INTRODUÇÃO DA RAZÃO TRIGONOMÉTRICA E DO GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO COM O USO DO GEOGEBRA

Nádia Fernanda de Leão Valli

nadiafernandavalli@gmail.com

Orientadora: Débora da Silva Soares

debora.soares@ufrgs.br

RESUMO

Este artigo apresenta um relato da aplicação de um plano de aula e descreve a utilização do software GeoGebra como ferramenta para a introdução de conceitos trigonométricos por meio da construção do círculo trigonométrico. A aplicação do experimento ocorreu em uma escola particular no município de Canoas/RS em uma turma com 30 alunos do 2º ano do Ensino Médio, e teve por objetivo explorar a visualização, de modo dinâmico, da razão trigonométrica seno, bem como apresentar o conteúdo matemático de uma forma atraente, utilizando uma tecnologia computacional, a qual pode despertar o interesse dos estudantes. Conclui-se que os objetivos foram alcançados, pois possibilitou aos alunos aprenderem em ação, ou seja, foram sujeitos ativos no processo de construção de seu conhecimento.

Palavras chaves: Investigações Matemáticas; Círculo Trigonométrico: Razão Seno; Software GeoGebra

INTRODUÇÃO

Os conteúdos básicos de trigonometria abordados inicialmente no ensino fundamental e aprofundados no ensino médio são de grande importância para que o aluno amplie suas estratégias de resolução de problemas, permitindo estabelecer relações entre as medidas de lados e ângulos.

Entendendo a importância que a trigonometria tem no desenvolvimento e na formação matemática de um estudante é que busco descrever neste estudo, através de ações metodológicas e a incorporação de mídias digitais, uma contribuição para a aprendizagem da trigonometria na perspectiva da investigação. Para isso, relato como os alunos de uma turma de segundo ano do ensino médio de uma escola particular desenvolvem atividades investigativas sobre a razão e o gráfico da função seno.

Para construir o processo de ensino-aprendizagem, em sala de aula, é importante criar ou selecionar atividades que possibilitem os estudantes a investigar, ou seja, explorar, pesquisar e procurar regularidades aumentando sua capacidade de solucionar problemas.

Para compreender melhor essa metodologia de ensino, pesquisei sobre algumas atividades investigativas, no sentido proposto por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006). A partir desta pesquisa, adaptei atividades para o ensino introdutório da trigonometria com a incorporação do software GeoGebra. O uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) no processo de ensino e de aprendizagem vem possibilitando a compreensão de novas formas de ensino, em especial o uso de softwares para o processo de ensinar e de aprender.

Dessa forma, este trabalho de pesquisa visa identificar de que forma o uso do o software Geogebra, pode contribuir no processo de produção de conhecimentos relacionados a conteúdos matemáticos. Para isso foi investigada a utilização desse instrumento em sala de aula por meio de encontros de estudos de matemática nos quais os alunos trabalharam com o Geogebra.

Sendo assim, elaborei um plano de aula para ser desenvolvido em três encontros de dois períodos, onde no primeiro encontro, trabalhamos a construção do círculo trigonométrico no software GeoGebra e uma ficha com questões de análise investigativa. No segundo encontro, analisamos na tela interativa, de forma coletiva, as análises feitas pelos alunos e sobre as mesmas debatemos e construímos a aprendizagem que desejávamos com esta atividade. No terceiro e último encontro, construímos e analisamos, também no software GeoGebra, o comportamento do gráfico da função seno.

A partir das atividades propostas sobre trigonometria e das considerações sobre investigações matemáticas, espero oferecer ao leitor deste trabalho uma alternativa de ensino, onde a incorporação de mídias digitais aliada às atividades investigativas pode proporcionar aos alunos uma nova perspectiva de aprendizagem.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Nos dias de hoje as novas tecnologias nos cercam, e estas muitas vezes estão facilitando e agilizando várias situações do nosso cotidiano. Nesse sentido, busquei aliar a tecnologia ao ambiente escolar, visando dessa forma elaborar uma proposta alternativa de ensino de conceitos de trigonometria.

Para isso, decidi trabalhar com o software GeoGebra, por se tratar de um software livre, gratuito, facilmente encontrado na internet e com interface amigável. Este software possibilita aos alunos fazer construções com pontos, circunferências, ângulos, segmentos de retas e retas e por meio da visualização pode auxiliar os alunos a desenvolver um raciocínio trigonométrico.

A exploração dos conteúdos de trigonometria com a utilização do software GeoGebra pode possibilitar o trabalho com investigações matemáticas, elaborando conjecturas, desenvolvendo análises do conteúdo e criando estratégias de resoluções de problemas.

A investigação matemática requer que o professor tenha um domínio dos recursos e dos materiais que poderão ser utilizados como apoio desta atividade, além de ter percepção do interesse e das potencialidades dos seus alunos. As tarefas que são propostas durante as atividades de investigação devem ser mediadas e analisadas pelo professor como um caráter investigativo pois o pesquisador precisa ser capaz de reconhecer os conceitos e os processos que a tarefa conduz.

> Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura teste-demonstração (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006, p. 10).

Um plano de aula que tem como objetivo uma investigação matemática precisa possuir três partes estruturais: a introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e discussão final/reflexão. Na primeira parte, é importante que a proposta de trabalho seja apresentada aos alunos de forma que todos entendam o que se deseja. Na segunda parte, o professor deve centrar sua aula em cima das atividades propostas, pois nesse momento espera-se que o aluno adquira uma postura investigativa e o professor atue como orientador e mediador da execução. Por fim na terceira e última parte, os alunos são estimulados a expor suas ideias e são confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes daquelas que haviam pensado.

Segundo Gravina (1998, apud Gripa et al, p.3) " O aluno não deve adquirir um caráter passivo diante das atividades propostas pelo professor e sim o mesmo deve ser capaz de realizar construções no qual darão sentido e significados ao seu conhecimento matemático, sendo assim o professor deve desta maneira oportunizar ao aluno construir, experimentar, testar, visualizar, conjecturar e generalizar com o intuito de fazer demonstração".

Como fonte de informação para nortear este trabalho, analisei o artigo produzido por Lopes (2010). O objetivo central do artigo era analisar algumas das potencialidades e limitações do software GeoGebra no ensino e na aprendizagem de trigonometria. Para isso foram adotadas as concepções da Didática da Matemática no que se refere ao uso das Tecnologias de Informação e Comunicação com os recursos de um software de geometria dinâmica e atividades investigativas.

Para tanto, foi descrito um caderno de atividades, apresentando as teorias que o fundamentaram e os objetivos que nortearam sua elaboração. Este caderno faz uma descrição rápida do software GeoGebra, apresentando sua tela principal, algumas de suas ferramentas e comandos que são utilizados na construção de figuras, objetivando, com isso, que os professores se familiarizem com o software.

Na segunda parte, apresenta-se uma sequência de seis atividades sobre o conteúdo de trigonometria por meio dos recursos do software GeoGebra. As atividades foram elaboradas numa perspectiva investigativa, tomando como referência as concepções de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005).

O produto educacional, um caderno de atividades com sugestões de uso para sala de aula de matemática, foi desenvolvido pela professora pesquisadora sobre a orientação da Professora Bernadete Barbosa Morey. Desse caderno constam atividades referentes ao conteúdo de trigonometria.

