

ANÁLISE DE TRELIÇAS PLANAS VISCOELÁSTICAS COM
DEFORMAÇÕES FINITAS E PÓRTICOS PLANOS
VISCOELÁSTICOS COM VIGAS MISTAS.

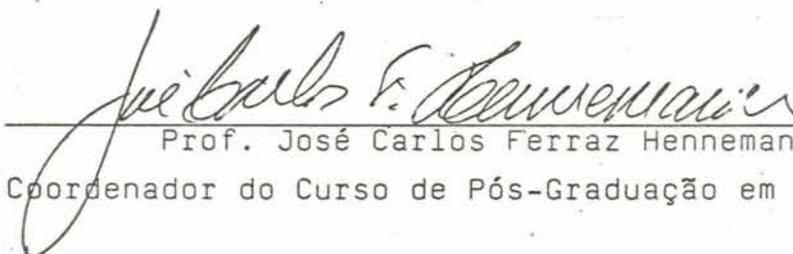
EDUARDO DE OLIVEIRA DAROIT

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre
Março de 1988

2

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

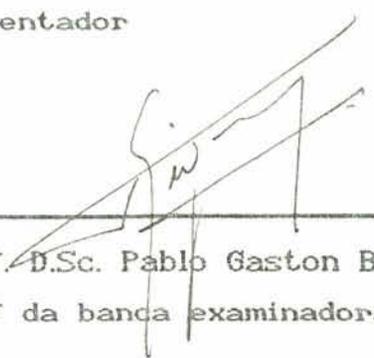

Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng.Civil

APROVAÇÃO.

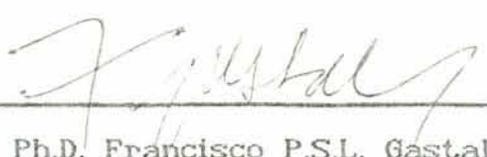
Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo orientador, pela banca examinadora e pelo curso de Pós-Graduação.



Prof. D.Sc. Guillermo Juan Creus
Orientador



Prof. D.Sc. Pablo Gaston Bignon
Prof da banca examinadora



Prof. Ph.D. Francisco P.S.L. Gastal
Prof da banca examinadora

Este trabalho é dedicado
à minha esposa Yara.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Guillermo Juan Creus pela dedicação na orientação e realização deste trabalho, pelo apoio recebido no desenvolvimento do mesmo e pelo exemplo de pessoa dedicada ao ensino e à pesquisa.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil pela confiança depositada e pelas condições oferecidas para desenvolver este trabalho.

Aos professores, colegas e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil e da Escola de Engenharia da UFRGS que de alguma forma colaboraram na realização deste trabalho.

Ao professor Pablo G. Bignon pelo auxílio nas deduções de parte da formulação e ao professor Francisco P.S.L. Gastal pela revisão desta dissertação.

Ao GNPq, CAPES e CNEN pelo auxílio financeiro.

Aos meus pais pelo auxílio dispensado e incentivo durante todos estes anos de estudo e à Yara pela compreensão e apoio durante todos os momentos.

RESUMO

Este trabalho compõe-se de duas partes. A primeira parte propõe-se a apresentar um estudo e um programa computacional para a análise não linear geométrica de treliças planas com propriedades viscoelásticas. Na segunda parte, tem-se o estudo e um programa sobre pórticos planos com propriedades viscoelásticas, usando o modelo reológico standard e o dado pelo CEB. Leva-se em consideração o efeito de temperatura e retração nesta análise. Estende-se o trabalho sobre pórtico para o estudo sobre vigas mistas, levando em consideração a mudança da linha neutra.

A formulação está baseada no método dos elementos finitos para grandes deformações, particularizada para treliça e pórtico. É feita a descrição de ambos os programas e rodados diversos exemplos.

ABSTRACT

This dissertation tackles two problems in the field of viscoelastic analysis of structures.

Firstly, we consider the nonlinear geometric analysis of viscoelastic plane trusses by numerical methods.

In the second part, plane frames are studied, considering the viscoelastic behaviour of concrete represented by general rheological models and also by the CEB equations; temperature, shrinkage and support movements effect are considered. The computational program also analyse composite continuous beams.

The formulation is based on an expression of the virtual work theorem valid for finite deformations, and uses the finite element technique. The computation codes are described and several examples are analysed.

INDICE.

RESUMO.....

ABSTRACT.....

ÍNDICE.....

LISTA DE FIGURAS.....

NOTAÇÃO.....

CONVENÇÕES UTILIZADAS.....

CONVERSÃO DE UNIDADES.....

1 - INTRODUÇÃO.....

 1.1 - Treliças.....

 1.1.1 - Objetivos.....

 1.1.2 - Indicações de trabalhos anteriores sobre
 análise não linear geométrica de treliças
 planas.....

 1.1.2.1 - Análise pela teoria geral da
 estabilidade.....

 1.1.2.2 - Métodos de análise numéricos.....

 1.1.3 - Abordagem e limitações sobre o método de
 análise utilizado.....

 1.2 - Vigas mistas.....

 1.2.1 - Aspectos sobre a construção mista.....

 1.2.2 - Trabalhos anteriores.....

 1.2.3 - Abordagem e limitações do presente trabalho..

2 - FORMULAÇÃO MATRICIAL VISCOELÁSTICA.....

 2.1 - Relações viscoelásticas empregadas.....

 2.1.1 - Introdução.....

 2.1.2 - Relação viscoelástica linear; representação
 integral.....

 2.1.3 - Representação em função das variáveis de
 estado.....

7

2.1.4	- Utilização do modelo standard para a verificação analítica de tensões e deformações.....
2.1.5	- Representação do comportamento do concreto...
2.1.6	- Representação do comportamento do concreto através de um modelo reológico.....
2.1.7	- Determinação das constantes de um modelo Kelvin generalizado em base a uma curva dada.
2.1.8	- Exemplo de aplicação da seção 2.1.7.....
2.1.9	- Fluxograma do programa computacional para a determinação dos mecanismos de Kelvin.....
2.1.10	- Comparação das expressões analíticas e os gráfico do CEB com o programa proposto.....
2.2	- Formulação geral do metodo dos elementos finitos....
2.2.1	- Princípio dos trabalhos virtuais para grandes deformações.....
2.2.2	- Matriz de rigidez tangente e cálculo dos esforços para barras de treliça plana.....
2.2.3	- Matriz de rigidez para uma barra de pórtico plano.....
3	- PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA A ANÁLISE DE TRELIÇAS PLANAS VISCOELÁSTICAS COM DEFORMAÇÕES FINITAS.....
3.1	- Programa base.....
3.2	- Algoritmo de análise e formulação empregada.....
3.3	- Diagrama de blocos.....
3.4	- Uso do programa.....
3.4.1	- Entrada de dados.....
3.4.2	- Exemplo de entrada de dados e resolução.....
4	- EXEMPLOS NUMÉRICOS DE TRELIÇA.....
4.1	- Redistribuição de tensões em uma treliça hiperestática.....
4.2	- Modelo com barra rígida e mola.....
4.3	- Arco de duas barras bi-articulado.....
4.4	- Treliça de duas barras (flambagem).....
4.5	- Torre com carga na direção vertical e horizontal.....
4.6	- Arco treliçado.....

5	-	CARGA VISCOELÁSTICA E ESFORÇOS EM BARRAS DE PÓRTICO PLANO..	
5.1	-	Formulação inicial.....	
5.2	-	Obtenção das deformações viscoelásticas.....	
5.3	-	Obtenção do momento fletor e esforço normal para o cálculo da carga viscoelástica.....	
5.3.1	-	Verificação das equações de interpolação dos esforços.....	
5.4	-	Efeito da temperatura.....	
5.5	-	Efeito da retração.....	
5.6	-	Cálculo dos esforços na barra.....	
6	-	MATRIZ DE RIGIDEZ MISTA.....	
6.1	-	Introdução.....	
6.2	-	Hipóteses.....	
6.3	-	Constantes estáticas reduzidas para uma seção típica.....	
6.4	-	Cálculo da matriz de rigidez.....	
6.5	-	Verificações na matriz de rigidez mista.....	
6.6	-	Excentricidade dos elementos em relação ao eixo das barras.....	
7	-	CARGA VISCOELÁSTICA EM BARRAS MISTAS E NOVA LOCALIZAÇÃO DO EIXO NEUTRO.....	
7.1	-	Formulação empregada.....	
7.2	-	Nova localização do eixo neutro para um exemplo particular.....	
8	-	PROGRAMA PARA A ANÁLISE DE PÓRTICO PLANO VISCOELÁSTICO COM VIGAS MISTAS.....	
8.1	-	Programa base.....	
8.2	-	Formulação empregada.....	
8.3	-	Diagrama de blocos.....	
8.4	-	Uso do programa.....	
8.4.1	-	Entrada de dados.....	
8.4.2	-	Exemplo de entrada de dados e resolução.....	
9	-	EXEMPLOS NUMÉRICOS DE PÓRTICO.....	
9.1	-	Efeitos viscoelásticos numa viga de dois vãos submetida a carga constante.....	

- 9.2 - Efeitos viscoelásticos numa viga de dois vãos com recalque de apoio.....
- 9.3 - Viga de dois vãos com recalque progressivo.....
- 9.4 - Viga de dois vãos com propriedades diferentes em cada vão.....
- 9.5 - Viga biengastada submetida à variação de temperatura.
- 9.6 - Pórtico homogêneo submetido à variação de temperatura
- 9.7 - Viga biengastada submetida a retração.....
- 9.8 - Pórtico homogêneo submetido a retração.....
- 9.9 - Efeitos viscoelásticos numa viga biapoiada mista submetida a carga constante.....
- 9.10 - Efeitos viscoelásticos num pórtico misto submetido a carga constante.....
- 9.11 - Efeitos viscoelásticos num pilar armado simetricamente.....

- 10 - CONCLUSÕES.....

- 11 - REFERÊNCIAS.....

- 12 - APÊNDICES.....

LISTA DE FIGURAS.

- I.1 - Sentido positivo dos esforços e deslocamentos
- I.2 - Sentido positivo das resultadntes de esforços
- 2.1 - Séries de elementos Kelvin
- 2.2 - Modelo reológico utilizado
- 2.3 - Determinação dos mecanismos Kelvin
- 2.4 - Deformação diferida versus tempo
- 2.5 - Determinação dos tempos de retardação
- 2.6 - Diferença entre as deformações versus tempo
- 2.7 - Cálculo do segundo mecanismo
- 2.8 - Curva aproximada
- 2.9 - Fluxograma para o cálculo dos mecanismos
- 2.10 - Estrutura com uma barra
- 2.11 - Curva deslocamento versus tempo do PORTICO.BAS versus CEB
- 2.12 - Curva deslocamento versus tempo do CEB verus CEB
- 2.13 - Comparação com o CEB para a experiência de relaxação
- 2.14 - Esforços e deslocamentso nodais de uma barra de pórtico
- 2.15 - Formas dos deslocamentos
- 3.1 - Método incremental
- 3.2 - Diagrama de blocos geral
- 3.3 - Diagrama de blocos específico
- 3.4 - Treliça sujeita a compressão.
- 4.1 - Redistribuição de tensões
- 4.2 - Modelo com barra rígida e mola
- 4.3 - Trelica simples tipo arco.
- 4.4 - Análise elástico não linear
- 4.5 - Análise viscoelástico não linear
- 4.6 - Curva carga deslocamento da treliça sujeita a flambagem.
- 4.7 - Análise de uma torre treliçada
- 4.8 - Arco horizontal treliçado.
- 4.9 - Curva carga deslocamento do arco treliçado.
- 4.10 - Curva carga tensão da arco treliçado.
- 4.11 - Curva tempo deslocamento do arco treliçado.

- 5.1 - Convenções para o esforço axial
- 5.2 - Forças que determinam o momento fletor
- 5.3 - Convenções de temperatura
- 5.4 - Casos lineares de variação de temperatura numa viga
- 5.5 - Variação uniforme de temperatura positiva
- 5.6 - Forças de engastamento originadas numa viga biengastada por variação triangular dupla de temperatura
- 5.7 - Esforços e deslocamentos em coordenadas locais e globais
- 6.1 - Seção simétrica típica
- 6.2 - Seção típica com localização final dos eixos
- 6.3 - Barra com deslocamento e giro
- 6.4 - Exemplo sobre excentricidade
- 7.1 - Seção típica
- 7.2 - Viga bi-apoiada com 2 giros
- 8.1 - Diagrama de blocos para o programa de pórtico
- 9.1 - Viga de dois vãos dos exemplos 9.1 à 9.4
- 9.2 - Experiência de "creep" para a viga da fig. 9.1
- 9.3 - Experiência de relaxação da viga da fig. 9.1
- 9.4 - Tempo versus reação para recalque de apoio ocorrido em um período de : 0,10,90,365 ou 5 anos (exemplo 9.3)
- 9.5 - Controle das reações e giro versus tempo da viga do ex. 9.4
- 9.6 - Viga biengastada dos exemplos 9.5 e 9.7
- 9.7 - Força axial versus tempo para a viga biengastada submetida a variação de temperatura
- 9.8 - Pórtico dos exemplos 9.6 e 9.8
- 9.9 - Resultados do pórtico submetido a variação de temperatura
- 9.10 - Força axial versus tempo para a viga biengastada submetida a retração
- 9.11 - Curva deslocamento versus tempo do pórtico sobre efeito da retração
- 9.12 - Curva momento versus tempo do pórtico sobre efeito da retração
- 9.13 - Viga biapoiada mista do exemplo 9.9
- 9.14 - Experiência de deformação lenta "creep" da viga mista
- 9.15 - Pórtico misto sujeito à efeitos viscoelásticos
- 9.16 - Resultados para o pórtico misto viscoelástico
- 9.17 - Curva deslocamento versus tempo do pilar
- 9.18 - Curva forças versus tempo do pilar

NOTAÇÃO.

LETRAS MAIUSCULAS.

- A = Seção transversal da barra
 \underline{A} = Matriz das funções de posição
 \underline{A}_σ = Área sob tensões prescritas
 \underline{A}_u = Área sob deslocamentos prescritos
 B_o = Corpo original
 B = Aproximação do corpo
 \underline{B} = Matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos
 \underline{C} = Matriz das funções de posição com as coordenadas nodais
 C_1 e C_2 = Constantes viscoelásticas
 \underline{D} = Velocidade de deformação específica
 $D(t, \tau)$ = Deformação lenta específica ou creep específico
 E = Módulo de elasticidade
 $E(t)$ = Módulo de elasticidade no tempo t
 I = Momento de inércia
 \underline{K} = Matriz de rigidez
 L = Comprimento da barra
 \underline{L} = Gradiente de velocidades
 M = Momento fletor
 \underline{M} = Matriz constitutiva elástica
 N = Esforço axial na barra
 \underline{N} = Matriz das funções de interpolação
 \underline{N}^n = Matriz coluna com as forças axiais no nó 1 e 2
 P = Energia potencial
 Q = Esforço cortante
 \underline{R} = Matriz de rotação
 \underline{S} = Matriz coluna dos esforços internos
 T = Período de amortecimento ou tempo de retardação
 \underline{T} = Matriz do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
 \underline{U} = Matriz contendo os deslocamento nodais
 \underline{U}_e = Matriz coluna com deslocamentos e giros ao longo do elemento
 \underline{X} = Matriz coluna de cargas genérico

V = Volume

W^n = Matriz coluna com deslocamentos transversais e giros dos nós 1 e 2 da barra

LETRAS MINÚSCULAS.

b = Matriz contendo as forças de volume

$d(t, \tau)$ = Função de fluência

n = Número de elementos, mecanismos, etc.

$q(t)$ = Variáveis de estado

p = Perímetro

s = Coordenadas nodais

t = Tempo

t_s = Matriz contendo as forças de superfície

u = Deslocamento axial do eixo da barra

v = Deslocamento transversal do eixo da barra

(x, y, z) = Eixos coordenados e de integração

y_a = Distância entre os centros de gravidade do aço e da seção reduzida (negativo)

y_c = Distância entre os centros de gravidade do concreto e da seção reduzida

y_T = Distância entre os centros de gravidade da placa e do aço

SUBÍNDICES.

1 = grandeza referente ao primeiro nó da barra

2 = grandeza referente ao segundo nó da barra

a = grandeza referente ao aço

b = grandeza da barra (coorespondente a soma dos elementos)

c = grandeza referente ao concreto

d = grandeza referentes as deformações diferidas

e = grandeza de um elemento e referente a coordenadas locais

f = grandeza referente aos efeitos da fluência

g = referente a coordenadas globais

i = termo genérico de uma série

l = referentes a matriz de rigidez elástica

m = referentes a matriz de rigidez geométrica

n = grandeza decorrente das forças de engastamento perfeito devido ao carregamento externo

o = grandeza no tempo zero ou inicial

- p = grandeza decorrente da temperatura
 q = grandeza devida sómente aos deslocamentos
 r = grandeza decorrentes da retração
 R = referente ao centro de gravidade da seção homogeinizada
 s = grandeza devidas aos deslocamentos descontando a parte viscoelástica, retração e temperatura
 T = refere-se a totalidade da estrutura (rigidez ou vetor de cargas)
 u = grandeza calculada com a equação 5.16
 v = grandeza decorrente do efeito viscoelástico
 w = grandeza devido aos deslocamentos descontando a parte viscoelástica, retração, temperatura e as forças de engastamento perfeito devido as cargas externas
 x = referente ao deslocamento axial
 y = referente ao deslocamento transversal
 z = referente ao giro

SUPERÍNDICES.

- n = referente aos nós das barras
 T = transposta

LETRAS GREGAS.

- α = Matriz coluna contendo as constantes a calcular
 β = Ângulo que a barra faz com o eixo horizontal no plano xy
 τ = Idade do material
 δ = Indica variação
 Δ = Indica incremento
 Δ = Matriz linha das funções de interpolação para os esforços axiais
 ε = Matriz coluna de deformações
 ε = Deformação axial
 $\varepsilon(t, \tau)$ = Deformação no tempo t e idade τ
 ξ = Coordenada adimensional
 Γ = Matriz linha com as funções de interpolação para o momento fletor
 Ψ = Matriz linha com as funções de interpolação para o deslocamento axial
 θ = Giro

- λ = Constante numérica ou coeficiente
 ϕ_1 a ϕ_n = Funções de interpolação para elemento de viga
 $\underline{\underline{\Phi}}$ = Matriz linha das funções de interpolação para o deslocamento transversal
 $\underline{\underline{\Phi}}'$ = Matriz linha das funções de interpolação para o giro
 σ = Tensão
 $\sigma(t)$ = Tensões no tempo t
 $\underline{\underline{g}}$ = Matriz do tensor de tensões de Cauchy
 $\eta(\)$ = Constante de amortecimento
 ω = Tempo final ou infinito
 $(\)' = \frac{\partial}{\partial t}$ = Derivada parcial em relação ao tempo

CONVENÇÕES UTILIZADAS.

a) - Esforços e deslocamentos de extremidade

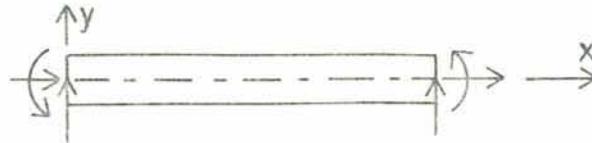


Figura I.1 - Sentido positivo dos esforços e deslocamentos.

b) - Esforços internos

Solicitações normais N e M

Solicitação tangencial Q

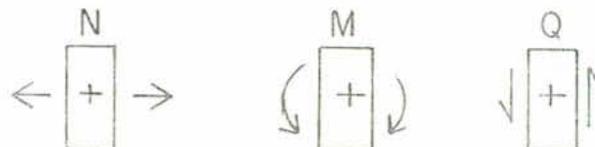


Figura I.2 - Sentido positivo das resultantes de esforços.

Observação : A convenção do momento fletor tem o sentido indicado devido a definição de curvatura da eq. 2.2.32.

CONVERSÃO DE UNIDADES.

Sistema MKS. Unidades fundamentais e derivadas.

Comprimento : metro (m), centímetro (cm)

Massa : Kilograma (Kg)

Tempo : segundo (s), dia

Outras unidades derivadas

Força : Newton (N); $1 \text{ N} = 1 \text{ Kg m/s}^2$

Tensão : pascal (P); $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

Amortecimento (η) = $\text{N/cm}^2/\text{dia}$ ou semelhante

Módulo de elasticidade (E) = N/cm^2 ou semelhante

Conversão de algumas unidades técnicas usuais para unidades SI.

1 Kilopondio (Kp) ou Kilograma força (Kgf) = 9,81 Newton(N) $\approx 10 \text{ N}$

$1 \text{ Kp/cm}^2 = 9,81 \text{ N/cm}^2 \approx 0,1 \text{ N/mm}^2 = 0,1 \text{ Mpa}$

Conversão de algumas unidades anglosasônicas a unidades técnicas e SI.

1 polegada (in) = 2,54 cm

1 pé (ft) = 30,5 cm

1 jarda (yd) = 91,4 cm

1 libra-força (lbf) = 0,454 Kp = 4,45 N

1 lbf/in^2 (psi) = $0,0703 \text{ Kp/cm}^2 = 0,690 \text{ N/cm}^2$

1 lbf/in = 0,178 Kp/cm

1 - INTRODUÇÃO.

A introdução está dividida em duas partes. A primeira tem informações sobre os objetivos, trabalhos anteriores e abordagem sobre treliças e na segunda parte tem-se o mesmo para pórtico.

No capítulo 2 apresenta-se a formulação empregada e o método utilizado para representar o comportamento do concreto. No capítulo 3 e 4 tem-se informações sobre o programa e exemplos, terminando a parte de treliças.

Nos capítulos 5, 6 e 7 tem-se a formulação sobre pórtico e nos capítulos 8 e 9 o programa e exemplos desta última parte.

1.1 - Treliças.

1.1.1 - Objetivos.

Na primeira parte da presente dissertação analisam-se treliças planas de material elástico ou viscoelástico levando em conta a não linearidade geométrica. Assim, podem ser analisados problemas de instabilidade instantânea ou diferida, determinando cargas de flambagem ou snapping. A presença de imperfeições no sistema global também poderá ser analisada.

Outro problema estudado foi a diferença encontrada entre os valores de ponto crítico, conforme definido no item seguinte, obtido com o método dos autovalores linear e o presente estudo. Viu-se que o método dos autovalores em certos casos obtém uma carga acima da real.

1.1.2 - Indicações de trabalhos anteriores sobre análise não linear geométrica de treliças.

Existe uma extensa literatura a respeito, sendo que a maioria dos trabalhos está concentrada em não linearidades produzidas por mudanças na geometria, porque estes tipos de estruturas alcançam a ruptura por instabilidade antes de

observar-se significativo comportamento da não linearidade do material. A seguir, tem-se um apanhado geral dos métodos de análise encontrados.

1.1.2.1 - Análise pela teoria geral da estabilidade

Na literatura sobre a estabilidade elástica a instabilidade é tratada como um problema de autovalores. Estes estudos fornecem expressões teóricas gerais, teoremas sobre análise estrutural e deduções analíticas para problemas particulares que são, geralmente, estruturas pequenas.

Muitos desses trabalhos tratam da estabilidade global ou local separadamente. A flambagem local implica na flambagem de um membro discreto da estrutura e é frequentemente um fenômeno do tipo bifurcação. Entre as referências sobre o tema tem-se os trabalhos de Croll¹⁶, Huseyin²³, Leipholz²⁹, Martin³¹, Przemieniecki⁴⁰, Thompson⁵², Timoshenko⁵⁴ e Zienkiewicz⁵⁷.

A teoria geral classifica dois tipos fundamentais da perda da estabilidade (Riks⁴²). Esses tipos de comportamento particular estão relacionados ao conceito de dois pontos críticos: ponto limite e ponto de bifurcação.

O comportamento elástico de uma estrutura que está associada com a perda da estabilidade em um ponto limite é chamado snapping - a denominação inglesa é usada pois não há uma tão curta em português - e representa a passagem súbita para outra configuração ocorrendo por exemplo com a resposta de arcos e cascas rebaixadas.

Por outro lado, se a perda da estabilidade ocorre em um ponto de bifurcação o comportamento da estrutura é chamado flambagem e tem-se, por exemplo, na resposta de colunas elásticas e torres sujeitas a cargas de compressão.

No ponto limite, o estado de equilíbrio na vizinhança deste ponto não existe para valores de cargas superiores a carga crítica, enquanto isto não é geralmente verdade para um ponto de bifurcação.

A diferença básica entre ponto limite e ponto de bifurcação pode também ser expressa matematicamente em uma

maneira mais formal, ver por exemplo as referências Riks⁴² e Thompson⁵².

1.1.2.2 - Métodos de análise numérica.

Dentro do enfoque dado anteriormente, faz-se uma abordagem da literatura e alguns comentários sobre os métodos encontrados.

Existem diversas classificações sobre os tipos de métodos não lineares. Pode-se classificar os métodos de análise em relação ao ponto crítico. Podem ser de pré ou pós ponto crítico. A análise pós ponto crítico é importante em certas estruturas pois pode predizer o possível enrijecimento ou aumento da resistência da estrutura. Outra classificação é quanto à maneira de efetuar a análise. Pode-se ter métodos incrementais, iterativos e mistos.

A predição da resposta não linear antes do ponto crítico foi extensivamente estudada por meio de diversas soluções numéricas. Essas incluem o método da substituição sucessiva, da rigidez incremental, de iteração de Newton-Raphson, métodos corretivos de primeira e segunda ordem e de perturbação. Entre estes o método de Newton-Raphson (modificado) e o método auto-corretivo de primeira ordem (método incremental levando em consideração forças residuais) são as técnicas mais poderosas para avaliar o problema de pré ponto crítico (ver Haisler & Stricklin²⁰).

Quando a estrutura exibe um comportamento não linear usa-se muito o método incremental, que resulta numa matriz de rigidez tangente (que inclui os efeitos geométricos bem como mecânicos). Entretanto, na análise da instabilidade não linear de estruturas pode ser interessante modificar o método anterior pelas seguintes razões.

a - Para evitar as dificuldades surgidas na análise da bifurcação, pós bifurcação e pós limite associadas com as singularidades no ponto limite e com as múltiplas soluções estáveis avaliáveis para um único valor da carga.

b - Para ser capaz de traçar a configuração de pós

falmbagem da estrutura e

c - Para aumentar a eficiência computacional.

Para superar as falhas mencionadas acima várias alternativas foram propostas. Entre estes métodos a introdução da mola artificial (Sharifi & Popov⁴⁰) que permite obter a curva de pós flambagem através do aumento da rigidez da estrutura colocando uma mola sobre o grau de liberdade considerado.

Outra característica da análise incremental é que nas respostas apresentadas ela subestima as deflexões quando a estrutura está perdendo a rigidez e vice-versa.

Entre os métodos iterativos há o da referência Reilly⁴¹, que em cada ciclo cria uma matriz de rigidez revisada sujeita a um vetor de cargas residuais. Método similar a este mas que analisam estruturas com barras com uma relação tensão-deformação inelástica pode ser encontrado por exemplo nas referências Hensley²¹ e Powell³⁰.

Na referência Bergan et al⁶ tem-se, também, um método semelhante a estes com incrementos de carga controlados por um parâmetro definido pela variação da matriz de rigidez.

Há o método do controle dos deslocamentos (Haisler & Stricklin²⁰ e Zienkiewicz⁵⁶) onde se prescreve os deslocamentos no ponto considerado e obtém-se um fator de carga que resulta numa reação nula no mesmo ponto (não esquecendo a existência de cargas externas).

Tem-se ainda, a técnica do comprimento do arco constante (Crisfield¹⁵, Kondoh & Atluri²⁸ e Riks^{42,43}) que controla o desenvolvimeto da curva carga-deslocamento através de parâmetros adequados que variam para cada autor. Este método tem-se mostrado muito útil e tem solucionado problemas não abordáveis por outras soluções.

O método da redução (Noor & Peters³⁵) visa aumentar a eficiência computacional para analisar grandes estruturas reduzindo os números de graus de liberdade da discretização inicial.

O método do incremento de carga constante (Bathe &

Dvorkin⁴) também, segundo os autores, se mostrou eficiente para contornar os problemas mencionados e aumentar a eficiência da análise não linear.

A técnica do balanço de energia (Szilard⁵¹) em que através da energia fundamental da estrutura obtém-se um fator escalar que é aplicado para controlar o vetor deslocamento ou para monitorar a seleção do passo de carga.

O método de iteração vetorial (Papadrakakis³⁶) em que não é preciso montar a matriz de rigidez total da estrutura.

Pode-se também considerar a presença de imperfeições na estrutura. Existem quatro tipos principais de imperfeições: geométricas, no sistema de carregamento, nas condições de contorno e no material. Ainda, no estudo das imperfeições geométricas pode-se ter imperfeições globais e/ou locais. Nesta dissertação só será analisada a presença de imperfeições globais. O estudo sobre imperfeições está ligado à otimização estrutural. Diversos trabalhos tem chamada a atenção para o perigo da otimização estrutural que é muito sensível a presença de imperfeições (Thompson⁵³). A otimização deve ser efetuada, mas ela deve ser definida em relação a economia e segurança do projeto. Na otimização, o projetista deve tomar em conta a presença de imperfeições tal que o projeto final obtido seja uma estrutura segura. Rosen & Schmit⁴⁴ apresentam um estudo para a análise de treliças imperfeitas que leva em consideração o fenômeno acima referido.

Durante a solicitação da estrutura pode acontecer a flambagem local de um membro discreto e a subsequente transferência da carga para o resto da estrutura. Nas referências Rosen & Schmit^{44,45} tem-se um método para a análise de treliças planas que leva em consideração estes efeitos. Posteriormente na referência Kondoh²⁸ tem-se a mesma análise considerando também a influência das imperfeições.

Existem poucos trabalhos considerando a análise não linear e comportamento viscoelástico. As referências encontradas e utilizadas são as de Hult²⁴ e de Szyszkowski e Glockner⁵⁰.

1.1.3 - Abordagem e limitações do método de análise utilizado.

Como se vê, existem numerosos trabalhos sobre análise geométrica não linear de treliças elásticas. Entretanto, este não parece ser o caso com relação a estruturas que apresentam juntamente o problema de deformação finita e comportamento viscoelástico.

A estratégia empregada no trabalho consiste na utilização do Método dos Elementos Finitos juntamente com uma descrição Lagrangeana atualizada. (Formulação no capítulo 2)

Partindo da formulação incremental do Princípio dos Trabalhos Virtuais e empregando medidas adequadas de deformação finita obtem-se a formulação variacional inicial. Em continuação, introduzindo as funções de interpolação de elementos prismáticos de treliça plana e representando o comportamento viscoelástico do material através do formalismo das variáveis de estado, obtêm-se a relação matricial que incorpora a matriz de rigidez geométrica e um vetor de forças viscoelásticas.

A formulação é totalmente geral e aplicável a qualquer tipo de estrutura visto que a não linearidade geométrica e os efeitos viscoelásticos podem ser desacoplados. Foram rodados alguns exemplos com solução teórica conhecida, obtendo-se excelente aproximação.

A análise é limitada a estruturas planas mas pode ser estendida para treliças espaciais sem dificuldades teóricas com a mesma formulação descrita neste trabalho.

É limitada também ao caso de cargas conservativas e a viscoelasticidade linear. Estas limitações não são facilmente superáveis. Entretanto, comportamento viscoelástico linear e cargas conservativas permitem resolver diversos problemas reais.

