8}

Tabela 5.18 – Intensidade de Radiação - referente à P5

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	2.09772×10^{-1}	8.66125×10^{-2}	4.13435×10^{-2}	9.51105×10^{-3}	1.08267×10^{-4}	2.57858×10^{-6}	–
-0.9	1.33056×10^{-1}	7.99160×10^{-2}	4.16422×10^{-2}	9.88858×10^{-3}	1.13003×10^{-4}	2.69194×10^{-6}	–
-0.8	1.55856×10^{-1}	8.49794×10^{-2}	4.37516×10^{-2}	1.04151×10^{-2}	1.19269×10^{-4}	2.84172×10^{-6}	–
-0.7	1.22476×10^{-1}	8.30448×10^{-2}	4.53146×10^{-2}	1.10713×10^{-2}	1.27345×10^{-4}	3.03459×10^{-6}	–
-0.6	1.06130×10^{-1}	8.38166×10^{-2}	4.77055×10^{-2}	1.19091×10^{-2}	1.37560×10^{-4}	3.27842×10^{-6}	–
-0.5	1.00372×10^{-1}	8.72626×10^{-2}	5.11025×10^{-2}	1.29657×10^{-2}	1.50302×10^{-4}	3.58245×10^{-6}	–
-0.4	9.36359×10^{-2}	9.18819×10^{-2}	5.54027×10^{-2}	1.42754×10^{-2}	1.66031×10^{-4}	3.95768×10^{-6}	–
-0.3	8.61096×10^{-2}	9.77874×10^{-2}	6.07301×10^{-2}	1.58826×10^{-2}	1.85298×10^{-4}	4.41725×10^{-6}	–
-0.2	7.84671×10^{-2}	1.05214×10^{-1}	6.72523×10^{-2}	1.78410×10^{-2}	2.08766×10^{-4}	4.97698×10^{-6}	–
-0.1	6.76101×10^{-2}	1.14041×10^{-1}	7.51246×10^{-2}	2.02152×10^{-2}	2.37239×10^{-4}	5.65602×10^{-6}	–
-0.0	4.06491×10^{-2}	1.24429×10^{-1}	8.45706×10^{-2}	2.30841×10^{-2}	2.71692×10^{-4}	6.47766×10^{-6}	–
0.0	–	1.24429×10^{-1}	8.45706×10^{-2}	2.30841×10^{-2}	2.71692×10^{-4}	6.47766×10^{-6}	7.64638×10^{-8}
0.1	–	1.36597×10^{-1}	9.58751×10^{-2}	2.65448×10^{-2}	3.13320×10^{-4}	7.47040×10^{-6}	1.36416×10^{-7}
0.2	–	1.50947×10^{-1}	1.09418×10^{-1}	3.07180×10^{-2}	3.63591×10^{-4}	8.66925×10^{-6}	1.74369×10^{-7}
0.3	–	1.68265×10^{-1}	1.25733×10^{-1}	3.57557×10^{-2}	4.24323×10^{-4}	1.01175×10^{-5}	2.15256×10^{-7}
0.4	–	1.90216×10^{-1}	1.45622×10^{-1}	4.18533×10^{-2}	4.97776×10^{-4}	1.18691×10^{-5}	2.61673×10^{-7}
0.5	–	2.20190×10^{-1}	1.70416×10^{-1}	4.92709×10^{-2}	5.86780×10^{-4}	1.39916×10^{-5}	3.15782×10^{-7}
0.6	–	2.63712×10^{-1}	2.02431×10^{-1}	5.83725×10^{-2}	6.94909×10^{-4}	1.65699×10^{-5}	3.79933×10^{-7}
0.7	–	3.31269×10^{-1}	2.46091×10^{-1}	6.97143×10^{-2}	8.26710×10^{-4}	1.97123×10^{-5}	4.56929×10^{-7}
0.8	–	4.46037×10^{-1}	3.10865×10^{-1}	8.42686×10^{-2}	9.88029×10^{-4}	2.35574×10^{-5}	5.50243×10^{-7}
0.9	–	6.76715×10^{-1}	4.22683×10^{-1}	1.04173×10^{-1}	1.18650×10^{-3}	2.82846×10^{-5}	6.64252×10^{-7}
1.0	–	6.94794×10^{-1}	0.89756×10^{-1}	2.23085×10^{-1}	1.43268×10^{-3}	3.41286×10^{-5}	8.04618×10^{-7}