De modo geral, uma das principais características de um software de Geometria Dinâmica é a possibilidade de movimentar os objetos na tela sem alterar as propriedades da construção inicial.Com isso, tem-se a possibilidade de, numa atividade desenvolvida com os recursos de um software com essas características, se fazer investigações, descobertas, confirmar resultados e fazer simulações, permitindo, inclusive, levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática.

Contudo foi concluído que dentre as potencialidades apresentadas pelo software GeoGebra no ensino e na aprendizagem de trigonometria por meio de atividades investigativas estão, principalmente, a construção, o dinamismo, a investigação, a visualização e a argumentação. Desse modo, à medida que os parâmetros do software foram manipulados conseguiu-se visualizar as alterações realizadas nas suas construções e fazer inferências sobre as mesmas.

Já Martins (2003), para estudar as razões trigonométricas, se apropriou de três etapas: A primeira era baseada no estudo dos triângulos retângulos; a segunda dava ênfase ao círculo trigonométrico e a terceira utilizava os gráficos das funções correspondentes. Por parte da autora esta metodologia acrescentou amplitude aos conceitos trigonométricos desenvolvidos pelos alunos. A sequência didática para a validação do proposto partiu da verificação se os alunos utilizavam os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo, no círculo trigonométrico e no software Cabri-Geomètre na construção de gráficos das funções seno e cosseno. Por meio desta sequência a autora verificou que o software se mostrou muito eficaz, auxiliando os alunos a relacionarem os conceitos já vistos no triângulo retângulo e círculo trigonométrico com as funções seno e cosseno.

Tanto para Lopes (2010), que enfatizou a introdução da trigonometria com a utilização do software GeoGebra, quanto para Martins (2003), que introduziu o estudo da trigonometria com o software Cabri-Geomètre, a incorporação de tecnologias computacionais ocupa um lugar de destaque como recurso pedagógico, e, cabe à escola utilizá-las de maneira prazerosa e inovadora. Fica evidente que, se a escola quiser continuar sendo uma das maiores fontes de formação por certo, deverá acompanhar a evolução das tecnologias e buscar formar seus profissionais para desenvolverem, principalmente, a habilidade com o computador.

Dentro desta perspectiva me inspirei para a elaboração do meu plano de aula com o uso do software GeoGebra como ferramenta para a introdução de conceitos básicos da trigonometria.

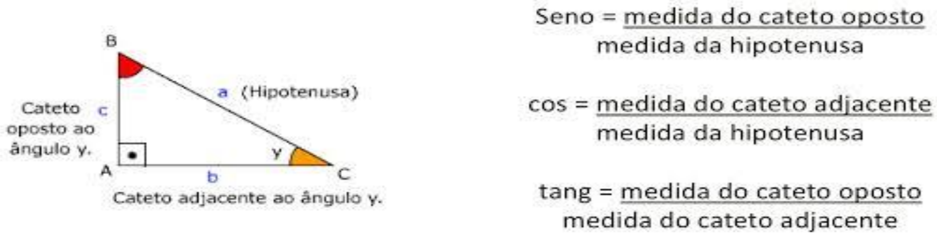
3. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Pensando em trabalhar trigonometria de uma forma onde os alunos pudessem atuar como investigadores e baseados em suas construções produzissem uma aprendizagem, elaborei um plano de aula onde abordasse a utilização do software GeoGebra como ferramenta para a introdução da razão trigonométrica e do gráfico da função seno.

A aplicação desta sequência ocorreu no laboratório de informática, em três aulas, num total de seis períodos, em uma escola particular, do município de Canoas, com um total de 30 alunos. No primeiro e terceiro encontros todos estavam presentes, no segundo encontro um aluno apenas faltou.

No primeiro momento os alunos foram convidados a irem ao laboratório de informática da escola onde, de forma individualizada, distribuíram-se nos computadores disponíveis. Para dar início as nossas atividades recapitulamos as razões trigonométricas no triângulo retângulo, conforme podemos observar a imagem abaixo, a fim de recordar os conceitos de hipotenusa, cateto oposto, cateto adjacente e ângulo.

Figura *1* **-** Revisão de razões trigonométricas no triângulo retângulo



Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, os alunos receberam uma ficha impressa que introduzia o conteúdo da função seno e juntamente nesta folha um passo a passo para a elaboração do círculo trigonométrico no software GeoGebra.

Seguindo o passo a passo que estava na ficha, os alunos puderam construir seu círculo trigonométrico e manipular a figura produzida, observando, analisando, testando, pesquisando e construindo as respostas para as questões de análise que foram propostas no mesmo material.

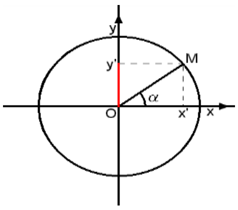
Ao final destes dois períodos de aula os alunos entregaram para a professora as fichas preenchidas com as suas análises. Toda a atividade foi desenvolvida de forma individualizada sem intervenção da professora, nem na leitura da ficha, nem durante a construção e nem na elaboração das respostas mediante aos questionamentos apresentados no material investigativo.

No segundo encontro, a professora, já tendo analisado as respostas elaboradas pelos alunos aos questionamentos propostos, convidou a todos para observar a exploração da construção do círculo trigonométrico na tela interativa disponível em sala de aula, além de acompanhar a leitura da parte inicial da ficha onde abordava a definição da razão seno, como mostra a figura abaixo:

Figura 2 - Definição da razão seno.

Seno

O **seno** é uma <u>função trigonométrica</u>. Dado um <u>triângulo retângulo</u> com um de seus <u>ângulos</u> internos iguais a α, define-se $sin\,\alpha$ como sendo a razão entre o <u>cateto</u> oposto a α e a <u>hipotenusa</u> deste <u>triângulo</u>.



Em um círculo trigonométrico unitário a função seno é a medida do segmento de reta Oy.

Consideramos, no plano cartesiano, o círculo de centro na origem e raio unitário. Dado um número real x entre 0 e 360, associa-se a esse número um ponto M do círculo tal que a medida **em graus** do arco orientado que começa em (1, 0) e termina em M seja Y (arco orientado e Y > 0 significa que o percurso de X até M deve ser feito no sentido anti-horário).

Denominamos ***seno de y*** (**cos y)** a ordenada desse ponto M[1].

Fonte: Website do Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática[2]

Dando sequência, ao trabalho de exploração da construção na tela interativa, os alunos puderam perceber o que realmente era proposto com essa atividade: o estudo da razão seno. As questões propostas tinham como objetivo que os estudantes identificassem onde estava representado o valor do seno no círculo trigonométrico, como foi formado o ângulo em questão ao eixo x, qual a função do cateto oposto ao ângulo, qual era a hipotenusa, qual o papel da hipotenusa no círculo trigonométrico, o que representava o segmento AD no eixo y, qual a relação do segmento AD ao ângulo e ao movimento do ponto C.

Terminada estas explorações, os alunos voltaram para seus computadores e suas construções, onde receberam uma segunda ficha impressa que os orientava a um novo passo a passo para a elaboração do gráfico da função seno. Tendo como base o círculo trigonométrico construído por eles, os alunos elaboraram o gráfico da função seno e puderam explorar e manipular o gráfico para auxiliar nas questões de análise que foram

1 A ficha investigativa fornecida aos alunos, estava com a definição de seno descrita em relação ao ângulo theta e não ao ângulo alpha como descrevo neste trabalho.

