UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação de Matemática

Existência de Solução para uma Equação Semilinear Elíptica Não-Local

por
André Meneghetti

Porto Alegre, Maio de 2008.

Dissertação submetida por André Meneghetti* como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca Examinadora:
Dr. Alexandre Tavares Baraviera (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Leonardo Guidi (PPGMAp/UFRGS)

Data da Defesa: 07 de Maio de 2008.

*Bolsista da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Resumo

Nessa dissertação estudamos existência e unicidade de soluções para alguns casos do seguinte problema elíptico não local:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \frac{(g(x,u))^{\alpha}}{\left(\int_{\Omega} f(x,u)dx\right)^{\beta}} \quad \text{em} \quad \Omega,\\
u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

em um domínio Ω suave e limitado de $\mathbb{R}^N$ e também com $\Omega = \mathbb{R}^N$, onde α e β são constantes reais.

Abstract

In this dissertation we study existence and uniqueness of solutions to some cases of the following nonlocal elliptic problem:

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \dfrac{(g(x,u))^{\alpha}}{\left(\int_{\Omega} f(x,u)dx\right)^{\beta}} & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array}$$

on Ω a bounded and smooth domain of $\mathbb{R}^N$ and also when $\Omega = \mathbb{R}^N$, where α and β are real constants.

Agradecimentos

Agradeço a Universidade Federal do Rio Grande do Sul que pelo ensino gratuito e de muita qualidade.

Agradeço ao Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino por me orientar nesse trabalho, pelas excelentes aulas que tive ministradas por ele durante a graduação e mestrado e pela disponibilidade que sempre teve para me atender.

A banca examinadora pela atenção e pelas correções que ajudaram a aperfeiçoar esse trabalho.

Aos professores Luís Fernando Carvalho da Rocha, Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena, Sérgio Wortmann, Teresa Tsukasan de Ruiz, Eduardo Henrique de Mattos Brietzke e Vilmar Trevisan por serem professores exemplares e por contribuírem de maneira decisiva na minha formação.

Aos vários amigos que fiz na UFRGS durante esses anos. Em especial ao amigo Hugo Henrique que foi meu colega durante todo o mestrado, passando pelos bons e maus momentos que surgiram no decorrer do curso.

Gostaria agora de agradecer algumas pessoas que contribuíram indiretamente, porém foram de vital importância para mais essa conquista.

Começo pela minha família. Em especial aos meus pais David e Gelcira que sempre me deram apoio integral e nunca mediram esforços para que essa jornada fosse alcançada. Amo vocês! Ao meu irmão pelos conselhos sempre muito pertinentes.

A minha madrinha por adoção, Inês, por estar sempre disposta a ajudar e também por ser essa pessoa tão maravilhosa que eu adoro.

A minha namorada, Camila, pelo companheirismo, pelo carinho, pela compreensão, por cuidar de mim e por estar sempre comigo em qualquer momento. Ou simplesmente por ser a Minha Pequeninha! A sua família, Magno, Andréa, Gabriel e Bruna por terem me recebido tão bem e por serem hoje minha segunda família.

Sumário

1 Introdução

Nesse trabalho estudamos algumas questões relacionadas a existência e unicidade das soluções fracas do problema elíptico não local

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{g(x,u)^{\alpha}}{\left(\int_{\Omega} f(x,u)dx\right)^{\beta}} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde α e β são constantes reais, $f, g : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ são funções contínuas, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave ou $\Omega = \mathbb{R}^N$ Para o último caso as condições de fronteira não são consideradas.
Com relação as diversas aplicações de interesse, a classe de equações

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{(f(u))^{\alpha}}{\left(\int_{\Omega} f(u)dx\right)^{\beta}} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

aparece em numerosos modelos físicos, tais como: sistemas de partículas em equilíbrio termodinâmico via potencial gravitacional (Coulomb), comportamento turbulento $2-D$ total de vazão real, fuga termal em Ohmic Heating, entre outros. Referências para essas aplicações podem ser encontradas em [1].
Do ponto de vista matemático, a presença do termo não local $\left(\int_{\Omega} f(x,u)dx\right)^{\beta}$ na equação (1.1) apresenta questões interessantes e levanta consideráveis dificuldades em alguns métodos padrões que objetivam a resolução de problemas elípticos. Por exemplo, o método variacional não pode ser aplicado para provar existência de resultados para uma grande classe dessas equações.
Por isso, de certo modo, esse tipo de abordagem não é mais investigado por vários autores incluindo Carrilo [2], Tzanetis-Vlamos [5], Stanczy [1] entre outros. Em particular, para $N = 1$ a equação (1.2) torna-se uma equação ordinária, que foi estudada por Stanczy [1].
A principal fonte desse trabalho é [11], nele vamos fazer uso da teoria do ponto fixo para provar a existência de soluções sob a hipótese de que a função f é positiva e não decrescente, portanto limitada inferiormente. Nesse trabalho vamos estudar a classe de equações (1.1) nos casos em que o domínio é limitado e ilimitado. Em (1.2) relaxamos as restrições acima e produzimos um importante aperfeiçoamento do estudo desse problema. Em particular, isso é possível graças ao artifício explorado por Alves-de Figueiredo [6] em [7] e também em [3], com o uso do método de Galerkin para atacar um sistema elíptico não variacional.
Nós adaptamos convenientemente esse técnica ao nosso caso. Além disso, estudamos também a questão da unicidade para a equação. No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$ somos inspirados por Brezis-Kamim [4].

2 Preliminares

Nosso objetivo nesse capítulo é introduzir algumas definições, notações e resultados que serão utilizados ao longo desse trabalho.

2.1 Definições e notações

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$, onde $N \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$.

Notação 2.1. $|\Omega|$ *representa a medida do conjunto* Ω.

Notação 2.2. $\overline{\Omega}$ *representa o fecho do conjunto* Ω.

Notação 2.3. $B_r(x)$ *é a bola aberta de centro* x *e raio* $r > 0$. *Quando o centro da bola for omitido entenderemos que a bola está centrado na origem.*

Definição 2.1. $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *é o espaço das funções* k *vezes diferenciáveis em* Ω *com a* k*-ésima derivada contínua.*

Definição 2.2. $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em* Ω.

Definição 2.3. $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em* Ω.

Definição 2.4. $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ *é o conjunto das funções* $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ *tais que todas as derivadas de ordem menor ou igual a* k *se estendem continuamente a* $\overline{\Omega}$.

Definição 2.5. $L^p(\Omega)$ *é o das funções mensuráveis* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que*

$$\int_\Omega |u|^p dx < \infty.$$

Definição 2.6. *Definimos a norma de* $L^p(\Omega)$ *por*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2.7. $L^\infty(\Omega)$ *é o espaço das funções mensuráveis* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que*

$$\sup \operatorname{ess}|u| < \infty.$$

Definição 2.8. *Definimos a norma em* $L^\infty(\Omega)$ *como*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \operatorname{ess}|u|.$$

Definição 2.9. $W^{1,p}(\Omega)$ *é o espaço de Sobolev que consiste de todas as funções em* $L^p(\Omega)$ *tais que as derivadas parciais de primeira ordem no sentido fraco também pertencem a* $L^p(\Omega)$. *Se* $p = 2$ *denotamos* $W^{1,2}(\Omega)$ *por* $H^1(\Omega)$.

Definição 2.10. *Definimos a norma em* $W^{1,p}(\Omega)$ *por*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2.11. $W_0^{1,p}(\Omega)$ *é o fecho de* $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$. *Intuitivamente, as funções desse espaço se anulam na fronteira. Para* $p = 2$ *denotamos* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *por* $H_0^1(\Omega)$.

Definição 2.12. *Definimos a norma e o produto interno em* $H_0^1(\Omega)$ *respectivamente por*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx.$$

A norma assim definida é equivalente à norma $\|\cdot\|_{w^{1,p}(\Omega)}$ *em* $H_0^1(\Omega)$.

Definição 2.13. *As notações* $\big\langle \cdot,\cdot \big\rangle$ *e* $\big|\cdot\big|$ *denotam respectivamente o produto interno do* $\mathbb{R}^m$ *e sua relativa norma.*

Definição 2.14. *Dizemos que* $u \in \mathcal{C}_{loc}^{1,\gamma}(\Omega)$ *se* u *é* $\mathcal{C}^1(\Omega)$ *e para todo* $K \subseteq \Omega$ *compacto existe* $C = C(K) > 0$ *tal que*

$$\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial u(y)}{\partial x_i}\right| \le C \mid x - y \mid^\alpha, \quad \forall x, y \in K.$$

2.2 Resultados

Teorema 2.1. *Seja* H *um espaço de Hilbert e* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* H. *Então existe uma subsequência* $(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ *fracamente convergente em* H.

Prova: Ver [8], página 85.

Teorema 2.2. (Desigualdade de Hölder) *Suponha que* $1 \le p,\, q \le \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. *Então se* $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, *temos*

$$\int_\Omega |uv| dx \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Ver [9], página 623.

Teorema 2.3. (Desigualdade de Sobolev) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto, onde* $\partial\Omega$ *é* $\mathcal{C}^1$. *Suponha que* $1 \le p < N$ *e* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Então* $u \in L^{p^*}(\Omega)$ *e vale a estimativa*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

onde $p^* = \frac{Np}{N-p}$ *e a constante* C *depende apenas de* p,N *e* Ω.

Prova: Ver [9], página 265.

Teorema 2.4. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto. Suponha que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *para algum* $1 \leq p < N$*. Então temos a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para cada $q \in [1, p^*]$*, onde* $p^* = \frac{Np}{N-p}$ *e a constante* C *depende apenas de* p*,* q*,* N *e* Ω*.*

Prova: Ver [9], página 265.

Teorema 2.5. (Teorema de Rellich-Kondrachov) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto limitado tal que* $\partial\Omega$ *é de classe* $\mathcal{C}^1$*. Então, dada uma sequência limitada* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W^{1,p}(\Omega)$*, existe uma subsequência* $(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ *é convergente em qualquer* $L^q(\Omega)$*, onde* $q < p^* = \frac{Np}{N-p}$*.*

Prova: Ver [10], página 167.

Teorema 2.6. (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* f_n *uma sequência de funções integráveis tais que* $f_n \to f$ *q.t.p.. Suponha que exista uma* g *integrável tal que* $|f_n(x)| < g(x)$ *q.t.p.. Então* f *é integrável e* f_n *converge em média para* f*, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|dx = 0$$

e em particular,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx = \int_X f(x)dx.$$

Teorema 2.7. (Ponto fixo de Brouwer) *Seja* $B_r(0)$ *a bola do* $\mathbb{R}^N$ *e suponha que*

$$F : \overline{B_r(0)} \longrightarrow \overline{B_r(0)}$$

é uma função contínua. Então existe um $z_0 \in \overline{B_r(0)}$ *tal que* $F(z_0) = z_0$*.*

Prova: Ver [9], página 441.

Proposição 2.1. *Suponha que* $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *é uma função contínua tal que* $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$ *em* $|\xi| = r$*. Então existe um* $z_0 \in \overline{B_r(0)}$ *tal que* $F(z_0) = 0$*.*

Prova: Suponhamos por contradição que $F(\xi) \neq 0$ $\forall \xi \in \overline{B_r(0)}$. Definimos a função $G : \overline{B_r(0)} \longrightarrow \partial\overline{B_r(0)}$ por

$$G(\xi) = -r\frac{F(\xi)}{|F(\xi)|}.$$

Note que G é contínua. Logo, pelo teorema (2.7), existe um ponto $z_0 \in \overline{B_r(0)}$ tal que $G(z_0) = z_0$. Como $z_0 \in \partial\overline{B_r(0)}$, $|z_0| = r = \langle z_0, z_0 \rangle^{\frac{1}{2}}$, logo

$$r^2 = \langle z_0, z_0 \rangle = \langle G(z_0), z_0 \rangle = \left\langle -r\frac{F(z_0)}{|F(z_0)|}, z_0 \right\rangle = \frac{-r}{|F(z_0)|} \langle F(z_0), z_0 \rangle .$$

Como

$$\frac{-r}{|F(z_0)|} < 0 \ e \ \ \langle F(z_0), z_0 \rangle \geq 0,$$

temos que $r^2 \leq 0$. Contradição. Logo, existe $z_0 \in \overline{B_r(0)}$ tal que $F(z_0) = 0$.