Tabela 5.19 – Erro Percentual - referente à P4

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	0.0025	0.0002	0.0016	0.0009	0.0014	0.0089	–
-0.8	0.0054	0.0014	0.0048	16.4484	0.0010	0.0040	–
-0.6	0.0032	0.0009	0.0007	0.0003	0.0007	0.0028	–
-0.4	0.0002	0.0035	0.0011	0.0006	0.0005	0.0017	–
-0.2	–	–	0.0010	0.0001	0.0005	0.0005	–
-0.0	0.0042	0.0010	0.0001	0.0009	0.0025	0.0011	–
0.0	–	0.0010	0.0001	0.0009	0.0025	0.0011	0.0187
0.2	–	–	0.0009	0.0064	0.0013	0.0013	0.0001
0.4	–	0.0027	0.0018	0.0013	0.0009	–	0.0044
0.6	–	0.0033	0.0077	0.0006	0.0009	–	0.0012
0.8	–	0.0002	0.0033	0.0011	0.0007	90.0003	0.0004
1.0	–	–	0.0022	0.0017	0.0002	0.0007	0.0002

Tabela 5.20 – Erro Percentual - referente à P5

μ	$x = 0$	$x = x_0/20$	$x = x_0/10$	$x = x_0/5$	$x = x_0/2$	$x = 3x_0/4$	$x = x_0$
-1.0	0.0005	0.0001	–	–	–	–	–
-0.9	0.0007	–	0.0002	–	0.0009	0.0003	–
-0.8	0.0006	0.3531	–	0.0010	0.0008	–	–
-0.7	0.0008	–	–	0.0009	0.0008	0.0003	–
-0.6	0.0009	–	–	–	0.0007	0.0003	–
-0.5	–	0.0002	–	0.0008	–	0.0002	–
-0.4	0.0002	–	0.0002	0.0007	–	–	–
-0.3	0.0002	0.0010	0.0002	–	–	–	–
-0.2	0.0005	–	0.0001	0.0006	0.0004	–	–
-0.1	0.0016	–	–	0.0005	–	–	–
-0.0	0.0241	–	–	–	–	0.0001	–
0.0	–	–	–	–	–	0.0001	0.0251
0.1	–	0.0007	–	–	–	–	0.0015
0.2	–	–	–	–	0.0003	–	0.0006
0.3	–	–	–	–	0.0002	–	0.0005
0.4	–	0.0005	–	0.0002	0.0002	0.0008	0.0004
0.5	–	–	–	0.0002	0.0001	–	–
0.6	–	–	–	–	0.0001	–	–
0.7	–	0.0127	0.0004	–	–	0.0005	0.0002
0.8	–	–	0.0003	0.0001	0.0001	0.0004	–
0.9	–	0.0001	–	0.0009	–	0.0003	–
1.0	–	–	0.0007	–	0.0007	–	–

Na Tabela 5.19 temos o erro percentual do resultado encontrado na Tabela 5.17

comparado com os resultados de Chalhoub, 1997 [Chalhoub, 1997].

No caso P5, representado na Tabela 5.18, os resultados foram comparados com Garcia e Siewert [Garcia and Siewert, 1985] para construção da tabela de erro percentual apresentados na Tabela 5.20.

Em todos os casos de anisotropia 82 e 299, a grande diferença que podemos observar entre os métodos foi no tempo computacional. No método da convolução temos a desvantagem que a ordem da quadratura aumenta de N para $N = N + 22$, isso ocorre pelo fato da inclusão dos nós fictícios, o que não ocorre no método dos coeficientes a determinar. Além disto, quando usamos coeficientes a determinar, em vez de convolução, temos que resolver um sistema de N equações por N incógnitas, o que é menos custoso do que inverter uma matriz $N + M$ (a matriz dos autovalores utilizada na convolução).

6. CONCLUSÕES FINAIS

O objetivo da presente dissertação foi alcançado quando a solução particular pôde ser calculada por coeficientes a deteminar fazendo assim com o que o tempo computacinal diminuísse.

Utilizamos no presente trabalho dois tipos de interpolação, "Inclusão de Nós fictícios" que aumenta a ordem da matriz LTS_N e não aproxima bem a intensidade de radiação quando μ se aproxima de zero, e a interpolação considerando μ contínuo que apresenta bom comportamento para aproximar a intensidade de radiação na singularidade em $\mu = 0$ e não aumenta a ordem da matriz LTS_N.