2 Website: <http://www.ufrgs.br/espemat/

solicitadas na segunda ficha, seguindo da entrega deste material para a professora no final destes dois períodos.

No terceiro e último encontro, e dando sequência as atividades já desenvolvidas nos encontros anteriores, voltamos à tela interativa demonstrando a construção do gráfico da função seno e analisamos as questões propostas onde era solicitado aos alunos que movimentassem o ponto C e observassem o que ocorria com o ponto E de coordenadas (α, senα), também que observassem se ocorria alguma relação com o movimento do ponto E e o comprimento do segmento AD, que habilitassem o rastro do ponto E e observassem a curva gerada pelo gráfico.

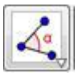
4.ESTUDO DA RAZÃO TRIGONOMÉTRICA SENO COM A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA.

Na sequência, apresento uma descrição detalhada das atividades propostas e dos encaminhamentos realizados em sala de aula.

No primeiro encontro, depois de revisada as razões trigonométricas e os alunos já em posse da ficha investigativa com as questões de análise, demos sequência a construção do círculo trigonométrico no GeoGebra. Para isso foi fornecido aos alunos um passo a passo com as seguintes orientações:

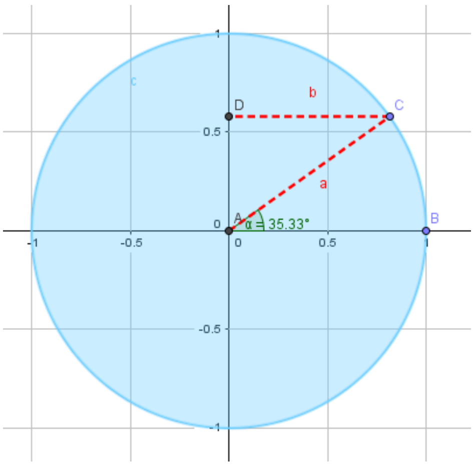
1. Abrir o programa GeoGebra.
2. No menu “Exibir”, selecione “Eixos” e “Malha”.
3. Agora clique em  (novo ponto) e marque o ponto A com as coordenadas (0,0), em seguida, clique em  e marque o ponto B com as coordenadas (1,0).
4. Clique no último ícone da barra de ferramentas e amplie a imagem.
5. No sexto ícone da barra de ferramentas clique em círculo dados centros e um de seus pontos e trace a circunferência com centro no ponto A passando pelo ponto B.
6. Na janela de álgebra, clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto B. Clicar em Propriedades, básico e fixar o objeto.
7. Crie um ponto C sobre a circunferência

8. Construa o segmento de reta AC, selecionando a opção “segmento de reta definido por dois pontos”, conforme a figura:

9. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento AC, na janela de álgebra, e selecione, propriedades, cor vermelha, estilo pontilhado e espessura 5.
10. Clique em  e, em seguida, clique sobre os pontos B, A e C, como mostra a figura:
11. Na parte inferior da tela, há uma barra de comandos denominada “Entrada”. Digite nela (0,y(C)). Este será o ponto D.
12. Construa o segmento de reta CD, selecionando a opção “segmento de reta definido por dois pontos”, conforme o passo 8.
13. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento CD, na janela de álgebra, e selecione, propriedades, cor vermelha, estilo pontilhado e espessura 5
14. Na janela de álgebra, clique sobre a circunferência e em propriedades troque a cor para azul, e em transparência 25.
15. Mova o ponto C, analise e responda as questões propostas.

Com isso esperava-se que os alunos construíssem a seguinte figura

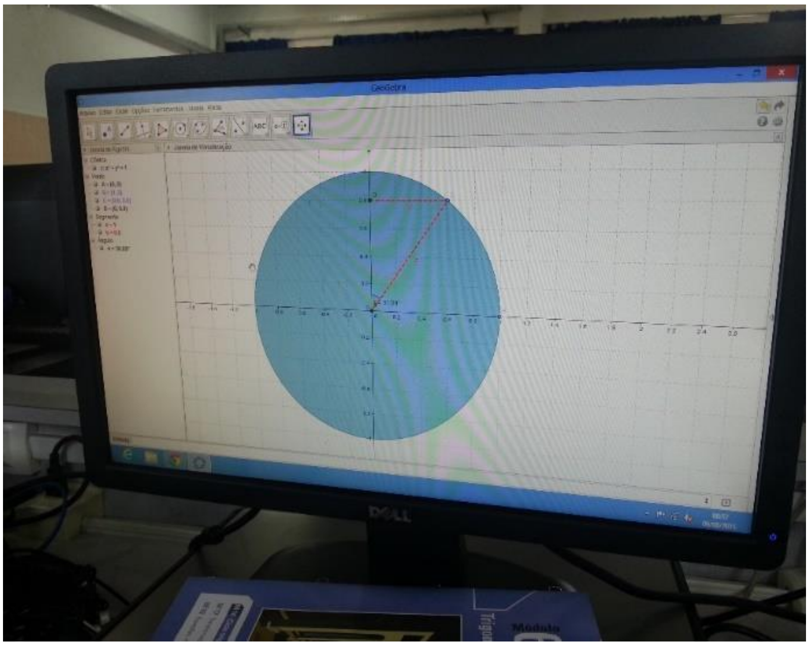
Figura *3*- Construção do Círculo trigonométrico no GeoGebra



Fonte: Construção própria

A clareza do passo a passo foi importante para que a construção solicitada pudesse ser desenvolvida por todos os alunos, que não apresentaram nenhum tipo de dificuldade em completar a construção. É importante observar, também, que o grupo de alunos já havia realizado outros tipos de atividades no software GeoGebra antes da aplicação dessa sequência didática.

Figura *4*- Construção do círculo trigonométrico



Fonte: Construção feita por um aluno

Dando sequência na atividade os alunos foram desafiados a responder questões com base nas suas construções. As questões propostas para os alunos solicitavam a manipulação da construção e tinham um caráter investigativo. A seguir, passo a apresentar as questões propostas, seguidas das respostas dos alunos às mesmas.

<u>Questão 01:</u>

Definimos seno como a razão entre o cateto oposto a alpha e a hipotenusa do triângulo retângulo. Revise a construção do ciclo trigonométrico feita no GeoGebra e responda:

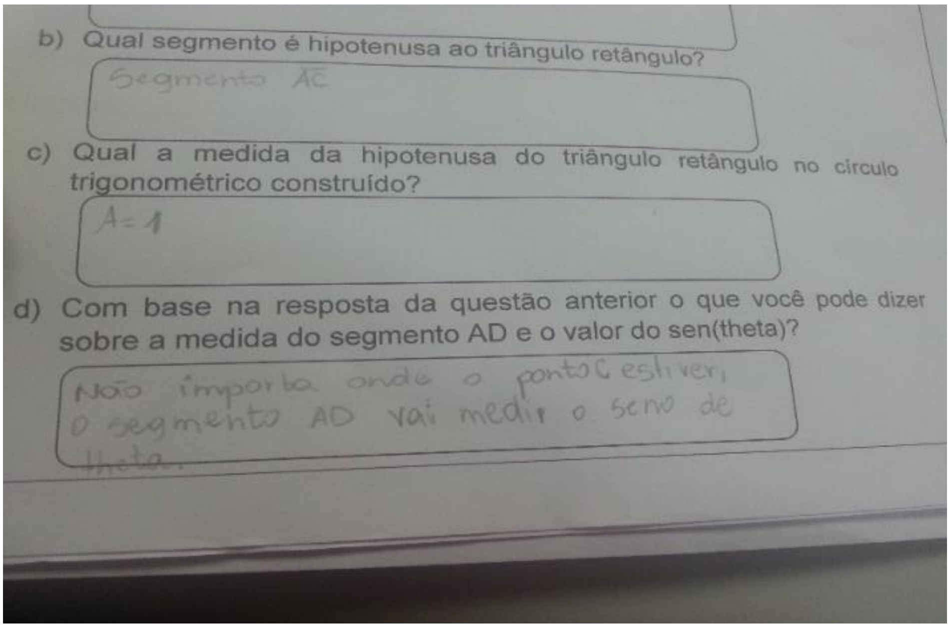
a) Qual é o cateto oposto ao ângulo alpha?
b) Qual segmento é hipotenusa ao triângulo retângulo?
c) Qual a medida da hipotenusa do triângulo retângulo no círculo trigonométrico construído?
d) Com base na resposta da questão anterior o que você pode dizer sobre a medida do segmento AD e o valor do sen (alpha)
e) Movimente o ponto C e observe o comprimento do segmento AD. Descreva com suas palavras o comportamento do comprimento desse segmento conforme o movimento do ponto C.

