Curso de Especialização em
MATEMÁTICA, MÍDIAS DIGITAIS E DIDÁTICA
PARA EDUCAÇÃO BÁSICA
Instituto de Matemática

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA TEORIA DOS GRAFOS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO[1]

Luiz Fernando da Silva – lfavilis@ig.com.br – Polo UAB/ Novo Hamburgo
Marcio Alexandre Rodriguez de Rodrigues – rdrgzma@hotmail.com – UFRGS

Resumo: Neste trabalho realizou-se a investigação e a criação de uma proposta pedagógica para o estudo da Teoria dos Grafos em ambientes informatizados, através do software Geogebra. Assim, este artigo objetiva, por meio do relato de uma prática de ensino e aprendizagem com estudantes do ensino médio da rede pública do Vale dos Sinos, propor a introdução da Teoria dos Grafos na educação básica. A abordagem elaborada teve como aporte teórico a teoria do desenvolvimento proximal e baseou-se na metodologia da sequência didática. Desse modo, o trabalho, na perspectiva da pesquisa qualitativa, investigou como problemática se: É pertinente à introdução do estudo da Teoria dos Grafos na educação básica? Nesse sentido, constatou-se que a aplicação de conteúdos não tradicionais no currículo pode, em sala de aula, possibilitar experiências pedagógicas mais dinâmicas e atrativas, tanto para os estudantes quanto para os professores, facilitando assim os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática.

Palavras-chave: geogebra; teoria dos grafos; sequência didática.

Introdução

Na sociedade atual, a Matemática cada vez mais se caracteriza como ciência de significativa importância para o desenvolvimento da civilização. Tanto para descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana quanto para a construção do conhecimento e da atitude autônoma dos estudantes.

A prática pedagógica em sala de aula exige que o professor desenvolva situações de ensino e aprendizagem que proporcionem aos estudantes a capacidade de estabelecer conceitos matemáticos que os permitam construir conhecimentos de forma crítica em relação aos conteúdos estudados. Por conseguinte, é necessário que o trabalho docente

[1] Artigo apresentado ao Curso de Pós-Graduação a Distância Especialização Lato-Sensu em Matemática - Mídias Digitais - Didática: Tripé para Formação do Professor de Matemática, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS, RS), como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática, Professor Orientador Ms. Marcio Alexandre Rodriguez de Rodrigues.

possibilite a conexão de diferentes temas e conceitos que, efetivamente, colaborem para a estruturação do pensar matemático.

Todavia, o excesso de formalismo com a qual alguns temas da Matemática Discreta são tratados na educação básica configura-se como uma grande problemática para ser resolvida nos processos de ensino e aprendizagem. Verifica-se no ambiente escolar que na maioria das vezes, são abordados por meio de uma linguagem bastante difícil de ser compreendida por estudantes do ensino fundamental ou mesmo do ensino médio.

Desse modo, o trabalho apresenta uma proposta didática e analisa essa experiência de ensino e aprendizado com a introdução de tópicos da Teoria dos Grafos, através de uma abordagem que valore o pensamento analítico, utilizando como ferramenta de registro e resolução o software Geogebra. Portanto, o trabalho, na perspectiva metodológica da pesquisa qualitativa, possui como problemática a pertinência da introdução da Teoria dos Grafos no ensino médio.

Por fim, o estudo tem a intenção de vincular ao trabalho docente situação de ensino e aprendizagem que pressuponha a interação do estudante sobre o objeto do conhecimento, desenvolvendo assim, sobretudo, o pensamento analítico como ferramenta para a solução de situações problemas, além de evidenciar nesse processo a motivação e a relevância dos conteúdos matemáticos para expressar conceitos e guiar o pensamento lógico.

1. Pressupostos teóricos e metodológicos

O ensino da Matemática de forma significativa, na educação básica, é uma das inquietações que muitos professores apresentam, pois é possível verificar inúmeras dificuldades na aprendizagem dos estudantes nessa etapa escolar. A análise do desempenho dos mesmos demonstra que muitas vezes não estão compreendendo os significados estudados, assim como muitos não compreendem como o conteúdo estudado pode ser um instrumento matemático capaz de resolver problemas contextualizados ou do cotidiano.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), a aprendizagem contextualizada caracteriza-se por mobilizar os diferentes conhecimentos internalizados pelos estudantes na resolução de situações-problemas que se comuniquem com o mundo social e, sobretudo, produtivo. Para Dante (1999), essas situações-problemas retratam cenários do cotidiano em que sua resolução, necessariamente, perpassa por matematizar uma situação real.

Cada vez mais professores reconhecem as características de uma sala de aula permeada pela singularidade e ao mesmo tempo por uma heterogeneidade dos estudantes que dela fazem parte. Nesse contexto, professores procuram desenvolver práticas que possam contemplar as expectativas de seus estudantes, bem como, dar conta dos conteúdos presentes na grade curricular. Para tanto, tem-se que:

> (...) a formação de um professor é um processo a longo prazo, que não se finaliza com a obtenção do título de licenciado (nem mesmo quando a formação inicial tiver sido de melhor qualidade). Isso porque, entre outras razões a formação docente é um processo complexo para o qual são necessários muitos conhecimentos e habilidades, impossíveis de ser todos adquiridos num curto espaço de tempo que dura a Formação Inicial (CARRASCOSA, 1996, p. 10).

E ainda reafirma-se que:

> A educação é permanente não por que certa linha ideológica ou certa posição política ou certo interesse econômico o exijam. A educação é permanente na razão, de um lado, da finitude do ser humano, de outro, da consciência que ele tem de finitude. Mas ainda, pelo fato de, ao longo da história, ter incorporado à sua natureza não apenas saber que vivia mas saber que sabia e, assim, saber que podia saber mais. A educação e a formação permanente se fundam aí (FREIRE, 1997, p. 20).

Consequentemente, é essencial para o professor ter sensibilidade de entender o estudante como um sujeito que é social por essência, não sendo possível separá-lo ou compreendê-lo fora do âmbito social, muito menos desvincular o conhecimento matemático dessa realidade. Conforme Freire (1996, p.68), “ninguém educa ninguém, ninguém educa a si mesmo, os homens se educam entre si, mediatizados pelo mundo”. Assim, constata-se que a formação se dá numa relação dialética entre o sujeito e a sociedade a seu redor, ou seja, o homem modifica o ambiente e o ambiente modifica o homem, logo, o conhecimento sempre envolve uma atividade, um fazer, um atuar do homem no social na sua interação com outros indivíduos.

1.1 Epistemologia

Vygotsky (apud REGO, 1995) enfatiza o social como fundamental para aquisição dos conhecimentos, deste modo, verifica-se que todo aprendizado é necessariamente mediado, seja na forma pela qual o professor transmite seus conhecimentos aos estudantes, ou ainda, como na forma que o aprendiz observa o trabalho do colega mais experiente. A autora ainda aponta que para explicar a importância do social na aprendizagem, Vygotsky, construiu o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal que evidencia, basicamente, a distância entre o nível do desenvolvimento real do aprendiz, que se determina pela capacidade de resoluções de problemas de forma independente, e o nível de desenvolvimento potencial, que representa aquilo que o aprendiz consegue realizar com a ajuda de um adulto ou com o auxilio de companheiros mais experientes. Portanto, aquilo que a criança pode realizar com assistência hoje, ela será capaz de realizar de forma independente no futuro. Segundo a autora:

> A relação entre ensino e aprendizagem é um fenômeno complexo, pois diversos fatores de ordem social, político e econômica interferem na dinâmica da sala de aula, isso porque a escola não é uma instituição independente, está inserida na trama do tecido social. Desse modo, as interações estabelecidas na escola revelam múltiplas facetas do contexto mais amplo que o ensino se insere (Vygotsky apud REGO, 1995, p. 105).

Nesse sentido, entende-se que o professor que deseja desenvolver uma educação emancipadora, que colabora com a formação de cidadãos, é indispensável que tenha claro a sua intencionalidade ao realizar uma proposta de ensino e aprendizagem. Assim, segundo Zabala (1998) uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos estudantes. Ainda, conforme o autor para compreender o valor educacional de uma sequência didática e as razões que a justificam, é necessário identificar suas fases, as atividades que a conformam e as relações que se estabelecem. Promovendo, um processo de ensino e aprendizagem mais significativo, através da problematização da realidade, levantamento de hipóteses, análise e interpretação de dados e sistematização dos conhecimentos trabalhados do currículo escolar assim como os saberes que os estudantes trazem consigo sobre as várias dimensões do cotidiano e da vida.

A resolução de problemas nesse cenário é uma estratégia que possibilita interferir cognitivamente na construção de uma aprendizagem mais significativa. Visto que:

> Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem através da resolução de problemas. No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidas depois da resolução trabalhada, dando-se liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para "o que pensar" ou "o que fazer", conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir (ZUFFI; ONUCHIC, 2007, p.83).

Percebe-se, conforme Maia et al (2009), que a resolução de problemas é uma estratégia pedagógica bastante exitosa na superação do paradigma de um ensino e aprendizagem pouco significativo e vazio de interdisciplinaridades em relação aos conhecimentos tratados ao longo da vida escolar. Dessa forma, as autoras indicam que:

> Na educação problematizadora, o conhecimento deve vir do contato do homem com o seu mundo, que é dinâmico, e não como um ato de doação. Supera-se pois, a relação vertical e se estabelece a relação dialógica, que supõe uma troca de conhecimento (MAIA et al, 2009, p.55).

Meirieu (1998) defende a resolução de problema como forma de aprendizagem, propõe que, ao invés de se analisar uma situação-problema pelo seu suposto grau de dificuldade, deve-se considerá-la em termos de obstáculos, ou seja, um obstáculo pode ser grande, médio ou pequeno. Obstáculo, assim, refere-se à tomada de decisão do construtor ou do autor do item, em propor conteúdos ou situações a serem decididos pelos estudantes, à dificuldade então passa a ser dos estudantes para responder as questões.

