



## **EQUAÇÕES DE RETAS E CIRCUNFERÊNCIAS: UMA APLICAÇÃO DA GEOMETRIA ANALÍTICA ATRAVÉS DO GEOGEBRA**

**Vanuza Rodrigues de Oliveira – nuia.oliveira@bol.com.br – Pólo Novo Hamburgo**  
**Cleber Bisognin – cbisognin@ufrgs.br – UFRGS**

**Resumo:** O presente trabalho relata uma atividade realizada com alunos de duas turmas do 3º ano do ensino médio politécnico, na cidade de Esteio, RS. O trabalho que foi desenvolvido teve como objetivo mostrar aplicações de geometria analítica, mais precisamente equações de retas e circunferências. Para tanto, foi utilizado o *software* GeoGebra para fazer a reprodução de algumas bandeiras dos países participantes da Copa do Mundo de Futebol 2014. A atividade teve uma duração de quatro aulas de 50 minutos cada, onde os alunos puderam visualizar, com o uso do GeoGebra, além dos conceitos estudados, uma maneira interessante da aplicação das equações de retas e circunferências, o que otimizou o aprendizado dos mesmos. Sendo assim, ao término da atividade, foi possível perceber que os objetivos propostos foram alcançados, visto que no decorrer do trabalho os alunos se mostraram entusiasmados, participativos e com ciência dos conceitos que necessitaram ser empregados para a realização da atividade.

**Palavras-chave:** Geometria analítica; mídias digitais; GeoGebra.

### **1 Introdução**

Aproveitando o momento e a paixão do brasileiro pelo futebol, foi desenvolvida uma atividade que objetivou a construção das bandeiras de alguns países participantes da Copa do Mundo no Brasil em 2014, utilizando conceitos de geometria analítica no *software* GeoGebra. A referida atividade foi realizada com turmas do 3º ano do ensino médio do Colégio Estadual José Loureiro da Silva, onde os alunos usaram os conhecimentos adquiridos em sala de aula sobre equações de retas e circunferências, localização de pontos no plano, posições relativas entre retas e o *software* GeoGebra.

Sabendo que a Geometria Analítica é um ramo da Matemática que consegue relacionar geometria e álgebra, é fácil perceber aqui uma boa oportunidade para se trabalhar com algum *software* matemático. Esse *software* deve permitir ao aluno “vivenciar e visualizar” melhor o conhecimento que está sendo construído, consiga motivá-lo na

busca do aprimoramento desses novos saberes, mostrando também uma aplicabilidade real desses conteúdos, até então trabalhados somente no espaço de sala de aula.

Cabe ressaltar também que, de acordo com os PCN'S, é mais do que urgente que a escola e, por consequência, seus professores, promovam uma educação que se direcione para as mídias digitais, a fim de que o aluno possa compreendê-la e utilizá-la de forma a desenvolver suas capacidades cognitivas e intelectuais.

Baseado no que foi exposto, acredita-se que a inserção de tecnologias digitais e o uso de metodologias alternativas de ensino possam facilitar o processo de ensino e aprendizagem do aluno, mostrando o quanto a Matemática pode ser atrativa, útil e de fácil compreensão, justificando-se assim o presente trabalho.

## **2 Problemática e Objetivos deste Trabalho**

Tendo em vista o que foi exposto na seção anterior, foram elaboradas a problemática e os objetivos da atividade realizada.

### **2.1 Problemática**

Atualmente, em meio à crescente inserção da era digital no mundo, se torna cada vez mais difícil para o professor despertar o interesse de seu aluno por determinado conteúdo que está sendo estudado em sala de aula. É necessário – e urgente – que o professor consiga aliar as mídias digitais a aplicações de determinados conceitos em algo real, que faça parte do cotidiano do educando. Sendo assim, pergunta-se: é possível, usando um software matemático, mostrar ao aluno uma aplicação das equações de retas e circunferências e ao mesmo tempo, despertar seu interesse e entendimento pelos conceitos estudados?

### **2.2 Objetivos da Proposta**

Através do uso de uma mídia digital, neste caso, o *software* matemático GeoGebra, tem-se como objetivos da proposta de trabalho, mostrar ao aluno uma aplicação das equações de retas e circunferências em algo que desperte seu interesse, no intuito de proporcionar ao mesmo um entendimento mais fácil e concreto dos conceitos estudados, facilitando assim a construção do processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo.

### 3 O Surgimento da Geometria Analítica

A geometria analítica foi concebida por dois grandes nomes da matemática: Pierre de Fermat (1601-1665), um advogado que mostrava grande interesse por obras sobre geometria e o grande filósofo René Descartes (1596-1650). Ambos se interessavam por progressos da notação algébrica realizados pelo matemático francês François Viète (1540-1603) no final do século XVI.

A contribuição de Fermat à geometria analítica está em uma de suas obras, chamada *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos*, de 1636, mas que só foi publicada em 1679, depois de sua morte, junto com sua obra completa. Fermat era bastante modesto e não gostava de publicar seus trabalhos. Por esse motivo, deve-se o fato de Descartes comumente ser mais lembrado como criador da Geometria Analítica.

Durante o século XVII, René Descartes abandona as tradições clássicas da geometria grega e cria a geometria analítica. Descartes estava decidido a descobrir uma maneira de “traduzir” as propriedades geométricas por meio de equações, onde os resultados das mesmas pudessem ser interpretados geometricamente. Ele escreveu em 1637, na França, sua obra mais famosa, o *Discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências*, com três apêndices que mostram o método com exemplos práticos. Um desses apêndices, o *La géométrie*, que contém as principais idéias da geometria analítica (anteriormente chamada de geometria cartesiana) mostra a grande riqueza de seu trabalho ao traduzir um problema geométrico numa equação algébrica e, embora a geometria analítica atual não tenha grandes semelhanças com sua obra, pode-se afirmar que foi a partir daí que ela surgiu. O caminho percorrido pela geometria analítica desde então teve a influência de diversos matemáticos que contribuíram para seu aperfeiçoamento. Podemos citar, por exemplo, Frans van Schooten (1615-1660), um matemático holandês que traduziu para o latim a obra de René Descartes, tornando-a bastante conhecida e Newton, que sugeriu novos tipos de sistemas de coordenadas.