A primeira questão tinha como proposta fazer com que os alunos manipulassem o objeto de estudo para perceber e visualizar onde encontravam-se o cateto oposto, o cateto adjacente e a hipotenusa do triângulo retângulo no círculo trigonométrico. Em seguida, deveriam manipular o ponto C para poder observar o comportamento do segmento AD e o que ele representava neste círculo trigonométrico.

A identificação dos catetos e da hipotenusa no círculo trigonométrico foi compreendida e observada com clareza por todos em relação ao ângulo alpha, nessa atividade os alunos não estabeleceram a relação de que a hipotenusa é o raio unitário da circunferência, mas todos identificaram um valor numérico da hipotenusa relacionando com a medida 1cm. Não temos evidências suficientes que nos permitam compreender porque os alunos não fizeram essa observação, porém uma hipótese é que a redação da pergunta do item (b) não tenha ficado clara para os alunos. Uma sugestão de reescrita dessa pergunta que talvez torne mais claro aos alunos o que se pretende é: “Identifique na construção o segmento que é a hipotenusa do triângulo retângulo. Esse segmento corresponde a algum elemento do círculo? ”

As questões propostas na letra D e E, que sugerem uma análise qualitativa, perguntam o que pode-se dizer sobre a medida do segmento AD e o valor do seno do ângulo α . Inicialmente, os alunos responderam-na de forma individual, sendo que apenas quatro alunos observaram que ao movimentarmos o ponto C, a medida do segmento AD é igual ao valor do seno do ângulo α como podemos observar na figura abaixo (Fig.5). Muitos alunos responderam quanto media o segmento AD, ressaltando o valor numérico de 0,8, sem movimentar o ponto C. Alguns alunos que movimentavam o ponto C entenderam e argumentaram apenas que o valor do segmento aumenta e diminui conforme movimenta-se o ponto C. A maioria não conseguiu efetuar esta observação deixando esta questão em branco.

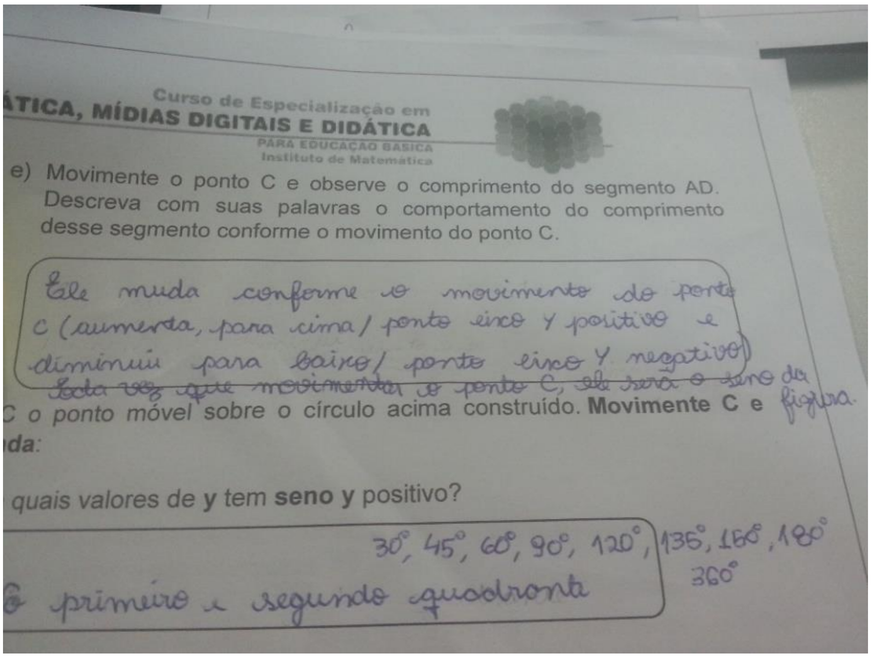
Figura 5-Identificação do segmento AD



Fonte: Ficha investigativa de uma aluna

Já na questão E, que solicitava a movimentação do ponto C para observar o comprimento do segmento AD, muitos alunos, ao manipular este objeto, acabaram concluindo que, dependendo da movimentação do ponto C, o segmento AD aumenta ou diminui, mas permanece no eixo y, conforme imagem abaixo.

Figura 6- Análise em relação ao movimento do ponto C



Fonte: Ficha investigativa de uma aluna

Alguns alunos responderam essa questão analisando o comportamento de acordo com o quadrante, isto é, observaram se o valor do segmento AD crescia ou decrescia conforme movimentava-se o ponto C.

Nesta mesma questão um aluno constatou que “toda a vez que movimentar o ponto C, ele será o seno da figura”. Este aluno, ao constatar este fato, apropriou-se da ideia de que o segmento AD é o seno da figura em questão e está relacionado ao movimento do ponto C que modifica o valor do ângulo quando movimentado. Já uma outra aluna relacionou o comprimento do segmento AD conforme estava próximo ao valor dos ângulos 0^0, 180^0, 90^0 e 270º, relacionando seu aumento ou decrescimento quando se aproximava destes ângulos.