A resolução de problemas constitui-se um instrumento fundamental na compreensão, análise e reflexão dos estudantes e, desta forma, contribui para que os mesmos possam intervir na realidade em que estão inseridos. Contudo, práticas pedagógicas na perspectiva da resolução de problemas dependem de situações-problemas que motivem os estudantes, ou seja, é necessário escolhas de temas que possam apresentar correlações. Então, buscou-se na Teoria dos Grafos o conteúdo que possibilitasse desenvolver uma experiência nova e no uso do software Geogebra um recurso tecnológico motivador para a realização da sequência didática.

1.2 Mídias digitais

Uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos professores de Matemática na educação básica, em sala de aula, é a pouca motivação discente apresentada. De acordo com Búrigo et al (2012), uma maneira natural de aumentar o interesse dos estudantes é fazer com que a vida cotidiana se aproxime dos assuntos tratados no currículo escolar, isso pode se dar com abordagens pedagógicas diferentes, ou ainda, através de novos conteúdos introduzidos de modo a explicar situações corriqueiras. No entanto, vale ressaltar que a mera introdução de uma nova abordagem em sala de aula não garante, necessariamente, sucesso nos processos de ensino e aprendizagem, ao contrário, pode até dar mais ênfase do distanciamento desse professor com essa nova metodologia adotada. Por isso, é necessário contextualizar o ensino da Matemática, fazendo com que os estudantes entendam o significado dos conteúdos trabalhados, levando-os a relacionarem significados particulares com o sentido geral da situação envolvida.

De acordo com Gravina e Basso et al (2012), diante das inovações tecnológicas presente no cotidiano é fundamental que a escola reverbere o uso desses recursos no espaço da sala de aula, uma vez que a tecnologia digital disponibiliza, cada vez mais, ferramentas que suportam a exteriorização, a diversificação e a ampliação de pensamentos.

Freitas (2000) indica que apesar dos esforços em equipar as escolas com os novos recursos tecnológicos e capacitar professores para facilitar a utilização dos equipamentos, a prática do uso das novas mídias, no cotidiano da escola apresenta-se como algo difícil ainda de ser alcançado. Isso se dá, conforme Santarosa (2010), por causa da experiência profissional construída anteriormente no papel de estudante que todo o professor traz em si.

Nesta perspectiva, é fundamental superar o paradigma do quadro-negro e do giz tendo em vista as inúmeras formas de mediação pedagógica que os recursos tecnológicos podem possibilitar na relação de ensino e aprendizagem entre professor e estudante.

Para tanto:

> Atender a objetivos educacionais previamente estabelecidos requer o discernimento de que o software no contexto educacional possui potencialidade e limitações. É importante reconhecer quando um software é adequado para a tarefa proposta, como elemento que motiva e ao mesmo tempo desafia o surgimento de novas práticas pedagógicas, podendo tornar tal tarefa inovadora, dinâmica, participativa e interativa. A escolha sobre o software educacional para explorar determinado conteúdo e/ou habilidade deve ser contextualizada a partir do desenvolvimento de conceitos e estratégias pedagógicas adequadas, sendo necessária a coerência do usuário para estabelecer as possibilidades e restrições do uso desse recurso (SANTAROSA, 2010, p. 263).

Nesse sentido, a sequência didática será mediada pela utilização do software Geogebra, pois além de uma interface bem apresentável e didática, tem várias ferramentas que permitem desenvolver os mais diferentes conteúdos matemáticos como geometria, álgebra e cálculo, seu download é gratuito e está disponível no endereço <https://www.geogebra.org/download>.

1.3 Teoria dos grafos

Atualmente, na escola, fica evidente a necessidade de se incluir temas que contribuam mais significativamente para o desenvolvimento de um cidadão capaz de posicionar-se diante a complexidade da vida contemporânea de forma crítica e reflexiva. Nesse sentido, a Teoria dos Grafos se configura como um desses temas que a educação básica deve se ocupar, pois tem sido um dos mais simples e poderosos instrumentos matemáticos utilizados para construção de modelos e resolução de problemas.

Segundo Netto (1996), grafo é uma representação geométrica de dados que algebricamente pode ser escrito como um par $G = (V, E)$ onde V é um conjunto finito, cujo seus elementos são chamados de vértices ou nós, e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V, cuja relação que estabelecem chama-se arestas ou arcos:

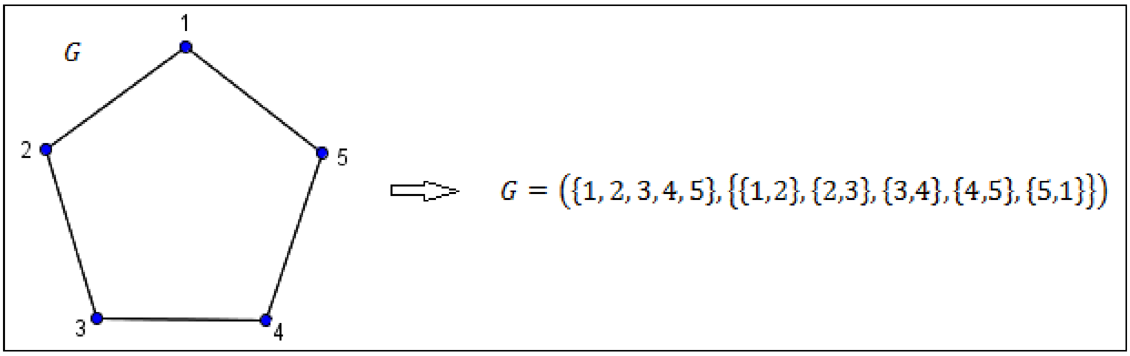


FIGURA 1: Representações para o grafo G
FONTE: Elaboração do autor

Ainda conforme o autor (NETTO, 1996), um grafo $G = (V, E)$ pode ser também direcionado para isso é necessário que cada aresta seja escrita como um par ordenado (x, y):

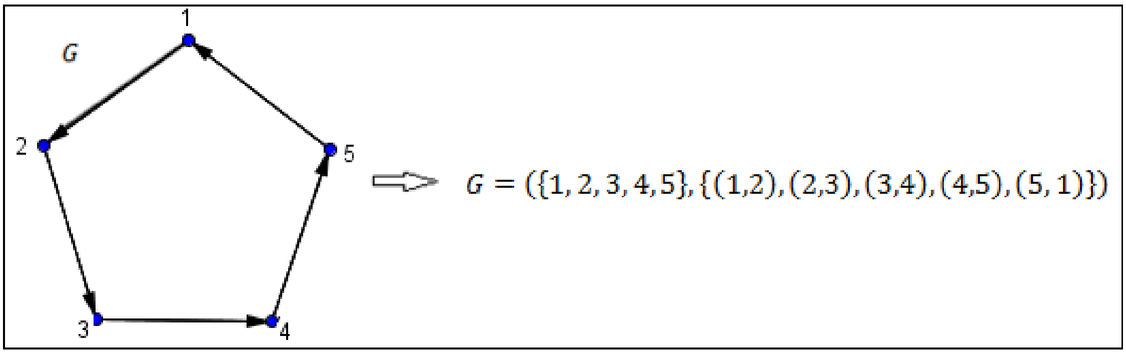
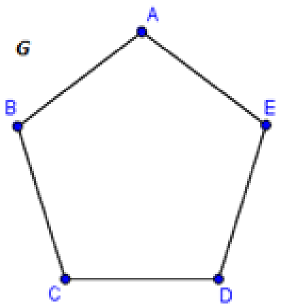


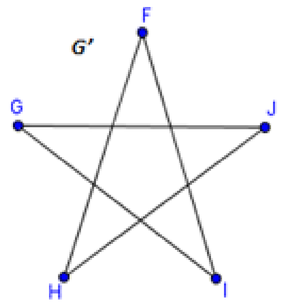
FIGURA 2: Representações para o grafo direcionado G
FONTE: Elaboração do autor

Além disso, Netto (1996) apresenta o conceito de grafo euleriano que é aquele em que é possível realizar um circuito passando por todas as arestas uma única vez e ainda o conceito de grafo hamiltoniano que é aquele em que é possível realizar um circuito passando por todos os vértices uma única vez.

Rabuske (1992) indica que um grafo, ainda pode ser representado na forma de uma matriz M bidimensional $n \times n$, onde $M(i,j) = 1$ se a aresta (i,j) estiver presente em G e zero caso contrário. Para a autora a representação matricial simplifica a verificação de isomorfismos entre grafos, assim dois grafos G e H são isomorfos se há uma bijeção f de Vg em Vh tal que para todo par (v, w) de elementos de Vg, v e w são adjacentes em G, se e somente se, $f(v)$ e $f(w)$ são adjacentes em H.

A partir dessa definição pode-se dizer que dois grafos são isomorfos se for possível alterar os nomes dos vértices de um deles de tal modo que os dois grafos fiquem iguais, a expressão "$G \cong H$" é uma abreviatura de “G é isomorfo a H”:





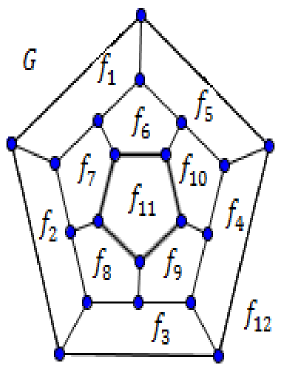
G	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	1
B	1	0	1	0	0
C	0	1	0	1	0
D	0	0	1	0	1
E	1	0	0	1	0

G'	F	H	G	J	I
F	0	1	0	0	1
G	1	0	1	0	0
H	0	1	0	1	0
I	0	0	1	0	1
J	1	0	0	1	0

$$\Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

FIGURA 3: Representação matricial para verificar o isomorfismo de grafos
FONTE: Elaboração do autor

Scheinerman (2003) aponta que o grafo que pode ser representado geometricamente sem que haja cruzamentos de suas arestas, formando faces ou regiões internas é dito planar. O autor indica que para tanto é necessário satisfazer a Fórmula de Euler $v - e + f = 2$, sendo v o número de vértices, e o número de arestas e f o número de faces, onde se $v \geq 3$ então $e \leq 3v - 6$, porém se $v \geq 3$ e não tem ciclos de comprimento 3 então $e \leq 2v - 4$:



Assim tendo:

$v = 20$

$e = 30$

$f = 12$

Precisa satisfazer a Fórmula de Euler:

$v - e + f = 2$

$(20) - (30) + (12) = 2$

$2 = 2$

Além de observar a relação:

$v \geq 3 \rightarrow e \leq 3v - 6$

$(30) \leq 3(20) - 6$

$30 \leq 54$

$v \geq 3 \rightarrow e \leq 2v - 4$

$(30) \leq 2(20) - 4$

$30 \leq 36$

Logo G é planar.

