

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Análise Limite de Estruturas Através de uma Formulação em  
Elasticidade Não-Linear

Paulo Roberto Zanella Pasquali

Porto Alegre  
2008

Paulo Roberto Zanella Pasquali

**ANÁLISE LIMITE DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DE UMA  
FORMULAÇÃO EM ELASTICIDADE NÃO-LINEAR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia. Orientação: Prof. Dr. Samir Maghous e Prof. Dr. Guillermo Juan Creus.

Porto Alegre

2008

P284a Pasquali, Paulo Roberto Zanella  
Análise limite de estruturas através de uma formulação em elasticidade não-linear / Paulo Roberto Zanella Pasquali. – 2008.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre, BR-RS, 2008.

Orientação: Prof. Dr. Samir Maghous  
Prof. Dr. Guillermo Juan Creus

1. Estruturas (Engenharia). 2. Elasticidade. 3. Plasticidade. 4. Simulação numérica. I. Maghous, Samir, orient. II. Creus, Guillermo Juan, orient. III. Título.

CDU-624.04(043)

**PAULO ROBERTO ZANELLA PASQUALI**

**ANÁLISE LIMITE DE ESTRUTURAS ATRAVÉS DE UMA  
FORMULAÇÃO EM ELASTICIDADE NÃO-LINEAR**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelos professores orientadores e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 24 de março de 2008.

**Prof. Samir Maghous**  
Dr., École Nationale des Ponts et Chaussées  
Orientador

**Prof. Guillermo Juan Creus**  
Dr., Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Orientador

**Prof. Fernando Schnaid**  
Coordenador do PPGEC / UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. José Luis Drummond Alves (COPPE/UFRJ)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Prof. Rogério José Marczak (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)**  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Samir Maghous, que sempre demonstrou dedicação e entusiasmo na orientação desta dissertação, dando apoio, idéias e conselhos inestimáveis, que permitiram-me desenvolver este trabalho.

Ao professor Guillermo Juan Creus, que sempre foi solícito e atencioso em todas as etapas da realização desta pesquisa.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelos conhecimentos transmitidos ao longo do Mestrado.

À CAPES e ao CNPq, pela concessão da bolsa de estudos.

Aos meus pais, Juarez e Izaura, e aos meus irmãos, Carlos e André, que sempre estiveram ao meu lado, apoiando-me em todas as minhas decisões.

De forma especial, à minha namorada, Etiane, pelo companheirismo, amor e apoio incondicional em todos os momentos.

## RESUMO

PASQUALI, P.R.Z. Análise Limite de Estruturas Através de uma Formulação em Elasticidade Não-Linear. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

A avaliação numérica das cargas limites (de colapso) de estruturas é obtida geralmente ou pela aplicação direta dos teoremas de análise limite junto com processos de otimização ou mediante análises incrementais, que levam em consideração o comportamento elasto-plástico do material. Entretanto, ambas as estratégias conduzem eventualmente a dificuldades numéricas, particularmente para cargas próximas à de colapso. Neste trabalho, emprega-se uma alternativa que consiste em simular assintoticamente o comportamento elasto-plástico mediante uma relação elástica não-linear. As vantagens deste tipo de formulação são a possibilidade de se lidar com leis de fluxo não-associadas e um custo computacional reduzido. A relação elástica não-linear é implementada no programa comercial de elementos finitos ABAQUS, através de uma sub-rotina externa ao programa escrita em linguagem FORTRAN. Diversos exemplos de estruturas cujos materiais são regidos pelos critérios de resistência de von Mises e Drucker-Prager são modelados, verificando-se que os resultados das cargas limites obtidas com essa formulação são muito próximos daqueles encontrados na literatura. Por fim, a relação elástica não-linear é empregada para a determinação do domínio de resistência de meios porosos, com diferentes níveis de porosidade.

**Palavras-chave:** carga limite; análise limite; plasticidade; elasticidade não-linear.

## ABSTRACT

PASQUALI, P.R.Z. Análise Limite de Estruturas Através de uma Formulação em Elasticidade Não-Linear. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The numerical assessment of limit loads of structures is generally achieved through the direct implementation of limit analysis theorems together with optimization processes, or through incremental analyses, which account for the elastic-plastic behavior of the material. However, both the strategies may lead to numerical difficulties, particularly when the load is close to its limit value. In this context, the alternative approach presented in this work consists in simulating asymptotically the regime of free plastic flow by means of a fictitious non-linear elastic material. One of the main advantages of this kind of formulation lies in its ability to deal with non-associated flow rules and a reduced computational cost. The non-linear elastic behavior is implemented into the finite element computational software ABAQUS, making use of an external subroutine written in FORTRAN language. Several examples of geotechnical and structural problems with materials ruled by von Mises and Drucker-Prager failure criteria are analyzed. The results obtained with this formulation prove to be very close to those obtained through analytical solutions. At last, the non-linear elastic relation is used in the determination of the resistance domain of porous media with different levels of porosity.

**Keywords:** limit load; limit analysis; plasticity; non-linear elasticity.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>18</b>
1.1. GENERALIDADES .....	18
1.2. BREVE HISTÓRICO .....	18
1.3. APLICAÇÕES DA ANÁLISE LIMITE .....	20
1.4. OBJETIVOS E METODOLOGIA .....	20
1.5. ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO .....	21
1.6. HIPÓTESES E NOTAÇÕES.....	22
1.6.1. Hipóteses.....	22
1.6.2. Notações.....	22
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>24</b>
2.1. INTRODUÇÃO .....	24
2.2. RELAÇÕES GERAIS EM PLASTICIDADE.....	24
2.2.1. Modelo do material.....	25
2.2.2. Critério de resistência para materiais elasto-plásticos perfeitos.....	27
2.2.3. O postulado de estabilidade de Drucker .....	27
2.2.4. Lei de fluxo e normalidade .....	28
2.2.5. Convexidade da superfície de ruptura .....	29
2.2.6. Princípios do trabalho virtual.....	30
2.3. ANÁLISE LIMITE .....	31
2.3.1. Carregamentos limites de um sistema .....	31
2.3.2. Aproximação pelo interior de $K$ .....	32
2.3.3. Aproximação pelo exterior de $K$ .....	33

2.4. DETERMINAÇÃO DE CARGAS LIMITES ATRAVÉS DE UMA LEI ELÁSTICA NÃO-LINEAR .....	35
<b>3. MATERIAL DE VON MISES .....</b>	<b>37</b>
3.1. CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA .....	37
3.2. DESCRIÇÃO DO MÉTODO .....	38
3.3. VALIDAÇÃO DO MÉTODO .....	42
3.3.1. Cubo submetido a compressão simples .....	42
3.3.2. Viga submetida a um deslocamento na extremidade livre .....	44
3.3.3. Tubo espesso submetido a um deslocamento radial.....	47
3.3.4. Fundação sobre solo puramente coesivo .....	49
3.3.5. Talude vertical .....	53
3.3.6. Placa quadrada submetida a uma carga concentrada.....	55
<b>4. MATERIAL DE DRUCKER-PRAGER.....</b>	<b>58</b>
4.1. CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA .....	58
4.2. CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS CRITÉRIOS DE MOHR-COULOMB E DE DRUCKER-PRAGER EM DEFORMAÇÃO PLANA .....	59
4.3. DESCRIÇÃO DO MÉTODO .....	61
4.4. VALIDAÇÃO DO MÉTODO .....	62
4.4.1. Esfera oca submetida a uma pressão externa.....	62
4.4.1.1. Carga $p$ de compressão .....	64
4.4.1.2. Carga $p$ de tração .....	66
4.4.2. Fundação sobre solo com coesão e atrito .....	68
4.4.3. Talude vertical em solo com atrito e coesão.....	70

<b>5. ABORDAGEM MICROMECAÂNICA DA RESISTÊNCIA DE MEIOS POROSOS.....</b>	<b>74</b>
5.1. INTRODUÇÃO .....	74
5.2. DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO DE RESISTÊNCIA MACROSCÓPICO: TÉCNICA DE HOMOGENEIZAÇÃO NÃO-LINEAR .....	74
5.3. DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO DE RESISTÊNCIA MACROSCÓPICO: IMPLANTAÇÃO DA LEI ELÁSTICA NÃO-LINEAR .....	78
5.3.1. Matriz com material de von Mises .....	79
5.3.2. Matriz com material de Drucker-Prager .....	79
5.4. EXEMPLO NUMÉRICO .....	80
5.4.1. Porosidade $\Phi = 15\%$ .....	81
5.4.2. Porosidade $\Phi = 30\%$ .....	83
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>85</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>87</b>
<b>APÊNDICE A – A SUB-ROTINA UMAT.....</b>	<b>90</b>
<b>APÊNDICE B – CÁLCULOS USADOS NA IMPLEMENTAÇÃO.....</b>	<b>93</b>
B.1. MATERIAL DE VON MISES .....	94
B.2. MATERIAL DE DRUCKER-PRAGER .....	96
<b>APÊNDICE C – CÓDIGOS-FONTE DAS SUB-ROTINAS UMAT .....</b>	<b>98</b>
C.1. MATERIAL DE VON MISES .....	99
C.2. MATERIAL DE DRUCKER-PRAGER .....	100

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Modelo estrutural.....	25
Figura 2.2: Modelo elasto-plástico perfeito no caso unidimensional.....	25
Figura 2.3: Representação da lei de fluxo associada.....	29
Figura 2.4: Domínio de $K$ .....	32
Figura 2.5: Aproximação estática pelo interior.....	33
Figura 2.6: Aproximação cinemática pelo exterior.....	35
Figura 2.7: Comparação entre o comportamento elasto-plástico perfeito do material e o comportamento elástico não-linear.....	36
Figura 3.1: Domínio de resistência de von Mises.....	37
Figura 3.2: Comportamento do material constitutivo.....	39
Figura 3.3: Cubo sob carga de compressão, sendo modelada a oitava parte em destaque.....	43
Figura 3.4: Campo de deslocamentos.....	43
Figura 3.5: Gráfico carga <i>versus</i> módulo do deslocamento.....	44
Figura 3.6: Viga submetida a um deslocamento $\delta$ na extremidade livre.....	44
Figura 3.7: Viga engastada livre.....	45
Figura 3.8: Curva carga <i>versus</i> módulo do deslocamento.....	46
Figura 3.9: Distribuição das tensões equivalentes de von Mises.....	47
Figura 3.10: Deformada da viga e campo de deformações na direção longitudinal.....	47
Figura 3.11: Tubo submetido a um deslocamento radial.....	48
Figura 3.12: (a) Seção do tubo modelada e (b) malha utilizada.....	48
Figura 3.13: Gráfico pressão <i>versus</i> deslocamento radial aplicado.....	49
Figura 3.14: Distribuição das tensões equivalentes de von Mises.....	49
Figura 3.15: Mecanismo de ruptura.....	50
Figura 3.16: Metade da geometria analisada.....	50
Figura 3.17: Malha de elementos finitos utilizada.....	51
Figura 3.18: Gráfico carga <i>versus</i> módulo do deslocamento aplicado.....	52

Figura 3.19: Distribuição das tensões equivalentes de von Mises. ....	52
Figura 3.20: Campo de deformações máximas principais da região. ....	53
Figura 3.21: Talude vertical. ....	53
Figura 3.22: Malha utilizada com condições de contorno aplicadas. ....	54
Figura 3.23: Curva fator de estabilidade <i>versus</i> deslocamento vertical do ponto <i>O</i> . ....	55
Figura 3.24: Campo de deformações máximas principais da estrutura. ....	55
Figura 3.25: Placa quadrada submetida a uma carga concentrada <i>P</i> . ....	56
Figura 3.26: Deformada de um quarto da placa. ....	57
Figura 3.27: Curva carga <i>versus</i> deslocamento vertical. ....	57
Figura 4.1: Domínio de resistência de Drucker-Prager. ....	58
Figura 4.2: Superfície de ruptura do critério de Drucker-Prager no plano meridional. ....	60
Figura 4.3: Comparação entre o comportamento elasto-plástico perfeito do material e o comportamento elástico não-linear. ....	62
Figura 4.4: Esfera submetida a uma solitação isotrópica – caso da compressão. ....	63
Figura 4.5: Geometria modelada e condições de contorno aplicadas. ....	64
Figura 4.6: (a) Malha com elementos de lado $l = 0,25$ m e (b) de lado $l = 0,125$ m. ....	64
Figura 4.7: Curvas carga normalizada <i>versus</i> deslocamento para a malha (a) – carga de compressão. ....	65
Figura 4.8: Curvas carga normalizada <i>versus</i> deslocamento para a malha (b) – carga de compressão. ....	66
Figura 4.9: Curvas carga normalizada <i>versus</i> deslocamento para a malha (a) – carga de tração. ....	67
Figura 4.10: Curvas carga normalizada <i>versus</i> deslocamento para a malha (b) – carga de tração. ....	67
Figura 4.11: Mecanismo de ruptura do solo. ....	68
Figura 4.12: Malha de elementos finitos utilizada. ....	69
Figura 4.13: Gráfico capacidade de carga <i>versus</i> módulo do deslocamento. ....	70
Figura 4.14: Campo de deformações máximas principais da região. ....	70
Figura 4.15: Malha utilizada com condições de contorno aplicadas. ....	72

Figura 4.16: Curva fator de estabilidade <i>versus</i> deslocamento vertical do ponto <i>O</i> . .....	72
Figura 4.17: Campo de deformações máximas principais do talude. ....	73
Figura 5.1: Volume elementar representativo (v.e.r.).....	75
Figura 5.2: Domínio de resistência macroscópico de um meio poroso isotrópico com uma matriz sólida regida por Drucker-Prager. ....	78
Figura 5.3: Material poroso: geometria da célula elementar. ....	81
Figura 5.4: Material poroso ( $\Phi = 15\%$ ) – discretização em elementos finitos. ....	81
Figura 5.5: Domínio de resistência para um meio poroso com $\Phi = 15\%$ .....	82
Figura 5.6: Material poroso ( $\Phi = 30\%$ ) – discretização em elementos finitos. ....	83
Figura 5.7: Domínio de resistência para um meio poroso com $\Phi = 30\%$ .....	84
Figura A.1: Interação entre o ABAQUS e a sub-rotina UMAT.....	91

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Diferença relativa dos valores de $p/h$ obtidos numericamente em relação à solução de referência (4.15) – carga de compressão. ....	65
Tabela 4.2: Diferença relativa dos valores de $p/h$ obtidos numericamente em relação à solução de referência (4.15) – carga de tração.....	67

## LISTA DE SÍMBOLOS

### *Símbolos romanos*

$a$  : aresta do cubo, raio interno, lado;

$B$  : largura;

$b$  : espessura, raio externo;

$\underline{b}$  : vetor de forças de volume;

$\mathbb{C}$  : tensor de rigidez;

$\mathbb{C}^{ef}$  : tensor de rigidez efetivo;

$\mathbb{C}^{hom}$  : tensor de rigidez homogeneizado;

$c$  : coesão;

$d$  : altura;

$E$  : módulo de elasticidade longitudinal;

$E_0$  : deformação macroscópica aplicada;

$\underline{\underline{E}}$  : tensor de deformações macroscópicas;

$\underline{e}_i$  : vetor unitário na direção  $i$ ;

$f$  : critério de resistência;

$G^{hom}$  : domínio convexo de resistência macroscópico;

$G^m$  : domínio convexo dos estados tensões admissíveis;

$g$  : potencial plástico;

$H$  : altura;

$h$  : limite em tração isotrópica;

$I_1$  : primeiro invariante do tensor de tensões;

$J_2$  : segundo invariante do tensor desviador de tensões;

$J_3$  : terceiro invariante do tensor desviador de tensões;

$\underline{J}$  : Jacobiano;

$K$  : conjunto dos carregamentos potencialmente suportáveis, módulo de compressão, fator de estabilidade;

$K^+$  : fator de estabilidade limite (numérico);

$k$  : limite de resistência em cisalhamento simples;

$k_i$  : constante  $i$  do material;

$l$  : comprimento, lado;

$M_p$  : momento de plastificação;

$m_p$  : momento de plastificação linear;

$\underline{n}$  : vetor normal;

$P$  : carga aplicada;

$P_{(e)}$  : potência virtual do carregamento;

$P_{\text{lim}}$  : carga limite (analítica);

$P_{rm}$  : potência resistente máxima do sistema;

$P^+$  : carga limite (numérica);

$p$  : carga aplicada;

$p_{\text{lim}}$  : carga limite (analítica);

$p^+$  : carga limite (numérica);

$\underline{Q}$  : carregamento do sistema;

$q$  : tensão equivalente de von Mises;

$\underline{\dot{q}}$  : vetor de taxas de deformação do sistema;

$S$  : área;

$S_t$  : região submetida a forças de superfície;

$S_u$  : região submetida a deslocamentos prescritos;

$\underline{\underline{s}}$  : tensor desviador de tensões;  
 $T$  : coeficiente de atrito;  
 $\underline{T}$  : vetor de forças de superfície;  
 $t$  : espessura, coeficiente de dilatação;  
 $\underline{\dot{u}}$  : vetor velocidade;  
 $\underline{v}$  : campo virtual de velocidades;  
 $\underline{v}^d$  : vetor velocidade prescrita;  
 $[[\underline{v}]]$  : campo de velocidades localizadas;  
 $\underline{x}$  : vetor posição;  
 $Z_p$  : módulo plástico.

#### *Símbolos gregos*

$\alpha$  : parâmetro do material;  
 $\delta$  : deslocamento aplicado;  
 $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$  : deformações virtuais;  
 $\delta \underline{u}$  : deslocamento virtual;  
 $\varepsilon_d$  : módulo do tensor desviador de deformações;  
 $\varepsilon^e$  : deformação elástica;  
 $\varepsilon_{max}$  : deformação máxima;  
 $\varepsilon^p$  : deformação plástica;  
 $\varepsilon_{ref}$  : deformação de referência;  
 $\varepsilon_v$  : deformação volumétrica;  
 $\dot{\varepsilon}^e$  : taxa de deformação elástica;  
 $\dot{\varepsilon}^p$  : taxa de deformação plástica;

$\underline{\underline{\varepsilon}}$  : tensor de deformações;

$\underline{\underline{\varepsilon}}_d$  : tensor desviador de deformações;

$\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  : tensor de deformações elásticas;

$\underline{\underline{\varepsilon}}^{ef}$  : tensor de deformações efetivas;

$\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  : tensor de deformações plásticas;

$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e$  : tensor de taxas de deformações elásticas;

$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$  : tensor de taxas de deformações plásticas;

$\Phi$  : porosidade;

$\phi$  : ângulo de atrito;

$\gamma$  : peso específico;

$\dot{\lambda}$  : multiplicador plástico;

$\mu$  : módulo de cisalhamento;

$\nu$  : coeficiente de Poisson;

$\pi$  : função de apoio do critério de resistência;

$\Sigma_d$  : módulo do tensor desviador de tensões macroscópicas;

$\Sigma_m$  : tensão média macroscópica;

$\underline{\underline{\Sigma}}$  : tensor de tensões macroscópicas;

$\underline{\underline{\Sigma}}_d$  : tensor desviador de tensões macroscópicas;

$\sigma_0$  : tensão de escoamento; limite de resistência em tração ou compressão simples;

$\sigma_d$  : módulo do tensor desviador de tensões;

$\sigma_i$  : tensão principal  $i$ ;

$\sigma_m$  : tensão média (hidrostática);

$\underline{\underline{\sigma}}$  : tensor de tensões;

$\underline{\underline{\sigma}}_d$  : tensor desviador de tensões;

$\underline{\underline{\sigma}}^*$  : tensor de tensões iniciais;

$\Omega$  : domínio de um corpo;

$\Omega^m$  : região, no meio poroso, ocupada pela matriz;

$\Omega^p$  : região, no meio poroso, ocupada por poros;

$\partial\Omega$  : fronteira do domínio de um corpo;

$\underline{\underline{\xi}}$  : campo de deslocamentos microscópicos;

$\psi$  : potencial elástico.

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. GENERALIDADES

A determinação da carga de colapso de uma estrutura é de fundamental importância para o engenheiro projetista. Tal determinação é tradicionalmente feita através de uma análise elasto-plástica evolutiva, até o colapso da estrutura. Esta metodologia, porém, acarreta um alto custo computacional quando da análise de estruturas complexas, em função do procedimento incremental-iterativo inerente ao processo.

Tal dificuldade motivou a criação de métodos alternativos e eficientes para a estimativa da carga de colapso de estruturas de uma maneira mais simples e direta. Estes métodos são caracterizados por evitarem a análise passo a passo do problema e, apesar de não apresentarem a solução completa ao longo da evolução do carregamento, permitem ao engenheiro obter uma excelente estimativa acerca da carga de colapso da estrutura. O desenvolvimento de tais métodos é objeto da análise limite, que é baseada nos teoremas clássicos dos limites inferior (estático) e superior (cinemático).

Assim, a informação mais importante obtida a partir da análise limite é a carga limite (ou carga de colapso), que é a carga para a qual um evento crítico ocorre, ou seja, o colapso plástico (deformações indefinidamente crescentes sob um carregamento constante). Adicionalmente, outros resultados que podem ser obtidos são um possível mecanismo de colapso, não sendo necessariamente único para um dado sistema de carregamento externo, e um campo de tensões admissíveis no colapso plástico, este sim sendo necessariamente único.

### 1.2. BREVE HISTÓRICO

Galileu é considerado o primeiro cientista a determinar a carga de colapso de uma estrutura. Em seu livro *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*, de 1638, ele investiga a resistência à fratura de uma viga engastada-livre de madeira, submetida a um carregamento na sua extremidade livre (Timoshenko, 1953).

Uma outra referência na determinação de cargas limites de estruturas é o trabalho de Coulomb de 1773 intitulado *Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture* (Salençon, 1983). Nele, Coulomb determina, entre outros, a resistência última de um pilar em compressão, a estabilidade de um muro de contenção e de um arco de alvenaria. Além disso, define com precisão os conceitos de atrito e de coesão de um material.

Os teoremas fundamentais da análise limite (o teorema estático e o teorema cinemático) foram primeiramente formulados por Gvozdev (1936, *apud* Yu, 2006). Uma fundamentação mais precisa e completa de ambos os teoremas foi mais tarde apresentada por Hill (1951; 1952), onde a hipótese de um material rígido-plástico perfeito foi levada em consideração. Paralelamente, Drucker *et al.* (1952) verificaram que o estado de tensões permanece constante durante o colapso plástico, provando que os teoremas do limite superior e inferior da análise limite são válidos para materiais elasto-plásticos perfeitos.

Embora os teoremas clássicos do limite superior e inferior da análise limite terem sido estabelecidos na década de 1950, soluções analíticas completas para as cargas limites são difíceis de serem obtidas para estruturas com formas geométricas e condições de carregamento complexas (Liu *et al.*, 1995). O rápido progresso nas técnicas de elementos finitos e em programação matemática nos últimos anos, no entanto, tornou possível desenvolver métodos numéricos para a análise limite de estruturas.

A programação linear foi bastante utilizada para a determinação de cargas limites. Com ela, a superfície de ruptura do material é substituída por uma superfície poliédrica, fazendo com que o número de incógnitas e o número de restrições do modelo aumentem consideravelmente. Contribuições representativas dessa abordagem são dadas por Anderheggen e Knöpfel (1972), Christiansen (1981), Andersen e Christiansen (1995) e Christiansen (1996).

Na maioria dos casos, o critério de resistência do material é não-linear, utilizando-se programação não-linear na formulação do modelo de análise limite. Os trabalhos de Belytschko e Hodge (1970), Liu *et al.* (1995), Andersen *et al.* (1998) e Sloan e Lyamin (2002) ilustram a utilização da programação não-linear para a determinação de cargas limites.

### 1.3. APLICAÇÕES DA ANÁLISE LIMITE

Aplicações da análise limite têm sido feitas em diferentes tipos de estruturas. Dentre elas, merecem destaque as aplicações em cascas, placas, solos e meios heterogêneos.

Resultados significativos têm sido obtidos através da aplicação da análise limite em cascas e placas. Procedimentos numéricos clássicos, tal como o método das linhas de ruptura, têm provido soluções fechadas para a carga limite de placas e cascas de geometria simples, como pode ser observado nos trabalhos de Massonnet e Save (1966) e Lubliner (1990). Com o auxílio do Método dos Elementos Finitos, importantes desenvolvimentos têm sido observados na análise limite destas estruturas, como mostra Pastor e Turgeman (1982) e Franco e Ponter (1997).

Na engenharia geotécnica, a análise limite tem sido aplicada principalmente para a verificação da estabilidade de taludes e muros de contenção e para a obtenção da capacidade de carga de fundações. Contribuições significativas nessa área podem ser ilustradas pelos trabalhos de Sloan (1988; 1989), Sloan e Lyamin (2002) e de Buhan e Maghous (1995).

Mais recentemente, a combinação da teoria da homogeneização com a teoria da análise limite tem permitido a obtenção das cargas limites e do domínio de resistência macroscópico de um material compósito a partir do conhecimento das resistências e do comportamento dos materiais constitutivos. Os trabalhos de Francescato e Pastor (1997) e de de Buhan *et al.* (1998) indicam bem o desenvolvimento dessa área.

### 1.4. OBJETIVOS E METODOLOGIA

A aplicação direta dos teoremas da análise limite para a determinação analítica das cargas de colapso é possível somente em estruturas com geometria e carregamentos simples. Em situações mais complexas, faz-se necessária a utilização de procedimentos numéricos, tal como o Método dos Elementos Finitos juntamente com as idéias da análise limite, para a determinação das cargas limites. Porém, esta estratégia conduz eventualmente a dificuldades numéricas, particularmente para cargas próximas à de colapso.

Neste trabalho, busca-se determinar a carga de colapso para diferentes estruturas através de uma alternativa que consiste em simular assintoticamente o comportamento elasto-plástico do material constituinte mediante uma relação elástica não-linear, durante um trajeto de carga

monotonicamente crescente. Dois critérios de resistência serão considerados: o critério de resistência de von Mises (1913, *apud* Yu, 2006) e o de Drucker-Prager (Drucker e Prager, 1952).