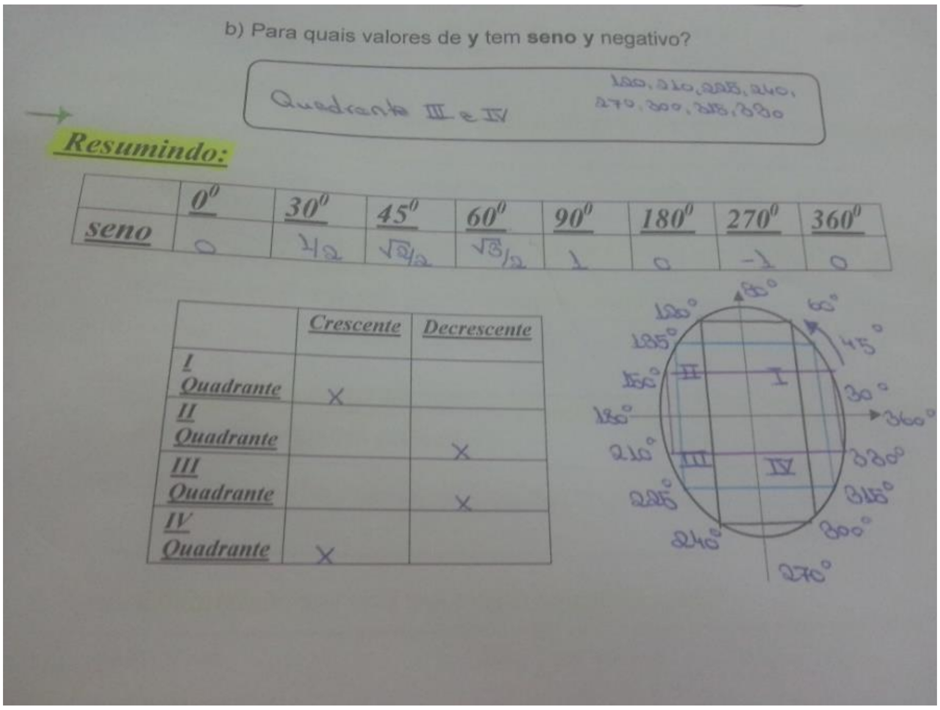
Questão 02:
Sendo C o ponto móvel sobre o círculo acima construído, movimento o ponto C e responda: a) Para quais valores de y tem seno positivo? b) Para quais valores de y tem seno negativo?

Para responder as questões propostas nessa segunda tarefa, os alunos não apresentaram dificuldades. Identificavam os sinais dos quadrantes e a variação em cada um. A facilidade em responderem estas questões pode estar aliada às atividades que são desenvolvidas no decorrer dos estudos escolares.

A mesma facilidade ocorreu no fechamento da ficha, onde foi apresentada a atividade “Resumindo”. Os alunos precisavam analisar os sinais dos quadrantes que a razão seno estabelecia e também se estes mesmos quadrantes cresciam ou decresciam, além do valor da razão seno nos ângulos notáveis.

Nestas atividades alguns alunos resolveram calcular o valor do seno utilizando a fórmula das razões trigonométricas que foram revisadas no início da atividade, ou seja, $sen\alpha = \frac{catetooposto}{hipotenusa}$, não observaram na janela de álgebra do software o valor que era dado ao segmento AD representado no eixo y. Outros alunos não haviam identificado que o segmento AD era o seno do ângulo, por isso utilizaram-se da fórmula para efetuar o cálculo.

Figura 7- Atividade resumindo



Fonte: Ficha investigativa de um aluno

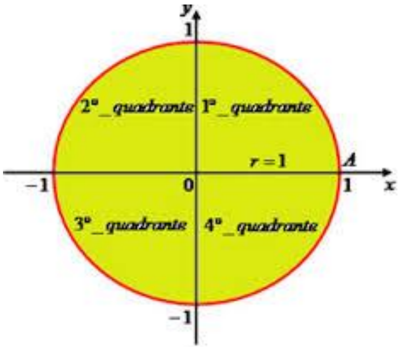
Durante o nosso segundo momento, analisamos coletivamente as respostas dadas nas fichas investigativas a fim de juntos, manipulando o objeto, construirmos o conhecimento que desejávamos com esta atividade. Ao colocar a construção do círculo trigonométrico elaborado por uma aluna na tela interativa, questionei ao grupo qual segmento era o cateto oposto, a hipotenusa e o cateto adjacente. Também identificamos o ângulo alpha, o eixo x, o eixo y, os quadrantes, o sentido anti-horário e o arco, todos estes elementos eram percebidos e identificados durante a análise. Ao explorar o círculo trigonométrico e relacionarmos com a revisão das razões trigonométricas no triângulo retângulo no início de nosso plano de aula, reforcei aos alunos que as razões estudadas até agora, seno, cosseno e tangente, limitava seu emprego nos ângulos compreendidos entre 0^0 e 90^0, mas que de agora em diante observaríamos uma nova ferramenta matemática que permitiria definir e conhecer as razões trigonométricas de ângulos quaisquer. Essa nova ferramenta é chama de círculo trigonométrico, que apresenta raio unitário e está associada a um plano cartesiano com origem no centro da circunferência e coordenada O (0,0).

Observamos também que o ponto C era chamado de extremidade do arco trigonométrico, cuja medida é dada pelo ângulo central α. Sendo assim os arcos trigonométricos podem ultrapassar a medida de 90^0, uma vez que o ponto C pode percorrer toda a circunferência à medida que o ângulo central α aumenta. E também que $\alpha = \frac{L}{r}$, em que L é o comprimento do arco determinado na circunferência de raio r.

Sendo assim para qualquer ângulo α que não esteja sobre um dos eixos, pode-se formar um triângulo retângulo. Os catetos deste triângulo têm suas medidas em módulo, de modo que o triângulo possa ser formado em qualquer quadrante. Esclarecemos, então, que, quando manipulávamos o ponto C, conforme se percorria o ponto sobre o ciclo trigonométrico os valores de sua ordenada percorriam o eixo y, chamado de eixo dos senos. Assim então pudemos construir o entendimento da razão seno para ângulos maiores que 90^0.

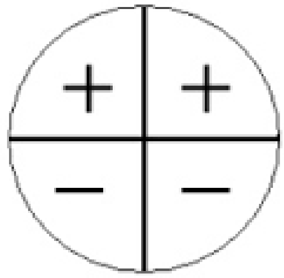
Verificamos também que no plano cartesiano são conhecidos os quadrantes, como observamos na figura abaixo e, consequentemente, os sinais de cada uma das suas coordenadas. No círculo trigonométrico não era diferente, ou seja, em cada quadrante havia sinais definidos para o seno de qualquer ângulo.

Figura 8- Circunferência com eixo



Fonte: http://www.brasilescola.com

Figura 9-Sinais dos quadrantes da razão seno



Fonte: http://www.infoescola.com

Visualizamos também as intersecções da circunferência com os eixos, o que nos permitiu concluir que o seno tem resultados limitados entre -1(mínimo) e 1 (máximo), ou seja: $-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$.

Depois de introduzida toda a definição e características de um círculo trigonométrico, questionei aos alunos o que significava o segmento AD, quando movimentávamos o ponto C. Muitos ainda não identificavam o que acontecia, se atendo apenas a dizer que o segmento AD aumentava ou diminuía de tamanho conforme o movimento do ponto C., porém uma aluna afirmou que "... Não importa onde o ponto C estiver, o segmento AD vai medir o seno de alpha. " Neste momento os alunos puderam perceber que o segmento AC (Hipotenusa) construía um ângulo (alpha) em relação ao eixo x e que a projeção do cateto oposto a ele sobre o eixo y produzia o segmento AD, cuja medida corresponde ao valor do seno do ângulo estudado.

5.CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO COM A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA.