FIGURA 4: Representação para verificar a planaridade do grafo G
FONTE: Elaboração do autor

Além disso, o autor (SCHEINERMAN, 2003) aponta que sendo $G = (V, E)$ um grafo e C um conjunto de cores, uma coloração de G é uma atribuição de alguma cor de C para cada vértice de V, de tal modo que a coloração de G é uma função $f: V \rightarrow C$ tendo v e $w \in V$ com $(v, w) \in E \rightarrow f(v) \neq f(w)$. Scheinerman (2003) ainda menciona o Teorema das 4 Cores que apresenta o número cromático de um grafo planar como sendo nunca superior a 4.

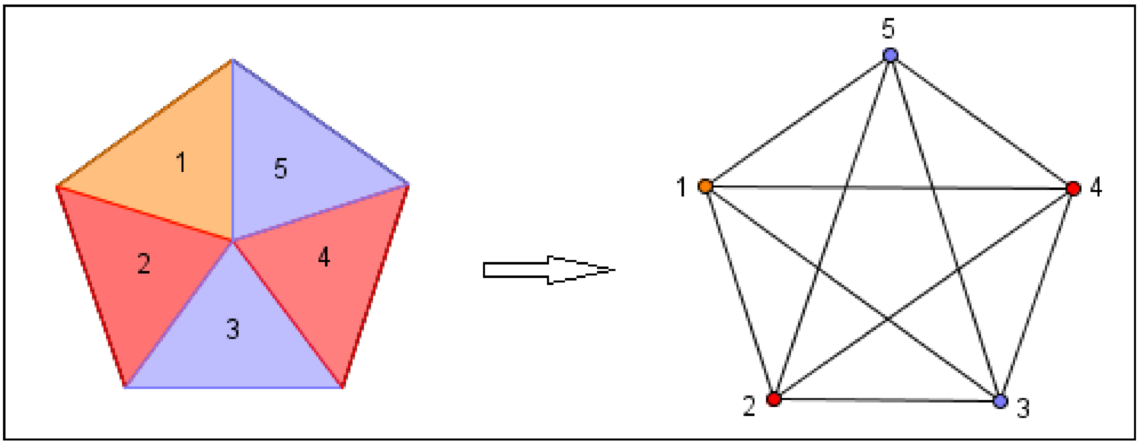


FIGURA 5: Representação para coloração de grafos
FONTE: Elaboração do autor

1.4 Metodologia

A metodologia utilizada na pesquisa é qualitativa, uma vez que se tem como finalidade analisar e inferir nas diversas situações didáticas do fenômeno estudado. De acordo com Lüdke e André (1986) apud Bogdan e Biklen (1994, p.12):

> A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e tem no próprio pesquisador o principal elemento de coleta de dados. Ou seja, o pesquisador deve estar atento ao maior número possível de elementos presentes na situação estudada, pois um dado considerado irrelevante pode ser essencial para a melhor compreensão do problema que está sendo estudado.

Conforme André (1998 apud CASAS, 2003), a pesquisa qualitativa destaca o conhecimento do particular, pressupõe uma imersão do pesquisador no contexto da situação analisada para a obtenção de dados que podem ser arrolados por meio de entrevistas, questionários, observações do ambiente e por registros documentais. A autora ainda cita Bogdan e Biklen (1999), ao referir que os dados recolhidos são ditos qualitativos, por apresentarem riqueza de pormenores e descritivos a pessoas, locais e conversas. Também, fundamentado em Bogdan e Biklen (1999), ressalta que a pesquisa do tipo qualitativa privilegia, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação, recolhendo dados em função de um contato aprofundado com indivíduos, nos seus contextos ecológicos naturais.

Assim, na pesquisa qualitativa destaca-se, predominantemente, seu caráter social e empírico, pois verifica fenômenos num contexto, em que a delimitação do fenômeno estudado não é claramente definida e numa situação em que fontes diversas de evidência podem ser usadas como elementos de observação e análise.

2. Relato e discussão da sequência didática

Pretende-se nessa sequência didática desencadear um planjamento de aula que otimize, por meio da elaboração de ativadades em sala de aula, o conhecimento dos estudantes. Assim, na Educação Matemática, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais tem-se que:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo, (BRASIL, 2000, p.6).

Desse modo, o planejamento das atividades apresenta como intenção pedagógica a intervenção no ensino usual da Matemática no ensino médio, buscando conforme os PCN's (BRASIL, 2000), no ensino da Matemática um valor formativo, que ajude a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. Viabilizando, a aquisição de hábitos de investigação e da formação de uma visão ampla e científica da realidade. Nesse sentido, o relato dessa experiência pedagógica, visa inspirada nesses objetivos, propiciar uma aprendizagem mais significativa aos estudantes em sala de aula.

A sequência didática apresenta uma proposta pedagógica para a introdução do estudo da Teoria dos Grafos, por meio do software Geogebra. Assim, a sequência didática foi realizada numa escola estadual da região do Vale dos Sinos, com um grupo de 10 estudantes voluntários do 2ª ano do ensino médio do tuno da manhã. A escolha deveu-se ao fato da dificuldade de se utilizar o laboratório móvel de computadores com uma turma inteira, pois entre notebooks furtados e em manutenção sobraram apenas 5 funcionais, além disso esse grupo de estudantes já conheciam as ferramentas do software Geogebra. O desenvolvimento da sequência didática deu-se, em dois encontros de aproximadamente 2 horas de duração, no contraturno escolar executando metade das atividades num encontro e o restante noutro. No trabalho com os estudantes optou-se em organizá-los em duplas por afinidade para facilitar os processos de mediação e ampliar as possibilidades de interação com o recurso computacional.

Dessa forma, após um breve relato sobre a Teoria dos Grafos e suas aplicações no cotidiano, iniciou-se o trabalho das atividades que se seguem para o grupo de estudantes, visando explorar os conceitos intuitivos sobre a temática, as diferentes formas de sua representação, desenvolvendo-se um conjunto de atividades para que os estudantes se apropriem de elementos básicos da simbologia e da terminologia Matemática relativa ao conteúdo.

Assim, deseja-se com a sequência didática que se segue observar aspectos relacionados à capacidade do estudante de estabelecer relações entre os conhecimentos adquiridos ao longo da vida escolar e a aplicação desses em novos contextos e recursos para resolução de situações-problemas.

2.1 Descrição da sequência didática

Situação-problema 1.

A Teoria dos Grafos surgiu agregando diversas áreas do conhecimento matemático, sendo considerada uma área da Matemática Aplicada. Sua menção mais antiga ocorreu no trabalho de Euler[2], no ano 1736 que relata o famoso "Problema das Sete Pontes". No final do século XVIII, na cidade de Koenigsberg (hoje chamada Kaliningrad, território pertencente à Rússia), havia sete pontes ligando várias partes da cidade. Os moradores que gostavam de passear pela cidade à tarde cogitaram se não haveria um trajeto em que cada ponte fosse atravessada exatamente uma vez. Euler resolve esse problema a partir de um esquema geométrico das pontes e lugares, onde cada ponte é uma linha e cada ponto é uma cidade. Neste desenho as linhas devem ser percorridas sem sair do traçado e sem passar duas vezes sobre a mesma linha.

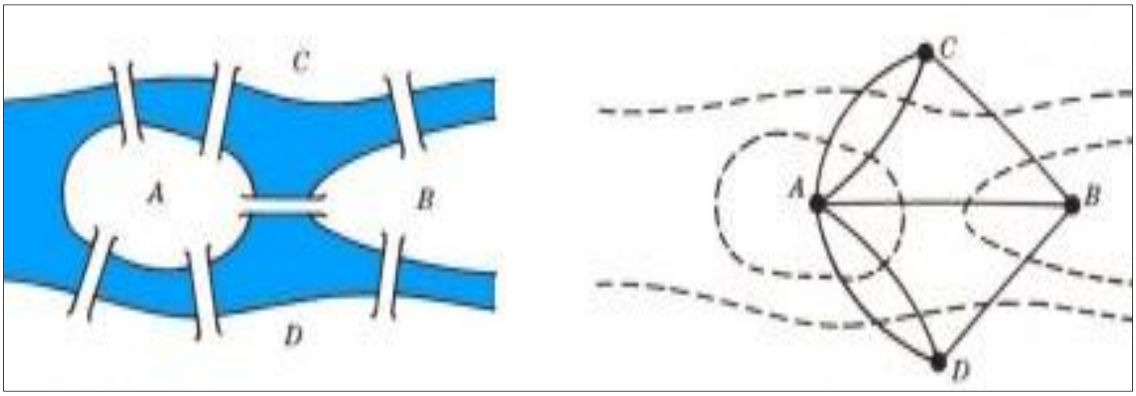


FIGURA 6: Euler representou as relações graficamente, associando cada margem da ilha a um nó e a cada ponte um arco
FONTE: Imagem da internet[3]

Represente o esquema geométrico de Euler no Geogebra e verifique se é possível percorrer esse caminho em uma única vez sem sair do traçado.