A relação elástica não-linear que simula o comportamento do material será implementada no programa comercial de elementos finitos ABAQUS, através de uma sub-rotina externa ao programa escrita em linguagem de programação FORTRAN. Diversos exemplos de estruturas serão modelados e as cargas limites obtidas com essa formulação serão validadas, comparando-as com soluções analíticas já existentes.

Por fim, será estudado o comportamento de meios porosos, através da aplicação das leis de comportamento elásticas não-lineares e técnicas de homogeneização. A partir desse estudo, serão determinados os domínios de resistência de meios porosos com diferentes níveis de porosidade.

## 1.5. ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho, que trata da determinação das cargas limites de estruturas através de uma formulação em elasticidade não-linear, está organizado em 6 capítulos. O Capítulo 1 apresentou o tema da pesquisa, sua relevância e seus objetivos.

No Capítulo 2 são estabelecidas as bases teóricas que sustentam a posterior implementação das leis constitutivas dos materiais e a resolução dos problemas. As suposições e hipóteses que são necessárias na formulação clássica da análise limite são explicadas. São apresentadas, de forma mais detalhada, o contexto da análise limite e os teoremas do limite inferior e superior que a norteia, baseados principalmente nos livros de Salençon (1983) e de Chen e Han (1988). Ao final do capítulo, uma breve explicação da formulação em elasticidade não-linear utilizada para a determinação de cargas limites é dada.

O critério de resistência de von Mises e a formulação em elasticidade não-linear para esse critério são apresentados no Capítulo 3. Vários exemplos numéricos são analisados, e a eficiência e a precisão das análises são discutidas, comparando-se com resultados disponíveis na literatura.

De maneira análoga, no Capítulo 4 é apresentado o critério de Drucker-Prager e a sua formulação em elasticidade não-linear. A eficácia do método é determinada através da modelagem de determinados problemas estruturais.

Domínios de resistência de meios porosos com matriz sólida regida pelos critérios de von Mises e Drucker-Prager são determinados no Capítulo 5.

Com o Capítulo 6, buscou-se documentar as conclusões da pesquisa e também apresentar sugestões para trabalhos futuros.

## 1.6. HIPÓTESES E NOTAÇÕES

### 1.6.1. Hipóteses

Duas hipóteses básicas são requeridas na demonstração dos teoremas da análise limite:

- a) material elasto-plástico perfeito: o material exibe plasticidade perfeita, sem endurecimento ou amolecimento;
- b) supõem-se pequenas deformações na estrutura: mudanças na geometria da estrutura que ocorrem na carga de colapso são desprezáveis, assim como efeitos de 2ª ordem (não-linearidade geométrica).

Além destas hipóteses, leva-se em conta que os efeitos dinâmicos são insignificantes; o processo de carregamento é considerado quase-estático. A independência do tempo e da temperatura é também adotada.

Adicionalmente, toma-se em todos os problemas analisados a premissa da monotonicidade do carregamento, sendo que o efeitos de alívio de tensões durante este carregamento é desconsiderado.

### 1.6.2. Notações

As seguintes notações são utilizadas ao longo do trabalho, a menos que sejam definidas diferentemente em algum ponto específico do texto:

- (a) vetores são representados por um símbolo sublinhado com um traço:  $\underline{x}$ ,  $\underline{u}$ ;

(b) tensores de segunda ordem são representados por um símbolo duplamente sublinhado:  $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}$ ;

(c) a derivação em relação ao tempo é representada por um ponto sobre a grandeza considerada:  $\dot{f}, \dot{u}, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ ;

(d) os sobrescritos  $e$  e  $p$  referem-se a termos elásticos e plásticos, respectivamente:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e, \underline{\underline{\varepsilon}}^p.$$

*Convenção:* as tensões são consideradas positivas em tração.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1. INTRODUÇÃO

Para a solução de um problema de valor de contorno na mecânica dos sólidos deformáveis, três condições básicas são necessárias: as equações de equilíbrio de tensões, as relações tensão-deformação e as condições de contorno (Chen e Liu, 1990). Em geral, uma infinidade de estados de distribuição de tensões irá satisfazer às condições de contorno em tensões, as equações de equilíbrio e o critério de resistência, e um número infinito de modos de deslocamento do corpo serão compatíveis com as possibilidades de deformação do corpo no contínuo. Na teoria da elasticidade, utilizando-se as relações tensão-deformação, pode-se determinar uma solução única para um estado de tensões ou deslocamentos dado. Entretanto, para um material elasto-plástico, há como regra que o desenvolvimento da solução se dá em três estágios, quando as cargas aplicadas gradualmente crescem a partir do zero: a resposta elástica inicial, o fluxo plástico restrito e o fluxo plástico livre. A solução completa do problema através dessa abordagem é, em geral, bastante complexa, e são necessários métodos que estimem a capacidade de carga de uma maneira mais direta. A análise limite é o método que fornece uma declaração definitiva acerca da carga de colapso sem realizar uma análise elasto-plástica passo a passo.

Neste capítulo, as relações fundamentais e as bases teóricas que fundamentam a análise limite, dentro das hipóteses expressas na Seção 1.6.1, serão revisadas. As formulações da análise limite, baseadas em teoremas limites clássicos, serão estabelecidas e discutidas. Finalmente, uma explicação geral da abordagem utilizada neste trabalho para a determinação da carga de colapso de estruturas será dada.

### 2.2. RELAÇÕES GERAIS EM PLASTICIDADE

A definição da análise limite clássica é baseada em uma série de fundamentos que serão explicados nesta seção, tais como o modelo do material, o postulado de estabilidade de Drucker e a regra de normalidade.

Ao longo deste trabalho, o modelo estrutural genérico utilizado é um domínio fechado  $\Omega$  ocupado inteiramente por um material elasto-plástico perfeito (Figura 2.1). A fronteira  $\partial\Omega$  deste corpo consiste de duas regiões,  $S_u$  e  $S_t$ . A velocidade  $\underline{\dot{u}}$  está prescrita sob a forma  $\underline{\dot{u}}(\underline{x}) = \underline{v}^d$  em cada ponto  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$  de  $S_u$ . Sobre  $S_t$  e no interior de  $\Omega$ , forças de superfície  $\underline{T}$  e de volume  $\underline{b}$  são prescritas, respectivamente.

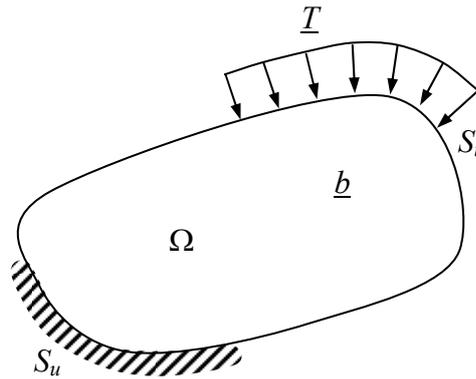


Figura 2.1: Modelo estrutural.

### 2.2.1. Modelo do material

Em muitas situações práticas, supõe-se que o material apresenta um efeito de endurecimento desprezável, isto é, o seu diagrama uniaxial tensão-deformação após o ponto de plastificação pode ser aproximado por uma linha reta horizontal (Figura 2.2). Assim, supõe-se que a deformação plástica ocorre sob um nível constante de tensão. Este comportamento é chamado de comportamento plástico perfeito, e é através deste comportamento que os teoremas do limite inferior e superior da análise limite são estabelecidos.

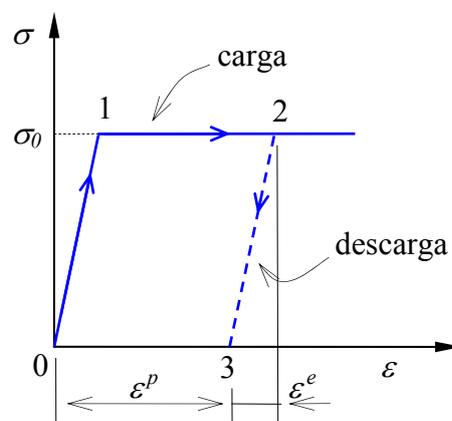


Figura 2.2: Modelo elasto-plástico perfeito no caso unidimensional.

Para tensões suficientemente pequenas satisfazendo  $|\sigma| < \sigma_0$ , o material se comporta elasticamente. Neste caso, a lei de Hooke afirma que

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}, \quad (2.1)$$

onde  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento,  $\varepsilon^e$  é a deformação elástica e  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material. Esta relação linear representa a parte 0-1 do modelo da Figura 2.2.

Quando a tensão atinge o valor  $\sigma_0$ , pode-se observar fluxo plástico livre sob tensão constante  $\sigma$  (parte 1-2 da Figura 2.2). Durante este fluxo, não há incremento de tensão. Com um valor de  $\sigma$ , pode haver vários valores associados de deformação.

Para um material elasto-plástico perfeito, durante o processo de descarga, o material se comporta puramente elasticamente. A descarga é ilustrada pela linha 2-3 paralela à linha inicial 0-1. A lei de Hooke relaciona incrementos de tensão  $d\sigma$  e deformação  $d\varepsilon^e$ , sendo o incremento de deformação plástica nulo, de forma que

$$d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E} \quad \text{e} \quad d\varepsilon^p = 0. \quad (2.2)$$

Após a descarga, uma quantidade de deformação plástica  $\varepsilon^p$  permanece no material.

Durante um certo processo de carregamento, a deformação total no material pode ser expressa, considerando-se a hipótese de pequenas deformações, pela soma da deformação elástica  $\varepsilon^e$  e da deformação plástica  $\varepsilon^p$  como

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \quad (2.3)$$

A relação (2.3) também é válida para taxas de deformação, isto é,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p. \quad (2.4)$$

Na observância da hipótese (b) da Seção 1.6.1, as relações (2.1) a (2.4) podem ser aplicadas para os tensores de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ , de deformações  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , de deformações elásticas  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ , de

deformações plásticas  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$ , de taxas de deformações elásticas  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e$  e de taxas de deformações plásticas  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$ .

### 2.2.2. Critério de resistência para materiais elasto-plásticos perfeitos

A ruptura (falha) de um material é usualmente definida em termos de sua capacidade de sustentar um carregamento. Entretanto, para materiais elasto-plástico perfeitos, o escoamento em si implica em falha, logo a tensão de escoamento é também o limite de resistência do material (Chen e Han, 1988).

Para materiais isotrópicos (para os quais suas propriedades invariavam ante uma transformação de coordenadas), o critério de resistência pode ser geralmente expresso sob a forma

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k_1, k_2, \dots) \leq 0, \quad (2.5)$$

onde  $f$  é uma função de resistência que depende das tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  e das constantes  $k_1, k_2, \dots$  do material. Alternativamente, pode-se escrever a função (2.5) como

$$f(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) \leq 0, \quad (2.6)$$

onde  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  e  $J_2$  e  $J_3$  são o segundo e o terceiro invariantes do tensor desviador de tensões  $\underline{\underline{s}}$ .

A função de resistência (2.6) define uma superfície de ruptura no espaço das tensões, dada por  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ . O fluxo plástico pode ocorrer somente em pontos sobre a superfície de ruptura. Estados de tensão para os quais  $f(\underline{\underline{\sigma}}) > 0$  não são possíveis e  $f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$  corresponde ao comportamento elástico.

### 2.2.3. O postulado de estabilidade de Drucker

Um material é definido como estável, segundo o postulado de Drucker, se satisfaz às seguintes condições:

- a) durante a aplicação de um conjunto de forças num corpo, o trabalho realizado pela ação externa nas mudanças de deslocamentos que ele produz é positivo;

- b) em um ciclo de aplicação e remoção de um conjunto de forças num corpo, o novo trabalho realizado pela ação externa nas mudanças de deslocamentos que ele produz é não-negativo.

Os postulados acima podem ser matematicamente representados por

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > 0 \quad (2.7)$$

e

$$\oint \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0, \quad (2.8)$$

respectivamente, onde  $\oint$  é a integral tomada sobre um ciclo completo de carga e descarga,  $\dot{\sigma}_{ij}$  é a taxa com que as tensões são adicionadas ao corpo e  $\dot{\epsilon}_{ij}$  é a taxa de deformação produzida. Para um modelo elasto-plástico perfeito, o material é estável segundo Drucker. Ou seja, o trabalho realizado pelo carregamento adicional é positivo se deformações plásticas são produzidas e nulo se as deformações são puramente elásticas durante o ciclo. O postulado de Drucker impõe significativas restrições na forma da superfície de ruptura e na regra de fluxo, como observado a seguir.

#### 2.2.4. Lei de fluxo e normalidade

Para materiais que são definidos como estáveis segundo o postulado de Drucker, a regra da normalidade afirma que o vetor representando a taxa de deformação plástica  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$  tem direção normal à superfície de ruptura  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$  nas regiões suaves e aponta para fora dela. Nos pontos angulosos da superfície,  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p$  situa-se entre vetores normais adjacentes. Pode-se escrever, numa forma geral, que

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, \quad (2.9)$$

onde  $\dot{\lambda} > 0$  é denominado multiplicador plástico. A equação (2.9) é chamada de lei de fluxo associada, pois está associada à superfície de ruptura do material (a superfície de ruptura coincide com a superfície de potencial plástico), e é representada na Figura 2.3.

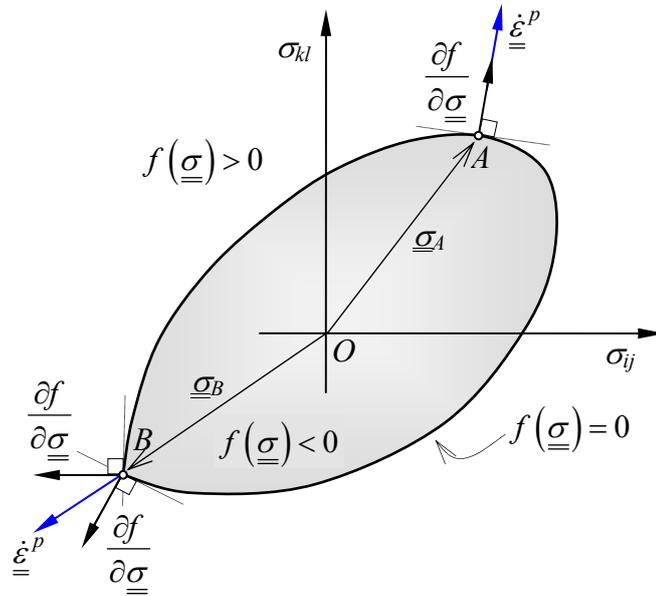


Figura 2.3: Representação da lei de fluxo associada.

### 2.2.5. Convexidade da superfície de ruptura

Materiais que obedecem ao postuldo de Drucker têm a sua superfície de ruptura  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$  convexa no espaço de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Este princípio implica que aplicando-se um incremento de carga num corpo, fazendo com que o estado de tensões iniciais  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  que se encontra no interior da superfície de ruptura passe para o estado de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ , este sobre a superfície de ruptura. Em seguida promove-se o descarregamento do corpo novamente para o estado de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}^*$ , sendo o postuldo de Drucker dado pela seguinte relação:

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^*): \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p \geq 0. \quad (2.10)$$

Assim, para uma superfície de ruptura  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$  fixada num espaço de tensões tridimensional, cada plano tangente à superfície nunca pode interceptar a mesma, do contrário o produto escalar da expressão (2.10) poderia resultar em um valor negativo.

Materiais elasto-plásticos perfeitos obedecem ao postuldo de estabilidade de Drucker, à regra da normalidade e suas superfícies de ruptura são convexas.

### 2.2.6. Princípios do trabalho virtual

Para que os teoremas da análise limite sejam comprovados, a equação dos trabalhos virtuais deve ser satisfeita. Sabe-se que a aplicação da equação dos trabalhos virtuais requer que somente pequenas mudanças ocorram na geometria do corpo. Na análise limite, supõe-se que as mudanças na geometria no instante do colapso são pequenas, de maneira que as dimensões originais indeformadas são utilizadas nas equações de equilíbrio.

Um campo de tensões e um campo de forças podem ser chamados de estaticamente admissíveis se eles satisfazem à equação de equilíbrio e às condições de contorno

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{b}} &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} &= \underline{\underline{T}} \quad \text{sobre } S_t, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde  $\operatorname{div}$  denota o operador divergência e  $\underline{\underline{n}}$  é a normal exterior a  $\Omega$ .

De maneira análoga, as taxas de deformação e os campos de velocidade cinematicamente admissíveis são os campos que satisfazem à equação cinemática

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad \text{em } \Omega \quad (2.12)$$

e às condições de contorno cinemáticas

$$\dot{\underline{\underline{u}}} = \underline{\underline{v}}^d \quad \text{em } S_u. \quad (2.13)$$

O princípio do trabalho virtual estabelece o estado de equilíbrio entre o campo de tensões internas e um campo de forças externas atuando no corpo. Ele afirma que o trabalho virtual feito por um possível campo de tensões estaticamente admissível  $\underline{\underline{\sigma}}$  num campo de deformações virtuais  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$  é igual ao trabalho virtual feito por um sistema de forças externas  $(\underline{\underline{T}}, \underline{\underline{b}})$  no deslocamento virtual  $\delta \underline{\underline{u}}$  associado com as deformações virtuais  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ . Portanto,

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} \, d\Omega = \int_{S_t} \underline{\underline{T}} \cdot \delta \underline{\underline{u}} \, dS_t + \int_{\Omega} \underline{\underline{b}} \cdot \delta \underline{\underline{u}} \, d\Omega. \quad (2.14)$$

O princípio da potência virtual pode ser derivado do princípio acima, substituindo a deformação virtual  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$  e o deslocamento virtual  $\delta \underline{\underline{u}}$  por taxas de deformação  $\delta \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$  e de velocidade  $\delta \dot{\underline{\underline{u}}}$  virtuais. Ou seja,

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{T}} \cdot \delta \dot{\underline{\underline{u}}} dS_i + \int_{\Omega} \underline{\underline{b}} \cdot \delta \dot{\underline{\underline{u}}} d\Omega. \quad (2.15)$$

## 2.3. ANÁLISE LIMITE

O objetivo principal da análise limite é determinar a carga de colapso de uma determinada estrutura. Ela pertence a uma classe de métodos diretos por não considerar a história completa de carregamento nem envolver uma análise passo a passo. No instante do colapso plástico, também é possível obter informações acerca do campo de tensões e do mecanismo de colapso.

### 2.3.1. Carregamentos limites de um sistema

O comportamento mecânico do sistema  $\Omega$  é representado por um modelo elasto-plástico perfeito. A este comportamento associa-se um critério de resistência  $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$ , sendo a lei de fluxo associada.

Um carregamento  $\underline{\underline{Q}}$  é considerado suportável pelo sistema se for estaticamente admissível (ou seja, deve verificar a equação (2.11)) e respeitar o critério de resistência em todos os pontos do sistema. O conjunto dos carregamentos potencialmente suportáveis é designado por  $K$ , e é matematicamente expresso por

$$K = \left\{ \underline{\underline{Q}} \mid \exists \underline{\underline{\sigma}} \text{ E.A. e } f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \right\}, \quad (2.16)$$

onde E.A. denota estaticamente admissível.  $K$  é um domínio convexo de  $\mathbb{R}^n$ , onde  $n$  designa um número finito de parâmetros de carregamento. Assim, um carregamento é suportável caso se encontre no interior do domínio  $K$ . Os carregamentos que se encontram sobre a fronteira de  $K$  são designados carregamentos limites. A Figura 2.4 ilustra o domínio dos carregamentos potencialmente suportáveis, para um modo de carregamento de 2 parâmetros,  $\underline{\underline{Q}}_l$  e  $\underline{\underline{Q}}_k$ .

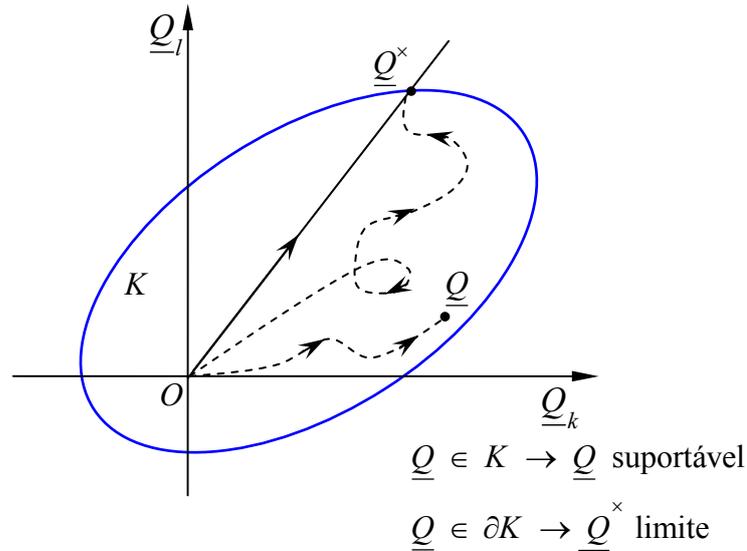


Figura 2.4: Domínio de  $K$ .

Algumas propriedades acerca dos carregamentos limites podem ser enunciadas:

- a) o carregamento limite sobre um trajeto de carregamento é independente das tensões iniciais;
- b) são independentes do trajeto de carga;
- c) são independentes das características elásticas lineares do material constitutivo;
- d) sua determinação pode ser feita diretamente, sendo desnecessário resolver o problema elasto-plástico passo a passo ao longo de trajeto de carregamento, a partir do estado inicial conhecido.

A determinação analítica de  $K$  não é, em geral, possível. Assim, utilizam-se os teoremas estático e cinemático da análise limite para aproximar-se de  $K$  pelo interior e pelo exterior do domínio, respectivamente.

### 2.3.2. Aproximação pelo interior de $K$

A aproximação pelo interior de  $K$  é feita levando-se em conta o teorema do limite inferior da análise limite, que afirma que se a carga atuante tem uma magnitude que permita encontrar um campo de tensões, satisfazendo às condições de equilíbrio no interior e no contorno, e em qualquer ponto do corpo essas tensões estejam satisfazendo o critério de resistência do material, então a carga atuante é menor ou no máximo igual à carga de colapso da estrutura (Chen e Liu, 1990). Esse enunciado pode ser sintetizado abaixo:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad \left| \quad \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} \text{ é E.A.} \\ \rightarrow \underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{\sigma}}) \in K. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Essa abordagem é de difícil aplicação prática, pois não é trivial visualizar campos de tensão estaticamente admissíveis em uma estrutura qualquer, que satisfaçam o critério  $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$ . A Figura 2.5 mostra a aproximação pelo interior de  $K$ .

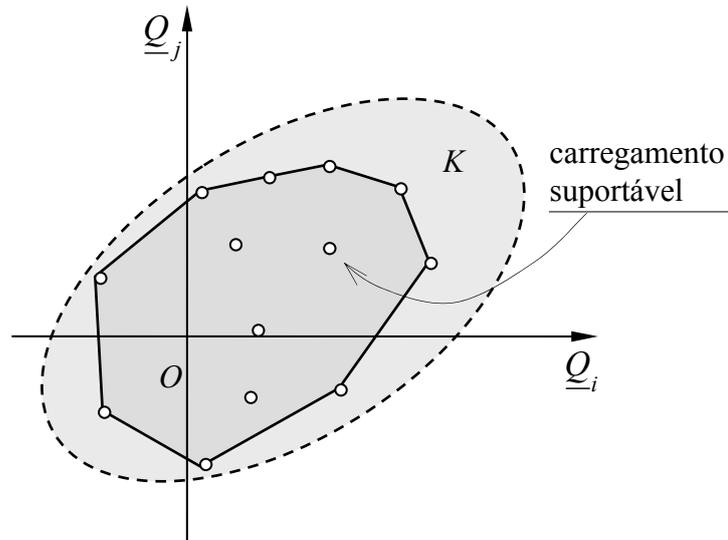


Figura 2.5: Aproximação estática pelo interior.

### 2.3.3. Aproximação pelo exterior de $K$

A aproximação pelo exterior de  $K$  é feita levando-se em conta o teorema do limite superior da análise limite, que afirma que considerando-se um campo de velocidades cinematicamente admissíveis, uma carga que realize potência externa igual à potência interna plástica de deformação, para o campo de velocidades em questão, será maior ou igual à carga de colapso (Chen e Liu, 1990).

O enunciado fundamental da abordagem cinemática é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\underline{Q}} \in K, \forall \underline{v} \text{ C.A. no sistema,} \\ P_{(e)}(\underline{\underline{Q}}, \underline{v}) = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}) \leq \int_{\Omega} \pi(\underline{x}, \underline{\dot{\epsilon}}(\underline{x})) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}), \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket) d\Sigma, \end{array} \right. \quad (2.18)$$

onde  $\underline{v}$  denota um campo C.A. (cinematicamente admissível) de velocidades virtuais.  $\Sigma$  designa o conjunto das superfícies de descontinuidade dos campos de velocidades localizadas

$\llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket$ , sendo  $\underline{n}(\underline{x})$  os vetores normais a essas superfícies. O termo  $\underline{\dot{\varepsilon}}$  representa a taxa de deformação virtual.  $P_{(e)}(\underline{Q}, \underline{v})$  é a potência virtual do carregamento  $\underline{Q}$ ;  $\underline{\dot{q}}(\underline{v})$  é a taxa de deformação virtual do sistema. As funções  $\pi$  são definidas por:

$$\pi(\underline{x}, \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{x})) = \max \left\{ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{x}) \mid f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \right\}, \quad (2.19)$$

$$\pi(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}), \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket) = \max \left\{ \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \mid f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \right\}, \quad (2.20)$$

e representam funções de apoio do critério de resistência ou, num contexto mecânico, a densidade de potência resistente máxima. As funções  $\pi$  são tabeladas para diferentes critérios de resistência e, integradas sobre os domínios  $\Omega$  e  $\Sigma$ , representam a potência resistente máxima do sistema, dada por

$$P_{rm} = \int_{\Omega} \pi(\underline{x}, \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{x})) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}), \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket) d\Sigma. \quad (2.21)$$

As expressões (2.18) surgem como uma condição necessária a ser satisfeita por todos os carregamentos potencialmente suportáveis, sendo concisamente escritas como

$$\begin{cases} \forall \underline{v} \text{ C.A. no sistema,} \\ K \subset \left\{ P_{(e)}(\underline{Q}, \underline{v}) \leq P_{rm}(\underline{v}) \right\}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Considerando-se  $\underline{v}$ , o campo de velocidades virtuais cinematicamente admissíveis, calcula-se  $P_{rm}(\underline{v})$  a partir das expressões conhecidas das funções  $\pi$  e calcula-se  $P_{(e)}(\underline{Q}, \underline{v}) = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v})$ , onde  $\underline{\dot{q}}(\underline{v})$  é conhecido. O domínio  $K$  é incluso no semi-espaco de  $\mathbb{R}^n$  definido pela inequação (2.22). Repetindo-se a operação para diversos campos  $\underline{v}$ , obtém-se rapidamente uma aproximação pela parte externa ao domínio  $K$ , como mostra a Figura 2.6.