Além disso, a não linearidade física do material não é tratado neste trabalho, por hipótese, os grandes deslocamentos ocorrem sem que as tensões excedam o limite de elasticidade do material e nem a presença de imperfeições locais dos membros da treliça ou a flambagem local são levados em consideração neste estudo.

1.2 - Vigas mistas.

Estruturas mistas, que consistem de uma viga de aço ou concreto préfabricado (prétensionado ou armado) e uma laje de concreto moldado no local são sensíveis a deformação lenta ("creep") e retração, tal que a influência desses fenômenos na distribuição de tensões em seções mistas deve ser considerada cuidadosamente.

1.2.1 - Aspectos sobre a construção mista.

a - Aspecto estrutural.

Uma peça mista consiste essencialmente de três elementos estruturais:

- seção de concreto
- seção metálica
- conectores

podendo estes últimos serem substituídos, total ou parcialmente pela aderência aço-concreto.

O concreto é obrigado a deformar-se em conjunto com o aço pelos conectores. A função deles consiste em evitar ou controlar os deslocamentos relativos de ambos os materiais.

Os principais fenômenos que produzem esforços internos provenientes da ação em um dos elementos que compõe a seção são:

- Retração do concreto: o encurtamento do concreto, parcialmente impedido pelo aço através da conexão provoca esforços em ambos os materiais, com possível fissuração em zonas locais da seção de concreto.

- Deformação diferida do concreto por fluência: as perdas de tensões (relaxação) no concreto ao longo do tempo incrementam as tensões correspondentes no aço estrutural.

- Efeitos térmicos: a igualdade dos coeficientes de dilatação térmica do aço e do concreto não produz normalmente esforços internos apreciáveis para variações homogêneas de temperatura, mas a grande diferença de inércias térmicas - muito pequena no aço (bom condutor) e grande no concreto (mau condutor)- leva a originar fortes diferenças e gradientes térmicos e conseqüentemente, esforços parasitas nas seções de aço e concreto,

assim como na conexão.

b - Aspecto analítico.

Até recentemente o cálculo de seções mistas era feito com critérios elásticos ou de tensões admissíveis, transformado as seções de concreto e armaduras (ativas e passivas) em suas equivalentes de aço estrutural, mediante os denominados coeficientes de equivalência, que relacionam entre si os módulos de elasticidade destes materiais.

Do mesmo modo, as considerações relativas aos fenômenos reológicos do concreto, retração e fluência, efetuavam-se mediante um controle ideal elástico de tensões apartir de diagramas teóricos simplificados das relações deformação-tempo; ou mais simplesmente ainda, mediante a redução ideal do módulo de elasticidade do concreto chamando-se "método do módulo reduzido".

O método na ruptura, ao definir a capacidade de uma seção no instante de seu esgotamento, analisa a possibilidade de redistribuição interna das tensões nas seções, mediante a aparição de amplas deformações de algumas de suas fibras, isto é, as tensões podem ser levadas até um limite último, estabelecido convenientemente, ao longo de toda a seção transversal da peça. A ductilidade do aço permite alcançar estas situações sem problemas de ruptura locais ou frágeis. De forma análoga, o emprego de métodos de cálculo plástico permite controlar a capacidade portante limite e sua aplicação aos sistemas mistos é conveniente.

A utilização destes métodos não pode fazer-se livremente, mas requer o adequado controle das situações de serviço, para evitar que as estruturas, ainda possuindo uma resistência suficiente frente às cargas previstas, apresentem em estado normal de utilização situações inadequadas: fissuração excessiva, problemas de durabilidade, flechas, etc., que as inutilizem nas funções para as quais foram concebidas. É aqui onde novamente aparecem os métodos elásticos como necessários.

Outro aspecto que pode-se levantar é quanto a validade prática dos métodos exatos de análise da estrutura em serviço. Com o aparecimento dos computadores e mais recentemente dos

microcomputadores que estão se tornando acessíveis para um número cada vez maior de usuários, os métodos exatos de verificação do estado de utilização de estruturas podem ser feitas até com maior rapidez que os métodos aproximados manuais. Por isso é conveniente este tipo de abordagem, pois permite obter toda a história de deformação da estrutura e não apenas os pontos limites como são dados pelo método do módulo reduzido.

Por fim, a utilização de conexões rígidas com distribuição ajustada dos esforços na fase elástica deixou lugar aos sistemas semi-rígidos que permitem uma melhor adequação aos esforços locais provocados pelos esforços de retração, pretensionamento, etc.. Na atualidade, disposições do tipo mais uniforme baseadas na redistribuição de esforços internos das seções e do cisalhamento da conexão (se esta apresenta um adequado grau de flexibilidade) é um método mais apropriado, como tem demonstrado experiências recentes.

1.2.2 - Trabalhos anteriores.

Existem normas e manuais sobre o projeto de detalhamento de tais tipos de estruturas, ver por exemplo Calzon¹¹, CEB¹², Ghali & Favre¹⁸, Sabnis⁴⁷.

Por outro lado, ainda continuam a ser feitas pesquisas sobre o comportamento de vigas mistas, especificamente quanto ao comportamento frente a deformação lenta e a retração, comportamento não linear e influência do deslizamento entre o aço e o concreto (Johnson²⁷).

Alguns trabalhos tem métodos de cálculo automáticos e manuais que levam em conta o aparecimento de fissuras, retração, deformação lenta, a possibilidade de deslizamento entre a viga e a laje, etc. Sobre o assunto ver Ghali & Favre¹⁸ que usam o método dos deslocamentos e o método das forças utilizando a representação do concreto através do ACI¹ e CEB¹².

Nevile & Dilger³⁴ utilizam métodos manuais e semi-automáticos de cálculo. Consideram o efeito da deformação lenta e retração em seções mistas e partem das equações de equilíbrio das forças presentes na seção transversal sob flexão, da expressão para a mudança nas deformações no concreto devido ao creep e junto

com as exigências de compatibilidade (a mudança na curvatura da viga de aço e no concreto deve ser a mesma) chegam a um conjunto de equações que podem ser resolvidas para determinar a mudança nas forças na seção mista num dado tempo.

Sobre este assunto Branson⁸ apresenta dois métodos teóricos pseudo-elásticos para calcular os efeitos da retração diferencial e do creep nas tensões e deflexões junto com uma avaliação das propriedades dos materiais e coeficientes para aplicações práticas.

Para o cálculo de flechas existem diversos fatores de dependência (Leonhardt³⁰), entre eles a variação do momento fletor em trechos onde o momento fletor existente é menor que o momento fletor correspondente ao aparecimento da primeira fissura, ou seja, onde a zona tracionada não se fissura. Nestes trechos o valor da rigidez corresponde a rigidez integral (estádio I). Do mesmo modo, existem regiões intermediárias. Finalmente existem zonas que estão no estágio II (configuração fissurada definitiva, a quantidade de fissuras e o valor de suas aberturas não variam mais).

O comprimento dos trechos destas três zonas depende por um lado da distribuição de carga e do sistema estrutural e com isso do diagrama de momentos, e por outro lado, do grau de carregamento, que é expresso pela relação entre o momento fletor devido à carga permanente ou à carga que atua por um longo período de tempo e o momento devido a carga total de utilização.

Uma outra dependência resulta da distribuição de armadura, expressa pela variação da percentagem de armadura, a qual em geral não é constante, porque a armadura do banzo é escalonada. Finalmente deve-se considerar a densidade de armadura na zona efetiva.

A respeito da utilização de elementos finitos pode-se refinar o cálculo de vigas mistas utilizando o tradicional elemento de viga para a viga e laje, e elemento de mola para os conectores. Para região de tração pode-se utilizar elementos compostos. Ver, por exemplo, as referências Hirst & Yeo²², Johnson & May²⁷, Moffat & Dowlong³³ e Plum & Horne³⁸.

1.2.3 - Abordagem e limitações do presente trabalho.

O estudo feito pelo presente trabalho utiliza a formulação geral baseada no método dos elementos finitos. A análise considera deslocamentos infinitesimais considerando os materiais elásticos e viscoelásticos.

Primeiramente estuda-se pórticos viscoelásticos homogêneos. A carga viscoelástica é calculada a partir dos esforços em cada barra. A lei de variação viscoelástica é baseada nas variáveis de estado utilizando o modelo Kelvin generalizado e o do CEB. A análise é feita incrementalmente ao longo do tempo.

A análise está limitada a flexão reta (eixo de simetria no plano da carga). Não são consideradas deformações finitas nem pórticos espaciais. A primeira limitação, pode ser superada adaptando a formulação apresentada para treliça plana e a segunda exigiria um estudo mais aprofundado uma vez que aparecem outro conjunto de esforços. Na sua presente forma, o programa é adequado para estudar estruturas homogêneas ou mistas com conectores rígidos sob carga de serviço.

Os esforços no interior da barra são interpolados linearmente a partir dos esforços nas extremidades e usados para calcular a carga viscoelástica. Assim, dispensa-se o cálculo das deformações viscoelásticas como é feito na parte de treliça.

A seguir, passa-se para a análise de vigas mistas, para isso é necessário calcular a matriz de rigidez de elementos mistos que está descrito no capítulo 6.

As hipóteses para isto são as da teoria técnica de vigas: movimentos infinitesimais (teoria de primeira ordem), validade da hipótese de Navier (seções planas permanecem planas após os deslocamentos), carregamento no plano de simetria, validade da lei de Hooke e que não há deslizamento entre a placa de concreto e o perfil metálico.

O cálculo das rigidezes dos elementos das barras é feito em relação ao eixo neutro da seção homogeneizada, pela razão descrita na seção 6.6. A localização deste é feita através da homogeneização das partes que compõe a seção. Desta

maneira os elementos são referidos a um único eixo. Os deslocamentos do elemento são interpolados linearmente a partir dos deslocamentos do eixo neutro e, utilizando as funções de interpolação para elemento de viga, pode-se calcular, através do método dos elementos finitos, a matriz de rigidez para elementos mistos.

O erro introduzido ao considerar a excentricidade dos elementos em relação ao eixo das barras em certas formulações é discutido e apresentado num exemplo numérico.

As seções analisadas na dissertação são formadas por dois tipos de materiais com um eixo de simetria longitudinal no plano vertical.

As armaduras podem ser levadas em consideração desde que sejam simétricas em relação ao eixo longitudinal no plano vertical substituindo desta maneira o perfil metálico.

As estruturas mistas consideradas nesta publicação se limitam aquelas formadas por peças prismáticas, excluindo-se as estruturas de tipo superficial (placas e lâminas) ou tridimensional (placas grossas, maciços, etc.), entre as quais a utilização de sistemas mistos é muito limitada ou inexistente, requerendo além disso a resolução de problemas de cálculo e processos construtivos pouco ou nada estudados.

Nesta dissertação considera-se que a seção mista, em sua totalidade, suporta o carregamento externo, além do peso próprio da placa de concreto e do perfil de aço. Esta hipótese exige o escoramento total da viga antes da cura do concreto. Mas, como sabe-se, existe uma grande variedade de fases construtivas neste tipo de construção. Alguns destes resultando em grande economia.

Numa destas sequências construtivas o perfil de aço é colocado sem escoramento e a placa é concretada sobre o perfil. Para proceder o cálculo usando o programa desta dissertação usa-se o processo de superposição de efeitos. Analisa-se o perfil, usando como carregamento o peso próprio do perfil mais o peso próprio do concreto e posteriormente, analisa-se a seção mista, suportando as cargas externas, e superpõe-se os dois resultados.

2 - FORMULAÇÃO MATRICIAL VISCOELÁSTICA.

Neste capítulo, apresenta-se alguns aspectos da teoria viscoelástica e expressões usuais sobre o tema utilizadas nesta dissertação. Faz-se referência aos modelos utilizados no comportamento viscoelástico do concreto e adota-se o modelo do CEB apresentando um método computacional para o cálculo automático das constantes empregadas. Na segunda parte deste capítulo, está a formulação matricial baseada no método dos elementos finitos e particularizada para o caso de treliça plana com grandes deformações e pórtico plano usual.

2.1 - Relações viscoelásticas empregadas.

2.1.1 - Introdução

A teoria da viscoelasticidade pretende descrever o comportamento dos materiais que sofrem deformações diferidas ou não instantâneas. Estes materiais são ditos viscoelásticos. Como um exemplo deste fenômeno, observa-se que alguns materiais continuam a deformar-se apesar da carga permanecer constante. Este processo é denominado deformação lenta ou "creep". Por outro lado, tem-se a relaxação, que é a diminuição com o tempo das tensões, sob deformações constantes impostas.

Do mesmo modo que as deformações instantâneas, as deformações diferidas podem ser lineares ou não lineares. São lineares quando a deformação causada por uma tensão $(\sigma_1 + \sigma_2)$ é igual a soma das deformações causadas por σ_1 e σ_2 aplicadas separadamente. No presente trabalho só se trabalha com deformações diferidas lineares, valendo o princípio da superposição e, além disso, o carregamento será do tipo estático.

Se a deformação lenta é linear, ela pode ser caracterizada por uma deformação lenta específica, $D(t, \tau)$, (Creus¹⁴) que fica:

$$D(t, \tau) = \frac{\varepsilon(t, \tau)}{\sigma_0} \quad (2.1.1)$$

onde

$\varepsilon(t, \tau)$ = deformação no tempo t quando o material foi carregado na idade τ

$D(t, \tau)$ = deformação específica no tempo t e com idade τ

σ_0 = tensão inicial

2.1.2 - Relação viscoelástica linear. Representação integral.

Para um material viscoelástico linear, com uma variação também linear de tensões, pode-se integrar a história de tensões e obter a representação integral da viscoelasticidade:

$$\varepsilon(t) = \int_{\tau_0}^t D(t, \tau) d\sigma(\tau) = \int_{\tau_0}^t D(t, \tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.1.2)$$

Integrando por partes a anterior, obtém-se uma relação tensão deformação viscoelástica na forma integral

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_0}^t d(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (2.1.3)$$

além dos símbolos descritos anteriormente, tem-se $E(t)$ que é o módulo de elasticidade, em geral variável no tempo t , $d(t, \tau)$ é a função de fluência que caracteriza o comportamento viscoelástico do material e $\sigma(t)$ é a tensão em t . Além disso, na representação anterior foram usadas as seguintes igualdades:

$$E(t) = \frac{1}{D(t, t)} \quad \text{e} \quad d(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} D(t, \tau) \quad (2.1.4)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t, \tau_0)$$

onde

$$H(t, \tau_0) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > \tau_0 \\ 0 & \text{para } t \leq \tau_0 \end{cases}$$

A expressão (2.1.3), bastante usada na literatura separa as deformações elásticas, calculadas no tempo t e as diferidas.

2.1.3 - Representação em função das variáveis de estado.

A representação integral indicada na seção anterior é rigorosa e formalmente simples. Por outro lado, não é a mais adequada para a análise numérica com grandes sistemas de equações como os que aparecem quando se aplica o método dos elementos finitos. Para estes casos, a representação em função das variáveis de estado é mais conveniente.

Partindo da eq. 2.1.3 assume-se que a função $d(t, \tau)$ pode ser desenvolvida em série exponencial

$$d(t, \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i(\tau)} e^{-\frac{(t-\tau)}{T_i}} \quad (2.15)$$

Com suficiente número de termos no desenvolvimento pode-se obter tanta precisão como seja necessária. Para a maioria dos problemas práticos, três ou quatro termos são em geral suficientes. Na eq. 2.1.5 T_i é o tempo de retardação e η_i é a constante do amortecedor (fig. 2.1).

Definindo as variáveis de estado como

$$q_i(t) = \int_{\tau_0}^t \frac{1}{\eta_i(\tau)} e^{-\frac{(t-\tau)}{T_i}} \sigma(\tau) d\tau \quad (2.16)$$

Diferenciando a anterior em relação a t fica

$$\dot{q}_i(t) + \frac{q_i(t)}{T_i} = \frac{\sigma(t)}{\eta_i(t)} \quad (2.17)$$

onde $\dot{(\)} = \frac{\partial}{\partial t}$ = derivada temporal e $T_i = \eta_i / E_i$

Considerando a 2.1.3, 2.1.5 e 2.1.6 tem-se a equação

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \sum_{i=1}^n q_i(t) \quad (2.18)$$

Vê-se, assim, que $\varepsilon(t)$ pode ser obtido por uma simples

soma de valores das variáveis de estado no instante t . Assim, pode-se deixar uma relação integral e obter um sistema de n equações diferenciais lineares desacopladas de primeira ordem.

Pode-se notar ainda, que as equações 2.1.7 e 2.1.8 correspondem, neste caso, a um modelo com uma série de elementos Kelvin com mola de elasticidade $E_i = \eta_i / T_i$ e amortecedor com viscosidade η_i , além da mola isolada de constante E . Ver fig. 2.1.

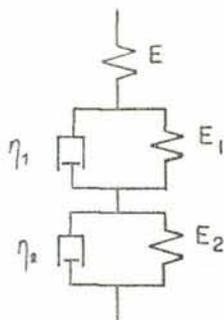


Figura 2.1 - Séries de elementos Kelvin.

Séries de elementos Kelvin com coeficientes variáveis, comumente empregados para a representação do comportamento viscoelástico do concreto, podem ser encontrados em Creus¹⁴ e Bazant⁵ e são casos particulares da representação anterior.

No caso linear, pode-se integrar a 2.1.6 dentro de cada intervalo de tempo. Substituindo t por $t+\Delta t$ e dividindo em dois intervalos pode-se escrever a 2.1.6 como:

$$q_i(t+\Delta t) = \int_0^t e^{-(t+\Delta t-\tau)/T_i} \frac{\sigma(\tau)}{\eta_i(\tau)} d\tau + \int_t^{t+\Delta t} e^{-(t+\Delta t-\tau)/T_i} \frac{\sigma(\tau)}{\eta_i(\tau)} d\tau \quad (2.1.9)$$

Se levar em conta a semelhança com a expressão 2.1.6, considerar $\sigma(\tau)/\eta(\tau)$ na segunda expressão como constante dentro de cada intervalo e realizando as integrações, obtém-se:

$$q_i(t+\Delta t) = e^{-\Delta t/T_i} q_i(t) + \frac{\sigma(t)}{E_i(t)} (1 - e^{-\Delta t/T_i}) \quad (2.1.10)$$

onde $E_i(t) = \eta_i(t)/T_i$

Esta expressão será usada no programa computacional de treliça plana descrito adiante. Para o programa de pórtico plano, além desta expressão utiliza-se uma formulação mais elaborada (ver seção 2.1.6).

2.1.4 - Utilização do modelo standard para a verificação analítica de tensões e deformações.

2.1.4.1 - Modelo de Kelvin generalizado.

O modelo de Kelvin é regido pela seguinte equação diferencial

$$\sigma = E \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (2.1.11)$$

O modelo de Kelvin generalizado é formado pelo agrupamento de "n" unidades Kelvin em séries (fig. 2.1). Obviamente, a tensão em cada unidade é a mesma, enquanto que a deformação total é a soma das deformações parciais de cada elemento. Escrevendo a a 2.1.11 na forma simbólica, para um elemento i fica

$$\sigma_i(t) = \left[E_i + \eta_i \frac{\partial}{\partial t} \right] \varepsilon_i(t) \quad (2.1.12)$$

onde $\partial/\partial t$ é um operador diferencial. Tem-se, para o modelo generalizado

$$\varepsilon(t) = \sum (E_i + \eta_i \partial/\partial t)^{-1} \sigma(t) \quad (2.1.13)$$

onde $(E_i + \eta_i \partial/\partial t)^{-1}$ indica o operador inverso.

A função de creep específica $D(t, \tau)$, para o modelo Kelvin generalizado é obtida resolvendo a equação diferencial 2.1.11 para uma dada tensão constante unitária, $\sigma(t) = \sigma_0 H(t, \tau)$:

$$D(t, \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} (1 - e^{-(t-\tau)/T_i}) \quad (2.1.14)$$

2.1.4.2 - Modelo standard

O modelo standard é formado por um elemento Kelvin em série com uma mola e corresponde ao modelo Kelvin generalizado com

o primeiro $\eta_1 = 0$. Substituindo este valor na eq. 2.1.13 obtém-se

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + (E_1 + \eta_1 \partial/\partial t)^{-1} \sigma(t) \quad (2.1.15)$$

Integrando a 2.1.15 para uma tensão constante unitária, $\sigma_0 H(t, \tau_0)$, correspondente a uma experiência de creep, obtém-se, para n elementos Kelvin

$$D(t, \tau) = \frac{1}{E} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} (1 - e^{-(t-\tau)/T_i}) \quad (2.1.16)$$

Então, dada a deformação inicial ε_0 , obtida a partir de uma tensão inicial imposta, pode-se obter $\varepsilon(t, \tau)$ como

$$\varepsilon(t, \tau) = \varepsilon_0 E D(t, \tau) \quad (2.1.17)$$

No tempo $t = \infty$ vê-se pelas eqs. 2.1.16 e 2.1.17 que para um elemento tem-se

$$\varepsilon(t, \tau)_{t=\infty} = \varepsilon_0 E/E_\infty ; E_\infty = (EE_1)/(E+E_1) \quad (2.1.18)$$

No caso da relaxação, isto é, deformação imposta inicial unitária constante, obtém-se

$$E(t, \tau) = E_\infty + (E - E_\infty) e^{-(E+E_1)(t-\tau)/\eta_1} \quad (2.1.19)$$

Então, dada a tensão inicial σ_0 , obtida a partir de uma deformação inicial imposta, pode-se obter $\sigma(t, \tau)$ como

$$\sigma(t, \tau) = \sigma_0 E(t, \tau) / E \quad (2.1.20)$$

No tempo $t = \infty$ vê-se pelas eqs. 2.1.19 e 2.1.20 que

$$\sigma(t, \tau)_{t=\infty} = \sigma_0 E_\infty / E \quad (2.1.21)$$

(Obs.: Eqs. 2.1.22 a 2.1.23)
estão vagas

Estas equações serão usadas para verificação de alguns exemplos feitos com os programas computacionais propostos.

2.1.5 - Representação do comportamento do concreto.

Esta seção aborda algumas considerações sobre o creep ou deformação lenta do concreto.

O funcionamento do mecanismo do creep depende da estrutura interna do concreto, da pasta de cimento, da água presente na estrutura e do meio ambiente. Este trabalho não tem a intenção de descrever este fenômeno físico, que já foi e está sendo amplamente estudado por diversos autores. Ver Neville³⁴ e Bazant⁵.

Na literatura sobre o assunto, existem diversas expressões matemáticas que tentam representar o comportamento real das estruturas observadas experimentalmente em modelos simplificados. Estas expressões são do tipo assintóticas, utilizando relações hiperbólicas, logarítmicas, exponenciais, etc. Além disso, elas utilizam parâmetros que são determinados por experiências e que dependem do tipo de material e do meio ambiente.

Para a análise estrutural, as formulações são apresentadas através de gráficos, em que os fatores são independentes um do outro e compõe-se da umidade relativa do ar, espessura equivalente, percentagem água-cimento, idade do material, tempo de carregamento, etc.

A maioria dos trabalhos considera o processo de creep como linear. Desta maneira aceitam o princípio da superposição e as equações podem ser descritas como relações integrais, com diferentes formas para a função de creep.

Uma representação detalhada sobre este assunto pode ser encontrada em Neville³⁴ e Bazant⁵ que dão posteriores referências. O método de Dishinger, que propôs uma relação constitutiva ao estilo da equação 2.1.10, é apresentado e aplicado em Rush et ali⁴⁶. Tem-se, também as fórmulas usadas pelas diversas normas CEB-FIP¹² e ACI¹.

2.1.6 - Representação do comportamento do concreto através de um modelo reológico.

As curvas de deformação lenta expostas no apêndice D do código modelo CEB-FIP¹², foram usadas para representar o comportamento do concreto e estão reproduzidas no Apêndice A.

Estas curvas não são aplicáveis:

- Concretos sujeitos a temperatura extremamente altas (por exemplo: reatores nucleares).
- Concretos sujeitos a cura por aquecimento por calor.

E são aplicáveis em:

- Concretos sujeitos a tensões de compressão não excedendo $0.4 f_{ckj}$ (f_{ckj} = resistência cilíndrica característica a compressão na idade j) e permitido endurecer sob condições de umidade e temperatura constantes.

- Os valores numéricos são valores médios e podem variar 20% em cada direção. Esta variação será introduzida nos cálculos quando apropriado, ao lado da segurança.

- Com respeito ao creep, sua aplicação é para concreto submetido a compressão.

- No domínio das tensões de serviço, as deformações devido a fração de tensão aplicada em diferentes tempos são consideradas aditivas (hipótese da superposição).

Levando isto em conta, a deformação lenta, sob tensão constante é linear em relação as tensões. O coeficiente de deformação lenta $\varphi(t, \tau_0)$ é definido pela equação

$$\varepsilon_c(t, \tau_0) = \frac{\sigma_0}{E_{c28}} \varphi(t, \tau_0) \quad (2.1.24)$$

onde $\varepsilon_c(t, \tau_0)$ é a deformação lenta no tempo t sob uma tensão constante σ_0 aplicada no tempo τ_0 , E_{c28} é o módulo de elasticidade em 28 dias.

A deformação em t sob tensões constantes (deformação inicial em τ_0 mais a deformação lenta) é dada por

$$\varepsilon(t, \tau_0) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E_c(\tau_0)} + \frac{\varphi(t, \tau_0)}{E_{c28}} \right] \quad (2.1.25)$$

onde $E_c(\tau_0)$ é o módulo de elasticidade na idade τ_0 . O termo

$$D(t, \tau_0) = \frac{1}{E_c(\tau_0)} + \frac{\varphi(t, \tau_0)}{E_{c28}} \quad (2.1.26)$$

é chamado "função de deformação lenta" ou "função de creep" e representa a deformação total do concreto em t , sob tensão constante deste τ_0 .

A função de deformação lenta pode ser desdobrada nas seguintes partes

$$D(t, \tau_0) = \frac{\varepsilon(t, \tau_0)}{\sigma_0} = \varepsilon_0 + \varepsilon_d + \varepsilon_f \quad (2.1.27)$$

onde

ε_0 é a deformação inicial

ε_d é a deformação elástica diferida

ε_f é a deformação irreversível, todas elas medidas por unidade de tensão inicial, σ_0 .

$$\varepsilon_0 = \beta_i(\tau_0) + \beta_a(\tau_0) \quad (2.1.28)$$

$$\varepsilon_d = \varphi_d \beta_d(t - \tau_0) \quad (2.1.29)$$

$$\varepsilon_f = \varphi_f \left[\beta_f(t) - \beta_f(\tau_0) \right] \quad (2.1.30)$$

onde

$\beta_i(\tau_0)$ corresponde a deformação elástica inicial, função só de τ_0 .

$\beta_a(\tau_0)$ corresponde ao desenvolvimento da deformação rápida inicial (irreversível) que é desenvolvida durante o primeiro dia após a aplicação da carga.

φ_d é o coeficiente de elasticidade diferido ($\varphi_d = 0.4$).

$\beta_d(t, \tau_0)$ corresponde ao desenvolvimento com o tempo da deformação elástica diferida, totalmente reversível que assume-se ser independente do envelhecimento.

$\varphi_f = \varphi_{f1} \varphi_{f2}$ é o coeficiente de fluência. Onde φ_{f1} é função da umidade relativa (R_h), em %, e φ_{f2} é função da espessura efetiva (h_0), em cm.

$\beta_f(t, \tau_0, h_0)$ corresponde ao desenvolvimento com o tempo da parte irreversível da deformação diferida (fluência) que é muito afetado pela idade em que o carregamento começa.

t e τ_0 são a idade do concreto no momento em consideração e no momento do carregamento, respectivamente, corrigidas quando a temperatura ambiente durante o endurecimento for muito diferente de 20°C , conforme CEB.

h_0 é a espessura efetiva, função da área da seção transversal do concreto, A_c , do perímetro em contato com a atmosfera, p , e de um coeficiente que depende das condições ambientais, λ .

Então:
$$h_0 = 2 A_c \lambda / p . \quad (2.1.31)$$

As expressões analíticas para os termos acima estão dadas no Apêndice A.

A equação 2.1.27 pode ser representada através do modelo reológico da fig. 2.2 e de acordo com as equações 2.1.2 à 2.1.4 e também 2.1.14, pode ser posta na forma

$$\begin{aligned} \epsilon(t, \tau_0) = & \frac{\sigma_0}{E(\tau_0)} + \sum_{i=1}^n \int_{\tau_0}^t \frac{1}{E_i} (1 - e^{-(t-\tau_0)/T_i}) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ & + \int_{\tau_0}^t \psi(\tau) \sigma(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

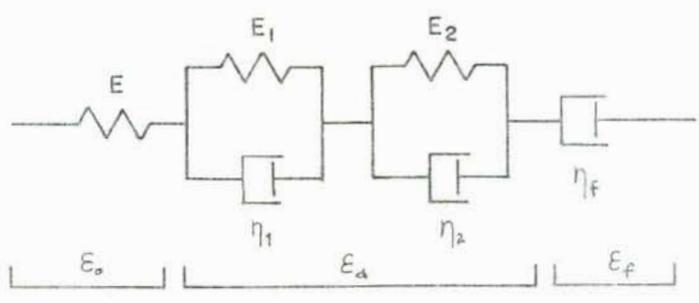


Fig. 2.2 - Modelo reológico utilizado

O primeiro termo do segundo membro corresponde a deformação inicial e é calculada com $E(\tau_0)$, determinado a partir dos valores de $\beta_1(\tau_0) + \beta_a(\tau_0)$ (ver apêndice A). No programa computacional desenvolvido este valor entra diretamente na matriz de rigidez do elemento e é dado por:

$$E(\tau_0) = \frac{E_{c28}}{\beta_1(\tau_0) + \beta_a(\tau_0)} \quad (2.1.33)$$

O segundo termo é a deformação elástica diferida. Para representar a parcela correspondente a ε_d foram utilizados dois elementos Kelvin que demonstraram dar precisão suficiente para a análise desejada. Para isto, as constantes E_i e η_i da fig. 2.2 são determinadas a partir da parcela $\varphi_d \beta_d(t - \tau_0)$ de acordo com a seção 2.1.7 e assumem os valores $E_1 = 4,96$, $T_1 = 204$, $E_2 = 5,7$ e $T_2 = 5,7$.

Por fim, a última parcela corresponde a deformação irreversível (fluência) e no tempo $t + \Delta t$ é dada por

$$\varepsilon_f(t + \Delta t) = \int_{\tau_0}^{t + \Delta t} \psi(\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (2.134)$$

ou

$$\varepsilon_f(t + \Delta t) = \int_{\tau_0}^t \psi(\tau) \sigma(\tau) d\tau + \int_t^{t + \Delta t} \psi(\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (2.135)$$

$$\varepsilon_f(t + \Delta t) = \varepsilon_f(t) + \Delta \varepsilon_f(t) \quad (2.136)$$

Nestas expressões $\psi(\tau)$ é a função de fluência (semelhante a $d(t, \tau)$ na 2.1.3) que caracteriza a parte irreversível da deformação lenta.