Observando também que os resultados numéricos obtidos pelos métodos propostos apresentaram uma boa precisão quando comparados com os da literatura, tendo uma coincidencia de 5 casas decimais. Podemos analisar melhor esta aproximação na análise das tabelas de erros percentuais apresentadas no trabalho, onde tivemos o pior resultado comparado com a literatura um percentual de 77,91% de erro, onde esses erros ocorrem quando utilizamos convolução com interpolação DNI - "Inclusão de nós fictícios", enquanto na melhor aproximação tivemos um percentual de 0.0001% de erro, que ocorreu quando usamos o método dos coeficientes a determinar com interpolação de μ contínuo, o qual se mostrou bastante eficiente, tanto para casos com $N = 400$, bem como para N maiores (que não foram apresentados).

Fica proposto, para continuidade do trabalho, que se observado a simetria da matriz A, existem relações entre os blocos quadrados A_{11} e A_{22} bem como A_{12} e A_{21} ambos de ordem $N/2$. Com isto, fazendo uso dessas relações, esperamos encontrar uma forma para calcular os autovalores e autovetores da matriz A através dos autovalores e autovetores destes blocos de ordem N/2.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ambarzumian, B., 1944. "On the Problem of the Difuse Reflection of Light", **Journal of Physics (Academy of Sciences USSR)**, vol. 8, pp. 65 – 75.

Barichello, L.B., 1992. "Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional", **Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil**.

Barichello, L.B. and Vilhena, M.T., 1993. "A General Analytical Approach to One Group One Dimensional Transport Equation", **Kerntechnik**, vol. 58, pp. 182 – 184.

Barichello L.B., 1995. "A particular Solution for the S_N Radiative Transfer Problems", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 53, pp. 467 – 469.

Barichello, L.B., Garcia, R.D.M. and Siewert, C.E., 1997. "A Spherical-Harmonics Solution for Radiative Transfer Problems with Reflecting Boundaries and Internal Sources" **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 60, pp. 247 – 260.

Barichello, L.B. and Siewert, C.E., 2000. "The Searchlight Problem for Radiative Transfer in a Finite Slab", **Journal of Computational Physycs**, vol. 157, pp. 707 – 726.

Benassi, M., Garcia R.D.M., Karp A.H. and Siewert, C.E., 1984. "A High-Order Spherical Harmonics Solution to the Standard Problem In Radiative Transfer", **The Astrophysical Journal** vol. 280, pp. 853 – 864.

Brancher, J.D., 1998. "Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenadas Discretas pelo Método LTS_N, para Valores de N Grandes", **Tese de Doutorado,**

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalurgia e Materiais, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Brancher, J.D., Cardona, A.V. and Vilhena, M.T., 1998. "A Recursive Method to Invert the LTS_N Matrix.", **Progress in Nuclear Energy**, vol. 33, pp. 393-401.

Brancher, J.D., Segatto, C.F., and Vilhena, M.T., 1999. "The $\mathrm{LTS_N}$ Solution for Radiative Transfer Problem Without Azimuthal Symmetry with Severe Anisotropy", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 62, pp. 743 – 753.

Cardona, A.V., 2008. "Comunicação Privada".

Chalhoub, E.S., 1997. "O Método das Ordenadas Discretas na Solução da Equação de Transporte em Geometria Plana com Dependência Azimutal", **Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Ciências Exatas e da Terra, Universidade de São Paulo, SP, Brasil**.

Chalhoub, E.S. and Garcia, R.D.M., 1997. "On the Solution of Azimuthally Dependent Transport Problems with the Anisn Code", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 24, pp. 1069 – 1084.

Chalhoub, E.S. and Garcia, R.D.M., 1998. "A New Quadrature Scheme for Solving Azimuthally Dependent Transport Problems", **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 27, pp. 607 – 624.

Chalhoub, E.S., 2003. "Discrete-Ordinates Solution for Radiative-Transfer Problems", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 76, pp. 193 – 206.

Chalhoub, E.S., Velho, H.F.C. and Garcia, R.D.M., 2003. "A Comparison of Radiances Generated by Selected Methods of Solving the Radiative-Transfer Equation", **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 32, pp. 473 – 503.

Chandrasekhar, S., 1946. "On the Radiative Equilibrium of Stellar Atmosphere", **Astrophysic Journal**, vol. 104, pp. 191 – 202.