A idéia central da geometria analítica está na caracterização de objetos geométricos por meio de equações que os definem, de forma que o estudo desses objetos possa ser feito com o uso de procedimentos algébricos. Essa idéia está bem caracterizada em documentos deixados por Descartes que mostram que “... sua preocupação era a construção geométrica e a possibilidade de encontrar um correspondente geométrico para as operações algébricas.” (DANTE, 2010, p. 49)

Desde o surgimento da geometria analítica, a geometria passou a ter dois caminhos bem distintos: um mais puro, que remete ao plano e ao espaço, mostrado na obra *Os elementos*, de Euclides; e outro que usa coordenadas e álgebra na resolução dos problemas, possibilitando o estudo de figuras geométricas associando-as a um sistema de coordenadas; desse modo as figuras podem ser representadas por meio de pares ordenados, equações e /ou inequações.

Sendo assim, a geometria analítica estuda curvas e figuras por meio de equações, analisando essas equações por meio de gráficos, fazendo relações com a álgebra e a geometria plana e espacial, facilitando com isso a resolução de diversos problemas, e, além de favorecer o desenvolvimento da própria geometria, serve também de objeto de estudo para diversas áreas das ciências, entre elas a Física.

A Geometria Analítica, como é ensinada atualmente, muito pouco se parece às contribuições deixadas por Fermat e Descartes. Inclusive sua marca mais característica, um par de eixos ortogonais, não era usada por nenhum deles. Porém, cada um deles, sabiam que a idéia central era associar equações a curvas e superfícies. Neste enfoque, Fermat foi quem mais contribuiu. Descartes superou Fermat na notação algébrica.

#### **4 As Mídias na Educação**

Ao analisarmos a sociedade atual podemos verificar que ela está totalmente globalizada, informatizada e tecnológica, tornando evidente a necessidade de se desenvolver nos alunos várias habilidades, como a comunicação por vários meios, a investigação, a capacidade de elaborar e resolver problemas, fazer suposições, tomar decisões, criar estratégias e procedimentos para a resolução de determinado problema, adquirir novos conhecimentos e aprimorar os já existentes, além de trabalhar em conjunto e querer aprender sempre mais. Frente a essa realidade, é fácil perceber a importância que o desenvolvimento científico-tecnológico tem dentro do cenário educacional, pois pode ser um importante instrumento facilitador do processo de ensino-aprendizagem. A inserção de novas mídias, destacando-se aqui os computadores, *netbooks* e *notebooks*, tem sido mais constante em sala de aula, já que se trata de um recurso que contribui para a criação e elaboração de novas estratégias de ensino, além de aproximar o professor da realidade extraclasse do seu aluno, que, de modo geral, tem acesso fácil à internet, televisão e computador. Kalinke afirma que:

Os avanços tecnológicos estão sendo utilizados praticamente por todos os ramos do conhecimento. As descobertas são extremamente rápidas e estão a nossa

disposição com uma velocidade nunca antes imaginada. A Internet, os canais de televisão a cabo e aberta, os recursos de multimídia estão presentes e disponíveis na sociedade. Estamos sempre a um passo de qualquer novidade. Em contrapartida, a realidade mundial faz com que nossos alunos estejam cada vez mais informados, atualizados, e participantes deste mundo globalizado (1999, p.15).

Os recursos digitais na educação servem também para que o aluno consiga descobrir a sala de aula e a escola como um espaço interativo, de novos saberes, não como um espaço de rotina e de repetição, levando o mesmo a refletir sobre sua própria aprendizagem. No entanto, deve-se ter o cuidado para que o aluno, ao usar os recursos digitais disponíveis, não se desvie do seu objetivo, já que as informações são inúmeras, e é necessária uma análise detalhada sobre o que é ou não realmente importante, se as fontes pesquisadas são confiáveis, se são suficientes ou não. Para isso, o aluno deve relacionar, comparar, tomar decisões que o permitam ter consciência das possibilidades que são apresentadas na internet. Aqui, é de extrema valia o papel do professor, pois este é quem deve apresentar novas situações aos alunos, debater alternativas, orientar, discutir e direcionar o estudante de modo que todas essas informações possam proporcionar de fato uma aprendizagem significativa.

Porém, é fácil perceber que a realidade passa, por muitas vezes, longe disso. A escola ainda se mantém estruturada em espaços pré-determinados, contrários às inovações tecnológicas. O espaço escolar como um todo, está em crise, pois encontramos profissionais resistentes aos avanços da tecnologia, encontrando dificuldades para preparar seus estudantes para a vida, para o trabalho e como cidadãos conscientes e críticos. Frente a esse fato, Frota e Borges esclarecem que:

...a superação das barreiras para o uso efetivo de tecnologias nas escolas depende de dois movimentos paralelos: do professor enquanto sujeito, no sentido de se formar para uma incorporação tecnológica; e do sistema educacional, enquanto responsável pela implantação das condições de incorporação da tecnologia na escola. (2004, p.2)

Diante do exposto, cabe ainda ressaltar que

... é preciso ter claro que urge a educação para as mídias, a fim de compreendê-las em seus alcances, criticá-las e utilizá-las da forma mais abrangente. Cabe à escola ser um lugar importante no qual o jovem possa desenvolver sua capacidade de utilização dessas mídias, para inclusive, exercer plenamente sua cidadania. (BRASIL, 2014, p.19)

Desse modo, vemos que é possível, através do uso de mídias, fazer do espaço escolar um ambiente de junção de saberes e experiências, onde as competências adquiridas devem refletir um maior interesse e motivação para a aprendizagem. Podemos ressaltar a

internet e *softwares* de ensino específicos como instrumentos que podem tornar a dinâmica e a didática da sala de aula muito mais agradável e envolvente. As mídias, por si só, conseguem chamar a atenção do educando, elevando as chances de um aprendizado significativo.