Assumindo que $\sigma(\tau)$ é constante no intervalo t até $(t + \Delta t)$ e considerando que

$$\psi(\tau) = \partial \varphi_f \beta_f(\tau) / \partial \tau \quad (2.137)$$

vem

$$\Delta \varepsilon_f(t) = \sigma(t) C_f \quad (2.138)$$

onde

$$C_f = (\beta_f(t + \Delta t) - \beta_f(t)) \varphi_f \quad (2.139)$$

Desta maneira, a deformação total está representada. A deformação viscoelástica é calculada com as eqs. 2.1.10 e 2.1.36 e pode-se escrever

$$\varepsilon_v(t + \Delta t) = \sum_{i=1}^n \left\{ \varepsilon_{di}(t) C_{1i} + \sigma(t) C_{2i} \right\} + \varepsilon_f(t) + \sigma(t) C_f \quad (2.141)$$

onde

n = número de mecanismos de Kelvin

$$C_{1i} = e^{-\Delta t/T_i}$$

$$C_{2i} = (1 - e^{-\Delta t/T_i}) / E_i$$

$$\varepsilon_{di}(t+\Delta t) = \varepsilon_{di}(t) C_{1i} + \sigma(t) C_{2i} \quad (2.1.42)$$

No primeiro incremento de análise viscoelástica

$$\varepsilon_v(\tau_o + \Delta t) = \sum_{i=1}^n \left[\sigma(\tau_o) C_{2i} \right] + \sigma(\tau_o) C_f$$

onde τ_o refere-se a análise inicial ou elástica.

2.1.7 - Determinação das constantes de um modelo Kelvin generalizado em base a uma curva dada.

A partir do método gráfico apresentado por Ishai²⁵, pode-se desenvolver um método semi-automático para calcular as constantes dos mecanismos Kelvin (E_i e η_i). Se for dada, por exemplo, a seguinte curva

$$\varepsilon_d(t, \tau_o) = 0.4 \beta_d(t, \tau_o) \quad (2.1.43)$$

onde, β_d é definido no Apêndice A, Pode-se traçar um gráfico, ver fig. 2.3, com o tempo nas abcissas e o logaritmo de base 10 da diferença entre o coeficiente de deformação lenta para o tempo considerado infinito, $t_\omega = 10000$ dias, $\varepsilon_d(t_\omega, \tau_o)$ e o coeficiente $\varepsilon_d(t, \tau_o)$ no tempo t . Ou seja,

$$\log_{10} \left[\varepsilon_d(t_\omega, \tau_o) - \varepsilon_d(t, \tau_o) \right] \quad (2.1.44)$$

Quando está curva tornar-se uma reta, pode-se determinar o primeiro mecanismo. Prolongando está reta até a ordenada que passa em τ_o obtém-se o valor de G .

A partir da equação da reta que define G tem-se pela fig.2.3 que

$$G = A - \frac{t_2 - \tau_o}{t_2 - t_1} (A - B) \quad (2.1.45)$$

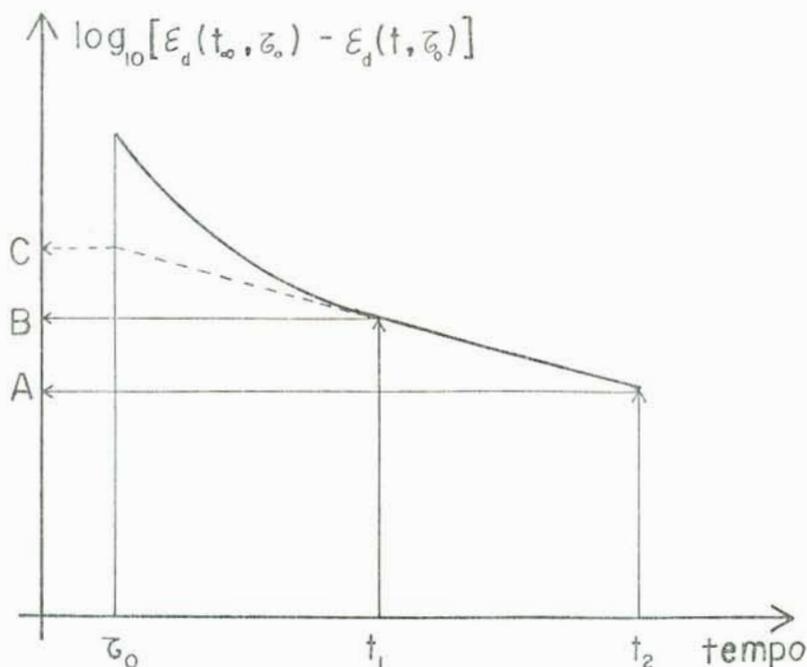


Fig. 2.3 - Determinação dos mecanismos de Kelvin.

O valor de C, como poderá ver-se adiante, fornece

$$E_i = \frac{1}{10^C} = \frac{1}{\text{antlog}(C)} \quad (2.1.46)$$

onde antlog é o antilogaritmo. O tempo de retardação $T_i = \eta_i / E_i$ é a declividade da curva da fig. 2.3 é obtido através da seguinte expressão

$$T_i = \frac{t_2 - t_1}{B - A} \log_{10} e \quad (2.1.47)$$

onde "e" é a base do logaritmo natural = 2.718 e as demais constantes estão representadas na fig. 2.3.

Pode-se interpretar as eqs. 2.1.46 e 2.1.47 através da seguinte dedução:

A deformação lenta de um elemento simples de Kelvin submetida a uma tensão constante é dada por (Creus¹⁴)

$$\varepsilon_d(t, \tau_0) = \varepsilon_{d\infty} (1 - e^{-(t-\tau_0)/T_i}) \quad (2.1.48)$$

onde $\varepsilon_{d\infty}$ é o valor final desta deformação. A equação 2.1. também pode ser escrita da seguinte forma

$$\varepsilon_{d\infty} - \varepsilon_d(t, \tau_0) = \varepsilon_{d\infty} e^{-(t-\tau_0)/T_1} \quad (2.149)$$

Tomando o logaritmo da eq. 2.149 vem

$$\log_{10} \left[\varepsilon_{d\infty} - \varepsilon_d(t, \tau_0) \right] = \log_{10} (\varepsilon_{d\infty}) - \frac{(t-\tau_0)}{T} \log_{10} (e) \quad (2.150)$$

A eq. 2.150 dá uma linha reta no plano $(t-\tau_0)$ com $\log_{10} (\varepsilon_{d\infty} - \varepsilon_d)$, cuja intersecção com o eixo das ordenadas fornece o valor da deformação lenta final, enquanto sua inclinação representa o inverso do tempo de retardação multiplicado por $\log_{10} (e)$. Fazendo

$$A = \log_{10} \left[\varepsilon_{d\infty} - \varepsilon_d(t, \tau_0) \right] ; B = \log_{10} (\varepsilon_{d\infty}) \quad (2.151)$$

tem-se, finalmente, pela 2.150 a 2.147.

Desta forma o mecanismo 1 fica determinado como

$$\varepsilon_1(t, \tau_0) = \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-(t-\tau_0)/T_1} \right) \quad (2.152)$$

Agora, passa-se a determinação do segundo mecanismo.

Traça-se uma nova curva a partir da diferença entre $\varepsilon_d(t, \tau_0)$ e $\varepsilon_1(t, \tau_0)$ obtendo o creep resultante $\bar{\varepsilon}_d(t, \tau_0)$, ou seja

$$\bar{\varepsilon}_d(t, \tau_0) = \varepsilon_d(t, \tau_0) - \varepsilon_1(t, \tau_0) \quad (2.153)$$

a partir desta expressão pode-se tracar o gráfico semelhante a fig. 2.3, só que nas ordenadas marca-se agora

$$\log_{10} (\bar{\varepsilon}_d(t, \tau_0) - \bar{\varepsilon}_d(t, \tau_0)) \quad (2.154)$$

e procede-se como anteriormente até a determinação do mecanismo 2, $\varepsilon_2(t, \tau_0)$. Desta forma pode-se obter outra curva resultante descrita pela seguinte equação:

$$\bar{\varepsilon}(t, \tau_0) = \bar{\varepsilon}_d(t, \tau_0) - \varepsilon_2(t, \tau_0) \quad (2.1.55)$$

(Obs.: Eqs. 2.1.56 a .59)
estão vagas.

e proceder assim até que a curva original esteja suficientemente bem representada. A qualquer momento pode-se comparar $\varepsilon_d(t, \tau_0)$ com a soma de $\varepsilon_1(t, \tau_0) + \varepsilon_2(t, \tau_0) + \dots + \varepsilon_n(t, \tau_0)$ para verificar a precisão dos resultados.

A única parte do presente método que não está automatizada é a escolha dos tempos t_i e t_{i+1} . Estes tempos devem estar sobre uma reta e são escolhidos visualmente a partir do traçado da curva (figs. 2.3, 2.5 e 2.7)

Para o termo da deformação diferida eles são constantes para todos os tipos de concreto uma vez que só dependem de $(t - \tau_0)$.

2.1.8 - Exemplo de aplicação sobre a seção 2.1.6.

A expressão do CEB usada para calcular deformação elástica diferida é a que segue

$$\varepsilon_d(t, \tau_0) = \varphi_d \left[\frac{t - \tau_0}{t - \tau_0 + 328} \right]^{1/4,2} \quad (2.1.60)$$

onde φ_d é uma constante igual a 0.4 e $(t - \tau_0)$ deve ser considerada como a variável da expressão.

Para melhor compreender o método de determinação das constantes do modelo Kelvin, segue um exemplo numérico.

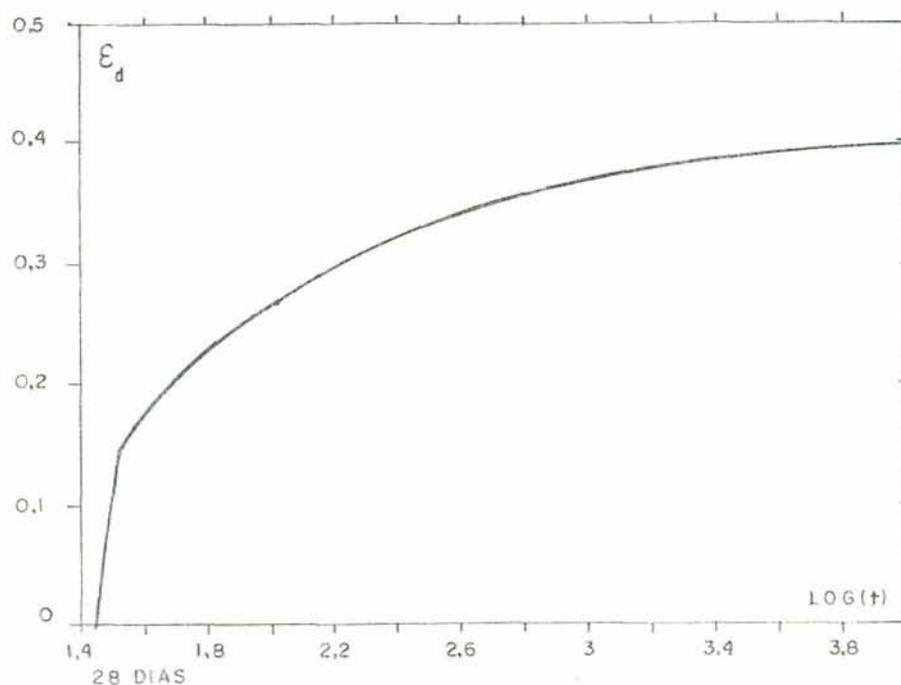


Fig. 2.4 - Deformação diferida versus tempo.

Fixando $\tau_0 = 28$ dias e variando t , obtém-se a curva da fig. 2.4, onde, nas ordenadas, têm-se os valores para a expressão 2.1.60 e, nas abscissas, foi tomado o logaritmo do tempo para melhor representação.

Aplicando a eq. 2.1.44, obtém-se a curva da fig. 2.5, semelhante a fig. 2.3, onde tem-se os seguintes valores:

$$\begin{array}{ll} t_2 = 200 & A = -1.062 \\ t_1 = 60 & B = -0.764 \end{array}$$

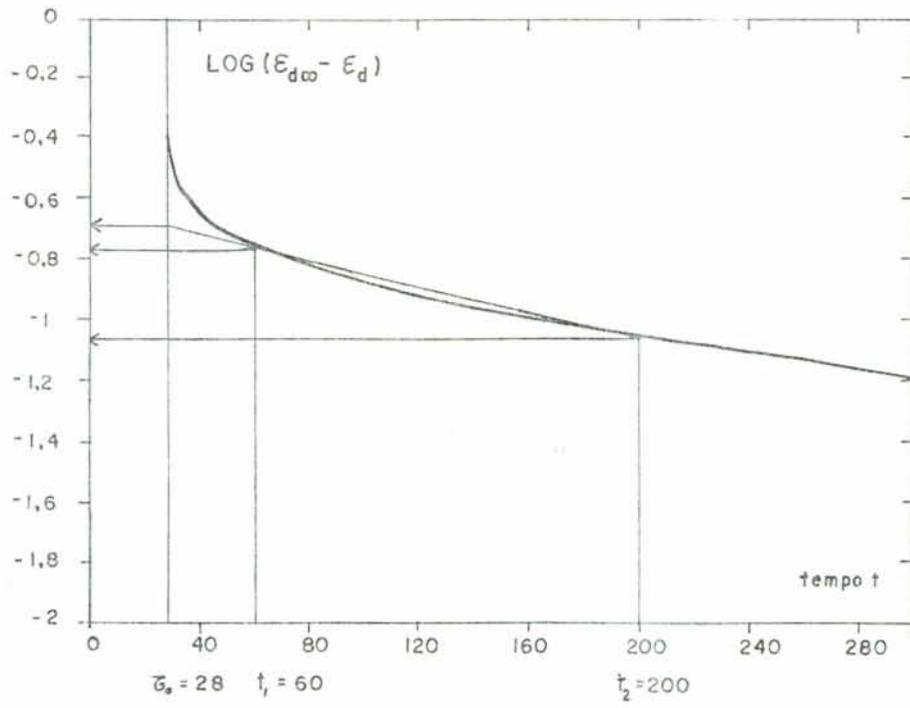


Fig. 2.5 - Determinação dos tempos de retardação.

Utilizando as eqs. 2.1.45 a 2.1.47 tem-se

$$C = -0.695 \quad T_r = 204 \quad E_1 = 4.96$$

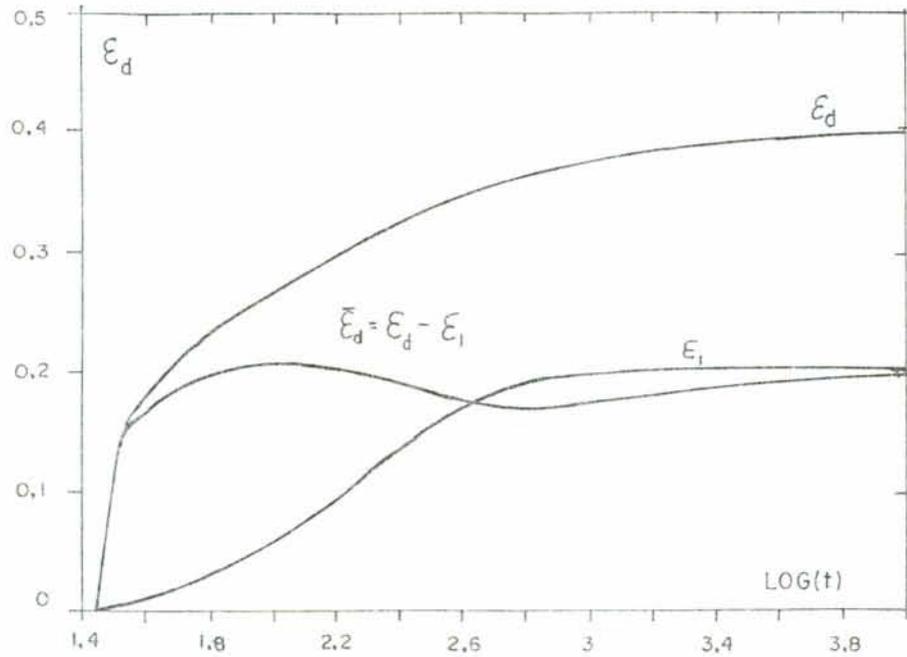


Fig.2.6 - Diferença entre as deformações versus tempo.

Desta maneira, o mecanismo 1 fica (ver eq. 2.1.52)

$$\varepsilon_1(t, \tau_0) = \frac{1}{4,96} \left(1 - e^{-\frac{(t - \tau_0)}{204}} \right)$$

e pode-se passar para a determinação do segundo mecanismo.

Na fig. 2.6, estão representadas a curva original ε_d , a eq. 2.1.53 e ε_1 dado na eq. anterior. Novamente, tomou-se nas abscissas o logaritmo do tempo para melhor visualização.

Outra vez, aplica-se a eq. 2.1.44 para obter a segunda curva da fig. 2.7, onde tem-se os seguintes valores

$$\begin{aligned} t_2 &= 38.6 & A &= -1.519 \\ t_1 &= 28 & B &= -0.709 \end{aligned}$$

Utilizando as eqs. 2.1.45 a 2.1.47 tem-se

$$C = -0.709 \quad T_2 = 5.7 \quad E_2 = 5.11$$

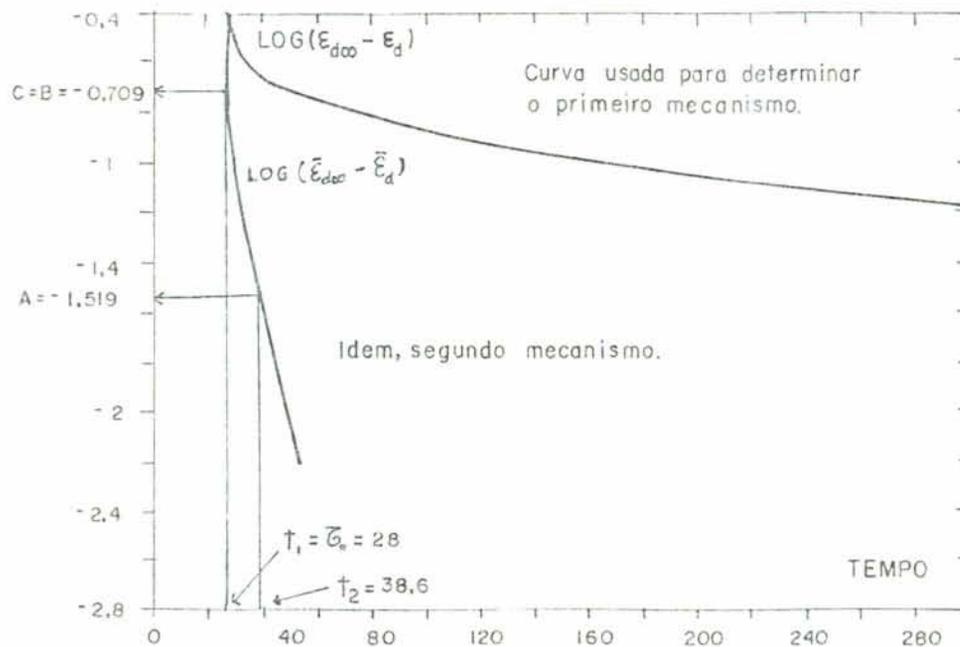


Fig. 2.7 - Cálculo do segundo mecanismo.

Desta maneira, o mecanismo 2 fica (ver eq. 2.1.52):

$$\varepsilon_2(t, \tau_0) = \frac{1}{5,11} \left(1 - e^{-\frac{(t - \tau_0)}{5,7}} \right)$$

Feito isso, pode-se ver na fig. 2.8, a representação dos dois mecanismos calculados ε_1 e ε_2 , sua soma ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2$) e a curva original ε_d .

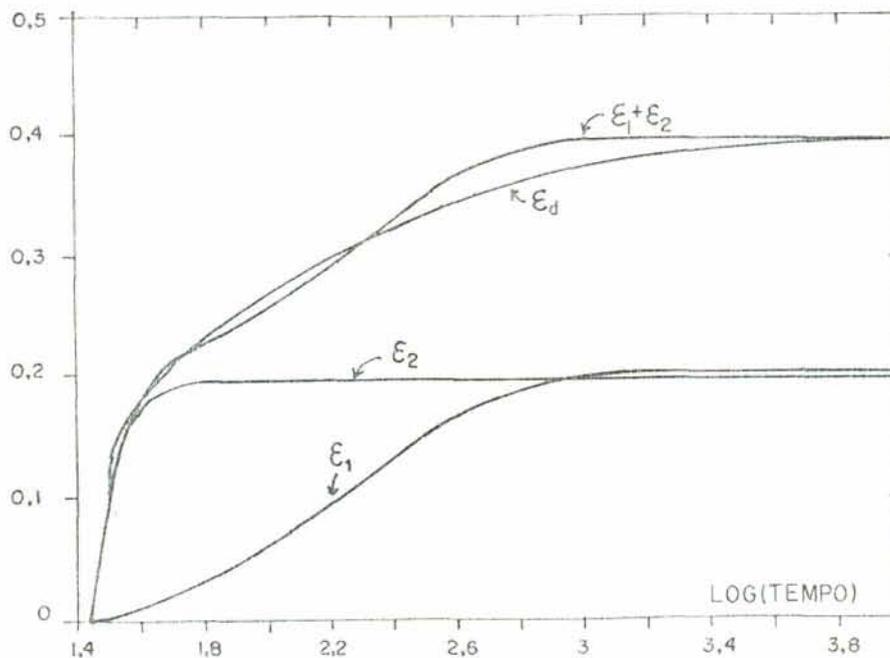


Fig. 2.8 - Curva aproximada.

Este método foi programado no computador, para utilizar qualquer tipo de curva de deformação lenta. Na seção seguinte, está o fluxograma de cálculo adotado.

Inicialmente, a curva utilizada era a que representava todas as parcelas da deformação lenta (eq. 2.1.30) e foram necessários cinco mecanismos de Kelvin para obter uma boa aproximação para certas idades de carregamento, espessura efetiva e condições ambientais.

Com a formulação apresentada anteriormente (seção 2.1.6), onde foram separadas as parcelas, devido a deformação elástica diferida e devido à fluência, somente dois mecanismos foram suficientes para representar a primeira parcela.

Com relação a parte do método que não foi possível automatizar, que são os tempos t_1 e t_2 , eles foram fixados visualmente com a figs. 2.5 e 2.7. Como estas figuras foram geradas com a curva de ε_d com $\tau_0 = 28$ dias tem-se que os valores de $(t - \tau_0)$ para a determinação dos dois mecanismos são 172, 32,

10,6 e 0.

2.1.9 - Fluxograma do programa computacional para a
determinação dos mecanismos de Kelvin.

Com as equações da seção 2.1.6 e 2.1.7 foi montado o diagrama de fluxo da fig. 2.9 . A seguir estão as sub rotinas utilizadas nesta fluxograma.

Cálculo de ε_d .

$$\varepsilon_d(t, \tau_0) = \varphi_d \left[\frac{t - \tau_0}{t - \tau_0 + 328} \right]^{1/4,2} \quad (2.1.60) \text{ repetida}$$

Cálculo de $\bar{\varepsilon}_\infty$

$$\bar{\varepsilon}_\infty = \varepsilon_\infty - \sum_{i=1}^{N_m-1} \left[1 - e^{-\frac{(t-\tau_0)}{T_i}} \right] / E_i$$

Cálculo da ordenada Y.

$$Y = \log \left\{ \bar{\varepsilon}_\infty - \varepsilon_d - \sum_{i=1}^{N_m-1} \left[1 - e^{-\frac{(t-\tau_0)}{T_i}} \right] / E_i \right\}$$

Cálculo de G, E e T (Eqs. 2.1.45, 46 e 47)

$$C = A - \frac{t_2 - \tau_0}{t_2 - t_1} (A - B) \quad (2.1.45) \text{ repetida}$$

$$E_i = 1 / 10^C \quad (2.1.46) \text{ repetida}$$

$$T_i = \frac{t_2 - t_1}{B - A} \log_{10}(e) \quad (2.1.47) \text{ repetida}$$

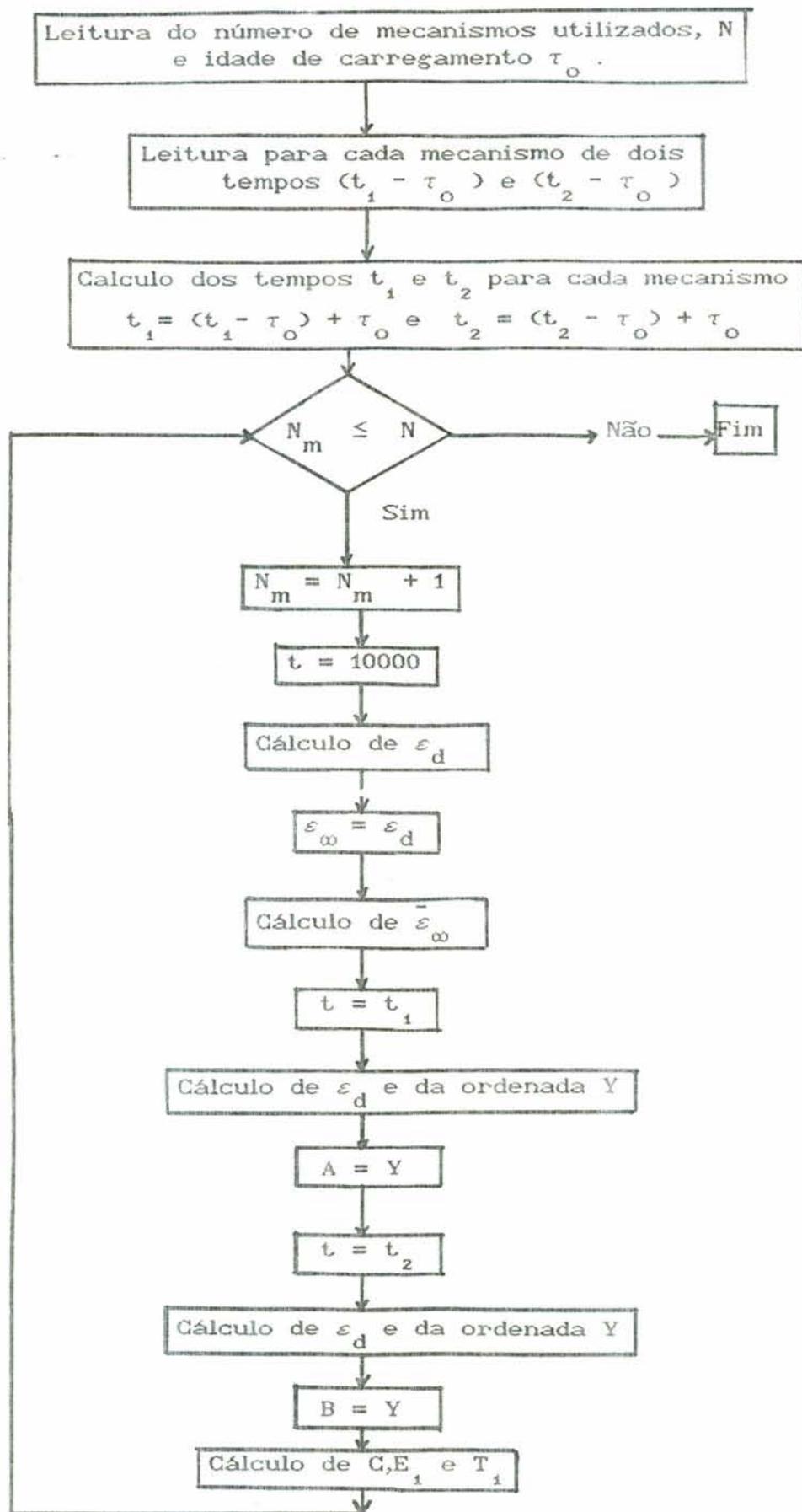


Fig. 2.9 - Fluxograma para o cálculo de mecanismos.

2.1.10 - Comparações das expressões analíticas e o gráfico dado pelo CEB com o programa proposto.

O Código Modelo do CEB¹² representa o processo de deformação lenta através de gráficos e de expressões analíticas. Através das expressões analíticas este trabalho apresenta um método (ver seção 2.1.6) que descreve o fenômeno citado.

Para comparar os resultados, foi utilizada uma barra que, se fosse só elástica, sofreria um deslocamento unitário (fig. 2.10.a) sob a ação de uma carga também unitária. Em outra situação, reagiria, com um reação unitária, sob a ação de um deslocamento imposto também unitário (fig. 2.10.b).

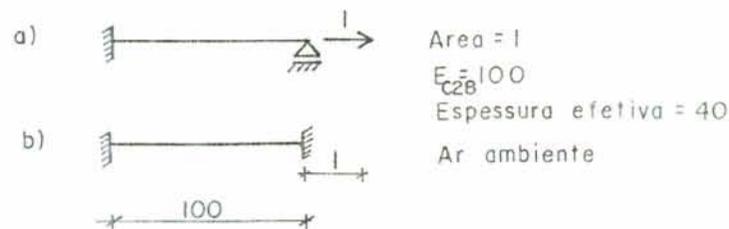


Fig. 2.10 - Estrutura com uma barra.

Nas três figuras que seguem a estrutura foi carregada em

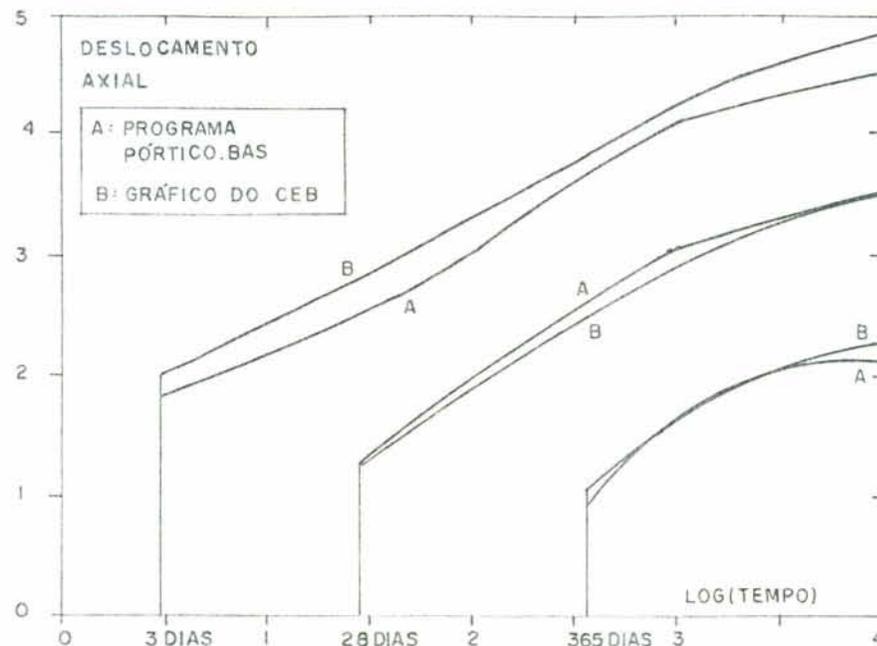


Fig. 2.11 - Curva deslocamento versus tempo dos dados obtidos com o programa PORTICO.BAS e os gráficos do CEB.

três idades diferentes: 3, 28 e 365 dias. As curvas da fig. 2.11 e 2.12 representam a experiência de creep, isto é, a barra é submetida a uma carga constante, no caso unitária, e é acompanhado o comportamento do deslocamento axial, ao longo do tempo.