Mostra-se que, como regra, campos de velocidade são mais fáceis de se supor que campos de tensão e, portanto, em muitos casos somente estimativas de cargas limites pelo teorema do limite superior são disponíveis (Lubliner, 1990). De particular importância são os campos de velocidade chamados de mecanismos, nos quais a deformação é concentrada em pontos, linhas ou planos, com as partes restantes do sistema se movendo como corpos rígidos.

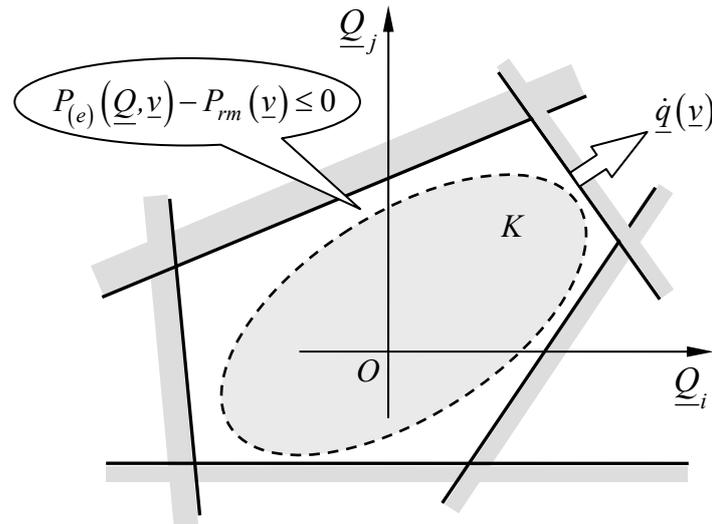


Figura 2.6: Aproximação cinemática pelo exterior.

#### 2.4. DETERMINAÇÃO DE CARGAS LIMITES ATRAVÉS DE UMA LEI ELÁSTICA NÃO-LINEAR

Considera-se um sistema material  $\Omega$  submetido a um carregamento  $\underline{Q}$  representando as solicitações, definidas através da prescrição de forças ou deslocamentos. Para a determinação das cargas limites é necessária a resolução incremental de um problema elasto-plástico ou a aplicação dos teoremas da análise limite. Em numerosas situações, leva-se em conta que ambas as estratégias dão origem a dificuldades numéricas quando o regime de escoamento plástico livre é atingido. Daí resultam estimativas imprecisas das cargas limites da estrutura considerada, juntamente com tempos de cálculo computacional bastante elevados.

Adota-se aqui uma abordagem que consiste em simular o comportamento elasto-plástico perfeito do material por uma relação tensão-deformação do tipo elástico não-linear, compatível com o critério de plasticidade do material constitutivo, e seguir o estado de tensões  $\underline{\sigma}$  do material ao longo de um trajeto de carregamento monotônico, conforme mostra a Figura 2.7. A relação tensão-deformação é construída de maneira que  $\underline{\sigma}$  satisfaça sempre o critério de resistência do material, em todos os pontos de  $\Omega$ . Este método fornece, teoricamente, uma aproximação pelo interior do domínio de carregamentos limites.

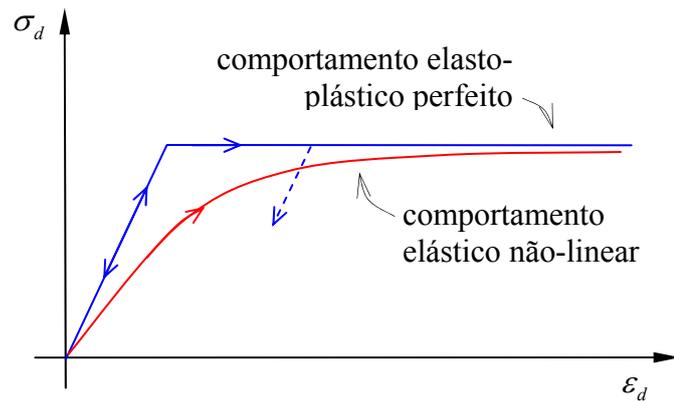


Figura 2.7: Comparação entre o comportamento elasto-plástico perfeito do material e o comportamento elástico não-linear.

No desenvolvimento da lei elástica não-linear que simula o comportamento do material, são introduzidas as seguintes notações:

a) para o tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,

- $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\underline{\sigma}}$  (tensão média);
- $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{1}}$  (tensor desviador de tensões);
- $\sigma_d = \sqrt{\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}}$  (módulo do tensor desviador de tensões);

b) para o tensor de deformações  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ,

- $\varepsilon_v = \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}$  (deformação volumétrica);
- $\underline{\underline{\varepsilon}}_d = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \varepsilon_v \underline{\underline{1}}$  (tensor desviador de deformações);
- $\varepsilon_d = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}}_d : \underline{\underline{\varepsilon}}_d}$  (módulo do tensor desviador de deformações).

### 3. MATERIAL DE VON MISES

#### 3.1. CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA

O critério de resistência de von Mises (1913, *apud* Yu, 2006) é escrito como

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{J_2} - k, \quad (3.1)$$

onde  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensões  $\underline{\underline{s}}$ , dado por

$$J_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \quad (3.2)$$

e  $k$  é o limite de resistência em cisalhamento simples, que para um material perfeitamente plástico, equivale a uma constante. O limite em tração simples é igual a  $k\sqrt{3}$ ; o limite em compressão simples vale  $-k\sqrt{3}$ .

No espaço  $\mathbb{R}^3$  de tensões principais  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ , o domínio de resistência é convexo e definido por  $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$ , podendo ser representado por um cilindro circular reto, com eixo coincidente com o eixo hidrostático ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) e de raio  $k\sqrt{2}$  (Figura 3.1).

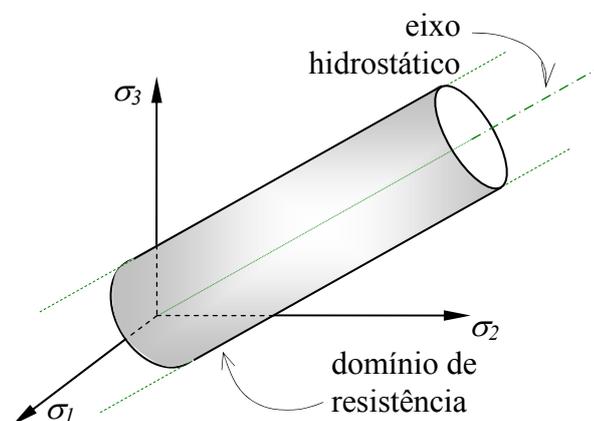


Figura 3.1: Domínio de resistência de von Mises.

As funções de apoio do critério, necessárias na abordagem cinemática da análise limite, são dadas para um campo contínuo de velocidades por

$$\begin{cases} \pi(\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}) = +\infty & \text{se } \text{tr } \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}} \neq 0, \\ \pi(\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}) = k\sqrt{2 \text{tr}(\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}})^2} & \text{se } \text{tr } \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}} = 0; \end{cases} \quad (3.3)$$

e para um campo descontínuo (onde mecanismos são presentes) por

$$\begin{cases} \pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) = +\infty & \text{se } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} \neq 0, \\ \pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) = k \llbracket \underline{v} \rrbracket & \text{se } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

### 3.2. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

A lei elástica não-linear que simula o comportamento do material é descrita a seguir. Supõe-se em toda a seqüência que a plasticidade do material é perfeita e regida por um critério do tipo von Mises, que pode ser escrito, alternativamente a (3.1), como

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_d - k\sqrt{2} \leq 0, \quad (3.5)$$

onde o escalar  $k$  designa o limite em cisalhamento simples do material. Ou, de maneira análoga,

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = q - k\sqrt{3} \leq 0, \quad (3.6)$$

onde  $q$  é a tensão equivalente de von Mises, dada por

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}}. \quad (3.7)$$

O comportamento do material constitutivo é esquematizado na Figura 3.2.

Como o critério (3.5) leva em consideração apenas o segundo invariante do tensor desviador de tensões, propõe-se construir uma lei elástica não-linear fictícia da forma

$$\underline{\underline{\sigma}} = K \varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu(\varepsilon_d) \underline{\underline{\varepsilon}}_d, \quad (3.8)$$

sendo que os coeficientes  $K$  (constante) e  $\mu \geq 0$  representam respectivamente o módulo de compressão e o módulo de cisalhamento elásticos.

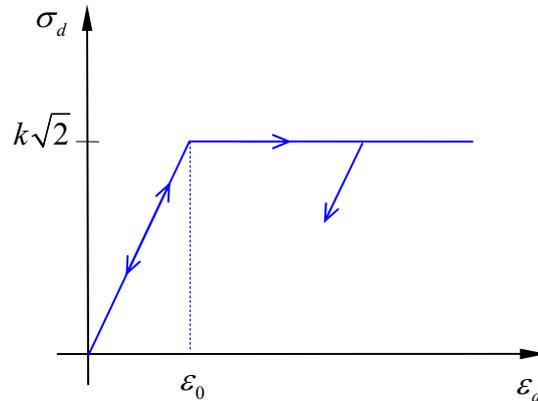


Figura 3.2: Comportamento do material constitutivo.

A relação (3.8) pode ser reescrita sob a forma

$$\sigma_m = K \varepsilon_v \quad \text{e} \quad \underline{s} = 2\mu(\varepsilon_d) \underline{\underline{\varepsilon}}_d. \quad (3.9)$$

A estratégia adotada consiste em escolher a lei não-linear fictícia de maneira que o tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  dado por (3.8) satisfaça em cada ponto do domínio  $\Omega$  o critério  $f$  para qualquer valor de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ :

$$\forall \underline{\underline{\varepsilon}} \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_d - k\sqrt{2} \leq 0. \quad (3.10)$$

Durante o trajeto de carregamento monotônico, quando a carga  $\underline{Q}$  tende para o valor limite, a estrutura  $\Omega$  vai sofrer deformações (difusas ou localizadas) que correspondem, no material elasto-plástico, a um regime de escoamento plástico livre. As zonas referidas são caracterizadas por uma taxa de deformação plástica  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p \neq 0$ . O teorema de associação indica, por sua vez, que para essas zonas  $\underline{\underline{\sigma}}$  deve atingir o critério  $f$ . Escolhe-se então a lei elástica não-linear fictícia de maneira que o tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  dado por (3.8) atinja o critério  $f$  assintoticamente, ou seja, quando a deformação torna-se grande em relação a um valor de referência.

Seja  $\varepsilon_{ref}$  uma deformação considerada “pequena”. Na prática,  $\varepsilon_{ref}$  é uma fração da deformação  $\varepsilon_0$  atingida no fim do regime elástico. A explicação dada no parágrafo anterior é expressa pela relação

$$f(\underline{\underline{\sigma}} = K\varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu(\varepsilon_d)\underline{\underline{\varepsilon}}_d) = 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon_d / \varepsilon_{ref} \gg 1. \quad (3.11)$$

Tendo em vista a forma (3.5) do critério, trata-se de satisfazer o limite

$$\lim_{\varepsilon_d / \varepsilon_{ref} \rightarrow \infty} 2\mu(\varepsilon_d)\varepsilon_d = k\sqrt{2}. \quad (3.12)$$

Pode-se, por conseguinte, tomar qualquer função  $\mu(\varepsilon_d)$  cujo comportamento assintótico verifique

$$\mu(\varepsilon_d) \sim \frac{k\sqrt{2}}{2\varepsilon_d} \quad \text{quando} \quad \varepsilon_d / \varepsilon_{ref} \gg 1. \quad (3.13)$$

Assim, toma-se a seguinte função  $\mu(\varepsilon_d)$  para simular o comportamento assintótico:

$$\mu(\varepsilon_d) = \frac{k\sqrt{2}}{2} \frac{1/\varepsilon_{ref}}{1 + \varepsilon_d / \varepsilon_{ref}}. \quad (3.14)$$

É possível referenciar a lei de comportamento elástico não-linear através de condições isotérmicas, caracterizando-se um potencial elástico  $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}})$  para o qual

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}. \quad (3.15)$$

Para um potencial  $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}})$  que depende da deformação volumétrica  $\varepsilon_v$  e do módulo do tensor desviador de deformações  $\varepsilon_d$ , ou seja,  $\psi = \psi(\varepsilon_v, \varepsilon_d)$ , a relação (3.15) é dada por

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_v} \underline{\underline{1}} + \frac{1}{\varepsilon_d} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_d} \underline{\underline{\varepsilon}}_d. \quad (3.16)$$

O potencial  $\psi(\underline{\underline{\varepsilon}})$  fisicamente representa a densidade de energia livre do material. Para o caso do material regido pelo critério de von Mises, tem-se que

$$\psi(\varepsilon_v, \varepsilon_d) = \frac{1}{2} K \varepsilon_v^2 + \mathfrak{I}(\varepsilon_d), \quad (3.17)$$

onde  $\mathfrak{I}(\varepsilon_d)$  indica uma função dependente de  $\varepsilon_d$ . Comparando-se (3.16) com (3.17) verifica-se que

$$\underline{\underline{\sigma}} = K \varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu(\varepsilon_d) \underline{\underline{\varepsilon}}_d, \quad (3.18)$$

com

$$2\mu(\varepsilon_d) = \frac{1}{\varepsilon_d} \mathfrak{I}'(\varepsilon_d). \quad (3.19)$$

Com  $f\left(\lim_{\varepsilon_d \rightarrow \infty} \underline{\underline{\sigma}}\right) = 0$  tem-se que  $\mu(\varepsilon_d) \sim \frac{\sqrt{2}k}{2\varepsilon_d}$  (equação (3.12)). Inserindo-se este limite em (3.19), obtém-se

$$\mathfrak{I}'(\varepsilon_d) \sim \sqrt{2}k, \quad (3.20)$$

de onde

$$\mathfrak{I}(\varepsilon_d) \sim \sqrt{2}k \varepsilon_d \quad (3.21)$$

para esse nível de tensões desviadoras.

Resta assegurar que a escolha da regra de escoamento plástico para a plasticidade associada seja satisfeita no regime assintótico. Para um dado material, a taxa de deformação plástica  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$  está alinhada na mesma direção que  $\partial f / \partial \underline{\underline{\sigma}}$  (ou seja, na mesma direção de  $\underline{\underline{s}}$ ). Quando a carga limite é atingida, o sistema material está em escoamento plástico livre e a taxa de deformação  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$  é igual à taxa de deformação plástica  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$ . Isto significa que  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$  é ela mesma alinhada e de mesma direção que  $\partial f / \partial \underline{\underline{\sigma}}$ . Toma-se a hipótese que  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$  permanece

constante quando  $\underline{Q}$  tende à carga limite. Resulta nestas condições que o tensor de deformações  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  alinha-se sobre  $\partial f / \partial \underline{\underline{\sigma}}$ :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \lambda \geq 0. \quad (3.22)$$

Reconsidera-se a lei não-linear fictícia definida pelas relações (3.8) e (3.13). Com o módulo de compressão  $K$  sendo escolhido constante, observa-se que para grandes valores de  $\varepsilon_d / \varepsilon_{ref}$  o material fictício torna-se incompressível:

$$\lim_{\varepsilon_d / \varepsilon_{ref} \rightarrow \infty} \frac{\mu(\varepsilon_d)}{K} = 0. \quad (3.23)$$

Sabendo-se que  $\sigma_m = K\varepsilon_v$  assume valores finitos em regime assintótico, tem-se que a relação  $\varepsilon_v / \varepsilon_d$  tende a zero. Isto exprime exatamente que  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  se alinha sobre  $\partial f / \partial \underline{\underline{\sigma}}$  e que a regra de normalidade para o critério de von Mises é assintoticamente verificada no âmbito da lei não-linear fictícia.

### 3.3. VALIDAÇÃO DO MÉTODO

#### 3.3.1. Cubo submetido a compressão simples

Um cubo de aresta  $a$ , cujo material é regido pelo critério de von Mises e possui resistência ao cisalhamento simples  $k$ , apresenta uma carga limite, quando submetido a uma tração ou compressão simples, dada por

$$P_{\lim} = \sigma_0 S, \quad (3.24)$$

onde  $S$  é a área submetida ao carregamento e  $\sigma_0$  é o valor limite de resistência em tração ou compressão simples, relacionado a  $k$  através de

$$\sigma_0 = k\sqrt{3}. \quad (3.25)$$

Neste exemplo, modelou-se um oitavo do cubo, conforme mostra a Figura 3.3. Utilizou-se um elemento finito do tipo hexaedro linear. Para simular o efeito de uma compressão simples, aplicou-se um deslocamento  $\delta$  na face superior.

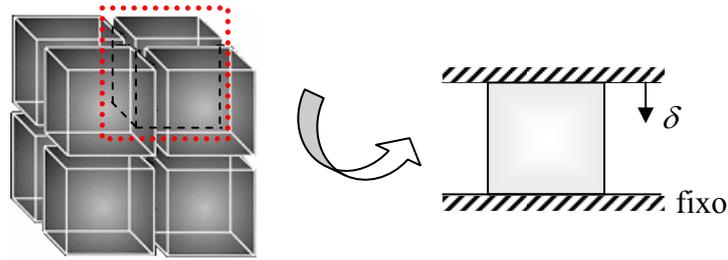


Figura 3.3: Cubo sob carga de compressão, sendo modelada a oitava parte em destaque.

A partir do deslocamento aplicado, obtém-se o valor da carga limite em função da lei elástica não-linear implementada. Como parâmetros iniciais do problema, estabeleceu-se para a deformação de referência o valor de  $\varepsilon_{ref} = 0,0001$  e para o coeficiente de Poisson o valor de  $\nu = 0,49$  (pois à medida que  $\varepsilon_d / \varepsilon_{ref}$  aumenta, o material fictício torna-se incompressível; assim, tomou-se um valor alto para o coeficiente de Poisson desde o início da análise). Tais parâmetros são inseridos na sub-rotina UMAT (ver Apêndice A), que implementa a lei constitutiva do material.

Para o exemplo numérico, adotou-se  $a = 2$  m e  $k = 100$  MPa, com um deslocamento aplicado de  $\delta = -0,01$  m. O campo de deslocamentos na direção do deslocamento aplicado é mostrado na Figura 3.4.

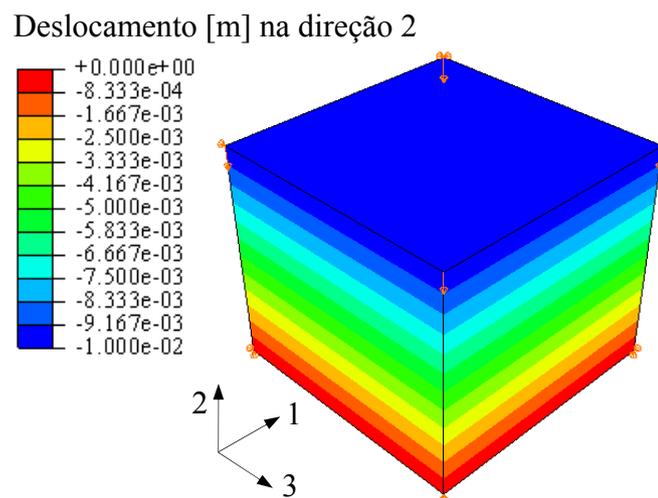


Figura 3.4: Campo de deslocamentos.

A tensão equivalente de Mises  $q$  ficou abaixo do valor  $k\sqrt{3}$  em todo o domínio, com o valor constante de  $q = 171,8$  MPa. Assim, o critério (3.6) foi respeitado.

O valor da carga limite obtido analiticamente pela combinação das equações (3.24) e (3.25) é de  $P_{lim} = 173,21$  MN. Através da lei não-linear implementada numericamente, o valor atingido para a carga limite foi de  $P^+ = 171,80$  MN, uma diferença relativa de 0,8%. O gráfico carga *versus* deslocamento é apresentado na Figura 3.5.

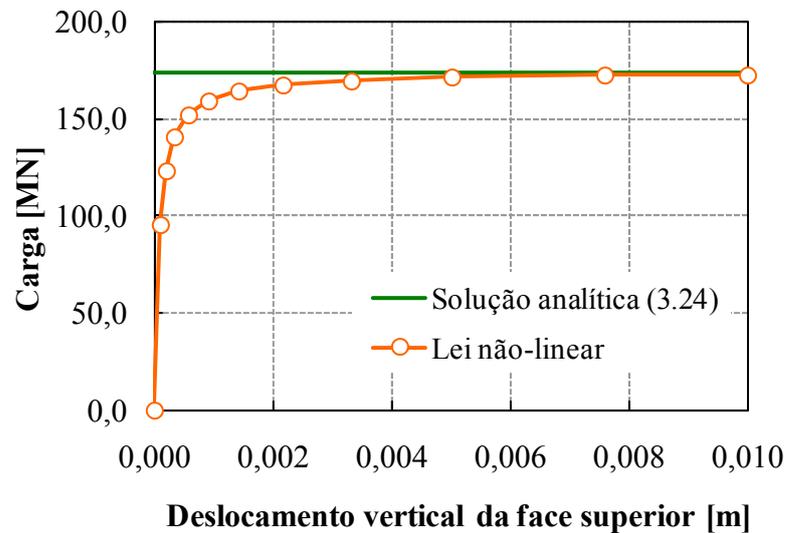


Figura 3.5: Gráfico carga *versus* módulo do deslocamento.

### 3.3.2. Viga submetida a um deslocamento na extremidade livre

Neste exemplo, objetiva-se determinar o valor da carga limite de uma viga engastada-livre com comprimento  $l$ , altura  $d$  e espessura  $b$ , submetida a um deslocamento na direção vertical de  $\delta$ , na sua extremidade livre, conforme mostra a Figura 3.6.

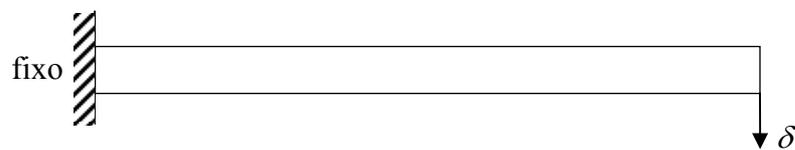


Figura 3.6: Viga submetida a um deslocamento  $\delta$  na extremidade livre.

A viga possui material regido pelo critério de von Mises, possuindo resistência ao cisalhamento simples  $k$ . A Figura 3.7 mostra a geometria tridimensional da viga com as condições de contorno aplicadas.

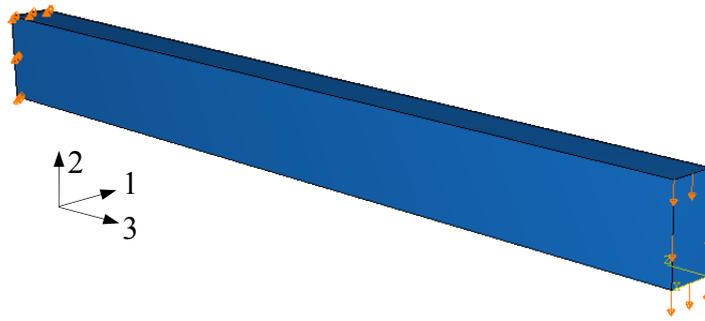


Figura 3.7: Viga engastada livre.

A carga crítica para a qual ocorre plastificação de toda a seção próxima ao engaste, é dada, em função das condições de contorno e carregamento da viga, por (Moy, 1981):

$$P_{\text{lim}} = \frac{M_p}{l}, \quad (3.26)$$

onde  $M_p$  é o momento de plastificação, que é o máximo momento que a viga pode suportar. O momento de plastificação pode ser calculado através da expressão (Moy, 1981):

$$M_p = Z_p \sigma_0, \quad (3.27)$$

onde  $Z_p$  é o módulo plástico da seção transversal, que para uma viga retangular vale  $Z_p = bd^2/4$  e  $\sigma_0$  é o limite de resistência em tração ou compressão do material, que vale  $k\sqrt{3}$  quando regido pelo critério de von Mises.

Para o exemplo numérico, adotou-se  $l = 1$  m,  $d = 0,1$  m,  $b = 0,05$  m e  $k = 100$  MPa, com um deslocamento aplicado de  $\delta = -0,01$  m. Efetuando-se os cálculos, tem-se que a carga limite da viga, calculada analiticamente, é de  $P_{\text{lim}} = 21,65 \times 10^{-3}$  MN.

No programa de elementos finitos, a partir do deslocamento imposto na extremidade, o valor da carga limite pode ser obtido através do somatório das reações na direção vertical no engaste da viga. Os elementos utilizados foram hexaedros quadráticos. Os parâmetros de entrada na sub-rotina que implementa a lei constitutiva do material são  $\nu = 0,49$  para o coeficiente de Poisson e  $\varepsilon_{\text{ref}} = 0,00001$  para a deformação de referência.

O resultado numérico da carga limite,  $P^+ = 23,03 \times 10^{-3}$  MN, é 6,4% superior ao valor teórico. Porém, como foi utilizada uma abordagem pelo interior do domínio de carregamentos

limites, esperava-se que a carga obtida numericamente fosse inferior à obtida analiticamente. O fato de o contrário ter sido observado pode ser explicado em virtude de que a estrutura modelada juntamente às condições de contorno não conseguiu representar o problema teórico (de uma viga engastada-livre), para o qual a carga limite é de  $P_{lim} = 21,65 \times 10^{-3}$  MN. Além disso, a deformação devido aos esforços de cisalhamento não foi levada em consideração na determinação da Equação (3.26), o que pode acarretar numa diferença significativa em relação ao valor obtido a partir da lei não-linear, uma vez que o índice de esbeltez não é muito alto ( $L/d = 10$ ). O gráfico da Figura 3.8 apresenta a curva carga *versus* deslocamento aplicado obtida através da lei elástica não-linear, comparando-a com a solução teórica.