É dever da escola e de todos os profissionais da educação estar por dentro das diferentes alternativas de prática pedagógica, pois são estes os responsáveis pela transmissão do conhecimento, e podem tranquilamente se apropriarem da tecnologia disponível visando uma melhora do ensino como um todo. Parece óbvio que a tradicional forma de ensinar em sala de aula, com quadro, giz, os alunos sentados em fileiras voltados pra frente da sala e o professor falando ao grupo continua sendo de grande importância, porém o uso de mídias na educação só tem a colaborar com o ensino e com o sucesso do processo de aprendizagem no ambiente escolar.

Sendo assim, o uso de recursos digitais deve ser parte integrante da investigação no espaço de aprendizagem, onde diversos problemas podem ser resolvidos através dos softwares e objetos educacionais elaborados especialmente para esse fim.

## **5 As Mídias e a Matemática**

Quando pensamos na Matemática pelo seu caráter lógico e dedutivo, podemos perceber quão ligada essa ciência está com as mídias digitais, principalmente aos computadores. Os PCN's mencionam claramente esse fato, pois salientam a importância do ensino da matemática aliada ao uso das tecnologias. Aqui, os computadores desempenham um papel importantíssimo, tanto como ferramenta de trabalho como recurso didático, pois permite ao aluno testar suas hipóteses e construir reflexões através da interação com a máquina, possibilitando uma visão do todo, através da geração de gráficos, tabelas e expressões algébricas, levando a uma análise diferenciada do que poderia ser observado apenas numa folha de papel.

Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. (BRASIL, 2000, p.41)

Para tanto, existem hoje inúmeros *softwares* específicos que trabalham desde álgebra até geometria, todos com o intuito de levar o aluno à construção de conceitos matemáticos, proporcionando ao educando investigar, levantar hipóteses, testá-las e

aprimorar suas idéias iniciais, além de desenvolver seu raciocínio lógico e criatividade, auxiliando no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

...inovações didáticas resultantes da utilização do computador podem ser ilustradas por softwares destinados ao ensino da geometria, incorporando o recurso do movimento e da simulação na representação de conceitos. Essa é a novidade, uma vez que o movimento é um recurso mais próximo da flexibilidade da representação por imagens mentais, restritas ao cérebro humano. (PAIS, 2008, p.40-41)

Um fato importante que se deve ressaltar é a percepção que se tem, principalmente dentro do ambiente escolar, da crescente dificuldade apresentada pelos nossos alunos no que se refere a conhecimentos matemáticos. Muitos, mesmo conhecendo algumas definições ou conceitos, não conseguem aplicá-los na resolução de problemas, ou seja, não conseguem levar a matemática da sala de aula para algo concreto. Essas situações são ricas oportunidades para que os professores possam perceber a necessidade de mudanças no contexto pedagógico, inserindo aí as tecnologias digitais como mais um valioso recurso didático, buscando sempre valorizar os conhecimentos e diferentes formas de expressão dos estudantes, a fim de estabelecer um permanente diálogo com a prática educativa. No entanto, deve-se ter o cuidado para que, ao se escolher um *software*, seja feito todo um planejamento do processo, com objetivos claros no sentido de que a utilização da informática no ensino da matemática possa ser realmente um aliado para o aprendizado do educando, tornando-o mais dinâmico e eficaz.

O uso dessa diversidade é de fundamental importância para o aprendizado porque tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmeras, computadores e outros equipamentos não são só meios. Dominar seu manuseio é também um dos objetivos do próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráficos; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado. (BRASIL, 2000, p.53)

Sendo assim, torna-se necessário que a matemática faça uma constante relação com os avanços tecnológicos nas diferentes áreas do conhecimento. Sabendo que ela ajuda na estruturação do pensamento e no raciocínio lógico-dedutivo, deve ser uma ferramenta de auxílio na vida cotidiana, visando desenvolver nos estudantes interesses e habilidades para que possam se inserir no mercado de trabalho e na sociedade, como cidadãos críticos, com capacidade de argumentação, compreensão e decisão.

## 6 O Plano de Ensino

A proposta de trabalho foi apresentada a setenta e um alunos das turmas 301 e 302 da escola anteriormente identificada, iniciando no dia 25/08/2014 e com término em 29/08/2014. A atividade procurou abranger o conteúdo de geometria plana e analítica, mais especificamente localização de pontos no plano, equações de reta e circunferência e posições relativas entre duas retas; e a aplicação dos conceitos anteriormente estudados em sala de aula em algo real e que chamasse a atenção dos estudantes. Pensando nisso, foi desenvolvida uma atividade unindo matemática e mídias digitais, onde fez-se o uso do software GeoGebra para a construção das bandeiras de alguns países participantes da Copa do Mundo do Brasil de 2014. A atividade proposta foi dividida em duas grandes etapas: a primeira, onde os estudantes, usando lápis, régua e papel, marcam os pontos sobre o desenho impresso da bandeira e escrevem as equações das retas e/ou circunferências que compõem o desenho; e a segunda, onde eles fazem o uso exclusivo do *software* escolhido, transportando para este último as equações encontradas.

Cabe aqui ressaltar que os alunos já conhecem o *software* usado na atividade e que o mesmo encontra-se instalado em todos os *netbooks* usados para esse fim.

Primeira etapa da atividade (tempo programado: 2 horas-aula, de 50 minutos cada): Para dar início ao trabalho proposto, o conteúdo a ser trabalhado na atividade – equações de retas e circunferências, localização de pontos no plano cartesiano e posições relativas entre duas retas – já foi estudado em sala de aula, através dos seus conceitos, exercícios de fixação do conteúdo e situações problemas. Para a implementação da primeira parte do trabalho, os alunos devem se dividir em duplas ou trios (esse último somente quando não for possível a formação de duplas) para que seja realizado o sorteio das bandeiras entre as duplas formadas. Após esse primeiro momento, os mesmos devem pesquisar na internet a imagem da bandeira da dupla, imprimindo-a. Na sequência, devem colocar a bandeira num plano cartesiano e efetuar a localização de pontos sobre o desenho. Terminada a localização dos pontos devem descobrir as equações das retas e das circunferências que compõem esse desenho.