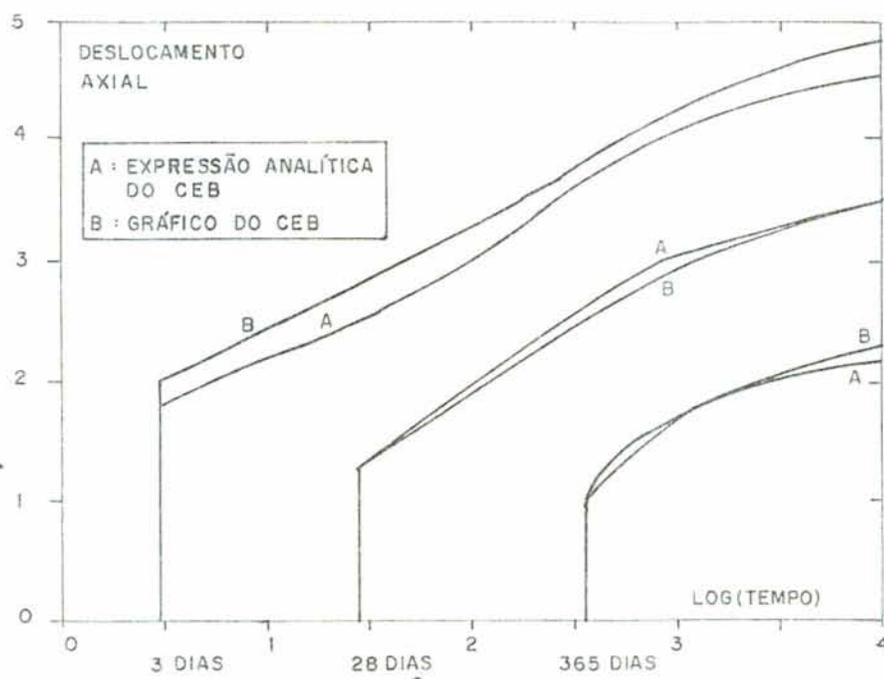


Fig. 2.12 - Curva do deslocamento versus tempo obtida com as expressões analíticas e os gráficos do CEB.

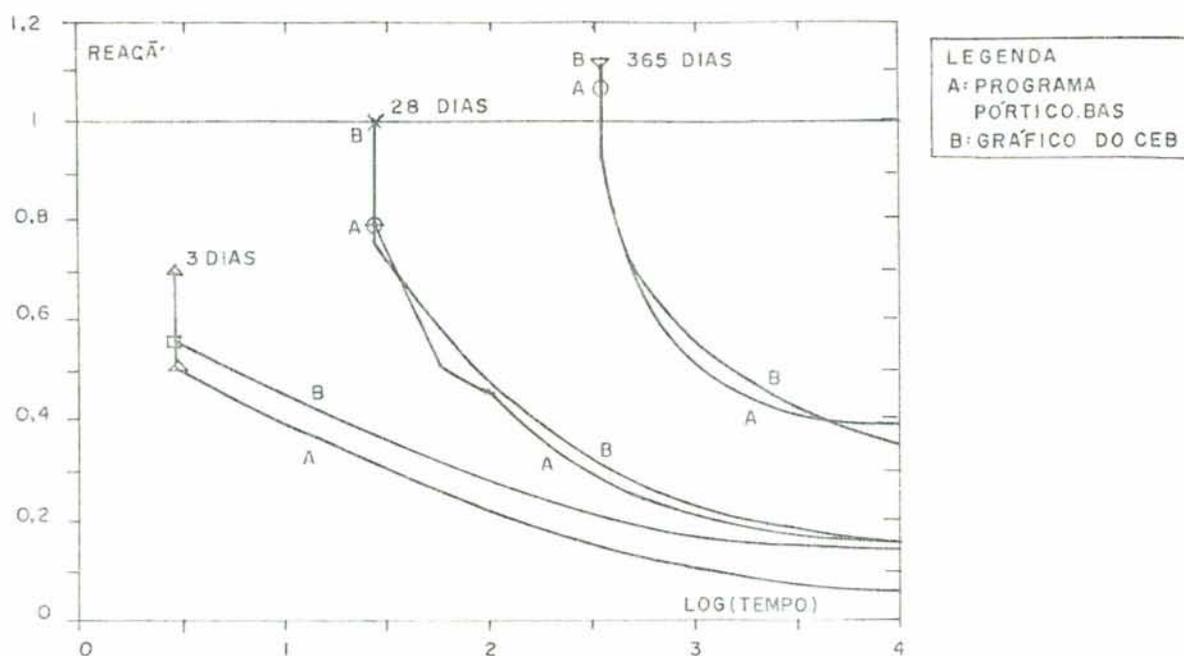


Fig. 2.13 - Comparação do programa PORTICO.BAS com o CEB para a experiência de relaxação.

Na fig. 2.11 tem-se duas curvas para cada idade de carregamento. Uma foi obtida com o programa do presente trabalho e a outra são os dados retirados dos gráficos do CEB.

Na fig. 2.12 foram comparados os dados obtidos com o gráfico do CEB e as expressões analíticas do próprio CEB.

E finalmente, na fig. 2.13 tem-se a experiência de relaxação, isto é, a estrutura é submetida a um deslocamento, no caso unitário, que é mantido constante, e analisa-se o esforço resultante, no caso também unitário, ao longo do tempo. Para cada idade de carregamento tem-se duas curvas, uma foi retirada diretamente dos dados do CEB e a outra foi obtida com o programa computacional do presente trabalho.

Variando-se a espessura efetiva, condições ambientais e idade de carregamento pode-se ter uma grande variedade de gráficos.

A partir de alguns exemplos rodados e comparados pode-se tirar algumas conclusões sobre as curvas de deformação lenta do CEB.

Na análise dos termos das deformação lenta pode-se observar que a deformação elástica diferida confere com os gráficos para idades de carregamento maiores do que 28 dias. Para idades menores os resultados começam a ter maiores diferenças. Até 20%. O mesmo acontece com os termos para a deformação irreversível.

Para o conjunto dos dados aparentemente ocorre o mesmo. Ver figs. 2.11 e 2.12.

2.2 - Formulação geral.

Terminada a parte introdutória sobre viscoelasticidade, parte-se, como foi dito na introdução deste capítulo, para a apresentação da formulação geral baseada no método dos elementos finitos para a análise de estruturas.

2.2.1 - Princípio dos trabalhos virtuais

Nesta seção será apresentado o princípio dos trabalhos virtuais, a formulação do método dos elementos finitos, as equações para a obtenção das matrizes de rigidez elástica e geométrica de treliças planas e a matriz usual de pórtico plano.

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece que durante qualquer deslocamento virtual arbitrário do estado de equilíbrio o incremento na energia de deformação é igual ao trabalho feito pelas forças externas.

Essa lei básica para processos com deformações finitas pode ser escrita na forma incremental^{14,3}

$$\int_V \left\{ \dot{\underline{T}} \otimes \delta \underline{D} + \frac{1}{2} \underline{\sigma} \otimes \left[\delta (\underline{L}^T \underline{L}) \right] \right\} dV = \int_{A_\sigma} \delta \dot{\underline{U}}^T \underline{t} \, ds + \int_V \delta \dot{\underline{U}}^T \underline{b} \, dV \quad (2.2.1)$$

a qual corresponde a uma descrição Lagrangiana atualizada, que acompanha todas as posições das partículas do corpo em seu movimento, isto é, da configuração original até a final.

Na equação anterior a operação $\underline{A} \otimes \underline{B} = C$ com $\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$, $\underline{B} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$, implica $C = a_{ij} b_{ij}$, sendo C um escalar. Além disso:

\underline{T} é matriz do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchoff, que permite calcular o trabalho virtual com referência ao volume original do elemento;

$\underline{\sigma}$ é o tensor de tensões de Cauchy, isto é, forças internas do corpo por unidade de área na configuração atualizada;

\underline{L} é o gradiente de velocidade, $\underline{L} = \partial \dot{\underline{U}} / \partial \underline{x}$;

\underline{D} é a velocidade de deformação específica, $\underline{D} = 1/2(\underline{L} + \underline{L}^T)$

$\dot{\underline{U}}$ é o campo de velocidades no contínuo

t e b indicam as forças de superfície e volume respectivamente na configuração atualizada caracterizada pelo volume V

$A = A_{\sigma} + A_u$ onde A_{σ} é a área sob tensões prescritas e A_u é a área com velocidades prescritas também na configuração atualizada.

Deve-se lembrar ainda que na descrição Lagrangeana atualizada, $\dot{T} = \dot{q}$, mas $\dot{T} \neq \dot{q}$. Também $\dot{U} = \dot{e}$.

Empregando o método dos elementos finitos o corpo original B_0 , é substituído por uma aproximação formada por n elementos de volume V_e .

A hipótese básica desta formulação (Brebbia & Ferrante⁹) é que as velocidades em qualquer ponto sobre o elemento pode ser aproximadamente representada por uma função em termos de parâmetros desconhecidos. Essas funções variam de elemento para elemento. Assim, para um elemento e , pode-se escrever

$$\dot{U} = f(\alpha) \quad (2.2.2)$$

ou

$$\dot{U} = A \alpha \quad (2.2.3)$$

A matriz A contém as funções de posição apropriadamente escolhidas e α é um vetor contendo as constantes a calcular para o elemento i , em número igual ao de velocidades nodais do elemento estrutural.

Particularizando a equação anterior para os pontos nodais do elemento encontra-se

$$\dot{U}_e = C \alpha \quad (2.2.4)$$

onde \dot{U}_e são as velocidades nos pontos nodais e C é obtida de A pela introdução das coordenadas dos pontos nodais. Se as funções f forem devidamente selecionadas para evitar singularidades, C será uma matriz quadrada de constantes, invertendo a equação anterior se obtém

$$\alpha = C^{-1} U_e \quad (2.2.5)$$

tal que

$$\dot{U} = A \alpha = A C^{-1} U_e \quad (2.2.6)$$

ou

$$\dot{U} = N \dot{U}_e \quad (2.2.7)$$

com

$$N = A G^{-1} \quad (2.2.8)$$

Desta forma, N contém as funções de interpolação que determinam as velocidades no interior do elemento a partir das velocidades nodais.

Levando em conta as relações deformação deslocamento específica, a partir da equação (2.2.7) chega-se:

$$D = B \dot{U}_e \quad (2.2.9)$$

e

$$L = \bar{N} \dot{U}_e \quad (2.2.10)$$

Incrementalmente, a relação constitutiva elástica é da forma

$$\dot{T} = M (D - \dot{\xi}_0) \quad (2.2.11)$$

onde M é a matriz constitutiva elástica usual, empregada na análise de pequenas deformações, $\dot{\xi}_0$ são as velocidades de deformação específicas iniciais, que podem ter origem em efeitos viscoelásticos, temperatura ou retração.

Substituindo as equações 2.2.8 a 2.2.11 na 2.2.1 e operando, obtém-se para um elemento genérico, a matriz de rigidez tangente na forma

$$K_e = \int_{V_e} B^T M B dV + \int_{V_e} \bar{N}^T g \bar{N} dV = K_{el} + K_{em} \quad (2.2.12)$$

O primeiro termo, K_{el} , representa a parte linear, matriz de rigidez elástica, e o segundo termo, K_{em} , a parte não linear, que depende das tensões g e é correntemente denominada matriz geométrica. Para o corpo B, tem-se a relação

$$\sum_{i=1}^n K_{ei} \dot{U}_{ei} = \sum_{i=1}^n \dot{P}_{ei} \quad (2.2.13)$$

ou

$$\underline{K}_T \dot{\underline{U}}_T = (\underline{K}_{T1} + \underline{K}_{Tm}) \dot{\underline{U}}_T = \dot{\underline{P}}_T$$

O vetor de forças nodais do elemento é dado por

$$\dot{\underline{P}}_e = \int_{V_e} (\underline{B}^T \underline{M} \dot{\underline{\epsilon}}_0 + \underline{N}^T \underline{\dot{b}}) dV_e + \int_{A_\sigma} \underline{N}^T \dot{\underline{t}} ds \quad (2.2.14)$$

onde estão incluídas as forças derivadas da deformação inicial.

O somatório indicado em 2.2.13 é realizado adicionando a contribuição de cada elemento de uma maneira a organizar \underline{K}_T , $\dot{\underline{U}}_T$, e $\dot{\underline{P}}_T$ por partições nodais. Qualquer carga concentrada atuando diretamente sobre um nó do sistema é diretamente agregada em $\dot{\underline{P}}_T$ na correspondente posição.

Por conveniência, a matriz de rigidez do elemento e o vetor de cargas equivalentes são calculados com respeito a um sistema de eixos de referência local, que são diferentes de elemento para elemento. Quando se faz a montagem de \underline{K}_T e $\dot{\underline{P}}_T$ todos os coeficientes devem ser referidos a um sistema de eixos de referência global.

Antes de resolver o sistema 2.2.13 ele deve ser modificado pela introdução das condições de contorno. Com isso, a matriz de rigidez total que é originalmente singular, torna-se regular, quando condições de contorno consistentes são especificadas e então o sistema pode ser resolvido. Depois da solução o vetor contendo todas as componentes das velocidades para todos os pontos nodais é conhecido. Dele, pode-se retirar o vetor de velocidades nodais do elemento.

2.2.2 - Matriz de Rigidez Tangente para uma Barra de Treliça Plana

Considera-se uma barra de comprimento L , área A e módulo elástico E , originalmente na direção do eixo x . A equação que interpola os deslocamentos ao longo do eixo da barra pelos deslocamentos nodais é

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 & \xi & 0 \\ 0 & (1-\xi) & 0 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underline{N} \underline{U}_e \quad (2.2.15)$$

onde u e v são as velocidades nas direções x, y , ao longo do eixo respectivamente. u_1 e v_1 são as velocidades na direção x e y no nó 1 e u_2 e v_2 são as velocidades na direção x e y no nó 2 e

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (2.2.16)$$

A partir de 2.2.15 pode-se determinar as funções \underline{B} e \underline{N} correspondentes, substituindo em 2.2.12 e integrando sobre o comprimento da barra obtém-se

$$\underline{K}_{el} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.17)$$

$$\underline{K}_{el} = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.18)$$

onde σ foi substituído por N , força axial na barra (tração positiva).

Aplicando a relação 2.2.14 tem-se analogamente

$$\underline{X} = N \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + EA \epsilon_v \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.19)$$

em ausência de forças de volume e de superfície.

2.2.3 - Matriz de rigidez para uma barra de pórtico plano.

Particularizando as equações gerais anteriores para uma barra em flexão tem-se, da Resistência dos Materiais, (Venâncio⁵⁵) que os deslocamentos transversais, v do eixo da barra da figura 2.14, sem carregamento transversal são dados por

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad (2.2.20)$$

Ao integrar a equação anterior em relação a x obtém-se $v = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$. Considerando esta equação e a equação para dv/dx obtém-se para este exemplo, sob forma matricial a equação 2.2.3 particularizada abaixo

$$\begin{bmatrix} v \\ \frac{dv}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (2.2.21)$$

Considere a figura 2.14. Nela estão indicadas o sentido positivo dos esforços e deslocamentos de extremidade e também, os deslocamentos no interior do elemento.

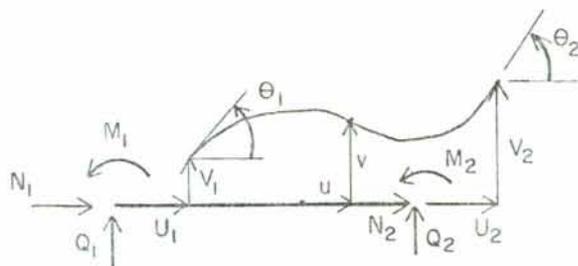


Figura 2.14 - Esforços e deslocamentos nodais de uma barra de pórtico plano.

Da figura anterior define-se os deslocamentos como

$$\underline{U} = \left[u_1 \quad u_2 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \right]^T = \begin{bmatrix} \underline{U}^n \\ \underline{W}^n \end{bmatrix} \quad (2.2.22)$$

onde

$$\underline{U}^n = \left[u_1 \quad u_2 \right]^T \quad \text{e} \quad \underline{W}^n = \left[v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \right]^T \quad (2.2.23)$$

Passando para o próximo passo na definição das constantes, considera-se as condições de contorno $v_{x=0} = v_1$; $(dv/dx)_{x=0} = \theta_1$; $v_{x=L} = v_2$; $(dv/dx)_{x=L} = \theta_2$, obtém-se, da equação 2.2.21 a 2.2.4, para este caso que é

$$\begin{bmatrix} v \\ \theta^1 \\ v^1 \\ \theta^2 \\ v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (2.2.24)$$

Por inversão obtém-se da 2.2.24 a 2.2.5 como

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \theta^1 \\ v^1 \\ \theta^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.25)$$

Introduzindo α da 2.2.25 na 2.2.21 e considerando, também, o deslocamento axial, chega-se a uma equação semelhante a 2.2.7 para a viga

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \frac{dv}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & \Phi \\ 0 & \Phi' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ W_n \end{bmatrix} \quad (2.2.26)$$

onde

$$\Psi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_3 & \phi_4 & \phi_5 & \phi_6 \end{bmatrix} \quad (2.2.27)$$

e

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1 - \frac{x}{L} & \phi_2 &= \frac{x}{L} \\ \phi_3 &= 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} & \phi_4 &= x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \phi_5 &= 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} & \phi_6 &= - \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

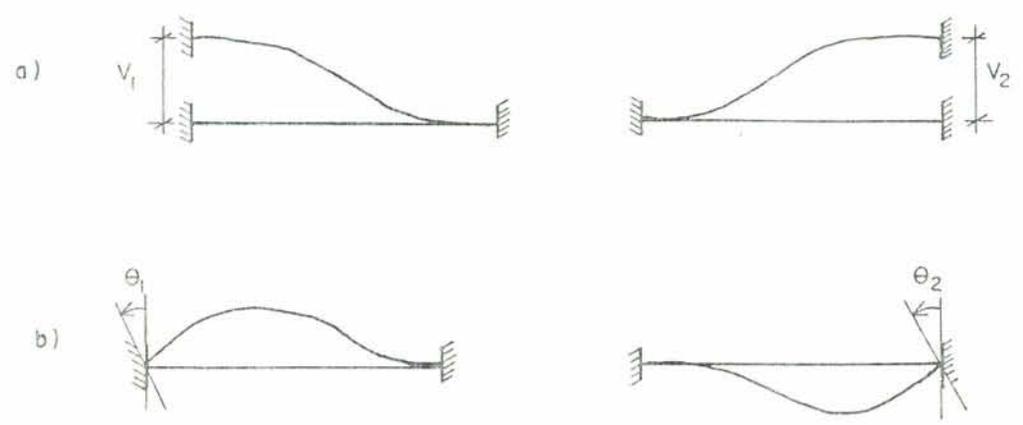


Figura 2.15 - Forma dos deslocamentos

Cada elemento da segunda linha de \underline{N} da 2.2.26 representa a forma da deflexão assumida pela barra quando ocorre o correspondente deslocamento nodal unitário, todos os outros mantidos nulos. Estas formas, que estão indicadas na figura 2.15.a, são os modos de deformação para o deslocamento transversal. Os elementos da terceira linha de \underline{N} representam as inclinações correspondentes aos respectivos modos de deflexão da fig. 2.15.b.

O matriz coluna $\underline{\varepsilon}$ das deformações generalizadas no elemento estrutural é definida por

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} \quad (2.2.29)$$

No exemplo em estudo, esta derivação é definida pelas seguintes expressões

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2.31)$$

$$\chi = - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.2.32)$$

onde ε é a deformação axial, associado ao esforço axial e χ é a curvatura do eixo da barra, a qual se associa o momento fletor e é obtido pelo deslocamento transversal v .

Efetuada a derivação apropriada a cada caso obtém-se a matriz \underline{B} a partir de \underline{N} da equação 2.2.26 ficando com

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{U}_e \quad (2.2.32)$$

onde

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{\Psi}' & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\Phi}'' \end{bmatrix} \quad (2.2.33)$$

nesta equação

$$\underline{\Psi}' = \begin{bmatrix} \phi'_1 & \phi'_2 \end{bmatrix} \quad \phi'_1 = \frac{-1}{L} \quad \phi'_2 = \frac{1}{L}$$

$$\underline{\Phi}'' = \begin{bmatrix} \phi''_3 & \phi''_4 & \phi''_5 & \phi''_6 \end{bmatrix}$$

$$\phi''_3 = \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \phi''_4 = \frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$\phi_5'' = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \qquad \phi_6'' = \frac{-2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

Desta maneira ao substituir estes valores na 2.2.33 e integrando pela 2.2.12 obtém-se a matriz de rigidez da barra para pórtico plano que relaciona os esforços de extremidade aos deslocamentos em coordenadas locais.

$$K_b = \begin{bmatrix} \frac{I}{L} & & & & & \\ & \frac{I}{L^2} & & & & \\ & & \frac{I}{L^2} & & & \\ & & & \frac{I}{L} & & \\ & & & & \frac{I}{L} & \\ & & & & & \frac{I}{L} \end{bmatrix} \quad (2.2.34)$$

para a b:
para a
analisar

2.1, a ex

*2 eixos de cada eixo
trans
e para
eixo de eixo*

rigidez geométrica
que foi determinada
Assim, poderia-se
equações da seção

(2.2.35)

onde

$$z = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (2.2.36)$$

são os esforços que produzem deformações apreciáveis, isto é, os esforços que são levadas em conta na expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais para pequenas deformações. Nesta expressão N é o esforço normal ou axial na seção e M é o momento fletor. O esforço cortante, Q, é desprezado pois não produz deformações significativas.

Tem-se ainda

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad (2.2.37)$$

onde \mathbb{M} é a matriz constitutiva elástica, E o módulo de elasticidade do material que compõe a barra, A é a seção transversal da barra constante e I é o momento de inércia também constante.

O valor de ξ está dado na eq. 2.2.29 e, por último,

$$\xi_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi_0 \end{bmatrix} \quad (2.2.38)$$

são as deformações generalizadas "iniciais" provenientes das fontes de auto-deformação, por exemplo, as causadas por gradientes lineares de temperatura na espessura e efeitos de retração. Como o material se assume elástico linear e as variações de tensões são lineares na espessura, a deformação lenta será também linear na espessura, ficando inserida dentro do contexto das deformações iniciais, ξ_0 .

Estas expressões serão extendidas para o caso de estruturas mistas no capítulo 6.

3 - PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA A ANÁLISE DE TRELIÇAS PLANAS VISCOELÁSTICAS COM DEFORMAÇÕES FINITAS.

Neste capítulo será explicado qual o procedimento adotado para desenvolver o programa sobre treliças. Na seção 3.1 informa-se de onde foi extraído o programa que serviu de base para o trabalho proposto e o equipamento utilizado. Na seção 3.2 as equações empregadas são retiradas dos capítulos anteriores e resumidas. Na seção 3.3 tem-se os diagramas de blocos e explica-se como o programa executa os cálculos. Na seção 3.4 diz-se como foi organizada a entrada de dados um exemplo simples fazendo a análise com grandes deformações e posteriormente a análise viscoelástica.

3.1 - Programa base.

O programa base utilizado para implementar o trabalho sobre treliça está baseado num programa para estruturas elásticas de treliças planas que está na referência Brebbia e Ferrante¹⁰ e foi traduzido para a linguagem Basic e implementado num microcomputador compatível com a linha IBM-PC.

Utilizando os mesmos princípios de organização da referência acima, o programa foi subdividido em sub rotinas que realizam tarefas específicas e podem ser reutilizadas. Essas subrotinas são comandadas por um programa principal que coordena e adapta o fluxo de cálculo de acordo com a análise desejada.

3.2 - Algoritmo de análise não linear geométrica e formulação empregada.

Sob determinadas condições, o problema do equilíbrio do meio contínuo conduzem a relações do tipo

$$\underline{K}(s) \underline{U} = \underline{X} \quad (3.1)$$

onde $\underline{K}(s)$ é a matriz de rigidez, \underline{U} são os deslocamentos e \underline{X} são as cargas.

Pode-se caracterizar o método incremental ou método de Euler mediante o algoritmo

$$\underline{U}_i = \left[\underline{K}(s) \right]_i^{-1} \Delta \underline{X}_i \quad (3.2)$$

e atualiza-se

$$\underline{s}_{i+1} = \underline{s}_i + \underline{U}_i \quad (3.3)$$

onde o índice i indica a ordem do incremento e \underline{s} são as coordenadas que definem a posição da estrutura e que se usam para calcular a matriz de rigidez $\underline{K}(s)$.

Então, pode-se definir um incremento de carga $\Delta \underline{X}_i$ e aplicar sobre a estrutura com uma certa rigidez $\underline{K}(s)$ resultando um deslocamento \underline{U}_i . Com esse deslocamento pode-se atualizar coordenadas e calcular novamente a matriz de rigidez e assim por diante.

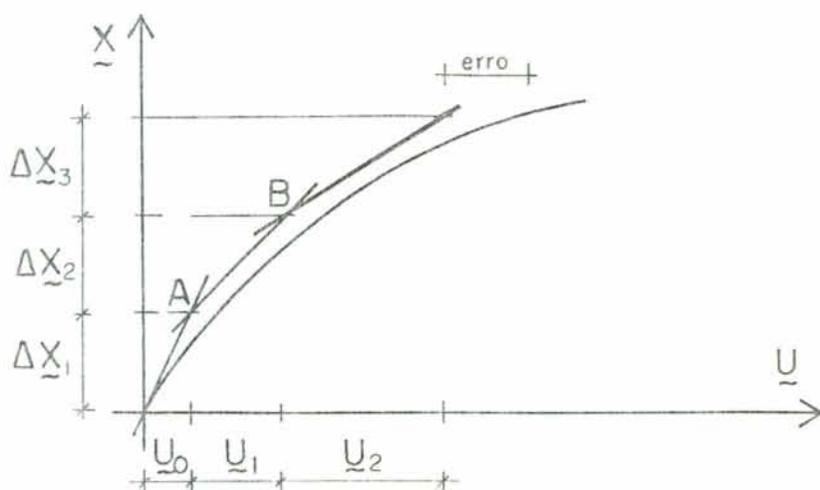


Figura 3.1 - Método incremental.

O método incremental pode ser representado pela fig. 3.1. onde com a aplicação da carga $\Delta \underline{X}_1$ se obtém o deslocamento \underline{U}_0 (ponto A), aplicando mais um incremento de carga, $\Delta \underline{X}_2$, tem-se um novo deslocamento \underline{U}_1 , e assim por diante.

Como se vê, a precisão do método depende do incremento utilizado. O erro é difícil de avaliar e necessita-se definir uma matriz de rigidez em cada etapa de carga, o que consome volume

computacional.

A seguir tem-se outras relações necessárias. A relação viscoelástica utilizada será a equação 2.1.10 repetida abaixo

$$q_i(t+\Delta t) = e^{-\Delta t/T_i} q_i(t) + \frac{\sigma(t)}{E_i(t)} (1 - e^{-\Delta t/T_i}) \quad (2.1.10) \text{ repetida}$$

particularizando para o presente caso e tomando para cada barra individualmente fica

$$\varepsilon_v(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^n \left\{ \varepsilon_{vi}(t) e^{-\Delta t/T_i} + \frac{N (1 - e^{-\Delta t/T_i})}{A E_i} \right\} \quad (3.4)$$

onde $\varepsilon_v(t+\Delta t)$ é a deformação viscoelástica correspondente a totalidade dos n mecanismos, $\varepsilon_{vi}(t)$ é a deformação viscoelástica do i ésimo elemento de Kelvin do tempo anterior, t é o tempo, Δt é incremento de tempo, "e" é a base do logaritmo natural, T_i e E_i são o tempo de retardação e a constante elástica da mola para o i ésimo elemento de Kelvin, N é o esforço axial na barra (tração positiva), calculado no tempo t , e A é a área da seção transversal. Feito isso, a carga nodal viscoelástica equivalente é calculada pela seguinte expressão

$$\underline{X}_v(t+\Delta t) = \underline{X}_v(t) + \frac{EA}{L} \varepsilon_v(t+\Delta t) \begin{bmatrix} -\cos \beta \\ -\sin \beta \\ \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

e adicionada por partições nodais, respectivamente, no primeiro nó (direção x e y , coordenadas globais) e no segundo nó (direção x e y) de cada barra. Nesta expressão; E é o módulo de elasticidade, β é o ângulo que a barra faz com o eixo x global e L é o comprimento.

Prosseguindo com as relações necessárias para a execução do programa rota-se as equações 2.2.17 e 2.2.18 que representam a matriz de rigidez elástica e geométrica da barra, para o sistema de referência global com o método descrito na seção 5.6, obtendo-se

$$K_{el} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ & s^2 & -cs & -s^2 \\ \text{simétrica} & & c^2 & cs \\ & & & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$K_{em} = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 1-c^2 & -cs & c^2-1 & cs \\ & 1-s^2 & cs & s^2-1 \\ \text{simétrica} & & 1-c^2 & -cs \\ & & & 1-s^2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde "c" é o coseno(β) e "s" é o seno (β) e os outros termos foram apresentados antes. Essas matrizes serão calculadas para cada elemento e adicionadas ao sistema global de equações.

Finalmente, os esforços nas barras são calculados modificando a eq. 2.2.19 repetida a seguir

$$\underline{X} = N \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + E \cdot A \cdot \varepsilon_v \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.2.19) \text{ repetida}$$

Nesta última expressão os esforços estão em coordenadas locais, aplicando o método de rotação da seção 5.6 obtém-se uma expressão semelhante a esta, mas que fornece os esforços em coordenadas globais, que é

$$\underline{X}_g = K_{eg} \underline{U}_{eg} - E \cdot A \cdot \varepsilon_v \begin{bmatrix} -\cos \beta \\ -\sin \beta \\ \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde K_{eg} é a matriz de rigidez da barra em coordenadas globais, \underline{U}_{eg} são os deslocamentos nodais também em coordenadas globais.

Para calcular o esforço axial na barra em coordenadas locais usa-se a projeção das forças da extremidade do barra sobre o seu eixo pela equação abaixo

$$N = X_{2x} \cos \beta + X_{2y} \sin \beta \quad (3.9)$$

onde X_{2x} e X_{2y} são os esforços horizontal e vertical do nó final da barra.

Feito isso, pode-se calcular as reações nodais ao adicionar \underline{X}_g convenientemente por partições nodais nos nós que

correspondem a barra em estudo.

3.3 - Diagrama de blocos.

Na fig. 3.2 está o diagrama de blocos para a análise mais geral que o programa realiza. Ao iniciar o programa os dados são fornecidos interativamente, sendo agrupados em conjuntos que são gravados num arquivo randomico em disco e podem ser corrigidos para acertar ou modificar um exemplo.