■

3 Resultados de existência para o caso $f(x,u) = g(x,u) = f(u)$ e Ω limitado.

Teorema 3.1. *Suponha que f seja uma função contínua tal que*

$$f(t) \geq k_0 > 0, \quad \forall t \in [0,\infty), \tag{3.1}$$
$$f(t) < k_\infty, \quad \forall t \in [0,\infty), \tag{3.2}$$

onde $k_0, k_\infty \in \mathbb{R}$. Então para qualquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ o problema (1.2) possui uma solução fraca e essa solução é positiva.

Prova: A prova é baseada no método de Galerkin.
Seja $\{\varphi_1, ..., \varphi_m, ...\}$ uma base ortonormal do espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$.
Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos o espaço de Hilbert de dimensão finita dado por $\mathbb{V}_m = \{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$. Conseqüentemente os espaços $(\mathbb{V}_m, \|\cdot\|)$ e $(\mathbb{R}^m, |\cdot|)$ são isométricos e isomorfos.
Portanto, faremos a seguinte identificação:

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j \quad \longleftrightarrow \quad \xi = (\xi_1, ..., \xi_m).$$

Logo,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = |\xi|.$$

Caso 1: $\alpha, \beta > 0$.
Reescrevendo o problema (1.2) obtemos

$$\begin{aligned} -\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\beta \Delta u = (f(u))^\alpha \quad & em \quad \Omega, \\ u = 0 \quad & em \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Consideremos a função $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$F(\xi) = (F_1(\xi), ..., F_m(\xi)),$$

onde

$$F_i(\xi) = \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\beta \xi_i - \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi_i dx$$

com $i = 1, 2, ..., m$ e $u = \sum_{j=1}^m \xi_j \varphi_j$.
Note que

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j \Longrightarrow u_{x_i} = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_{j_{x_i}},$$

o que implica que

$$\nabla u = (u_{x_1}, ..., u_{x_m}) = \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_{j_{x_1}}, ..., \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_{j_{x_m}}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} \xi_j(\varphi_{j_{x_1}}, ..., \varphi_{j_{x_m}}) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \nabla \varphi_j.$$

Assim,

$$\nabla u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \nabla \varphi_j,$$

logo,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx = \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j \nabla \varphi_j \right) \nabla \varphi_i dx.$$

Como a soma dentro da integral é finita

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \int_\Omega \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i dx = \xi_i,$$

pois a base $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ é ortonormal e $\int_\Omega \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i dx = \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{H_0^1(\Omega)}$. Assim, $\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx = \xi_i$ o que implica que

$$F_i(\xi) = \left(\int_\Omega f(u) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx - \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi_i dx.$$

Com isso obtemos que

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = F_1(\xi)\xi_1 + \ldots + F_m(\xi)\xi_m =$$

$$\left(\left(\int_\Omega f(u) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx - \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi_1 dx \right) \xi_1 + \ldots +$$

$$\left(\left(\int_\Omega f(u) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_m dx - \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi_m dx \right) \xi_m =$$

$$\left(\int_\Omega f(u) dx \right)^\beta \left(\xi_1 \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx + \ldots + \xi_m \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_m dx \right) +$$

$$\left(\xi_1 \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi_1 dx + \ldots + \xi_m \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi_m dx \right) =$$

$$\left(\int_\Omega f(u) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla (\xi_1 \varphi_1 + \ldots + \xi_m \varphi_m) dx - \int_\Omega (f(u))^\alpha (\xi_1 \varphi_1 + \ldots + \xi_m \varphi_m) dx =$$

$$\left(\int_\Omega f(u) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla u dx - \int_\Omega (f(u))^\alpha u dx.$$

Logo,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = \left(\int_\Omega f(u)dx \right)^\beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega (f(u))^\alpha u dx.$$

Observamos agora que por (3.2) $f(t) < k_\infty \quad \forall t \in [0, \infty)$. Logo,

$$\int_\Omega (f(u))^\alpha u dx \leq \left| \int_\Omega (f(u))^\alpha u dx \right| \leq$$

$$\int_\Omega |f(u)|^\alpha |u| dx < \int_\Omega k_\infty^\alpha |u| dx = k_\infty^\alpha \int_\Omega |u| dx.$$

Pela desigualdades de Hölder,

$$\int_\Omega |u| dx \leq \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pela desigualdade de Poincaré,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = C \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

ou seja,

$$\int_\Omega (f(u))^\alpha u dx < k_\infty^\alpha \int_\Omega |u| dx \leq k_\infty^\alpha |\Omega|^{\frac{1}{2}} C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \Longrightarrow$$

$$- \int_\Omega (f(u))^\alpha u dx > -C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

onde $C_1 = k_\infty^\alpha |\Omega|^{\frac{1}{2}} C > 0$. Além disso, por (3.1), $f(t) \geq k_0 > 0$. Então

$$\left(\int_\Omega f(u)dx \right)^\beta \geq \left(\int_\Omega k_0 dx \right)^\beta = k_0^\beta |\Omega|^\beta,$$

ou seja,

$$\left(\int_\Omega f(u)dx \right)^\beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq C_0 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

onde $C_0 = k_0^\beta |\Omega|^\beta > 0$.
Portanto, obtemos a seguinte estimativa:

$$\langle F(\xi), \xi \rangle > C_0 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

onde $C_0, C_1 > 0$.

Seja $r > 0$ suficientemente grande de modo que $C_0 r^2 - C_1 r \geq 0$. Se escolhermos $u \in \mathbb{V}_m$ tal que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = r$, então

$$\langle F(\xi), \xi \rangle > C_0 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq 0 \Longrightarrow$$

$$\langle F(\xi), \xi \rangle > 0.$$

Observação 3.1. *Note que*

$$\langle F(\xi), \xi \rangle > C_0 \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - C_1 \|u\|_{H^1_0(\Omega)} = C_0 r^2 - C_1 r \geq 0$$

não depende da escolha *de m. Ou seja, r independe de m.*

Pela proposição (2.1) existe $z_0 \in \overline{B_r(0)}$ tal que $F(z_0) = 0$. Como os espaços $\mathbb{V}_m$ e $\mathbb{R}^m$ são isomorfos e isométricos, seja $u_m \in \mathbb{V}_m$ tal que $u_m = \sum_{j=1}^m z_{0_j} \varphi_j$, onde $z_0 = (z_{0_1}, \ldots, z_{0_m})$. Logo $\|u_m\|_{H^1_0(\Omega)} = |z_0| \leq r$ e

$$0 = F(z_0) = (F_1(z_0), \ldots, F_m(z_0)).$$

Então,

$$F_i(z_0) = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

e

$$F_i(z_0) = \left(\int_\Omega f(u_m) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi_i dx - \int_\Omega (f(u_m))^\alpha \varphi_i dx,$$

$\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, logo

$$\left(\int_\Omega f(u_m) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi_i dx = \int_\Omega (f(u_m))^\alpha \varphi_i dx,$$

$\forall \varphi_i \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$.

Afirmação 3.1. *A igualdade acima vale para todo $\varphi \in \mathbb{V}_m$.*

De fato, se $\varphi \in \mathbb{V}_m$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi = \alpha_1 \varphi_1, \ldots, \alpha_m \varphi_m$. Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $\alpha_i, \ i \in \{1, \ldots, m\}$ temos

$$\left(\int_\Omega f(u_m) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m \nabla \alpha_i \varphi_i dx = \int_\Omega (f(u_m))^\alpha \alpha_i \varphi_i dx.$$

Somando de 1 a m,

$$\sum_{i=1}^m \left(\int_\Omega f(u_m) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m \nabla \alpha_i \varphi_i dx = \sum_{i=1}^m \int_\Omega (f(u_m))^\alpha \alpha_i \varphi_i dx.$$

Como a soma é finita,

$$\left(\int_\Omega f(u_m) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m \nabla \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i \right) dx = \int_\Omega (f(u_m))^\alpha \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i \right) dx.$$

Logo,

$$\left(\int_\Omega f(u_m) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi dx = \int_\Omega (f(u_m))^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathbb{V}_m. \tag{3.3}$$

Então para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $u_m \in \mathbb{V}_m \subset H_0^1(\Omega)$ satisfazendo (3.3) tal que $\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq r$. Consideremos então a sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \in H_0^1(\Omega)$ que é limitada, pois $\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq r$, e satisfaz a equação (3.3).

Como a sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, existe uma subsequência $(u_{m_k})_{m_k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, usando a desigualdade de Poincaré

$$\|u_{m_k}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\Omega)} = C\|u_{m_k}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Cr.$$

Portanto $(u_{m_k})_{m_k\in\mathbb{N}}$ e $(\nabla u_{m_k})_{m_k\in\mathbb{N}}$ são sequências limitadas em $L^2(\Omega)$, ou seja, $(u_{m_k})_{m_k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $W^{1,2}(\Omega)$. Pelo teorema de Rellich-Kondrachov existe uma subsequência $(u_{m_{k_l}})_{m_{k_l}\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{m_{k_l}} \to v \in L^2(\Omega).$$

Vamos renomear $u_{m_{k_l}}$ e chamar simplesmente de u_m.
Resumindo:

$$\begin{array}{rcl} u_m & \rightharpoonup & u \in H_0^1(\Omega), \\ u_m & \to & v \in L^2(\Omega). \end{array}$$

Note que $u_m \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega)$ implica que $u_m \rightharpoonup u \in L^2(\Omega)$, pois $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e $u_m \to v \in L^2(\Omega)$ implica que $u_m \rightharpoonup v \in L^2(\Omega)$. Como $L^2(\Omega)$ com a topologia fraca é um espaço de Hausdorff, pela unicidade do limite temos que $u = v$ q.t.p.. Ou seja,

$$\begin{array}{rcl} u_m & \rightharpoonup & u \in H_0^1(\Omega), \\ u_m & \to & u \in L^2(\Omega). \end{array} \tag{3.4}$$

Além disso, convergência em $L^2(\Omega)$ implica, a menos de uma subsequência, que

$$u_m(x) \to u(x) \quad q.t.p. \text{ em } \Omega.$$

Note que como $u_m(x) \to u(x)$ q.t.p. e f é uma função contínua então $f(u_m) \to f(u)$ q.t.p. . Além disso $|f(u_m)| < k_\infty$ por (3.2). Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega f(u_m)dx \to \int_\Omega f(u)dx$$

logo,

$$\left(\int_\Omega f(u_m)dx\right)^\beta \to \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\beta. \tag{3.5}$$

Dado $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, como $u_m \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Observamos ainda que $f(u_m) \to f(u)$ q.t.p. implica que
$(f(u_m))^\alpha \to (f(u))^\alpha$ *q.t.p.*. Logo, dado $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,
$(f(u_m))^\alpha \varphi \to (f(u))^\alpha \varphi$ q.t.p.. Visto que $|(f(u_m))^\alpha \varphi| \le k_\infty^\alpha |\varphi|$
pelo Teorema da Convegência Dominada

$$\int_\Omega (f(u_m))^\alpha \varphi dx \to \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.7}$$

Seja $m_0 \in \mathbb{N}$. Note que, pela equação (3.3), temos que, para $m \ge m_0$ vale

$$\left(\int_\Omega f(u_m)dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi dx = \int_\Omega (f(u_m))^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathbb{V}_{m_0}.$$

Logo, por (3.5),(3.6) e (3.7), temos

$$\begin{array}{ccl}
\left(\int_\Omega f(u_m)dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi dx & = & \int_\Omega (f(u_m))^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathbb{V}_{m_0}, \ u_m \in \mathbb{V}_m, \\
\downarrow \qquad\qquad \downarrow & & \qquad \downarrow \\
\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx & = & \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathbb{V}_{m_0}, \ u \in H_0^1(\Omega),
\end{array}$$

quando $m \to \infty$.