Em nosso terceiro momento, para dar sequência à proposta de nossas atividades, nos baseamos na construção do círculo trigonométrico feita anteriormente no primeiro encontro e analisada no segundo encontro. Com base na construção realizada pelos alunos, demos sequência a construção e ao estudo do gráfico da função seno, também com a proposta de utilizarmos o software GeoGebra para a realização deste proposto. Utilizando a construção já executada, os alunos seguiram os seguintes passos:

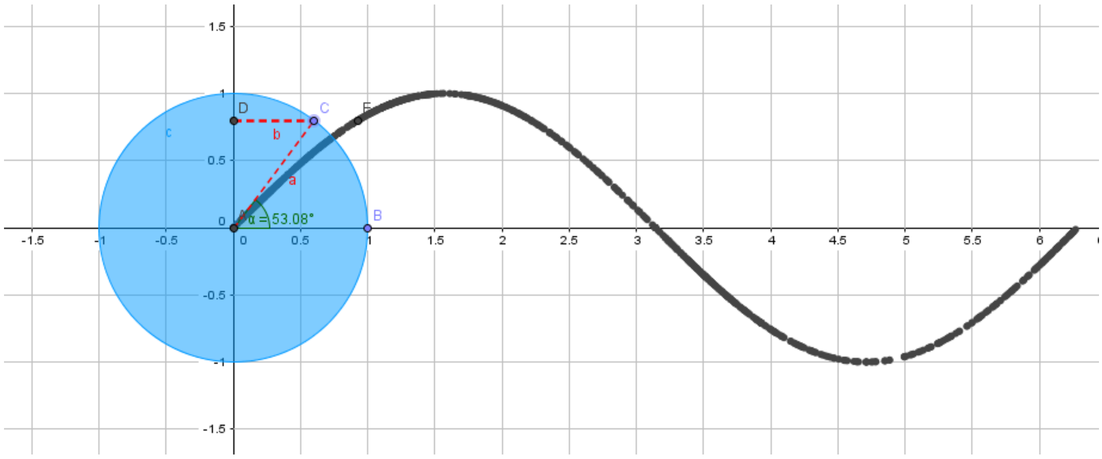
No arquivo GeoGebra da razão Seno:

1. Na “Entrada”, digite o ponto de coordenadas: (α, sin(α)). Esse será o ponto E.
2. Mova o ponto A e observe o que acontece com o ponto E.
3. Para visualizar o gráfico da função seno, clique com o botão direito sobre o ponto E e selecione “Exibir rastro”. Mova o ponto A.

Com base na construção feita, mova o ponto A e analise o comportamento do gráfico. Para isso é importante lembrar que o ângulo mostrado no círculo está medido em graus, mas no eixo horizontal, está medido em radianos.

Mediante ao passo a passo fornecido, esperava-se que os alunos chegassem a uma construção semelhante à da imagem a seguir:

Figura *10*- Gráfico da Função Seno



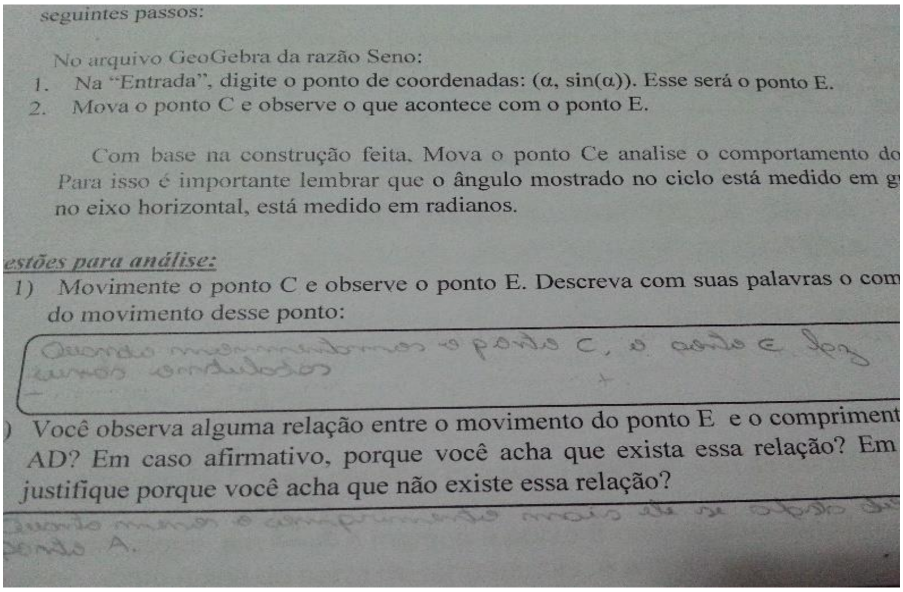
Fonte: Construção própria no Software GeoGebra

Para a execução desta construção, não foi apresentada nenhuma dificuldade por parte dos alunos, uma vez que o passo a passo foi fornecido, eles já haviam trabalhado com o GeoGebra em várias atividades no decorrer destes dois últimos anos letivos, e pelo software ser de fácil manipulação. Com as construções dos gráficos executadas, partimos para o desenvolvimento das questões propostas na segunda ficha investigativa, conforme apresento no que segue.

<u>Questão 01:</u> Movimente o ponto C e observe o ponto E. Descreva com suas palavras o comportamento do movimento desse ponto

Para a análise da questão um, era necessário que os alunos movimentassem o ponto C e observassem o que ocorria com o ponto E. Grande parte dos alunos respondeu que "O ponto E movimenta-se conforme o ponto C se movimenta", outros afirmaram que "quando movimentamos o ponto C, o ponto E faz curvas onduladas", conforme a imagem abaixo (Fig.11).A análise mais detalhada parte de um grupo de alunos que afirmou o seguinte : " do primeiro quadrante 90^0 ao quarto quadrante 360^0 o ponto E vai para o meio da circunferência, do primeiro quadrante 0^0 ao terceiro quadrante 270^0 o ponto E vai para longe da circunferência, do terceiro quadrante ao segundo 180^0 o ponto E está na reta X mas fora da circunferência, do segundo 180^0 ao primeiro 90^0 o ponto E se aproxima da circunferência mas ainda está fora da circunferência". Parece-me que esta análise pode estar atrelada ao fato de o gráfico da função ter sido desenvolvido no mesmo plano cartesiano em que se encontra o círculo trigonométrico, enfatizando um aspecto que não era desejado. Deste modo, sugiro que em uma nova versão, o gráfico da função seja feito em uma janela de visualização diferente daquela onde se encontra o círculo trigonométrico.

Figura *11*- Análise do ponto E em relação ao movimento do ponto C


seguintes passos:

No arquivo GeoGebra da razão Seno:

1. Na "Entrada", digite o ponto de coordenadas: (α, sin(α)). Esse será o ponto E.
2. Mova o ponto C e observe o que acontece com o ponto E.

Com base na construção feita, Mova o ponto Ce analise o comportamento do
Para isso é importante lembrar que o ângulo mostrado no ciclo está medido em g
no eixo horizontal, está medido em radianos.

estões para análise:

1) Movimente o ponto C e observe o ponto E. Descreva com suas palavras o com
do movimento desse ponto:

Quando movimentamos o ponto C, o ponto E faz curvas onduladas

) Você observa alguma relação entre o movimento do ponto E e o compriment
AD? Em caso afirmativo, porque você acha que exista essa relação? Em
justifique porque você acha que não existe essa relação?

Quanto menor o comprimento mais ele se afasta do ponto A.