Segunda etapa da atividade (tempo programado: 2 horas-aula, de 50 minutos cada): Terminada a primeira parte da atividade, cada dupla, de posse do seu *netbook*, faz o lançamento no GeoGebra das equações encontradas no desenho da bandeira no plano cartesiano. Terminada essa etapa, eles devem marcar as intersecções das retas para traçar

os polígonos resultantes e colorir os mesmos, usando para isso as respectivas cores da bandeira original.

Ao final da atividade, eles salvam o arquivo com o nome da dupla e enviam por *e-mail* para o professor. Para o fechamento da atividade e posterior apresentação da mesma na Feira de Ciências e Ideias do Colégio, os alunos constroem um cartaz onde devem constar a imagem original e a réplica da bandeira da dupla, bem como todas as equações utilizadas para a realização do desenho.

A avaliação da atividade será feita de forma contínua, onde o aluno será observado individualmente durante todo seu trabalho em sala de aula. Serão avaliadas também a pontualidade na entrega, capricho e clareza do cartaz, coerência das equações utilizadas com o desenho originado, comprometimento e responsabilidade.

### **6.1 A Implementação do Plano de Ensino**

A atividade que foi desenvolvida com as duas turmas teve a seguinte distribuição:

- dia 25/08/2014: 1 período turma 301;
- dia 26/08/2014: 1 período turma 301 e 1 período turma 302;
- dia 28/08/2014: 1 período turma 302;
- dia 29/08/2014: 2 períodos turma 301 e 2 períodos turma 302.

De acordo com o que foi planejado, do dia 25 a 28/08/2014, os alunos fizeram a primeira etapa do trabalho. Na aula anterior ao início das atividades com cada turma, foi solicitado que as duplas fossem escolhidas e também foram apresentadas as orientações gerais de como seria todo o andamento da atividade, bem como o tempo disponível para a realização da mesma e os critérios de avaliação. Foi realizado um sorteio para distribuição das bandeiras para cada grupo, a qual eles deviam trazer impressa no início da atividade. Todos foram orientados para que em casa, realizassem o *download* do *software* em seus computadores, para relembrar o funcionamento do mesmo. Os alunos se mostraram bastante ansiosos para o começo das atividades, principalmente no que se refere ao uso do *software* GeoGebra.

De modo geral, a primeira parte da atividade não trouxe nenhuma dificuldade para os alunos. Primeiramente, colocaram a bandeira num plano cartesiano para marcar pontos e descobrir as equações das retas e/ou circunferências que compunham o desenho. Foram orientados para que colocassem o vértice esquerdo inferior da bandeira na origem do plano, a fim de facilitar a marcação dos pontos. Percebeu-se que a maioria dos alunos

marcou os pontos nos vértices das figuras que compunham o desenho das bandeiras. Após, para determinar as equações das retas usando essas marcações, fizeram o cálculo do determinante de uma matriz  $3 \times 3$ , cuja composição era a seguinte: na primeira coluna da matriz estavam as abscissas de dois pontos pertencentes à reta que queriam calcular a equação e a abscissa de um ponto genérico ( $x$ ); na segunda coluna estavam as respectivas ordenadas dos pontos e também a ordenada do ponto genérico ( $y$ ) e na terceira coluna, nas três linhas, o número 1(um). Nenhuma das duplas fez o cálculo das equações usando o coeficiente angular dos pontos encontrados. Acredita-se que esse fato se deve à otimização em encontrar a equação de uma reta através do determinante, pois se usarmos o coeficiente angular, é necessário uma maior quantidade de cálculos. Terminada essa parte da atividade, cada grupo determinou as equações necessárias para a implementação da bandeira no *software*, através de cálculos utilizando os conceitos de geometria analítica. Algumas duplas usaram aqui os conceitos de posições relativas entre duas retas no plano, pois perceberam que diversas retas eram paralelas. No entanto, eles não mencionaram o fato de também aparecer retas perpendiculares.

Ocorreram casos em que a quantidade de retas do desenho era bastante grande, então, a fim de facilitar a construção, ficou estabelecido que na bandeira do Brasil e dos Estados Unidos, por exemplo, devido à grande quantidade de estrelas, seriam implementadas em média 6 estrelas, para observar a construção.

Conforme o trabalho foi avançando, essa professora aluna circulava por entre os grupos, no intuito de observar, orientar e monitorar a atividade.

Foi possível observar nessa etapa uma participação ativa de todos os alunos, bem como discussões sobre o conteúdo e seus conceitos. Algumas duplas solicitaram a ajuda da professora porque a maioria dos pontos tinham coordenadas decimais, o que os deixou um pouco inseguros quanto aos cálculos que seriam realizados.

Essa primeira parte do trabalho, bem como as estratégias utilizadas pelos alunos para os cálculos das equações pode ser vista nas Figuras 1 e 2 a seguir.