Como m_0 é arbitrário a igualdade vale $\forall \varphi \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{V}_m$.
Note que $H_0^1(\Omega) = \overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{V}_m}$. Então dado $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, tome $\varphi_k \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{V}_m$ tal que $\varphi_k \to \varphi$. Assim,

$$\left|\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_k dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx\right| = \left|\int_\Omega \nabla u \nabla(\varphi_k - \varphi)dx\right| \le \int_\Omega |\nabla u||\nabla(\varphi_k - \varphi)|dx \le$$

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla(\varphi_k - \varphi)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi_k - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0,$$

quando $k \to \infty$.
Analogamente,

$$\int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi_k dx \to \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi dx,$$

quando $k \to \infty$.
Logo

$$\begin{array}{ccl}
\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_k dx & = & \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi_k dx, \quad \varphi_k \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{V}_m, \\
\downarrow & & \qquad \downarrow \\
\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx & = & \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi dx, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega),
\end{array}$$

quando $k \to \infty$.
Portanto dados $\alpha, \beta > 0$ existe um $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que para qualquer $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ vale a igualdade

$$\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi dx,$$

ou seja, o problema (1.2) possui solução fraca. Pelo Princípio do Máximo garantimos que u é positivo.

Caso 2: $\alpha > 0$ e $\beta = -\gamma < 0$.
Nesse caso podemos reescrever a equação (1.2) como

$$\begin{aligned} -\Delta u = (f(u))^\alpha \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \quad em \;\; \Omega, \\ u = 0 \quad em \;\; \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Consideremos a função $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$F(\xi) = (F_1(\xi), ..., F_m(\xi)),$$

onde

$$F_i(\xi) = \xi_i - \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi_i dx$$

com $i = 1, ..., m$ e $u = \sum_{j=1}^m \xi_j \varphi_j$.

Como visto antes,

$$u = \sum_{j=1}^m \xi_j \varphi_j \Longrightarrow \nabla u = \sum_{j=1}^m \xi_j \nabla \varphi_j.$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx = \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^m \xi_j \nabla \varphi_j\right) \nabla \varphi_i dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx = \sum_{j=1}^m \xi_j \int_\Omega \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i dx = \left\{ \begin{array}{l} \xi_i \; se \; i = j \\ 0 \; se \; i \neq j \end{array} \right. ,$$

o que implica que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx = \xi_i.$$

Assim,

$$F_i(\xi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx - \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi_i dx.$$

Dessa maneira, temos que

$$\langle F(\xi),\xi\rangle = \sum_{i=1}^{m} F_i(\xi)\xi_i =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi_i dx - \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi_i dx\right)\xi_i =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\int_\Omega \nabla u\nabla(\xi_i\varphi_i) dx - \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \int_\Omega (f(u))^\alpha \xi_i\varphi_i dx\right) =$$

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i\varphi_i\right)dx - \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \int_\Omega (f(u))^\alpha \left(\sum_{i=1}^{m}\xi_i\varphi_i\right)dx =$$

$$\int_\Omega \nabla u\nabla u dx - \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \int_\Omega (f(u))^\alpha u dx.$$

Então,

$$\langle F(\xi),\xi\rangle = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \int_\Omega (f(u))^\alpha u dx$$

Aplicando a condição (3.2) temos que

$$\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \int_\Omega (f(u))^\alpha u dx \leq \left|\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \int_\Omega (f(u))^\alpha u dx\right| \leq$$

$$\left(\int_\Omega |f(u)|dx\right)^\gamma \int_\Omega |f(u)|^\alpha |u| dx < \left(\int_\Omega k_\infty dx\right)^\gamma \int_\Omega k_\infty^\alpha |u| dx =$$

$$(k_\infty)^\gamma \left(\int_\Omega dx\right)^\gamma k_\infty^\alpha \int_\Omega |u|dx = (k_\infty)^{\gamma+\alpha}|\Omega|^\gamma \int_\Omega |u|dx.$$

Respectivamente, pelas desigualdades de Hölder e Poincaré

$$\int_\Omega |u|dx \leq \left(\int_\Omega 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \int_\Omega (f(u))^\alpha u dx < C\|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

onde $C = (k_\infty)^{\gamma+\alpha}|\Omega|^{\gamma+\frac{1}{2}}C_1 > 0$, ou seja,

$$-\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\gamma \int_\Omega (f(u))^\alpha u dx > -C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Utilizando a estimativa obtida acima

$$\langle F(\xi),\xi\rangle > \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Logo, se $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = r$ e r for suficientemente grande

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0.$$

Procedendo de maneira análoga ao caso 1, visto anteriormente, concluímos então que dados $\alpha >$ e $\beta < 0$, existe um $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi dx \left(\int_\Omega f(u) dx \right)^{-\beta}, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Logo o problema (3.8) possui solução fraca e essa solução, pelo Princípio do Máximo, é positiva.

Demais casos: Os casos em que

$$\begin{array}{ll} \alpha < 0, \beta > 0, & \alpha < 0, \beta < 0, \\ \alpha = 0, \beta \neq 0, & \alpha \neq 0, \beta = 0, \end{array}$$

são semelhantes as casos (1) e (2). Podemos então concluir que o problema (1.2) possui solução fraca para qualquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e essa solução é positiva.

$\blacksquare$

Teorema 3.2. *Suponha que f seja uma função contínua tal que*

$$0 < \beta < \alpha < \frac{N+2}{2N} < 1, \tag{3.9}$$

$$f(0) > 0, \tag{3.10}$$

e que vale a condição (3.2). Então o problema (1.2) possui uma solução fraca e essa solução é positiva.

Observação 3.2. *Note que para satisfazer a condição (3.9) é necessário que $N \geq 3$.*

Prova:
Como $\alpha, \beta > 0$ vamos supor igualmente ao caso (1) do teorema anterior que $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é dado por

$$F(\xi) = (F_1(\xi), \ldots, F_m(\xi)),$$

onde

$$F_i(\xi) = \left(\int_\Omega f(u) dx \right)^\beta \xi_i - \int_\Omega (f(u))^\alpha \varphi dx,$$

com $i = 1, 2, \ldots, m$, $u = \sum_{j=1}^m \xi_j \varphi_j$ e, como vimos anteriormente, $\xi_i = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_j dx$.

Afirmação 3.2. *As hipóteses da proposição (2.1) são satisfeitas.*

Para comprovar a afirmação, vamos supor por contradição que as hipóteses da proposição (2.1) não sejam satisfeitas. Então, para cada $m \in \mathbb{N}$ e para cada $r > 0$, existe um $\xi_r = (\xi_{r_1}, \ldots, \xi_{r_m}) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\langle F(\xi_r), \xi_r \rangle < 0 \quad e \quad |\xi_r| = r.$$

Seja $u_r \in \mathbb{V}_m$ tal que $u_r = \sum_{j=1}^{m} \xi_{r_j} \varphi_j$. Portanto,

$$\langle F(\xi_r), \xi_r \rangle = \left(\int_\Omega f(u_r) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_r \nabla u_r dx - \int_\Omega (f(u_r))^\alpha u_r dx < 0.$$

Logo,

$$\left(\int_\Omega f(u_r) dx \right)^\beta \|u_r\|^2_{H_0^1(\Omega)} < \int_\Omega (f(u_r))^\alpha u_r dx. \tag{3.11}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder na parte a direita de (3.11), temos

$$\int_\Omega (f(u_r))^\alpha u_r dx \leq \left| \int_\Omega (f(u_r))^\alpha u_r dx \right| \leq \int_\Omega |f(u_r)|^\alpha |u_r| dx \leq$$

$$\left(\int_\Omega f(u_r) dx \right)^\alpha \left(\int_\Omega (u_r)^{\frac{1}{1-\alpha}} dx \right)^{1-\alpha} = \left(\int_\Omega f(u_r) dx \right)^\alpha \|u_r\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)}.$$

Afirmação 3.3. *Existe um $C > 0$ tal que*

$$\|u_r\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)} \leq C \|\nabla u_r\|_{L^2(\Omega)} = C \|u_r\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Para aplicar a Desigualdade de Sobolev acima precisamos garantir que $\frac{1}{1-\alpha} \leq \frac{2N}{N-2}$. Mas

$$\frac{1}{1-\alpha} \leq \frac{2N}{N-2} \Longleftrightarrow N - 2 \leq 2N - 2N\alpha \Longleftrightarrow -N - 2 \leq -2N\alpha \Longleftrightarrow \alpha \leq \frac{N+2}{2N},$$

o que vale pela condição (3.9). Portanto, a Afirmação 3.3 é verdadeira. Logo,

$$\int_\Omega (f(u_r))^\alpha u_r dx \leq \left(\int_\Omega f(u_r) dx \right)^\alpha C \|u_r\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.12}$$

Assim, aplicando (3.12) em (3.11) deduzimos que

$$\left(\int_\Omega f(u_r) dx \right)^\beta \|u_r\|^2_{H_0^1(\Omega)} < C \left(\int_\Omega f(u_r) dx \right)^\alpha \|u_r\|_{H_0^1(\Omega)} \Longrightarrow$$

$$\|u_r\|_{H_0^1(\Omega)} < C \left(\int_\Omega f(u_r) dx \right)^{\alpha - \beta}.$$

Como $\alpha > 0$, pelas condições (3.9) e por (3.2), segue que

$$r = \|u_r\|_{H_0^1(\Omega)} < C\left(\int_\Omega f(u_r)dx\right)^{\alpha-\beta} < Ck_\infty^{\alpha-\beta}|\Omega|^{\alpha-\beta} = C_1,$$

ou seja,

$$r < C\left(\int_\Omega f(u_r)dx\right)^{\alpha-\beta} < C_1, \quad \forall r > 0.$$

Contradição!

Portanto a Afirmação 3.2 é verdadeira, o que implica que para cada $m \in \mathbb{N}$, existe um $r > 0$ tal que $\langle F(\xi), \xi\rangle \geq 0$ onde $|\xi| = r$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$.