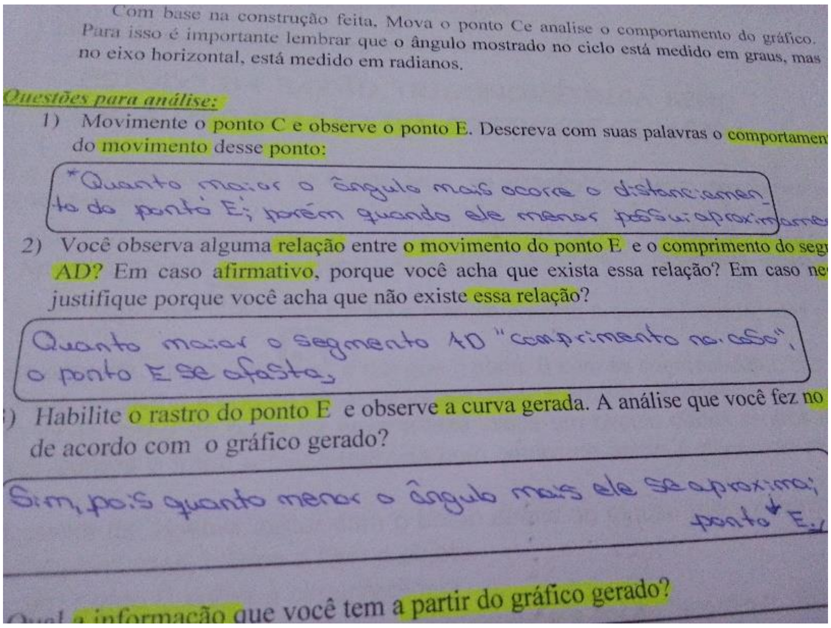
Fonte: Segunda ficha investigativa de um aluno

A análise era para ser feita de forma individual em cima de sua construção, porém alguns alunos, por afinidade, acabaram trocando ideias sobre a análise desta questão chegando à argumentação explicitada. Nota-se que o grupo manipulou o ponto C e observou o movimento do ponto E, porém, essa observação demonstra uma certa confusão ao expressar os quadrantes e não obedece ao movimento anti-horário do círculo trigonométrico, uma vez que os alunos afirmam o movimento de 180^0 a 90^0, sentido horário.

<u>Questão 02:</u> Você observa alguma relação entre o movimento do ponto E e o comprimento do segmento AD? Em caso afirmativo, por que você acha que existe essa relação? Em caso negativo, justifique porque você acha que não existe essa relação.

Apesar de já termos feito a discussão em grupo das questões anteriormente propostas, nesta questão nenhum aluno observou que o comprimento do segmento AD é o valor do seno do ângulo alpha. Também não observaram que o ponto C, quando movimentado, habilita o movimento do ponto E, uma vez que foi definido a partir das coordenadas (α, sem α), de modo que seu movimento promove a criação do gráfico da função seno. Dois alunos afirmaram que não havia nenhum tipo de relação entre os pontos E e C., porém os demais afirmam, em grande parte, que “quanto maior o comprimento do segmento AD, mais distante fica o ponto E da circunferência e quanto menor o segmento AD mais próximo da circunferência ele chega” (Fig.12).

Figura *12*-Análise do ponto E em relação ao ponto C


Com base na construção feita, Mova o ponto Ce analise o comportamento do gráfico. Para isso é importante lembrar que o ângulo mostrado no ciclo está medido em graus, mas no eixo horizontal, está medido em radianos.

Questões para análise:

1) Movimente o ponto C e observe o ponto E. Descreva com suas palavras o comportamen
do movimento desse ponto:

*Quanto maior o ângulo mais ocorre o distanciamento do pontó E; porém quando ele menor possui aproximame

2) Você observa alguma relação entre o movimento do ponto E e o comprimento do segi AD? Em caso afirmativo, porque você acha que exista essa relação? Em caso ne justifique porque você acha que não existe essa relação?

Quanto maior o segmento AD "comprimento no caso", o ponto E se afasta,

) Habilite o rastro do ponto E e observe a curva gerada. A análise que você fez no de acordo com o gráfico gerado?

Sim, pois quanto menor o ângulo mais ele se aproxima; ponto E.

Qual a informação que você tem a partir do gráfico gerado?

Fonte: Segunda Ficha investigativa de um aluno.

Questão 03:
Habilite o rastro do ponto E e observe a curva gerada. Analise o que você fez na questão 01 e veja se está de acordo com o gráfico gerado.

Nesta questão toda concordaram com a afirmação, porém um aluno escreveu que: “Sim, está de acordo, a curva do ponto E irá se comportar de acordo com o quadrante em que está o ponto C”. Aparentemente, este aluno conseguiu ter uma ideia mais próxima do que se desejava na manipulação do ponto C em relação ao ponto E. As quatro alunas que haviam percebido que a medida do segmento AD era o seno do ângulo na atividade anterior, acertaram esta questão afirmando se tratar do gráfico da função seno.

Verificou-se também uma resposta diferente das demais ” ele apresenta sim um padrão que é de formar uma curva senóide”. Para tal argumentação o aluno deve ter se apropriado de outras fontes de conhecimento pois não havíamos falado neste aspecto ainda.

Questão 04:
Qual a informação que você tem a partir do gráfico gerado?

Com esta questão, esperava-se que os estudantes elaborassem uma análise do comportamento do gráfico, identificando a variação dos valores do seno entre -1 e 1.

Entretanto, a análise feita pelos alunos nesta questão abordou apenas os quadrantes, os sinais, se eram positivos ou negativos, e se as funções eram crescentes ou decrescentes, não ficando claro o objetivo da questão. Neste sentido, sugere-se a seguinte reformulação: "De que modo o gráfico se comporta? Faça uma descrição com suas palavras, observando o formato da curva, seus valores máximos e mínimos, dentre outras características que você ache interessante. ".

<u>Questão 05:</u>

Para quais quadrantes que α percorre temos o seno de y crescente?

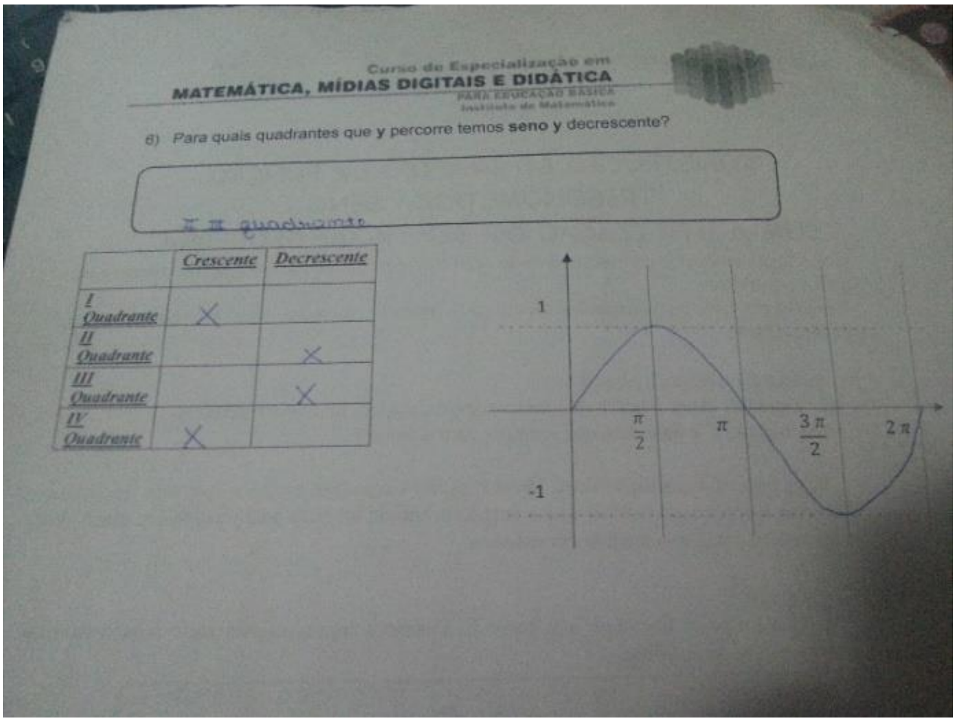
<u>Questão 06:</u>

Para quais quadrantes que y percorre temos o seno de y decrescente?