[2] Leonhard Paul Euler, nascido na Basileia (Suíça), viveu de 15/04/1707 a 18/09/1783, foi um grande matemático e físico, fez no decorrer de sua carreira importantes descobertas, sendo considerado um dos matemáticos mais proeminentes do século XVIII (Disponível em: http://www.coladaweb.com/biografias/euller, acesso em 01/07/2015).

[3] Disponível em: http://www.helderrodrigues.eu/wp-content/images/konigsberg.jpg, acesso 03/07/2015.

Resposta 1.

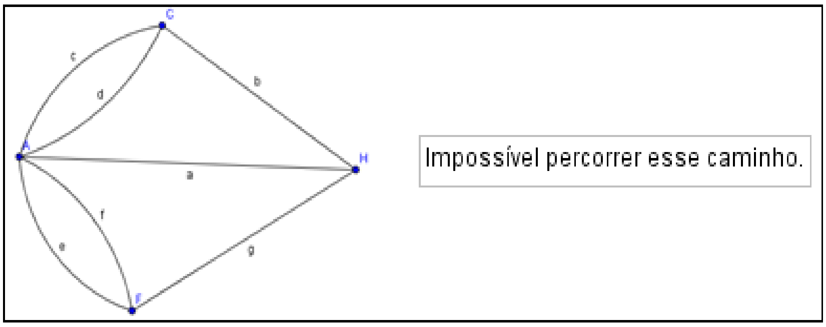


FIGURA 7: Resolução da situação-problema 1
FONTE: Arquivo geogebra da Dupla C

Situação-problema 2.

Imagine uma cidade com três casas e três usinas que fornecem água, gás e eletricidade. Deve-se estabelecer ligações de cada serviço com cada casa. As casas e usinas podem ser colocadas em qualquer lugar, mas fios, canos e linhas de gás jamais podem se cruzar. É possível estabelecer estas ligações, sendo que fios, canos e linhas de gás devem ficar no mesmo nível em relação à superfície? Construa no Geogebra um esquema geométrico que represente essa situação e verifique se existe solução para esse problema.

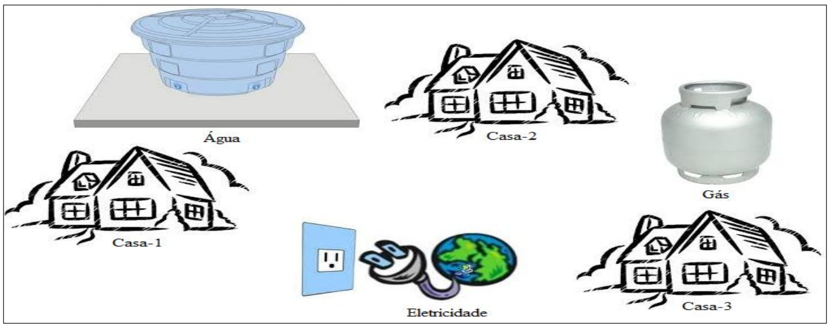


FIGURA 8: Ilustrativa da atividade
FONTE: Elaboração do autor

Resposta 2.

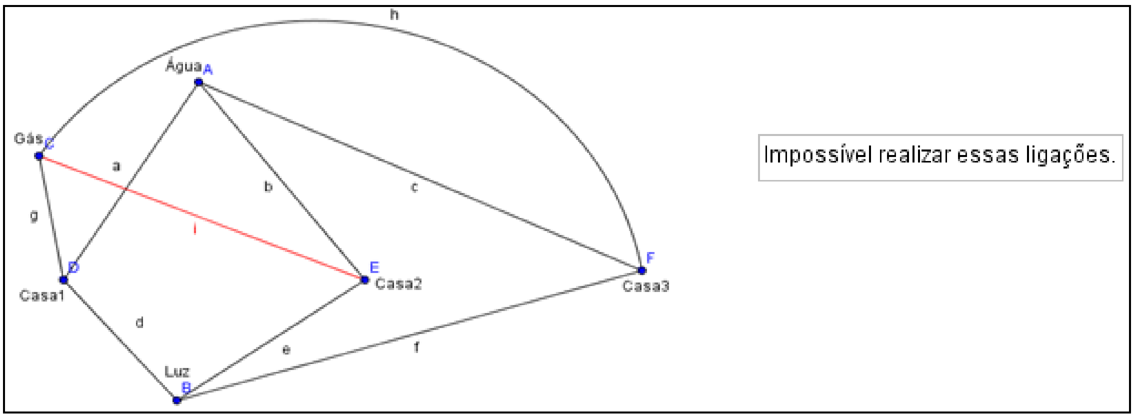


FIGURA 9: Resolução da situação-problema 2
FONTE: Arquivo geogebra da Dupla A

Situação-problema 3

O esquema geométrico usado nas atividades iniciais 1 e 2, que expressavam uma representação visual de dados por meio de um diagrama que exibia um relacionamento entre duas grandezas é chamado de grafo. Assim grafo é um par $G = (V, E)$ onde V é um conjunto finito e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V. Os elementos de V são chamados de vértices ou nós e os de E são as arestas ou arcos.

Dado um grafo $G = \big(\{1, 2, 3,4\}, \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}\big)$, onde V é o conjunto $\{1, 2, 3,4\}$ e E é o conjunto que contém 4 subconjuntos de dois elementos de V, ou seja, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$, tem-se graficamente a seguinte representação possível:

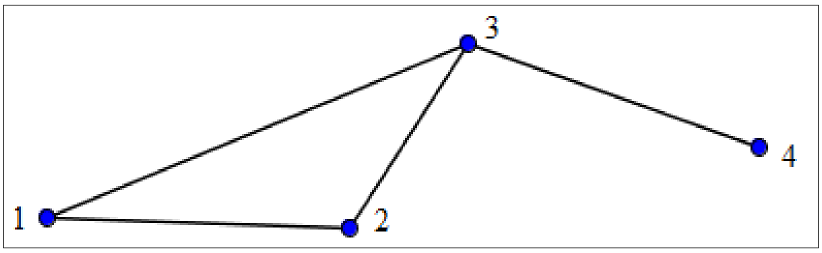


FIGURA 10: Representação para o grafo G
FONTE: Elaboração do autor

Dessa forma, dados os grafos a seguir, construa no Geogebra uma representação possível para cada grafo.

(a) $A = \big(\{1, 2, 3,4, 5, 6\}, \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}\}\big)$;

(b) $B = \big(\{1, 2, 3,4, 5, 6\}, \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{4,5\}\}\big)$;

(c) $C = \big(\{1, 2, 3,4, 5, 6\}, \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4,5\}, \{5,6\}\}\big)$.

Resposta 3.

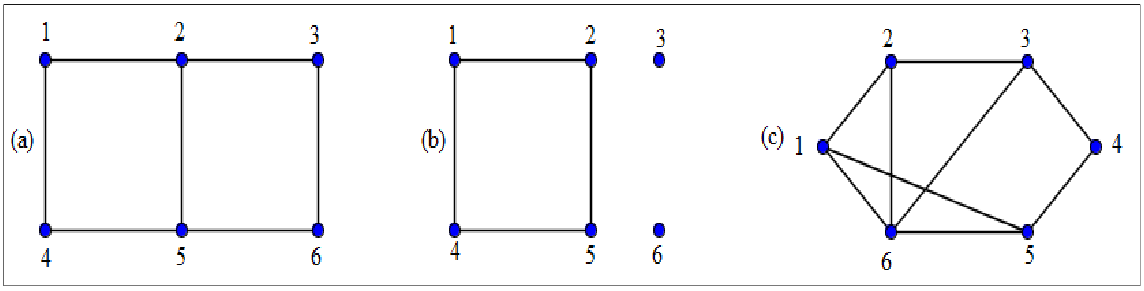


FIGURA 11: Resolução da situação-problema 3
FONTE: Arquivo geogebra da Dupla E

Situação-problema 4.

Imagine mapas de quatro continentes hipotéticos, representados nas figuras a seguir. Deve-se colorir cada um destes mapas, de forma tal que países limítrofes não podem ter a mesma cor. Por outro lado, quer-se usar o menor número possível de cores por motivos estéticos. Assim, represente no Geogebra essa situação através de grafos e usando o número mínimo de cores necessárias para colorir seus vértices. Para isso entende-se cada região do mapa como um vértice e as regiões fronteiriças como arestas.

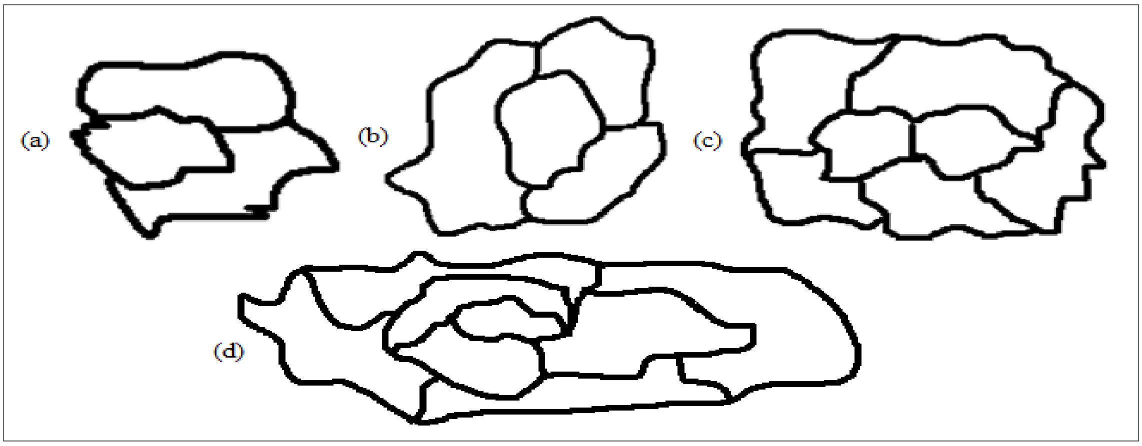


FIGURA 12: Ilustrativa da atividade
FONTE: Elaboração do autor

Resposta 4.