Pela proposição (2.1), existe um $z_0 \in \overline{B_r(0)}$ tal que $F(z_0) = 0$. Seja $u_m \in \mathbb{V}_m$ tal que $u_m = \sum_{j=1}^m z_{0_j}\varphi_j$, $\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} = |z_0| < r$. Como visto anteriormente,

$$\left(\int_\Omega f(u_m)dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m \nabla\varphi_i dx = \int_\Omega (f(u_m))^\alpha \varphi_i dx, \quad \forall\varphi_i \in \{\varphi_1, \cdots, \varphi_m\},$$

o que implica que

$$\left(\int_\Omega f(u_m)dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u_m \nabla\varphi dx = \int_\Omega (f(u_m))^\alpha \varphi dx, \quad \forall\varphi \in \mathbb{V}_m. \tag{3.13}$$

Nesse caso, observamos que nada garante que r não dependa da escolha de m. Contudo, vamos provar que existe uma constante $D > 0$ tal que $\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq D, \forall m \in \mathbb{N}$.
Escolhendo $\varphi = u_m$ em (3.13), temos

$$\left(\int_\Omega f(u_m)dx\right)^\beta \|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (f(u_m))^\alpha u_m dx \leq \left|\int_\Omega (f(u_m))^\alpha u_m dx\right| \leq$$

$$\int_\Omega |f(u_m)|^\alpha |u_m| dx \leq \left(\int_\Omega |f(u_m)|dx\right)^\alpha \left(\int_\Omega |u_m|^{\frac{1}{1-\alpha}}dx\right)^{1-\alpha} =$$

$$\left(\int_\Omega |f(u_m)|dx\right)^\alpha \|u_m\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega |f(u_m)|dx\right)^\alpha C\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Logo,

$$\left(\int_\Omega f(u_m)dx\right)^\beta \|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C\left(\int_\Omega |f(u_m)|dx\right)^\alpha \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Pelas condições (3.9) e (3.2) segue que

$$\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\left(\int_\Omega |f(u_m)|dx\right)^{\alpha-\beta} < Ck_\infty^{\alpha-\beta}|\Omega|^{\alpha-\beta} = D,$$

isso é, $\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} < D, \forall m \in \mathbb{N}$. Logo $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é sequência limitada por D em $H_0^1(\Omega)$.

O resto da demonstração segue análoga ao caso (1) do teorema anterior.

■

4 Resultados para o caso $g(x,u) = \rho(x)^{\frac{1}{\alpha}}(u_+)$, $f(x,u) = f(u)$ e Ω limitado.

Consideremos o problema (1.1) com $g(x,u) = \rho(x)^{\frac{1}{\alpha}}(u_+)$, onde $\rho \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\rho \geq 0$, $\rho \not\equiv 0$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ e Ω um domínio limitado. Então vamos estudar a existência e unicidade do seguinte problema:

$$
\begin{array}{rcllr}
-\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\beta \Delta u & = & \rho(x)(u_+)^\alpha & \text{em} & \Omega, \\
u & > & 0 & \text{em} & \Omega, \\
u & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega,
\end{array} \tag{4.1}
$$

onde $u_+(x) = max\{u(x), 0\}$.

Observação 4.1. *Se f satisfaz (3.1) para qualquer $t \in \mathbb{R}$, então pelo Princípio do Máximo u tem que ser positivo em Ω.*

Teorema 4.1. *Suponha que*

$$0 < \alpha < 1, \tag{4.2}$$

$$f \text{ seja crescente para } t \in [0, \infty) \tag{4.3}$$

e que vale (3.1). Então existe solução fraca para problema (4.1) e essa solução é única.

Prova:
Existência da solução:
Consideremos a função $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$F(\xi) = (F_1(\xi), ..., F_m(\xi)),$$

onde

$$F_i(\xi) = \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\beta \xi_i - \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha \varphi_i dx,$$

com $i = 1, 2, ..., m$ e $u = \sum_{j=1}^m \xi_j \varphi_j$.

Como vimos anteriormente, $\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx = \xi_i$ o que implica que

$$F_i(\xi) = \left(\int_\Omega f(u)dx\right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx - \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha \varphi_i dx,$$

$\forall \varphi_i \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$.

Com isso obtemos que

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = \sum_{i=1}^{m} F_i(\xi)\xi_i =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\left(\int_\Omega f(u)dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i dx - \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha \varphi_i dx \right) \xi_i =$$

$$\left(\int_\Omega f(u)dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \varphi_i \right) dx - \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \varphi_i \right) dx =$$

$$\left(\int_\Omega f(u)dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u \nabla u dx - \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx.$$

Logo,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = \left(\int_\Omega f(u)dx \right)^\beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx.$$

Note que

$$\int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx \leq \left| \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx \right| \leq \int_\Omega |\rho(x)||(u_+)|^\alpha |u| dx$$
$$\leq \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u|^{\alpha+1} dx = \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|^{\alpha+1}_{L^{\alpha+1}(\Omega)}.$$

Como $1 + \alpha < 2 < \frac{2N}{N-2}$ podemos aplicar a Desigualdade de Sobolev, isso é, existe um $C > 0$ tal que

$$\|u\|^{\alpha+1}_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \leq C\|u\|^{\alpha+1}_{H_0^1(\Omega)},$$

logo,

$$-\int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx \geq -C_1 \|u\|^{\alpha+1}_{H_0^1(\Omega)},$$

onde $C_1 = C\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$.

Além disso, por (3.1)

$$\left(\int_\Omega f(u)dx \right)^\beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq \left(\int_\Omega k_0 dx \right)^\beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = C_0 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

onde $C_0 = k_0^\beta |\Omega|^\beta > 0$.

Portanto,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq C_0 \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - C_1 \|u\|^{\alpha+1}_{H^1_0(\Omega)}.$$

Como $C_0, C_1 > 0$ e $2 > \alpha + 1$, se $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} = r$ e r for suficientemente grande então $C_0 r^2 - C_1 r^{\alpha+1} > 0$, o que implica que $\langle F(\xi), \xi \rangle > 0$.

A partir daqui a demonstração segue os mesmo passos do teorema (3.1), concluindo que o problema (4.1) possui solução fraca e essa solução é positiva.

Unicidade da solução:
Suponhamos que u_1 e u_2 sejam soluções fracas da equação (4.1), ou seja,

$$\left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_i \nabla \varphi dx = \int_\Omega \rho(x) u_i^\alpha \varphi dx, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Observação 4.2. *Note que ao supor que u_1 e u_2 sejam soluções da equação (4.1) estamos dizendo em particular que $u_1 = u_{1+}$ e $u_2 = u_{2+}$ em Ω.*

Se u_i é solução, então $u_i > 0$ em Ω. A função $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ é crescente, logo

$$\int_\Omega f(u_i) dx > 0 \Longrightarrow \left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^\gamma > 0,$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\frac{\left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^\beta \int_\Omega \nabla u_i \nabla \varphi dx}{\left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^\gamma} = \frac{\int_\Omega \rho(x) u_i^\alpha \varphi dx}{\left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^\gamma},$$

o que implica

$$\left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^{\beta - \gamma} \int_\Omega \nabla u_i \nabla \varphi dx = \left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^{-\gamma} \int_\Omega \rho(x) u_i^\alpha \varphi dx, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Vamos tomar $\gamma = \frac{-\alpha\beta}{1-\alpha}$. Assim, teremos que

$$\left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \int_\Omega \nabla u_i \nabla \varphi dx = \left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^{\frac{\alpha\beta}{1-\alpha}} \int_\Omega \rho(x) u_i^\alpha \varphi dx,$$

o que implica

$$\int_\Omega \nabla \left(\left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} u_i \right) \nabla \varphi dx = \int_\Omega \rho(x) \left(\left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} u_i \right)^\alpha \varphi dx.$$

Seja $U_i = \left(\int_\Omega f(u_i) dx \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} u_i$. A equação acima se reescreve como

$$\int_\Omega \nabla U_i \nabla \varphi dx = \int_\Omega \rho(x) U_i^\alpha \varphi dx, \text{ para } i \in \{1, 2\}.$$

Para $i \in \{1,2\}$, $u_i > 0$ e $\left(\int_\Omega f(u_i)dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} > 0$. Logo as funções U_i são soluções fracas e positivas do problema

$$\begin{array}{rcll} -\Delta U & = & \rho(x)U^\alpha & \text{em} \quad \Omega, \\ U & > & 0 & \text{em} \quad \Omega\ , \\ U & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{array}$$

Segundo Brezis-Kamin [4], Apêndice II, o problema acima possui uma única solução. Portanto, temos que $U_1 = U_2$, ou seja,

$$\left(\int_\Omega f(u_1)dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} u_1(x) = \left(\int_\Omega f(u_2)dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} u_2(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.4}$$

Se existir um $x_0 \in \Omega$ tal que $u_1(x_0) = u_2(x_0) \neq 0$, então

$$\left(\int_\Omega f(u_1)dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} = \left(\int_\Omega f(u_2)dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}.$$

Dividindo a equação (4.4) por $\left(\int_\Omega f(u_1)dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$ temos que

$$u_1(x) = u_2(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

ou seja,

$$u_1 \equiv u_2.$$

Se $u_1(x) \neq u_2(x)$ $\forall x \in \Omega$, então teremos que $u_1(x) < u_2(x)$ ou $u_1(x) > u_2(x)$, $\forall x \in \Omega$. Suponhamos que $u_1(x) < u_2(x)$ $\forall x \in \Omega$. Pela hipótese (4.3) sabemos que $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é crescente, logo

$$\int_\Omega f(u_1)dx < \int_\Omega f(u_2)dx \Longrightarrow \left(\int_\Omega f(u_1)dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} < \left(\int_\Omega f(u_2)dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$$

que implica que

$$\left(\int_\Omega f(u_1)dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} u_1(x) < \left(\int_\Omega f(u_2)dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} u_2(x)$$

contradizendo (4.4).
Assim, $u_1 \equiv u_2$ o que significa que o problema (4.1) possui solução única.

■

5 Resultados para o caso $g(x,u) = \rho(x)^{\frac{1}{\alpha}}u$, $f(x,u) = u$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Essa seção é dedicada ao estudo do seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \rho(x)\left(\int_{\mathbb{R}^N} u dx\right)^{\beta} u^{\alpha} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\
u &> 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

onde $\rho \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, $\rho \geq 0$, $\rho \not\equiv 0$ com α, $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $\beta \geq 0$, $\alpha > 0$, $\alpha + \beta < 1$.

Vamos estudar a existência de uma solução fraca para esse problema. Para isso, usaremos a técnica desenvolvida em Brezis-Kamin [4].
Para esse propósito é importante o estudo desse problema em domínios limitados. Mais precisamente,

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \rho(x)\left(\int_{\Omega} u dx\right)^{\beta} u^{\alpha} \quad \text{em} \quad \Omega, \\
u &> 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{em} \quad \Omega, \\
u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{em} \quad \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

Com relação ao problema acima temos o seguinte teorema:

Teorema 5.1. *Se $\rho \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\rho > 0$, $\rho \not\equiv 0$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\beta \geq 0, \alpha > 0, \alpha + \beta < 1$, então existe uma solução fraca para o problema (5.2) e essa solução é única.*

Prova:
Existência da solução:
Considere a função $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$
F(\xi) = (F_1(\xi), ..., F_m(\xi)),
$$

onde

$$
F_i(\xi) = \xi_i - \left(\int_{\Omega} u_+ dx\right)^{\beta} \int_{\Omega} \rho(x)(u_+)^{\alpha} \varphi_i dx
$$

com $i = 1, 2, ..., m$, $u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j$ e $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_i dx = \xi_i$.

Isso implica que

$$
F_i(\xi) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_i dx - \left(\int_{\Omega} u_+ dx\right)^{\beta} \int_{\Omega} \rho(x)(u_+)^{\alpha} \varphi_i dx,
$$

$\forall \varphi_i \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$.