Chandrasekhar, S., 1960. "**Radiative Transfer**", Dover Publications, Inc. - New York.

Conklin, P. and Stamnes, K., 1984. "A New Multi-Layer Discrete Ordinate Approach to Radiative-Transfer in Vertically Inhomogeneous Atmospheres", **Journal of Quantative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 31, pp. 273 – 282.

Devaux, C. and Siewert,C.E., 1980. "The F_N Method for Radiative Transfer Problems Without Azimutal Symetry", **Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)**, vol. 31, pp. 592 – 604.

Evans, K.F., 2007. "A Radiative Transfer Model for Cloudy Sky Data Assimilation", **Journal of the Atmospheric Sciences**, vol.64, pp. 3854 – 3864.

Garcia, R.D.M. and Siewert, C.E., 1985. "Benchmark Results in Radiative Transfer", **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 14, pp. 437 – 483.

Golub, G.H. and Van Loan, C.F., 1989. "Matrix Computations", **John Hopkins University Press, London**.

Gonçalves, G.A., Segatto, C.F. and Vilhena, M.T., 2000. "The LTS_N Particular Solution in a Slab for na Arbitrary Source and Large Quadrature", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 66, pp. 271 – 276.

Hill, T.R., 1972. "Azimuthally Dependent Neutron-Transport in Slab Geometry", **Tese de Doutorado, Departament of Nuclear Engineering, Kansas, USA**.

Jeans, J.H., 1917. "The Equations of Radiative Transfer Energy", **Mon. Not. Roy. Astron. Soc**, vol. 78, pp. 28 – 36.

Lenoble, 1977. "Standard Procedures to Compute Atmospheric Radiative Transfer in a Scattering Atmosphere", **National Center of Atmospheric Research**.

Oliveira, J.V.P., 1993. "Formulação LTS_N para o Problema de Ordenada Discreta Com Anisotropia", **Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil**.

Oliveira, J.V.P. and Barichello, L.B., 1993. "Formulação Analítica para a Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional de Transporte de Neutrons com Espalhamento Anisotrópico", **Anais do IX ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica**, Caxambú - MG, pp. 72 – 77.

Segatto, C.F. and Vilhena, M.T., 1994. "Extension of the LTS_N Formulation for Discrete Ordinates Problem without Azimutal Symmetry", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 21, pp. 701 – 710.

Segatto, C.F., 1995. "Extensão da Formulação LTS_N para Problemas de Transporte sem Simetria Azimutal e Problemas Dependentes do Tempo", **Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil**.

Segatto, C.F., Vilhena, M.T., and Brancher, J.D., 1999a. "The One-Dimensional LTS_N Formulation for High Degree of Anisotropy", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 61, pp. 39 – 43.

Segatto, C.F., Vilhena, M.T. and Gomes, M.G., 1999b. "The One-Dimensional LTS_N Solution in a Slab With High Degree of Quadrature", **Annals of Nuclear Energy**, vol. 26, pp. 925-934.

Segatto, C.F., Vilhena, M.T. and Leite, S.Q., 2005. "The LTS_N Angular Multigrid Approach in a Slab", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 95, pp. 415 – 422.

Segatto, C.F., 2007. "Comunicação Privada".

Segatto, C.F., Vilhena, M.T. , Marona, D.V. The LTS_N Solution of the Transport Equation for One-Dimensional Cartesian Geometry with c=1, **Kerntechnik**, vol. 73, pp. 57 – 60, 2008.

Siewert, C.E., 1978. "The F_N Method for Solving Radiative-Transfer Problems in Plane Geometry", **Astrophysics Space Science**, vol. 58, pp. 131 – 137.

Simch, M.R.R., 2004 "Solução LTS_N para Problemas de Transferência Radiativa com Polarização em Geometria Plana", **Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação**

em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.

Simch, M.R., Segatto, C.F. and Vilhena, M. T., 2006. "An Analytical Solution for the S_N Radiative Transfer Equations with Polarization in a Slab by the LTS_N Method" **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vo. 97, pp. 424 – 435.

Streck, E.E., 1993. "Solução Analítica para a Aproximação P_N da Equação de Transporte Linear Unidimensional", **Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil**.

Trzaska, Z., 1987. "An Efficient Algorithm for Partial Fraction Expansion of the Linear Matrix Pencil Inverse", **Journal of the Franklin Institute**, vol. 324, pp. 465 – 477.