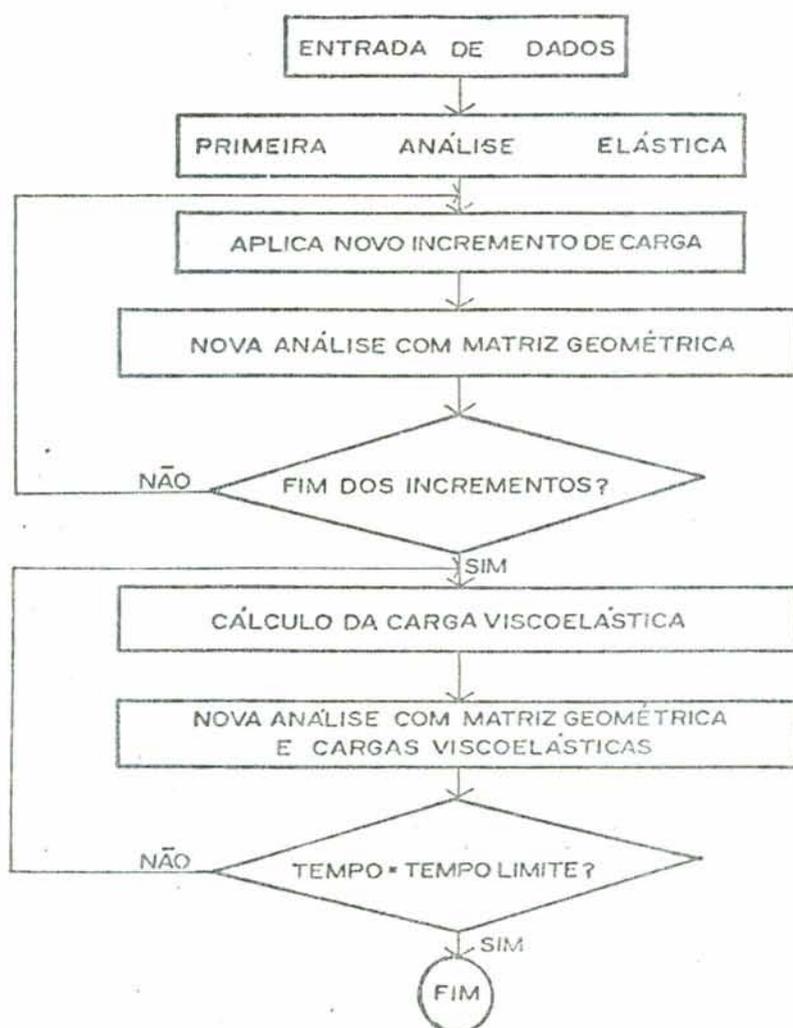


Figura 3.2 - Diagrama de blocos geral

O dimensionamento dos arranjos utilizados é feito logo após a entrada de dados gerais da estrutura, presentes no primeiro e segundo conjunto de dados, composto, por exemplo, do número de nós, número de barras, etc. (ver seção 3.4.1 para mais detalhes sobre os conjunto de dados de entrada). Desta forma, o dimensionamento dos arranjos será de acordo com o tamanho da

estrutura.

A seguir, tem-se a descrição de como é feita a primeira análise elástica. Ela é feita através de um conjunto de etapas que estão representadas na fig. 3.3, onde tem-se o diagrama de blocos específico para a análise elástica. Estas etapas serão reutilizadas cada vez que estiver incrementando a carga ou o tempo.

Depois da entrada de dados, o programa começa a executar os cálculos automaticamente. É feito o cálculo da matriz de rigidez elástica e geométrica de cada elemento pelas equações 3.6 e 3.7 em coordenadas globais e que são armazenadas para posterior uso no cálculo dos esforços nas barras.

A seguir, é feita a montagem da matriz de rigidez global da estrutura e do vetor de carga pela maneira convencional (Bregbia e Ferrante¹⁰).

Feito isso, o vetor de cargas externo e deslocamentos prescritos devem ser divididos pelo número de incrementos de carga, obtendo assim, o incremento de carga externo, ΔX_i que está na equação 3.2. Os incrementos de cargas e deslocamentos prescritos devem ser preservados para serem utilizados no próximo passo.

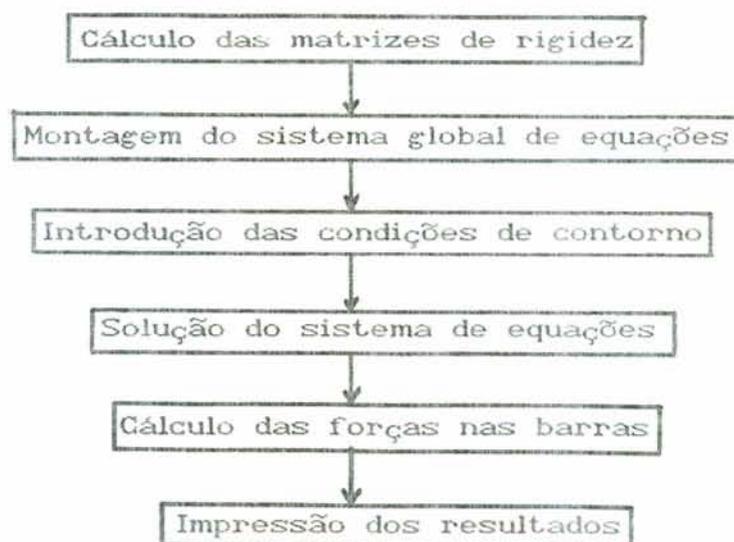


Fig. 3.3 - Diagrama de blocos específico.

Assim, a equação 3.1 está montada e agora deve-se retirar a singularidade de $K(s)$ pela introdução das condições de

contorno. A seguir, pode-se resolver o sistema de equações utilizando o método de Gauss, ou similar, obtendo como solução um conjunto de deslocamentos U_i .

Neste estágio é possível calcular os esforços nas barras pelas equações 3.8 e 3.9 e, por consequência, as reações nodais.

Desta maneira, terminou a primeira análise elástica com a obtenção dos deslocamentos, esforços e reações devidos ao incremento de carga aplicado.

Aplicando agora, a 3.3 atualiza-se as coordenadas. Pode-se começar a acumular os deslocamentos e reações para posterior impressão. Os esforços axiais nas barras também devem ser acumulados e preservados, pois serão utilizados para calcular a matriz geométrica pela 3.7. Se desejar guardar algum resultado em um arquivo separado pode-se fazê-lo agora (ver seção 3.4.1.6 para informação sobre os arquivos de gráficos).

Novamente, passa-se a montagem da matriz de rigidez, etc. até o cálculo dos esforços e reações finais nas barras. A seguir, começa outro passo, corrigindo as coordenadas, e assim por diante, até o final dos incrementos de carga e/ou deslocamentos prescritos.

Se não for feita a análise viscoelástica, o último conjunto de dados pode ser preservado no arquivo para gráfico.

Terminada a análise não linear geométrica passa-se para a análise viscoelástica. Como o programa pode ou não fazer a análise não linear geométrica ou viscoelástica, os vetores de cargas e matrizes devem levar isto em consideração.

Se o número de incrementos de carga for maior do que um multiplica-se novamente o incremento de carga e deslocamento pelo número de incrementos para voltar a ter os valores originais.

A seguir, inicia a análise viscoelástica, começando a incrementar o tempo em uma quantia Δt . Se estiver fazendo análise não linear, corrige as coordenadas e acumula os deslocamentos, forças axiais e reações nodais.

Feito isso, calcula-se a deformação viscoelástica pela 3.4, e por conseguinte, a carga viscoelástica, em cada barra (eq.

3.5). Terminado este passo, pode-se adicionar estas cargas no vetor de cargas total viscoelástica.

Se estiver fazendo análise não linear, usa-se somente o vetor anterior para carregar a estrutura, caso contrário, adiciona-se ele no vetor de cargas original da estrutura.

Desta maneira, tem-se o termo \dot{X} da expressão 3.1 e pode-se passar para os passos seguintes, montando a matriz de rigidez total, etc., até a resolução da equação 3.1. Então, está pronto este passo da análise viscoelástica e pode-se incrementar tempo novamente até o tempo final.

3.4 - Uso do programa.

Nesta seção, será mostrada como realizar a entrada de dados do programa de análise viscoelástica de treliças planas com grandes deformações, chamado TRELIÇA.BAS e um exemplo numerico ilustrativo com os valores obtidos em cada passo.

3.4.1 - Entrada de dados.

A seguir, descreve-se os dados necessários para usar o programa TRELIÇA.BAS. Os dados são pedidos pelo programa e devem ser fornecidos na seguinte ordem:

3.4.1.1 - Saida no video, impressora ou arquivo? (V/I/A)

Se teclar "V" o programa irá para o próximo passo e se for "I" ou "A" ele imprimirá na impressora ou num arquivo no disquete, respectivamente, os dados de entrada que já devem estar gravados no disquete. Para esta impressão, ele perguntará também o nome do projeto e subtítulo para ficar impresso no cabeçalho da listagem ou do arquivo. Por outro lado, se for a opção for "A" ele pedirá o nome do arquivo de entrada de dados que deverá ter menos de oito caracteres.

3.4.1.2 - Nome do arquivo ?

Este nome de arquivo difere do anterior, pois este é sempre usado independente do tipo de saída. Digite o nome do arquivo, onde serão armazenados no disquete, o conjunto de dados

da estrutura como, por exemplo, coordenadas, conetividades, etc. O nome do arquivo deverá ter menos de quatro letras. Cada conjunto de dados terá o nome do arquivo mais uma extensão, que tem um nome para cada conjunto de dados, por exemplo C00 para o conjunto de coordenadas nodais do sistema, etc. No entanto, o usuário não deve se preocupar pois o programa fará isto automaticamente.

3.4.1.3 - Os dados ja foram gravados ? (S/N)

Se responder "S" o programa começará a ler os dados do disquete e se responder "N" ele pedirá os dados da estrutura.

A continuação começa os conjunto de dados.

3.4.1.4 - Tipo de análise.

- Quer fazer análise não linear ? (S/N)

Se responder "S" a análise será feita considerando a matriz geométrica das barras e correções de coordenadas em cada passo, se responder "N" será feito somente análise linear.

- Quer fazer análise viscoelástica ? (S/N)

Se o usuário teclar "S" a análise viscoelástica será feita e se responder "N" o programa para após a análise elástica.

Obs. Após cada entrada dos conjunto de dados aparece a mensagem "Dados corretos? (S/N)". Se responder "S" ou RETURN o programa seguirá em frente e se a resposta for "N" a entrada deste conjunto de dados será feita novamente.

3.4.1.5 - Dados internos.

- Número de nós.
- Número de barras.
- Número de nós de contorno. (apoios)
- Número de nós carregados.

- Se for feita análise não linear, o programa pedirá o número de incrementos de carga, que dividirá a carga total fornecida adiante, e aplicará o resultado sobre a estrutura em cada passo. Se for análise linear, o número de incrementos será

um.

- Se for feita análise viscoelástica, o programa pedirá o número de elementos da cadeia de Kelvin, que será constante para todas as barras viscoelásticas da estrutura e deve estar entre um e três inclusive.

3.4.1.6 - Variáveis auxiliares.

Se for análise viscoelástica precisa-se:

- Tempo máximo de análise.
- Incremento de tempo.

Após tem-se:

- Deseja resultados para gráfico ? (S/N).

Se responder "N" ele irá para o próximo conjunto de dados e se for "S" virá o seguinte:

- Nome do arquivo para gráfico.
- Número do deslocamento.
- Número da reação.
- Número da barra da qual deseja a força axial.

Obs. Estes últimos dados são fornecidos se o usuário tem intenção de formar um arquivo para desenhar um gráfico em um programa aplicativo. A seguir explica-se melhor este conjunto de dados. O nome do arquivo para gráfico (máximo quatro caracteres) será adicionado ao nome do arquivo dado anteriormente (item 3.4.1.2) e formará um arquivo com extensão ".PRN" para ser utilizado num aplicativo para gerar gráfico com os dados de deslocamento, reação e força na barra.

O número do deslocamento e da reação são obtidos a partir da numeração dos nós da estrutura considerando que cada nó tem dois graus de liberdade. Sendo que o primeiro é horizontal e o segundo vertical. Assim, por exemplo, se quiser o deslocamento horizontal do nó 5, tome $(2 \times 5) - 1 = 9$ que será o número do deslocamento desejado. Se quiser a reação vertical do nó 5 faça $2 \times 5 = 10$. O deslocamento, reação e barra na qual se quer a força axial correspondem aos resultados acumulados provenientes dos passos anteriores e são os resultados totais até aquele passo.

3.4.1.7 - Coordenadas nodais.

Fornecer a coordenada em relação a um sistema de eixos coordenados global para toda a estrutura.

3.4.1.8 - Conetividades.

Informe o nó inicial e final de cada barra. Lembre-se que o eixo de referência local de cada barra terá o sentido indicado pelas conetividades e os esforços em coordenadas locais terão esta referência.

3.4.1.9 - Geometria.

Corresponde as áreas dos elementos.

3.4.1.10 - Propriedades mecánicas das barras.

Se o programa foi instruído no primeiro conjunto de dados a não fazer análise viscoelástica, ele perguntará somente o módulo de elasticidade de cada barra.

Caso contrário ele pedirá:

- Esta barra será viscoelástica ? (S/N)

Se negativo passa-se para a próxima barra e se positivo deve-se fornecer a constante da mola e do amortecedor de todos os elementos da cadeia de Kelvin especificado nos dados internos (item 3.4.1.5).

3.4.1.11 - Carregamento nodal.

Fornecer:

- Número do nó.
- Força horizontal.
- Força vertical.

Obs. O sinal das forças referem-se ao sistema de eixos coordenados ortogonais gerais da estrutura.

3.4.1.12 - Condições de contorno e deslocamento prescrito.

Convenção adotada: 0 = prescrito e 1 = livre.

- Número do nó.
- Direção x ==> 0 ou 1
- Direção y ==> 0 ou 1
- Deslocamento imposto ? (S/N)

Se for "N" ou RETURN ele perguntará pela próxima barra e se for "S" vem:

- Deslocamento x ==>
- Deslocamento y ==>

Da mesma maneira que as forças, os sinais dos deslocamentos prescritos referem-se ao sistema de eixos coordenados ortogonais gerais da estrutura.

3.4.1.13 - Impressão dos resultados.

Opções para impressão:

- 1 - Impressão das matrizes e esforços.
 - 2 - Impressão dos esforços.
 - 3 - Impressão de dados finais.
 - 4 - Impressão resumida.
- Faça a escolha ==>

Comentários sobre os tipos de impressão. Se for "1" serão impressos todos os dados gerais da estrutura a medida que forem calculados, como por exemplo, os vetores que contém o conjunto de dados fornecidos na entrada de dados, as matrizes de rigidez elástica e geométrica de cada barra, a matriz de rigidez total e o vetor de cargas também total, antes e depois da introdução das condições de contorno. Os deslocamentos nodais obtidos após a resolução do sistema de equações, as forças nas barras em coordenadas globais, sem o desconto da carga viscoelástica, idem, com a carga viscoelástica, as forças nas barras em coordenadas locais, isto é, a força axial final e, terminando a solução, tem-se as reações nodais. Ainda, se for o caso de análise viscoelástica, obtém-se os vetores com as deformações viscoelásticas e cargas nodais também viscoelásticas e por último, se for análise não linear, imprimirá as coordenadas nodais corrigidas.

Se for a segunda opção de impressão tem-se os

deslocamentos nodais, todas as forças, as reações nodais e os demais itens que vem após as reações nodais na opção "1".

Se for "3" obtém-se os deslocamentos nodais, as forças axiais e as reações nodais. Se for análise não linear tem-se também as coordenadas nodais corrigidas.

Finalmente se for a opção "4" tem-se somente o armazenamento das informações no disquete com o nome do arquivo e demais itens definidos no item 3.4.1.6 de dados com a sua impressão ao pé da tela.

O programa também imprime na tela um desenho das barras da estrutura no começo da análise. Se for a opção "4" ele desenha em cima da primeira figura a opção deformada de cada passo.

3.4.2 - Exemplo de entrada de dados e resolução.

A seguir está um exemplo simples que foi rodado com o presente programa. Os dados de entrada são fornecidos pelo usuário e foram explicados na seção 3.4.1.

A análise inicia com a divisão da carga total e dos deslocamentos prescritos pelo número de incrementos de carga, resultando num certo incremento de forças externas. A seguir, este incremento de forças externas é aplicado, e obtém-se os resultados do passo um. Os deslocamentos, esforços e reações correspondem ao incremento de forças externas aplicado. Com os deslocamentos obtidos corrige-se as coordenadas, calcula-se novamente a matriz de rigidez total e aplica-se outra vez o incremento da força externa até o último incremento de carga (dois no caso).

A seguir, começa-se a incrementar o tempo, com os deslocamentos obtidos no passo anterior, corrige-se as coordenadas, calcula-se a deformação viscoelástica e, conseqüentemente, a carga viscoelástica, e aplica-se está sobre a estrutura. Feita a análise obtém-se novos deslocamentos, esforços e reações que correspondem somente a carga viscoelástica deste passo (tempo um). No tempo seguinte, faz-se a mesma coisa (tempo dois).

Se fosse desejado calcular os resultados totais deve-se somar os deslocamentos, esforços e reações de todos os passos anteriores.

Para o desenvolvimento da dissertação e análise dos exemplos rodados não foi necessária imprimir em cada passo os resultados totais, pois foram utilizados só resultados de determinados pontos da estrutura. Na entrada de dados, quando são fornecidas as variáveis auxiliares (seção 3.4.1.6) pode-se obter os valores acumulados, pois há vetores que acumulam os dados totais. Se for necessário, podem ser impressos facilmente.

Segue adiante o exemplo processado, o qual está representado também na figura 3.4.

As unidades são as adotadas na seção de conversão de unidades. Salvo indicação em contrário.

* Exemplo: Treliza de duas barras *
* tipo triângulo com carga vertical*

* Programa: TRELICA.BAS *

* Data = 30-11-1987 *

* Hora = 20:38:36 *

Tipo de análise. Arquivo aTIA.TRE

Nome do arquivo : a

Análise não linear? S/N : S

Análise viscoelástica? S/N: S

Obs. "a" é o nome do arquivo e TIA.POR é a extensão deste conjunto de dados.

Dados internos. Arquivo aINT.TRE

Número de nós = 3

Número de barras = 2

Número de nós de contorno = 2

Número de nós carregados = 1

N. incrementos de carga = 2

N. elem. da cadeia Kelvin = 1

Variáveis auxiliares. Arquivo aTEM.TRE

Tempo máximo = 2

Incremento de tempo = 1

Resultado p/ gráfico? S/N = S

Nome do arquivo p/ gráfico= A

Número do deslocamento = 1

Número da reação = 2

Número da barra (força) = 2

Coordenadas nodais. Arquivo aCOO.TRE

No	Coord. (X)	Coord. (Y)
1	100	100
2	0	0
3	100	0

Conetividades. Arquivo aCON.TRE

Barra	No inicial	No final
1	2	1
2	3	1

Geometria das barras. Arquivo aGEO.TRE

Barra	Area
1	10
2	10

Propriedades mecanicas. Arquivo aMEC.TRE

Barra	Mod. Elast.	Mola Kelvin	Amortecedor
1	1000	1000	10000
2	1000	1000	10000

Carregamento nodal. Arquivo aCAN.TRE

No	For. (X)	For. (Y)
1	0	-400

Condições de contorno. Arquivo aPRE.TRE

Condições dos valores prescritos 0 - Impedido, 1 - Livre

No	Dir. (X)	Dir. (Y)	Desl. (X)	Desl. (Y)
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

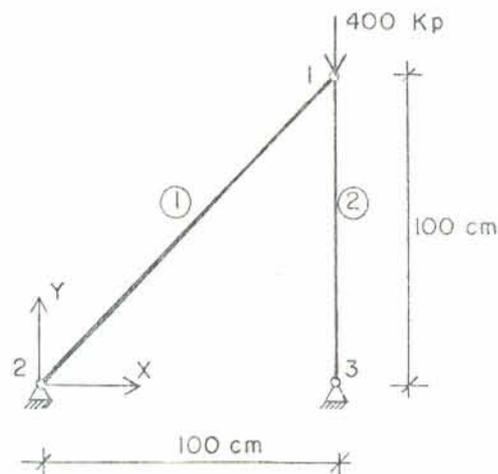


Fig. 3.4 - Treliça sujeita a compressão.

Aqui termina a entrada de dados, agora passe-se para a resolução da estrutura aplicando as equações descritas anteriormente.

```
*****
* Exemplo : Treliza de duas barras *
* tipo triângulo com carga vertical*
* Programa: TRELIÇA.BAS           *
* DATA = 30-11-1987             *
* Hora = 20:39:36                *
*****
```

***** Analise elástica, passo= 1 *****

Determinante da matriz global = 3535.535

Deslocamentos nodais.

No	Desloc. (X)	Desloc. (Y)
1	2	-2
2	0	0
3	0	0

Esforço na barra em coord. globais (eq. 3.8 com $\varepsilon_v = 0$).

Barra	No	Forca Horizontal	Forca vertical
1	2	0	0
	1	0	0
2	3	0	200
	1	0	-200

Esforços finais nas barras (eq. 3.9).

Barra	Esforço normal
1	0
2	-200

Reações nodais

No	Forca Horizontal	Forca Vertical
1	0	-200
2	0	0
3	0	200

***** Nova análise, passo = 2 *****

Coordenadas nodais corrigidas (eq. 3.3).

No	Coord. X	Coord. Y
1	102	98
2	0	0
3	100	0

Deslocamentos nodais,

Determinante= 2947.272

No	Desloc. (X)	Desloc. (Y)
1	2.253601	-2.092404
2	0	0
3	0	0

Esforço na barra em coord. globais (eq. 3.8 com $\varepsilon_v = 0$).

Barra	No	Forca Horizontal	Forca vertical
1	2	-8.942329	-8.591652
	1	8.942329	8.591652
2	3	8.942329	208.5916
	1	-8.942329	-208.5916

Esforços finais nas barras (eq. 3.9).

Barra	Esforço normal
1	12.40088
2	-208.7307

Reações nodais

No	Forca Horizontal	Forca Vertical
1	0	-200
2	-8.942329	-8.591652
3	8.942329	208.5916

Aqui, termina a análise incremental e começa a análise viscoelástica.

***** Analise viscoelástica, tempo = 1 *****

Coordenadas nodais corrigidas (eq. 3.3)

No	Coord. X	Coord. Y
1	104.2536	95.90759
2	0	0
3	100	0

Deformação viscoelástica (eq. 3.4)

Barra	Deformação
1	1.180099E-04
2	-3.889586E-03

Calcula-se a carga nodal viscoelástica para cada barra pela 3.5 e adicionado-se convenientemente, por partições nodais, obtendo-se as

Cargas nodais viscoelásticas para a estrutura total.

No	Forca Horizontal	Forca Vertical
1	-8548822	-38.0587
2	-8684955	-7989681
3	1.723378	38.85767

Coloca-se estas cargas no vetor de cargas globais da estrutura e resolve-se novamente o sistema obtendo-se:

Deslocamentos nodais, Tempo 1

Determinante= 2405.816

No	Desloc. (X)	Desloc. (Y)
1	.4565622	-.4128051
2	0	0
3	0	0

Esforço na barra em coord. globais sem a carga visc.

Barra	No	Forca Horizontal	Forca vertical
1	2	-2.972897	-2.661999
	1	2.972897	2.661999
2	3	3.82778	40.7207
	1	-3.82778	-40.7207

Esforço na barra em coord. globais com visc.(3.8)

Barra	No	Forca Horizontal	Forca vertical
1	2	-2.104401	-1.863031
	1	2.104401	1.863031
2	3	2.104402	1.863029
	1	-2.104402	-1.863029

Esforços finais nas barras (eq. 3.9).

Barra	Esforço normal
1	2.810072
2	-1.954441

Reações nodais

No	Forca Horizontal	Forca Vertical
1	-9.536743E-07	1.192093E-06
2	-2.104401	-1.863031
3	2.104402	1.863029

***** Nova análise, tempo= 2 *****

Coordenadas nodais corrigidas

No	Coord. X	Coord. Y
1	104.7102	95.49479
2	0	0
3	100	0

Deformação viscoelástica

Barra	Deformação
1	1.335212E-04
2	-3.538042E-03

Cargas nodais viscoelásticas

No	Forca Horizontal	Forca Vertical
1	-.7564271	-34.43774
2	-.9865512	-.8997264
3	1.742978	35.33746

Deslocamentos nodais, Tempo 2

Determinante= 2350.623

No	Desloc. (X)	Desloc. (Y)
1	.419019	-.3766267
2	0	0
3	0	0

Esforço na barra em coord. globais sem a carga visc.

Barra	No	Forca Horizontal	Forca vertical
1	2	-2.950519	-2.609405
	1	2.950519	2.609405
2	3	3.706946	37.04714
	1	-3.706946	-37.04714

Esforço na barra em coord. globais com a carga visc.

Barra	No	Forca Horizontal	Forca vertical
1	2	-1.963967	-1.709678
	1	1.963967	1.709678

2	3	1.963968	1.709679
	1	-1.963968	-1.709679

Esforços finais nas barras

Barrã	Esforço normal
1	2.60318
2	-1.804356

Reações nodais

No	Forca Horizontal	Forca Vertical
1	-4.768372E-07	-4.768372E-07
2	-1.963967	-1.709678
3	1.963968	1.709679

4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS DE TRELIÇA.

A seguir estão os exemplos selecionados. São seis estruturas com comportamento variado e que mostram aplicações do presente programa computacional.

4.1 - Exemplo sobre redistribuição de tensões em uma treliça hiperestática.

A figura 4.1 representa um reticulado plano hiperestático composto por três barras. As barras 1 e 3 são elásticas e a 2 é viscoelástica, com propriedades correspondentes ao modelo standard indicado na mesma figura.

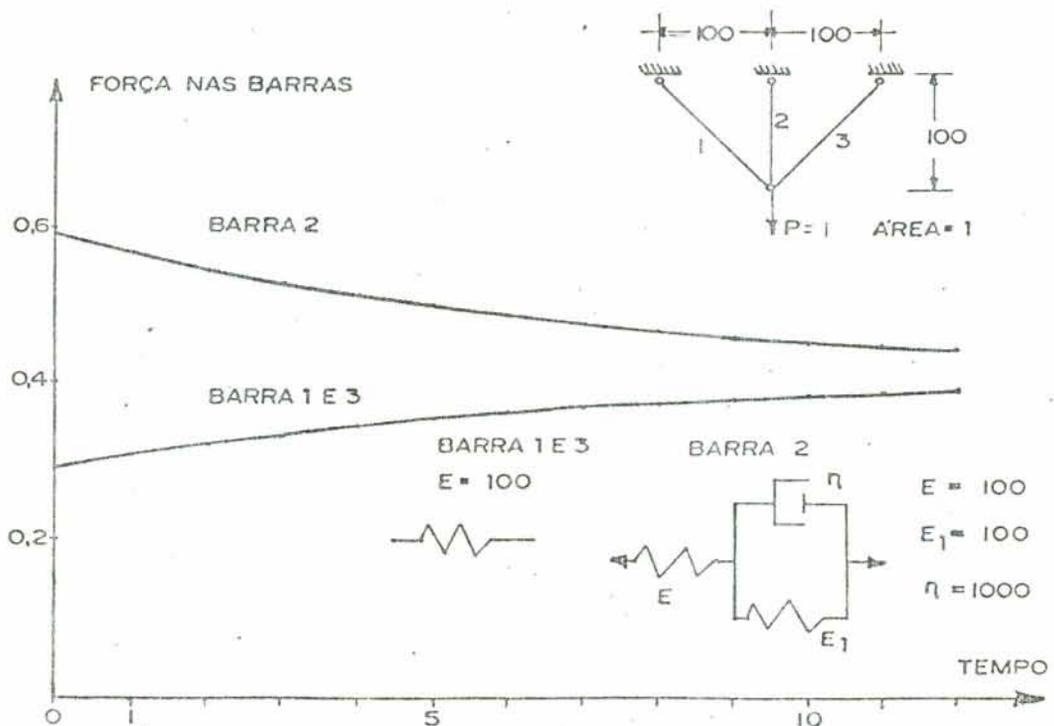


Figura 4.1 - Redistribuições de tensões

Carrega-se a estrutura com uma carga vertical P unitária aplicada no instante $t = 0$ e mantida constante para $t > 0$. Fazendo uma análise viscoelástica linear (isto é, sem considerar deformações finitas) observa-se um incremento das forças nas

barras 1 e 3 e uma diminuição da força na barra 2, como indicado na figura. Este tipo de comportamento é característico de estruturas hiperestáticas com propriedades viscoelásticas não homogêneas.

4.2 - Modelo com barras rígida e mola.

Considera-se o sistema estrutural indicado na fig. 4.2, composto por uma barra rígida de comprimento L , suportada por uma mola linear de rigidez K com inclinação inicial a 45° .

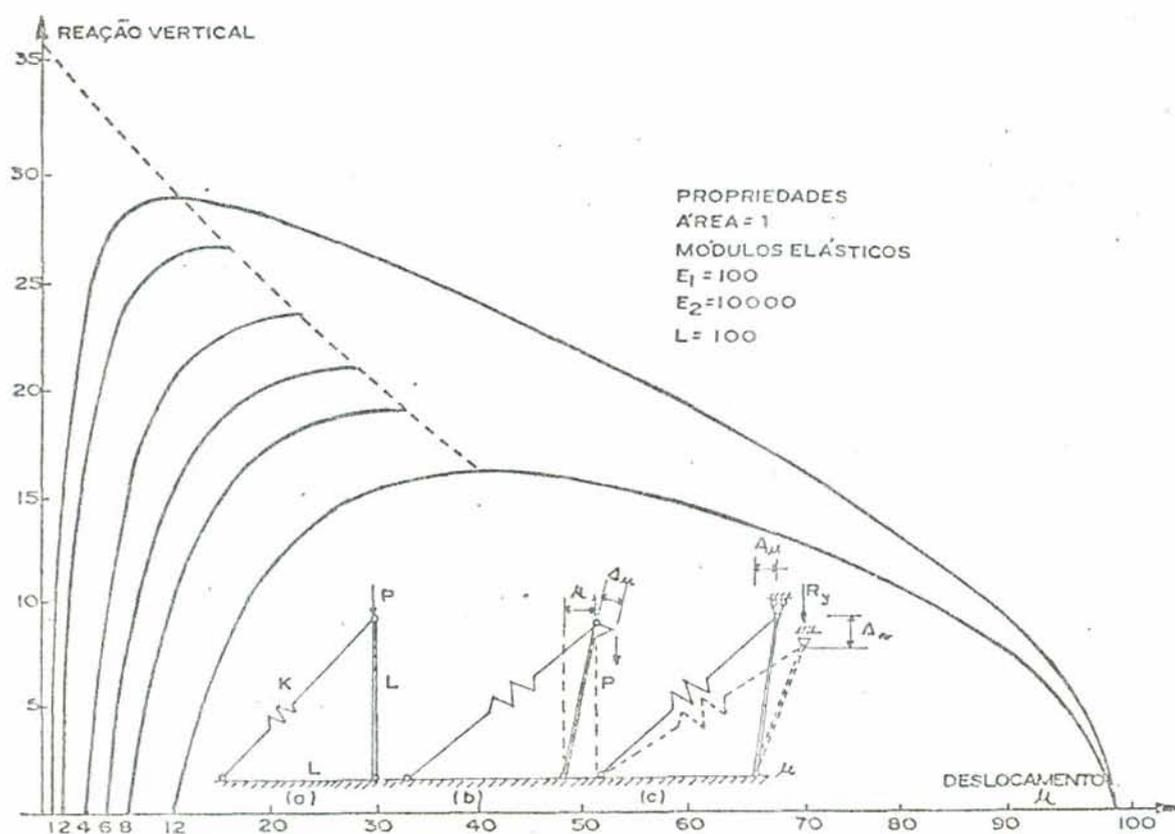


Fig. 4.2 - Modelo com barra rígida e mola.