Obtemos então que

$$\langle F(\xi),\xi\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \left(\sum_{i=1}^m \xi_i\varphi_i\right) dx - \left(\int_\Omega u_+ dx\right)^\beta \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha \left(\sum_{i=1}^m \xi_i\varphi_i\right) dx =$$

$$\int_\Omega \nabla u\nabla u dx - \left(\int_\Omega u_+ dx\right)^\beta \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx =$$

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \left(\int_\Omega u_+ dx\right)^\beta \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx.$$

Logo,

$$\langle F(\xi),\xi\rangle = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \left(\int_\Omega u_+ dx\right)^\beta \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx.$$

Observamos que

$$\left(\int_\Omega u_+ dx\right)^\beta \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx \leq \left|\left(\int_\Omega u_+ dx\right)^\beta \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx\right| \leq$$

$$\left(\int_\Omega |u_+| dx\right)^\beta \int_\Omega |\rho(x)||u_+|^\alpha |u| dx \leq \left(\int_\Omega |u| dx\right)^\beta \int_\Omega |\rho(x)||u|^{\alpha+1} dx \leq$$

$$\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |u| dx\right)^\beta \int_\Omega |u|^{\alpha+1} dx.$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_\Omega |u| dx \leq \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)} \Longrightarrow$$

$$\left(\int_\Omega |u| dx\right)^\beta \leq |\Omega|^{\frac{\beta}{2}} \|u\|^\beta_{L^2(\Omega)}$$

e que

$$\int_\Omega |u|^{\alpha+1} dx \leq \left(\int_\Omega (|u|^{\alpha+1})^{\frac{2}{\alpha+1}} dx\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \left(\int_\Omega (1)^{\frac{2}{1-\alpha}} dx\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} =$$

$$\left(\left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\alpha+1} |\Omega|^{\frac{1-\alpha}{2}} = |\Omega|^{\frac{1-\alpha}{2}} \|u\|^{\alpha+1}_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$\left(\int_\Omega u_+dx\right)^\beta \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx \leq \|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1-\alpha+\beta}{2}}\|u\|^{\alpha+\beta+1}_{L^2(\Omega)}.$$

Pela Desigualdade de Poincaré,

$$\|u\|^{\alpha+\beta+1}_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|^{\alpha+\beta+1}_{H^1_0(\Omega)},$$

ou seja,

$$-\left(\int_\Omega u_+dx\right)^\beta \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha u dx \geq -C_1\|u\|^{\alpha+\beta+1}_{H^1_0(\Omega)},$$

onde $C_1 = C\|\rho\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1-\alpha+\beta}{2}}$.
Portanto,

$$\langle F(\xi), \xi\rangle \geq \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - C_1\|u\|^{\alpha+\beta+1}_{H^1_0(\Omega)}.$$

Como $2 > \alpha+\beta+1$, se $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} = r$ e r for suficientemente grande, então

$$\langle F(\xi), \xi\rangle \geq r^2 - C_1 r^{\alpha+\beta+1} > 0.$$

Daqui em diante a prova é análoga ao Teorema (4.1), portanto concluímos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx = \left(\int_\Omega u dx\right)^\beta \int_\Omega \rho(x)(u_+)^\alpha \varphi dx,\ \forall\varphi \in H^1_0(\Omega),$$

ou seja, existe uma solução fraca para o problema (5.1). Pelo Princípio do Máximo, u é positivo.

Unicidade da solução:
Suponha que u_1, u_2 sejam soluções de (5.2). Então, para $i \in \{1,2\}$ e para todo $\varphi \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u_i \nabla\varphi dx = \left(\int_\Omega u_i dx\right)^\beta \int_\Omega \rho(x)u_i^\alpha \varphi dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega u_i dx > 0,$$

portanto,

$$\left(\int_\Omega u_i dx\right)^\gamma > 0, \quad \text{para qualquer} \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\frac{\int_\Omega \nabla u_i \nabla\varphi dx}{\left(\int_\Omega u_i dx\right)^\gamma} = \frac{\left(\int_\Omega u_i dx\right)^\beta \int_\Omega \rho(x)u_i^\alpha\varphi dx}{\left(\int_\Omega u_i dx\right)^\gamma}$$

$$\left(\int_\Omega u_i dx\right)^{-\gamma} \int_\Omega \nabla u_i \nabla\varphi dx = \left(\int_\Omega u_i dx\right)^{\beta-\gamma} \int_\Omega \rho(x)u_i^\alpha\varphi dx$$

$$\int_\Omega \nabla\left(\left(\int_\Omega u_i dx\right)^{-\gamma} u_i\right)\nabla\varphi dx = \int_\Omega \left(\int_\Omega u_i dx\right)^{\beta-\gamma} \rho(x) u_i^\alpha \varphi dx.$$

Tomando $\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}$, temos

$$\int_\Omega \nabla\left(\left(\int_\Omega u_i dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}} u_i\right)\nabla\varphi dx = \int_\Omega \rho(x)\left(\left(\int_\Omega u_i dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}} u_i\right)^\alpha \varphi dx.$$

Sendo $U_i = u_i \left(\int_\Omega u_i dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}} > 0$, teremos que

$$\int_\Omega \nabla U_i \nabla\varphi dx = \int_\Omega \rho(x) U_i^\alpha \varphi dx,$$

ou seja, U_i é solução fraca positiva do problema

$$\begin{array}{rcll} -\Delta U & = & \rho(x)U^\alpha & \text{em} \quad \Omega, \\ U & > & 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ U & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{array}$$

Analogamente ao teorema anterior, prova-se que $u_1 \equiv u_2$, ou seja, problema (5.1) possui uma única solução fraca.

■

Vamos voltar ao problema (5.1). Primeiramente vamos apresentar alguns lemas que serão úteis para demonstrar o próximo teorema.

Lema 5.1. *Seja $u_2 \in H_0^1(\Omega)$, solução fraca de*

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \rho(x)u^\alpha & \text{em} \quad \Omega, \\ u & > & 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{array}$$

onde $0 < \alpha < 1$. Então $u_2 \in L^\infty(\Omega)$.

Prova: Como $\rho(x) \in L^\infty(\Omega)$ então existe um $M > 0$ tal que $\rho(x) < M$. Seja $a > 0$ tal que $0 < aM < \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω.
Note que

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}.$$

Existe $b > 0$ tal que $t^\alpha \leq at + b$, $\forall t \geq 0$.
Seja v solução fraca de

$$\begin{array}{rl} -\Delta v = \rho(x)(av+b) & em \quad \Omega, \\ v = 0 & em \quad \partial\Omega. \end{array} \tag{5.3}$$

Logo, $v \in L^\infty(\Omega)$ (veja [10] Teorema 8.15).

Afirmação 5.1. *$u_2 \leq v$.*

De fato, como v é solução fraca de (5.3)

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi dx = \int_\Omega \rho(x)(av+b)\varphi dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{5.4}$$

Como $t^\alpha \leq at+b,\ \forall t \geq 0$, tomando $t = u_2$ temos que $u_2^\alpha < au_2 + b$, logo

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla \varphi dx = \int_\Omega \rho(x) u_2^\alpha \varphi dx \leq \int_\Omega \rho(x)(au_2+b)\varphi dx,$$

para $\varphi \geq 0$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Portanto,

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla \varphi dx \leq \int_\Omega \rho(x)(au_2+b)\varphi dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \varphi \geq 0. \tag{5.5}$$

Fazendo (5.5)-(5.4)

$$\int_\Omega \nabla(u_2 - v)\nabla \varphi dx \leq \int_\Omega \rho(x)\varphi a(u_2 - v)dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \varphi \geq 0.$$

Vamos supor que $\max\{u_2 - v, 0\} \not\equiv 0$ q.t.p. e escolher $\varphi = \max\{u_2 - v, 0\}$. Seja $A = \{x \in \Omega : u_2(x) > v(x)\}$.

Observação 5.1. $\max\{u_2 - v, 0\} \in H_0^1(\Omega)$ *e é não negativo.*

Assim, temos que

$$\int_\Omega \nabla(u_2 - v)\nabla \max\{u_2 - v, 0\} dx \leq \int_\Omega \rho(x) \max\{u_2 - v, 0\} a(u_2 - v) dx \Longrightarrow$$

$$\int_A |\nabla(u_2 - v)|^2 dx \leq \int_A \rho(x) a(u_2 - v)^2 dx < \int_A Ma(u_2 - v)^2 dx < \int_A \lambda_1 (u_2 - v)^2 dx \Longrightarrow$$

$$\int_A |\nabla(u_2 - v)|^2 dx < \lambda_1 \int_A (u_2 - v)^2 dx \Longrightarrow$$

$$\frac{\int_A |\nabla(u_2 - v)|^2 dx}{\int_A (u_2 - v)^2 dx} < \lambda_1 \Longrightarrow \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx}{\int_\Omega \varphi^2 dx} < \lambda_1.$$

Contradição!

Logo, $\max\limits_{x\in\Omega}\{u_2 - v, 0\} \equiv 0$ q.t.p. o que implica que $u_2 < v$ q.t.p.. Além disso, como $v \in L^\infty(\Omega)$ então $u_2 \in L^\infty(\Omega)$, completando a prova do lema.

■

Observação 5.2. *O lema continua válido se u_2 satisfaz*

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & \leq & \rho(x)u^\alpha & \text{em} \quad \Omega, \\ u & > & 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{array}$$

Lema 5.2. *Sejam* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *solução fraca de*

$$\begin{array}{rcllr} -\Delta u & \leq & \rho(x)u^{\alpha} & \text{em} & \Omega, \\ u & > & 0 & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{array} \tag{5.6}$$

e $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ *solução fraca de*

$$\begin{array}{rcllr} -\Delta u & = & \rho(x)u^{\alpha} & \text{em} & \Omega, \\ u & > & 0 & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{array} \tag{5.7}$$

onde $0 < \alpha < 1$ *. Então* $u_1 \leq u_2$*.*

Prova: Seja $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave não decrescente tal que $\theta(t) = 0$ se $t \leq 0$ e $\theta(t) = 1$ se $t \geq 1$.
Vamos definir $\theta_\varepsilon(t) = \theta(\frac{t}{\varepsilon})$ e sejam $\varphi_1 = u_2\theta_\varepsilon(u_1 - u_2)$ e $\varphi_2 = u_1\theta_\varepsilon(u_1 - u_2)$.

Afirmação 5.2. φ_1*,* $\varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$*.*

Vamos mostrar que $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ e assim, analogamente, $\varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$.

Primeiro observamos que $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$, pois $u_2 \in L^2(\Omega)$ e $\theta_\varepsilon \leq 1$ o que implica $u_2\theta_\varepsilon \in L^2$.

Observação 5.3. $\theta_\varepsilon(u_1 - u_2)$ *é mensurável, pois* $u_1 - u_2$ *é mensurável e* θ_ε *é contínua.*

Agora vamos provar que $(\varphi_1)_{x_i} = (u_2)_{x_i}\theta_\varepsilon(u_1 - u_2) + u_2\theta'_\varepsilon(u_1 - u_2)(u_1 - u_2)_{x_i}$.

Seja $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Como $u_2 \in H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}$, existe $\omega_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $\omega \to u_2$ em $H_0^1(\Omega)$.

Note que

$$(\varphi_1)_{x_i}(\psi) = -\int_\Omega \varphi_1 \psi_{x_i} dx = -\int_\Omega u_2 \theta_\varepsilon(u_1 - u_2)\psi_{x_i} dx =$$

$$-\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \omega_n \theta_\varepsilon(u_1 - u_2)\psi_{x_i} dx = -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \theta_\varepsilon(u_1 - u_2)\big((\omega_n\psi)_{x_i} - (\omega_n)_{x_i}\psi\big) dx =$$

$$-\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \theta_\varepsilon(u_1 - u_2)(\omega_n\psi)_{x_i} dx - \int_\Omega \theta_\varepsilon(u_1 - u_2)(\omega_n)_{x_i}\psi dx\right).$$

Observação 5.4. *Como $\theta_\varepsilon(t)$ é suave e $\theta'_\varepsilon(t)$ é limitado então $\theta_\varepsilon(t)$ é de Lipchitz. Assim, como $(u_1 - u_2) \in H^1_0(\Omega)$, então $\theta_\varepsilon(u_1 - u_2) \in H^1_0(\Omega)$ e $\big(\theta_\varepsilon(u_1 - u_2)\big)_{x_i} = \theta'_\varepsilon(u_1 - u_2)(u_1 - u_2)_{x_i}$ pelo Lema (7.5) de [10].*

Logo,

$$(\varphi_1)_{x_i}(\psi) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \big(\theta_\varepsilon(u_1 - u_2)\big)_{x_i}(\omega_n\psi) dx + \int_\Omega \theta_\varepsilon(u_1 - u_2)(\omega_n)_{x_i}\psi dx\right).$$

Então,

$$\int_\Omega \varphi_1 \psi_{x_i} dx = -\int_\Omega \big(\theta'_\varepsilon(u_1 - u_2)(u_1 - u_2)_{x_i} u_2 + \theta_\varepsilon(u_1 - u_2)(u_2)_{x_i}\big)\psi dx,$$

que implica

$$(\varphi_1)_{x_i} = u_2\theta'_\varepsilon(u_1 - u_2)(u_1 - u_2)_{x_i} + (u_2)_{x_i}\theta_\varepsilon(u_1 - u_2).$$

Portanto, $\varphi_1 \in H^1_0(\Omega)$.