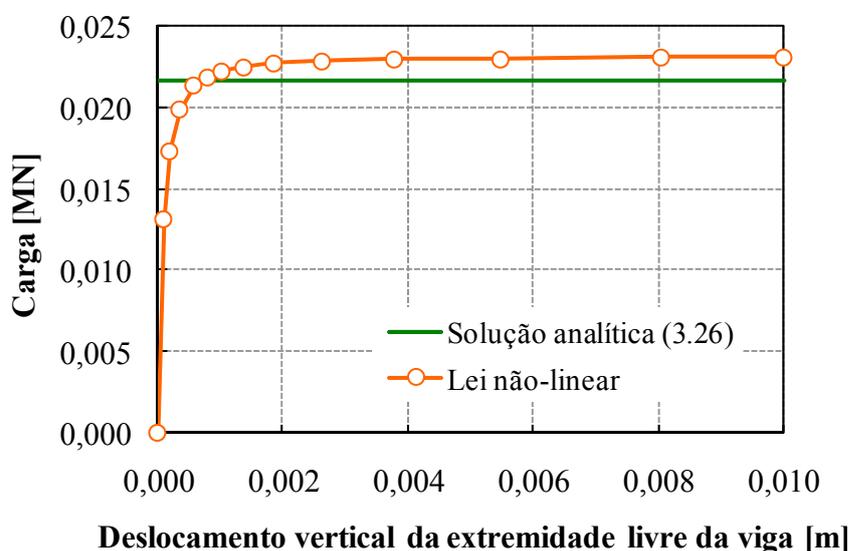


Figura 3.8: Curva carga *versus* módulo do deslocamento.

A tensão equivalente de Mises deve ser inferior a  $k\sqrt{3}$  em todo o domínio, para que o critério seja respeitado, sendo que tal premissa foi verificada em todos os pontos de integração dos elementos. Percebe-se na Figura 3.9, que apresenta a distribuição das tensões equivalentes de Mises, a presença de zonas com tensão superior a  $k\sqrt{3}$ . Isso se dá devido ao fato que o ABAQUS extrapola os valores de tensão obtidos nos pontos de integração dos elementos para os nós dos mesmos, através das funções de interpolação. Conseqüentemente, valores maiores que o limite  $k\sqrt{3}$  são representados.

A deformada da viga (com um fator de escala de 10 vezes) e o campo de deformações na direção longitudinal são apresentados na Figura 3.10.

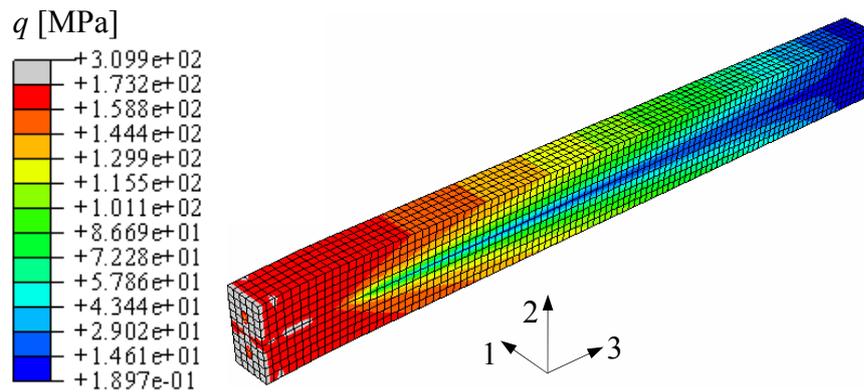


Figura 3.9: Distribuição das tensões equivalentes de von Mises.

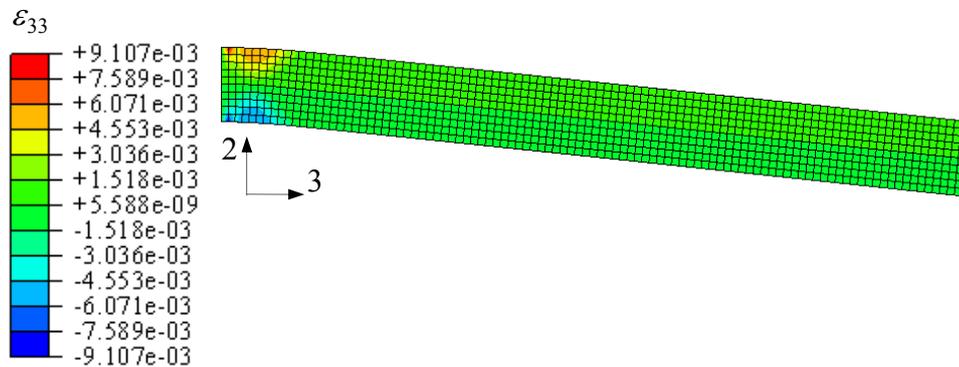


Figura 3.10: Deformada da viga e campo de deformações na direção longitudinal.

### 3.3.3. Tubo espesso submetido a um deslocamento radial

Neste exemplo, um tubo de parede espessa, de raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , é submetido a um deslocamento radial interno  $\delta$ , conforme mostra a Figura 3.11. O valor da carga limite (pressão interna limite) será comparado com aquele obtido analiticamente a partir do critério de von Mises (Chen e Han, 1988):

$$p_{\text{lim}} = 2k \ln \frac{b}{a}. \quad (3.28)$$

O material do tubo possui limite de resistência ao cisalhamento simples  $k$ . Adotando-se para o exemplo numérico  $a=1$  m,  $b=2$  m e  $k=100$  MPa, a pressão interna de colapso da estrutura, obtida analiticamente através de (3.28), é de  $p_{\text{lim}} = 138,63$  MPa.

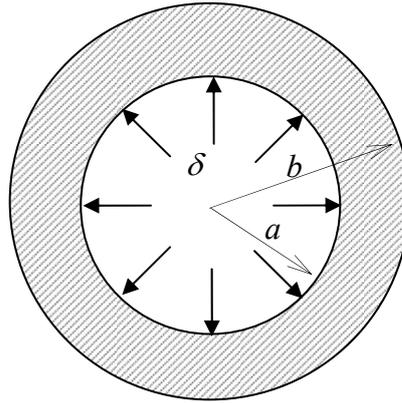


Figura 3.11: Tubo submetido a um deslocamento radial.

Modelou-se apenas um quarto da seção do tubo, em virtude da simetria, conforme mostra a Figura 3.12. Os elementos utilizados foram quadriláteros quadráticos com integração reduzida, em estado plano de deformação.

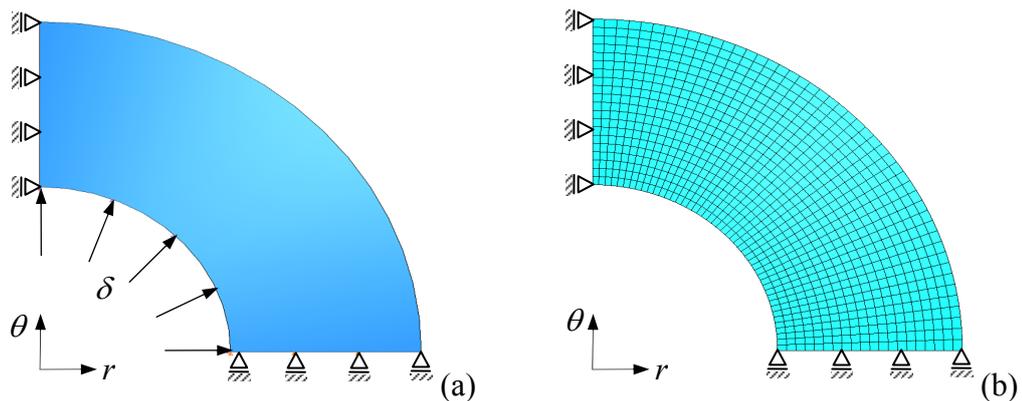


Figura 3.12: (a) Seção do tubo modelada e (b) malha utilizada.

Como parâmetros de entrada na sub-rotina UMAT, utilizou-se um coeficiente de Poisson de  $\nu = 0,49$  e a deformação de referência de  $\varepsilon_{ref} = 0,0001$ .

Através da lei não-linear implementada numericamente, com um deslocamento radial aplicado de  $\delta = 0,01$  m, o valor atingido para a carga limite foi de  $p^+ = 131,64$  MPa, uma diferença relativa de 5,04% ao valor analítico. O gráfico carga *versus* deslocamento é apresentado na Figura 3.13.

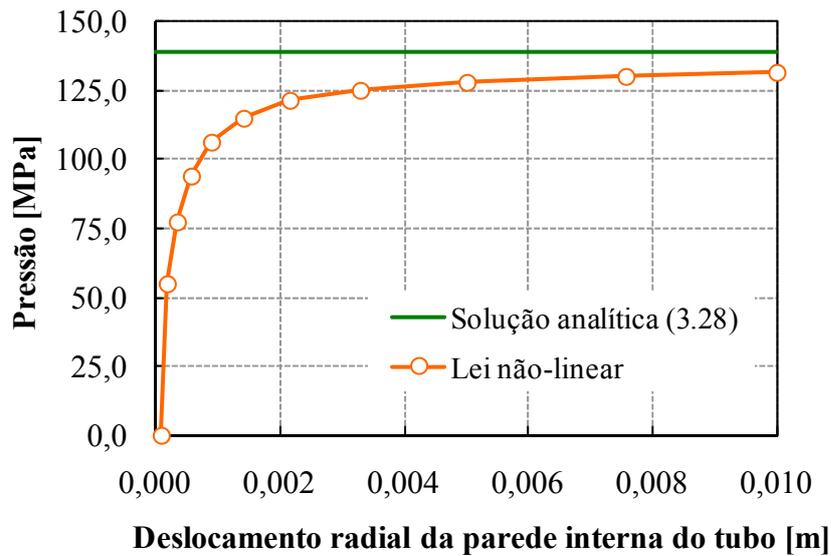


Figura 3.13: Gráfico pressão *versus* deslocamento radial aplicado.

O valor da tensão equivalente de Mises foi menor ou igual a  $k\sqrt{3}$  ( $q \leq 173,2$  MPa) em todo o domínio, conforme observado na Figura 3.14, respeitando assim o critério (3.6).

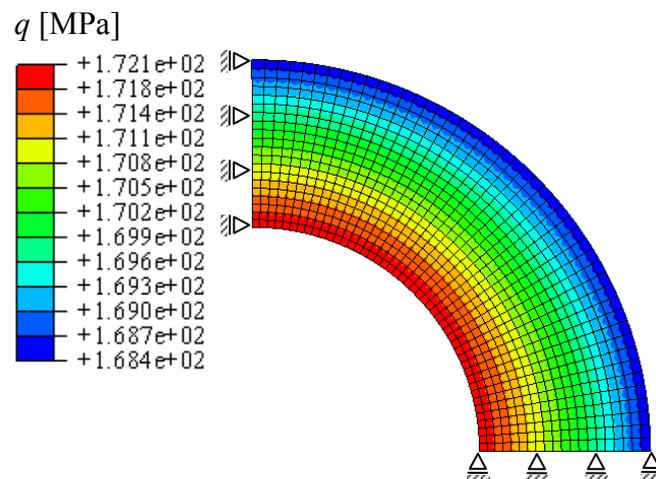


Figura 3.14: Distribuição das tensões equivalentes de von Mises.

### 3.3.4. Fundação sobre solo puramente coesivo

O mecanismo de ruptura de um solo puramente coesivo (ângulo de atrito nulo) submetido a uma carga  $P$  correspondendo a uma fundação de largura  $B$  é apresentado na Figura 3.15.

A solução analítica para a capacidade de carga foi obtida por Prandtl e é dada por (Salençon, 1983):

$$P_{\text{lim}} = (2 + \pi) B k, \quad (3.29)$$

onde  $k$  representa o limite de resistência do solo em cisalhamento simples. Admite-se que o solo é isotrópico e homogêneo, num semi-espaco infinito. Um resultado teórico clássico é a independência de  $P_{\text{lim}}$  em relação ao peso próprio do solo e da interface solo/fundação. Assim, para facilitar a análise numérica, tomou-se valor nulo para  $\gamma$ , o peso específico do solo.

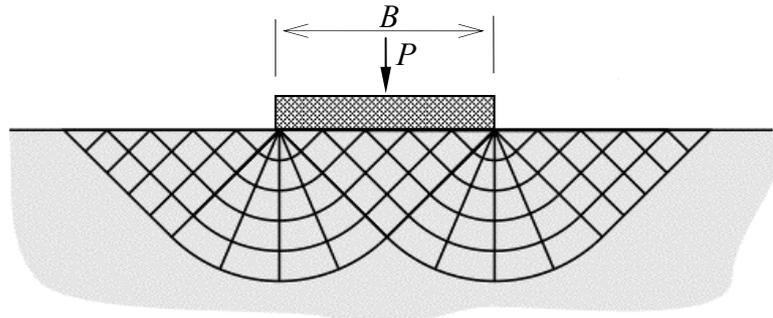


Figura 3.15: Mecanismo de ruptura.

Em virtude de o problema ser simétrico, apenas metade de sua geometria foi analisada, conforme mostra a Figura 3.16.

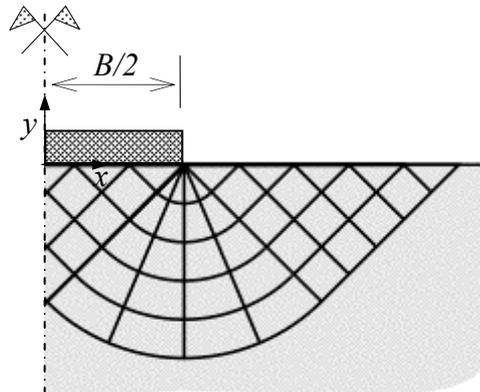


Figura 3.16: Metade da geometria analisada.

O valor adotado para o limite em cisalhamento simples do solo é de  $k = 100$  MPa, e a largura da fundação vale  $B = 1$  m. A malha de elementos finitos utilizada para discretizar o problema é apresentada na Figura 3.17.

Para minimizar o efeito das condições de contorno nos resultados da análise, foi utilizada uma malha com dimensão vinte vezes superior ao da largura  $B$  da zona carregada. Além disso,

realizou-se um refinamento na malha na região onde ocorre descontinuidade de deslocamentos, apresentado em destaque na Figura 3.17.

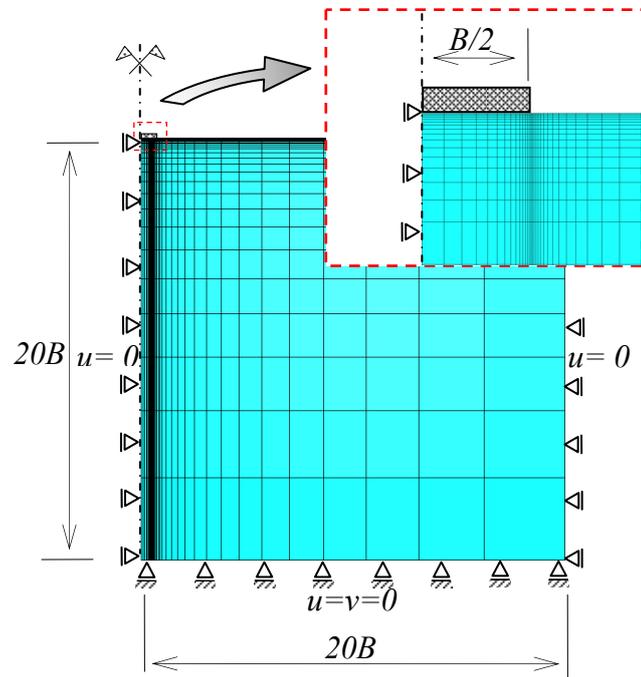


Figura 3.17: Malha de elementos finitos utilizada.

O elemento finito utilizado foi o quadrilátero linear de estado plano de deformações. Para a determinação da carga limite, aplicou-se um deslocamento  $\delta = -0,01$  m nos nós dos elementos sob a fundação, simulando um recalque, e verificou-se a carga  $P^+$  atingida.

Como parâmetros de entrada na sub-rotina UMAT, utilizou-se um coeficiente de Poisson de  $\nu = 0,49$  e a deformação de referência de  $\varepsilon_{ref} = 0,0001$ . Tais valores permitem que a carga  $P$  convirja para o seu valor final mais rapidamente.

O valor da capacidade de carga obtido analiticamente pela equação (3.29) é de  $P_{lim} = 514,2$  MN/m. Através da lei não-linear implementada numericamente, o valor atingido para a capacidade de carga foi de  $P^+ = 513,3$  MN/m, uma diferença relativa de 0,2%. O gráfico carga *versus* deslocamento é apresentado na Figura 3.18.

Sendo  $k = 100$  MPa,  $q$  (tensão equivalente de Mises) deve ser menor ou igual a  $k\sqrt{3}$  ( $q \leq 173,2$  MPa) para que o critério seja respeitado. Observa-se na Figura 3.19 que

praticamente todo o domínio apresenta tensões equivalentes de von Mises inferiores a  $k\sqrt{3}$ , exceto por uma pequena região próxima ao ponto de singularidade.

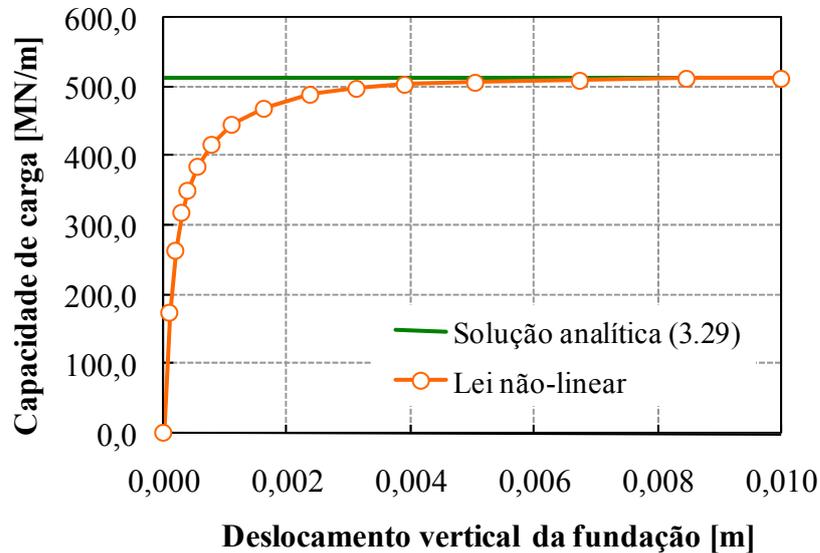


Figura 3.18: Gráfico carga *versus* módulo do deslocamento aplicado.

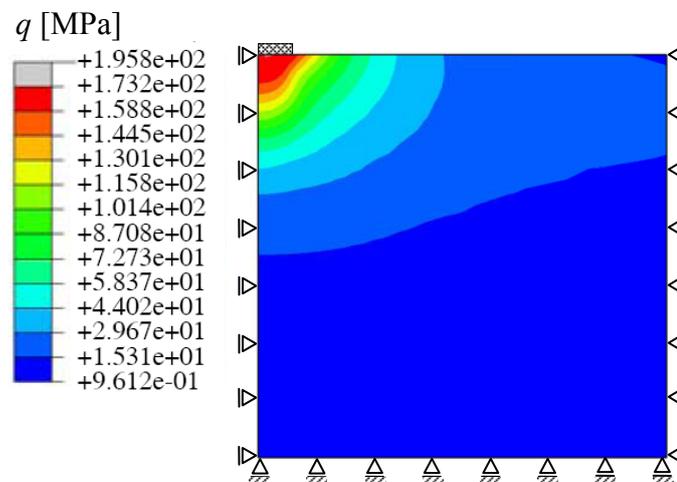


Figura 3.19: Distribuição das tensões equivalentes de von Mises.

O campo de deformações máximas principais da região próxima da zona carregada (onde uma região com dimensões  $2B \times 2B$  foi representada) é apresentado na Figura 3.20. Nela, pode-se observar que as maiores deformações estão concentradas no ponto de descontinuidade do problema, no fim da zona carregada.

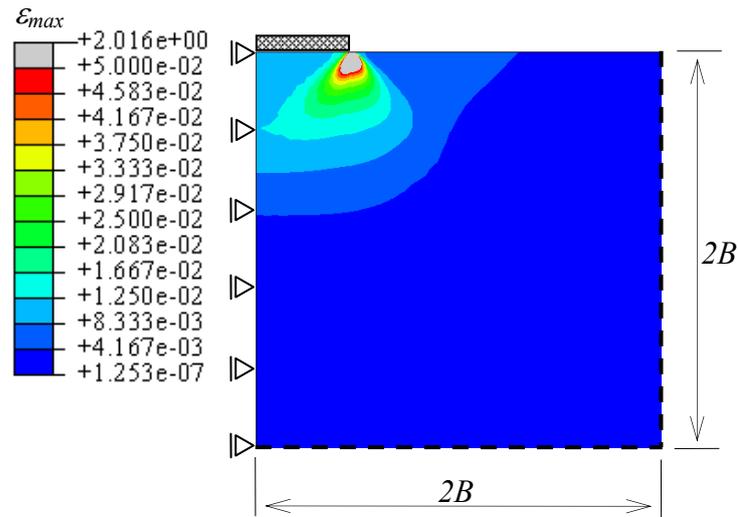


Figura 3.20: Campo de deformações máximas principais da região.

### 3.3.5. Talude vertical

Neste exemplo analisa-se a estabilidade de um talude vertical de altura  $H$  submetido a forças de volume devidas à gravidade e proporcionais ao peso específico  $\gamma$ , conforme mostra a Figura 3.21. O material constitutivo (solo) é isotrópico e homogêneo, sob estado plano de deformações e regido pelo critério dado pela equação (3.5).

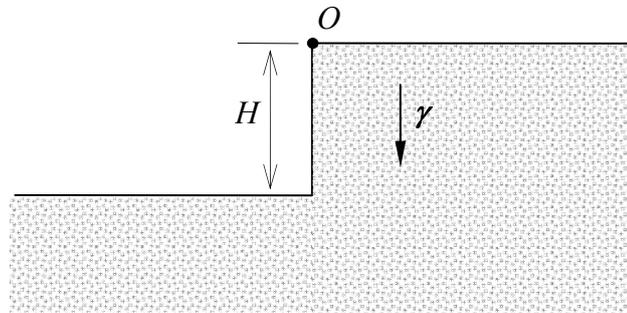


Figura 3.21: Talude vertical.

Através da implementação da lei não-linear elástica que representa o material constitutivo da estrutura, busca-se o valor extremo de  $\gamma$  que mantém o talude estável, para valores de  $H$  e  $k$  (limite de resistência em cisalhamento simples) fixos. Define-se o parâmetro adimensional  $K$ , que representa um fator de estabilidade:

$$K = \frac{\gamma H}{k}. \quad (3.30)$$

Diversos autores obtiveram valores para  $K$ , através de abordagens estáticas e cinemáticas. Pastor (1978) obteve  $K \geq 3,635$ , empregando um campo de tensões estaticamente admissível. Através de um mecanismo cinematicamente admissível, de Buhan *et al.* (1993) obtiveram  $K \leq 3,817$ .

Para modelar-se o talude, utilizou-se uma malha de elementos triangulares quadráticos, com as dimensões e condições de contorno mostradas na Figura 3.22. Aplicou-se uma força de volume (representando o peso específico do solo) monotonicamente crescente em toda a estrutura e verificou-se o valor extremo que provoca grandes deslocamentos verticais no ponto  $O$  da Figura 3.21. O limite de resistência em cisalhamento simples do material constitutivo vale  $k = 1$  MPa e a altura do talude é de  $H = 1$  m.

Como parâmetros de entrada na sub-rotina UMAT, utilizou-se um coeficiente de Poisson de  $\nu = 0,49$  e a deformação de referência de  $\varepsilon_{ref} = 0,001$ .

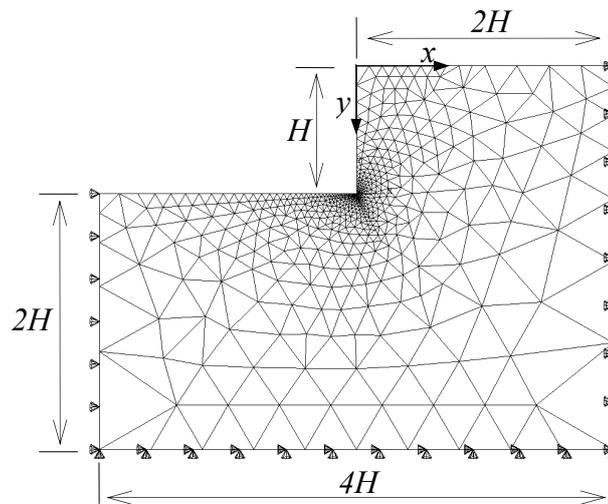


Figura 3.22: Malha utilizada com condições de contorno aplicadas.

O gráfico que relaciona o deslocamento vertical do ponto  $O$  e o peso específico do solo é mostrado na Figura 3.23. A partir dela, obtém-se que o fator de estabilidade é de  $K^+ = 3,75$ , estando compreendido entre os limites estático e cinemático apresentados anteriormente.

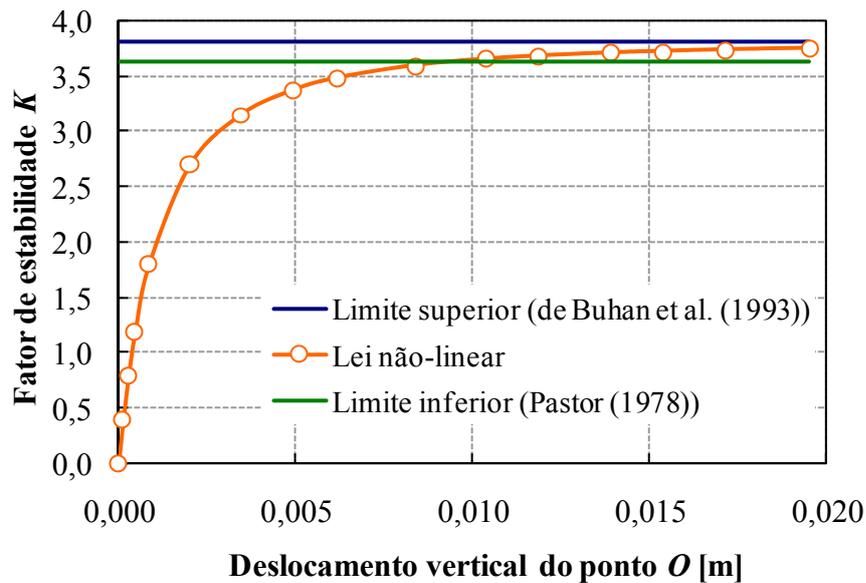


Figura 3.23: Curva fator de estabilidade *versus* deslocamento vertical do ponto  $O$ .