Carregando a estrutura com uma carga vertical P , e assumindo que a carga pode atuar com uma excentricidade inicial Δu (fig.4.2.a e 4.2.b), pode-se gerar uma família de curvas carga deslocamento correspondentes ao sistema imperfeito. O deslocamento horizontal no ponto de aplicação da carga é indicado por u .

Para o sistema perfeito, a carga crítica teórica é

(Prezmeniecki⁴⁰)

$$P_{cr} = \frac{K L}{2} \quad (4.1)$$

onde K é a rigidez da mola e L está dado na figura 4.2.

Para o sistema com imperfeição Δu .

$$P_{cr} = \frac{K L}{2} \left[1 - \sqrt{3 \Delta u/L} \right] \quad (4.2)$$

Na análise numérica, considera-se a rigidez da barra 1 como constante para simular o comportamento da mola enquanto a barra 2 foi atribuída uma rigidez bastante alta, ($EA/L = 100$) para simular o comportamento rígido. Sendo que o programa só pode utilizar barras de treliça, a excentricidade inicial foi simulada mediante a inclinação inicial da barra 2, deslocando a sua extremidade em Δu .

Aplicando incrementos de deslocamento vertical Δv , obtem-se a reação vertical no nó 1, indicando por R_y e o deslocamento horizontal u no mesmo nó. Assim, determina-se a curva R_y versus u para cada valor da excentricidade inicial. Ligando os pontos da reação máxima correspondentes a diversas excentricidades, pode-se obter a carga crítica do sistema perfeito extrapolando para $\Delta u = 0$.

Foi obtida uma razoável correspondência entre os valores numéricos processados e os teóricos conforme a expressão 4.2.

$\Delta_u = 0$	$P_{cr}(\text{teor}) = 35,35$	$P_{cr}(\text{num}) = 35,35$
$= 1$	$= 29,10$	$= 29,03$
$= 2$	$= 26,43$	$= 26,73$
$= 4$	$= 22,65$	$= 23,48$

Pode-se observar também, que ao rodar a estrutura com a rigidez da barra variável em cada passo, isto é, variando o comprimento, a diferença dos resultados foi pequena.

4.3 - Treliça simples tipo arco.

A estrutura tipo arco simplificado da fig. 4.3 é composta de duas barras e submetida a uma carga vertical na articulação central. Este exemplo é clássico na literatura sobre análise não linear. Note-se que este exemplo foi selecionado pois representa um dos dois tipos de comportamento descritos na seção 1.1.2.1, em que ocorre a mudança súbita da configuração, ("snapping"). A expressão analítica da história carga-deslocamento para este exemplo foi deduzida por Bathe³, Leipholz²⁰ e Hult²⁴ e será deduzida novamente aqui utilizando uma formulação aproximada baseada na referência do Leipholz²⁰. O estudo teórico, que considera as barras elásticas e com rigidez constante, pode ser encontrado na referência de Bathe⁴.

Considere a estrutura da fig. 4.3 com os ângulos indicados.

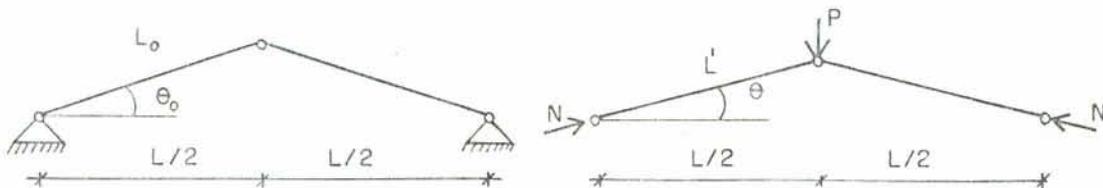


Fig. 4.3 - Treliça simples tipo arco.

A equação de equilíbrio da para a força de compressão N na barra

$$N = \frac{P}{2 \theta} \quad (4.1)$$

e tensão igual a

$$\sigma = \frac{P}{2 A \theta} \quad (4.2)$$

onde A é a área normal da barra. A deformação específica pode ser determinada considerando a fig. 4.3, truncando a série que representa o cosseno no termo quadrático e desprezando os termos dos ângulos ao quadrado frente aos números inteiros na dedução da equação. Por está aproximação tem-se

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\theta_0^2 - \theta^2) \quad (4.3)$$

No caso elástico tem-se pelo lei de Hooke

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.4)$$

Substituindo as equações 4.2 e 4.3 na 4.4 vem

$$P = A E \theta (\theta_o^2 - \theta^2) \quad (4.5)$$

O valor máximo de P corresponde a

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 = (\theta_o^2 - 3 \theta^2) \quad (4.6)$$

ou seja

$$\theta = \theta_s = \frac{\theta_o}{3} \quad (4.7)$$

donde

$$P_s = \frac{2}{3 \sqrt{3}} A E \theta_o^3 = 2 A E \theta_s^3 \quad (4.8)$$

valores correspondentes ao ponto A na fig. 4.4. Nestas expressões θ_s e P_s são o ângulo e a carga em que ocorre o snapping.

Deve-se lembrar que a barra está submetida a uma força N, dada pela 4.1 e que cada barra poderá flambar no sentido clássico para

$$N_{fl} = \frac{4 \pi^2 E I}{L^2}$$

onde E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia, L é o comprimento da barra e A, a seguir, é a área da seção transversal.

De modo que o processo de snapping acontece unicamente para

$$\theta_o \leq 2\sqrt{3} \frac{\pi r}{L} \quad ; \quad r = \sqrt{I/A} \quad (4.9)$$

Agora tem-se um exemplo com dados numéricos.

A análise numérica já foi extensamente estudada, veja por exemplo Kondoh²⁸, Papadrakakis³⁶ e Bathe⁴.

Na fig. 4.4 estão representadas a eq. 4.5 e o correspondente resultado numérico obtido com o programa

desenvolvido nesta dissertação e que usou um incremento de deslocamento constante igual a 0.2 está indicado na mesma figura. A diferença entre ambos resultados é devida aos erros acumulados no processo incremental e pode ser reduzido diminuindo o tamanho dos incrementos de deslocamentos aplicados.

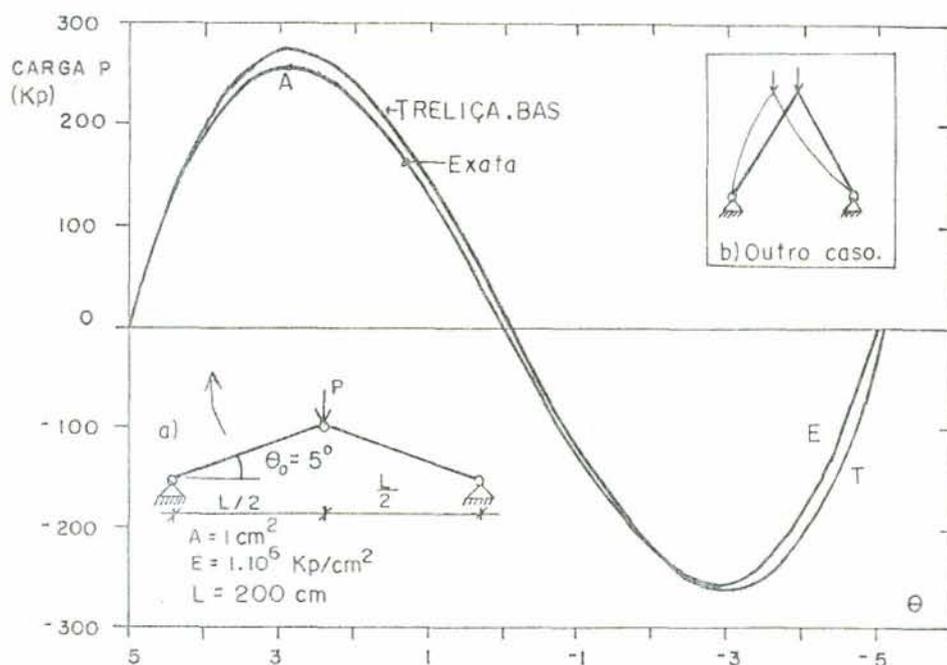


Figura 4.4 - Análise elástica não linear.

Cabe mencionar que para poder analisar a parte descendente da curva foi necessário aplicar deslocamentos prescritos. A explicação para isto é que o ramo descendente da curva carga-deflexão, na região de pós ponto crítico é caracterizado por uma matriz de rigidez negativa definida. Isto quer dizer que a estrutura somente pode suportar uma carga decrescente após atingir este ponto. Por esta razão não se pode determinar a curva de pós ponto crítico com incrementos de carga, mas somente com incrementos de deslocamentos. Outro fato observado nesta análise elástica, é que a expressão analítica calculada sem aproximações dá praticamente o mesmo resultado que a expressão analítica aproximada. Para o caso da carga externa aplicada o ponto A corresponde ao colapso da estrutura.

Usando-se as equações 4.7 e 4.8 obtém-se $P_S = 255.8$ e

$\theta_s = 2.88^\circ$, resultados estes que conferem com a fig. 4.4.

Como foi dito antes, esse exemplo exhibe um comportamento do tipo snapping, mas se o ângulo indicado for aumentando o fenômeno passa a ser de bifurcação pura e para poder analisá-lo além do ponto de flambagem seria necessário outro método (Szilard⁵¹ e Riks⁴³).

Na análise viscoelástica parte-se de um certo nível de carregamento e, a partir deste ponto, mantém-se a carga constante começando então a incrementar o tempo. Para obter uma comprovação dos resultados do programa computacional, utilizou-se um modelo reológico simples com possibilidade de determinar a expressão analítica para a estrutura da fig. 4.3. Utilizou-se o modelo de Maxwell composto de uma mola e amortecedor em série da fig. 4.5.

Aplicando uma tensão σ no modelo tem-se pelas equações constitutivas

$$\sigma_m = E \varepsilon_m \quad (4.10)$$

$$\sigma_a = \eta \dot{\varepsilon}_a \quad (4.11)$$

onde os índices m e a são da mola e do amortecedor respectivamente, t é o tempo, $(\dot{\quad}) = \partial/\partial t$ e ε é a deformação.

Pela equação de equilíbrio

$$\sigma = \sigma_m = \sigma_a \quad (4.12)$$

e pela equação de compatibilidade

$$\varepsilon = \varepsilon_a + \varepsilon_m \quad (4.13)$$

Derivando a eq. 4.13 em relação a t. vem

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_a + \dot{\varepsilon}_m \quad (4.14)$$

Substituindo a eq. 4.10 e 4.11 na 4.14 vem

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_a}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}_m}{E} = \frac{\dot{\sigma}}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (4.15)$$

Esta é a equação diferencial do modelo de Maxwell. Substituindo os valores de σ e ε da eqs. 4.2 e 4.3 na eq. 4.15 obtém-se uma equação diferencial que resolvida e integrada fornece

$$t = T \ln \frac{\theta}{\theta_e} - \frac{2 \eta A}{3 P} (\theta^3 - \theta_e^3) \quad (4.16)$$

onde $T = \eta/E$ e θ_e é o valor elástico de θ para $t = 0$, isto é, θ_e é a deflexão assumida pela estrutura no começo do processo de creep quando a treliça se mantém ainda elástica.

O tempo crítico, t_{cr} , é obtido da 4.16 quando $\theta = \theta_s$. Pela eq. 4.8 tem-se

$$\theta_s = \sqrt[3]{P / (2 A E)}$$

Substituindo na eq. 4.16 vem

$$t_{cr} = \frac{T}{3} \left\{ 3 \ln \left[\frac{\sqrt[3]{P / (2 A E)}}{\theta_e} \right] - 1 + 2 \frac{A E}{P} \theta_e^3 \right\}$$

ou ainda

$$t_{cr} = \frac{T}{3} \left\{ 2 \frac{A E}{P} \theta_e^3 - 1 - \ln \left[2 \frac{A E}{P} \theta_e^3 \right] \right\} \quad (4.17)$$

[Obs., Eqs. 4.18 à 4.20
estão vagas]

Na fig. 4.5 tem-se a representação da eq. 4.16, com os dados numéricos para a estrutura e o modelo de Maxwell indicado.

Como o programa computacional desta dissertação foi elaborado para o modelo standard (fig. 2.1) fez-se $E_1 = 100$ para eliminar o efeito desta mola frente ao amortecedor que vale $\eta_1 = 1.10^7$. A carga $P = 191$ corresponde a $\theta_e = 4^\circ$ da eq. 4.5 (ângulos em radianos e as demais unidades estão na conversão de unidades).

Salientando que o ponto A é o ponto limite, além deste ponto o tempo começa a recuar o que não tem significado físico,

isto é, está além do tempo crítico, que pela eq. 4.17 vale 4,3.

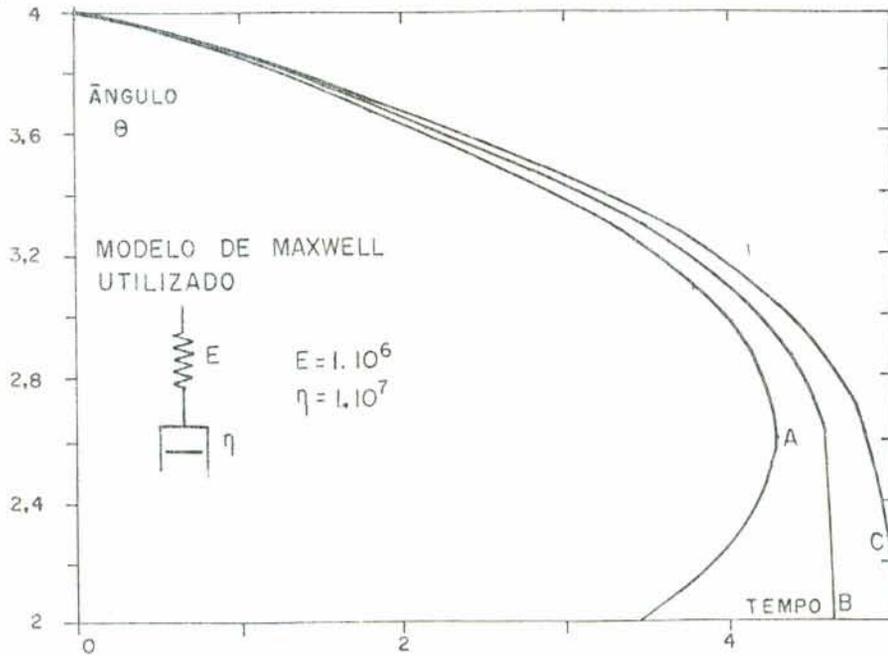


Fig. 4.5 - Análise viscoelástica não linear da mesma estrutura da fig. 4.4., carregada até $\theta = 4^\circ$.

São mostradas também mais duas curvas obtidas com o programa desta dissertação obtidas com diferentes incrementos de tempo. Como o tempo de retardação T é arbitrário o incremento de tempo para a curva superior foi 0.2 unidades de tempo e para a curva mais próxima da curva exata, $\Delta t = 0.1$. Indicando que, para incrementos menores tem-se melhor aproximação. O programa da presente dissertação indicou o final destas curvas (ponto B e C) através do pivo negativo na matriz de rigidez. Pode-se fazer outras verificações com os modelos standard, Kelvin, etc., ou em outras estruturas simples (Szyszkowsky⁵⁰).

4.4 - Exemplo de flambagem numa treliça simples.

No exemplo anterior foi descrito o comportamento tipo snapping. Neste exemplo descreve-se o outro tipo de situação em que ocorre a flambagem descrito na seção 1.1.2.1. Mostra-se o cálculo analítico, numérico e alguns comentários sobre o problema.

Para exemplificar a análise de estabilidade pelo método matricial, Przemieniecki⁴⁰ considerou o treliça de duas barras mostrada na figura 4.6. As área da seção transversal é A, o módulo de elasticidade é E. O carregamento externo consiste de uma força P aplicada no nó 1. Usando o método dos deslocamentos determina-se a carga que faz a treliça tornar-se instável em seu próprio plano.

As matriz de rigidez elástica para o elemento 1 e 2 é

$$K_{bl}^{(1)} = \frac{A E}{L} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.21)$$

$$K_{bl}^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{A E}{L} \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.22)$$

onde os números das linhas e colunas, em cima das matrizes, referem-se aos deslocamentos mostrados na figura 4.5. As forças nos elementos são dadas por

$$F^{(1)} = -P \quad e \quad F^{(2)} = 0 \quad (4.23)$$

Consequentemente, segue das eqs. 3.7 e 4.23 que as matrizes de rigidez geométricas são dadas por

$$K_{bm}^{(1)} = \frac{P}{L} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.24)$$

e

$$K_{bm}^{(2)} = 0 \quad (4.25)$$

As matrizes de rigidez dos elementos podem ser montadas para formar \tilde{K}_{T1} e \tilde{K}_{TM} para a estrutura total. Assim, depois de eliminar linhas e colunas correspondentes aos deslocamentos 3 a 6, obtêm-se

$$\tilde{K}_{T1} = \frac{\sqrt{2} A E}{4 L} \begin{matrix} & & 1 & & 2 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1+2\sqrt{2} \end{matrix} \quad (4.26)$$

$$\tilde{K}_{TM} = \frac{-P}{L} \begin{matrix} & & 1 & & 2 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (4.27)$$

e

$$\tilde{K}_{TM}^* = \frac{-1}{L} \begin{matrix} & & 1 & & 2 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (4.28)$$

onde \tilde{K}_{TM}^* é a matriz de rigidez geométrica para valores unitários da carga aplicada.

Da estabilidade, sabe-se que a carga crítica é obtida quando o determinante é igual a zero, isto é:

$$\det \left| \tilde{K}_{T1} + \lambda \tilde{K}_{TM}^* \right| = 0 \quad (4.29)$$

onde λ é uma constante. Substituindo as equações 4.26 e 4.28 em 4.29 resulta em

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2} A E}{4 L} - \frac{\lambda}{L} & \frac{\sqrt{2} A E}{4 L} \\ \frac{\sqrt{2} A E}{4 L} & \frac{\sqrt{2} A E}{4 L} \left(1 + 2\sqrt{2} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.30)$$

pela qual, obtêm-se a carga de flambagem

$$P_{cr} = \lambda_{cr} 1 = \frac{2\sqrt{2} - 1}{7} A \quad (4.31)$$

Esse é o mesmo valor obtido por Timoschenko & Gere⁵⁴, de uma maneira analítica considerando o equilíbrio do conjunto.

Nesta referência, observa-se que a fórmula é válida somente para pequenos valores dos deslocamentos. O valor positivo indica que a carga de flambagem, está na direção correta mostrada na fig. 4.6.

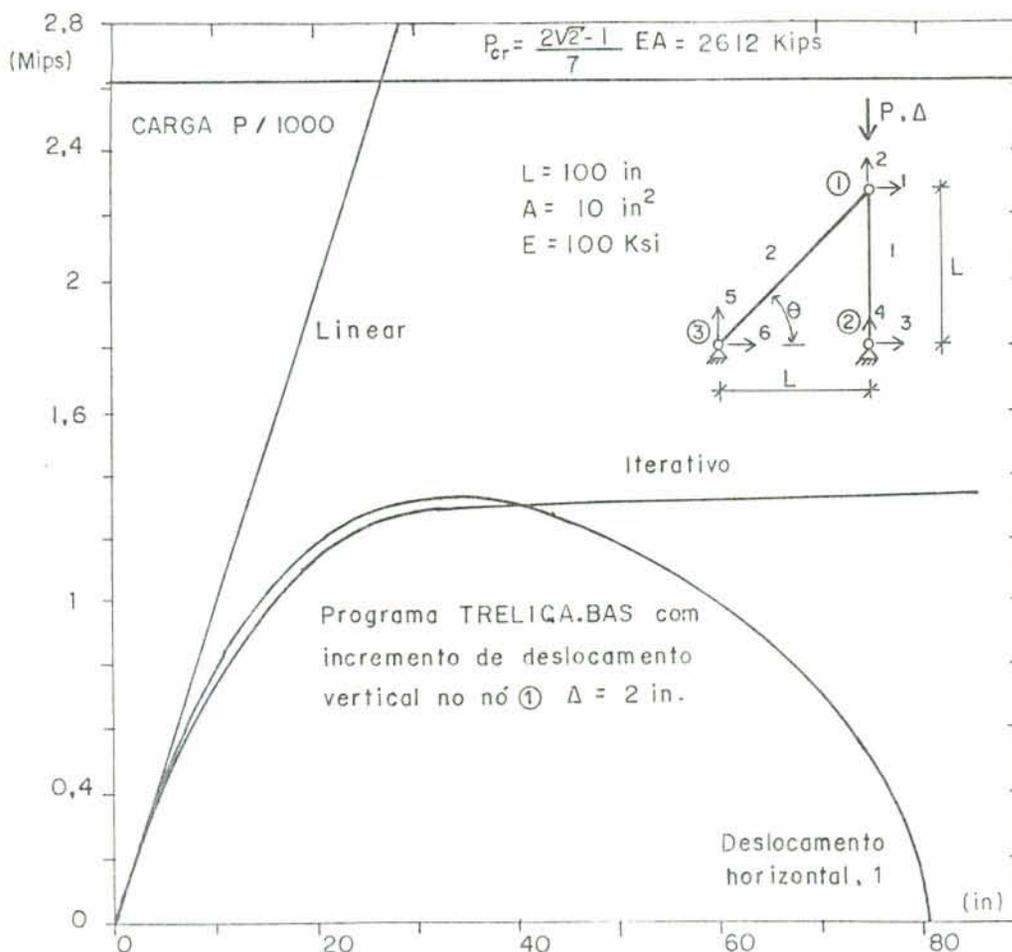


Figura 4.6 - Curva carga deslocamento da treliça simples sujeita a flambagem.

Para comparar o presente método com um método iterativo, proposto por Reilly & Sutton⁴¹, foi rodada a mesma estrutura da figura 4.6. Este método iterativo consiste em cada ciclo calcular os deslocamentos corretivos usando uma matriz de rigidez revisada sujeita a um vetor de cargas residual. Da mesma forma que no método incremental a matriz de rigidez é baseada sobre a geometria deslocada da estrutura. O vetor de cargas residual é obtido calculando a diferença entre a carga aplicada e as componentes das forças nas barras em cada nó. As componentes das forças são baseadas sobre a localização dos nós deslocados. Segundo Reilly e Sutton⁴¹ o método converge rapidamente. Neste exemplo, em cinco

ciclos já obtém o valor exato ao passo que o método incremental precisa de diversos passos para obter o mesmo resultado.

Retomando os valores deste exemplo verifica-se o que foi dito anteriormente. A carga crítica determinada pelo método iterativo é 1225 Ksi (1 Ksi = 1000 lbf/in²) para um deslocamento horizontal de 25 in, bem abaixo de carga teórica de 2612 Ksi, do mesmo modo, com o método incremental obtém-se, com um incremento de carga igual a 50 in, um $P_{cr} = 1234$ Ksi, e com incremento de deslocamento imposto igual a -2 in uma carga crítica igual a 1280 Ksi. Com deslocamento imposto pode-se obter a curva de pós flambagem. Aumentando o número de incremento pode-se aumentar a precisão.

Verifica-se assim que os valores obtidos com os métodos não lineares são bem próximos um do outro, só diferindo a eficiência computacional dos mesmos.

Como foi visto, ao analisar a estrutura com o método incremental obtém-se uma carga de flambagem bem menor do que a obtida como prescrito pelo método dos autovalores. Essa abordagem descrita acima e sintetizada na equação 4.29 é utilizada em problemas de estabilidade inicial. Muito frequentemente na literatura, este tipo de método é usado além do seu limite de aplicabilidade. O método dos autovalores só pode dar respostas com "significação física" (Zienkiewicz⁵⁶) se as deformações são pequenas e K_1 e K_m podem ser escritos na posição indeformada e não diferem muito da posição deformada. Isto somente acontece em um número limitado de situações práticas (por exemplo, uma barra perfeitamente reta sob carga axial, esferas sob pressão externa uniforme, etc.). Esse não é o caso deste exemplo onde a carga crítica causa deflexões de mais de 25 in. Neste caso é necessário um processo incremental como, por exemplo, o de presente trabalho.

4.5 - Torre com cargas nas direções vertical e horizontal.

A fig. 4.7 mostra uma torre treliçada com cargas nas direções vertical e horizontal. Os parâmetros para a solução são os seguintes:

a - Incremento de carga $\Delta P = 0.5$, exceto para a curva E

onde $\Delta P = 0.25$

b - incremento de tempo $\Delta t = 1$.

A curva A indica a análise elástica; a curva B indica a correspondente análise viscoelástica, também linear.

Nas curvas C a H indica-se os resultados de análises elásticas e viscoelásticas não lineares. A curva C, tomada de

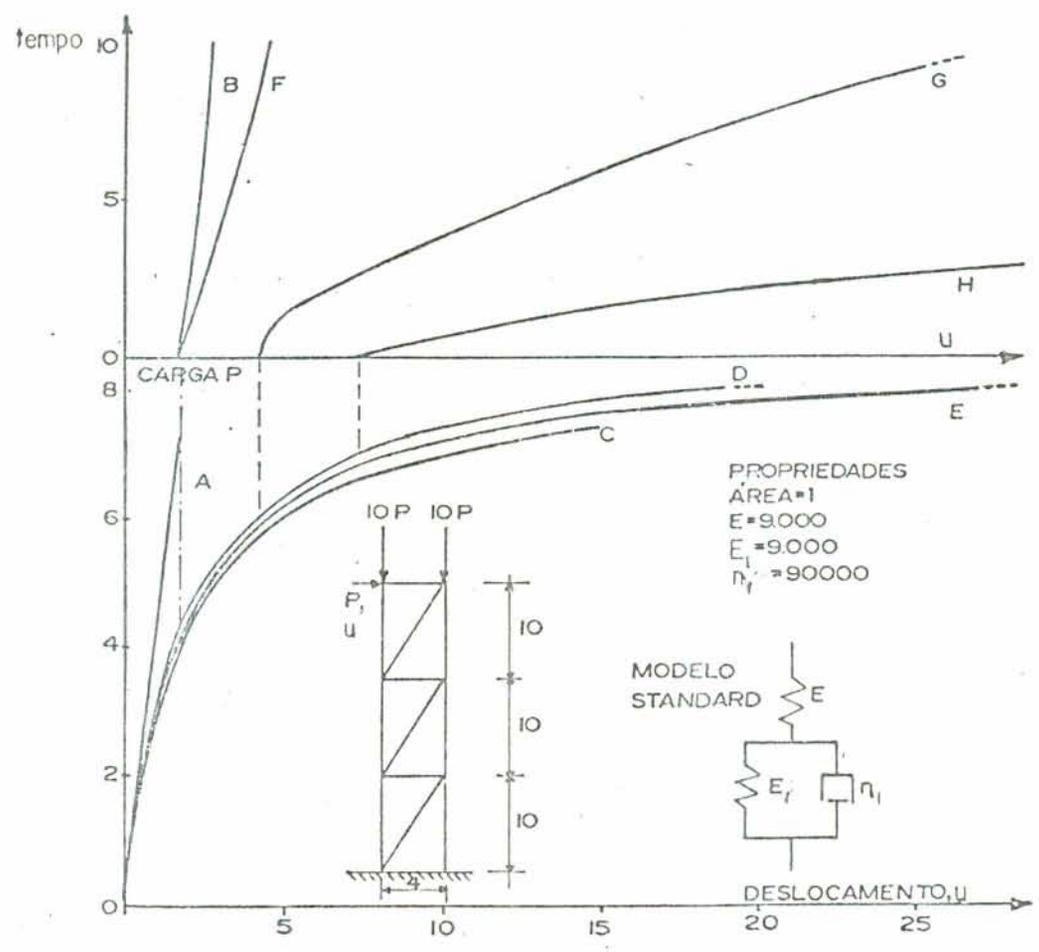


Fig. 4.7 - Análise de uma torre treliçada.

Reilly e Sutton⁴¹ foi obtida por iteração mediante uma variante do método de Newton, podendo ser considerada como uma solução exata no campo elástico. As curvas D e E foram obtidas numericamente com incrementos de carga diferentes. Observa-se que como é natural, o erro da análise incremental cresce com o incremento.

Observa-se também, que, para cargas mais baixas, as deformações viscoelásticas permanecem limitadas, (curva F) enquanto que cargas mais elevadas levam ao colapso da estrutura (curvas G e H)

4.6 - Exemplo de treliça com imperfeições.

O exemplo da fig. 4.8 foi selecionado mostrar a influência de imperfeições numa estrutura com o programa proposto.

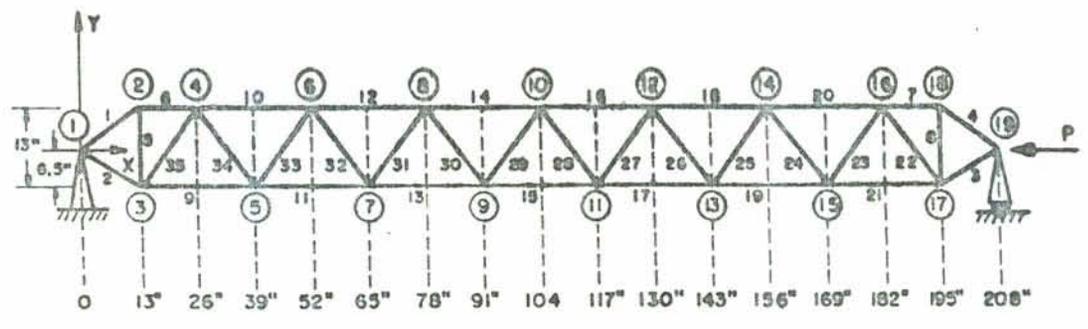


Figura 4.8 - Arco treliçado.

Ele foi inicialmente proposto por Thompson & Hunt⁵². Em seguida Rosen & Schmit⁴⁴ apresentam a análise considerando imperfeições geométricas e Kondoh & Atluri²⁸ apresentam a análise considerando a flambagem individual dos membros e a variação da área da seção transversal.

As coordenadas nodais são dadas na figura. A estrutura é composta de 35 elementos, dos quais todos tem uma seção circular cheia. A área dos elementos 1 a 21 é 8,5 in², enquanto a área dos outros elementos é 8 in². O módulo de Yong para o material é 1.10⁷ psi. Há dois nós de contorno: nó 1 que é fixo e nó 19, onde o movimento na direção Y está restringido. A estrutura é carregada por uma carga de compressão horizontal P no nó 19.

Duas diferentes estruturas são investigadas. A primeira chamada estrutura I é perfeita, isto é, sem imperfeições geométricas, e a estrutura II que tem imperfeições no seu sistema (além disso, podemos ter imperfeições locais, tal como um membro mais curto e que não é o objetivo do presente trabalho)

Essa imperfeição do sistema corresponde ao modo de flambagem total do exemplo, caracterizado por um meio comprimento de onda senoidal do nó 1 ao 19. As posições iniciais dos nós na direção Y são localizadas ao longo de um meio comprimento de onda senoidal e as imperfeições na direção X não são incluídas. O nó número 10 é o que está mais longe de sua posição perfeita e está a 1 in afastado na direção Y. Esta é uma pequena mudança nas dimensões da estrutura (0,5% no comprimento e 7,7% na largura) e

imperfeições do sistema desta ordem podem ser esperadas em estrutura reais.