Observação 5.5. *Como $u_1, u_2, \theta_\varepsilon \geq 0$ então $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$.*

Por definição, se u_1 é solução de (5.6) então

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi dx \leq \int_\Omega \rho(x) u_1^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega), \quad \varphi \geq 0.$$

Assim, em particular se $\varphi = \varphi_1$

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi_1 dx \leq \int_\Omega \rho(x) u_1^\alpha \varphi_1 dx,$$

logo,

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla\big(u_2\theta_\varepsilon(u_1 - u_2)\big) dx \leq \int_\Omega \rho(x) u_1^\alpha u_2 \theta_\varepsilon(u_1 - u_2) dx,$$

isso é,

$$\int_\Omega \nabla u_1\big(\nabla u_2\theta_\varepsilon(u_1-u_2)+u_2\theta'_\varepsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)\big)dx \leq \int_\Omega \rho(x)u_1^\alpha u_2\theta_\varepsilon(u_1-u_2)dx. \tag{5.8}$$

Como u_2 é solução de (5.7) então

$$\int_\Omega \nabla u_2\nabla\varphi dx = \int_\Omega \rho(x)u_2^\alpha\varphi dx, \forall\varphi\in H_0^1(\Omega).$$

Em particular se $\varphi=\varphi_2$

$$\int_\Omega \nabla u_2\nabla\varphi_2 dx = \int_\Omega \rho(x)u_2^\alpha\varphi_2 dx$$

$$\int_\Omega \nabla u_2\nabla\big(u_1\theta_\varepsilon(u_1-u_2)\big)dx = \int_\Omega \rho(x)u_2^\alpha u_1\theta_\varepsilon(u_1-u_2)dx$$

$$\int_\Omega \nabla u_2\big(\nabla u_1\theta_\varepsilon(u_1-u_2)+u_1\theta'_\varepsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)\big)dx = \int_\Omega \rho(x)u_2^\alpha u_1\theta_\varepsilon(u_1-u_2)dx. \tag{5.9}$$

Subtraindo a equação (5.9) da inequação (5.8) obtemos

$$\int_\Omega (u_2\nabla u_1-u_1\nabla u_2)\theta'_\varepsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx \leq \int_\Omega \rho(x)\theta_\varepsilon(u_1-u_2)\big(u_1^\alpha u_2-u_2^\alpha u_1\big)dx \Longrightarrow$$

$$\int_\Omega (u_2\nabla u_1-u_1\nabla u_2)\theta'_\varepsilon(u_1-u_2)\nabla(u_1-u_2)dx \leq \int_\Omega \rho(x)\theta_\varepsilon(u_1-u_2)u_1u_2\big(u_1^{\alpha-1}-u_2^{\alpha-1}\big)dx. \tag{5.10}$$

Note que

$$0\leq \int_\Omega u_2(\nabla u_1-\nabla u_2)^2\theta'_\varepsilon(u_1-u_2)dx$$

$$0\leq \int_\Omega (u_2\nabla u_1-u_2\nabla u_2)\theta'_\varepsilon(u_1-u_2)(\nabla u_1-\nabla u_2)dx$$

$$0\leq \int_\Omega \big((u_2\nabla u_1-u_1\nabla u_2)+(u_1\nabla u_2-u_2\nabla u_2)\big)\theta'_\varepsilon(u_1-u_2)(\nabla u_1-\nabla u_2)dx$$

$$\int_\Omega -(u_1\nabla u_2-u_2\nabla u_2)\theta'_\varepsilon(u_1-u_2)(\nabla u_1-\nabla u_2)dx \leq \int_\Omega (u_2\nabla u_1-u_1\nabla u_2)\theta'_\varepsilon(u_1-u_2)(\nabla u_1-\nabla u_2)dx$$

$$\int_\Omega \nabla u_2(u_2-u_1)\theta'_\varepsilon(u_1-u_2)(\nabla u_1-\nabla u_2)dx$$

$$\leq \int_\Omega (u_2 \nabla u_1 - u_1 \nabla u_2)\theta'_\varepsilon(u_1 - u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2)dx.$$

Substituindo o resultado acima na inequação (5.10) obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_2(u_2 - u_1)\theta'_\varepsilon(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2)dx \leq \int_\Omega \rho(x)\theta_\varepsilon(u_1 - u_2)u_1u_2\big(u_1^{\alpha-1} - u_2^{\alpha-1}\big)dx.$$

Agora observamos que definindo $\gamma_\varepsilon(t) = \int_0^t s\theta'_\varepsilon(s)ds$ temos que

$$\nabla\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2) = \gamma'_\varepsilon(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2) =$$

$$(u_1 - u_2)\theta'_\varepsilon(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2) = -(u_2 - u_1)\theta'_\varepsilon(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2) \Longrightarrow$$

$$\nabla\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2) = -(u_2 - u_1)\theta'_\varepsilon(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2),$$

logo,

$$-\int_\Omega \nabla u_2 \nabla\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx \leq \int_\Omega \rho(x)\theta_\varepsilon(u_1 - u_2)u_1u_2\big(u_1^{\alpha-1} - u_2^{\alpha-1}\big)dx. \tag{5.11}$$

Como $(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega)$ e γ_ε é de Lipchitz, com $\gamma_\varepsilon(0) = 0$, então $\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega)$.
Além disso, como u_2 é solução, tomando $\varphi = \gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)$ temos

$$\int_\Omega \nabla u_2 \nabla\varphi dx = \int_\Omega \rho(x)u_2^\alpha \varphi dx \Longrightarrow$$

$$-\int_\Omega \rho(x)u_2^\alpha\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx = -\int_\Omega \nabla u_2\nabla\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)dx. \tag{5.12}$$

Afirmação 5.3. $|\gamma_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$.

Vamos supor sem perda de generalidade que para $0 < t \leq 1$, $\theta'(t) < 2$. Logo, $\theta'_\varepsilon(t) < \frac{2}{\varepsilon}$. Como $\theta'(t) = 0$ para $t \leq 0$ e $t > \varepsilon$ temos que

$$\gamma_\varepsilon(t) = \int_0^t s\theta'_\varepsilon(s)ds = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < 0 \\ \int_0^t s\theta'_\varepsilon(s)ds \leq \int_0^t s\frac{2}{\varepsilon}ds = \frac{2t^2}{\varepsilon 2} \leq \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon & \text{para} \quad 0 < t \leq \varepsilon \\ \int_0^t s\theta'_\varepsilon(s)ds \leq \int_0^\varepsilon s\frac{2}{\varepsilon}ds = \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon 2} = \varepsilon & \text{para} \quad t > \varepsilon \end{cases}.$$

Logo, vale a afirmação.

Como $\rho(x) \in L^\infty(\Omega)$ e, pelo Lema (5.1), $u_2 \in L^\infty(\Omega)$ então $\rho(x)u_2 \in L^\infty(\Omega)$. Isso implica que existe um $C > 0$ tal que $|u_2^\alpha\rho(x)| < Cq.t.p.$.
Logo,

$$|u_2^\alpha\rho(x)\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2)| \leq C\varepsilon \Longrightarrow -C\varepsilon \leq -u_2^\alpha\rho(x)\gamma_\varepsilon(u_1 - u_2).$$

Assim, substituindo em (5.12)

$$\int_{\Omega} -C\varepsilon dx \leq -\int_{\Omega} \nabla u_2 \nabla \gamma_{\varepsilon}(u_1 - u_2) dx \Longrightarrow$$

$$-D\varepsilon \leq -\int_{\Omega} \nabla u_2 \nabla \gamma_{\varepsilon}(u_1 - u_2) dx \tag{5.13}$$

onde $D = C|\Omega|$.

De (5.11) e (5.13) concluímos que

$$-D\varepsilon \leq \int_{\Omega} \rho(x)\theta_{\varepsilon}(u_1 - u_2)u_1 u_2 \big(u_1^{\alpha-1} - u_2^{\alpha-1}\big) dx.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, $\theta_{\varepsilon}(u_1 - u_2) \to H(u_1 - u_2)$, onde H é a função de Heaviside. Pelo teorema da convergência dominada

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -D\varepsilon \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \rho(x)\theta_{\varepsilon}(u_1 - u_2)u_1 u_2 \big(u_1^{\alpha-1} - u_2^{\alpha-1}\big) dx \Longrightarrow$$

$$0 \leq \int_{\Omega} \rho(x) u_1 u_2 H(u_1 - u_2) \big(u_1^{\alpha-1} - u_2^{\alpha-1}\big) dx,$$

onde $H(u_1 - u_2) = \begin{cases} 1 \ se \ u_1 > u_2 \\ 0 \ se \ u_1 \leq u_2 \end{cases}$.

Portanto,

$$0 \leq \int_{A} \rho(x) u_1 u_2 \big(u_1^{\alpha-1} - u_2^{\alpha-1}\big) dx,$$

onde $A = \{x \in \Omega; u_1(x) > u_2(x)\}$.

Como $\alpha - 1 < 0$, se $|A| > 0$ então a integral acima será negativa, gerando uma contradição.

Portanto $|A| = 0$, o que implica que $u_1 \leq u_2$ q.t.p. em Ω. Além disso o fato de u_1 e u_2 serem contínuas garante que $u_1 \leq u_2$.

■

Lema 5.3. *Sejam $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de*

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \rho(x) \left(\displaystyle\int_{B_R} u dx \right)^{\beta} u^{\alpha} & \text{em} \quad B_R, \\ u & > & 0 & \text{em} \quad B_R, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial B_R \end{array}$$

e $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \rho(x)\left(\int_{B_{R'}} u dx\right)^{\beta} u^{\alpha} && \text{em} \quad B_{R'},\\
u &> 0 && \text{em} \quad B_{R'},\\
u &= 0 && \text{em} \quad \partial B_{R'},
\end{aligned}
$$

onde $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$, $R' > R$ *e* $B_{R'} \subset \Omega$. *Então* $u_1 \leq u_2$.