Nestas questões, a visualização contribuiu para que os alunos pudessem entender que a razão seno é estudada no eixo y. Perceberam também que no primeiro quadrante a função era positiva, ou seja, quanto maior o ângulo estudado, maior era o valor do seno se aproximando do valor máximo da função que seria de 1 quando o ângulo α medisse 90^0 mostrando que a função estava crescendo. Notaram que quando a função atingiu o ponto máximo passariam para o segundo quadrante onde apesar da função assumir sinais positivos pois estava no eixo y na parte positiva, decrescia, ou seja, quanto maior o ângulo estudado mais ela se aproximava da origem. Concluíram também que no terceiro quadrante quanto maior o ângulo α, mais o segmento AD se distanciava da origem em direção ao eixo y negativo se aproximando do valor mínimo da função, quando α atingisse $270\ ^0$, ou seja a função continuava a decrescer neste quadrante por fim, perceberam que no quarto quadrante quanto maior o valor do α menor ficava o valor do segmento AD, se aproximando da origem, mas também no eixo y na parte negativa, ou seja, a função estava crescendo.

Em razão destas perguntas e analisando desta forma os alunos concluíram a atividade resumindo sua argumentação em uma tabela que auxiliava a entender se a função era crescente ou decrescente, e com isso pudessem construir o gráfico da função seno, manualmente, e comparar com o gráfico da função seno que foi criado quando habilitado o rastro do ponto e em relação ao movimento do ponto C, como observado na imagem abaixo:

Figura *13*- Gráfico manual da função seno



Fonte: Segunda ficha investigativa de um aluno

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS:

As tarefas desenvolvidas neste plano de aula foram elaboradas com o intuito de permitir aos alunos desenvolver o estudo da razão trigonométrica seno e do comportamento do gráfico de sua função de forma mais dinâmica. Os alunos demostraram de forma individualizada muita dificuldade em responder as questões de análise, que exploravam a manipulação do objeto construído. Esta dificuldade não estava relacionada à construção no software GeoGebra, pois esta parte era de domínio de todos, mas estava ligada ao processo de investigação e a dificuldades de conceitos que não haviam ficado claros quando trabalhados com os alunos em anos anteriores, tais como o porquê dos valores das razões trigonométricas no triângulo retângulo, relacionadas ao valor do ângulo estudado.

Poucos alunos conseguiram responder individualmente as questões propostas nas atividades do modo que era esperado, porém quando as questões foram analisadas e discutidas em grande grupo como uma forma de sistematização, ficou claro que alguns aspectos passaram desapercebidos na execução das atividades. Podemos perceber uma situação que ilustra esse momento quando foi solicitado aos alunos que relacionassem o comportamento do segmento AD, quando movimentado o ponto C. Mesmo tendo revisado as razões trigonométricas no triângulo retângulo, os alunos não haviam estabelecido a relação entre a medida do segmento AD e o valor do seno do ângulo $sen\alpha = \frac{catetooposto}{hipotenusa}$, não perceberam que a medida do segmento AD era o seno do ângulo α, representado no eixo y

A investigação matemática ainda causa alguma dificuldade em sua aplicação. No caso apresentado, foi possível observar que os alunos continuaram utilizando as mesmas estratégias que empregavam para resolver exercícios, as quais levam rapidamente à organização de dados e a formulação de conclusões. Além disso, também se observou que os alunos acreditam que ao testarem alguns exemplos já validam uma certa conjectura.

Muitos alunos manifestaram a importância de visualizar e poder manipular a construção para poder responder e chegar a quaisquer tipos de conclusão. Alguns alunos argumentaram que este tipo de aula requer mais concentração e prende a atenção pois são construtores do conhecimento uma vez que precisam criar o objeto para poder manipular e investigar o que for necessário.

Baseado nesta aplicação considero que o computador ou a utilização do GeoGebra por si só, não garantem o sucesso dos processos de ensino e de aprendizagem. No entanto, o modo como esse ambiente é organizado pode permitir negociações de significados, que são fundamentais para a construção da aprendizagem. Ao longo da análise desenvolvida anteriormente, foi possível perceber que alguns dos questionamentos propostos não ficaram claros, de modo que os estudantes não desenvolveram a análise esperada para os mesmos. Este fato, exemplifica a importância de um bom planejamento para que as potencialidades do software possam ser bem exploradas. É importante salientar que, na prática desenvolvida, as discussões dos conceitos e propriedades matemáticas foram desencadeadas pela estratégia didática de ter relembrado as razões trigonométricas no triângulo retângulo, no início do plano de aula.

A construção do círculo trigonométrico no software GeoGebra foi de extrema importância para o andamento deste plano de aula. Primeiramente pelo aspecto de poder se observar o objeto de estudo, manipular e estabelecer relações entre seus elementos e conteúdos já estudados. Segundo por poder construir o conhecimento de forma investigativa. A facilidade de lidar com a incorporação de novas tecnologias como auxílio no processo da aprendizagem contribuiu para a compreensão do assunto e ajudou dinamizar o processo de aprendizagem.

Nesta prática pôde-se observar que os alunos ainda possuem uma grande resistência em questões de análise, ou seja, questões que provoquem o processo investigativo requerendo uma apropriação do conteúdo em si para a construção da competência que se deseja. Esta dificuldade em investigar e descobrir, pode estar aliada às práticas didáticas feitas até os dias de hoje, onde o professor transmite o conteúdo de forma expositiva e o aluno, ao absorver o que lhe foi apresentado, transporta este suposto conhecimento a uma sequência de exercícios de memorização propostos.

A matemática vem trilhando novas abordagens e novas dinâmicas. Muitos avanços estão sendo construídos em relação a sua aplicabilidade, em relação a uma nova matemática. Porém para acompanhar esta mudança se faz necessário a incorporação de novas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). As TIC exercem um papel cada vez mais importante na forma de nos comunicarmos, aprendermos e vivermos. O desafio é equipar essas tecnologias efetivamente de forma a atender aos interesses dos aprendizes e da grande comunidade de ensino e aprendizagem. Considero que o tema Trigonometria é fascinante, pois é desafiador e estimulante; assim, tenho a satisfação de ter concluído este trabalho, com o foco da introdução da trigonometria, razão seno e a utilização do software GeoGebra.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.Disponível e http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf.Acesso em: 02/06/2015

GRIPA, Andriele et al, *Contribuições do Geogebra no ensino-aprendizagem da geometria analítica,* disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscemmaand/RE/RE_11.pdf acessado em: 24 ago. 2015

LOPES. M. M. *Construção e Aplicação de uma Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o software GeoGebra*. 123 f. Dissertação (Mestre) - Curso de Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Departamento de Matemática, UFRN, Natal, 2010.

LOPES. M. M. *Potencialidades do software geogebra no ensino e aprendizagm de trigonometria* -Laboratório de Matemática – CERES/UFRN -2013

MARTINS, V. L. de O. F. *Atribuindo significado ao seno e cosseno,utilizando o software Cabri-Géomètre. 2003.* Dissertação de Mestrado(Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de SãoPaulo/PUC-SP, São Paulo, SP, 2003

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H.(2006). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica.