



EQUAÇÃO DA RETA: A MATEMÁTICA E O FANTÁSTICO MUNDO DAS ARTES

Elisete Maria Bonfada – elisetebonfada@hotmail.com – UFRGS - Pólo BP1

Larissa WeyhMonzon– larissamonzon@gmail.com – UFRGS

Resumo: Este trabalho apresenta o relato de uma prática de ensino articulada com uma investigação no ensino e aprendizagem da Equação da Reta. Com a ação pedagógica investigativa, realizada em sala de aula, buscamos analisar informações que possam contribuir com o processo de ensino e aprendizagem em relação ao conteúdo de equações matemáticas. As atividades foram aplicadas com alunos do 2º ano do Ensino Médio em um Colégio Estadual de Porto Alegre. A proposta de investigação se deu em seis encontros. A fundamentação teórica foi baseada nas Representações Semióticas de Duval – conversões de registros – e no uso de Tecnologias na Educação – mídias digitais na educação de Gravina e Notare. Para o desenvolvimento dessa sequência didática, fez-se uso do software GrafEq. Finalizamos com as considerações sobre os resultados obtidos com a aplicação da sequência didática proposta nesse trabalho. Evidenciamos o quanto o software dinâmico pode ser uma ferramenta que auxilia na superação das dificuldades de compreensão e reconhecimento dos objetos matemáticos representados.

Palavras-chave: Equação da reta; Registros de Representações Semióticas; Arte Matemática; GrafEq

1. Introdução

Neste trabalho a metodologia de trabalho que adotamos foi baseada na Engenharia Didática (Artigue,1996) para a elaboração, aplicação e validação da sequência didática proposta. Nesta abordagem propomos uma sequência de investigação apropriando-se do uso do software GrafEq embasada nos aportes da Teoria das Representações Semióticas de Duval¹(2003, 2009, 2011), pois acreditamos que os alunos compreendem melhor o conteúdo quando conseguem visualizar e modificar diferentes registros de um objeto matemático. A escolha do conteúdo equação de uma reta se deu pela importância do uso das equações e inequações no ensino da Matemática, ao elevado número de dificuldades de

¹Raymond Duval. Filósofo, psicólogo e professor emérito da Universitédu Littoral Cote d’Opale, França. Desenvolveu estudos em psicologia cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, na França.

interpretação de gráficos, principalmente na compreensão de conceitos de conversões de registros algébricos e geométricos por parte dos alunos e também pela dificuldade na abordagem prática nesse ensino. Além disso, segundo Gravina e Santarosa (1998) o recurso de múltiplas representações, analítica e geométrica, favorece a construção de relações entre operações algébricas na expressão da função e movimentos geométricos em gráficos e, a partir de uma função básica e de seu gráfico que o aluno passa a explorar a família de funções.

Organizamos as atividades de uma sequência didática na perspectiva da Engenharia Didática levando em consideração que, na prática usual o conteúdo matemático, as equações e inequações, são abordados isoladamente no ensino e aprendizagem, ou seja, cada equação é trabalhada de acordo com um conteúdo específico em uma série específica, geralmente de forma mecânica, sem mostrar aos alunos sua aplicabilidade. Esta sequência, integrando o uso do software GrafEq, aborda uma proposta de interação das equações e inequações matemáticas a fim de explorar o campo de conceitos algébricos fundamentais para o raciocínio generalizador na conversão de registros geométricos para algébrico e, vice versa. Conversões estas, necessárias para transformações e representações matemáticas em representações de diferentes figuras geométricas como quadrados, retângulos e triângulos, necessário para o uso em réplicas de obras de arte. As atividades foram aplicadas com alunos do 2º ano do Ensino Médio em um Colégio da rede Pública Estadual de Porto Alegre em outubro de 2014.

Diante de tais situações buscamos analisar as implicações e facilidades que o uso dos recursos digitais, como uma das possibilidades pedagógicas, podem oferecer no que tange as interpretações de conceitos matemáticos no ensino e aprendizagem, tanto aos docentes como aos educandos, fazendo uma discussão sobre a utilização das mídias digitais, em especial o software GrafEq, nas aulas de Matemática e qual o diferencial deste para as conversões e representações algébricas e geométricas de equações da reta, pois segundo Duval (2011), compreender a matemática é reconhecer os objetos matemáticos representados.

Porém, primeiramente, para entender melhor o ensino e aprendizagem na abordagem da Engenharia Didática buscamos analisar a influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem em matemática através de um breve estudo sobre a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval a fim de esclarecer o caminho percorrido pela semiótica.

Na seção 4 vamos analisar algumas colocações referentes aos princípios da Engenharia Didática (Artigue, 1996) voltada para práticas didáticas investigadoras como fonte de pesquisa usada na aplicação da sequência didática.

Finalizamos com a análise e algumas considerações sobre os resultados obtidos com a aplicação da sequência didática proposta nesse trabalho, sua contribuição e importância frente às representações semióticas de Duval evidenciando a importância do uso do software GrafEq como ferramenta de suporte na superação das dificuldades de compreensão e reconhecimento dos objetos matemáticos representados.

2. A Teoria dos Registros de Representações Semióticas

O desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Raymond Duval (2003, 2009, 2011), busca analisar a influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem em matemática. Segundo o autor (2009) os sujeitos, em fase de aprendizagem, confundem os objetos matemáticos com suas representações. Isto acontece porque eles só podem lidar com as representações semióticas para realizar uma atividade sobre os objetos matemáticos e acabam não reconhecendo o mesmo objeto, por meio de representações semióticas diferentes.

Em sua teoria, Duval explica que os registros de representações são maneiras típicas de representar um objeto matemático e o sistema no qual podemos representar um objeto matemático denomina-se sistema ou registro semiótico. Os registros semióticos são importantes não somente por se constituírem num sistema de comunicação, mas também por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado. Para melhor entender as palavras de Duval, no quadro a seguir (tabela 1) apresentamos, um exemplo com duas possíveis formas para representar o objeto matemático em estudo, destacando seu sistema semiótico e o seu registro de representação.

Tabela 1: Exemplo de representação Semiótica de Duval

Representação algébrica de uma Equação Algébrica Linear	Representação geométrica de uma Equação Algébrica Linear
Objeto matemático: Equação Linear Sistema Semiótico: Simbólico Representação: Algébrica	Objeto matemático: Equação Linear Sistema Semiótico: Figural Representação: Geométrica

O autor da teoria de registros destaca a importância dos registros de representação para a matemática dizendo que: “o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático” (DUVAL, 2003, p.13), ou seja, o desenvolvimento da própria matemática se deu em função dos registros usados para expressar as ideias construídas. As palavras de Duval nos apresentam a importância e a necessidade do uso das representações semióticas no processo de estudo dos objetos matemáticos, uma vez que todo pensamento matemático é expresso através de registros que devem ser explorados a fim de possibilitar a construção do conhecimento.

Resumindo, Duval (2009, p. 54) considera para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação semiótica, ele deve permitir três atividades cognitivas fundamentais, ligadas a semiosis: operações cognitivas de formação (a identificação do objeto matemático representado), tratamento (a operação cognitiva que vai compreender a transformação do registro de representação no interior do mesmo sistema semiótico de representação em que foi formado) e de conversão (transformação de um dado registro de representação, pertencente a um sistema semiótico em outro registro, pertencente a outro sistema semiótico).

São as representações, segundo a teoria de Duval, que quando convertidas umas nas outras conduzem ao aprendizado dos objetos estudados. Nesse sentido, podemos então dizer que, o estudo da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval perpassa pela verificação da construção gradativa do conhecimento mediante conversões estabelecidas entre as diversas formas de representações. Sendo assim, quanto mais diversificada é a representação de um objeto, maior é a compreensão que se tem a seu respeito, e a apropriação do seu significado se dá a partir de conversões estabelecidas entre as diversas maneiras de representá-lo.

3. Recurso digital como uma das possibilidades pedagógicas: o Software GrafEq

Vários são os esforços em pesquisas na área da Educação Matemática no que tange ao estudo referente a metodologias de ensino e aprendizagem. Dentre estas, encontram-se as possibilidades com inovações tecnológicas que podem auxiliar o professor e o aluno no ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula, porém estratégias para o raciocínio de cálculos, interpretações de gráficos e de figuras geométricas seguem sendo essenciais para o desenvolvimento do raciocínio matemático, neste, o estudo da Geometria, constitui-

se um contexto propício para o desenvolvimento do pensamento dos alunos no processo de aprendizagem. Eles precisam visualizar figuras, analisar relações entre seus elementos, identificar regularidades, fazer conjecturas sobre propriedades identificadas – ações que são características do pensamento matemático segundo Gravina e Santarosa (1998). Sendo assim, podemos potencializar o envolvimento dos alunos conciliando as práticas didáticas usuais com o uso de softwares que disponibilizam a manipulação de ferramentas que permitem a construção e interpretações de figuras geométricas a partir das suas propriedades. Nesta mesma linha de raciocínio, com as investigações de Meier (2011 p. 12-13), podemos dizer que a manipulação direta de objetos construídos, que são colocados em movimento na tela do computador, faz com que os alunos observem os resultados obtidos, primeiramente de forma empírica, mas depois buscando explicar as regularidades que vão se tornando cada vez mais evidentes.

Não é nossa pretensão apontar uma, ou outra metodologia como um modelo essencial, pré-elaborado ou pronto, pois sabemos da essência e valia de cada nova proposta e seu valor de contribuição no processo de ensino aprendizagem. Pretendemos sim, analisar a prática em sala de aula e suas contribuições para a formação de conceitos na tomada de decisões frente a uma problematização considerando a importância dada às conversões dos registros de representações de um objeto matemático.

A utilização de tecnologias, especialmente de softwares gratuitos de matemática, faculta uma contribuição, tanto para os professores no desenvolvimento de suas aulas, quanto para os estudantes na atribuição de significados matemáticos. Visando aulas interativas entre conteúdos e disciplinas optamos pelo uso do software GrafEq pois este permite diferentes transformações sobre as manipulações algébricas que necessitam da resolução, interpretação e representações de equações. O GrafEq é um programa para gerar gráficos de equações e inequações e através destas representar figuras planas. O uso do software envolve conhecimentos sobre Geometria plana, Geometria analítica e os mais variados cálculos matemáticos. É possível desenhar desde simples retas e círculos a desenhos mais complexos que requerem um conhecimento matemático mais avançado.

Porém, o uso de mídias na prática em sala de aula vem acontecendo de forma lenta, segundo Gravina e Notare(2013) grande parte dos professores fez sua formação antes da ampla divulgação dos recursos didáticos digitais sendo que preferem ficar afastados de tais práticas. Sendo este cenário, as autoras consideram que programas de formação continuada são de grande importância na aceleração da integração das mídias digitais no dia-a-dia do

professor de Matemática, pois, saber usar os artefatos de mídias disponíveis para a generalização de conhecimentos é hoje, uma demanda social. O professor, no papel de mediador, deve ter sempre o cuidado de pontuar sua utilidade em cada situação. O importante é levantar as ideias relevantes sobre como resolver a questão proposta e quais são as atividades que incluem desafios, que questionem e ampliem o conhecimento do aluno, que façam com que o aluno desenvolva a capacidade de relacionar e formatar conceitos. É relevante uma reflexão acerca do modo de como podemos utilizar exercícios de matemática usufruindo das ferramentas de mídias digitais, fazendo com que o aluno esteja voltado ao pensar e formular conceitos, chegando assim, em um determinado saber. Pensando nisso o primeiro ponto de partida seria pensarmos em uma prática de elaboração do conteúdo a ser abordado. Entra então, a questão da “problematização”, a relação teoria e prática ausente no fazer pedagógico na sala de aula (Scheibel, 2009), e também no que tange ao estilo de abordar os conteúdos matemáticos (Allevato, 2007).

[...] será que trabalhamos na premissa da descoberta, do desenvolvimento pela busca, pelo ensino que ensina a pensar, a problematizar ou ainda trabalhamos no enfoque do desenvolver e aprender conteúdos curriculares, programáticos? Às vezes, as novas metodologias são utilizadas para mascarar o ensino tradicional: vamos repensar estas questões de forma prática e teórica. (SCHEIBEL, 2009. P.23)

Sendo assim, considerando a realidade de nossos alunos, a aplicação da sequência de investigação que propomos em sala de aula, articulada com a exploração de representações semióticas no software GrafEq, é uma das sugestões de recurso digital. Conforme Scheibel, (2009, p.21) “o “como ensinar” relaciona-se à concepção do ensino do professor, que deve levar em consideração a realidade e as necessidades de seus alunos”.

4. Engenharia Didática: análise de estratégias didáticas em sala de aula

Não é de hoje que o assunto sobre métodos e estratégias didáticas em sala de aula está sendo discutido e polemizado em vários campos de estudos e pesquisas, principalmente, em se tratando do ensino- aprendizagem na área da matemática. Um dos grandes desafios dos estudos de pesquisa está voltado na direção em que é fundamental mostrar ao aluno o caminho para criar estratégias, pensar e interpretar, para isto, utilizando técnicas partindo da experiência do aluno, de resolução de situações problemas com possibilidades da apropriação do uso de mídias, com aulas atrativas que aguçam as ideias para formalização do conhecimento. Em se tratando da Teoria da Engenharia Didática vários esforços podem ser percebidos na construção de sequências didáticas e materiais didáticos em ambientes

específicos, computacionais ou não, visando seja o estudo de sua aplicabilidade como o diagnóstico de concepções, dificuldades, obstáculos, níveis de desenvolvimento do raciocínio envolvido, entre outros.

Atualmente pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem destacam a importância das atividades investigativas e a resolução de problemas, como forma pedagógica a fim de desenvolver no aluno o pensamento matemático. Este tipo de atividade pode ser um incentivo à curiosidade, ao interesse e à persistência dos alunos. Os experimentos investigativos são uma das estratégias sugeridas para permitir participação mais ativa dos alunos no processo de investigação. Segundo Ponte (2004) a investigação, no contexto de ensino, significa trabalhar buscando respostas para questões que, de início, podem ser difíceis e até mesmo pouco claras. São questões sobre as quais produzimos respostas que são conjecturas, e então as testamos, buscamos provas até validá-las, de modo fundamentado e organizado. Nesse contexto, Meier (2011, p. 17) considera que o conhecimento não é algo pronto e o professor não possui um roteiro de aprendizagem a ser seguido. Investigar pode levar o aluno a caminhos matemáticos inesperados e não planejados, e isto enriquece o processo de aprendizagem.

O estudo em Ensino de Matemática, baseado na teoria da Engenharia Didática, Artigue (1996), está voltado para as práticas didáticas investigadoras como fonte de pesquisa a fim de reconstruir e renovar o ensino espécie de roteiro para reflexões sobre a ação, na ação e após ação, ampliando caminhos para a produção científica dentro das Resoluções cobradas pelo MEC/CNE. Portanto, entendemos que a Teoria da Engenharia parte do princípio da experiência em sala de aula como prática de investigação deslocada de fundamentação científica valorizando o saber prático do professor sendo, portanto teorias desenvolvidas fora de sala de aula insuficientes para promover mudanças nas tradições de ensino. É a prática de ensino articulada com prática de investigação. Segundo Borba (2005) investigar é procurar conhecer tudo o que não se sabe. Para os matemáticos é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos procurando identificar as respectivas propriedades.

As atividades experimentais investigativas, portanto, podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades cognitivas desde que sejam planejadas e executadas de forma a privilegiar a participação do aluno e se, conduzidas de maneira a favorecer o pensamento lógico, o processo do ensino e aprendizagem poderá alcançar resultados satisfatórios quanto ao desenvolvimento dessas habilidades.

5. A Engenharia Didática: a análise prévia

5.1. Dimensão Epistemológica

Na história da Matemática temos diversas contribuições para o desenvolvimento das equações. As grandes áreas em que a Matemática tradicionalmente se divide tiveram origem, na sua maioria, em problemas envolvendo equações dos tipos mais variados. Dos primórdios de nossa história até os dias de hoje foram grandes as descobertas científicas, como o teorema de Pitágoras e a lei do movimento de Newton entre outras tantas. Sem elas, não haveria coisas relativamente simples, como pontes e edifícios, nem outras complexas, como os foguetes espaciais e a nanotecnologia. O que conhecemos hoje sobre a matemática são resultados do esforço humano em conhecer e entender melhor a vida e a natureza. Mais do que simples ferramentas, elas têm o poder de condensar gerações e gerações de pesquisa e sintetizar novas concepções de mundo. Acompanhar a trajetória das grandes descobertas é também se deparar com a trajetória de seus pesquisadores, suas tentativas, embates, dúvidas, frustrações e alegrias, grandes nomes como Pitágoras, Newton, Euler, Maxwell, Einstein, Viéte, Heisenberg e muitos outros. Inspirada em leituras que retratam estas descobertas apresentamos um apanhado geral da evolução histórica das equações matemáticas no decorrer dos séculos, pois saber um pouco da história nos leva a questionar sobre a relevante importância de uma equação matemática.

Resolver uma equação é a maneira de solucionar situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade, encontrar todos os valores possíveis para uma incógnita, determinando assim, valores desconhecidos manipulados algebricamente. Embora o termo equação seja relativamente recente na língua matemática - provável surgimento no séc. XVII - o conceito, ao longo dos tempos, vem sendo usado nos mais variados problemas propostos. As inúmeras aplicações estão presentes em praticamente todos os estudos relacionados ao desenvolvimento humano, como na Engenharia, Arquitetura, Contabilidade, Economia, Administração, Física, Biologia, Urbanismo, Transporte, Informática entre outros.

A contribuição significativa de vários povos, desde o período de 3000 a.C. até o presente, como os Egípcios, Babilônicos, Gregos, Chineses, Hindus e Árabes, foram fundamentais ao aprimoramento e entendimento à Matemática. As primeiras notícias sobre equações constam no papiro Rhind, um dos documentos egípcios mais antigos que tratam de matemática, escrito há mais ou menos 4000 anos. Na época, os egípcios não utilizavam

a notação algébrica, os métodos para a solução de uma equação eram complexos e cansativos. Mas foram os árabes que, cultivando a Matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. Para representar o valor desconhecido em uma situação matemática, ou seja, em uma equação, os árabes chamavam o valor desconhecido em uma situação matemática de “coisa”. Em árabe, a palavra “coisa” era pronunciada como xay que deu origem ao x. Hoje, na língua portuguesa, conhecemos como a expressão: “o x da questão”. Matematicamente, dizemos que esse x é o valor desconhecido que desejamos descobrir.

As equações ganharam importância a partir do momento em que passaram a ser escritas com símbolos matemáticos e letras. Graças a Viéte que os objetos de estudo da Matemática deixa de somente problemas numéricos e passa a englobar expressões algébricas. “Matemática não é apenas números e sim envolve letras e toda capacidade que o humano conseguir expressar” escreveu François Viéte.

Apaixonado por álgebra, François Viéte um advogado francês (1540-1603), foi responsável pela introdução da primeira notação algébrica sistematizada, além de contribuir para a teoria das equações. Apesar de ser mais conhecido como matemático foi também, um dos melhores especialistas em cifras de todos os tempos durante a guerra na França em defesa do Catolicismo Romano e dos huguenotes franceses – Séc. XVI. Viéte ajudou seu país a proteger-se da Espanha decifrando um complicado código secreto, composto por mais de 500 caracteres, usado por este Império. Ficou conhecido como o Pai da Álgebra por ser o principal responsável pela introdução dos símbolos no mundo da matemática. Foi ele quem, realizando numerosas simplificações na resolução das equações, abriu caminho para os trabalhos de Descartes, Newton, entre outros. Seu livro "Isagoge in artemanalyticum" (Tours, 1591) é a obra mais antiga sobre a álgebra simbólica. Foi acrescentado um primeiro apêndice, "Logisticesspeciosa", no qual tratou da adição, multiplicação, e mostrou como elevar um binômio até á sexta potência. No segundo apêndice, "Zetetica", explicou a resolução das equações. Em outras obras tratou da teoria das equações e da resolução de várias equações numéricas. Além de Viéte, outros matemáticos da mesma época deram suas contribuições para o aperfeiçoamento da álgebra. Entre eles, Robert Record, inglês que criou o símbolo (=) para a expressão (igual a). Esse sinal foi usado por Thomas Harriot, outro matemático inglês, responsável pela eliminação das poucas palavras que ainda restavam na álgebra de Viéte. A ideia de Viéte foi simples, mas muito importante, porém, ele só sugeriu ideias, não pôs em prática, pois seus livros

pouco continham símbolos, apenas palavras. A passagem para uma álgebra completamente simbólica foi obra de René Descartes, grande matemático e filósofo francês, que aperfeiçoou a álgebra de Viète introduzindo símbolos para algumas operações e utilizando letras para representar incógnitas. A partir desse momento, as equações começaram a ser interpretadas como as entendemos atualmente: equação, o idioma da álgebra.

Portanto, hoje, devido à evolução dos estudos das equações, podemos utilizar outras variáveis, letras, para representar o valor desconhecido, ou seja, o que se quer descobrir em uma equação. Chamamos o termo desconhecido de incógnita, “coisa desconhecida”. Temos, então, a linguagem exata para representar qualquer situação ou problema, basta traduzi-los para o idioma da Álgebra: a equação.

5.2. Dimensão Didática

As equações, sejam que tipo for, é um tópico que deve ser considerado relevante no estudo, pois é um assunto central e de grande importância dentro da Matemática e das suas aplicações. Inúmeros problemas e processos da Ciência e da Tecnologia, e mesmo da nossa vida cotidiana, podem ser descritos ou modelados por meio de equações. Tudo isto faz com que o estudo das equações deva ocupar um lugar de relevo no "currículo" da Matemática. Esta importância nos faz refletir sobre a questão curricular dos conteúdos de matemática e a abordagem didática dos diferentes tipos de equações em sala de aula. Sendo assim, analisamos a abordagem do tema Equações, primeiramente, em alguns livros didáticos do Ensino Médio, obras distribuídas pelo MEC – PNLD para as escolas públicas, coleções aprovadas em 2014 para vigência nos próximos três anos. Após conversa com colegas da área da matemática, foi discutido sobre a didática em sala de aula em relação à abordagem do conteúdo de equações, o uso de recursos tecnológicos e o uso dos livros didáticos.

Segundo o Plano Nacional do Livro Didático – PNLD - o livro didático deve ser adequado ao projeto político-pedagógico da escola; ao aluno e professor; e à realidade sociocultural das instituições. O que nos chamou atenção foi o número reduzido de obras aprovadas pelo MEC na área da Matemática. Na tabela publicada pelo MEC em 2014 foram analisadas vinte obras, das quais, somente seis foram aprovadas. Não cabe, neste momento, a análise do baixo número de aprovações, mas é uma questão importante a ser investigada com maior teor. Sabe-se que para 2015, as coleções diferenciam-se em dois tipos de composição, sendo apresentadas como Tipo 1: Obra Multimídia composta de

livros digitais e livros impressos e Tipo 2: Obra Impressa composta de livros impressos e PDF. Para o Ensino Médio as coleções de matemática apresentam-se em três volumes.

Em análise, os livros didáticos aprovados em 2014 para adoção durante os próximos três anos, seguem um padrão em termos de distribuição dos conteúdos programáticos, praticamente o mesmo que vem sendo proposto há bastante tempo no ensino médio. A sequência dos conteúdos é clássica, os tradicionalmente propostos para a formação matemática no ensino médio. Os autores seguem um padrão dentro das normas exigidas pelo MEC - PNLD, ou seja, a sequência de conteúdos divididos por ano, ou volume conforme classificado pelos autores das obras. A distribuição dos campos matemáticos segue a tradição de concentrar o estudo de funções no primeiro ano, o de geometria no segundo e o de geometria analítica no terceiro. Importante destacar que tais conteúdos são, no geral, importantes, porém demandam uma atualização, com retirada ou redução de alguns tópicos e inclusão de outros.

Para efeito da avaliação do PNLD 2015 os conteúdos matemáticos foram agrupados nos seguintes campos: números; funções; equações algébricas; geometria analítica; geometria; estatística e probabilidade. No interesse em questão, destacamos tópico das equações algébricas, estas estão reunidas nos tópicos: polinômios e equações polinomiais; matrizes; determinantes; e sistemas lineares. De início já podemos perceber a nítida individualização de conteúdos, pois em minha opinião, esta fragmentação dificulta as diversas articulações entre os diferentes tipos de equações nos mais variados conteúdos.

Para que o leitor possa ter uma ideia, em termos de comparação entre as diversas obras analisadas, destaco a obra de Luiz Roberto Dante, Matemática: contexto & aplicações, obra conhecida e em destaque em algumas escolas. Nesta há excesso de conteúdo matemático proposto e, segundo PNLD, os conteúdos são apresentados de maneira clara e contextualizada, porém, a quantidade de conceitos abordados e de atividades propostas é excessiva. Nesta obra o autor propõe a escolha de eliminar ou optar por alguns tópicos, acreditamos que, devido a este excesso.

É elogiável o tratamento integrado dos sinais das funções afim e quadrática com as inequações correspondentes. Entretanto, por vezes, na escolha do conceito matemático para abordar um fenômeno, não se discute o caráter aproximado do modelo abstrato adotado. O estudo da geometria analítica inicia-se por uma abordagem histórica e salienta-se que o campo representa uma importante conexão entre a geometria e a álgebra. Os conteúdos trabalhados no primeiro volume são retomados adequadamente, mas apenas no livro do terceiro ano. Na apresentação dos conteúdos desse campo são efetuadas conexões com álgebra, funções e geometria plana, e o trabalho é concentrado nos estudos de reta, circunferência e cônicas, o que é positivo. Contudo, a discussão para a obtenção das equações da

parábola, elipse e hipérbole é por demais extensos para essa etapa do ensino. (Guia de livros didáticos PNLD 2015)

Em outras obras analisadas o campo das funções recebe atenção demasiada, enquanto as equações algébricas estão praticamente ausentes. Neste contexto, de um modo geral, podemos ter a ideia de que no campo das equações algébricas, a articulação entre o conhecimento novo e o já abordado não ocorre de forma explícita. As diferentes equações são tratadas isoladamente em um determinado tópico do conteúdo. Na prática diária é sabido que as equações algébricas do 1º grau e do 2º grau, que são temas do ensino fundamental, têm sido retomadas e aprofundadas no livro do primeiro ano do ensino médio, mas nem sempre com a devida atenção, ou seja, estas se articulam de modo natural com as funções afim e quadrática. Aqui, seria interessante, o professor, em sua didática, dar maior ênfase em tais tópicos, pois são importantes pelas suas aplicações ao longo dos três anos e em outros conteúdos matemáticos como também em vários assuntos de outros componentes curriculares. Também nesse momento, importante o professor explorar os recursos aos gráficos cartesianos que permitem importantes conexões entre objetos matemáticos distintos e inter-relacionados: função, equação e figura geométrica. É indispensável que o aluno compreenda, por exemplo, que a parábola que ele encontra na geometria analítica não é um objeto matemático distinto do gráfico de uma função quadrática.

Desde o primeiro ano do Ensino Médio, outra ferramenta matemática que é útil em diversos componentes curriculares são os sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas. Seu estudo pode ser feito com simplicidade nessa etapa e em conexão com as posições relativas de um par de retas no plano cartesiano. Concomitante com o estudo dos sistemas de equações lineares está o estudo das matrizes que, geralmente, é feito no 2º ano do Ensino Médio. No entanto perde-se a oportunidade de uma contextualização significativa que pode ser estabelecida quando os sistemas lineares são trabalhados antes das matrizes. É comum, na prática didática em sala de aula, usar tais matrizes como ferramenta fundamental na resolução desses sistemas.

Por outro lado, a geometria analítica, desde suas origens, é um campo privilegiado para as conexões entre a álgebra e a geometria. É sabido que a escolha de um sistema de coordenadas permite que se estabeleça uma estreita relação entre, de um lado, figuras geométricas e, do outro, equações (ou inequações) envolvendo as coordenadas dos pontos. Na geometria analítica, tanto se resolvem problemas geométricos recorrendo a métodos

algébricos, quanto se atribui significado geométrico a fatos algébricos. No entanto, no ensino médio, a geometria analítica no plano é trabalhada somente no 3º ano, ocasião em que se devem estudar reta, circunferência e cônicas no plano cartesiano. Um aspecto que tem sido alvo de crítica, mas que tem persistido na geometria analítica trabalhada no ensino médio, é a fragmentação dos conceitos. Por exemplo, no estudo da reta, vários tipos de equação - geral, reduzida, segmentária, paramétrica, entre outras - são apresentados isoladamente e com igual destaque, prejudicando-se, assim, uma abordagem mais integrada dessas equações. O estudo da circunferência e das cônicas não foge ao padrão de segmentação observado no estudo da reta.

Embora estimular a produção de mídias nas escolas seja um dos eixos levados em consideração na avaliação do PNLD - 2014 poucas obras tratam da aplicabilidade utilizando-se de mídias digitais. Em casos isolados, há incentivo ao uso de materiais concretos diversificados e de recursos tecnológicos com vistas a facilitar os cálculos ou contribuir para a aprendizagem, embora, na maioria dos casos, não seja explorado todo o potencial pedagógico desses recursos. O diferencial está em algumas obras que sugerem, embora superficialmente, o uso Softwares livre em várias atividades, por intermédio de situações interessantes e instigantes. O uso da calculadora e do computador é incentivado. No entanto, deve se ter o cuidado porque algumas obras apenas encontram-se orientações sobre como utilizar essa ferramenta. Em geral, a calculadora é recomendada somente para facilitar os cálculos e o computador para pesquisas na internet.

Finalmente destacamos uma breve troca de ideias com colegas professores da área da Matemática na escola em que atuo. Embora escolha-se um livro para cada ano, os professores afirmam não usá-lo em sala de aula com os alunos, usam apenas para retirar alguns exercícios ou algum conceito referente a um determinado conteúdo. Nenhum professor “adota” o livro ou segue rigorosamente a sequência dos conteúdos neles contido. Quanto ao uso de mídias, no colégio em que atuo, nenhum professor trabalha com estes recursos, os métodos de ensino-aprendizagem são tradicionais.

Portanto, na visão destas análises, no Ensino Médio, a abordagem das equações predominante é muita técnica e fragmentada. Devemos levar em consideração que o padrão observado nas obras aprovadas em 2014 merece atenção especial do professor no planejamento anual do trabalho didático. Isso porque o referido padrão dificulta o estabelecimento de conexões entre os conteúdos matemáticos e poderá, ao longo dos anos, prejudicar a inter-relação entre eles. Na prática diária, nós professores podemos considerar

a importância das conexões entre os mais variados tipos de equações fazendo uma inter-relação entre os conteúdos trabalhados no Ensino Médio. Há muito que se pensar em termos didáticos, a fim de tornar o ensino-aprendizagem mais integrado e ao mesmo tempo atrativo para nossos alunos. Sugere-se, ao professor, que as aulas sejam planejadas de modo a permitir que o aluno seja mais participativo, tendo possibilidade de experimentar e buscar formas de trabalhar as atividades explorando o potencial dos recursos tecnológicos com temas instigantes e atuais.

5.3. Dimensão Cognitiva:

Neste trabalho pretende-se investigar as habilidades cognitivas manifestadas por alunos do 2º ano do Ensino Médio referente ao tema deste trabalho na área da Matemática, as equações algébricas. Pretende-se analisar, na perspectiva da Engenharia Didática, quais fatores interferem no ensino e aprendizagem no estudo e na aplicação das equações para estes alunos. Para tanto, estamos cientes de que, segundo Duval (2011), é preciso ter consciência dos processos cognitivos específicos que requer o pensamento matemático e desenvolvê-los com os alunos, mesmo que, fazendo isso, nós professores teremos a impressão de que, momentaneamente, não estamos fazendo matemática.

Métodos pedagógicos visando à experimentação no ensino e aprendizagem em matemática vem sendo investigados exaustivamente nos últimos anos. Existe uma gama de artigos e livros defendendo a experimentação no ensino nas mais diversas áreas do conhecimento. Neste sentido, analisando dificuldades dos alunos, segundo Gravina e Notare (2013) acordamos que:

[...] na aprendizagem da Matemática, é nas conversões, muito mais do que nos tratamentos, que se encontram as maiores dificuldades dos alunos. Um clássico exemplo de dificuldade é quanto à conversão do registro gráfico de reta dada no plano cartesiano para o registro algébrico, e vice-versa, sendo que a maior dificuldade está na conversão da geometria para a álgebra (GRAVINA; NOTARE, 2013).

Quanto à conversão de registros, a Matemática, em particular, exige constante mobilização de objetos abstratos como números, funções, gráficos, entre outros, ao qual o aluno necessita de uma atividade de produção semiótica para o entendimento desses objetos, ou seja, deve recorrer a sua representação. Nesta visão Duval defende que:

Não pode haver compreensão matemática, sem se distinguir um objeto de sua representação, pois jamais se devem confundir objetos matemáticos (números, funções, retas) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, desenhos das figuras) que parecem apenas ser o meio, de que o indivíduo dispõe, para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para

se tornarem visíveis ou acessíveis a outros, pois em matemática, as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática (DUVAL, 2003, p. 15).

Nas atividades matemáticas podemos representar um objeto utilizando vários registros de representação e, segundo a teoria de Duval, é a conversão das várias representações manifestadas sobre um objeto de estudo que possibilita a construção do conhecimento. Na realidade entendemos que, a possibilidade de mudança de registro se constitui uma condição necessária ao processo de aprendizagem, pois segundo Duval (2003) “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação” (DUVAL, 2003, p.14).

As palavras de Duval evidenciam a importância e a necessidade do uso das representações semióticas no processo de estudo dos objetos matemáticos, uma vez que todo pensamento matemático é expresso através de registros que devem ser explorados a fim de possibilitar a construção do conhecimento.

Sendo assim, através de uma Sequência Didática, relatamos neste trabalho de prática investigativa, os registros em relação à dimensão cognitiva dos alunos na aprendizagem propondo mostrar a importância e a funcionalidade dos registros de representação semiótica, de Duval, no processo de ensino e aprendizagem em Matemática na perspectiva da Engenharia Didática de Artigue, em que os alunos têm a oportunidade de discutir, questionar suas hipóteses e ideias iniciais, confirmá-las ou refutá-las, coletar e analisar dados para encontrar possíveis soluções.

6. Plano de Ensino: a sequência didática

O plano de ensino é um projeto de pesquisa do ensino e aprendizagem da matemática que investiga a experiência da prática em sala de aula através de técnicas inovadoras, analisa e descreve a proposta de ensino e aprendizagem de Equações das Retas. O propósito desse estudo é divulgar informações que possam contribuir com o processo de ensino e aprendizagem dessa parte da matemática. A partir de um olhar, por meio da Engenharia Didática buscamos contemplar o objetivo principal que é analisar uma nova proposta no ensino aprendizagem de Equações focadas no Ensino de Equações das Retas interagindo com a área das artes através de representações geométricas.

Perante práticas, no dia a dia, observamos que fica evidente a necessidade de se investir na proposição de metodologias e estratégias didáticas capazes de proporcionar o desenvolvimento cognitivo do aluno, ou seja, buscar uma maneira diferente de se ensinar matemática, uma forma que realmente dê significado ao conteúdo. Quais seriam as dificuldades de colocar em prática outra forma de se ensinar os conteúdos programáticos da matemática? Serão as formas tradicionais, as maiores dificuldades de ensinar, que engessam os professores bloqueando o pensamento inovador?

Sendo assim, nos apoiados na teoria de Duval que destaca a importância dos registros de representação para a matemática dizendo que: “o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático” (DUVAL, 2003, p.13), ou seja, o desenvolvimento da própria matemática se deu em função dos registros usados para expressar as ideias construídas.

Pensando neste sentido elaboramos um plano de Ensino, uma sequência didática: “A matemática e o fantástico mundo das artes”. Trata do estudo da Equação da Reta na abordagem da Engenharia Didática – Artigue (1996). As atividades foram estruturadas em quatro partes. A experiência didática foi realizada, na semana de 21 de outubro de 2014 a 31 de outubro de 2014, com uma turma do 2º ano do Colégio Estadual. Na didática exploramos o uso de mídias: o vídeo com o intuito de abordar o tema interagindo com outras áreas da aprendizagem e, no desenvolvimento das atividades, o uso do Software GrafEq para explorar conceitos e construções de figuras geométricas, representações algébricas e gráficas.

Neste sentido, a seguir apresentamos a análise do relato da experiência de investigação realizado em sala de aula e em ambiente informatizado.

6.1. Desenvolvimento das Atividades e Análise dos resultados

Com a aplicação da proposta apresentada, recorreremos ao preenchimento do roteiro de aula, aos arquivos encaminhados via e-mail e também aos vídeos gravados das aulas e realizamos a análise dos dados.

Buscamos, nesse momento de estudo dos dados coletados, relacionar falas dos alunos e as experiências vivenciadas por eles com nosso referencial teórico, justificando a importância das representações semióticas e do uso de tecnologias na sala de aula para a aprendizagem em matemática.

Para melhor entendimento, separamos a análise em quatro partes conforme realizado na Sequência Didática: Introdução; Estudo da Equação da Reta; Quadriláteros: intersecções entre retas e a Atividade desafio: Réplica da Obra de Arte. As atividades foram realizadas em seis encontros conforme organização da Sequência Didática.

6.1.1. Introdução: familiarização com o conteúdo e com o software GraFeq

Para dar início ao desenvolvimento de nossa pesquisa, nos colocamos diante da situação de apresentar, para os alunos presentes, o desafio de explorar a relação entre a matemática e a arte através da apresentação de um vídeo. Foi exibido o vídeo: O artista e o Matemático. Encontrado em: www.youtube.com/watch?v=KkZLszUYO-Y (exibido a partir dos 15 minutos). Após o vídeo os alunos responderam um questionário com o intuito de investigar qual a relação que eles perceberam com a matemática. A hipótese esperada era de que os alunos percebessem a relação da matemática com as artes, porém alguns alunos não perceberam a interação da arte com a matemática, outros citaram exemplos e perceberam que a matemática está inserida em muitas áreas do conhecimento.

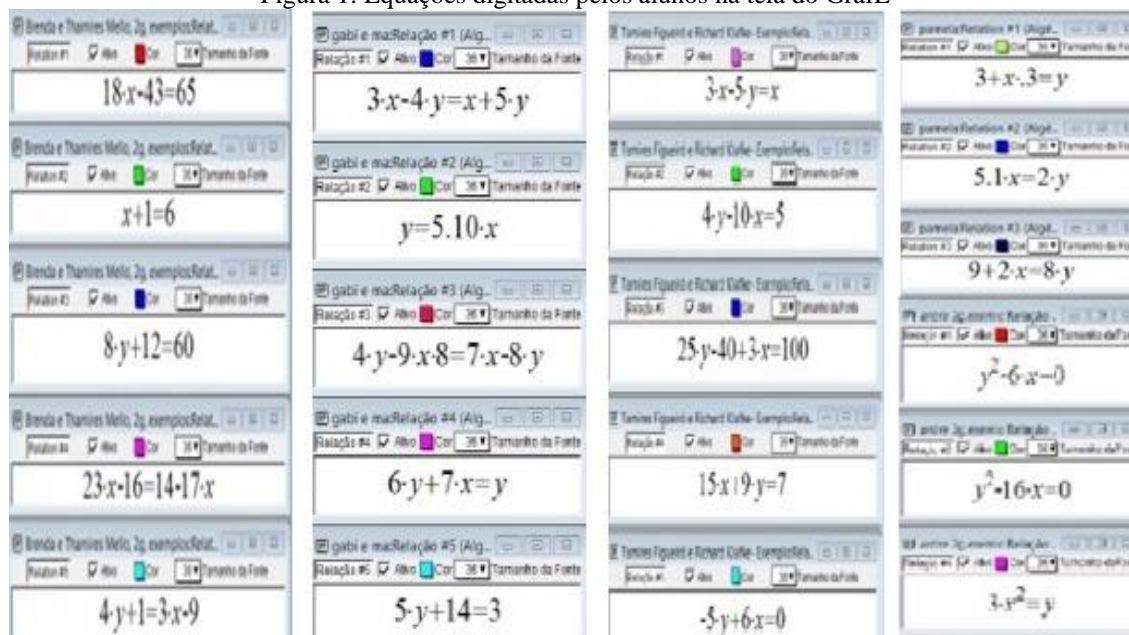
De posse do questionário alguns alunos recorreram à consulta na internet para rever o vídeo e responder. Percebe-se neste momento, a importância da análise, por parte do professor, sobre o conteúdo abordado em um vídeo. Moran (1995) recomenda, após a exibição de um vídeo, propor uma reflexão sobre o conteúdo apresentado em um vídeo, a fim de que haja uma discussão integrando-o com o assunto abordado na aula. Se necessário for, exibir novamente ou somente partes relevantes e comentar com os alunos. Levantar os aspectos positivos e negativos, a(s) ideia(s) principal e apresentar sugestões.

Após apresentamos o software GrafEq e algumas de suas funções básicas, que serviriam de subsídios para continuarmos nossas atividades nas aulas seguintes. Nossa hipótese era de que os alunos não tivessem visto o software anteriormente e, devido a agilidade que, atualmente os jovens tem com o uso de algumas tecnologias, não encontrassem muitas dificuldades em manipular os recursos do software e por final, soubessem identificar algum tipo de equação estudada anteriormente para fazer representações no software. Neste momento nossas hipóteses foram alcançadas quanto à manipulação do software, pois pouca explicação foi necessária, demonstraram habilidade em manusear e foram descobrindo os recursos a medida que as necessidades foram surgindo.

No entanto, o problema neste momento foi quando solicitado que digitassem, na janela disponível pelo software, qualquer tipo de equação que recordassem no momento. Um aluno escreveu na tela do GrafEq: $\pi = 100$. Acreditamos que ele usou o número π , pois no semestre anterior, estes alunos tinham estudado as funções trigonométricas.

Na figura 1 temos algumas representações coletadas da tela do GrafEq realizadas pelos alunos. Conforme se percebe, falta organização dos dados nas representações. Embora, para os alunos, algumas representações não estejam totalmente erradas, pois o software visualizou uma segunda representação, foi preciso que a professora retomasse alguns conceitos necessários para a representação correta de uma equação. Duval (2004) coloca que é possível que um mesmo objeto matemático possa ser representado através de registros de representação muito diferentes, sem perder a referência.

Figura 1: Equações digitadas pelos alunos na tela do GrafE



6.1.2. Estudo da Equação da Reta

Esta atividade objetivou que o aluno aprofundasse os conceitos de reta, construir e interpretar gráficos dados os pontos ou a representação geométrica no Plano Cartesiano.

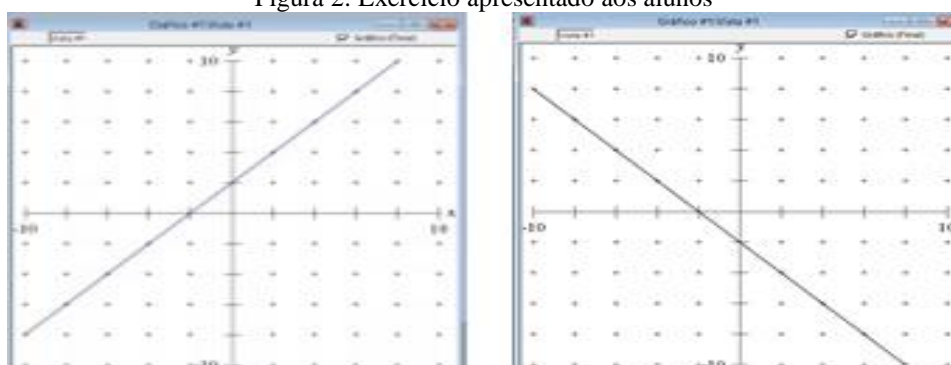
Na aplicação das atividades observou-se que os alunos conseguiram realizar as atividades mais simples como determinar a equação através de uma representação gráfica. O software, em muitos casos, proporcionou que os alunos, através de tentativas, obtivessem a solução da atividade. Depois da retomada de algumas explicações os alunos fizeram as construções solicitadas em cada atividade sem muitas dificuldades.

As hipóteses esperadas se confirmaram. Os alunos são do 2º ano e já possuíam algum conhecimento sobre as equações básicas, ou seja, ideia de retas e seus conceitos. Na proporção em que as atividades eram desenvolvidas, os alunos, aos poucos recordavam de alguns conceitos básicos já trabalhados anteriormente.

6.1.2.1. Representação da Reta de Equação $y = ax + b$

O primeiro exercício solicitado foi a conversão geométrica para a conversão algébrica de uma reta crescente e uma reta decrescente conforme a figura 2 apresentada aos alunos.

Figura 2: Exercício apresentado aos alunos



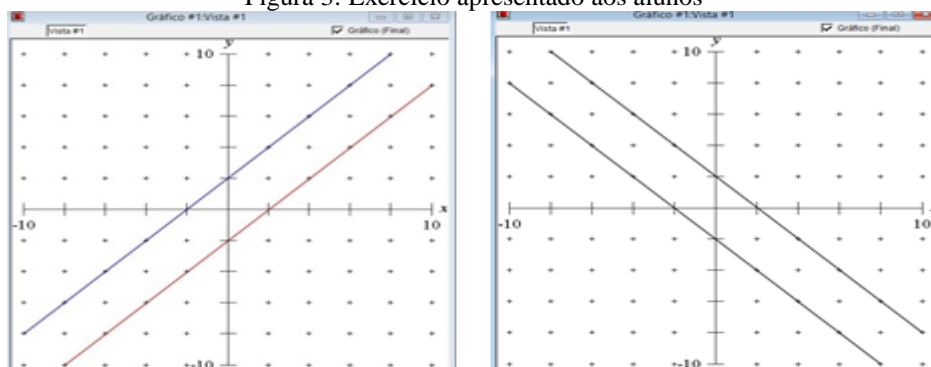
A representação algébrica de retas como $y = x + 2$ ou $y = -x - 2$ foram de fácil resolução. A dificuldade observada foi na ordenação da escrita, ou seja, a organização dos termos algébricos. Uma equação como $y = x + 2$ era escrita como: $y - 2 = x$ ou $x + 2 = y$. A reta $y = 2$ digitaram $y = 0 + 2$. Foi necessário pedir aos alunos que organizassem os termos algébricos na equação digitada, necessário para a aceitação do software.

Após a realização da tarefa, visualizando na tela do computador e no quadro através do Datashow a professora instiga os alunos a pensar sobre as características das retas representadas por eles. Após este momento, a atividade prosseguiu com o estudo das retas paralelas, transversais e perpendiculares.

6.1.2.2. Representação de Retas Paralelas

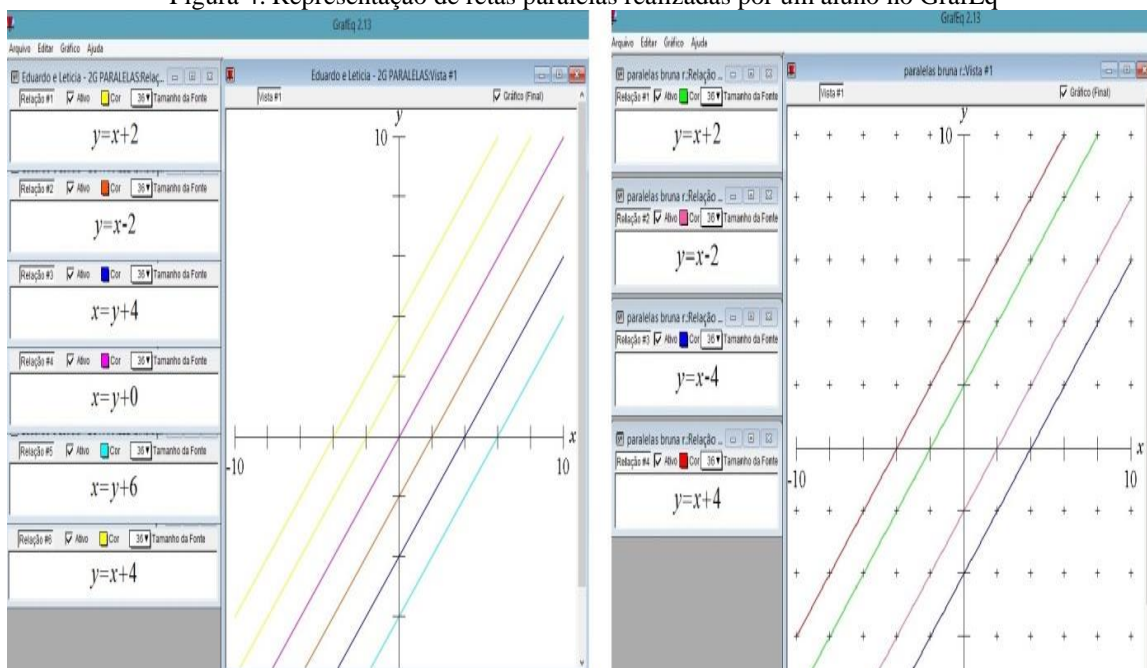
Neste momento foi solicitado que representassem retas paralelas às retas representadas anteriormente no GraEq conforme figura 3 apresentada no quadro com o projetor. Sem fornecer os pontos em que a reta passava os alunos, no primeiro momento, tiveram dificuldade com a proporcionalidade em que o plano cartesiano era apresentado a fim de determinar os pontos em que a reta interceptava os eixos coordenados.

Figura 3: Exercício apresentado aos alunos



Depois de esclarecido a representação proporcional dos eixos cartesianos apresentados no software, os alunos, chegaram rapidamente a resolução representando as equações no GrafEq. Houve então um momento para discutir as características referentes às representações das retas. Após foi solicitado que representassem outras retas paralelas a estas. Alguns alunos tiveram o raciocínio lógico algébrico e representaram várias retas paralelas, embora escrevendo a equação desordenadamente como, por exemplo: $x = y + 4$ e $x = y + 0$. Esta situação pode ser constatada observando a figura 4 que mostra o trabalho de dois alunos no GrafEq. Alguns alunos não tiveram o raciocínio lógico necessário para a conversão do registro, necessitando de orientações da professora.

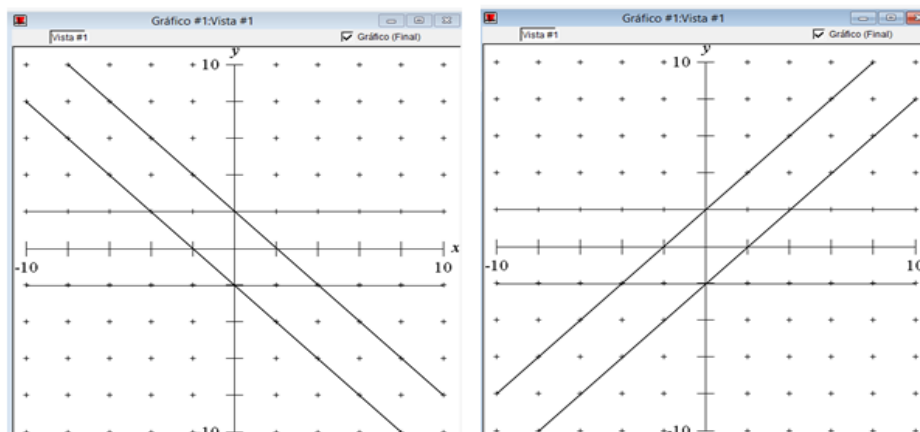
Figura 4: Representação de retas paralelas realizadas por um aluno no GrafEq



6.1.2.3. Representação de Retas Transversais (concorrentes)

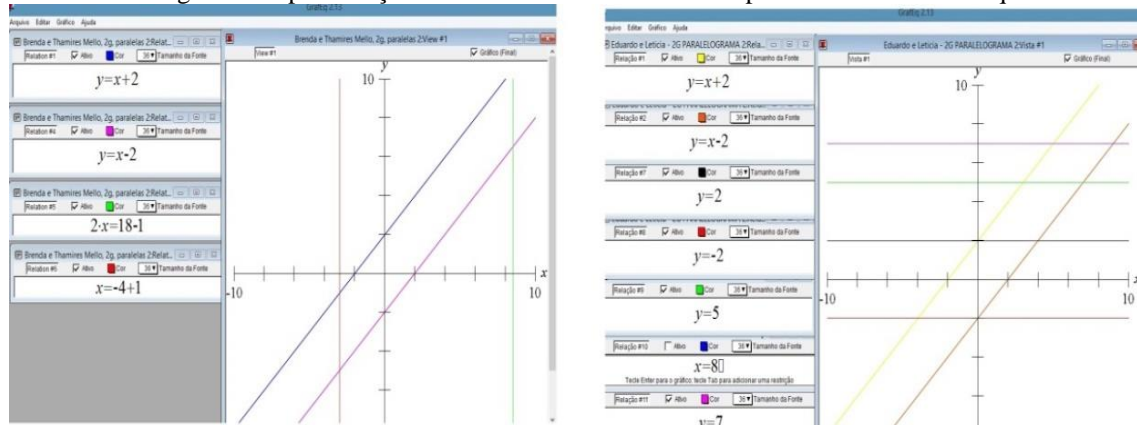
Usando as retas já representadas foi solicitado aos alunos que representassem as retas transversais conforme a figura 5 projetada no quadro.

Figura 5: Exercício apresentado aos alunos



Na figura 6 temos a resolução de um aluno. Percebem-se, na primeira atividade os erros e acertos na tentativa de chegar ao acerto desejado, na segunda atividade, após descobrir o acerto, este mesmo aluno explorou várias representações.

Figura 6: Representação de retas transversais realizada por um aluno no GrafEq

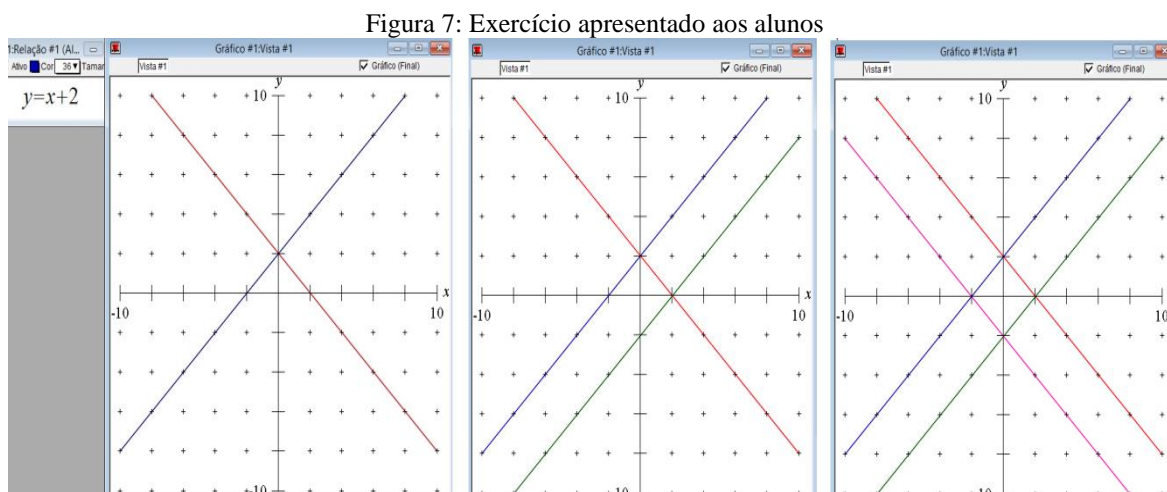


6.1.2.4. Representação de Retas Perpendiculares

Dada à equação da reta $y = x + 2$, representada pelos alunos no início das atividades, foi solicitado para representar uma reta perpendicular a esta conforme a primeira representação da figura 7.

Após, foi solicitado para representar a reta paralela à reta inicial de equação $y = x + 2$ sendo ao mesmo tempo perpendicular a reta de equação $y = -x + 2$ conforme mostra a

segunda representação da figura 7. Por último, foi solicitado para representar a reta paralela à reta de equação $y = -x + 2$ sendo ao mesmo tempo perpendicular à reta de equação $y = x + 2$ e a reta $y = x - 2$ conforme mostra a terceira representação da figura 7.



Neste momento apenas a professora instigou aos alunos que observassem a diferença entre as características das retas recordando dos conceitos de reta crescente e decrescente.

6.1.3. Quadriláteros: intersecções entre retas

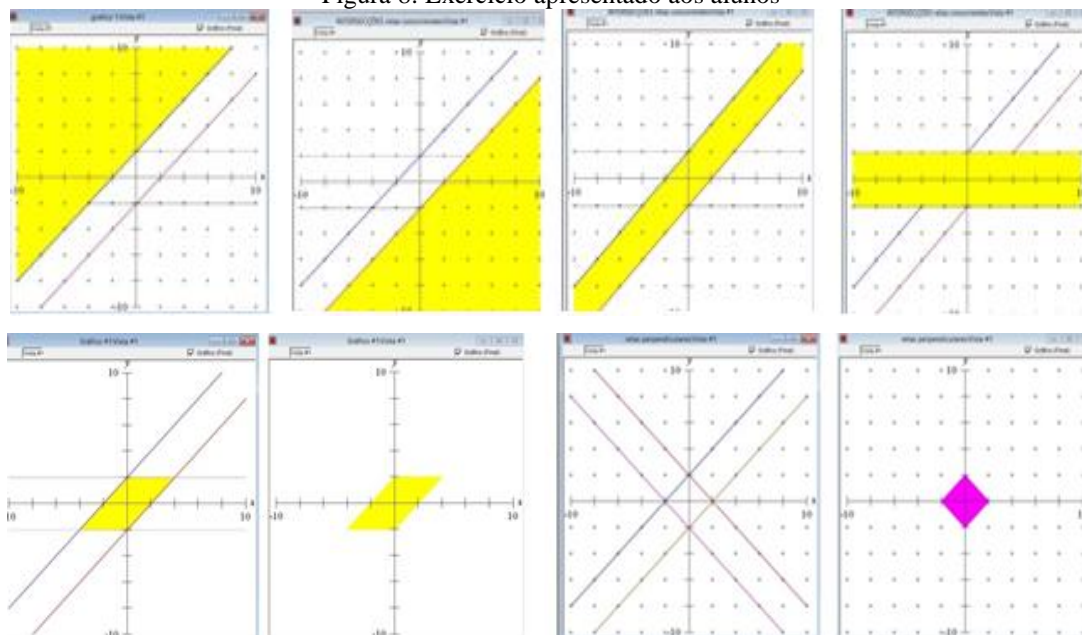
Esta atividade objetivou que o aluno desenvolvesse a interpretação e a representação da região limitada entre as retas e fizesse uso destas para realizar a atividade proposta desenvolvendo o raciocínio lógico-matemático para as transformações e representações de figuras geométricas explorando os símbolos de desigualdades.

Nesta atividade os objetivos e as hipóteses superaram as expectativas. Os alunos, mesmo aqueles que usualmente demonstraram maiores dificuldades em relação a conceitos e interpretações, resolveram os exercícios propostos com uma agilidade impressionante. Foi observado que o uso do software, nesta atividade, foi importante para a generalização na conversão dos registros nas representações realizadas. Ficou evidente que a manipulação através do uso do software facilitou a realização das atividades.

6.1.3.1. Usando desigualdades e restrições para representar quadriláteros

Usando as representações das retas realizadas anteriormente, foi solicitado aos alunos que representassem as regiões limitadas conforme apresentado na figura 8.

Figura 8: Exercício apresentado aos alunos



Inicialmente, nesta atividade foi necessário o diálogo da professora no sentido instigar o aluno a pensar sobre possibilidades para a representação matemática de uma região no plano acima de uma reta ou abaixo de uma reta conforme a figura apresentada. Por exemplo: Que símbolos são usados, em matemática, para representar algo maior ou menos que?

Após, questionados sobre o que sabiam sobre desigualdade e que símbolos matemáticos usariam para representar algo que fosse maior ou menor que, os alunos foram aos poucos respondendo e pensando em alternativas de resolução para o problema de representação. Sem muito questionar, os alunos foram fazendo tentativas escrevendo a equação e substituindo o símbolo de igualdade pelo de desigualdade, embora alguns na tentativa do erro e acerto usando uma nova relação no GrafEq.

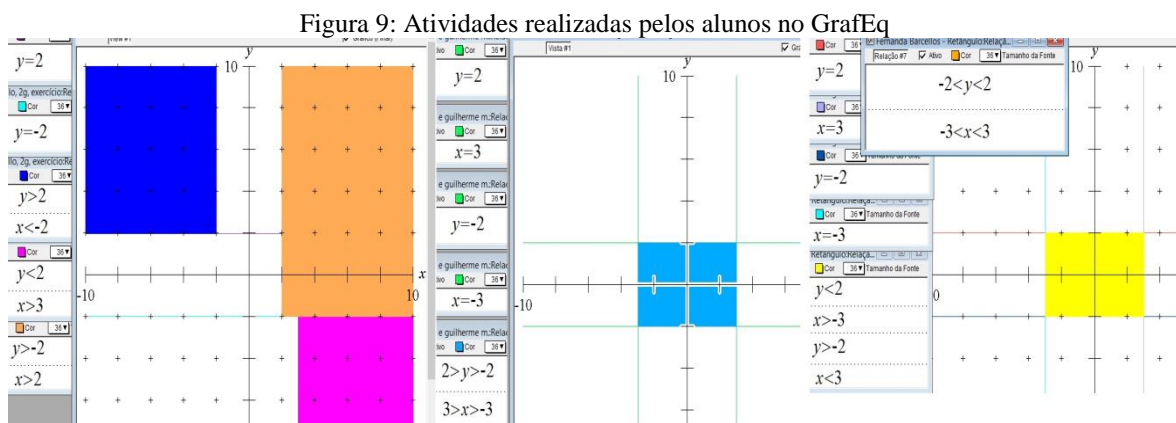
Os resultados de representações e a facilidade com que os alunos foram resolvendo, impressionou-nos, deixou claro que o uso do software, com suas ferramentas possibilitaram a visualização e resolução das atividades. Os alunos, com dificuldade cognitiva maior, resolveram pela tentativa do erro e do acerto.

Porém, de modo geral, a maior dificuldade surgiu quando solicitado para simplificar estas representações usando apenas duas restrições, sem representar as retas. Neste momento a intervenção da professora foi necessária. Explicações no sentido de realizar uma restrição que determina o intervalo numérico em que a variável y estará definida e, outra restrição que determina o intervalo numérico em que a variável x estará definida.

6.1.3.2. Representar um retângulo

No encontro seguinte, houve uma aula, em que foram realizados os exercícios referentes a retas perpendiculares e a intersecção entre as retas, representação de retângulos e quadrados.

Na figura 9 temos três atividades realizadas pelos alunos. Na primeira representação, a dupla de alunos, explorou representações de retângulos, porém não o fizeram corretamente, pois a representação se estende ao infinito. Não delimitaram a região dos retângulos apresentados. Nas outras duas representações os alunos representaram corretamente a região delimitada entre as retas. Exploraram várias representações usando 4 restrições e 2 restrições entre as variáveis.



6.1.3.3. Representar uma coleção de retângulos usando um parâmetro

Esta atividade necessitou que o professor, juntamente com os alunos, esclarecesse e analisasse os intervalos e as possibilidades das representações realizando um exemplo com os alunos. Após, cada grupo fez suas representações no GrafEq explorando representações de coleções de retângulos e quadrados.

Observamos que alguns alunos, no início, encontraram dificuldade de compreensão em relação aos dados algébricos em representações com o uso de parâmetros, valores representados nos eixos x e y. Para representar as figuras, inicialmente, seguiram os passos do exemplo realizando representações através da tentativa do erro e acerto o que podemos constatar na figura 10. Na figura 11 observamos que a dupla de alunos representou retângulos aleatórios usando uma relação para cada retângulo, ou seja, primeiramente sem usar os parâmetros.

Figura 10: Atividades realizadas pelos alunos no GrafEq.

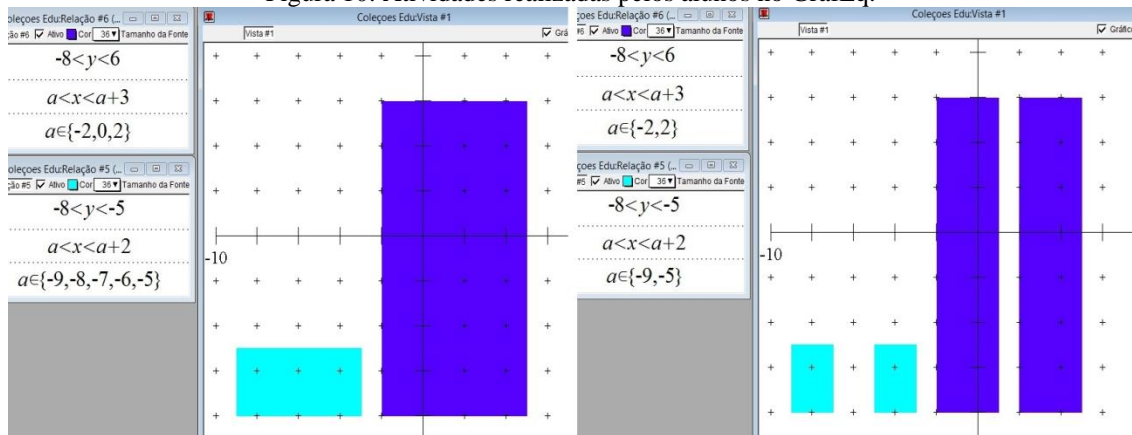
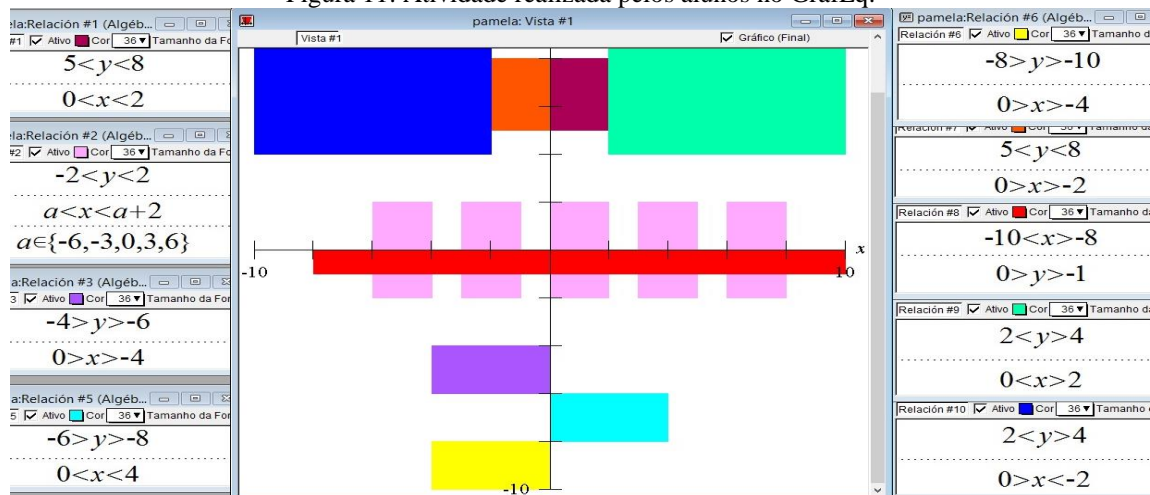


Figura 11: Atividade realizada pelos alunos no GrafEq.



Analisando as atividades aqui expostas, recorremos às palavras de Duval (2009) quanto ao tratamento de uma representação:

Um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema. O cálculo é um tratamento interno ao registro de uma escritura simbólica de algarismo e de letras: ele substitui novas expressões em expressões dadas no mesmo registro de escritura de números (DUVAL, 2009, p.57).

A existência de diferentes representações semióticas para um mesmo objeto matemático possibilita a escolha da melhor e mais adequada ao que se pretende trabalhar. Certas vezes, um objeto se apresenta em uma forma de representação que possui um custo cognitivo muito alto para realização de raciocínios e procedimentos de cálculo necessários, logo, a possibilidade de usar outra representação que proporcione tratamentos menos trabalhosos é de extrema importância.

Também é preciso considerar que sistemas de representação diferentes entre si, requerem questões específicas de aprendizagem, sendo assim levando o aluno a percorrer

pelo melhor caminho de resolução o que constatamos na resolução desta atividade, pois os alunos optaram pela escolha de uma representação que, na visão deles, para aquela atividade, representasse o melhor caminho, embora em alguns casos, esta não fosse a melhor solução para atividade, que é o caso da sobreposição de figuras geométricas nas representações por eles realizadas.

De acordo com Duval (2009), o tratamento não deve ser o único processo de ensino utilizado, para não caracterizar uma demasiada importância à forma, como se ela fosse responsável pela descrição de uma informação. Também é preciso considerar que o tratamento está subordinado ao sistema de representação semiótica utilizado (Duval, 2009, p. 43).

6.1.4. Atividade desafio: réplica da obra de arte

Esta atividade objetivou que o aluno percebesse a interação dos conhecimentos matemáticos com as artes e fizesse uso destes para realizar a atividade proposta desenvolvendo o raciocínio lógico-matemático para as transformações e representações geométricas. A atividade solicitada consistia em realizar a réplica de uma obra de arte.

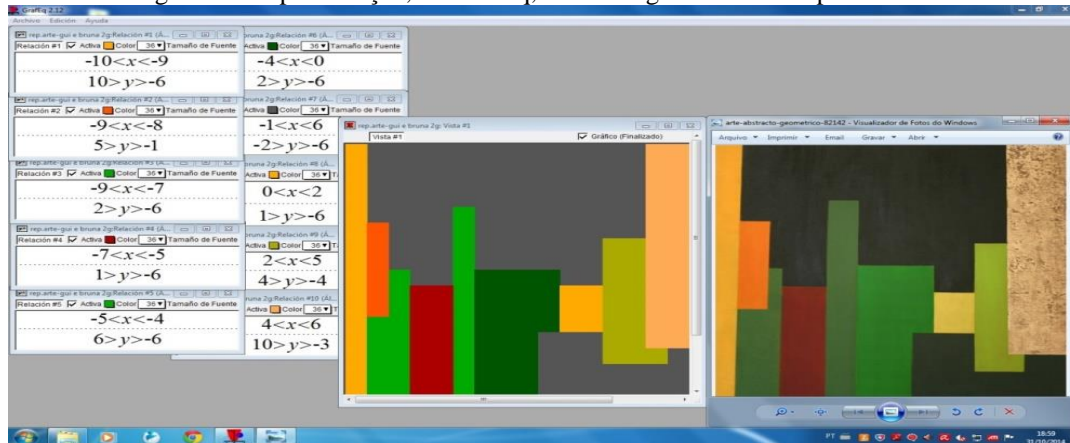
O objetivo esperado foi alcançado, pois os alunos desenvolveram a atividade sem maiores problemas e sem muito questionar. Perceberam a importância da matemática inserida na construção de artes e a importância do uso de cálculos para representar figuras geométricas mais complexas.