O campo de deformações máximas principais é apresentado na Figura 3.24. Nela, observa-se que as maiores deformações estão concentradas na zona onde se desenvolve o mecanismo de colapso da estrutura.

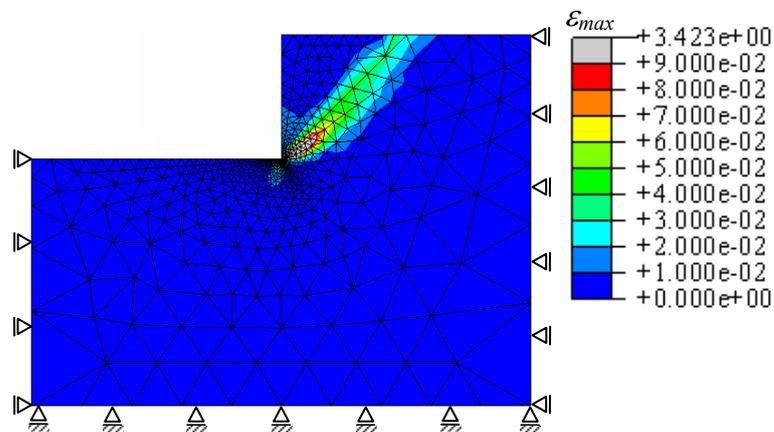


Figura 3.24: Campo de deformações máximas principais da estrutura.

### 3.3.6. Placa quadrada submetida a uma carga concentrada

Uma placa quadrada simplesmente apoiada de lado  $a$  e espessura  $t$  é submetida a uma carga concentrada  $P$  no seu centro, conforme mostra a Figura 3.25. Através da lei constitutiva não-linear, será determinada a carga limite suportada por essa placa.

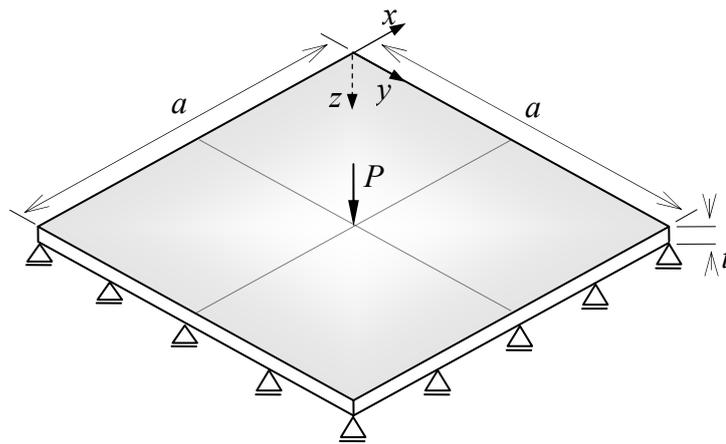


Figura 3.25: Placa quadrada submetida a uma carga concentrada  $P$ .

Como a placa apresenta simetria, foi modelado apenas um quarto de sua geometria. O material constitutivo é regido pelo critério de von Mises com  $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$ , onde  $\sigma_0$  é o limite de resistência em tração simples.

Pode-se obter um resultado analítico para a carga limite, por meio de um limite superior obtido através de mecanismos ou inferior através de um campo de tensões. Assim, a carga limite é dada por

$$P_{\text{lim}} = 2\pi m_p, \quad (3.31)$$

obtida através de análise estática e cinemática no contexto de um modelo de placa, com um mecanismo localizado sob o ponto de aplicação da carga (Massonnet e Save, 1966). Na expressão (3.31),  $m_p = \sigma_0 \frac{t^2}{4}$  representa o momento plástico linear da seção da placa, observando-se que este resultado independe do seu lado. Para o exemplo numérico, adota-se  $t = 0,4$  m e  $\sigma_0 = 40000$  MPa. Com os valores inseridos nesta expressão, tem-se que  $P_{\text{lim}} = 10050$  MN.

Na sub-rotina UMAT, utilizou-se um coeficiente de Poisson de  $\nu = 0,49$  e a deformação de referência de  $\varepsilon_{ref} = 0,0001$  como parâmetros de entrada. Os elementos utilizados para a modelagem da placa foram hexaedros quadráticos.

A deformada da região modelada da placa é apresentada na Figura 3.26. Observa-se que o colapso da estrutura é restrito numa pequena região localizada sob a carga aplicada.

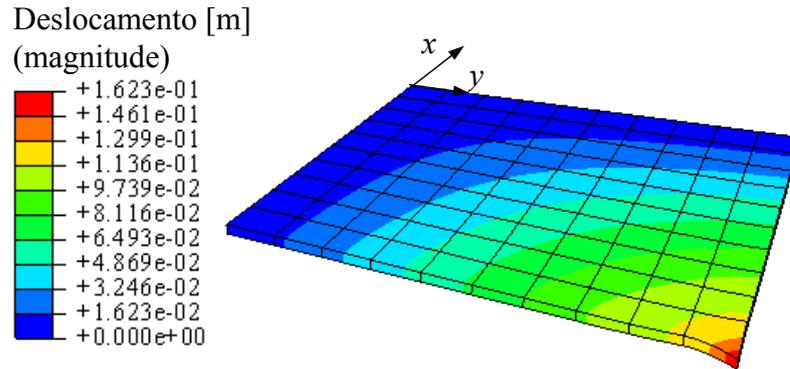


Figura 3.26: Deformada de um quarto da placa.

A carga limite obtida através da lei constitutiva elástica não-linear foi de  $P^+ = 9603$  MN, cerca de 5% menor que a obtida pela expressão (3.31). O gráfico da carga aplicada *versus* o deslocamento vertical num ponto abaixo dela é mostrado na Figura 3.27.

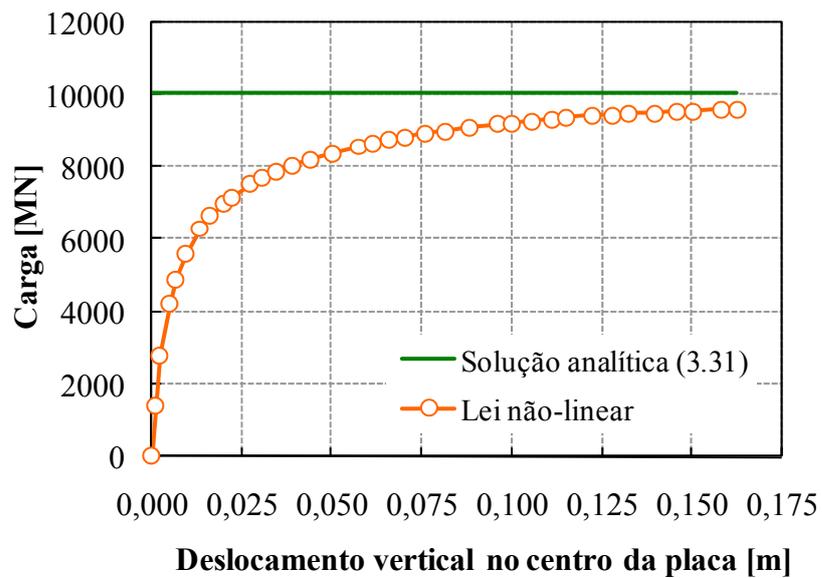


Figura 3.27: Curva carga *versus* deslocamento vertical.

## 4. MATERIAL DE DRUCKER-PRAGER

### 4.1. CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA

O critério de Drucker-Prager (Drucker e Prager, 1952) é uma generalização do critério de von Mises (3.1), no qual é incluída a influência da pressão hidrostática, sendo escrito como

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k, \quad (4.1)$$

onde  $\alpha$  e  $k$  são parâmetros do material, determinados a partir de resultados experimentais,  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensões  $\underline{\underline{s}}$  e  $I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ , dado por

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{tr} \underline{\underline{\sigma}}. \quad (4.2)$$

O domínio de resistência do critério de Drucker-Prager no espaço  $\mathbb{R}^3$  de tensões principais (espaço de tensões de Haigh-Westergaard) é convexo e definido por  $f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0$ , sendo sua superfície de ruptura representada por um cone de revolução em torno do eixo hidrostático ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) (Figura 4.1).

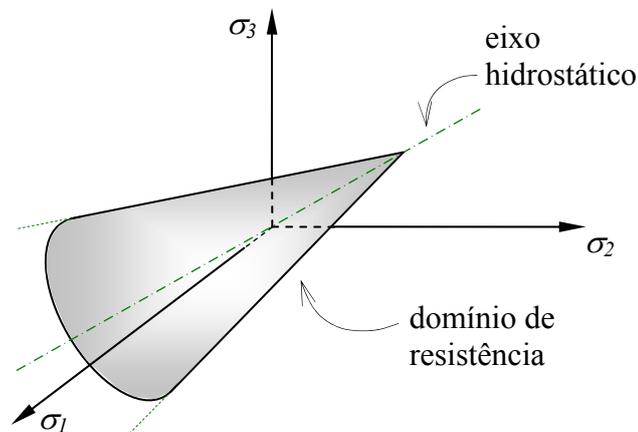


Figura 4.1: Domínio de resistência de Drucker-Prager.

O critério de Drucker-Prager pode ser utilizado na modelagem de solos, uma vez que considera o efeito da pressão hidrostática na resistência dos mesmos. Além disso, sua superfície de ruptura é suave, sendo que os parâmetros  $\alpha$  e  $k$  do material podem ser facilmente obtidos a partir de ensaios triaxiais.

Para a abordagem cinemática da análise limite, as funções de apoio do critério são dadas por

$$\begin{cases} \pi(\underline{\dot{\epsilon}}) = +\infty & \text{se } \text{tr } \underline{\dot{\epsilon}} < \sqrt{\frac{2 \sin^2 \phi}{3 + \sin^2 \phi} \left( 3 \text{tr}(\underline{\dot{\epsilon}})^2 - (\text{tr } \underline{\dot{\epsilon}})^2 \right)}, \\ \pi(\underline{\dot{\epsilon}}) = \frac{c}{\tan \phi} \text{tr } \underline{\dot{\epsilon}} & \text{se } \text{tr } \underline{\dot{\epsilon}} \geq \sqrt{\frac{2 \sin^2 \phi}{3 + \sin^2 \phi} \left( 3 \text{tr}(\underline{\dot{\epsilon}})^2 - (\text{tr } \underline{\dot{\epsilon}})^2 \right)}, \end{cases} \quad (4.3)$$

para um campo contínuo de velocidades e por

$$\begin{cases} \pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) = +\infty & \text{se } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} < \llbracket \llbracket \underline{v} \rrbracket \rrbracket \sin \phi, \\ \pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket) = \frac{c}{\tan \phi} \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} & \text{se } \llbracket \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} \geq \llbracket \llbracket \underline{v} \rrbracket \rrbracket \sin \phi, \end{cases} \quad (4.4)$$

para um campo descontínuo, onde  $c$  e  $\phi$  são grandezas que representam “coesão” e “ângulo de atrito”, dependendo de  $\alpha$  e  $k$ .

#### 4.2. CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS CRITÉRIOS DE MOHR-COULOMB E DE DRUCKER-PRAGER EM DEFORMAÇÃO PLANA

Em muitos problemas, a carga limite de uma estrutura submetida a um dado carregamento é determinada analiticamente a partir do critério de resistência de Mohr-Coulomb, em função dos parâmetros  $c$  (coesão) e  $\phi$  (ângulo de atrito interno) do material. Entretanto, se é desejado um mesmo valor para a carga limite, obtida tanto pelo critério de Mohr-Coulomb quanto pelo critério de Drucker-Prager, duas condições devem ser satisfeitas: (i) o problema deve ser tratado em estado plano de deformações e (ii) deve haver uma mesma taxa de dissipação de energia mecânica por unidade de volume. Baseado nestas duas condições, as seguintes correspondências dos parâmetros  $\alpha$  e  $k$  do critério (4.1) podem ser estabelecidas (Drucker e Prager, 1952):

$$\alpha = \frac{\operatorname{tg} \phi}{(9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}, \quad k = \frac{3c}{(9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.5)$$

O critério (4.1) pode ser reescrito como

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_d + T(\sigma_m - h), \quad (4.6)$$

onde  $T$  é o coeficiente de atrito de material e  $h$  é o limite em tração isotrópica. A superfície de ruptura do critério de Drucker-Prager no plano meridional é apresentada na Figura 4.2.

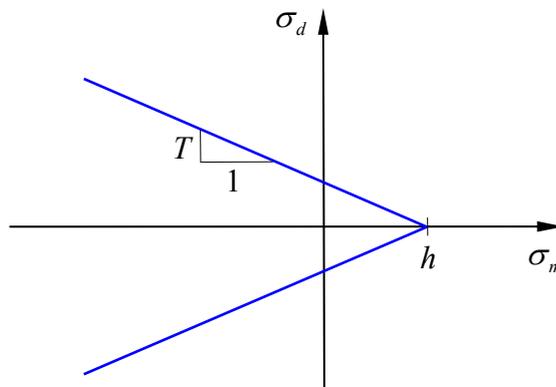


Figura 4.2: Superfície de ruptura do critério de Drucker-Prager no plano meridional.

A correspondência entre os parâmetros  $c$  e  $\phi$  e os parâmetros  $T$  e  $h$ , para a determinação de cargas limites de estruturas no estado plano de deformações, é dada por (ABAQUS, 2003)

$$T = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \operatorname{sen}^2 \phi}} \quad (4.7)$$

e

$$\frac{Th}{c} = \frac{\sqrt{2} \cos \phi}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \operatorname{sen}^2 \phi}} \quad (4.8)$$

no caso particular de fluxo plástico associado e por

$$T = \sqrt{2} \operatorname{sen} \phi \quad (4.9)$$

e

$$\frac{Th}{c} = \sqrt{2} \cos \phi \quad (4.10)$$

para o caso de fluxo não-dilatante.

Assim, a partir dos parâmetros  $h$  e  $T$  do critério de Drucker-Prager e através das equações anteriores, pode-se obter os valores dos parâmetros  $c$  e  $\phi$  do critério de Mohr-Coulomb a fim de se determinar o valor teórico da capacidade de carga dos diferentes problemas.

### 4.3. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Da mesma forma que o descrito na Seção 3.2, o princípio do método é procurar uma lei elástica não-linear que descreva o critério de Drucker-Prager, tal que a condição (4.6) seja assintoticamente satisfeita para grandes valores do módulo do tensor desviador de deformações, ou seja

$$\lim_{\varepsilon_d / \varepsilon_{ref} \rightarrow \infty} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0. \quad (4.11)$$

Como o critério (4.6) leva em consideração tanto o segundo invariante do tensor desviador de tensões como o primeiro invariante do tensor de tensões, propõe-se uma lei elástica não-linear fictícia da forma

$$\underline{\underline{\sigma}} = K(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \underline{\underline{\varepsilon}}_d. \quad (4.12)$$

A escolha mais simples consiste em adotar um valor constante para o módulo de compressão  $K$ . Assim, a condição (4.11) junto à lei (4.12) implicam que o módulo de cisalhamento  $\mu$  deve necessariamente satisfazer

$$\mu(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \sim \frac{T}{2\varepsilon_d} (h - K\varepsilon_v) \quad \text{quando} \quad \varepsilon_d / \varepsilon_{ref} \gg 1. \quad (4.13)$$

Para a implementação numérica, a seguinte forma foi adotada para  $\mu$ :

$$\mu(\varepsilon_v, \varepsilon_d) = \frac{T}{2} (h - K\varepsilon_v) \frac{1 / \varepsilon_{ref}}{\varepsilon_d / \varepsilon_{ref} + 1}. \quad (4.14)$$

Assintoticamente, nota-se que  $\mu \rightarrow 0$  enquanto que o módulo de compressão  $K$  permanece constante. Isto implica que  $\mu/K \rightarrow 0$ . Uma vez que  $\sigma_m = K\varepsilon_v$  permanece com valor finito, a razão  $\varepsilon_v/\varepsilon_d$  tende a zero. Isto significa que o material fictício se comporta no regime assintótico como um material incompressível. Ou seja, o material elástico não-linear modela assintoticamente o material de Drucker-Prager com um potencial plástico do tipo von Mises, isto é, sem dilatância ( $t = 0$ ).

A Figura 4.3 mostra o comportamento da lei elástica não-linear fictícia que simula o comportamento do material de Drucker-Prager.

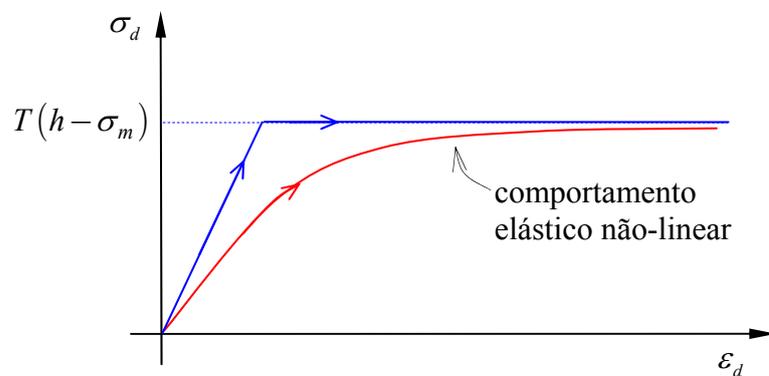


Figura 4.3: Comparação entre o comportamento elasto-plástico perfeito do material e o comportamento elástico não-linear.

## 4.4. VALIDAÇÃO DO MÉTODO

### 4.4.1. Esfera oca submetida a uma pressão externa

Uma esfera oca de raio interno  $a$  e raio externo  $b$  é submetida a uma pressão externa  $p$ , conforme mostra a Figura 4.4. O material da esfera é regido pelo critério de Drucker-Prager, com limite em tração isotrópica  $h$  e coeficiente de atrito  $T$ . Será determinado o valor da pressão limite, em compressão e em tração, suportada pela estrutura, através da implementação da lei constitutiva não-linear que simula o critério de Drucker-Prager (por meio de uma sub-rotina UMAT), e através do ABAQUS, que possui tal critério já implementado.

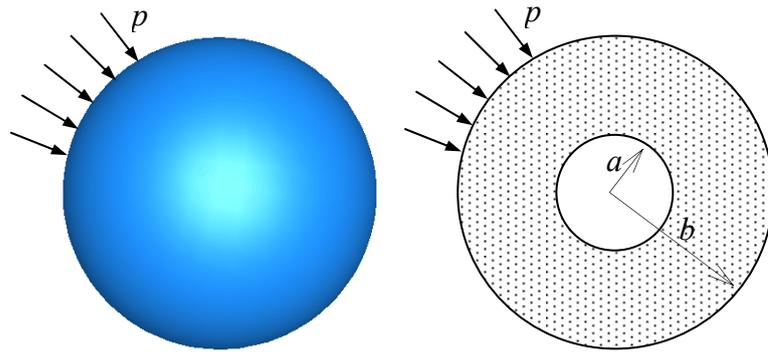


Figura 4.4: Esfera submetida a uma sollicitação isotrópica – caso da compressão.

Para a determinação da carga limite desse problema apenas o equilíbrio e o critério  $f(\underline{\sigma}) = 0$  são necessários. A lei de fluxo não intervém nesta determinação e, conseqüentemente, a carga limite é independente do coeficiente de dilatância  $t$  e é dada analiticamente por

$$p_{\text{lim}} = h(1 - \Phi^n), \quad (4.15)$$

onde  $\Phi$  é a porosidade da esfera ( $\Phi = a^3 / b^3$ ) e  $n$  vale

$$n = \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{2}{3}T}}{\sqrt{\frac{2}{3}T} - 1} & \text{quando } p \text{ é de compressão,} \\ \frac{\sqrt{\frac{2}{3}T}}{\sqrt{\frac{2}{3}T} + 1} & \text{quando } p \text{ é de tração.} \end{cases}$$

Como  $p_{\text{lim}}$  independe de  $t$ , pode-se empregar o modelo elástico não-linear.

Para o exemplo numérico adota-se  $a = 1$  m,  $b = 3$  m e  $T = 0,5$ . Introduzindo-se estes valores na expressão (4.15), tem-se que  $p_{\text{lim}}^c / h = -8,716$  para a sollicitação de compressão isotrópica e  $p_{\text{lim}}^t / h = 0,615$  para a sollicitação de tração isotrópica.

Em virtude de haver simetria de geometria e carregamento, apenas um oitavo da estrutura foi modelado no ABAQUS, aplicando-se condições de contorno compatíveis, conforme mostra a Figura 4.5.

A estrutura foi modelada com elementos hexaédricos lineares. Foram utilizadas duas malhas com diferentes níveis de refinamento, apresentadas na Figura 4.6: uma com hexaedros de lado  $l = 0,25$  m e outra com hexaedros de lado  $l = 0,125$  m .

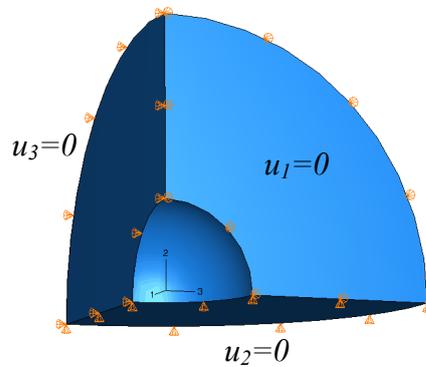


Figura 4.5: Geometria modelada e condições de contorno aplicadas.

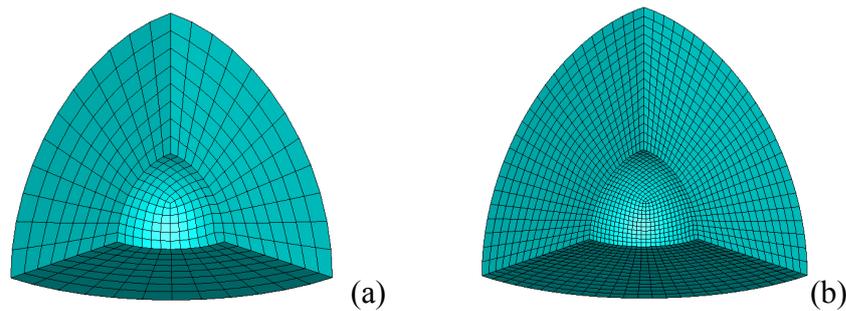


Figura 4.6: (a) Malha com elementos de lado  $l = 0,25$  m e (b) de lado  $l = 0,125$  m .

#### 4.4.1.1. Carga $p$ de compressão

Utilizando a malha (a) da Figura 4.6, obteve-se o valor de  $p_{ABQ}^c / h = -9,32$  para a carga obtida através do critério de Drucker-Prager do ABAQUS e  $p_{nl}^c / h = -8,32$  utilizando a lei constitutiva não-linear. Utilizando a malha (b), através do critério do ABAQUS obteve-se  $p_{ABQ}^c / h = -9,07$  e  $p_{nl}^c / h = -7,66$  através da lei não-linear. A diferença relativa desses valores em relação ao valor  $p_{lim}^c / h = -8,716$  obtido a partir da equação (4.15) é apresentada na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Diferença relativa dos valores de  $p/h$  obtidos numericamente em relação à solução de referência (4.15) – carga de compressão.

Malha (a)		Malha (b)	
Critério do ABAQUS	Lei constitutiva não-linear	Critério do ABAQUS	Lei constitutiva não-linear
+5,21	-4,81	+3,86	-13,84

Com a carga  $p$  simulando uma compressão e utilizando-se a malha (a), o resultado obtido com o modelo elástico não-linear foi mais próximo da solução analítica em relação aquele obtido utilizando o critério do ABAQUS. Já com a malha (b) (mais refinada), o ABAQUS aproximou-se ainda mais da solução analítica, o que era esperado, ao passo que o modelo não-linear se afastou dela. Entretanto, os resultados apresentados para ambos os casos não tiveram uma boa aproximação em relação ao valor da carga limite teórica, uma vez que as malhas empregadas não conseguiram absorver o estado hidrostático de pressão (que é a hipótese necessária para o desenvolvimento da formulação analítica). Uma solução possível seria discretizar a esfera utilizando uma malha não-estruturada, composta por tetraedros lineares, a qual poderia suportar de maneira mais eficiente tal estado hidrostático.

As curvas carga normalizada *versus* deslocamento para cada uma das malhas em que o problema foi analisado estão apresentadas na Figura 4.7 e Figura 4.8.

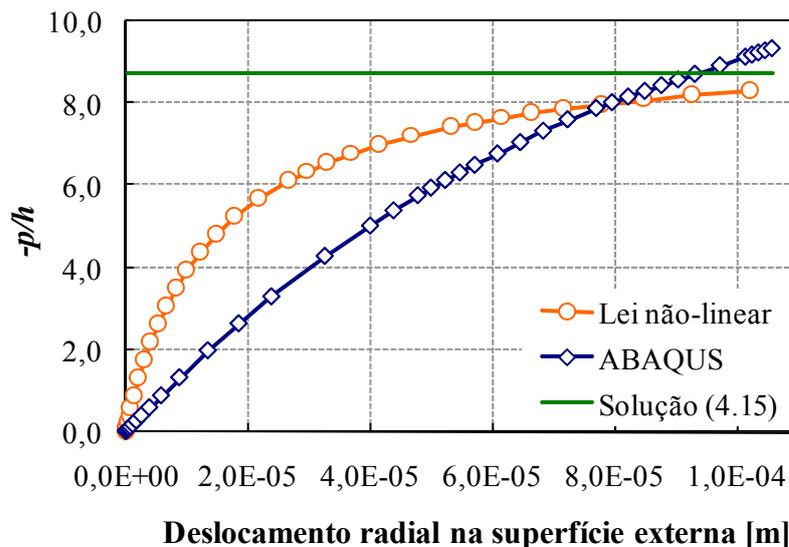


Figura 4.7: Curvas carga normalizada *versus* deslocamento para a malha (a) – carga de compressão.