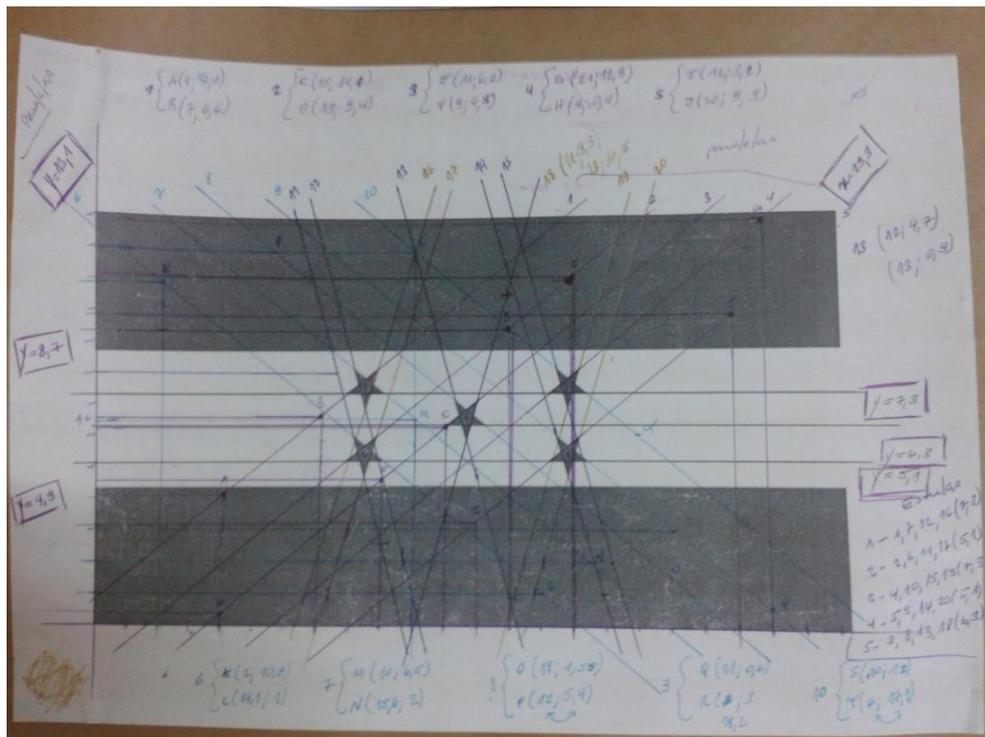


Figura 1: Cálculos feitos por uma dupla para traçar as retas que compõem a bandeira da Honduras.

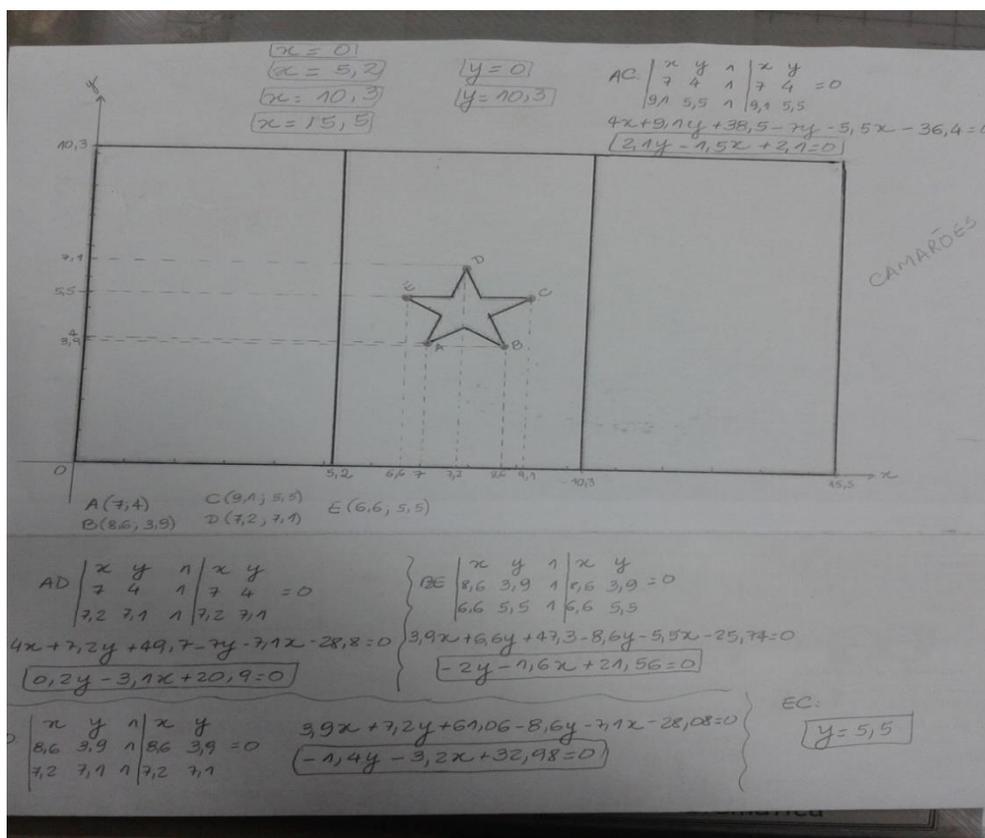
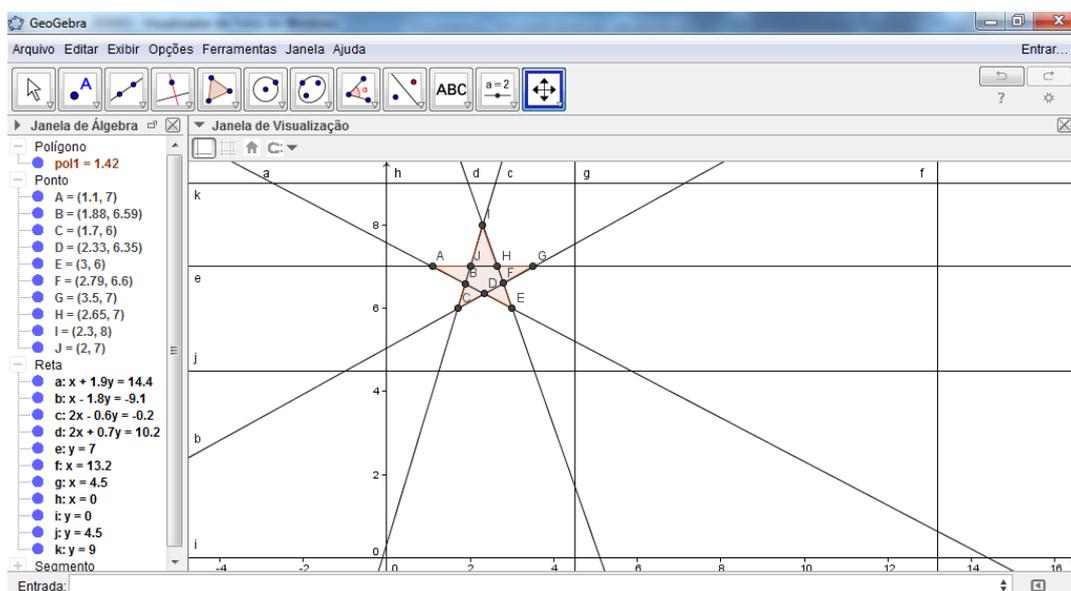


Figura 2: Cálculos feitos por uma dupla para traçar as retas que compõem a bandeira de Camarões.