A hipótese esperada foi alcançada em parte. Percebemos que os alunos fizeram uso de representações em que não fosse necessária a elaboração de grandes cálculos matemáticos para representar retas. Em algumas situações o aluno ensaia várias possibilidades, para a busca de possíveis valores, utilizando cálculos mentais ou através da tentativa do erro e acerto. Em contrapartida, harmonizaram perfeitamente o conceito de Plano Cartesiano, os valores e representações nos eixos coordenados, usando as desigualdades para representar os intervalos desejados. A facilidade que o software oferece em visualizar o concreto proporcionou melhor compreensão dos conceitos envolvidos.

Na figura 12 temos a atividade do GrafEq de uma dupla de alunos que representou a obra composta somente de retângulos e usou sobreposição de figuras fazendo uso da melhor representação, o que configura as palavras de Duval (2009), citadas anteriormente, quanto ao tratamento de uma representação. O único questionamento que a dupla fez foi

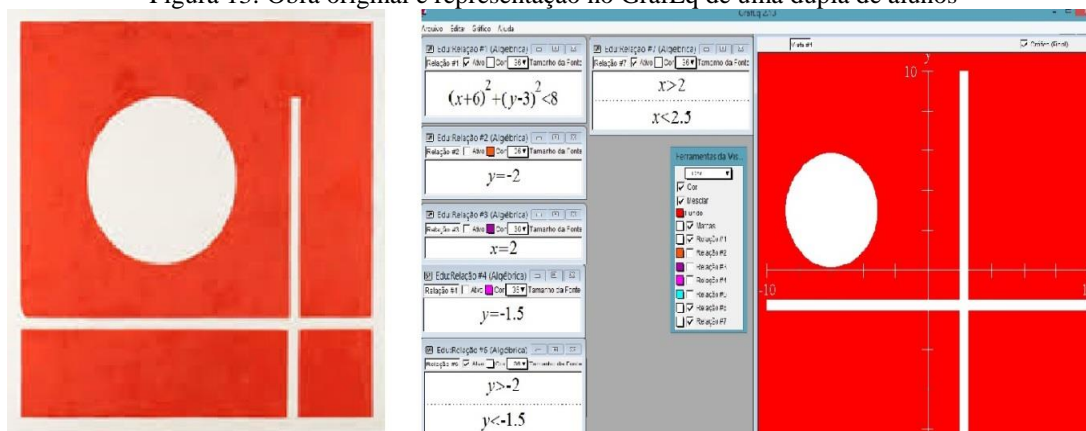
sobre esta sobreposição, observado por eles que algo estava errado, pois as figuras não configuravam a obra corretamente conforme o manuseio do software.

Figura 12: Representação, no GrafEq, e obra original de uma dupla de alunos



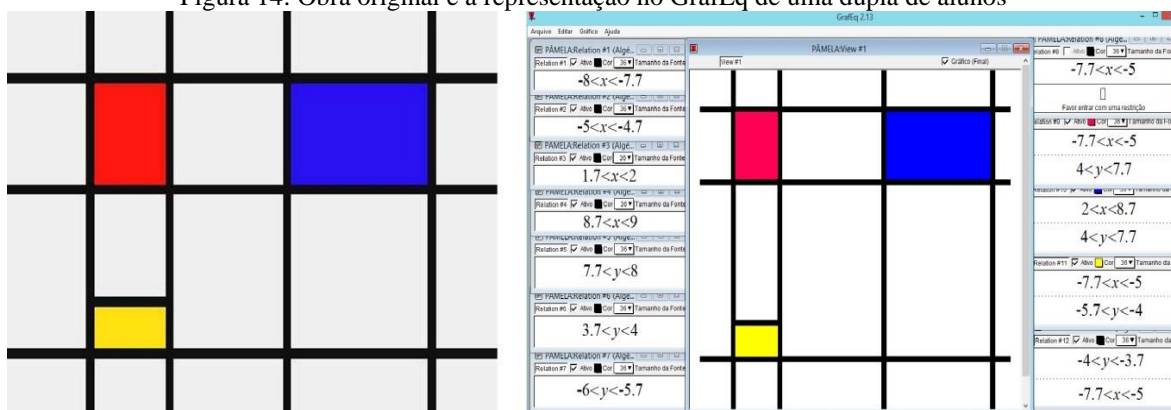
Na atividade da figura 13 observa-se que a dupla de alunos usou a representação das retas para depois usar as desigualdades. Esta dupla solicitou a professora a equação de um círculo.

Figura 13: Obra original e representação no GrafEq de uma dupla de alunos



Na figura 14 temos a atividade de uma dupla de alunas. No início, as alunas tiveram dificuldade para representar os intervalos “pretos” da obra. Representavam com intervalos maiores do que o necessário. Com a explicação da professora, no qual poderiam usar intervalos menores para a representação, a dupla representou o restante da obra sem maiores problemas.

Figura 14: Obra original e a representação no GrafEq de uma dupla de alunos



7. Considerações finais

Observado algumas dificuldades em estabelecer interações entre conceitos e fazer conexões entre os conteúdos matemáticos, com o desenvolver das atividades, constatamos que os acertos dos alunos foram maiores quando a conversão acontecia do registro algébrico para o gráfico. Esta situação se confirma devido ao uso do software que disponibiliza a representação e manipulação da figura representada pela forma algébrica. Situação que vai ao encontro as argumentações de Duval de que, realizar a conversão em um sentido não garante que o aluno saiba realizá-la no sentido contrário. “Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e chegada. Isso pode mesmo conduzir a contrastes muito fortes de acerto quando se inverte o sentido de conversão” (DUVAL, 2003, p.20).

Reconhecemos a importância em se utilizar conversões nos dois sentidos, uma vez que as dificuldades e os processos cognitivos de cada conversão são distintos. Faz-se necessário a importância da relação entre conceitos em uma conversão, pois segundo Duval:

Não pode haver utilização correta das representações gráficas cartesianas sem a discriminação explícita das variáveis visuais pertinentes e sem uma correspondência sistematicamente estabelecida entre os valores dessas variáveis e as unidades significativas da expressão algébrica (DUVAL, 2011, p.104).

Duval (2009) ressalta que as diversas representações semióticas de um objetomatemático são absolutamente necessárias à formação de conceitos, pois estes não estão diretamente acessíveis à percepção. Segundo a teoria de Duval, a compreensão da matemática implica na capacidade de mudar de registro. Observamos nas atividades desenvolvidas pelos alunos, neste trabalho, que o acesso aos objetos matemáticos passa obrigatoriamente por representações semióticas. Neste sentido, consideramos importante

realizar conversões e coordenações de registros para a aprendizagem em matemática. No entanto, sabemos que estas transformações, de modo geral, não acontecem espontaneamente, faz-se necessário a abordagem da matemática vista como uma interpretação global, interagindo, no caso do nosso trabalho, com réplicas de obra de artes, pois segundo Duval (2011, p.111) não pode se restringir a um estudo puramente matemático, uma vez que é neste quadro de interação da articulação entre os valores das variáveis visuais e propriedades conceitualmente relativas que o conhecimento ganha significado.

Portanto, apresentamos uma sugestão de abordagem didática como alternativa pedagógica que possibilita a realização destas transformações, porém ao findar das atividades da sequencia didática, descrita neste trabalho, reconhecemos que as representações do registro serão suficientes, na compreensão conceitual do objeto representado, se o registro de representação for bem escolhido e se ocorrer à articulação de ao menos dois registros de representação, sendo esta articulação efetivada pela atividade de conversão.

Entretanto, percebemos que o desenvolvimento das atividades por si só, não garante a aquisição dos conceitos referentes a cálculos de equações, uma vez que constatamos que os alunos conseguem avançar nas atividades realizando tentativas sucessivas. Assim, ficou claro que os alunos precisam registrar as suas observações, bem como deve haver a intervenção do professor para promover um ambiente de discussão e análise das conclusões dos alunos para que as mesmas sejam validadas ou reformuladas. Desse modo, o uso de representações semióticas através do software GrafEq pode ser considerado um recurso que oportuniza a criação de espaços de análise, formulação de hipóteses e generalização por meio da exploração de situações personalizadas de ensino, desde que esteja intencionalmente alinhado ao planejamento do professor e de que este exerça um papel incentivador/mediador durante o processo de ensino e aprendizagem de seus alunos. É importante que os alunos percebam e saibam usar os registros distintos de representação e, com o trabalho sobre diferentes formas de registros semióticos, em meio ao desenvolvimento de conversões, é que os alunos passam a desenvolver, com consciência, o estudo a respeito de Equações.

Podemos concluir a partir dessa experiência didática que a aplicação na abordagem da Engenharia Didática é o início de uma possibilidade que abre caminhos para estudos posteriores. A aplicação e a teoria, caminho este percorrido pela semiótica, permitem

compreender um pouco mais sobre o processo de construção desse campo de conhecimento, ou seja, as diferentes formas de representações matemáticas para o ensino da matemática.

8. Bibliografia

ALLEVATO, N. S. G. **As Concepções dos Alunos Sobre Resolução de Problemas ao Utilizarem o Computador no Estudo de Funções**. UNESP, 2007, Rio Claro. SP.

DUVAL, R. **Gráficos e equações: a articulação de dois registros**. *Revemat*, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

_____. **Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In: MACHADO, S. D. A. (Org). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. 4ª ed. Campinas, SP. Papirus, p.11-33, 2003.

_____. **Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas**. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

GRAVINA, M.; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados**. IV Congresso RIBIE. 1998, Brasília. Disponível em: http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem_mat.pdf

MEIER, M. **Modelagem Geométrica e o Desenvolvimento do Pensamento Matemática no Ensino Fundamental** - Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2012. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novas_abordagens/modulo_III/pdf/dissertacao_melissa_meier.pdf

NOTARE, M. R.; GRAVINA, M. **A.A formação continuada de professores de matemática e a inserção de mídias digitais na escola**– Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática. UFRGS, 2013.

PNLD. **Guia de Livros Didáticos**. Programa Nacional do Livro Didático. Ministério da Educação, 2014. Disponível em: <http://www.fnede.gov.br/programas/livro-didatico/guias-dopnld/item/5940-guia-pnld-2015>

PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005.

SCHEIBEIL, M. F. **Identidade profissional e contextualização da prática docente**. (Org.). In: *Didática: organização do trabalho pedagógico*. Curitiba: IESDE, Brasil S.A., 2009. 340p.