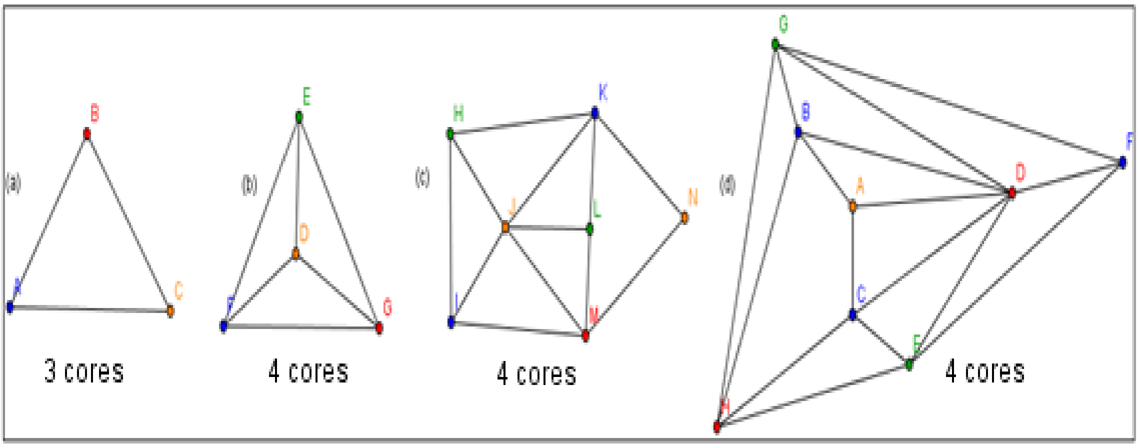


FIGURA 13: Resolução da situação-problema 4
FONTE: Arquivo geogebra da Dupla D

Situação-problema 5.

Chama-se de grafo direcionado aquele em que cada aresta possui um sentido, ou seja, cada par $(x, y) \in E$, em que x é o ponto de partida e y é o ponto de chegada. Observe a representação a seguir onde se tem um exemplo da rotina de um indivíduo que morando em Porto Alegre toma uma minivan para a indústria onde trabalha em Esteio. Após o trabalho se dirige de táxi até a instituição que estuda em São Leopoldo e para regressar para casa em Porto Alegre, toma um ônibus. Essa situação pode ser representada pelo grafo direcionado *G = ({Porto Alegre, Esteio, São Leopoldo}, {(Porto Alegre, Esteio), (Esteio, São Leopoldo), (São Leopoldo, Porto Alegre)}).*

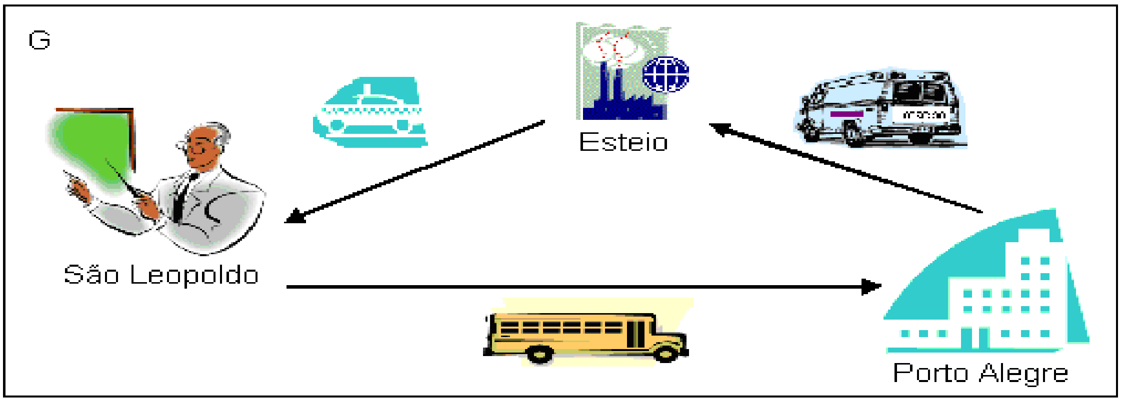


FIGURA 14: Representação para o grafo direcionado G
FONTE: Elaboração do autor

Apresente no Geogebra um grafo direcionado que possa representar o seu deslocamento cotidiano.

<u>Resposta 5.</u>

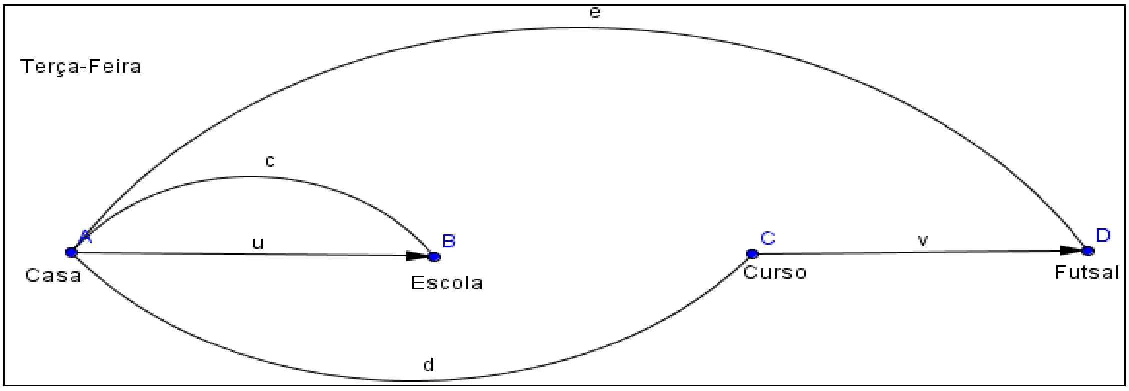


FIGURA 15: Resolução da situação-problema 5
FONTE: Arquivo geogebra da Dupla A

<u>Situação-problema 6.</u>

Naqueles grafos cujas arestas podem ser percorridas precisamente uma vez, tem-se um caminho euleriano, para tanto é necessário, mas não suficiente, que o grafo não apresente um número ímpar de arestas que saem dos seus vértices ou então apresente exatamente o número de dois vértices nessa condição. Entretanto, quando essa trajetória forma um circuito, isto é, começa e termina no mesmo vértice tem-se o chamado grafo euleriano, para a sua existência é necessário, mas não suficiente, que apresente em todos os seus vértices um número par de arestas que saem dele. Tais conceitos foram introduzidos por Euler na ocasião da resolução do problema das sete pontes de Königsberg.

Assim, por meio de um grafo direcionado mostre no Geogebra em quais das situações a seguir há um grafo euleriano.

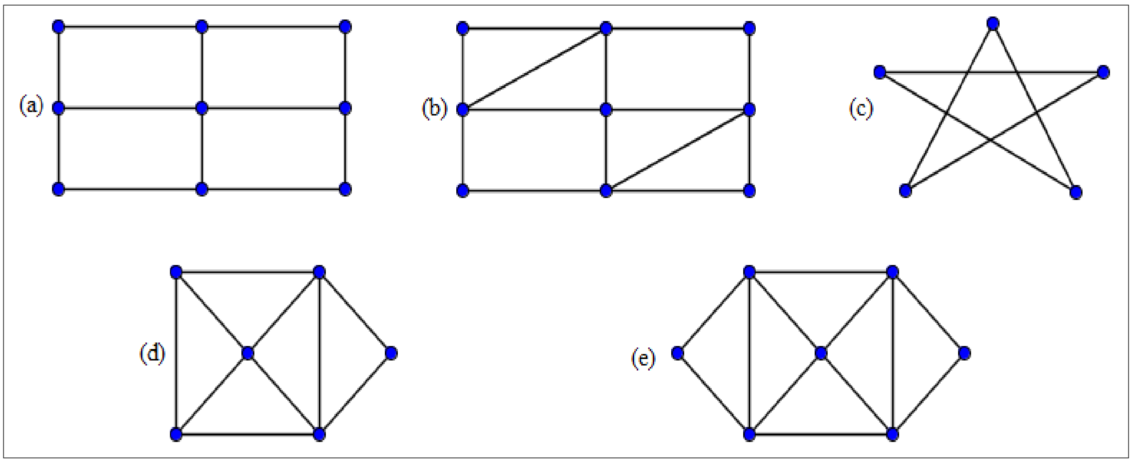


FIGURA 16: Ilustrativa da atividade
FONTE: Elaboração do autor

Resposta 6.

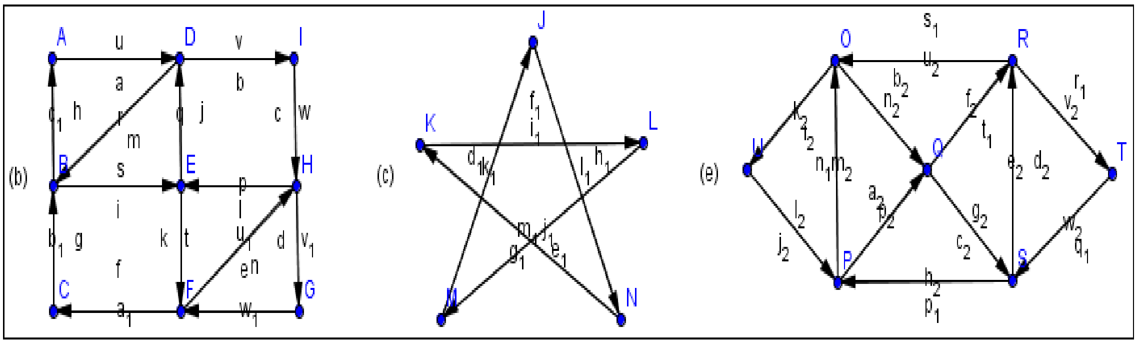


FIGURA 17: Resolução da situação-problema 6
FONTE: Arquivo geogebra da Dupla C

Situação-problema 7.