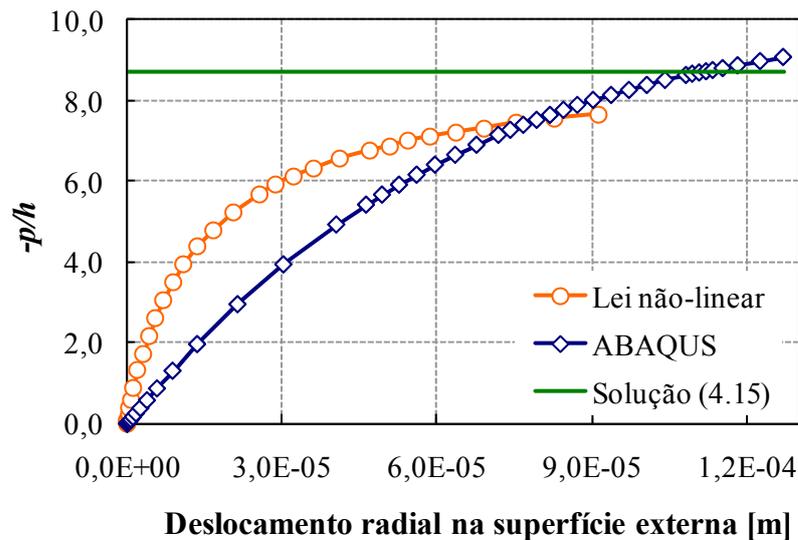


Figura 4.8: Curvas carga normalizada *versus* deslocamento para a malha (b) – carga de compressão.

Verifica-se na Figura 4.7 e na Figura 4.8 que as cargas máximas determinadas através do critério de Drucker-Prager do ABAQUS, para as duas malhas, ocorreram com tangente não horizontal na curva carga normalizada *versus* deslocamento, em virtude das questões já apresentadas. Entretanto, as análises computacionais finalizaram com os valores de cargas apresentados, sendo, portanto, essas as cargas limites para o critério do ABAQUS.

#### 4.4.1.2. Carga $p$ de tração

Utilizando a malha (a), obteve-se o valor de  $p_{ABQ}^t / h = 0,625$  para a carga obtida através do critério de Drucker-Prager do ABAQUS e  $p_{nl}^t / h = 0,596$  utilizando a lei constitutiva não-linear. Com a malha (b), através do critério do ABAQUS obteve-se  $p_{ABQ}^t / h = 0,620$  e  $p_{nl}^t / h = 0,600$  através da lei não-linear. A diferença relativa desses valores em relação ao valor  $p_{lim}^t / h = 0,615$  obtido a partir da equação (4.15) é apresentada na Tabela 4.2.

Com a carga de tração, observou-se uma convergência ao valor  $p_{lim}^t / h = 0,615$  com a malha mais refinada, tanto para o caso da estrutura analisada com o critério de Drucker-Prager do ABAQUS quanto para o caso da análise com o modelo elástico não-linear.

Tabela 4.2: Diferença relativa dos valores de  $p/h$  obtidos numericamente em relação à solução de referência (4.15) – carga de tração.

Malha (a)		Malha (b)	
Critério do ABAQUS	Lei constitutiva não-linear	Critério do ABAQUS	Lei constitutiva não-linear
+1,60	-3,19	+0,81	-2,50

As curvas carga normalizada *versus* deslocamento para cada uma das duas malhas em que o problema foi analisado estão apresentadas na Figura 4.9 e na Figura 4.10.

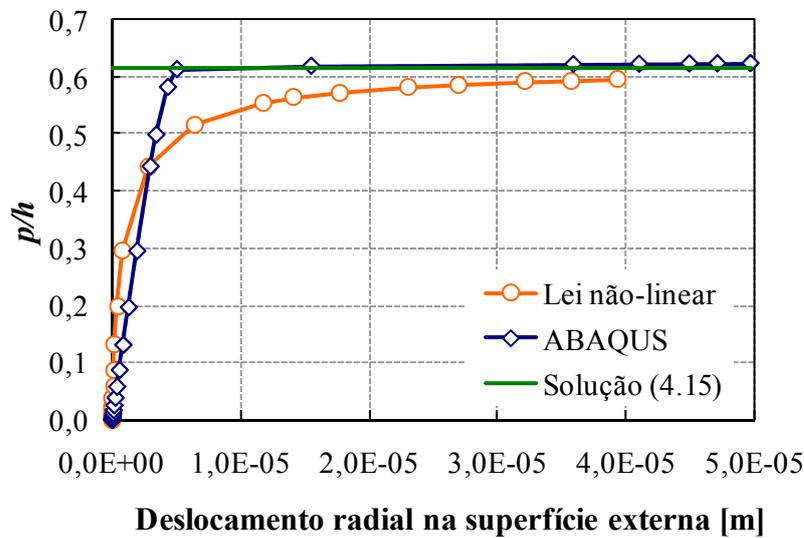


Figura 4.9: Curvas carga normalizada *versus* deslocamento para a malha (a) – carga de tração.

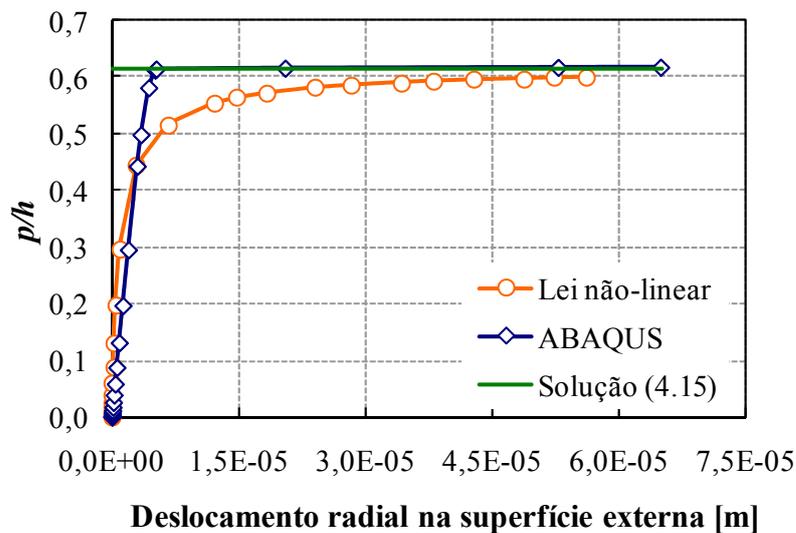


Figura 4.10: Curvas carga normalizada *versus* deslocamento para a malha (b) – carga de tração.

#### 4.4.2. Fundação sobre solo com coesão e atrito

Considera-se que a fundação da Figura 4.11 esteja sobre um solo regido pelo critério de Drucker-Prager, com limite em tração isotrópica  $h$  e coeficiente de atrito  $T$ . Objetiva-se determinar o valor da capacidade de carga do solo através da lei elástica não-linear que simula tal critério, e compará-lo com o valor determinado analiticamente e com aquele obtido através do ABAQUS.

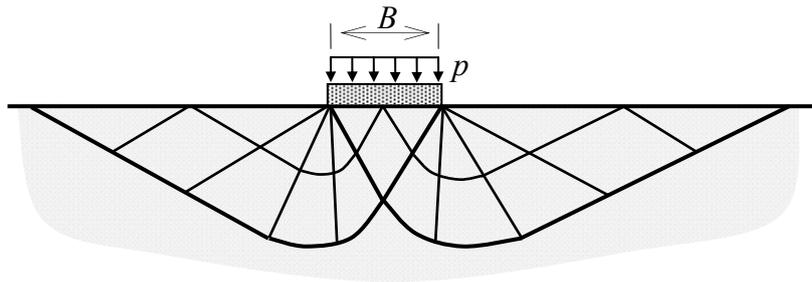


Figura 4.11: Mecanismo de ruptura do solo.

Um solo homogêneo e isotrópico cuja carga de ruptura é definida pelo critério de Mohr-Coulomb apresenta capacidade de carga dada por (Salençon, 1983):

$$p_{\text{lim}} = c \cotg \phi \left[ e^{\pi \text{tg} \phi} \text{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) - 1 \right], \quad (4.16)$$

onde  $c$  é a coesão e  $\phi$  ângulo de atrito interno. Observa-se que o valor da capacidade de carga calculado através do limite (4.16) supõe a regra da normalidade. Como são fornecidas as propriedades  $h$  e  $T$  do solo segundo Drucker-Prager, faz-se necessário efetuar uma correspondência entre os parâmetros dos dois critérios, no caso de estado plano de deformações (onde o problema é analisado), para poder-se determinar a capacidade de carga.

Para o exemplo numérico adota-se  $h = 1$  MPa e  $T = 0,5$ . Como a lei elástica não-linear implementada simula o critério de Drucker-Prager com fluxo não-dilatante ( $t = 0$ ), empregam-se as equações (4.9) e (4.10) para se obter os parâmetros  $c$  e  $\phi$  do critério de Mohr-Coulomb. Assim, tem-se que  $c = 0,38$  MPa e  $\phi = 20,70^\circ$ , e a capacidade de carga obtida através da equação (4.16) é de  $p_{\text{lim}} = 5,86$  MPa.

Tal como no exemplo em que o solo era regido pelo critério de von Mises, este problema apresenta simetria em carga e geometria, sendo apenas uma metade modelada.

Para incorporar o mecanismo de ruptura e evitar efeitos de bordo na determinação da capacidade de carga, utilizou-se uma malha com dimensões 10 vezes maiores que a largura  $B$  da fundação (adotada como  $B=1$  m), conforme mostra a Figura 4.12. Apesar de a malha do exemplo da Seção 3.3.4 (fundação com material de von Mises) ter dimensões maiores, observou-se que as dimensões da malha deste exemplo são suficientes para que os requisitos mencionados no início do parágrafo sejam cumpridos. Os elementos empregados foram triangulares quadráticos de estado plano de deformação, pois se verificou que com eles a convergência ao valor final da capacidade de carga foi mais rápida. Observa-se na mesma figura o refinamento da malha próximo ao local onde a fundação está posicionada.

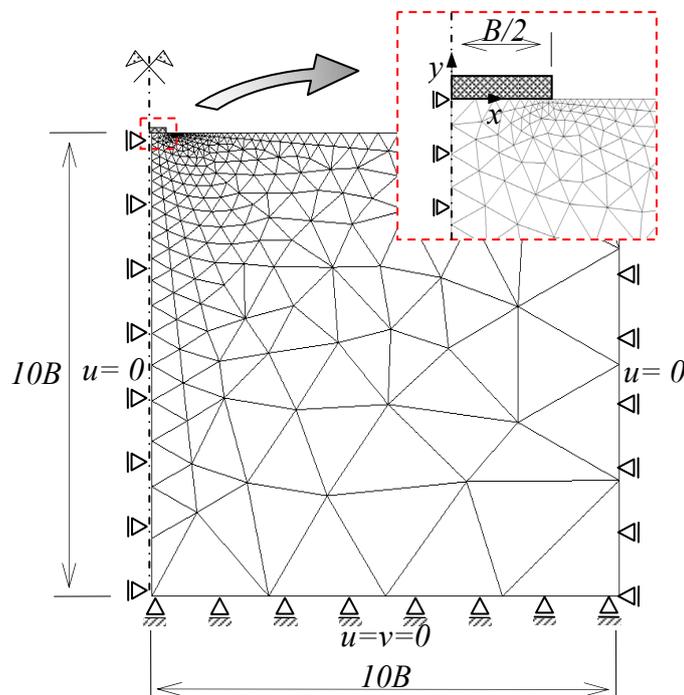


Figura 4.12: Malha de elementos finitos utilizada.

Para determinar-se a capacidade de carga do solo, aplicou-se um deslocamento de  $\delta = -0,1$  m simulando um recalque na fundação, e verificou-se a carga  $p$  correspondente. O valor obtido através da lei elástica não-linear foi de  $p_{nl}^+ = 5,45$  MPa, e  $p_{ABQ}^+ = 5,55$  MPa através do ABAQUS. Tais valores são respectivamente 7,0% e 5,3% menores do que aquele obtido analiticamente. Esta última representa, em virtude do teorema de Radenkovic (ver Salençon (1983)), um limite superior da carga limite da estrutura. As curvas capacidade de carga *versus* deslocamento da fundação na direção vertical podem ser vistas na Figura 4.13.

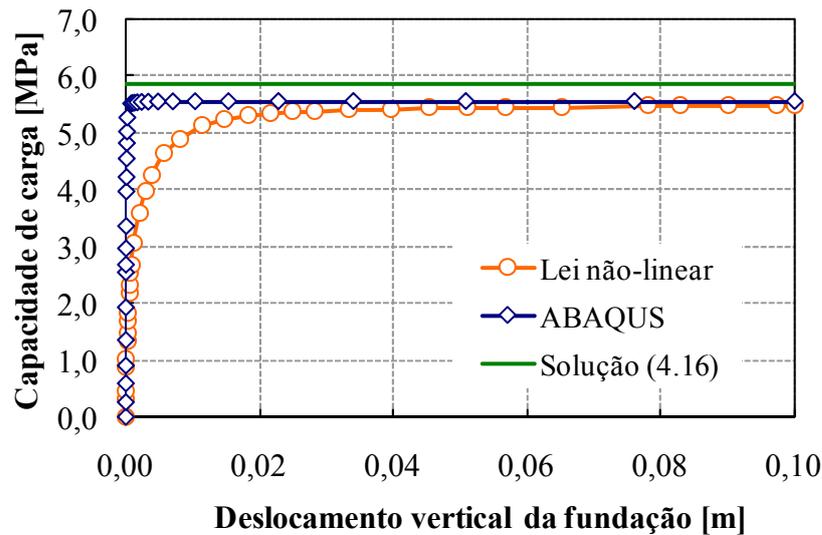


Figura 4.13: Gráfico capacidade de carga *versus* módulo do deslocamento.

O campo de deformações máximas principais da região próxima da zona carregada (onde uma região com dimensões  $3B \times 3B$  foi representada) é apresentado na Figura 4.14. Nela, verifica-se claramente o formato do mecanismo de ruptura do solo, tal qual foi apresentado na Figura 4.11.

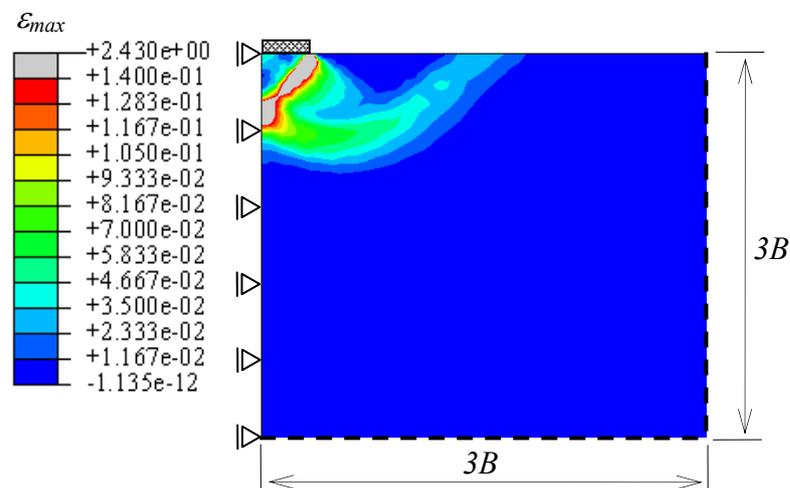


Figura 4.14: Campo de deformações máximas principais da região.

#### 4.4.3. Talude vertical em solo com atrito e coesão

Um talude vertical de altura  $H$  e submetido a forças de volume proporcionais ao peso específico  $\gamma$  (análogo ao mostrado na Figura 3.21) possui material constitutivo regido pelo critério de Drucker-Prager, com parâmetros  $h$  e  $T$ .

Através da implementação da lei elástica não-linear que simula o critério de Drucker-Prager com fluxo plástico não-dilatante, busca-se o valor extremo de  $\gamma$  que mantém a estabilidade do talude, para um dado valor do coeficiente de atrito do material constitutivo. Assim, define-se o fator de estabilidade, dado por

$$K(\phi) = \frac{\gamma H}{c}, \quad (4.17)$$

onde  $c$  é a coesão do material e  $\phi$  é o ângulo de atrito, definidos pelo critério de Mohr-Coulomb. Através das equações (4.9) e (4.10) (caso do fluxo não-dilatante) faz-se a correspondência entre os parâmetros  $h$  e  $T$  do critério de Drucker-Prager e os equivalentes para Mohr-Coulomb.

Chen (1975, *apud* Salençon, 1983), através de um mecanismo definido por uma espiral logarítmica no talude, obteve um limite superior para o fator de estabilidade utilizando o critério de Mohr-Coulomb, dado por

$$K^{\text{sup}}(\phi) \leq 3,83 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right). \quad (4.18)$$

Adotando-se  $h = 1$  MPa e  $T = 0,5$  (ou seja,  $c = 0,38$  MPa e  $\phi = 20,70^\circ$  para  $t = 0$ ), tem-se a partir de (4.18) que o limite superior do fator de estabilidade é de  $K^{\text{sup}}(\phi) \leq 5,54$ .

Utilizou-se uma malha de elementos triangulares quadráticos na modelagem do talude, com um refinamento mais acentuado na zona onde se espera que ocorra o mecanismo de ruptura. Tomou-se  $H = 1$  m para a altura do talude. A malha utilizada com as respectivas dimensões da estrutura e condições de contorno aplicadas é mostrada na Figura 4.15.

Através da aplicação monotonicamente crescente de uma força de volume representando o peso específico do solo, verificou-se o valor extremo  $\gamma^+$  para o qual grandes deslocamentos verticais ocorreram no ponto  $O$  (Figura 3.21).

O gráfico do fator de estabilidade (obtido a partir dos valores de  $\gamma$  para um mesmo ângulo de atrito  $\phi$ ) *versus* o deslocamento vertical do ponto  $O$  é apresentado na Figura 4.16, além do limite superior obtido a partir de (4.18). Verificou-se que o fator de estabilidade para o problema analisado é de  $K^+(\phi) = 5,12$ , ou seja, 7,6% menor que o limite superior

$K^{\text{sup}}(\phi) \leq 5,54$ , que representa também, em virtude do teorema de Radenkovic (ver Salençon (1983)), um limite superior da carga limite da estrutura.

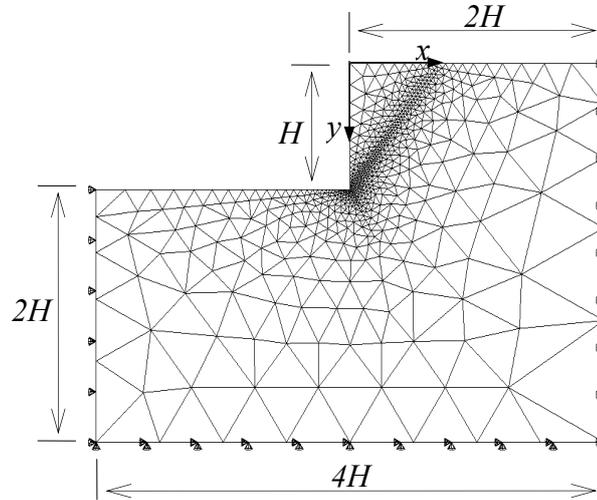


Figura 4.15: Malha utilizada com condições de contorno aplicadas.

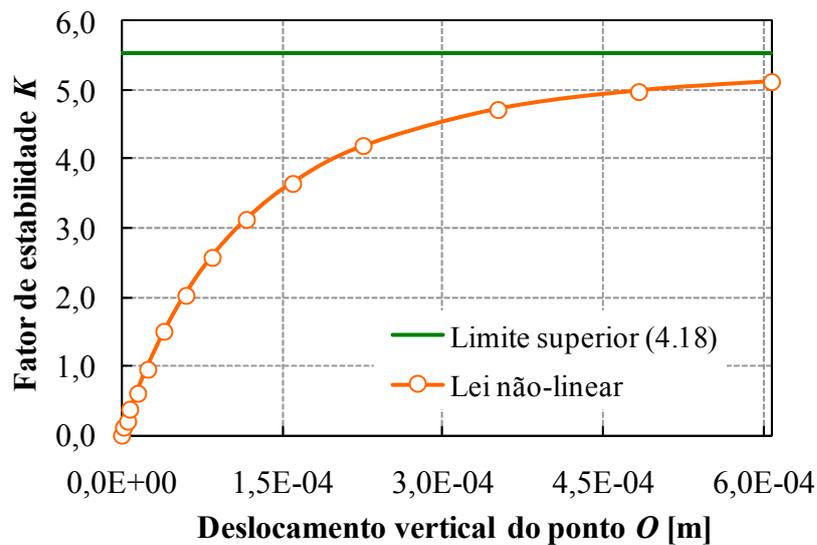


Figura 4.16: Curva fator de estabilidade *versus* deslocamento vertical do ponto  $O$ .

O campo de deformações máximas principais é apresentado na Figura 4.17. Em virtude do maior refinamento da malha próximo da zona onde ocorre o mecanismo de ruptura, observa-se que a faixa das maiores deformações (correspondentes ao mecanismo) ficou mais estreita se comparada àquela da Figura 3.24, em cujo problema é empregada uma malha menos refinada nessa zona.

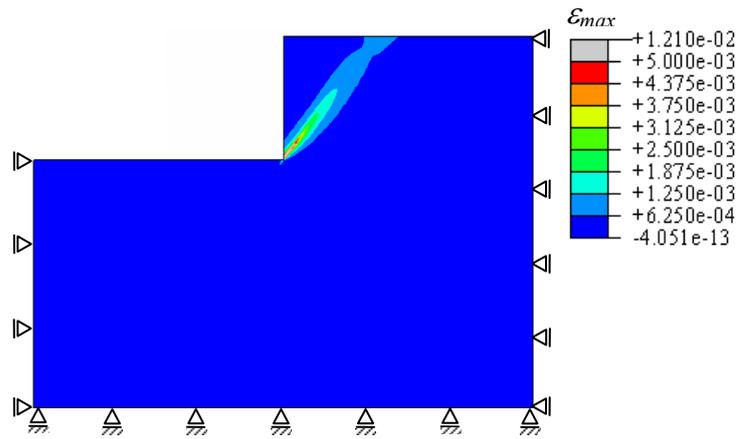


Figura 4.17: Campo de deformações máximas principais do talude.

## 5. ABORDAGEM MICROMECAÂNICA DA RESISTÊNCIA DE MEIOS POROSOS

### 5.1. INTRODUÇÃO

A estimativa das propriedades macroscópicas de materiais compósitos é uma das maiores preocupações da engenharia estrutural e de materiais. As técnicas de micromecânica utilizadas para tanto são atualmente amplamente utilizadas e têm se mostrado bastante confiáveis. Dentre elas, destacam-se as técnicas de homogeneização, através das quais um meio heterogêneo pode ser representado por um meio homogêneo equivalente.

Entretanto, a aplicação das ferramentas da micromecânica na modelagem do comportamento não-linear dos materiais compósitos é relativamente recente e diversas questões estão ainda abertas (Zaoui, 2002), como por exemplo, a determinação das propriedades de resistência de materiais randomicamente heterogêneos. Além disso, pode-se citar que poucos trabalhos têm lidado com materiais que apresentam propriedades de atrito, que são comuns em geomateriais, tais como o concreto, rochas e solos.

Neste capítulo, objetiva-se determinar o domínio de resistência macroscópico de meios porosos, com matriz constituída por material regido pelo critério de von Mises e Drucker-Prager, através da aplicação das leis elásticas não-lineares previamente apresentadas. Os resultados serão comparados com domínios de resistência macroscópicos determinados analiticamente por diversos autores, cujo procedimento para obtenção é apresentado abaixo.

### 5.2. DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO DE RESISTÊNCIA MACROSCÓPICO: TÉCNICA DE HOMOGENEIZAÇÃO NÃO-LINEAR

Considera-se o volume elementar representativo (v.e.r.)  $\Omega$  (Figura 5.1) de um meio cujos poros estão aleatoriamente distribuídos. O v.e.r. representa o menor volume capaz de

descrever a estrutura completamente. Os domínios ocupados pela matriz e pelos poros são definidos respectivamente por  $\Omega^m$  e  $\Omega^p$ . A fração volumétrica dos poros, isto é, a porosidade, é definida pela razão  $\Phi = \Omega^p / \Omega$ .

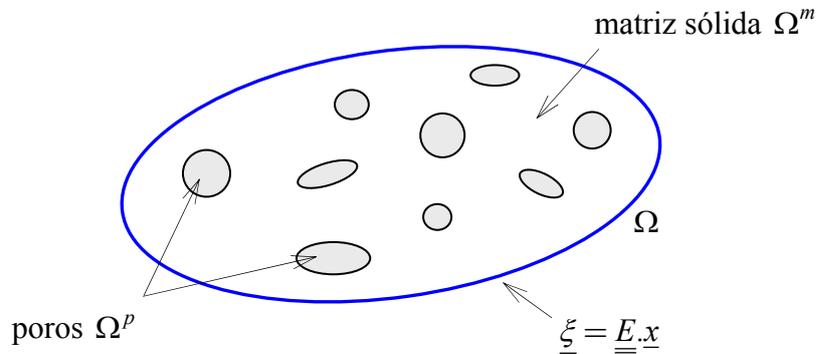


Figura 5.1: Volume elementar representativo (v.e.r.).