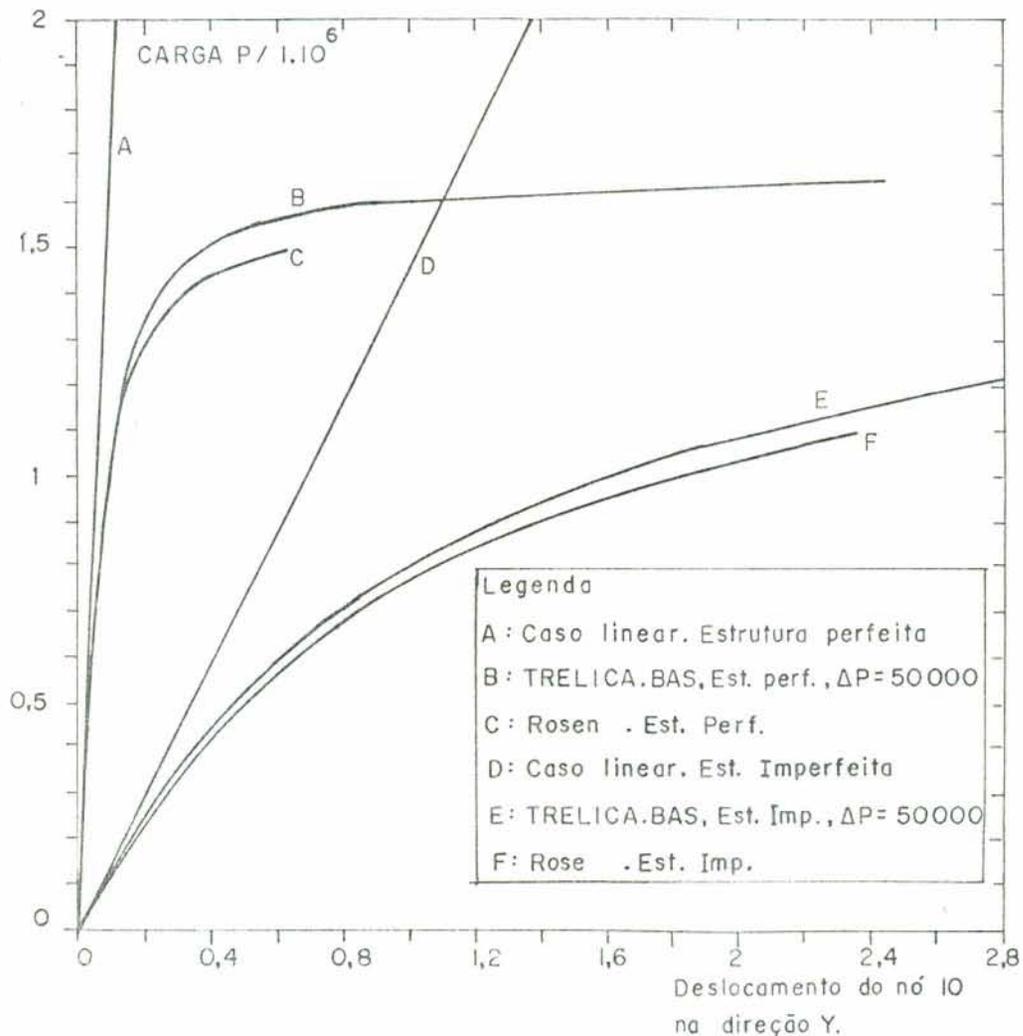


Fig. 4.9 - Curva carga deslocamento do arco treliçado.

O cálculo dos dois diferentes tipos de estruturas foram executados até que fosse observado a flambagem. Na fig. 4.9 tem-se a deflexão no nó 10 como uma função da carga axial aplicada.

A estrutura I, com um incremento de carga ΔP , constante, igual a 50000 lb, flambou em $P_{cr} = 1,65.10^6$ lb, ao passo que quando $\Delta P = 100000$ lb, flambou em $P_{cr} = 1,7.10^6$ lb, indicando que pode-se obter uma carga de flambagem um pouco menor, com incrementos menores. Rosen & Schmit⁴⁴ obteve $P_{cr} = 1,497.10^6$ lb.

A estrutura II exibe um forte aumento da deflexão transversal induzida pelo carregamento axial da estrutura, como mostrado na mesma figura 4.9. Rosen & Schmit⁴⁴ observaram no seu método que com $P = 1.10^6$ lb a solução é ainda avaliável mas a

força no elemento 15 é 98,5% da sua carga de flambagem. Além daquele ponto, qualquer tentativa de aumentar a carga causa flambagem no elemento 15, e a falência da estrutura inteira. Neste exemplo, observa-se que os deslocamentos se tornam muito grandes e que para $\Delta P = 50000$ lb obtém-se $P_{cr} = 1,3 \cdot 10^6$ lb.

O outro gráfico, mostrado na figura 4.10, foi obtido da mesma estrutura da figura 4.8, a qual, mostra a tensão absoluta no elemento 15 (que é compressão axial, sinal negativo) como uma função da carga axial externa aplicado na estrutura. Vê-se claramente a influência da imperfeição imposta.

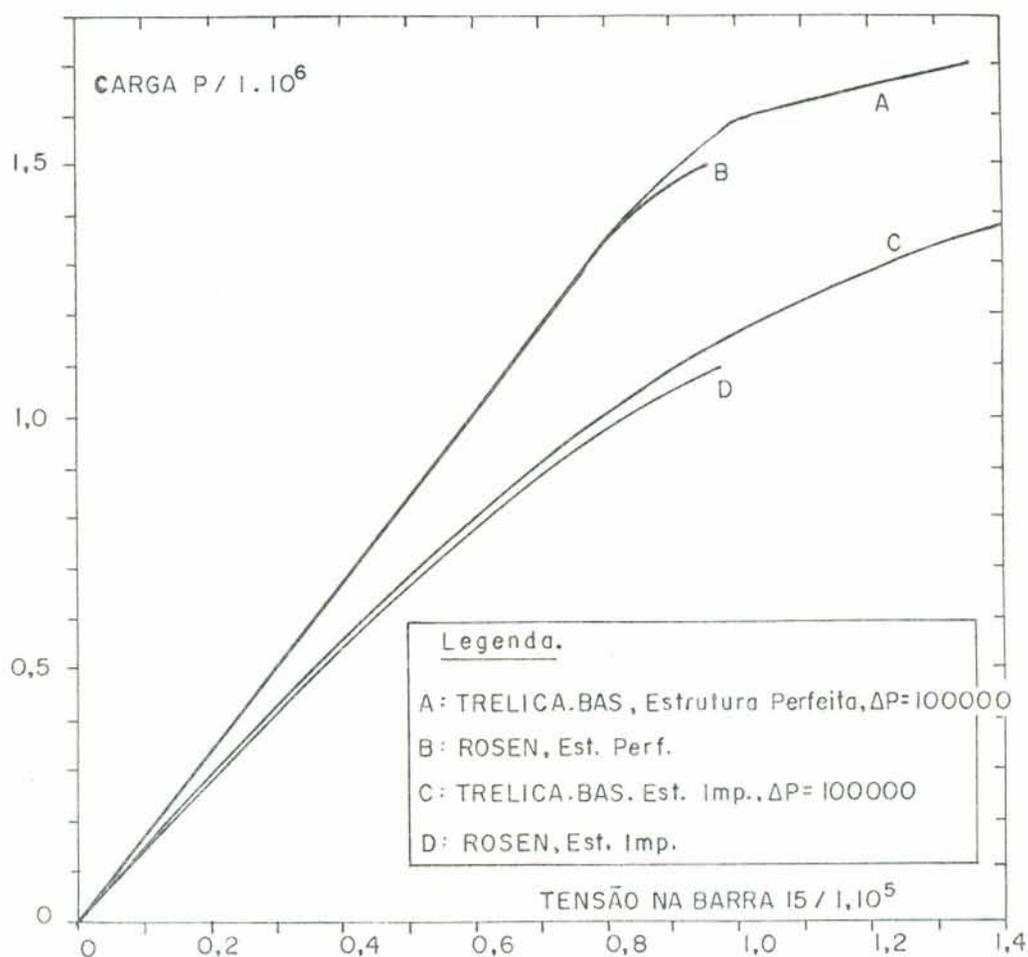


Figura 4.10 - Curva carga-tensão do arco treliçado.

Para a estrutura perfeita (estrutura D) Rosen & Schmit⁴⁴ obtiveram uma carga de flambagem para o sistema de $1,566 \cdot 10^6$ lb mas, como mencionado antes, a estrutura flambou em $P_{cr} = 1,497 \cdot 10^6$ lb, porque a força no elemento 15 excede a carga de flambagem local. Estes dados foram obtidos pela análise

numérica da publicação acima mencionada. Na presente dissertação a curva carga-tensão aproxima-se muito bem na estrutura I e II como pode ser observado pela figura 4.10.

Como no exemplo 4.3 e 4.5 foi feita a análise viscoelástica com deformações finitas mostrada na figura 4.11. Da mesma maneira parte-se de dois níveis de cargas diferentes, mas desta vez, considera-se as duas estruturas descritas antes, a perfeita e a imperfeita. Para a carga menor, as deformações no tempo são limitadas e se estabilizam, enquanto que para um nível de carga maior, a estrutura atinge o ponto crítico. O modelo viscoelástico utilizado foi o standard, com os seguintes valores: $E = 1.10^7$, $E_1 = 1.10^7$ e $\eta = 1.10^8$. Os resultados numéricos estão representados na figura 4.11.

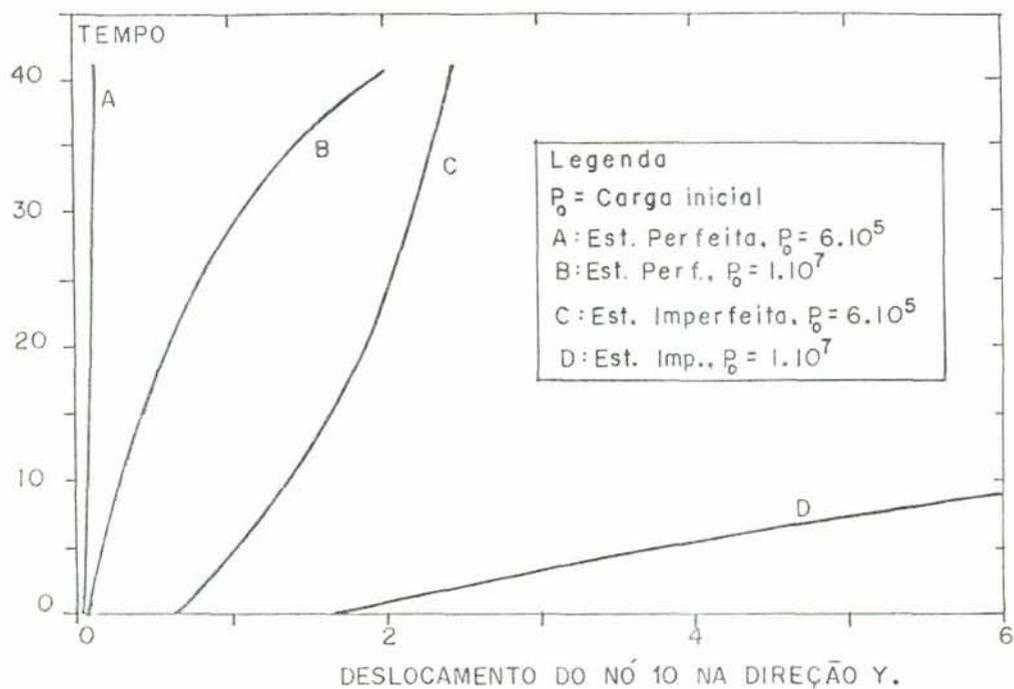


Figura 4.11 - Curva tempo deslocamento do arco treliçado.

5 - ESFORÇOS EM BARRAS HOMOGÊNEAS DE PÓRTICO PLANO SUJEITAS A EFEITOS VISCOELÁSTICOS, TEMPERATURA E RETRAÇÃO.

Neste capítulo será mostrado como, a partir dos esforços presentes em cada barra, pode-se calcular o incremento de carga viscoelástica, a ser adicionado no vetor de cargas total da estrutura para obter um novo conjunto de deslocamentos. A seguir, parte-se dos deslocamentos nodais para calcular os esforços finais nas barras com a contribuição da carga viscoelástica, das forças de engastamento perfeito, temperatura e retração. As equações para isto, bem como a maneira de fazer as rotações do sistema de referência local para global das diversas expressões são expostas.

5.1 - Formulação inicial.

Utilizando o método dos elementos finitos, pode-se determinar a carga viscoelástica nas extremidades de uma barra prismática, utilizando as derivadas das funções de forma, conforme estabelecido na seção 2.2.3. Particularizando a eq. 2.2.14 para pequenas deformações, e em ausência de forças de superfície e volume, obtém-se a carga viscoelástica, \underline{X}_v , em coordenadas locais

$$\underline{X}_v = \int_L \underline{B}^T \underline{M} \underline{\varepsilon}_v dx \quad (5.1)$$

Onde \underline{B} é a matriz deformação-deslocamento, \underline{M} é a matriz constitutiva elástica e $\underline{\varepsilon}_v$ é o vetor de deformação inicial que no presente caso denomina-se vetor de deformação viscoelástica.

A ordem que os esforços aparecem em \underline{X}_v foi mantida de acordo com a seção 2.2 e segue a mesma convenção se sinais definida anteriormente.

5 - ESFORÇOS EM BARRAS HOMOGÊNEAS DE PÓRTICO PLANO SUJEITAS A EFEITOS VISCOELÁSTICOS, TEMPERATURA E RETRAÇÃO.

Neste capítulo será mostrado como, a partir dos esforços presentes em cada barra, pode-se calcular o incremento de carga viscoelástica, a ser adicionado no vetor de cargas total da estrutura para obter um novo conjunto de deslocamentos. A seguir, parte-se dos deslocamentos nodais para calcular os esforços finais nas barras com a contribuição da carga viscoelástica, das forças de engastamento perfeito, temperatura e retração. As equações para isto, bem como a maneira de fazer as rotações do sistema de referência local para global das diversas expressões são expostas.

5.1 - Formulação inicial.

Utilizando o método dos elementos finitos, pode-se determinar a carga viscoelástica nas extremidades de uma barra prismática, utilizando as derivadas das funções de forma, conforme estabelecido na seção 2.2.3. Particularizando a eq. 2.2.14 para pequenas deformações, e em ausência de forças de superfície e volume, obtém-se a carga viscoelástica, \underline{X}_V , em coordenadas locais

$$\underline{X}_V = \int_L \underline{B}^T \underline{M} \underline{\varepsilon}_V dx \quad (5.1)$$

Onde \underline{B} é a matriz deformação-deslocamento, \underline{M} é a matriz constitutiva elástica e $\underline{\varepsilon}_V$ é o vetor de deformação inicial que no presente caso denomina-se vetor de deformação viscoelástica.

A ordem que os esforços aparecem em \underline{X}_V foi mantida de acordo com a seção 2.2 e segue a mesma convenção de sinais definida anteriormente.

5.2 - Obtenção das deformações viscoelásticas.

Para obter as deformações viscoelásticas na barra toma-se como base a formulação apresentada na seção 2.1.

Utiliza-se a eq. 2.1.10 repetida abaixo

$$q_i(t+\Delta t) = C_1 q_i(t) + C_2 \frac{\sigma(t)}{E_i(t)} \quad (2.1.10) \text{ repetida}$$

O vetor ε_v num tempo t , de acordo com a eq. 2.1.10, pode ser escrito na seguinte forma:

$$\underline{\varepsilon}_v(t+\Delta t) = \underline{\varepsilon}_v(t) C_1 + \underline{M}^{-1} \underline{\sigma} C_2 \quad (5.2)$$

onde

$$C_1 = e^{-\Delta t/T_i}$$

$$C_2 = (1 - e^{-\Delta t/T_i})$$

e $\underline{\sigma}$ e \underline{M} tem o mesmo significado das equações 2.2.35 e 2.2.36.

No primeiro passo da análise a barra não tem deformação viscoelástica para ser levada em conta, isto é, no tempo $t = 0$, $\underline{\varepsilon}_v(t) = \underline{0}$, logo a equação 5.2 fica

$$\underline{\varepsilon}_v(t=\Delta t) = \underline{M}^{-1} \underline{\sigma} C_2 \quad (5.3)$$

Substituído a eq. 5.3 em 5.1 tem-se

$$\underline{X}_v = \int_L \underline{B}^T \underline{\sigma} C_2 dx \quad (5.4)$$

Vê-se assim, que \underline{X}_v deixou de ser dependente da deformação viscoelástica de forma direta e pode ser determinado em função dos esforços aplicados na barra no tempo anterior.

5.3 - Obtenção do momento fletor e esforço normal para o cálculo da carga viscoelástica.

Como foi visto na equação 2.2.35, $\underline{\sigma}$ é composto pelo esforço axial N e pelo momento fletor M em uma dada seção da

barra.

O esforço axial pode ser relacionado com as forças axiais nas extremidades inicial e final da barra, N_1 e N_2 .

A convenção de sinais adotada é tração para o esforço axial e esforços nas pontas para a direita como positivo de acordo com a figura 5.1.

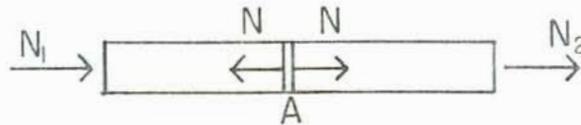


Figura 5.1 - Convenções para os esforços longitudinal.

Então, se numa seção A tiver tração, N pode ser interpolado linearmente na forma:

$$N = \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{N}}^n \quad (5.5)$$

onde:

$$\underline{\underline{\Delta}} = (-1+x/L \quad x/L)$$

$$\underline{\underline{N}}^n = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

O momento fletor, M será determinado, a seguir, de forma semelhante ao esforço axial. Dado o sistema de esforços indicados na fig. 5.2, quer se interpolar o momento fletor no interior da barra através dos esforços nas extremidades.

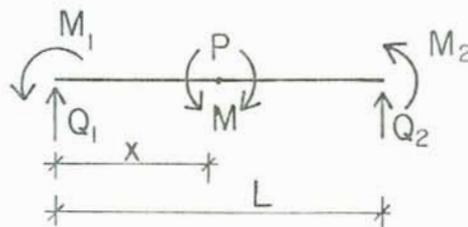


Figura 5.2 - Forças que determinam o momento fletor.

Fazendo o somatório de momentos em torno do ponto P e considerando que a barra deve estar em equilíbrio, obtém-se

$$\sum M_P = 0 \quad (5.6)$$

então fica:

$$Q_1 x - M_1 = Q_2 (L-x) + M_2 \quad (5.7)$$

Fazendo agora, o somatório em P pela esquerda tem-se

$$\sum M_P^e = 0 \quad (5.8)$$

e daí

$$M = -Q_1 x + M_1 \quad (5.9)$$

Considerando a 5.7, somando e tirando a média aritmética dos dois termos fica

$$M = 1/2 (-Q_1 x + M_1 - Q_2 (L-x) - M_2) \quad (5.10)$$

ou em forma matricial:

$$M = \underline{\Gamma} M^n \quad (5.11)$$

onde:

$$\underline{\Gamma} = \left[-x/2, 1/2, -1/2 (L-x), -1/2 \right] \quad (5.12)$$

e

$$\underline{M}^n = \left[Q_1, M_1, Q_2, M_2 \right]^T \quad (5.13)$$

Substituído as eqs. 5.5 e 5.11 na 5.4 e considerando ainda o valor de \underline{B} da seção 2.1 fica

$$\underline{X}_v = \int_L \begin{bmatrix} \underline{\Psi}^T & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{\Phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\Gamma} \end{bmatrix} C_2 dx \quad (5.14)$$

Fazendo o produto dentro das integrais e considerando os valores de \underline{N}^n e \underline{M}^n de 5.5 e 5.11, respectivamente, em cada integral, tem-se

$$\underline{X}_v = C_2 \underline{X}_u \quad (5.15)$$

onde:

$$\tilde{X}_u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} N_{1S} & -N_{2S} \\ -(N_{1S} & -N_{2S}) \\ Q_{1S} & -Q_{2S} \\ M_{1S} & -Q_{2S} & L-M_{2S} \\ -(Q_{1S} & -Q_{2S}) \\ -(M_{1S} & -Q_{1S} & L-M_{2S}) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Onde, os esforços, em cada barra, que entram no cálculo de \tilde{X}_u são calculados com os esforços que resultam da seguinte expressão:

$$\tilde{X}_s = \tilde{K}_b U_b + \tilde{X}_r + \tilde{X}_p - \tilde{X}_v \quad (5.17)$$

Onde o subíndice "s" significa esforços devido aos deslocamentos descontando a parte viscoelástica, retração e temperatura.

Para um tempo $t > \tau_0$ calcula-se a carga viscoelástica pela eq. 2.1.41, onde se considera a formulação mais geral do CEB e que fica da seguinte maneira:

$$\tilde{X}_v(t+\Delta t) = \tilde{X}_d(t+\Delta t) + \tilde{X}_f(t+\Delta t) \quad (5.18)$$

onde

$$\tilde{X}_d(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^n \left\{ \tilde{X}_{di}(t) C_{1i} + \tilde{X}_u(t+\Delta t) C_{2i} \right\} \quad (5.19)$$

$$\tilde{X}_f(t+\Delta t) = \tilde{X}_f(t) + \tilde{X}_u(t) C_f \quad (5.20)$$

Se tiver só elementos de Kelvin $\tilde{X}_f = 0$ e a 5.18 só terá o primeiro termo.

5.3.1 - Verificação das equações de interpolação dos esforços.

a - Conferência da eq. 5.5.

Nas extremidades a eq. 5.5 deve verificar, ou seja

$$N = N_1 (-1 + x/L) + N_2 x/L \quad (5.5)$$

repetida

para $x = 0$ tem-se $N = -N_1$
 para $x = L$ tem-se $N = N_2$

Que é o resultado desejado (ver fig. 5.1).

b - Conferência da eq. 5.10.

Nas extremidades a eq. 5.10 deve verificar. Tomando-a novamente

$$M = 1/2 (-Q_1 x + M_1 - Q_2 (L-x) - M_2) \quad (5.10) \text{ repetida}$$

b.1 - Para $x = 0$, $M = M_1$ (ver fig. 5.2) e tem-se pela 5.10

$$M_1 = 1/2 (M_1 - Q_2 L - M_2) = -Q_2 L - M_2$$

o que confere (ver fig. 5.2).

b.2 - Para $x = L$, $M = -M_2$ (ver fig. 5.2) e tem-se pela 5.10

$$-M_2 = 1/2 (-Q_1 L + M_1 - M_2)$$

ou seja

$$M_2 = Q_1 L - M_1$$

o que confere (ver fig. 5.2).

5.4 - Forças de engastamento devido ao efeito da temperatura.

Para analisar o efeito da temperatura usa-se as convenções da fig. 5.3 e os casos da fig. 5.4.

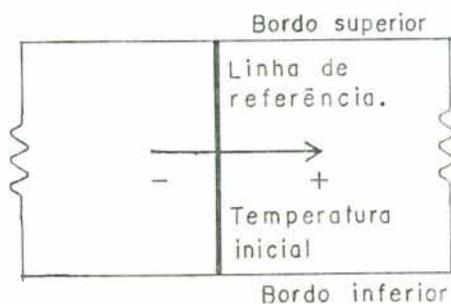


Fig. 5.3 - Convenção da temperatura.

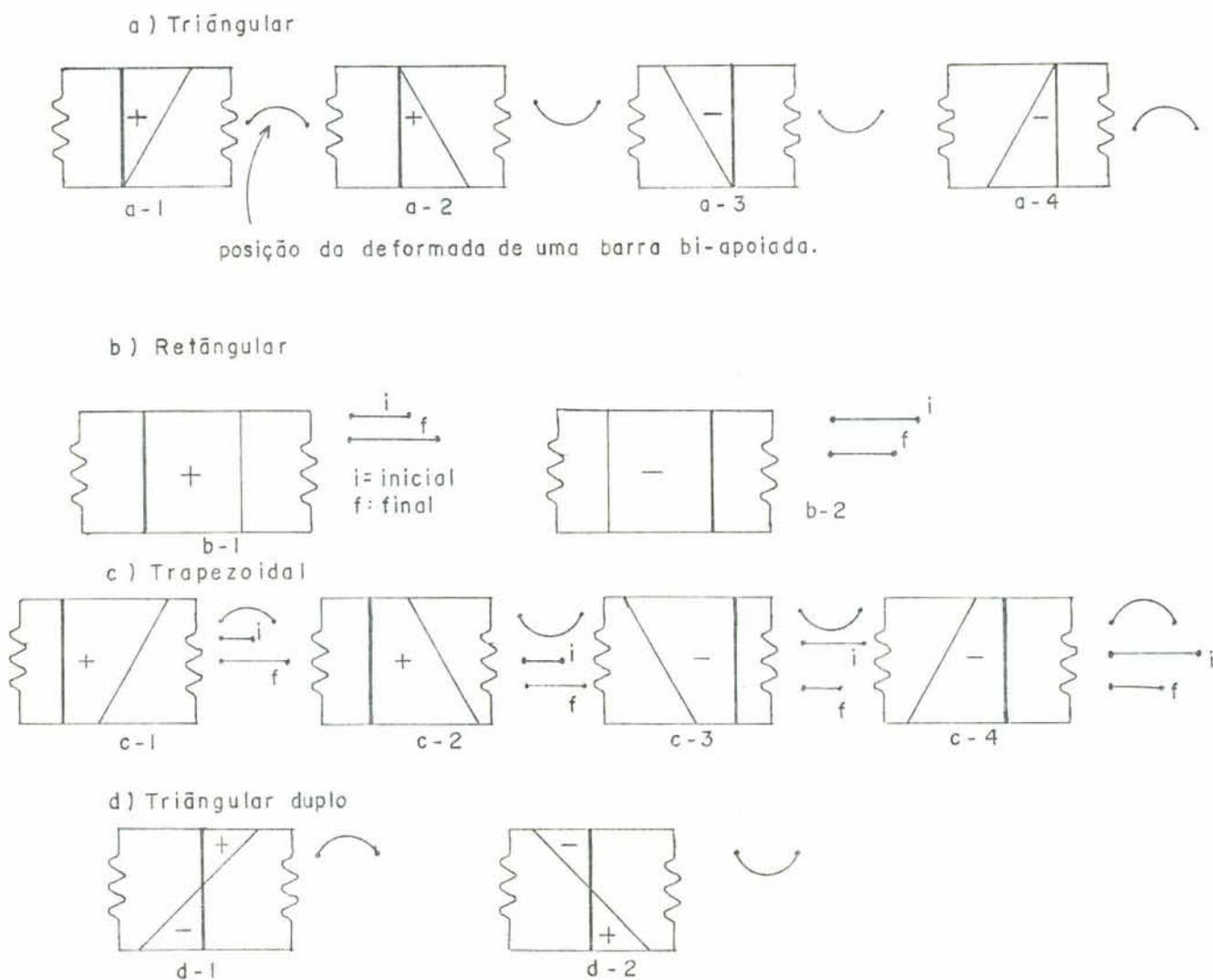


Fig. 5.4 - Casos lineares de variação de temperatura.

Como se pode ver na fig. 5.4 pode-se ter os seguintes casos de variação de temperatura:

- Uniforme.
- Não uniforme (desigual).
- De sinal contrário nos bordos.
- De mesmo sinal em ambos os bordos.
- Só num bordo.

A seguir introduz-se a seguinte notação:

t_a = temperatura inicial.

t_s = temperatura no bordo superior.

t_i = temperatura no bordo inferior.

$\Delta_s = t_s - t_a$ = variação de temp. no bordo superior.

$\Delta_i = t_i - t_a$ = variação de temp. no bordo inferior.

Analisando a convenção acima junto com a fig. 5.4 pode-se determinar condições que classifiquem o caso que se apresenta.

5.4.1 - Variação uniforme de temperatura.

Corresponde aos casos retangulares. Pode-se ter

$$\Delta_s = \Delta_i = \Delta_u > 0$$

e

$$\Delta_s = \Delta_i = \Delta_u < 0$$

Em uma viga bi-engastada (ver fig. 5.5) as forças de engastamento produzida por este tipo de variação são

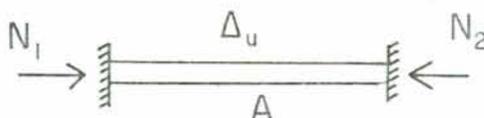


Fig. 5.5 - Variação uniforme de temperatura positiva.
(caso b.1 da fig. 5.4)

$$N = N_1 = - N_2 = E A \alpha \Delta_u \tag{5.21}$$

onde

- N = esforço normal.
- A = área da seção transversal.
- α = coeficiente de dilatação térmica.
- Δ_u = variação de temperatura.

5.4.2 - Variação não uniforme de temperatura.

Corresponde aos demais casos onde tem-se $\Delta_s \neq \Delta_i$.
 Pode-se ainda variar o sinal e ter os casos 5.4.2.1 e 2.

5.4.2.1 - Variação de temperatura nos bordos de sinal contrário e diferente de zero.

Corresponde aos casos triangulares duplos onde as condições são que o [sinal de (Δ_s) \neq sinal de (Δ_i)] e ainda $(\Delta_s \text{ e } \Delta_i \neq 0)$

5.4.2.2 - Variação de temperatura nos bordos de mesmo sinal e diferentes de zero.

Corresponde aos casos trapezoidais onde as condições são que [sinal de (Δ_s) = sinal de (Δ_i)] e $(\Delta_s \text{ e } \Delta_i) \neq 0$ neste caso, deve-se dividir a variação em uma parte triangular e numa parte retângular, onde nesta parte, utiliza-se a menor variação para calcular o esforço normal de engastamento.

5.4.2.3 - Variação de temperatura só num bordo.

Correspondem aos casos triangulares onde a condição é que

$$\Delta_s = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_i = 0$$

Valendo para estes 3 últimos casos a eq. 5.22 a seguir.

As forças de engastamento produzidas por variação de temperatura diferentes nos bordos são momentos fletores para variação triangular ou triangular dupla e momento fletor e esforço normal para variação trapezoidal (ver fig. 5.4).

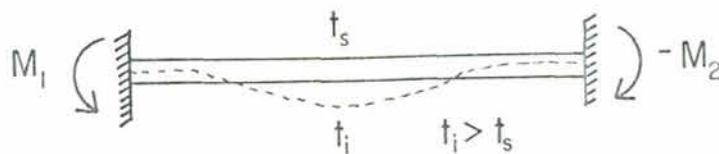


Fig. 5.6 - Forças de engastamento originadas numa viga bi-engastada por variação triangular ou triangular dupla de temperatura (ver caso a.2, a.3 e d.2 da fig. 5.4).

O valor dos momentos de engastamento para variação triangular ou triangular dupla são

$$M_1 = -M_2 = \alpha E I (t_i - t_s) / d \quad (5.22)$$

onde

I = Momento de inércia da seção transversal

d = Distância entre os bordos onde ocorre t_i e t_s

α = Coeficiente de dilatação térmica

t_i e t_s é a variação da temperatura no bordo inferior e superior e além disso, $t_i > t_s$

As forças de engastamento devido a variação de temperatura dadas pelas eqs. 5.21 e 5.22 podem ser aplicadas instantaneamente ou variáveis ao longo do tempo.