Outro caso interessante da Teoria dos Grafos é o caminho hamiltoniano, que é aquele em que é possível passar por todos os vértices de um grafo precisamente uma vez. Entretanto, quando essa trajetória forma um circuito, isto é, começa e termina no mesmo vértice tem-se o chamado grafo hamiltoniano. Vale destacar que um grafo hamiltoniano não dispõe de um método conveniente para sua determinação, há diversos teoremas específicos para determinados tipos de grafos, os quais fornecem condições que são na maior parte dos casos suficientes, porém não necessárias.

Atribui-se, a Hamilton[4] a introdução desses conceitos na resolução do seu o jogo caixeiro viajante. Nesse jogo, dado por meio de um dodecaedro, quer-se determinar uma viagem circular que incluísse todas as cidades exatamente uma vez, com a restrição de

[4] William Rowan Hamilton, nascido em Dublin (Irlanda), viveu de 04/08/1805 a 02/09/1865, foi um matemático, físico e astrônomo, fez no decorrer de sua carreira importantes estudos como a teoria dos quaterniões (Disponível em: http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/WilliRow.html, acesso em 01/07/2015).

que só fosse possível viajar de uma cidade a outra se existisse uma aresta entre os vértices correspondentes.

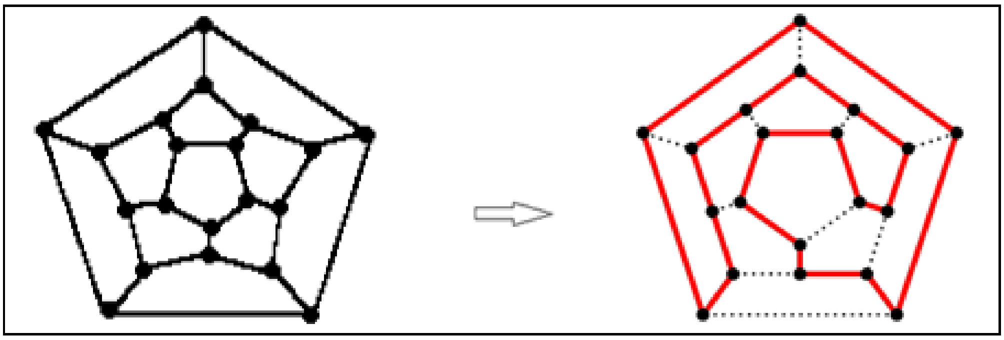


FIGURA 18: Representação da resolução do jogo do caixeiro viajante
FONTE: Elaboração do autor

Suponha que um representante comercial tem clientes em cinco cidades, indicadas por A, B, C, D e E. Ele precisa planejar essa viagem de forma que a partida e o destino final aconteçam na cidade A (onde mora), passando assim uma vez por cada uma das quatro cidades restantes. Analise o grafo a seguir que representa o custo de cada viagem entre as cidades e, por meio de um grafo direcionando mostre no Geogebra o grafo hamiltoniano ideal para essa situação.

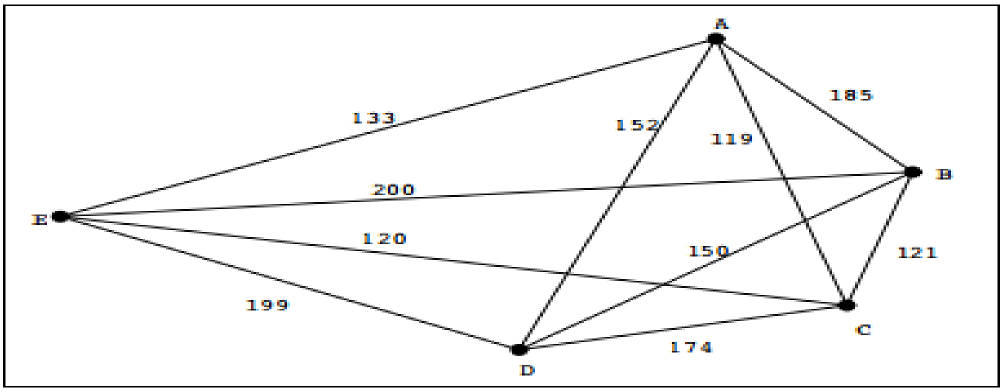


FIGURA 19: Ilustrativa da atividade
FONTE: Elaboração do autor

Resposta 7.

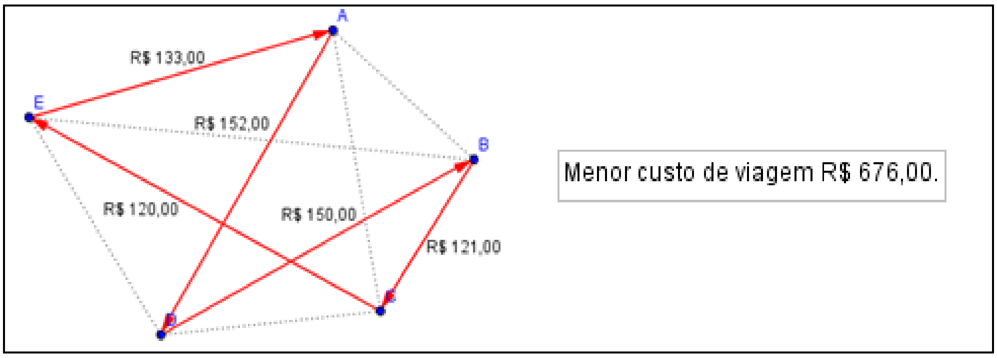


FIGURA 20: Resolução da situação-problema 7
FONTE: Arquivo geogebra da Dupla D

Situação-problema 8.

Um grafo, ainda pode ser representado na forma de uma matriz M bidimensional $n \times n$, onde $M(i,j) = 1$ se a aresta (i,j) estiver presente em G e zero caso contrário, como representado a seguir:

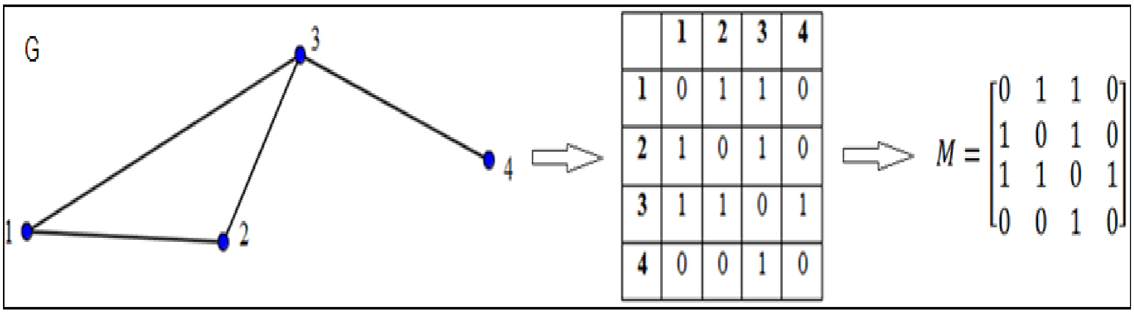


FIGURA 21: Representação matricial do grafo G
FONTE: Elaboração do autor

Dada a representação matricial a seguir, trace no Geogebra um grafo possível. Lembre que na tabela matricial quando um dos vértices tem ligação com outro é representado com 1, não havendo ligação é representado com 0:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Resposta 8.

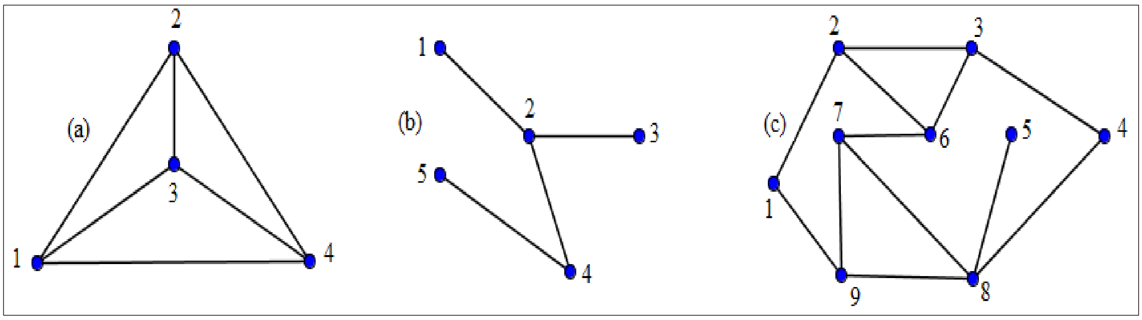
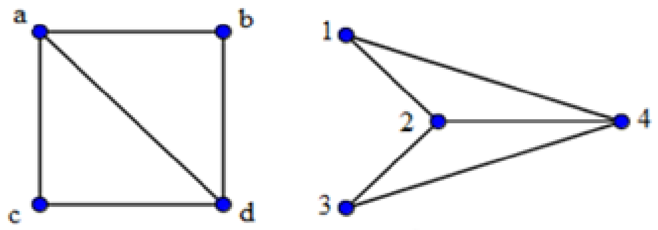


FIGURA 22: Resolução da situação-problema 8
FONTE: Arquivo geogebra da Dupla E

Situação-problema 9.