Prova:
Como u_1 satisfaz

$$
\int_{B_R} \nabla u_1 \nabla \varphi dx = \left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x) u_1^{\alpha} \varphi dx
$$

e

$$
\int_{B_R} u_1 dx > 0 \Longrightarrow \left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\gamma} > 0, \forall \gamma \in \mathbb{R},
$$

temos que

$$
\frac{\int_{B_R} \nabla u_1 \nabla \varphi dx}{\left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\gamma}} = \frac{\left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x) u_1^{\alpha} \varphi dx}{\left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\gamma}}
$$

$$
\left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{-\gamma} \int_{B_R} \nabla u_1 \nabla \varphi dx = \left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\beta-\gamma} \int_{B_R} \rho(x) u_1^{\alpha} \varphi dx.
$$

Tomando $\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}$,

$$
\left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}} \int_{B_R} \nabla u_1 \nabla \varphi dx = \left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\frac{-\alpha\beta}{1-\alpha}} \int_{B_R} \rho(x) u_1^{\alpha} \varphi dx
$$

$$
\int_{B_R} \nabla \left(u_1 \left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}\right) \nabla \varphi dx = \int_{B_R} \rho(x) \left(u_1 \left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} \varphi dx.
$$

Logo $U_1 = u_1\left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}$ é solução fraca do problema

$$\begin{array}{rcllr} -\Delta u & = & \rho(x)u^\alpha & \text{em} & B_R, \\ u & > & 0 & \text{em} & B_R, \\ u & = & 0 & \text{em} & \partial B_R. \end{array}$$

Analogamente, $U_2 = u_2\left(\int_{B_{R'}} u_2 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}$ é solução fraca de

$$\begin{array}{rcllr} -\Delta u & = & \rho(x)u^\alpha & \text{em} & B_{R'}, \\ u & > & 0 & \text{em} & B_{R'}, \\ u & = & 0 & \text{em} & \partial B_{R'}. \end{array}$$

Afirmação 5.4. *$U_1 \leq U_2$.*

Se isso não ocorrer é porque existe um aberto $S \subset B_R$ tal que

$$\begin{array}{rcllr} -\Delta U_1 & = & \rho(x)U_1^\alpha & \text{em} & S, \\ U_1 & > & 0 & \text{em} & S, \\ U_1 & = & \psi & \text{em} & \partial S \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcllr} -\Delta U_2 & = & \rho(x)U_2^\alpha & \text{em} & S, \\ U_2 & > & 0 & \text{em} & S, \\ U_2 & = & \psi & \text{em} & \partial S. \end{array}$$

no sentido fraco, onde $U_1 > U_2$ em S. Mas, pela unicidade da solução $U_1 \equiv U_2$ (veja Brezis-Kamin [4] Apêndice II). E isso gera uma contradição.
Portanto, de fato, $U_1 \leq U_2$ em B_R.
Logo,

$$\int_{B_R} U_1 dx \leq \int_{B_R} U_2 dx \leq \int_{B_{R'}} U_2 dx$$

$$\int_{B_R}\left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}} u_1 dx \leq \int_{B_{R'}}\left(\int_{B_{R'}} u_2 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}} u_2 dx$$

$$\left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}\left(\int_{B_R} u_1 dx\right) \leq \left(\int_{B_{R'}} u_2 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}\left(\int_{B_{R'}} u_2 dx\right)$$

$$\left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{1-\alpha}} \leq \left(\int_{B_{R'}} u_2 dx\right)^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{1-\alpha}}.$$

Como $\frac{1-(\alpha+\beta)}{1-\alpha} > 0$ e $\frac{\beta}{1-\alpha} > 0$, então

$$\left(\int_{B_R} u_1 dx\right) \leq \left(\int_{B_{R'}} u_2 dx\right) \Longrightarrow \left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \leq \left(\int_{B_{R'}} u_2 dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}.$$

Portanto,

$$u_1 = \left(\int_{B_R} u_1 dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} U_1 \leq \left(\int_{B_{R'}} u_2 dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} U_2 = u_2,$$

ou seja,

$$u_1 \leq u_2.$$

■

Lema 5.4. *Sejam* $u_1 \in H^1(\Omega)$, *solução fraca de*

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & \geq & \rho(x)u^\alpha & \text{em} \quad \Omega, \\ u & > & 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u & > & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{array}$$

e $u_2 \in H_0^1(\Omega)$, *solução fraca de*

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \rho(x)u^\alpha & \text{em} \quad \Omega, \\ u & > & 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array}$$

onde $0 < \alpha < 1$. *Então* $u_1 \geq u_2$.

Prova: Queremos mostrar que $u_1 \geq u_2$. Sabemos que isso ocorre em $\partial\Omega$. Agora suponhamos que exista um $S \subset \Omega$ tal que

$$\begin{array}{rcll} u_2 & > & u_1 & \text{em} \quad S, \\ u_1 = u_2 & = & \psi & \text{em} \quad \partial S. \end{array}$$

Então,

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u_1 & \geq & \rho(x)u_1^\alpha & \text{em} \quad S, \\ u_1 & > & 0 & \text{em} \quad S, \\ u_1 & = & \psi & \text{em} \quad \partial S \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u_2 & = & \rho(x)u_2^\alpha & \text{em} \quad S, \\ u_2 & > & 0 & \text{em} \quad S, \\ u_2 & = & \psi & \text{em} \quad \partial S, \end{array}$$

no sentido fraco, ou seja,

$$\int_S \nabla u_1 \nabla \varphi dx \geq \int_S \rho(x) u_1^\alpha \varphi dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \geq 0$$

e

$$\int_S \nabla u_2 \nabla \varphi dx = \int_S \rho(x) u_2^\alpha \varphi dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Definindo $\varphi_1 = u_2 \theta_\varepsilon(u_2 - u_1)$ e $\varphi_2 = u_1 \theta_\varepsilon(u_2 - u_1)$, onde θ_ε é o mesmo do Lema 5.2, e usando o fato de

$$0 \leq \int_S u_2 (\nabla u_2 - \nabla u_1)^2 \theta_\varepsilon'(u_2 - u_1) dx$$

a demonstração segue análoga ao do Lema 5.2. Vamos concluir então que $|S| = 0$, ou seja, $u_1 \geq u_2$.

■

Definição 5.1. *Vamos dizer que uma função $\rho \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\rho \geq 0$, $\rho \not\equiv 0$ satisfaz a condição H_1 se o problema*

$$-\Delta u = \rho(x) \quad rmem \quad \mathbb{R}^N \tag{5.14}$$

possui uma solução fraca que é positiva, limitada e pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 5.2. *Se a função ρ satisfaz a propriedade H_1 então o problema (5.1) possui uma solução fraca que é limitada e pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se (5.1) possui uma solução no sentido fraco que é limitada e $L^1(\mathbb{R}^N)$, então (5.14) tem uma solução fraca limitada.*

Prova: Suponha que ρ satisfaz a propriedade H_1. Pelo Teorema 5.1, para cada $R > 0$, seja $u_R > 0$ a solução fraca e positiva de

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \rho(x) \left(\displaystyle\int_{B_R} u dx \right)^\beta u^\alpha & \text{em} \quad B_R, \\ u &>& 0 & \text{em} \quad B_R, \\ u &=& 0 & \text{em} \quad \partial B_R, \end{array} \tag{5.15}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ e $\alpha + \beta < 1$.

Observação 5.6. *Cabe aqui lembrar que essa solução é única, como visto no teorema (5.1).*

Seja λ_1 o primeiro autovalor do problema

$$\begin{array}{rcll} -\Delta \omega &=& \lambda \rho(x) \omega & \text{em} \quad B_R, \\ \omega &=& 0 & \text{em} \quad \partial B_R. \end{array}$$

Sabemos da teoria de Análise Funcional que se φ_1 é a autofunção associada ao primeiro autovalor, no caso λ_1, então φ_1 vive num espaço de dimensão 1 e φ_1

não troca de sinal. Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que φ_1 é a autofunção associada a λ_1 tal que $\varphi_1 > 0$. Suponhamos ainda que φ_1 seja normalizado, isso é, $\int_{B_R} \varphi_1 dx = 1$.

Note que φ_1 é limitada (veja referência [10] Teorema 8.15), ou seja, existe um $C > 0$ tal que $\varphi_1^{1-\alpha} \leq C$. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que $\lambda\varepsilon^{1-(\alpha+\beta)}C \leq 1$. Isso implica que

$$\lambda\varepsilon^{1-(\alpha+\beta)}C \leq 1 \Longrightarrow \lambda\varepsilon^{1-(\alpha+\beta)}\varphi_1^{1-\alpha} \leq 1 \Longrightarrow \lambda\varepsilon\varphi_1 \leq \varphi_1^{\alpha}\varepsilon^{\alpha+\beta} \Longrightarrow$$

$$\lambda\varepsilon\varphi_1 \leq \varphi_1^{\alpha}\varepsilon^{\alpha}\varepsilon^{\beta}\left(\int_{B_R} \varphi_1 dx\right)^{\beta} \Longrightarrow \lambda\varepsilon\varphi_1 \leq \left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\beta} (\varepsilon\varphi_1)^{\alpha} \Longrightarrow$$

$$\lambda\rho(x)(\varepsilon\varphi_1) \leq \left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\beta} \rho(x)(\varepsilon\varphi_1)^{\alpha} \Longrightarrow$$

$$\int_{B_R} \lambda\rho(x)(\varepsilon\varphi_1)\varphi dx \leq \left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x)(\varepsilon\varphi_1)^{\alpha}\varphi dx,\ \forall\varphi \in H_0^1(B_R), \varphi \geq 0.$$

Como $\varepsilon\varphi_1$ é autofunção, então para $\forall\varphi \in H_0^1(B_R)$ tal que $\varphi \geq 0$ temos que

$$\int_{B_R} \nabla(\varepsilon\varphi_1)\nabla\varphi dx = \int_{B_R} \lambda\rho(x)(\varepsilon\varphi_1)\varphi dx \leq \left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x)(\varepsilon\varphi_1)^{\alpha}\varphi dx \Longrightarrow$$

$$\int_{B_R} \nabla(\varepsilon\varphi_1)\nabla\varphi dx \leq \left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x)(\varepsilon\varphi_1)^{\alpha}\varphi dx.$$

Afirmação 5.5. *Existe $C > 0$ tal que $C\varepsilon\varphi_1 \leq u_R$.*

Como $\left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} > 0$ a desigualdade acima implica que

$$\frac{\int_{B_R} \nabla(\varepsilon\varphi_1)\nabla\varphi dx}{\left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}} \leq \frac{\left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x)(\varepsilon\varphi_1)^{\alpha}\varphi dx}{\left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}}$$

$$\left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}} \int_{B_R} \nabla(\varepsilon\varphi_1)\nabla\varphi dx \leq \left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\frac{-\alpha\beta}{1-\alpha}} \int_{B_R} \rho(x)(\varepsilon\varphi_1)^{\alpha}\varphi dx$$

$$\int_{B_R} \nabla\left((\varepsilon\varphi_1)\left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}\right)\nabla\varphi dx \leq \int_{B_R} \rho(x)\left((\varepsilon\varphi_1)\left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}\varphi dx$$

$$\int_{B_R} \nabla\phi_1\nabla\varphi dx \leq \int_{B_R} \rho(x)\phi_1^{\alpha}\varphi dx,$$

onde $\phi_1 = \varepsilon\varphi_1 \left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}$.
Logo, ϕ_1 é solução fraca do problema:

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & \leq & \rho(x)u^{\alpha} & \text{em} \quad B_R, \\ u & > & 0 & \text{em} \quad B_R, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial B_R. \end{array}$$

Analogamente, da equação (5.15) segue

$$\int_{B_R} \nabla u_R \nabla\varphi dx = \left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x) u_R^{\alpha}\varphi dx$$

$$\frac{\int_{B_R} \nabla u_R \nabla\varphi dx}{(\int_{B_R} u_R dx)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}} = \frac{\left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x) u_R^{\alpha}\varphi dx}{(\int_{B_R} u_R dx)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}} w$$

$$\int_{B_R} \nabla\left(u_R\left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}\right)\nabla\varphi dx = \left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\frac{-\alpha\beta}{1-\alpha}} \int_{B_R} \rho(x) u_R^{\alpha}\varphi dx$$

$$\int_{B_R} \nabla\left(u_R\left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}\right)\nabla\varphi dx = \int_{B_R} \rho(x)\left(u_R\left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} \varphi dx$$

$$\int_{B_R} \nabla U_R \nabla\varphi dx = \int_{B_R} \rho(x) U_R^{\alpha}\varphi dx,$$

onde $U_R = u_R \left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}}$.
Logo, U_R é solução fraca do problema

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \rho(x)u^{\alpha} & \text{em} \quad B_R, \\ u & > & 0 & \text{em} \quad B_R, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial B_R. \end{array}$$

Pelo Lema 5.2 temos que $\phi_1 \leq U_R$, logo

$$\varepsilon\varphi_1 \left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}} \leq u_R \left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}} \Longrightarrow$$

$$\left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}} \left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \varepsilon\varphi_1 \leq u_R.$$

Fazendo $C = \left(\int_{B_R} \varepsilon\varphi_1 dx\right)^{\frac{-\beta}{1-\alpha}} \left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$, temos que

$$C\varepsilon\varphi_1 \leq u_R,$$

completando a afirmação.