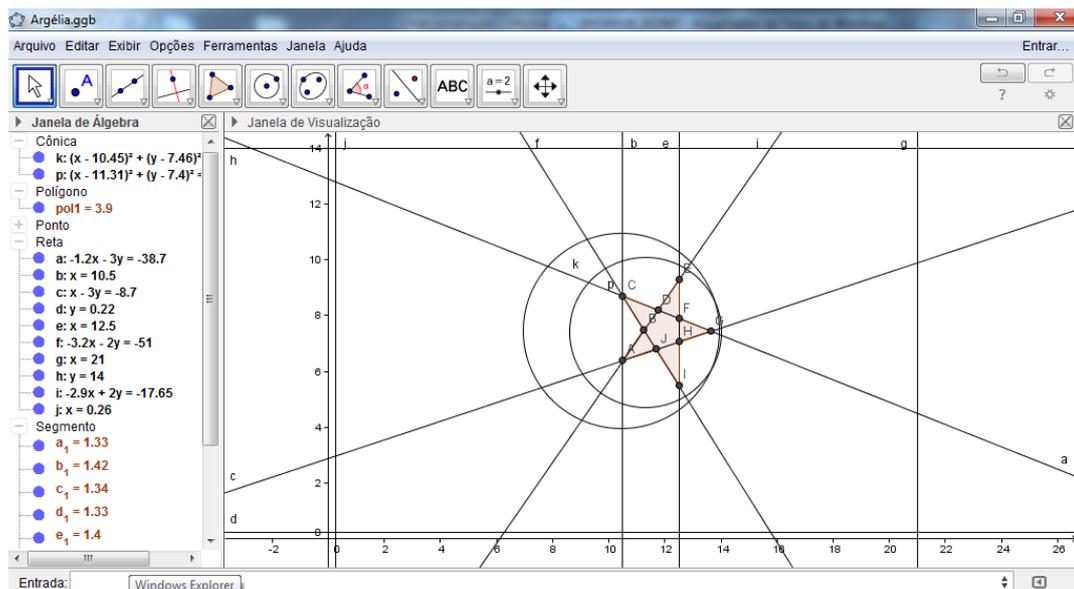
Ao observarmos as duas figuras, é possível notar que cada dupla realizou a atividade de modo diferente. Na Figura 1, para fazer o cálculo das equações de reta, a dupla optou por traçá-las no desenho, para então colocar os pontos; já na Figura 2, apenas os pontos foram colocados sobre os vértices da figura para que então fosse feito o traçado das equações.

No dia 29/08/2014 iniciou-se a segunda e última parte do trabalho. Cada grupo, em sala de aula, recebeu um *netbook* com o *software* GeoGebra instalado para a realização da atividade. Cada grupo – dupla ou trio – começou a lançar as equações encontradas na primeira etapa da atividade. Conforme o trabalho ia avançando, vários grupos solicitavam orientação para verificar se estava correto o que estavam fazendo, pois foram surgindo várias retas na tela, e esse fato, num primeiro momento, gerou certa dificuldade para que pudessem visualizar as figuras que estavam sendo construídas. Foram orientados então que fossem marcando as intersecções conforme aparecessem, para em seguida traçar o polígono correspondente com vértices nessas intersecções; e após, ocultassem as retas.

Em cada etapa da realização da atividade foi solicitado que as duplas dessem *print screen* na tela do *netbook* e que tal imagem fosse enviada por *e-mail* para a professora. As Figuras 3 e 4 ilustram as diferentes etapas das construções dos diferentes grupos.



**Figura 3:** Primeiros passos para a construção da bandeira do Chile.



**Figura 4:** Primeiros passos para a construção da bandeira da Argélia.

Conforme essa parte da atividade foi avançando, alguns alunos solicitaram ajuda, pois perceberam que alguns dos polígonos delimitados pelas retas traçadas não correspondiam fielmente aos originais. Foi solicitado que refizessem os cálculos e verificassem se os pontos marcados no desenho estavam com as coordenadas corretas, para que pudessem encontrar o erro.

Terminado o lançamento de todas as equações e a marcação das intersecções e dos polígonos descritos por essas intersecções, os grupos então começaram a colorir seus desenhos de acordo com os originais. Essa parte da atividade foi bastante tranquila, e as dúvidas que porventura surgiram foram todas relativas a diferenças entre o desenho original e a réplica do GeoGebra. As Figuras 5 a 8 mostram o andamento e o término da atividade realizada no *software*.

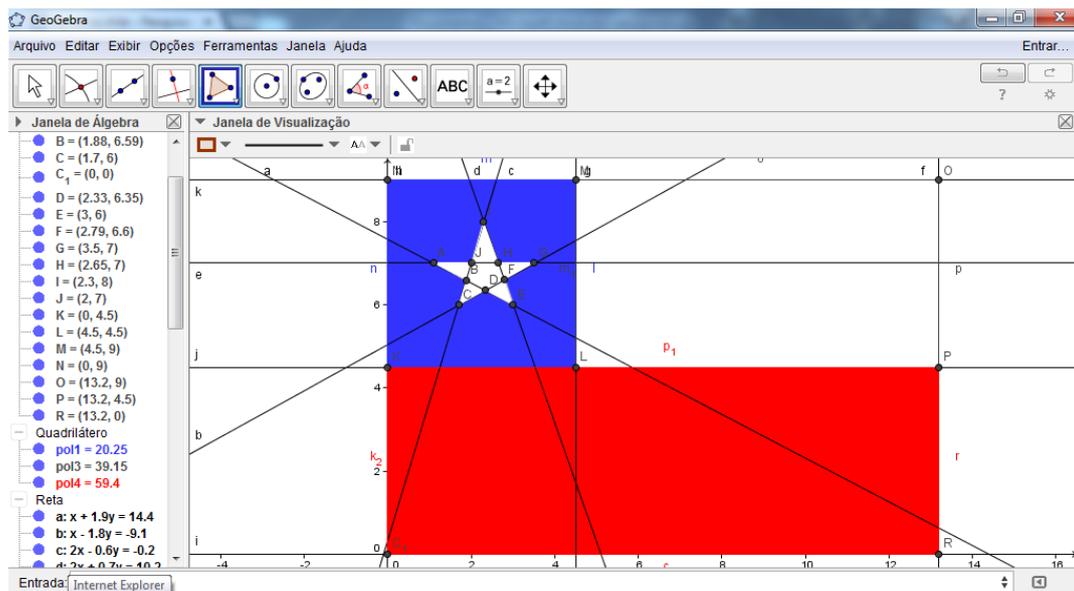


Figura 5: Construção da bandeira do Chile.