Muitas vezes, os grafos podem apresentar a mesma representação geométrica, nesses casos tem-se o chamado isomorfismo de grafos. Todavia, fazer a verificação desse isomorfismo pode, por vezes, ser bastante trabalhosa, assim a representação matricial é um recurso valioso que simplifica em muito essa análise. Observe a seguir como a representação matricial dos grafos facilita a visualização do isomorfismo:



$$\Longrightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

G	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	0	1
c	1	0	0	1
d	1	1	1	0

G'	2	1	3	4
2	0	1	1	1
1	1	0	0	1
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

FIGURA 23: Representação matricial para verificar o isomorfismo de grafos
FONTE: Elaboração do autor

Dadas as notações a seguir, construa no Geogebra uma única representação geométrica que satisfaça estes dois grafos:

(a) $G = \left(\{1,2,3,4,5,6\}, \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}\right)$

(b) $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

<u>Resposta 9.</u>

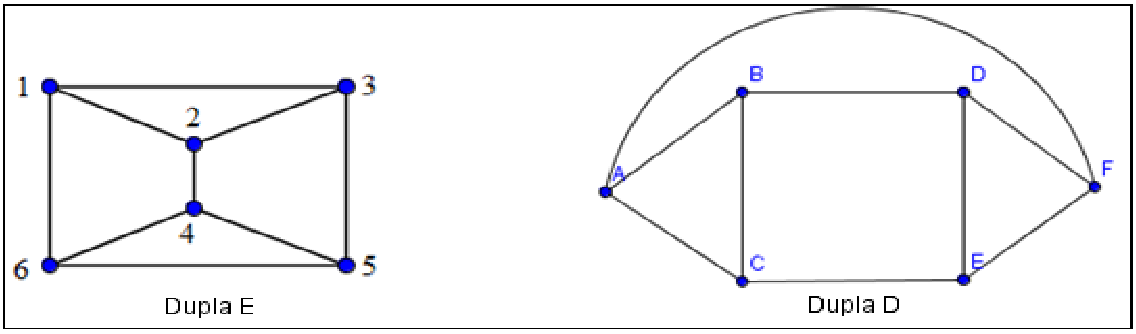


FIGURA 24: Resolução da situação-problema 9
FONTE: Arquivo geogebra das Duplas E e D

<u>Situação-problema 10.</u>

Nas sequências A e B analise quais grafos são isomorfos e apresente uma representação matricial no Geogebra.

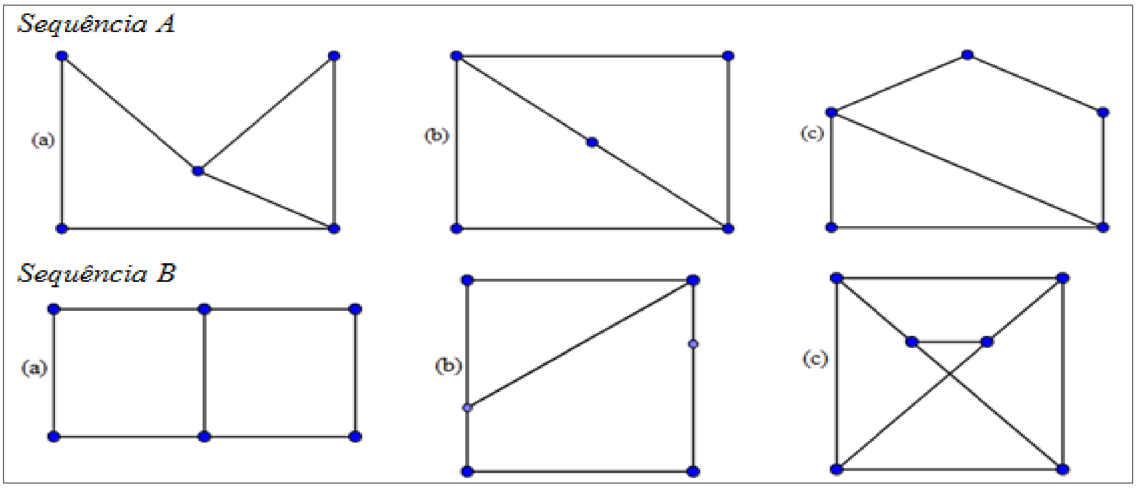


FIGURA 25: Ilustrativa da atividade
FONTE: Elaboração do autor

<u>Resposta 10.</u>

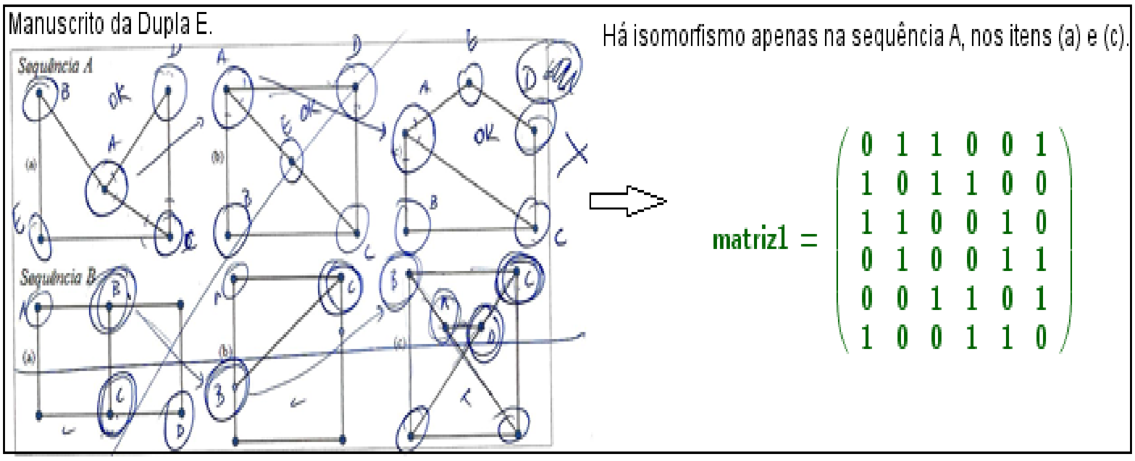


FIGURA 26: Resolução da situação-problema 10
FONTE: Arquivo geogebra das Duplas E

2.2 Reflexões acerca da sequência didática

Na escola em que a sequência didática foi desenvolvida trabalho a cerca de 3 anos como professor de Matemática. Ao longo desses anos pode-se perceber que a comunidade escolar, em sua grande maioria, é formada por famílias de classe média pertencente ao próprio bairro. E possuem apenas o ensino fundamental incompleto. Também se observa que apesar de participativa nos eventos da comunidade, as famílias dos estudantes não participam da escolarização e tampouco, demonstram muito interesse quanto à aprendizagem dos mesmos.

Quanto ao perfil do grupo de estudantes que participaram da experiência pedagógica são oriundos de uma turma do 2º ano do ensino médio que apresentam idades entre 15 e 16 anos, com o número de 30 matriculas efetivada. Todavia, esse número não corresponde ao número real de estudantes frequentes, em geral, trabalha-se em sala de aula com uma média de 70% de assiduidades. Em razão disso, tem-se discutido com a comunidade escolar a viabilidade da manutenção dessa oferta para o próximo ano escolar.

A turma escolhida é agitada, contudo participativa. Além disso, possuem um bom relacionamento interpessoal e quando motivados desenvolvem nas atividades em grupo uma boa dinâmica de trabalho cooperativo.

FIGURA 27: Foto da turma
FONTE: Próprio autor

Ao conversar com os estudantes, esses alegam que não se identificam muito com os conteúdos trabalhados na escola e ainda que a pressão familiar para que esses ingressem logo no mercado de trabalho é muito grande. De outra parte, apontaram que a motivação de estudar advém do objetivo de concluir o ensino médio, mas poucos indicaram que desejam continuar estudando nas fases seguintes a essa formação.

Na busca de melhorar o cenário de ensino e aprendizagem foi desenvolvida essa sequência didática com a proposta de introduzir o estudo da Teoria dos Grafos com o recurso do software Geogebra como recurso pedagógico para ampliação do interesse dos estudantes na resolução de situações-problemas na disciplina de Matemática. Mesmo estando à Teoria dos Grafos cada vez mais presente na resolução de problemas do cotidiano, ela ainda não é um conteúdo da grade curricular do ensino médio regular. Além disso, ao fazer uma breve análise dos livros didáticos adotados pela escola, pode-se verificar que em nenhum deles há referência sobre a Teoria dos Grafos. Nesse sentido, tomou-se o cuidado de abordar a linguagem teórica desse conteúdo de modo mais próximo possível da notação vista anteriormente nos outros conteúdos estudados.

Na rotina de sala de aula, percebe-se que o desencadeamento tradicional dos conteúdos por vezes engessa o planejamento didático-pedagógico do professor, sobretudo, no que se refere à inovações nesse espaço. Dessa forma, é imprescindível diversificar os caminhos tomados na tarefa docente de ensino e aprendizagem para que se possam construir significados mais relevantes na Educação Matemática escolar.

Normalmente, observa-se na explanação de um conteúdo novo pelo professor um discurso tomado de exemplos para que os estudantes os sigam. No desenvolvimento dessa sequência didática, tomou-se o cuidado para que isso não acontecesse. Dessa forma, o conteúdo foi sendo desenvolvido conforme o grupo de estudantes ia avançando na execução das atividades planejadas. Percebeu-se, assim que os estudantes sem a constituição de um modelo previamente construído pelo professor superaram a dificuldade inicial de experimentar e discutir alternativas e soluções. Assim, verificou-se nos diálogos travados entre os grupos de estudantes que para chegarem à resposta final criaram hipóteses e as testaram a fim de confirmar ou refutar as alternativas elencadas como possíveis.

Conforme o relato dos estudantes observou-se que gostaram bastante de executar as atividades. Tomando os trabalhos e as observações realizadas durante a execução da sequência didática, observou-se a motivação e o interesse desse grupo de estudantes em participar dessa proposta de ensino e aprendizagem. Pois, em geral, esses estudantes apresentam uma conduta bastante difícil em sala de aula, sendo necessária a intervenção constante do professor para a manutenção da organização e do silêncio. Entretanto, verificou-se excelente conduta desses estudantes durante o desenvolvimento da sequência didática.