Agora dado $R > 0$ consideremos $R' > R$. Pelo Teorema 5.1 existe $u_{R'} > 0$ em $B_{R'}$ solução fraca de

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \rho(x) \left(\displaystyle\int_{B_{R'}} u dx\right)^{\beta} u^{\alpha} & \text{em} \quad B_{R'}, \\ u & > & 0 & \text{em} \quad B_{R'}, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial B_{R'}. \end{array}$$

Pelo Lema 5.3 garantimos que $u_R \leq u_{R'}$, ou seja, $\{u_R\}_R$ é uma família crescente em R.

Sejam $\underline{u} = C\varepsilon\varphi_1$ e $\overline{u} = u_{R'}$.

Assim, as soluções fracas de (5.15) estão entre $\underline{u}$ e $\overline{u}$. Como a única solução fraca de (5.15) é u_R então somente u_R satisfaz

$$\underline{u} \leq u_R \leq \overline{u} \ \text{ em } \ B_R.$$

Note que a princípio nada garante que u_R fique limitado quando $R \longrightarrow \infty$. Porém, vamos mostrar que u_R permanece limitado.

Pela propriedade H_1 seja $U \in L^1(\mathbb{R}^N)$ solução fraca limitada do problema

$$-\Delta u = \rho(x) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla U \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\varphi dx, \ \forall \varphi \in H_0^1.$$

Seja $K > 0$ tal que

$$K^{1-(\alpha+\beta)} \geq \left(\int_{\mathbb{R}^N} U dx\right)^{\beta} \|U\|^{\alpha}_{L^\infty(\Omega)}.$$

Observação 5.7. *A constante K definida acima existe, pois $\left(\int_{\mathbb{R}^N} U dx\right)^{\beta} \|U\|^{\alpha}_{L^\infty(\Omega)}$ é limitado, já que ρ satisfaz H_1.*

Então para qualquer $R > 0$

$$K^{1-(\alpha+\beta)} \geq \left(\int_{B_R} U dx\right)^{\beta} \|U\|^{\alpha}_{L^{\infty}(\Omega)}$$

$$K^{1-(\alpha+\beta)} \geq \left(\int_{B_R} U dx\right)^{\beta} U^{\alpha}$$

$$K \geq \left(\int_{B_R} KU dx\right)^{\beta} (KU)^{\alpha}$$

$$K\rho(x) \geq \left(\int_{B_R} KU dx\right)^{\beta} \rho(x)(KU)^{\alpha}$$

$$\int_{B_R} K\rho(x)\varphi dx \geq \left(\int_{B_R} KU dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x)(KU)^{\alpha}\varphi dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(B_R), \varphi \geq 0.$$

Como KU é solução de

$$-\Delta(KU) = K\rho(x),$$

para $\varphi \in H_0^1(B_R)$,

$$\int_{B_R} \nabla(KU)\nabla\varphi dx = \int_{B_R} K\rho(x)\varphi dx,$$

e em particular para todo $\varphi \in H_0^1(B_R), \varphi \geq 0$, temos

$$\int_{B_R} \nabla(KU)\nabla\varphi dx = \int_{B_R} K\rho(x)\varphi dx \geq \left(\int_{B_R} KU dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x)(KU)^{\alpha}\varphi dx$$

$$\int_{B_R} \nabla(KU)\nabla\varphi dx \geq \left(\int_{B_R} KU dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x)(KU)^{\alpha}\varphi dx,\ \forall \varphi \in H_0^1(B_R), \varphi \geq 0.$$

Logo, KU é solução fraca do problema

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & \geq & \rho(x)\left(\int_{B_R} u dx\right)^{\beta} u^{\alpha} & \text{em} \quad B_R, \\ u & > & 0 & \text{em} \quad \partial B_R. \end{array}$$

Portanto, pelo Lema 5.4,

$$u_R \leq KU \quad \text{em} \quad B_R,$$

para todo $R > 0$, pois KU não depende de R, ou seja, u_R fica limitado por KU quando $R \to \infty$.

Seja $u(x) = \lim_{R\to\infty} u_R(x)$. Note que u está bem definido, visto que u_R é crescente em R. Como a desigualdade acima vale para qualquer $R > 0$, então $u \leq KU$. Além disso, como u_R é solução fraca de (5.15)

$$\int_{B_R} \nabla u_R \nabla \varphi dx = \left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x) u_R^{\alpha} \varphi dx,$$

para todo $\varphi \in H_0^1(B_R)$.

Observação 5.8. *Como $u \leq KU$ então $\int_{\mathbb{R}^N} udx < \int_{\mathbb{R}^N} KUdx < \infty$, pois $U \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$.*

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \nabla u_R \nabla \varphi dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{B_R} u_R dx\right)^{\beta} \int_{B_R} \rho(x) u_R^{\alpha} \varphi dx \Longrightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx = \left(\int_{\mathbb{R}^N} udx\right)^{\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) u^{\alpha} \varphi dx \quad em \quad \mathbb{R}^N.$$

Então $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca e limitada de (5.1), o que completa a primeira parte da prova.

Para provar a segunda parte suponhamos que $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ seja solução fraca limitada de (5.1), isso é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx = \left(\int_{\mathbb{R}^N} udx\right)^{\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) u^{\alpha} \varphi dx, \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Afirmação 5.6. *Sejam $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\phi \geq 0$ e $\varphi = \phi u^{-\alpha}$, onde u é solução fraca de (5.1). Então $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$.*

Como u é solução fraca de (5.1) e $\rho(x)\left(\int_{\mathbb{R}^N} udx\right)^{\beta} u^{\alpha} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, então, pelo resultado de [10], $u \in \mathcal{C}_{loc}^{1,\gamma}, \forall \gamma \leq 1$. Assim, como $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$, existe $D > 0$ tal que $u \geq D$ em $supp(\phi)$. Portanto $u^{-\alpha} \in \mathcal{C}^1$ em $supp(\phi)$, logo $\phi u^{-\alpha} \in \mathcal{C}^1$ em $supp(\phi)$. Na verdade $\phi u^{-\alpha} \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N)$, visto que o produto se anula fora do $supp(\phi)$. Então $\varphi = \phi u^{-\alpha} \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$.

Sejam $v = \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^N} udx\right)^{-\beta} u^{1-\alpha}$, e consequentemente $\nabla v = \left(\int_{\mathbb{R}^N} udx\right)^{-\beta} u^{-\alpha} \nabla u$.

Como u é solução fraca de (5.1), $\forall \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx = \left(\int_{\mathbb{R}^N} u dx \right)^{\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) u^{\alpha} \varphi dx \Longrightarrow$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u dx \right)^{-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (\phi u^{-\alpha}) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) \phi dx \Longrightarrow$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u dx \right)^{-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \left(\nabla \phi u^{-\alpha} - \alpha u^{-\alpha-1} \phi \nabla u \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) \phi dx \Longrightarrow$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u dx \right)^{-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi u^{-\alpha} dx - \left(\int_{\mathbb{R}^N} u dx \right)^{-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \alpha u^{-\alpha-1} \phi |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) \phi dx \Longrightarrow$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u dx \right)^{-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi u^{-\alpha} dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) \phi dx, \forall \phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^N), \ \phi \geq 0.$$

Dado $\phi \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$, sejam $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\phi_n \to \phi$, quando $n \to \infty$. Logo, pela definição de v,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi_n dx \geq \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) \phi_n dx.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla (\phi_n - \phi) dx \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v| |\nabla (\phi_n - \phi)| dx \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v| |\nabla (\phi_n - \phi)| dx = \int_{S} |\nabla v| |\nabla (\phi_n - \phi)| dx \leq$$

$$D \|v\|_{H_0^1(\mathbb{R}^N)} \|\phi_n - \phi\|_{H_0^1(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi dx.$$

Analogamente,

$$\lim_{n \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) \phi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) \phi dx.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \phi dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\phi dx, \forall \phi \in H_0^1(\mathbb{R}^N), \phi \geq 0,$$

ou seja,

$$-\Delta v \geq \rho(x) \text{ em } \mathbb{R}^N$$

no sentido fraco. Em particular, dado $R > 0$,

$$\begin{array}{rcll} -\Delta v & \geq & \rho(x) & \text{em} \quad B_R, \\ v & \geq & 0 & \text{em} \quad \partial B_R. \end{array}$$

Consideremos agora a solução fraca ω_R do problema

$$\begin{array}{rcll} -\Delta \omega_R & = & \rho(x) & \text{em} \quad B_R, \\ \omega_R & = & 0 & \text{em} \quad \partial B_R. \end{array}$$

Pelo Lema (5.4), $\omega_R \leq v$.

Seja $\omega = \lim\limits_{R\to\infty} \omega_R$.

Como $\omega = \lim\limits_{R\to\infty} \omega_R < v$, então ω é limitado.

Além disso, $\omega \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pois como $\omega_R \leq v$, temos que

$$\int_{B_R} \omega_R dx \leq \int_{B_R} v dx \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u dx\right)^\beta \int_{B_R} u^{1-\alpha} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} u^{1-\alpha} dx < \infty,$$

visto que $\alpha + \beta < 1$ e $\beta \geq 0$ implica que $1 - \alpha > \beta \geq 0$ o que implica que $u^{1-\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Consequentemente,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \omega_R dx < \infty$$

e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \omega dx < \infty.$$

Pelo mesmo argumento da primeira parte, ω é solução fraca, limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$ de

$$-\Delta u = \rho(x) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

o que completa a prova do teorema.

■

Referências

[1] R. Stanczy, Nonlocal elliptic equations, Nonlinear Anal. 47 (2001), pp 3579-3584.

[2] J.A. Carrillo, On a nonlocal elliptic equation with decreasing nonlinearity arising in plasma physics and heat conduction, Nonlinear Anal. 32 (1998), pp 97-115.

[3] F.J.S.A. Correa, S.D.B. Menezes, Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method, Electron. J. Differential Equations 19 (2004), pp 1-10.

[4] H. Brezis, S. Kamin, Sublinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$, Manuscripta Math. 74 (1992), pp 87-106.

[5] D.E. Tzanetis, P.M. Vlamos, A nonlocal problem modelling ohmic heating with variable thermal conductivity, Nonlinear Anal.: Real World Applications 2 (2001), pp 443-454.

[6] C.O. Alves, D.G. de Figueiredo, Nonvariational elliptic systems via Galerkin methods, in: Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis-The Hans Triebel Anniversary Volume, Birkhäuser, Switzerland, 2003, pp. 47-57.

[7] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa, On existence of solutions for a class of problems involving a nonlinear operator, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 8(2001), pp 43-56.

[8] C.R. de Oliveira, Introdução à Análise Funcional, Publicações Matemáticas, IMPA, 2001.

[9] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations, Providence, I.L. : American Math. Soc., 1988.

[10] D. Gilbard & N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Oder, Second Edition, Springer-Verlarg, 1998.

[11] F.J.S.A. Correa, D.C Morais Filho, On a class of nonlocal elliptic problems via Galerkin method, J. Math. Anal. Appl. 310 (2005), pp 177-187.