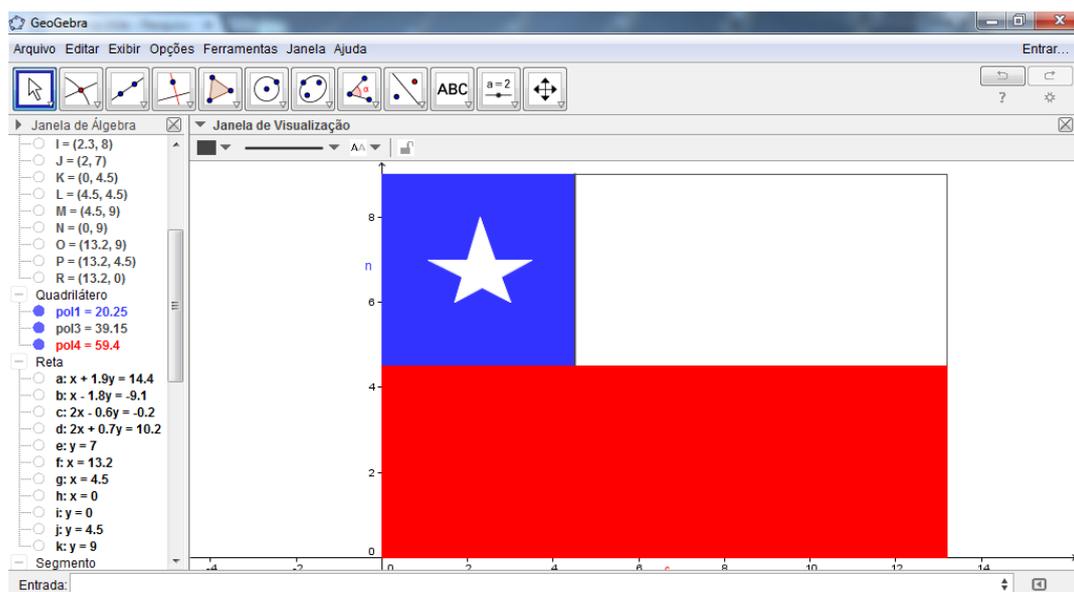
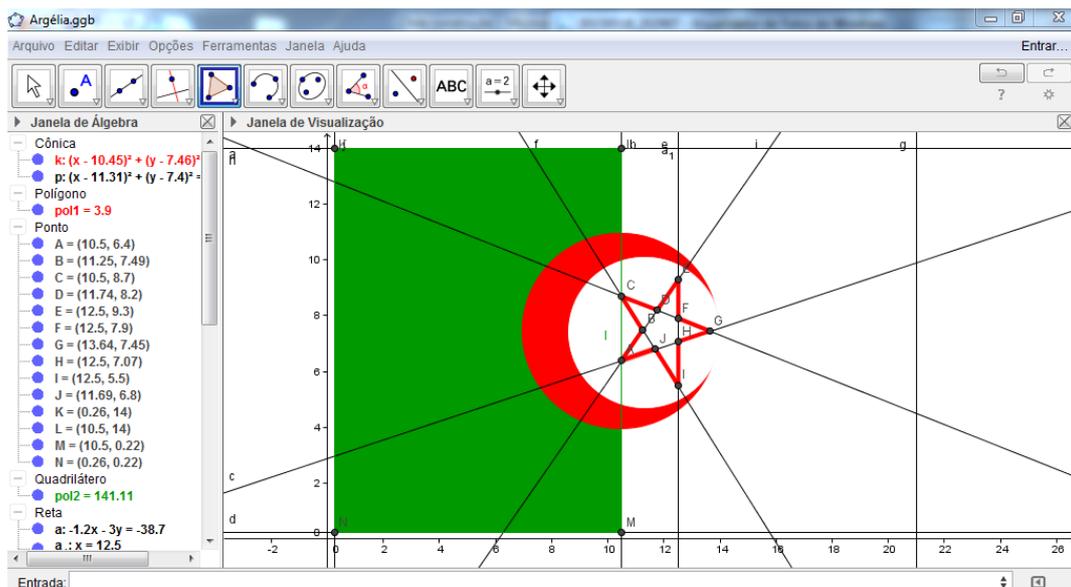
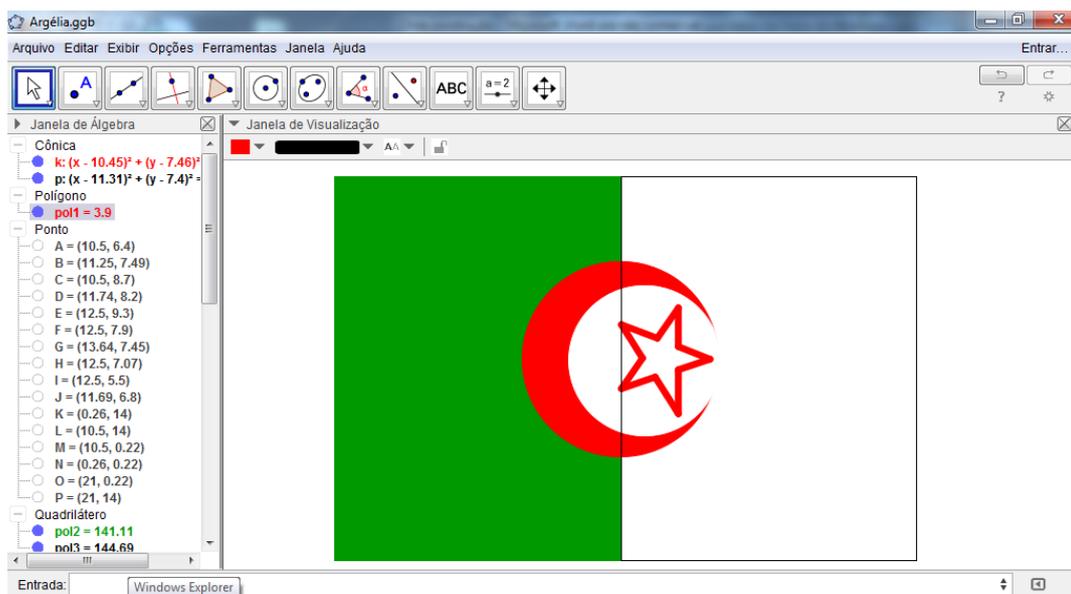


Figura 6: Término da construção da bandeira do Chile.