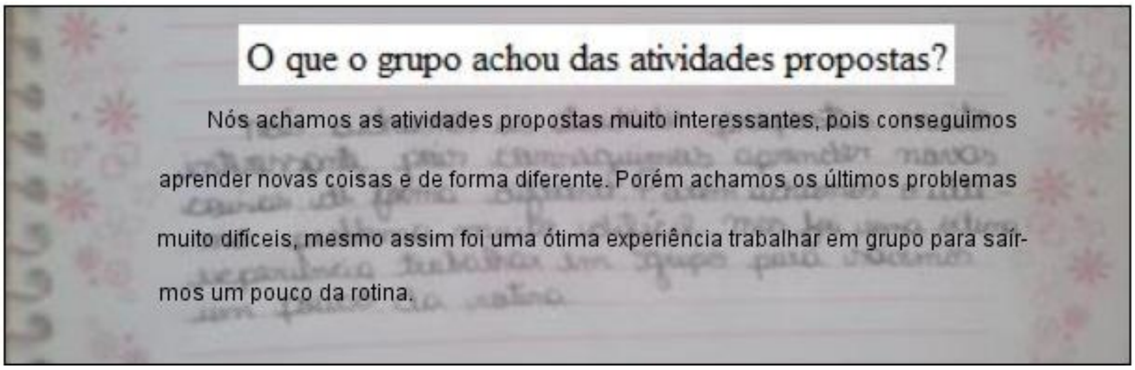


FIGURA 12: Transcrição do registro da opinião das duplas
FONTE: Próprio autor

Nota-se na prática docente que para influir nos processos de ensino e aprendizagem dos estudantes não é condição suficiente apenas o professor ter o domínio do conteúdo, concisão e clareza nas suas explanações. É necessário o professor aproximar-se desses para que possa aprender a interpretar as dificuldades apresentadas por eles. Pois, por vezes, esses se comunicam sem a terminologia apropriada para descrever de fato o motivo propulsor da dúvida.

FIGURA 13: Fotos das duplas trabalhando
FONTE: Próprio autor

Ao analisar os debates e respostas apresentadas durante a execução das atividades percebeu-se um bom desempenho no desenvolvimento das mesmas. Nota-se que os estudantes entenderam as atividades como um desafio e assim evidenciou-se seu engajamento na realização das mesmas. Embora apresentassem certa dificuldade na realização das atividades envolvendo isomorfismo de grafos todas as duplas mostraram-se motivados para a sua realização.

Esses indicativos evidenciam, também, a distorção que existe no espaço de sala de aula em relação à finalidade da tarefa avaliativa. Nota-se que, por vezes, a tarefa avaliativa assume uma dimensão meramente punitiva frente aos estudantes. Sendo assim, a lógica desse paradigma educacional precisa ser rompida, a avaliação precisa assumir sua dimensão social reconhecendo os múltiplos saberes e valores que permeiam a tessitura do conhecimento, e ainda ser entendida como elemento fundamental da dinâmica de inclusão e exclusão escolar e social.

Tabela 1: Desempenho geral das duplas nas atividades propostas

Atividade	Insatisfatório	Satisfatório	Muito Satisfatório
Situação-problema 1			x
Situação-problema 2			x
Situação-problema 3			x
Situação-problema 4			x
Situação-problema 5			x
Situação-problema 6		x	
Situação-problema 7		x	
Situação-problema 8			x
Situação-problema 9		x	
Situação-problema 10		x	

Por fim, acredita-se que essa sequência didática tenha sido bastante valiosa para todos os atores envolvidos nesse processo. Assim, avalia-se que o desenvolvimento tenha sido satisfatório desse conteúdo, principalmente, devido à busca incessante de transformar a informação tratada em um conhecimento aplicável. Dessa forma, termina-se esta experiência didático-pedagógica muito satisfeito por ter vivenciado mais este desafio, ter aprendido muito mais do que ensinei, ter adquirido novas experiências de ensino e aprendizagem. Por ter tido, a oportunidade de perceber que o valor do professor não está apenas na sua formação, mas sim reside na necessidade da sua completude. Pois esse fator, o instiga a avançar no seu olhar pedagógico, na sua capacidade de interagir, de compreender, de aprender, de aproximar cada vez mais a Matemática das necessidades e dos interesses dos seus estudantes.

Considerações finais

Constata-se que nessa sociedade dita do conhecimento e da informação se faz necessária e urgente uma docência que supere os paradigmas da modernidade, e desenvolva um ensino e aprendizagem mais relevante, diante das demandas da sociedade atual. Pois é através de uma educação de qualidade, que prima pela formação integral do sujeito que se obtêm objetivos tais como a redução das distâncias entre as camadas sociais, a desmarginalização, a formação de trabalhadores qualificados e a participação das diferentes camadas nos processos decisórios.

Assim, observa-se no espaço escolar que a sociedade brasileira encontra-se diante de uma grande responsabilidade: o resgate da escola. As implicações políticas, filosóficas e sociais, inerentes aos objetivos da educação constituem elementos essenciais na redefinição da educação, na predeterminação do que se pretende obter como produto final do processo educativo e no modo de integrar esse produto numa sociedade de complexidade crescente.

Dessa forma, a educação é um instrumento dinâmico de técnicas e valores que a sociedade elabora permanentemente, a qual se atribui a finalidade de preparar as gerações jovens no sentido de saber enfrentar as condições essenciais de sua própria existência. E, ao mesmo tempo, de saber elaborar um conjunto de respostas adequadas às mudanças e ao desenvolvimento das relações entre os indivíduos nos planos de um determinado contexto social. A educação assim é considerada como a força desenvolvedora de qualquer iniciativa de desenvolvimento social, cabendo-lhe, como função primordial e básica, a promoção do ser humano. Por este motivo, a tarefa educativa deve lançar seu olhar para fatores cognitivos, sociais e afetivos, a fim de oferecer suporte, no que diz respeito, a postura e as metodologias adotadas pelo professor.

No entanto, vale ressaltar que a mera introdução de uma nova abordagem em sala de aula não garante, necessariamente, sucesso nos processos de ensino e aprendizagem, ao contrário, um método assíncrono ao trabalho docente pode até dar mais ênfase do distanciamento desse professor com essa nova metodologia.

Tendo esse fato em vista, contextualizou-se a sequência didática de forma que a linguagem utilizada a respeito da Teoria dos Grafos não se distanciasse da usual. Além disso, buscou-se na utilização do software Geogebra mais um fator de motivação para a realização das atividades.

Nesse sentido, percebe-se que a contextualização proposta pela sequência didática propiciou avanços nos processos de ensino e aprendizagem, pois fez com que o estudante compreendesse o significado do conteúdo trabalhado, bem como relacionasse significados particulares com o sentido geral da situação envolvida, indicando assim, possibilidades de aplicação daquele conhecimento em outros cenários.

Diante da aplicação da sequência didática observou-se importante referência de mudança no sentimento que o estudante nutre em relação à Matemática. Tais percepções apontaram que durante esse processo de ensino e aprendizagem o estudante pôde internalizar outra representação muito mais positiva dessa disciplina.

Além disso, a partir da observação do envolvimento nas atividades e análise dos trabalhos realizados, contata-se que foi adequado o nível da termologia e conceitos utilizados para o desenvolvimento da Teoria dos Grafos, sobretudo, a utilização do software Geogebra contribuiu de forma relevante para os bons resultados da sequência didática. Por fim, entendesse que o assunto Teoria dos Grafos ainda pode ser amplamente e diferentemente explorado na educação básica, sobretudo, no ensino médio como forma de analisar, interpretar e até mesmo resolver problemas reais que envolva o estudante.

Referências Bibliográficas

BRASIL (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais:* ensino médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 3v.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

CARRASCOSA, J. Análise da formação continuada e permanente dos professores de ciências. IN: MENEZES, L. C. (org.) (1996). *Formação continuada de professores de ciências no contexto Ibero-americano.* Campinas: Autores Associados.

CASAS, Trazíbulo Henrique Pardo (2003). *Informática na educação: a visão dos professores*. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

DANTE, Luiz Roberto (1999). *Didática da resolução de problemas de matemática*. 12 ed. São Paulo: Editora Ática.

FREIRE, Paulo (1996). *Pedagogia do oprimido.* São Paulo: Paz e Terra.

_____________ (1997). *Política e educação.* São Paulo: Cortez.

FREITAS, M.T.M. (2000). *Estágio curricular em matemática na perspectiva de extensão universitária: estudo de uma experiência na UFU*. Dissertação (Mestrado em Educação) – FE, UFU, Uberlândia – MG.

GRAVINA, Maria Alice; BÚRIGO, Elisabete Zardo; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto (2012). *Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação do professor de matemática.* Porto Alegre: Evangraf, 2012.

NETTO, Paulo Oswaldo Boaventura (1996). *Grafos: teoria, modelos, algoritmos.* São Paulo: Edgard Blücher.

MAIA, Christiane Martinatti; SCHEIBEL, Maria Fani; URBAN, Ana Claudia (2009). *Didática: organização do trabalho pedagógico.* Curitiba: IESDE Brasil S.A.

MEIRIEU, P. (1998). *Aprender... sim, mas como?* Porto Alegre: ARTMED.

RABUSKE, Márcia Aguiar (1992). *Introdução à teoria dos grafos.* Florianópolis: Ed. da UFSC.

REGO, Teresa C. (1995). *Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação.* Petrópolis, RJ: Vozes.

SANTAROSA, Lucila Maria Costi (2010). *Tecnologias digitais acessíveis*. Porto Alegre: JSM Comunicação Ltda.

SCHEINERMAN, Edward (2003). *Matemática discreta: uma introdução.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

ZABALA, Antoni (1998). *A prática educativa.* Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed.

ZUFFI, Edna Maura; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa (2007). O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas e os processos cognitivos superiores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* setembro, nº 11, ISSN: 1815-0640.