As propriedades de resistência da matriz sólida são definidas por um critério de falha

$$\underline{\underline{\sigma}} \in G^m \leftrightarrow f^m(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad (5.1)$$

onde  $G^m$  é o domínio convexo dos estados  $\underline{\underline{\sigma}}$  de tensões admissíveis. Deseja-se obter o domínio convexo de resistência macroscópico  $G^{hom}$ , ou seja, o conjunto de estados admissíveis de tensões macroscópicas  $\underline{\underline{\Sigma}}$ . Tal domínio é definido como

$$G^{hom} = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} \mid \text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 \text{ em } \Omega, \underline{\underline{\sigma}} = 0 \text{ em } \Omega^p, f^m(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \forall \underline{x} \in \Omega^m \right\}, \quad (5.2)$$

sendo que o tensor macroscópico de tensões é definido como a média de  $\underline{\underline{\sigma}}$  sobre o v.e.r.:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \, d\Omega. \quad (5.3)$$

Como se faz classicamente na homogeneização dos meios aleatórios, a solitação do v.e.r. é definida por meio de uma deformação homogênea (condição de contorno do tipo Hashin)

$$\underline{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega, \quad (5.4)$$

onde  $\underline{\xi}$  é o campo de deslocamentos,  $\underline{x}$  é o vetor posição (ambos na escala microscópica) e  $\underline{E}$  é a média das deformações microscópicas  $\underline{\varepsilon}$  sobre o domínio  $\Omega$

$$\underline{E} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} \, d\Omega. \quad (5.5)$$

A condição de contorno (5.4) assegura que tanto a deformação microscópica quanto a macroscópica são cinematicamente admissíveis.

A determinação de  $G^{hom}$  decorre da resolução de um problema de análise limite elasto-plástica definido sobre o v.e.r. Para um  $\underline{E}$  dado, deve-se encontrar  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{\xi}$  sujeitos às seguintes condições:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} = 0, \\ \underline{\xi} = \underline{E} \cdot \underline{x}, \\ \underline{\dot{\sigma}} = \mathbb{C} : \left( \underline{\dot{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \underline{\sigma}} \right) \quad \dot{\lambda} \geq 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

onde o multiplicador plástico  $\dot{\lambda}$  é nulo se  $f(\underline{\sigma}) < 0$  ou  $(f(\underline{\sigma}) = 0 \text{ e } \dot{f}(\underline{\sigma}) < 0)$ ,  $g$  é o potencial plástico e  $\mathbb{C}$  é o tensor de rigidez de quarta ordem. Se  $\underline{\sigma}$  é solução em tensões do problema,  $\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle_{\Omega} \in G^{hom}$ . As tensões macroscópicas  $\underline{\Sigma}$  que representam estados de tensões limites pertencem à fronteira do domínio de resistência macroscópico  $\partial G^{hom}$ .

Devido ao caráter aleatório da morfologia do meio poroso, a resolução direta do problema de análise limite definido acima é bastante complexa. Dessa forma, emprega-se uma abordagem que consiste em modelar o comportamento elasto-plástico local por um comportamento elástico não-linear, explorando a analogia entre os modelos, de maneira análoga à desenvolvida nas Seções 3.2 e 4.3.

A dificuldade da implantação deste método reside no fato que o carregamento ao qual o v.e.r. é submetido induz um campo de deformações locais  $\underline{\varepsilon}$  não-homogêneas na matriz (ou seja,  $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(\underline{x})$ ). Conseqüentemente, o tensor de rigidez  $\mathbb{C}$  varia de ponto a ponto no v.e.r. ( $\mathbb{C} = \mathbb{C}(\underline{\varepsilon}(\underline{x}))$ ). A matriz, portanto, se comporta como um material heterogêneo, e não como

uma fase homogênea. Esta é uma dificuldade séria, uma vez que esquemas clássicos de homogeneização não podem ser diretamente implementados, pois lidam apenas com compósitos com fases homogêneas. A idéia é, então, recorrer à técnica de homogeneização não-linear (Suquet, 1997), que é baseada no conceito de deformação efetiva, que representa o campo de deformações heterogêneas  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  em cada fase por uma deformação efetiva uniforme  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ef}$ , que depende do carregamento macroscópico dado, a partir de (5.4), por  $\underline{\underline{E}}$ .

A partir da determinação de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ef}$  (que pode ser realizada por diferentes métodos, explorando-se a equivalência energética entre as escalas micro e macroscópicas (Lemarchand *et al.* (2002)), pode-se utilizar uma aproximação para o tensor de rigidez, de tal forma que  $\mathbb{C}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{x}})) \approx \mathbb{C}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{ef}) = \mathbb{C}^{ef}$ , ou seja,  $\mathbb{C}^{ef}$  é constante por fase, o que possibilita a aplicação de esquemas de homogeneização elástica linear. Assim, pode-se determinar o comportamento elástico do material homogeneizado:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}}, \quad (5.7)$$

onde  $\mathbb{C}^{hom}$  é o tensor de rigidez elástico homogeneizado. Tal tensor pode ser obtido através de esquemas de estimação, tais como os de Mori-Tanaka (Mori e Tanaka, 1973) e Hashin-Shtrikman (Hashin e Shtrikman, 1963).

A partir dos procedimentos descritos acima e utilizando o método secante modificado (Suquet, 1997) para a determinação de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{ef}$ , Maghous *et al.* (2007) determinaram uma expressão analítica para a fronteira do domínio de resistência de um meio poroso, cuja matriz tem comportamento caracterizado pelo critério de Drucker-Prager (dado pela expressão (4.6)), com fluxo plástico não-associado:

$$f_{DP}^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}, \Phi) = \frac{1+2\Phi/3}{T^2} \Sigma_d^2 + \left( \frac{3\Phi}{2T^2} - 1 \right) \Sigma_m^2 + 2(1-\Phi)h\Sigma_m - (1-\Phi)^2 h^2 = 0, \quad (5.8)$$

onde  $\Sigma_m = \frac{1}{3} tr \underline{\underline{\Sigma}}$  é a tensão média macroscópica e  $\Sigma_d = \sqrt{\underline{\underline{\Sigma}}_d : \underline{\underline{\Sigma}}_d}$  é o módulo do tensor desviador de tensões macroscópico  $\underline{\underline{\Sigma}}_d$  ( $\underline{\underline{\Sigma}}_d = \underline{\underline{\Sigma}} - \Sigma_m \underline{\underline{1}}$ ). A expressão (5.8) define um domínio elíptico (Figura 5.2) independente do valor do coeficiente de dilatância  $t$ . Ou seja, o resultado acima é válido para o caso geral  $0 \leq t \leq T$ .

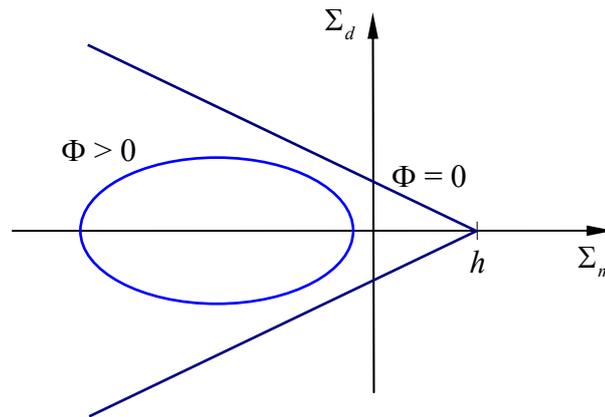


Figura 5.2: Domínio de resistência macroscópico de um meio poroso isotrópico com uma matriz sólida regida por Drucker-Prager.

Para a determinação do domínio de resistência de um meio poroso com matriz sólida regida pelo critério de von Mises, com limite de resistência em cisalhamento simples  $k$ , basta fazer o limite da expressão (5.8) para  $h \rightarrow +\infty$  e  $T \rightarrow 0$ , com  $Th = \sqrt{2}k$ . A expressão para a fronteira do domínio de resistência retorna

$$f_{vM}^{hom}(\underline{\underline{\Sigma}}, \Phi) = \left(1 + \frac{2\Phi}{3}\right) \Sigma_d^2 + \frac{3\Phi}{2} \Sigma_m^2 - 2(1 - \Phi)^2 k^2 = 0, \quad (5.9)$$

que já foi estabelecida por diversos autores (Suquet, 1997; Ponte-Castaneda, 1991; Leblond *et al.*, 1994).

### 5.3. DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO DE RESISTÊNCIA MACROSCÓPICO: IMPLANTAÇÃO DA LEI ELÁSTICA NÃO-LINEAR

De maneira análoga à descrita nas Seções 3.2 e 4.3, objetiva-se implantar uma lei elástica não-linear com o intuito de se determinar o domínio de resistência macroscópico de meios porosos. Para tanto, explora-se a equivalência local, numa condição de carregamento monotônico, entre um comportamento rígido-plástico e um comportamento elástico não-linear fictício apropriado.

O princípio do método é procurar um material elástico não-linear, caracterizado por um tensor de rigidez secante

$$\mathbb{C}^m(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 3K^m(\varepsilon_v, \varepsilon_d)\mathbb{J} + 2\mu^m(\varepsilon_v, \varepsilon_d)\mathbb{K}, \quad (5.10)$$

onde  $\mathbb{J} = \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$  e o sobrescrito  $m$  se refere à matriz do meio poroso, sendo que a condição (5.1) seja assintoticamente satisfeita no nível microscópico para grandes valores da deformação desviadora:

$$\lim_{\varepsilon_d / \varepsilon_{ref} \rightarrow \infty} f^m(\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}^m(\underline{\underline{\varepsilon}}): \underline{\underline{\varepsilon}}) = 0, \quad (5.11)$$

onde  $\varepsilon_{ref} \ll 1$  representa fisicamente a ordem de magnitude da deformação de cisalhamento para a qual a tensão de cisalhamento alcança o valor de resistência assintótico.

### 5.3.1. Matriz com material de von Mises

Sendo o critério de resistência de von Mises dado por

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_d - k\sqrt{2} \leq 0, \quad (5.12)$$

adota-se um valor constante para o módulo de compressão  $K^m$  que compõe  $\mathbb{C}^m(\underline{\underline{\varepsilon}})$ , implicando que o módulo de cisalhamento  $\mu^m$  deve satisfazer

$$\mu^m(\varepsilon_d) \sim \frac{k\sqrt{2}}{2\varepsilon_d} \quad \text{quando} \quad \varepsilon_d / \varepsilon_{ref} \gg 1. \quad (5.13)$$

Toma-se, por exemplo, a seguinte função  $\mu^m(\varepsilon_d)$  para simular o comportamento assintótico, já apresentada na Seção 3.2:

$$\mu^m(\varepsilon_d) = \frac{k\sqrt{2}}{2} \frac{1/\varepsilon_{ref}}{1 + \varepsilon_d / \varepsilon_{ref}}. \quad (5.14)$$

Com  $K^m$  constante e  $\mu^m$  dado por (5.14), tem-se que a equação (5.11) é assintoticamente satisfeita. Assim, o meio poroso pode ser representado pela lei elástica não-linear descrita acima.

### 5.3.2. Matriz com material de Drucker-Prager

Sendo o critério de resistência de Drucker-Prager dado por

$$f^m(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_d + T(\sigma_m - h) \leq 0. \quad (5.15)$$

Adotando-se  $K^m$  constante na expressão (5.10), implica que  $\mu^m$  deve satisfazer

$$\mu^m(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \sim \frac{T}{2\varepsilon_d}(h - K\varepsilon_v) \quad \text{quando} \quad \varepsilon_d / \varepsilon_{ref} \gg 1. \quad (5.16)$$

Para a implementação numérica, emprega-se a seguinte forma para  $\mu^m$  (idêntica à apresentada na Seção 4.3):

$$\mu^m(\varepsilon_v, \varepsilon_d) = \frac{T}{2}(h - K\varepsilon_v) \frac{1/\varepsilon_{ref}}{\varepsilon_d / \varepsilon_{ref} + 1}. \quad (5.17)$$

Com as formas apresentadas para  $K^m$  e  $\mu^m$ , garante-se que a expressão (5.11) seja assintoticamente satisfeita, tornando possível a representação do meio poroso pela lei elástica não-linear descrita acima.

#### 5.4. EXEMPLO NUMÉRICO

Os modelos elásticos não-lineares apresentados nas Seções 5.3.1 e 5.3.2 foram implementados no programa comercial de elementos finitos ABAQUS, através de sub-rotinas UMAT. Através deles, foi possível obterem-se as fronteiras dos domínios de resistência macroscópicos de meios porosos de diferentes porosidades, com matriz sólida de material de von Mises e Drucker-Prager.

Considera-se uma morfologia simplificada para o meio poroso remetendo a uma distribuição periódica de poros. A célula elementar correspondente, esboçada na Figura 5.3, é um volume cúbico com a fase sólida envolvendo um poro esférico centrado.

O carregamento da célula unitária é definido por deformações macroscópicas da forma

$$\underline{\underline{E}} = E_0(\alpha(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad \text{com} \quad E_0 > 0, \quad (5.18)$$

onde o parâmetro real  $\alpha$  representa o caminho de carregamento no espaço de deformações macroscópicas (estabelece a proporção com que a deformação  $E_0$  é aplicada nas direções dos versores  $\underline{e}_1$  e  $\underline{e}_2$ , em relação à direção do versor  $\underline{e}_3$ ).

Devido à periodicidade e simetrias do problema, apenas um oitavo da célula elementar  $\{x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$  é considerada e discretizada em elementos hexaédricos de oito nós. São analisadas duas porosidades:  $\Phi = 15\%$  e  $\Phi = 30\%$

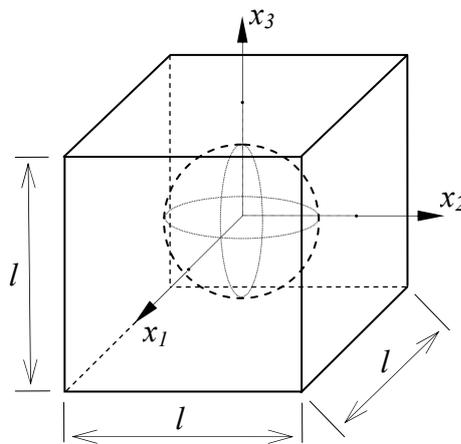


Figura 5.3: Material poroso: geometria da célula elementar.

#### 5.4.1. Porosidade $\Phi = 15\%$

A malha de elementos finitos para a célula elementar com porosidade  $\Phi = 15\%$  é apresentada na Figura 5.4.

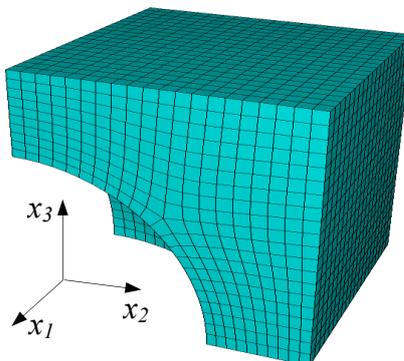
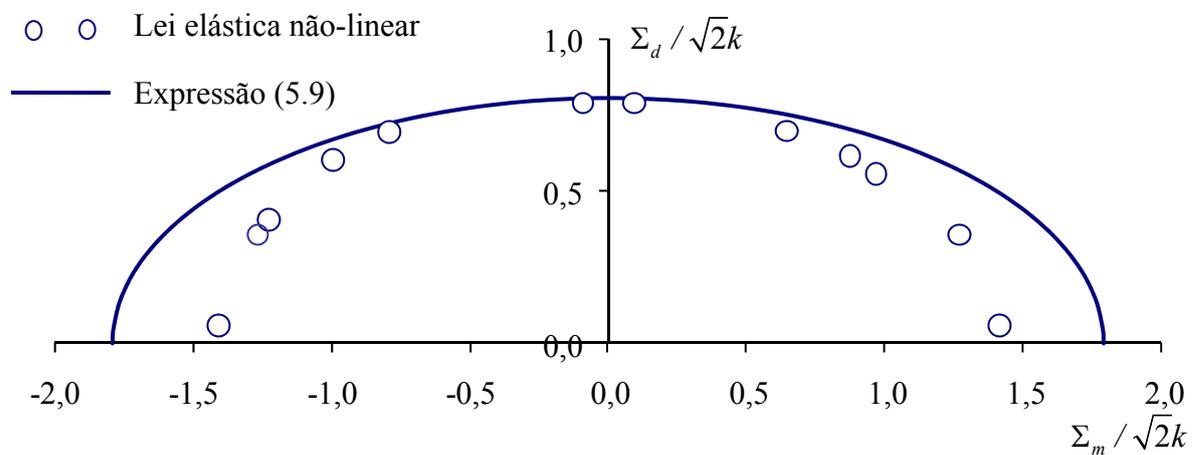


Figura 5.4: Material poroso ( $\Phi = 15\%$ ) – discretização em elementos finitos.

Aplicou-se uma deformação  $E_0 = 0,01$  variando-se o parâmetro  $\alpha$  de  $-3,0$  a  $1,0$  para o caso de matriz sólida de von Mises e de  $-10,0$  a  $1,0$  para o caso de matriz sólida de Drucker-Prager. Para cada valor de  $\alpha$ , determinou-se um ponto no gráfico de  $\Sigma_d / \sqrt{2}k$  versus  $\Sigma_m / \sqrt{2}k$  (no caso da Figura 5.5(a)) e no gráfico de  $\Sigma_d / hT$  versus  $\Sigma_m / hT$  (no caso da Figura 5.5(b)), representando um estado de tensões limites. Com o conjunto dos valores  $\alpha$  representados, é possível visualizar-se o domínio de resistência macroscópico, tanto para o caso do meio poroso com matriz regida pelo critério de von Mises quanto de Drucker-Prager. Os resultados obtidos através da implementação da lei elástica não-linear, bem como as expressões analíticas (5.8) e (5.9), são apresentados na Figura 5.5.



(a) Matriz sólida de von Mises.

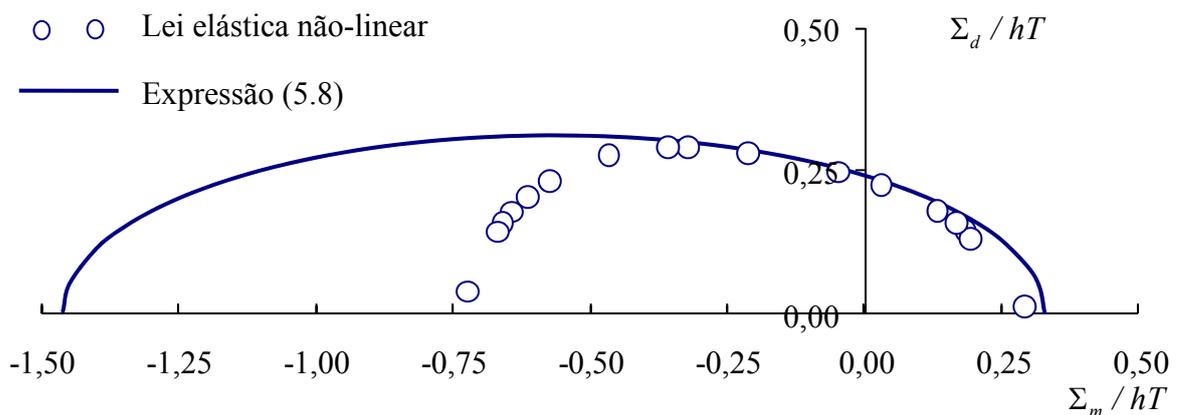
(b) Matriz sólida de Drucker-Prager com  $T = 0,3$ .

Figura 5.5: Domínio de resistência para um meio poroso com  $\Phi = 15\%$ .

Exceto no domínio de significantes tensões de compressão macroscópicas, no caso de matriz sólida de Drucker-Prager, verifica-se uma boa concordância entre os domínios de resistência obtidos pela implementação das leis elásticas não-lineares e aqueles obtidos através das expressões (5.8) e (5.9).

Este desvio observado nas compressões para a matriz de Drucker-Prager é claramente atribuído ao fato que o conceito de uma deformação efetiva única para toda a matriz, empregada na formulação analítica da homogeneização não-linear, falha por não capturar o efeito da forte heterogeneidade das deformações em torno dos poros.

#### 5.4.2. Porosidade $\Phi = 30\%$

A malha de elementos finitos para a célula elementar com porosidade  $\Phi = 30\%$  é apresentada na Figura 5.6.

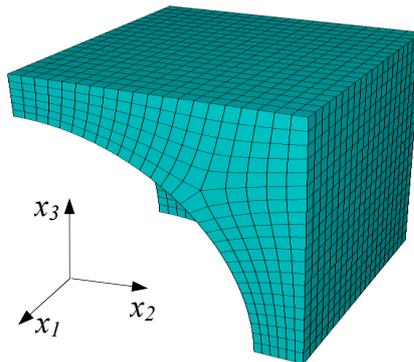
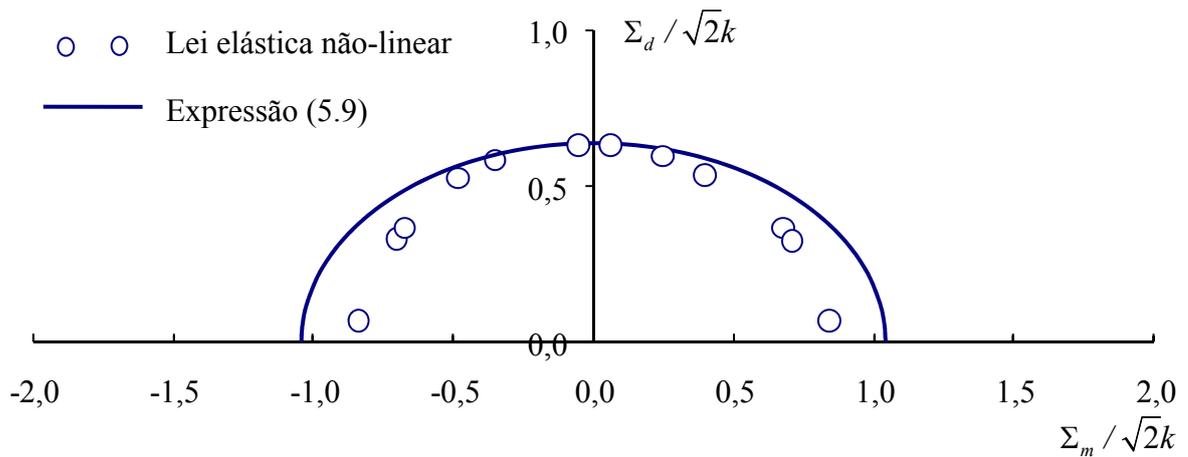


Figura 5.6: Material poroso ( $\Phi = 30\%$ ) – discretização em elementos finitos.

Os valores de  $E_0$  e de  $\alpha$  empregados no caso de  $\Phi = 15\%$ , tanto para a matriz sólida de von Mises quanto para a matriz sólida de Drucker-Prager, são também adotados aqui. Os resultados obtidos através da implementação da lei elástica não-linear, bem como as expressões analíticas (5.8) e (5.9), são apresentados na Figura 5.7.

Além de uma boa concordância entre as duas abordagens (excetuando-se novamente a região que compreende altos níveis de tensões de compressão macroscópicas), verifica-se que para esse valor maior de porosidade há uma melhor equivalência entre os domínios de resistência na região de tensões médias macroscópicas mais negativas.



(a) Matriz sólida de von Mises.

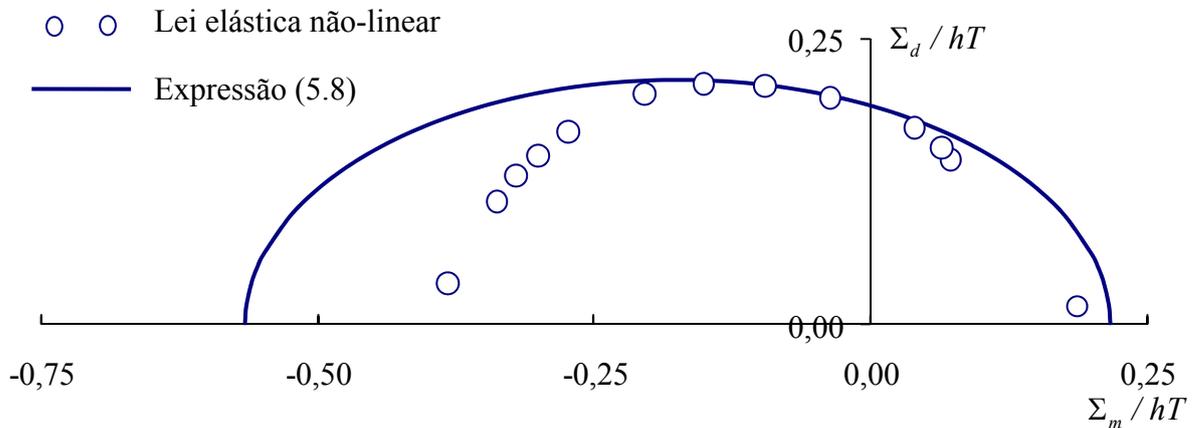
(b) Matriz sólida de Drucker-Prager com  $T = 0,3$ .

Figura 5.7: Domínio de resistência para um meio poroso com  $\Phi = 30\%$ .

Cabe ressaltar que se fosse utilizada como base de comparação uma formulação analítica que descrevesse o domínio de resistência macroscópico a partir do emprego de um maior número de deformações efetivas na matriz do meio poroso, a concordância entre os resultados obtidos empregando-se tal formulação e a lei não-linear seria maior.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentou-se uma formulação em elasticidade não-linear para a determinação de cargas limites em estruturas, que são classicamente obtidas a partir dos teoremas da análise limite ou a partir da resolução de um problema de evolução elasto-plástica.

A formulação desenvolvida, que simula o comportamento de materiais regidos pelos critérios de resistência de von Mises e de Drucker-Prager, foi implementada no programa comercial de elementos finitos ABAQUS através de uma sub-rotina escrita na linguagem de programação FORTRAN.

Com a lei elástica não-linear introduzida para cada material, mostrou-se que para o caso do material de von Mises existe um potencial elástico, entretanto, para o caso de Drucker-Prager, tal potencial não existe. A existência de um potencial elástico para a lei que simula o comportamento de um material regido pelo critério de Drucker-Prager não é, entretanto, necessária, uma vez que ela se destina a avaliação de cargas limites.

A implementação da lei foi realizada primeiramente em casos onde há solução exata, sendo os resultados obtidos muito próximos destas soluções. Posteriormente, a lei foi aplicada a casos (como os apresentados nas Seções 4.4.2 e 4.4.3) onde há soluções exatas considerando-se somente plasticidade associada. Tais soluções podem ser consideradas, em virtude do teorema de Radenkovic, limites superiores das cargas limites obtidas através da lei implementada, que considera dilatação nula. Verificou-se que os resultados alcançados com a implementação da lei ficaram um pouco abaixo dos limites superiores.