**Figura 7:** Construção da bandeira da Argélia.



**Figura 8:** Término da construção da bandeira da Argélia.

Conforme os grupos foram terminando essa etapa da atividade, eles salvaram o arquivo da dupla (ou trios) e enviaram por *e-mail* para a professora. As turmas foram orientadas para que se caso algum grupo porventura não conseguisse finalizar a atividade em sala de aula deveriam fazê-la em casa, se possível.

De acordo com o combinado com as turmas, eles iriam apresentar suas construções na Feira de Ciências e Ideias do Colégio. Para isso, deviam montar um cartaz, usando a criatividade do grupo, onde obrigatoriamente precisavam constar a imagem original e a réplica da bandeira da dupla, bem como todas as equações utilizadas para a

realização da construção. As Figuras 9 a 11 mostram alguns trabalhos prontos e apresentados na Feira.



**Figura 9:** Trabalho exposto na Feira de Ciências e Ideias – Bandeira da Austrália: original, construção e equações calculadas e inseridas no GeoGebra.



**Figura 10:** Trabalho exposto na Feira de Ciências e Ideias – Bandeira da Bósnia: original, construção e equações calculadas e inseridas no GeoGebra.



**Figura 11:** Trabalho exposto na Feira de Ciências e Ideias – Bandeira da Inglaterra: original, construção e equações calculadas e inseridas no GeoGebra.

## 6.2 Os Resultados

Alguns alunos solicitaram que fosse aberta uma exceção quanto à formação dos grupos, formando mais trios. Alegaram questões de disponibilidade, proximidade fora da escola e afinidade em sala de aula, o que foi prontamente atendido, por conhecer os mesmos e saber que sempre trabalham juntos dentro do espaço escolar.

Algumas bandeiras com muitos objetos ou objetos sobrepostos não ficaram totalmente fieis às originais. Isso pode ser observado, por exemplo, na Figura 6, onde a estrela da bandeira do Chile não corresponde à original; e na Figura 8, onde o grupo não conseguiu colorir o interior da estrela da bandeira da Argélia. No entanto, para montar o cartaz foi realizado um *print screen* da tela do GeoGebra com a réplica e posteriormente preencheram com cor a estrela.

Mesmo nos casos em que foi combinado com os grupos para não reproduzirem todos os objetos das bandeiras devido à grande quantidade, por exemplo, Brasil e Estados Unidos, os alunos se mostraram bastante entusiasmados com o trabalho e reproduziram uma quantidade bem maior da mínima solicitada.

A participação de todos os alunos foi bastante significativa. Em uma turma todos os grupos enviaram a atividade por *e-mail* e fizeram os cartazes. Na outra turma apenas duas duplas, num universo de 35 alunos, não concluíram a atividade.

## 7 Conclusões

A atividade que foi proposta aos alunos de duas turmas do terceiro ano do ensino médio politécnico teve como objetivo principal mostrar uma aplicabilidade das equações de retas e circunferências, através do uso do GeoGebra. Os conceitos usados para construir tal aplicação foram estudados anteriormente em sala de aula, e o *software* utilizado serviu para mostrar que é possível aliar matemática e mídias num ambiente onde ocorra um aprendizado real e significativo.

Analisando toda a atividade que foi desenvolvida, acredito que o tempo foi curto. Se tivéssemos mais dois períodos disponíveis para a atividade, o encerramento da mesma, com a execução dos cartazes teria sido totalmente feita em sala de aula. Mesmo assim, o trabalho foi bastante motivador, tanto para o grupo quanto para a professora. Durante todo o desenvolvimento da atividade, os alunos se mostraram bastante atentos, concentrados e entusiasmados com o trabalho. Relacionaram corretamente os conceitos estudados anteriormente de retas paralelas e perpendiculares, localização dos pontos no plano cartesiano e equações de retas e circunferências com as construções feitas no GeoGebra. Identificaram os coeficientes angulares e sua função na determinação da posição de uma reta; visualizaram os coeficientes lineares e perceberam ligações existentes entre a atividade e alguns exercícios propostos em sala de aula, o que mostra que os objetivos propostos foram alcançados e que o uso de uma mídia digital favoreceu o processo de visualização dos conceitos.

Sendo assim, conclui-se que a proposta aqui descrita possibilitou uma nova forma de aprendizagem, onde o uso de um *software* matemático transformou o ambiente da sala de aula num espaço de aprendizagem mais dinâmico e prazeroso.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática – ensino médio. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso em: 20/05/2015.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. Formação de professores do ensino médio, Etapa II - Caderno V: Matemática / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [autores: Ana Paula Jahn... et al.]. – Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2014. 49 p.

DANTE, Luiz Roberto. Geometria Analítica; ponto e reta. In: \_\_\_\_\_. **Matemática:** contexto e aplicações. 1º ed. São Paulo: Ática, 2010. cap. 3, p. 48-79.

FROTA, M. C. R.; BORGES, O. Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na Educação Matemática. **Anais da 27ª Reunião da ANPEd**. GT19: Educação Matemática. Minas Gerais: Caxambu. 21 a 24 de novembro, 2004. Disponível em: <http://27reuniao.anped.org.br/gt19/t199.pdf> Acesso em: 28/05/2015.

KALINKE, Marco Aurélio. **Para não ser um professor do século passado**. Curitiba: Gráfica Expoente, 1999. 148 p.

PAIS, Luiz Carlos. **Educação escolar e as tecnologias da informática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 40-41.