Domínios de resistência macroscópicos de meios porosos também foram determinados, através da aplicação da abordagem numérica em micromecânica, sendo os resultados confrontados com predições micromecânicas analíticas. Novamente, observou-se uma boa concordância destes em relação àqueles obtidos a partir do emprego de técnicas de homogeneização não-linear.

Uma das grandes vantagens da formulação desenvolvida, além da facilidade de implementação, é que ela permitiu, no caso de material de Drucker-Prager, lidar com leis de fluxo não-associadas, que são normalmente encontradas em materiais geotécnicos.

Como proposta de continuidade da pesquisa sugere-se determinar a carga limite de estruturas mais complexas, constituídas inclusive por materiais heterogêneos. Outra contribuição importante seria a análise de geoestruturas com solos reforçados. Por fim, sugere-se aplicar a análise micromecânica para a determinação do domínio de resistência macroscópico de meios porosos com v.e.r. constituído por poros aleatoriamente distribuídos e com dimensões variadas, examinando-se também outros tipos de compósitos, tais como os multidirecionais.

## REFERÊNCIAS

ABAQUS. **ABAQUS Theory Manual**, v. 6.4. Hibbitt, Karlsson & Sorensen Inc., Pawtucket, RI, USA, 2003.

ANDERHEGGEN, E.; KNÖPFEL, H. Finite element limit analysis using linear programming. **International Journal of Solids and Structures**, v. 8, n. 12, p. 1413-1431, 1972.

ANDERSEN, K.D.; CHRISTIANSEN, E. Limit analysis using the dual affine scaling algorithm. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 59, n. 2, p. 233-243, 1995.

ANDERSEN, K.D.; CHRISTIANSEN, E.; OVERTON, M.L. Computing limit loads by minimizing a sum of norms. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 19, n. 3, p. 1046-1062, 1998.

BELYTSCHKO, T; HODGE, P.G. Plane stress limit analysis by finite elements. **Journal of the Engineering Mechanics Division – Proceedings of the American Society of Civil Engineers**, v. 96, n. 6, p. 931-944, 1970.

CHEN, W.F.; HAN, D.J. **Plasticity for structural engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988.

CHEN, W.F.; LIU, X.L. **Limit analysis in soil mechanics**. Amsterdam: Elsevier, 1990.

CHRISTIANSEN, E. Computation of limit loads. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 10, p. 1547-1570, 1981.

CHRISTIANSEN, E. Limit analysis of collapse states. *In*: CIARLET, P.G. e LIONS, J.L., editors, **Handbook of Numerical Analysis**, v. 4, p. 197-312, Amsterdam. Elsevier Science B.V., 1996.

de BUHAN, P.; DORMIEUX, L; MAGHOUS, S. Stability of a vertical cut-off: improvement of the kinematic approach. **Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris**, v. 317, p. 131-136, 1993.

de BUHAN, P.; DORMIEUX, L; SALENÇON, J. Modélisation multipolaire de la résistance d'un milieu renforcé par inclusions. **Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris**, v. 326, p. 163-170, 1998.

de BUHAN, P.; MAGHOUS, S. A straightforward numerical method for evaluating the ultimate loads of structures. **European Journal of Mechanics – A/Solids**, v. 14, n. 2, p. 309-328, 1995.

DRUCKER, D.C.; PRAGER, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 10, n. 2, p. 157-165, 1952.

DRUCKER, D.C.; PRAGER, W.; GREENBERG, H.J. Extended limit design theorems for continuous media. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 9, n. 4, p. 381-389, 1952.

FRANCESCATO, P.; PASTOR, J. Lower and upper numerical bounds to the off-axis strength of unidirectional fiber-reinforced composites by limit analysis methods. **European Journal of Mechanics – A/Solids**, v. 16, n. 2, p. 213-234, 1997.

FRANCO, J.R.Q.; PONTER, A.R.S. A general approximate technique for the finite element shakedown and limit analysis of axisymmetrical shells; Part 1: theory and fundamental relations; Part 2: numerical applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 19, p. 3495-3536, 1997.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 11, n. 2, p. 127-140, 1963.

HILL, R. A note on estimating yield-point loads in a plastic-rigid body. **Philosophical Magazine**, v. 43, p. 353-355, 1952.

HILL, R. On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point. **Philosophical Magazine**, v. 42, p. 868-875, 1951.

LEBLOND, J.; PERRIN, G.; SUQUET, P. Exact results and approximate models for porous viscoplastic solid. **International Journal of Plasticity**, v. 10, n. 3, p. 213-235, 1994.

LEMARCHAND, E.; ULM, F.-J.; DORMIEUX, L. Effect of inclusions on friction coefficient of highly filled composite materials. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 128, n. 8, p. 876-884, 2002.

LIU, Y.H.; CEN, Z.Z.; XU, B.Y. A numerical method for plastic limit analysis of 3-D structures. **International Journal of Solids Structures**, v. 32, n. 12, p. 1645-1658, 1995.

LUBLINER, J. **Plasticity theory**. New York: Macmillan, 1990.

MAGHOUS, S.; DORMIEUX, L.; BARTHÉLÉMY, J.F. Micromechanical approach to the strength properties of geocomposites with a Drucker-Prager matrix. *In*: ALVES, M. e MATTOS, H.S.C., editores, **Mechanics of Solids in Brazil 2007**, cap. 21, p. 263-278. Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2007.

MASSONNET, C.E.; SAVE, M. **Calculo plastico de las construcciones, v. 2**. Barcelona: Montaner y Simon, 1966.

MORI, T.; TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. **Acta Metallurgica**, v. 21, p. 571-574, 1973.

MOY, S.S.J. **Plastic methods for steel and concrete structures**. London: Macmillan Press, 1981.

PASTOR, J. Analyse limite: détermination numérique de solutions statiques complètes. Application au talus vertical. **Journal de Mécanique Appliquée**, v. 2, n. 2, p. 167-196, 1978.

PASTOR, J.; TURGEMAN, S. Limit analysis in axisymmetrical problems: numerical determination of complete statical solutions. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 24, n. 2, p. 95-117, 1982.

PONTE-CASTANEDA, P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 39, p. 45-71, 1991.

SALENÇON, J. **Calcul à la rupture et analyse limite**. Paris: Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.

SLOAN, S.W. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 12, n. 1, p. 61-77, 1988.

SLOAN, S.W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 13, n. 3, p. 263-282, 1989.

SLOAN, S.W.; LYAMIN, A.V. Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 26, n. 2, p. 181-216, 2002.

SUQUET, P. Effective behavior of nonlinear composites. *In*: SUQUET, P., editor, **Continuum Micromechanics**, CISM Courses and Lecture Notes, v. 377, p. 197-264. Vienna: Springer-Verlag, 1997.

TIMOSHENKO, S.P. **History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures**. New York: McGraw-Hill, 1953.

YU, H.S. **Plasticity and geotechnics**. New York: Springer, 2006.

ZAOUI, A. Continuum micromechanics: survey. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 128, n. 8, p. 808-816, 2002.

## **APÊNDICE A – A SUB-ROTINA UMAT**

No programa comercial de elementos finitos ABAQUS, modelos constitutivos de materiais podem ser implementados através de uma sub-rotina externa escrita em linguagem de programação FORTRAN e denominada sub-rotina UMAT (*User Material*).

A sub-rotina UMAT é acionada em cada ponto de integração de cada elemento da malha de elementos finitos que modela a estrutura. O acionamento é feito também em cada iteração de cada incremento de tempo em que são realizados os cálculos computacionais. A interação entre o ABAQUS e a sub-rotina UMAT é mostrada na Figura A.1.

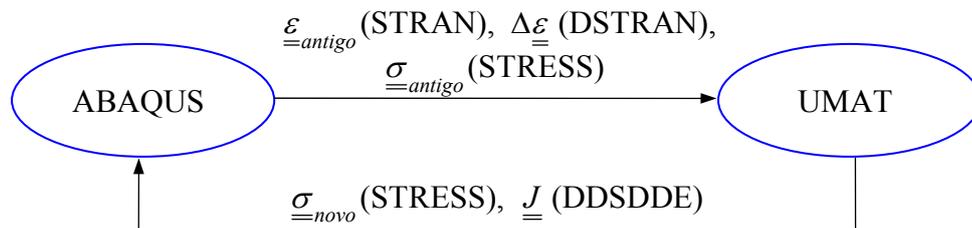


Figura A.1: Interação entre o ABAQUS e a sub-rotina UMAT.

A idéia básica é que o ABAQUS fornece o estado do material no início do incremento e a diferença de deformações entre o estado atual e o estado antigo ( $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ ). O estado no início do incremento é descrito pela tensão antiga (na variável STRESS) e pela deformação antiga (na variável STRAN). A função da sub-rotina UMAT é determinar e atualizar ao final do incremento, para todos os pontos de integração, as tensões e a matriz Jacobiana do modelo constitutivo (isto é,  $\partial \underline{\underline{\sigma}} / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}$ , armazenado na variável DDSDDE).

A variável DSTRAN contém o vetor de incrementos de deformação. Uma vez que as tensões devem ser calculadas utilizando os valores de deformação total, utilizando a lei elástica não-linear implementada, é necessário adicionar a variável STRAN à variável DSTRAN, ao final do incremento.

A variável DDSDDE, que representa a matriz de rigidez tangente do material, tem dimensão definida pela variável NTENS, cujo valor é diferente para cada tipo de elemento finito. Para os elementos utilizados nos problemas tridimensionais, NTENS tem valor 6, enquanto que nos casos envolvendo elementos de estado plano de deformação, NTENS tem valor 4.

O cálculo do Jacobiano  $\partial \underline{\underline{\sigma}} / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}$  é apresentado no Apêndice B. No Apêndice C são apresentados os códigos-fonte das sub-rotinas UMAT da lei elástica não-linear que simula o critério de von Mises e o de Drucker-Prager.

## **APÊNDICE B – CÁLCULOS USADOS NA IMPLEMENTAÇÃO**

O Jacobiano  $\underline{\underline{J}}$  dado pela variável DDSDDDE deve ser definido precisamente para que a convergência dos resultados seja rapidamente alcançada. O Jacobiano pode ser escrito em formato matricial na forma

$$\underline{\underline{J}} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{22}} & \dots & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{23}} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \varepsilon_{22}} & \dots & \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \varepsilon_{23}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \varepsilon_{22}} & \dots & \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \varepsilon_{23}} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

sendo, no caso geral, uma matriz 6 x 6. O cálculo dos componentes  $J_{ij}$  da matriz é realizado para cada uma das leis elásticas não-lineares desenvolvidas.

## B.1. MATERIAL DE VON MISES

A lei elástica não-linear é da forma

$$\underline{\underline{\sigma}} = K \varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu(\varepsilon_d) \underline{\underline{\varepsilon}}_d \quad (\text{B.2})$$

ou

$$\sigma_{ij} = K \varepsilon_v \delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_d) \varepsilon_{dij}, \quad (\text{B.3})$$

com  $K = cte.$  e  $\mu(\varepsilon_d) = \frac{k\sqrt{2}}{2} \frac{1/\varepsilon_{ref}}{1 + \varepsilon_d/\varepsilon_{ref}}$ . Para um componente  $ij$  do tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,

por exemplo,  $\sigma_{11}$ , tem-se

$$\sigma_{11} = K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\left[\varepsilon_{11} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\right] \quad (\text{B.4})$$

ou

$$\sigma_{11} = \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\varepsilon_{11} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}). \quad (\text{B.5})$$

O termo  $\partial\sigma_{11}/\partial\varepsilon_{11}$  do Jacobiano  $\underline{J}$  é dado por

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}} = \left( K + \frac{4}{3}\mu \right) + \frac{2}{3}(2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_{11}}, \quad (\text{B.6})$$

onde  $\frac{2}{3}(2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) = 2\varepsilon_{d11}$  e  $\partial\mu/\partial\varepsilon_{11}$  pode ser reescrito como

$$\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_{11}} = \frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_d} \frac{\partial\varepsilon_d}{\partial\varepsilon_{11}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\varepsilon_d}{\partial\varepsilon_{11}} = \frac{\varepsilon_{d11}}{\varepsilon_d}, \\ \frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_d} = -\frac{\sqrt{2}}{2} K \frac{(1/\varepsilon_{ref})^2}{(1 + \varepsilon_d/\varepsilon_{ref})^2} = -\frac{\mu^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} K}. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Assim,

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}} = \left( K + \frac{4}{3}\mu \right) - \frac{2(\mu\varepsilon_{d11})^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} K \varepsilon_d}. \quad (\text{B.8})$$

Analogamente,

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}} = \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) - 2\mu^2 \frac{\varepsilon_{d11}\varepsilon_{d22}}{\frac{\sqrt{2}}{2} K \varepsilon_d}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{33}} = \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) - 2\mu^2 \frac{\varepsilon_{d11}\varepsilon_{d33}}{\frac{\sqrt{2}}{2} K \varepsilon_d}, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{12}} = -2\mu^2 \frac{\varepsilon_{d11}\varepsilon_{d12}}{\frac{\sqrt{2}}{2} K \varepsilon_d}, \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{13}} = -2\mu^2 \frac{\varepsilon_{d11}\varepsilon_{d13}}{\frac{\sqrt{2}}{2} K \varepsilon_d}, \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{23}} = -2\mu^2 \frac{\varepsilon_{d11}\varepsilon_{d23}}{\frac{\sqrt{2}}{2} K \varepsilon_d}. \quad (\text{B.13})$$

As expressões para  $\partial\sigma_{22}/\partial\varepsilon_{ij}$ ,  $\partial\sigma_{33}/\partial\varepsilon_{ij}$ ,  $\partial\sigma_{12}/\partial\varepsilon_{ij}$ ,  $\partial\sigma_{13}/\partial\varepsilon_{ij}$  e  $\partial\sigma_{23}/\partial\varepsilon_{ij}$  podem ser determinadas através do mesmo procedimento.

## B.2. MATERIAL DE DRUCKER-PRAGER

A lei elástica não-linear é da forma

$$\underline{\underline{\sigma}} = K(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \varepsilon_v \underline{\underline{1}} + 2\mu(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \underline{\underline{\varepsilon}}_d \quad (\text{B.14})$$

ou

$$\sigma_{ij} = K(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \varepsilon_v \delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \varepsilon_{dij}, \quad (\text{B.15})$$

com  $K(\varepsilon_v, \varepsilon_d) = cte.$  e  $\mu(\varepsilon_v, \varepsilon_d) = \frac{T}{2}(h - K\varepsilon_v) \frac{1/\varepsilon_{ref}}{\varepsilon_d/\varepsilon_{ref} + 1}$ . Para um componente  $ij$  do tensor

de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ , por exemplo,  $\sigma_{11}$ , tem-se

$$\sigma_{11} = K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\left[\varepsilon_{11} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\right] \quad (\text{B.16})$$

ou

$$\sigma_{11} = \left(K + \frac{4}{3}\mu\right)\varepsilon_{11} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}). \quad (\text{B.17})$$

O termo  $\partial\sigma_{11}/\partial\varepsilon_{11}$  do Jacobiano  $\underline{\underline{J}}$  é dado por

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}} = \left(K + \frac{4}{3}\mu\right) + \frac{2}{3}(2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) \frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_{11}}, \quad (\text{B.18})$$

onde  $\frac{2}{3}(2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) = 2\varepsilon_{d11}$  e  $\partial\mu/\partial\varepsilon_{11}$  pode ser reescrito como

$$\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_{11}} = \frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_d} \frac{\partial\varepsilon_d}{\partial\varepsilon_{11}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\varepsilon_d}{\partial\varepsilon_{11}} = \frac{\varepsilon_{d11}}{\varepsilon_d}, \\ \frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon_d} = -\frac{T}{2}(h - K\varepsilon_v) \frac{(1/\varepsilon_{ref})^2}{(1 + \varepsilon_d/\varepsilon_{ref})^2}. \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Assim,

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{11}} = \left( K + \frac{4}{3} \mu \right) - \frac{2 \left( \mu \varepsilon_{d_{11}} \right)^2}{\frac{T}{2} (h - K \varepsilon_v) \varepsilon_d}. \quad (\text{B.20})$$

Analogamente,

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{22}} = \left( K - \frac{2}{3} \mu \right) - 2 \mu^2 \frac{\varepsilon_{d_{11}} \varepsilon_{d_{22}}}{\frac{T}{2} (h - K \varepsilon_v) \varepsilon_d}, \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{33}} = \left( K - \frac{2}{3} \mu \right) - 2 \mu^2 \frac{\varepsilon_{d_{11}} \varepsilon_{d_{33}}}{\frac{T}{2} (h - K \varepsilon_v) \varepsilon_d}, \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{12}} = -2 \mu^2 \frac{\varepsilon_{d_{11}} \varepsilon_{d_{12}}}{\frac{T}{2} (h - K \varepsilon_v) \varepsilon_d}, \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{13}} = -2 \mu^2 \frac{\varepsilon_{d_{11}} \varepsilon_{d_{13}}}{\frac{T}{2} (h - K \varepsilon_v) \varepsilon_d}, \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varepsilon_{23}} = -2 \mu^2 \frac{\varepsilon_{d_{11}} \varepsilon_{d_{23}}}{\frac{T}{2} (h - K \varepsilon_v) \varepsilon_d}. \quad (\text{B.25})$$

As expressões para  $\partial \sigma_{22} / \partial \varepsilon_{ij}$ ,  $\partial \sigma_{33} / \partial \varepsilon_{ij}$ ,  $\partial \sigma_{12} / \partial \varepsilon_{ij}$ ,  $\partial \sigma_{13} / \partial \varepsilon_{ij}$  e  $\partial \sigma_{23} / \partial \varepsilon_{ij}$  podem ser determinadas através do mesmo procedimento.

## **APÊNDICE C – CÓDIGOS-FONTE DAS SUB-ROTINAS UMAT**

## C.1. MATERIAL DE VON MISES

O código-fonte da lei elástica não-linear que simula o comportamento de um material regido pelo critério de resistência de von Mises, implementada em linguagem FORTRAN na sub-rotina UMAT, é apresentado na seqüência.

```
* declaração das variáveis envolvidas na sub-rotina
subroutine umat (stress, statev, ddsdde, sse, spd, scd,
1 rpl, ddsddt, drplde, drpldt, stran, dstran, time, dtime,
2 temp, dtemp, predef, dpred, material, ndi, nshr, ntens,
3 nstatv, props, nprops, coords, drot, pnewdt, celent,
4 dfgrd0, dfgrd1, noel, npt, layer, kspt, kstep, kinc)
include 'aba_param.inc'
character*8 material
* dimensionamento de variáveis
dimension stress(ntens), statev(nstatv), ddsdde(ntens,ntens),
1 ddsddt(ntens), drplde(ntens), drpldt, stran(ntens), dstran(ntens),
2 time(2), predef(1), dpred(1), props(nprops), coords(3),
3 drot(3,3), dfgrd0(3,3), dfgrd1(3,3)
dimension epsdev(ntens), totstran(ntens)
* definição dos parâmetros iniciais do material
anu = props(1)
aka = 100.d0
eref = 0.001d0
* cálculo das deformações totais
totstran(1:ndi) = stran(1:ndi) + dstran(1:ndi)
totstran(ndi+1:) = (stran(ndi+1:) + dstran(ndi+1:)) / 2.d0
* cálculo de demais parâmetros
ev = totstran(1) + totstran(2) + totstran(3)
epsdev(1:ndi) = totstran(1:ndi) - (1.d0 / 3.d0) * ev
epsdev(ndi+1:) = totstran(ndi+1:)
ed = 0.d0
do i=1,ndi
    ed = ed + totstran(i)**2.d0
end do
do i=ndi+1,ntens
    ed = ed + 2.d0 * totstran(i)**2.d0
end do
ed = dsqrt(ed)
amu0 = (aka * dsqrt(2.d0) / 2.d0) / eref
amu = (aka * dsqrt(2.d0) / 2.d0) / eref / (1.d0 + ed/eref)
emod0 = 2.d0 * amu0 * (1.d0 + anu)
abulk = emod0 / (3.d0 * (1.d0 - 2.d0 * anu))
* calcula as tensões finais em cada ponto de integração de cada elemento finito
stress(1:ndi) = abulk * ev + 2.d0 * amu * epsdev(1:ndi)
stress(ndi+1:) = 2.d0 * amu * epsdev(ndi+1:)
* calcula o jacobiano (matriz de rigidez secante - inicial)
ddsdde=0.d0
if (ed .eq. 0.d0) then
    do i=1,ndi
```

```

        do j=1,ndi
            ddsdde(i,j) = abulk - (2.d0 / 3.d0) * amu0
        end do
        ddsdde(i,i) = abulk + (4.d0 / 3.d0) * amu0
    end do
    do i=ndi+1,ntens
        ddsdde(i,i) = amu0
    end do

else
* calcula o jacobiano (matriz de rigidez tangente)
ed = ed * aka * dsqrt(2.d0) / 2.d0

    do i=1,ndi
        do j=1,ndi
            if (i .eq. j) then
1                ddsdde(i,j) = abulk + (4.d0 / 3.d0) * amu
                    - 2.d0 * amu**2.d0 * epsdev(i) * epsdev(j) / ed
            else
1                ddsdde(i,j) = abulk - (2.d0 / 3.d0) * amu
                    - 2.d0 * amu**2.d0 * epsdev(i) * epsdev(j) / ed
            end if
        end do
        do j=ndi+1,ntens
1            ddsdde(i,j) = (-2.d0 * amu**2.d0 * epsdev(i) *
                        epsdev(j) / ed) / 2.d0
        end do
    end do
    do i=ndi+1,ntens
        do j=1,ntens
            if (i .eq. j) then
1                ddsdde(i,j) = (2.d0 * amu - 2.d0 * amu**2.d0 *
                        epsdev(i) * epsdev(j) / ed) / 2.d0
            else
1                ddsdde(i,j) = (-2.d0 * amu**2.d0 * epsdev(i) *
                        epsdev(j) / ed) / 2.d0
            end if
        end do
    end do
end if
return
end

```

## C.2. MATERIAL DE DRUCKER-PRAGER

O código-fonte da lei elástica não-linear que simula o comportamento de um material regido pelo critério de resistência de Drucker-Prager, implementada em linguagem FORTRAN na sub-rotina UMAT, é apresentado na seqüência.

```

* declaração das variáveis envolvidas na sub-rotina
subroutine umat (stress, statev, ddsdde, sse, spd, scd,
1 rpl, ddsddt, drplde, drpldt, stran, dstran, time, dtime,
2 temp, dtemp, predef, dpred, material, ndi, nshr, ntens,
3 nstatv, props, nprops, coords, drot, pnewdt, celent,
4 dfgrd0, dfgrd1, noel, npt, layer, kspt, kstep, kinc)
include 'aba_param.inc'
character*8 material
* dimensionamento de variáveis
dimension stress(ntens), statev(nstatv), ddsdde(ntens,ntens),
1 ddsddt(ntens), drplde(ntens), stran(ntens), dstran(ntens),

```

```

2 time(2), predef(1), dpred(1), props(nprops), coords(3),
3 drot(3,3), dfgrd0(3,3), dfgrd1(3,3)

dimension epsdev(ntens), totstran(ntens)

* definição dos parâmetros iniciais do material
anu = props(1)
emod = props(2)
aga = 1.d0
atr = 0.5d0
eref = 0.0001d0

* cálculo das deformações totais
totstran(1:ndi) = stran(1:ndi) + dstran(1:ndi)
totstran(ndi+1:) = (stran(ndi+1:) + dstran(ndi+1:)) / 2.d0

* cálculo de demais parâmetros
ev = totstran(1) + totstran(2) + totstran(3)

epsdev(1:ndi) = totstran(1:ndi) - (1.d0 / 3.d0) * ev
epsdev(ndi+1:) = totstran(ndi+1:)

ed = 0.d0
do i=1,ndi
    ed = ed + totstran(i)**2.d0
end do
do i=ndi+1,ntens
    ed = ed + 2.d0 * totstran(i)**2.d0
end do
ed = dsqrt(ed)

abulk = emod / (3.d0 * (1.d0 - 2.d0 * anu))
amu0 = (atr * (aga - abulk * ev) / 2.d0) / eref
amu = (atr * (aga - abulk * ev) / 2.d0) / eref / (1.d0 + ed/eref)

* calcula as tensões finais em cada ponto de integração de cada elemento finito
stress(1:ndi) = abulk * ev + 2.d0 * amu * epsdev(1:ndi)
stress(ndi+1:) = 2.d0 * amu * epsdev(ndi+1:)

* calcula o jacobiano (matriz de rigidez secante - inicial)
ddsdsde=0.d0
if (ed .eq. 0.d0) then
    do i=1,ndi
        do j=1,ndi
            ddsdsde(i,j) = abulk - (2.d0 / 3.d0) * amu0
        end do
        ddsdsde(i,i) = abulk + (4.d0 / 3.d0) * amu0
    end do
    do i=ndi+1,ntens
        ddsdsde(i,i) = amu0
    end do
else
* calcula o jacobiano (matriz de rigidez tangente)
ed = ed * atr * (aga - abulk * ev) / 2.d0
    do i=1,ndi
        do j=1,ndi
            if (i .eq. j) then
                ddsdsde(i,j) = abulk + (4.d0 / 3.d0) * amu
                - 2.d0 * amu**2.d0 * epsdev(i) * epsdev(j) / ed
            else
                ddsdsde(i,j) = abulk - (2.d0 / 3.d0) * amu
                - 2.d0 * amu**2.d0 * epsdev(i) * epsdev(j) / ed
            end if
        end do
        do j=ndi+1,ntens
            ddsdsde(i,j) = (-2.d0 * amu**2.d0 * epsdev(i) *

```

```

1                                     epsdev(j) / ed) / 2.d0
    end do
end do
  do i=ndi+1,ntens
  do j=1,ntens
    if (i .eq. j) then
1       ddsdde(i,j) = (2.d0 * amu - 2.d0 * amu**2.d0 *
                    epsdev(i) * epsdev(j) / ed) / 2.d0
    else
1       ddsdde(i,j) = (-2.d0 * amu**2.d0 * epsdev(i) *
                    epsdev(j) / ed) / 2.d0
    end if
  end do
end do
end if
return
end

```