A lei deste crescimento pode ser qualquer e poderá ser mudada de acordo com a conveniência, mas neste trabalho foi tomada linear com um valor total 10 dias após a aplicação inicial e é feita incidir diretamente sobre o coeficiente de dilatação térmica do material. Para o concreto e o aço $\alpha = 1.10^{-5}$ ($1/^\circ\text{C}$).

5.5 - Forças de engastamento devido à retração.

As deflexões adicionais devido a retração são tão ou mais importantes que as devidas as creep (Pauw e Meyers³⁷) e por isso devem ser levada em consideração numa análise de deformações lentas.

Para o propósito desta análise assume-se que cada elemento do concreto na seção transversal total é sujeita a uma retração uniforme, ε_{sh} , que se desenvolve gradualmente e cuja expressão analítica é dada no apêndice. As propriedades da seção estão baseadas na seção não fissurada. As tensões no concreto e na armadura são proporcionais as deformações.

Desta forma, as forças geradas na seção são dadas por

$$N_1 = -\varepsilon_{sh} A E \quad e \quad N_2 = -N_1 \quad (5.23)$$

(Obs. Eqs. 5.24 a 30)
estao vagas

5.6 - Cálculo dos esforços nas barras.

Os esforços nas barras são calculados pela seguinte expressão

$$\bar{X}_{bw} = \bar{K}_b \bar{U}_b + \bar{X}_{bn} + \bar{X}_{bp} + \bar{X}_{br} - \bar{X}_{bv} \quad (5.31)$$

onde

\bar{X}_{bw} são esforços finais nas barras

\bar{K}_b é a matriz de rigidez da barra

\bar{U}_b são os deslocamentos nodais

\bar{X}_{bn} são as forças de engastamento perfeito devido as cargas externas ao longo do comprimento das barras

\bar{X}_{bp} idem, devido a variação de temperatura

\bar{X}_{br} idem, devido a retração

\bar{X}_{bv} são as forças de origem viscoelásticas

Para estruturas de pórtico, quando as cargas externas estiverem aplicadas na forma distribuida ou concentradas ao longo das barras, não há a correspondência entre os pontos de aplicação das cargas e os deslocamentos nodais. Então recorre-se a substituição das cargas nas barras por um sistema de cargas equivalentes que produza a mesma resposta da estrutura que o conjunto de cargas originais e que possa ser definida em função

dos pontos nodais (Santos⁴⁸).

Este sistema de cargas equivalentes e que substituem as ações extremas atuando ao longo das barras são as ações nodais equivalentes, que nada mais são do que as forças (reações) de engastamento perfeito com sinal trocado. As ações nodais equivalentes são aplicadas no vetor de cargas externos por partições nodais para a solução do problema. Quando for calcular as forças nas barras deve-se somar \vec{X}_{bn} para ter o esforço final.

O efeito da retração e da temperatura, também será levado em consideração através de forças de engastamento perfeito da mesma maneira como foi feito com as cargas externas ao longo das barras e com as fórmulas apropriadas descritas na seção 5.4 e 5.5, respectivamente.

Quando se faz a análise viscoelástica calculam-se a carga viscoelástica em cada barra, \vec{X}_{bv} , e adiciona-se ela no vetor de cargas externo global da estrutura, calculando assim, após uma nova solução um outro conjunto de deslocamentos nodais, para cada tempo t de análise. Assim, ao calcular os esforços de extremo de barra deve-se descontar a carga viscoelástica, \vec{X}_{bv} , adicionada anteriormente (eq. 5.31).

Também poderia-se calcular os esforços devidos somente aos deslocamentos, para o qual, seria usado a seguinte expressão:

$$\vec{X}_b = \vec{K}_b \vec{U}_b \quad (5.32)$$

Nestas equações, todos os vetores estão em coordenadas locais, no entanto, um pórtico inclui barras com diferentes orientações relativas. Então, todas as matrizes de rigidez das barras e vetores, devem ser relacionadas ao sistema comum de eixos global de estrutura, antes de proceder a montagem do sistema total de equações.

Na fig. 5.7 tem-se as componentes de deslocamentos e esforços referidos à dois sistemas de eixos. O local x,y e o global X,Y . Pode-se rotar estas grandezas de um sistema para o outro através das seguintes expressões:

$$\underline{U}_b = \underline{R} \underline{U}_{bg} \qquad \underline{U}_{bg} = \underline{R}^T \underline{U}_b \qquad (5.33)$$

$$\underline{X}_b = \underline{R} \underline{X}_{bg} \qquad \underline{X}_{bg} = \underline{R}^T \underline{X}_b \qquad (5.34)$$

onde o superíndice "g" significa sistema de referência global e "T" significa matriz transposta.

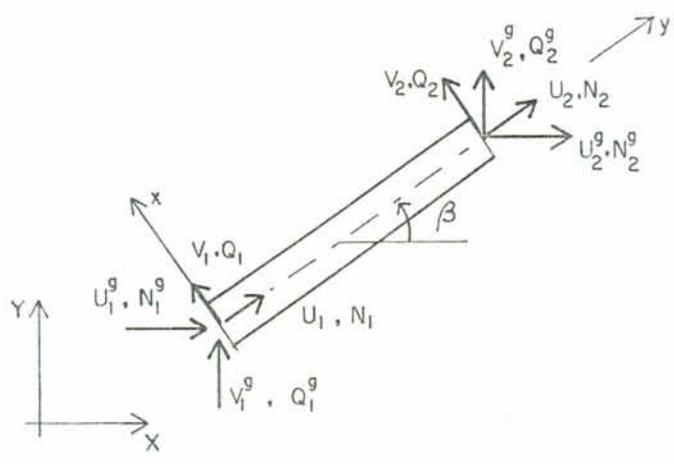


Figura 5.7 - Esforços e deslocamentos em coordenadas locais e globais.

A matriz de rotação, \underline{R} é dada por

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \text{sen } \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \text{sen } \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.34)$$

Note que \underline{R} é uma matriz ortogonal, tal que $\underline{R}^{-1} = \underline{R}^T$. \underline{R} é utilizada também, para calcular a matriz de rigidez de uma barra. Se levar em conta a 5.32 e 5.33 e fizer

$$\underline{K}_b \underline{R} \underline{U}_{bg} = \underline{R} \underline{X}_{bg} \qquad (5.35)$$

ou

$$\left[\underline{R}^T \underline{K}_b \underline{R} \right] \underline{U}_{bg} = \underline{K}_{bg} \underline{U}_{bg} = \underline{X}_{bg} \qquad (5.36)$$

onde

$$\tilde{K}_{bg} = \tilde{R}^T \tilde{K}_b \tilde{R} \quad (5.37)$$

desta maneira tem-se a matriz de rigidez da barra no sistema global. Feito isso, possui-se todas as equações para analisar a estrutura de pórtico plano homogêneo sob efeito viscoelástico, temperatura e retração dentro das hipóteses adotadas.

6 - MATRIZ DE RIGIDEZ MISTA.

6.1 - Introdução.

Nesta seção apresenta-se as hipóteses adotadas nesta dissertação para a formulação de um elemento de viga misto, o cálculo das constantes geométricas e finalmente a matriz de rigidez em forma explícita baseada na formulação do Método dos Elementos Finitos apresentada na seção 2.1.

6.2 - Hipóteses.

As hipóteses fundamentais da análise linear de estruturas mistas constituídas por peças prismáticas e que são adotadas neste trabalho são as seguintes:

a) - Movimentos são pequenos (translações e giros) bem como as deformações (alongamentos e distorções). Por este motivo todas as condições de equilíbrio e compatibilidade de deformações se colocam adotando como suporte a geometria prévia à deformação (teoria de primeira ordem).

b) - É válida a hipótese de Navier (as seções mantêm-se planas e normais a diretriz depois da deformação). A este efeito, desprezam-se os deslizamentos produzidos pelas tensões tangenciais, com o qual não há efeito direto do esforço cortante nos movimentos da peça. De fato, salvo para relações altura/vão muito elevadas, as deformações devidas as tensões tangenciais são nitidamente inferiores as produzidas pelas tensões normais longitudinais.

c) - O carregamento é feito no plano de simetria da barra.

d) - Admitindo, conforme a teoria técnica de vigas, que as tensões transversais ao eixo da peça são desprezíveis considera-se na flexão unicamente os efeitos das tensões normais

e) - As deformações instantâneas são elásticas e

lineares e portanto, governados pela lei de Hooke.

f) - O comportamento viscoelástico segue um dos modelos indicados na seção 2.1

g) - A seção transversal da peça e o seu módulo de elasticidade são constantes entre os pontos nodais.

h) - Numa peça submetida a um conjunto de esforços não há deslizamento entre a placa de concreto colocada sobre o perfil de aço.

6.3 - Constantes estáticas reduzidas para uma seção típica.

A seguir, indica-se como pode-se obter as constantes geométricas de uma seção mista de diferentes materiais, para um tratamento mais geral ver Calzon¹¹.

Considera-se uma peça reta com um plano de simetria. Adota-se um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z da forma indicada na figura 6.1 (este sistema só será usado nesta seção, adiante será invertido o sentido do eixo y). O plano xy é, portanto, o plano de simetria da peça, x é sua coordenada longitudinal e y mede a profundidade das diferentes fibras da seção. Seja $b(y)$ a lei de larguras destas últimas e $E(y)$ o módulo

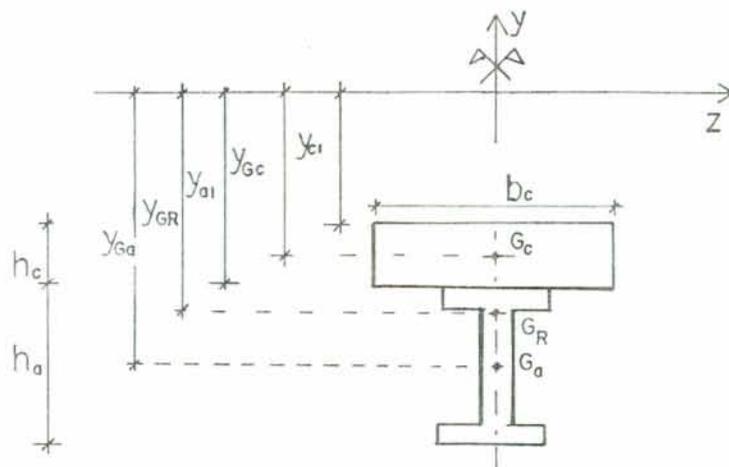


Figura 6.1 - Seção simétrica típica.

de elasticidade em cada ponto y da seção A. Definem-se as seguintes magnitudes:

$$n(y) = \frac{E_a}{E(y)} \quad (6.1)$$

$$b_R(y) = \frac{b(y)}{n(y)} \quad (6.2)$$

onde $n(y)$ é o coeficiente de equivalência para uma fibra y , E_a é o módulo de elasticidade do aço, $E_a = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $E(y)$ é o módulo de elasticidade do material para uma fibra y , $b(y)$ e $b_R(y)$ são a largura real e a largura reduzida da seção, respectivamente numa fibra y .

Denomina-se seção "reduzida" ou "ideal" a que se obtém substituindo a largura real $b(y)$ de cada fibra por sua largura reduzida $b_R(y)$ e supondo $E = E_a = \text{constante}$ em toda a seção.

Considerando somente dois tipos de materiais, de acordo com a seção típica anterior, isto é, uma placa ou laje de concreto sobre um perfil genérico de aço, obtém-se as constantes estáticas da seção reduzida de concreto da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} n_c &= E_a / E_c & e & & b_{CR} &= b_c / n_c \\ A_{CR} &= b_{CR} h_c = b_c h_c / n_c = A_c / n_c \\ y_{GC} &= y_{c1} + y'_{GC} & \text{onde} & & y'_{GC} &= h_c / 2 \\ I_{CR} &= b_{CR} h_c^3 / 12 = I_c / n_c \end{aligned} \quad (6.3)$$

Nestas equações define-se A_{CR} e I_{CR} como a área e momento de inércia da seção reduzida de concreto, respectivamente.

As constantes estáticas da seção do perfil de aço estrutural saem sem transformação e são $A_a =$ área de do perfil de aço, $y_{Ga} = y_{a1} + h_a / 2$, $h_a =$ altura e $I_a =$ momento de inércia do perfil de aço.

A superfície equivalente em aço da seção mista é $A_R = A_{CR} + A_S$. Ao calcular o momento estático, em relação ao eixo z da figura anterior pode-se determinar a localização do eixo neutro, desta maneira

Estes dois últimos valores, além de A_c , A_a , I_c e I_a , são utilizados no cálculo da matriz de rigidez. Utilizando o teorema de Steiner pode-se obter o momento de inércia da seção homogeneizada total

$$I_R = I_{CR} + I_a + A_{CR} y_c^2 + A_a y_a^2 \quad (6.7)$$

6.4 - Cálculo da matriz de rigidez.

Os deslocamentos para pontos no interior da barra, fora do eixo baricêntrico da seção mista, mas no plano de simetria são dados pela figura 6.3 e podem ser interpolados da seguinte maneira

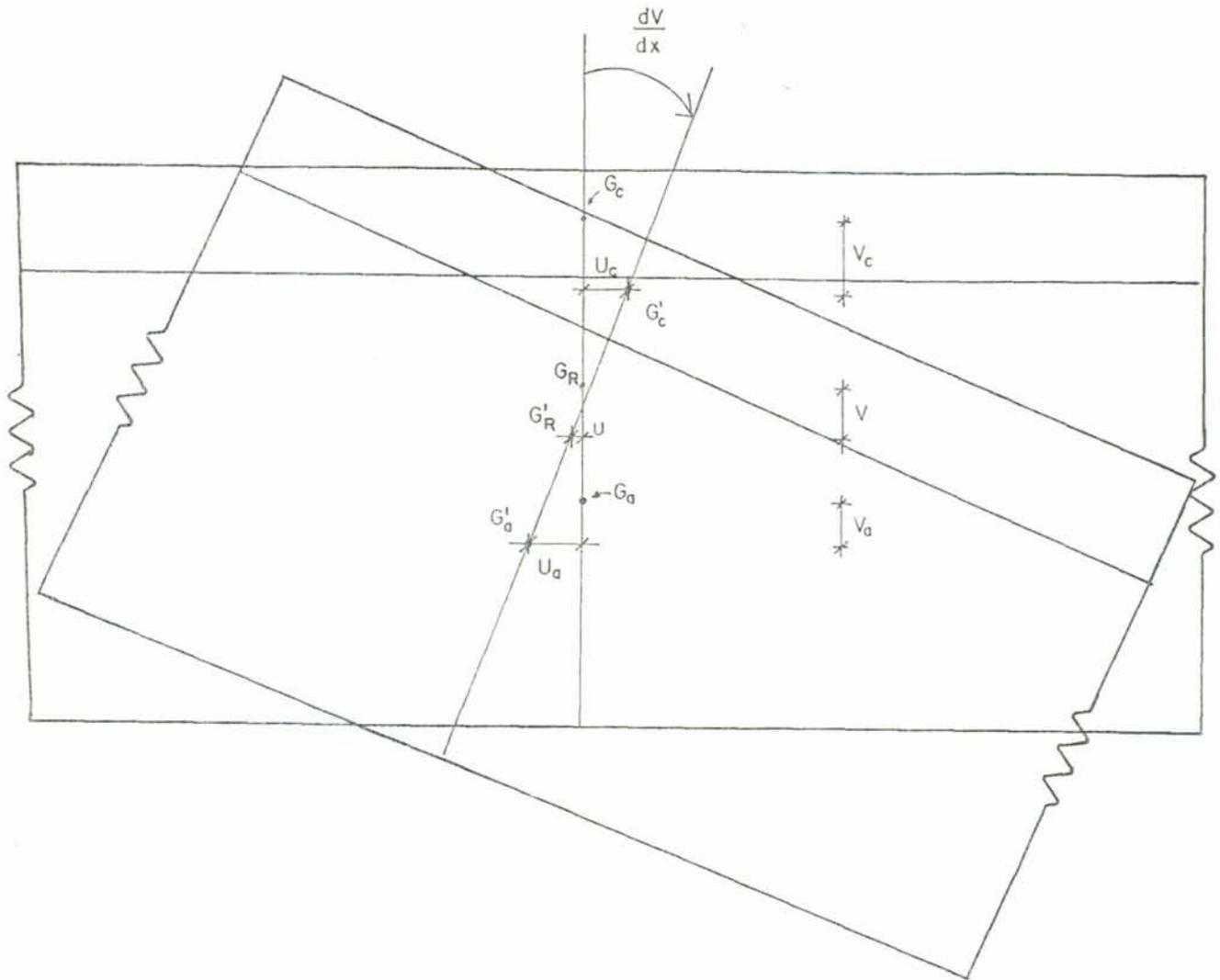


Figura 6.3 - Barra com deslocamento e giro.

a) para a seção superior, ou seja, a placa de concreto tem-se

$$\begin{bmatrix} u_c \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -y_c \frac{d}{dx} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

b) da mesma forma, para a seção inferior, ou seja o perfil de aço, é só trocar o subíndice c por a.

Os centros de gravidade G_c , G_a e G_R após os deslocamentos passam para G'_c , G'_a e G'_R , com referência a eles estão assinalados os deslocamentos ocorridos. O giro $\theta = dv/dx$ é o mesmo para todos os pontos e $v_c = v_a = v$, de acordo com as hipóteses anteriores e u_c e u_a são interpolados de acordo com a equação 6.8.

Prosseguindo, usa-se a mesma formulação do Método dos Elementos Finitos da seção 2.2.3 para calcular a matriz de rigidez dos elementos da barra mista.

Interpola-se os deslocamentos ao longo do elemento, U_e , através dos deslocamentos dos nós, $U^n + W^n$ (ver figura 2.14) localizados no eixo baricêntrico, como

$$u = \Psi U^n \quad e \quad v = \Phi W^n \quad (6.9)$$

As funções de interpolação Ψ e Φ dadas na equação 2.2.27 constituem a solução exata da flexo-compressão de vigas, quando os parâmetros nodais são baricêntricos da seção composta. Quando os parâmetros nodais baricêntricos são relatados, através de uma transformação consistente (eq. 6.8, por exemplo), com parâmetros localizados em um eixo excêntrico, a interpolação continua sendo exata e a matriz referidas a estes novos parâmetros, não introduz nenhum erro na formulação excêntrica.

Substituindo a 6.9 na 6.8 fica

$$U_c = N_c U_e \quad (6.10)$$

onde

$$U_c = \begin{bmatrix} u_c \\ v_c \end{bmatrix} \quad e \quad N_c = \begin{bmatrix} \Psi & -y_c \Phi' \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \quad U_e = \begin{bmatrix} U^n \\ W^n \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Utilizando as relações deformação-deslocamento, para

elemento de viga, a partir da 6.10, pode-se calcular

$$\underline{\varepsilon}_c = \begin{bmatrix} \partial u_c / \partial x \\ -\partial^2 v_c / \partial x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_c \\ \chi_c \end{bmatrix} = \underline{B}_c \underline{U}_e \quad (6.12)$$

Realizando as derivadas acima obtém-se

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_c \\ \chi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Psi}' & -y_c \underline{\Phi}'' \\ 0 & -\underline{\Phi}'' \end{bmatrix} \underline{U}_e$$

onde ε_c é a deformação axial baricêntrica e χ_c é a curvatura do eixo da seção da placa.

Substituindo os valores correspondentes das funções de interpolação da seção 2.2.3 em \underline{B}_c e realizando a integração da 2.2.12 repetida abaixo, e particularizada para pequenas deformações

$$\underline{K}_c = \int_L \underline{B}_c^T \underline{M} \underline{B}_c dx \quad (2.2.12) \text{ repetida}$$

obtém-se finalmente

$$\underline{K}_c = E_c \begin{bmatrix} \frac{A_c}{L} & -\frac{A_c}{L} & 0 & -\frac{y_c A_c}{L} & 0 & \frac{y_c A_c}{L} \\ -\frac{A_c}{L} & -\frac{A_c}{L} & 0 & \frac{y_c A_c}{L} & 0 & -\frac{y_c A_c}{L} \\ 0 & 0 & \frac{12 \bar{I}_c}{L^3} & \frac{6 \bar{I}_c}{L^2} & -\frac{12 \bar{I}_c}{L^3} & \frac{6 \bar{I}_c}{L^2} \\ -\frac{y_c A_c}{L} & \frac{y_c A_c}{L} & \frac{6 \bar{I}_c}{L^2} & \frac{4 \bar{I}_c}{L} & -\frac{6 \bar{I}_c}{L^2} & \frac{2 \bar{I}_c}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{12 \bar{I}_c}{L^3} & -\frac{6 \bar{I}_c}{L^2} & \frac{12 \bar{I}_c}{L^3} & \frac{6 \bar{I}_c}{L^2} \\ \frac{y_c A_c}{L} & -\frac{y_c A_c}{L} & \frac{6 \bar{I}_c}{L^2} & \frac{2 \bar{I}_c}{L} & -\frac{6 \bar{I}_c}{L^2} & \frac{4 \bar{I}_c}{L} \end{bmatrix}$$

equação (6.13)

onde $\bar{I}_c = I_c + y_c^2 A_c$

da mesma maneira, obtém-se a matriz de rigidez do aço, que é semelhante a anterior só diferindo nos subíndices c por a.

Com relação a matriz de rigidez 6.13 ela poderia ser reordenada de forma a ter as rigidezes associadas aos deslocamentos do nó inicial colocados primeiro e logo após as rigidezes associadas aos deslocamentos do nó final. Na apresentação acima as rigidezes associadas aos deslocamentos axiais são colocadas antes dos demais. A matriz é a mesma estando numa forma ou outra, mas no programa foi utilizada a primeira maneira de dispor os termos, embora no desenvolvimento da exposição foi conveniente a segunda maneira.

Durante a exposição foi conveniente a segunda maneira pois os deslocamentos axiais estão desacoplados dos deslocamentos transversais e giros (ver equação 2.2.26). No programa foi conveniente a primeira maneira por causa da impressão dos resultados dos esforços nas barras que se dá nó por nó.

6.5 - Verificações na matriz de rigidez mista.

A seguir tem-se verificações de alguns termos da matriz de rigidez encontrada.

Realizando a soma das duas matrizes \underline{K}_c e \underline{K}_a obtém-se a matriz de rigidez total da barra \underline{K}_T .

Analizando alguns dos termos vê-se que a soma que segue deve-se anular.

$$y_c \frac{E_c A_c}{L} - y_a \frac{E_a A_a}{L} = 0$$

como y_a é negativo, L é comum a ambos e considerando que $n_c = E_a/E_c$ fica-se com

$$y_c A_{CR} - y_a A_a = 0$$

como y_c e y_a foram obtidos desta maneira na equação 6.5 ve-se que a igualdade é verdadeira. Portanto, todos os termos da forma $y_i E_i A_i/L$ anulam-se ao efetuar-se $\underline{K}_c + \underline{K}_a$.

Tomando outro termo da matriz de rigidez tem-se

$$12 \frac{E_c \bar{I}_c}{L^3} + 12 \frac{E_a \bar{I}_a}{L^3} = 12 \frac{E_a \bar{I}_R}{L^3}$$

considerando que $\bar{I}_c = I_c + y_c^2 A_c$, $\bar{I}_a = I_a + y_a^2 A_a$, $n_c = E_a / E_c$ e fazendo as simplificações convenientes obtêm-se

$$I_{CR} + y_c^2 A_{CR} + I_a + y_a^2 A_a = I_R$$

Esta é, naturalmente, a expressão obtida na eq. 6.7.

6.6 - Excentricidade dos elementos em relação ao eixo das barras.

Esta seção trata do problema da excentricidade que os elementos mistos apresentam em relação ao eixo em cujas extremidades estão os pontos nodais da barra. Contém alguns comentários encontrados na bibliografia sobre a formulação utilizada nesta dissertação e um exemplo.

No trabalho de Gupta & Ma¹⁹ é discutido a natureza do erro introduzida quando a matriz de rigidez de um elemento de viga é transformado linearmente para levar em conta a excentricidade com respeito a uma placa ligada a ela.

O erro está associado ao fato de que quando se determina o deslocamento axial da viga, u_a , em função do deslocamento axial da placa, u_c , e do giro da seção, θ , cria-se uma incompatibilidade dos deslocamentos.

Isto acontece porque u_c é interpolado por uma função linear e θ por um polinômio quadrático e ao ser calculado

$$u_a = u_c - z \theta$$

onde z é a distância entre os centros de gravidade da seção da placa e da viga, u_a torna-se também quadrático, isto é, assume-se na formulação da rigidez da placa que o deslocamento axial ao longo da viga é também quadrático, o que não é verdade, introduzindo assim a incompatibilidade mencionada acima. A solução apresentada na referência acima é aumentar o número de elementos, o que minimiza o erro.

Em outro trabalho, Balmer², faz alguns comentários sobre os modos de deformação axial e de flexão, indicando que no modo de deformação axial o erro não ocorre.

Finalmente, na última referência encontrada (Miller³²) existe a proposta de colocar um grau de liberdade adicional e interpolar o deslocamento axial com um polinômio de segundo grau. Isto aumenta a complexidade da matriz de rigidez.

Na formulação apresentada nesta dissertação, em vez de referir os deslocamentos da viga em relação aos da placa, os deslocamentos da viga e da placa são referidos a um eixo comum de referência obtido através da homogeneização da seção, ficando assim, assegurada a possibilidade de adição do momento central de inércia como assinalado anteriormente por Balmer².

Para ilustração das formulações citadas anteriormente utiliza-se o mesmo exemplo de Gupta & Ma¹⁹, aplicando os diversos métodos de cálculo. Por simplicidade a viga é homogênea, engastada numa extremidade e livre na outra e com as características indicadas na figura 6.4.

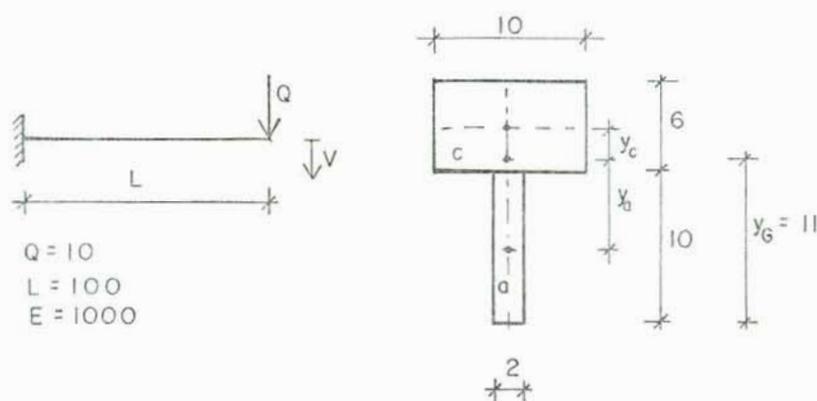


Figura 6.4 - Exemplo sobre excentricidade.

Somente é feito o cálculo do deslocamento transversal da extremidade livre da viga sobre a ação de uma carga transversal, Q , aplicada na mesma extremidade.

Por Gupta & Ma¹⁹ tem-se

$$v = \frac{QL^3}{3EI^*} (1+E)$$

onde

$$E = \frac{A_c A_a y_T^2}{4 (A_c + A_a) (I_c + I_a)}$$

e

$$I^* = I_c + I_a + \frac{A_c A_a y_T^2}{A_c + A_a}$$

onde A é a área, I o momento de inércia, o índice "c" é da placa e "a" da viga e E é o termo de erro. Para os dados do problema

$$C = 0,692 \quad I^* = 1306,67 \quad v = 4,316$$

Com a formulação de Miller³² o mesmo deslocamento é dado pela seguinte expressão

$$v = \frac{Q L^3}{3EI^*}$$

onde todos os dados já foram definidos anteriormente. Então obtém-se $v = 2,551$. Este é o valor exato do deslocamento.

Na formulação deste trabalho, ao contrário de Gupta & Ma¹⁹, a interpolação exata é definida nos eixos baricêntricos, e a transformação para o eixo excêntrico, segundo o processo indicado, não introduz nenhum erro, como será demonstrado a seguir.

Para a formulação deste trabalho, é preciso calcular o centro de gravidade da seção total.

$$y_g = 11, \quad y_c = 2 \quad \text{e} \quad y_a = -6$$

Além disso, observando as matrizes de rigides para elementos mistos da seção 6.4 obtém-se

$$v = \frac{Q L^3}{3E\bar{I}}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_c + \bar{I}_a = I_c + y_c^2 A_c + I_a + y_a^2 A_a$$

Substituindo os valores dados obtém-se $\bar{I} = 1306,67$

Logo, $\bar{I} = I^*$ e o deslocamento transversal será o mesmo. Observando as equações para \bar{I} e I^* a seguinte igualdade deve se verificar

$$\frac{A_c A_a y_T^2}{A_c + A_a} = y_c^2 A_c + y_a^2 A_a \quad (6.6.1)$$

lembrando que

$$y_T = y_C - y_a \quad (6.6.2)$$

$$y_C A_C = -y_a A_a \quad (6.6.3)$$

da 6.6.2

$$y_C = y_T + y_a \quad (6.6.4)$$

Substituindo a 6.6.4 na 6.6.3 tira

$$y_a = \frac{-y_T A_C}{A_a + A_C} \quad (6.6.5)$$

Da mesma forma com y_C , obtém-se

$$y_C = \frac{y_T A_a}{A_C + A_a} \quad (6.6.6)$$

Substituindo, finalmente, a 6.6.5 e 6.6.6 na direita da 6.6.1 encontra-se a igualdade presente na 6.6.1 e que demonstra que $\bar{I} = I^*$, obtendo-se, com esta formulação, o valor exato.

Este simples processo, baseado na solução clássica da teoria de Bernolli-Navier dispensa em absoluto todas outras sofisticacões, como a introdução de um parâmetro interno, tal como Miller³², e corrobora que a teoria de vigas não introduz nenhum erro intrínseco na formulação excêntrica. Para um aprofundamento maior sobre o tema veja Bignon⁷.

onde

$$C_2 = (1 - e^{-\Delta t/T})$$

Δt é o incremento de tempo

T é o tempo de retardação

$$\underline{X}_u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} N_{1S} - N_{2S} \\ -(N_{1S} - N_{2S}) \\ Q_{1S} - Q_{2S} \\ M_{1S} - Q_{2S} \quad L-M_{2S} \\ -(Q_{1S} - Q_{2S}) \\ -(M_{1S} - Q_{1S} \quad L-M_{2S}) \end{bmatrix} \quad (5.16) \text{ repetida}$$

As forças viscoelásticas se originam na seção de concreto, portanto, deve-se calcular estas forças a partir dos esforços correspondentes somente à esta seção.

Os esforços, em cada barra, que entram no cálculo de \underline{X}_u são calculados com a 5.17 modificada para considerar só a seção de concreto e que fica

$$\underline{X}_{cs} = \underline{K}_c \underline{U}_b + \underline{X}_{cp} + \underline{X}_{cr} - \underline{X}_{cv} \quad (7.1)$$

Onde o subíndice "s" significa esforços devido aos deslocamentos descontando a parte viscoelástica, retração e temperatura, "c" refere-se a seção de concreto e "b" ao conjunto barra mais aço.

\underline{K}_c é a parte correspondente ao concreto da matriz de rigidez da seção homogenizada referida ao centro de gravidade do conjunto.

\underline{U}_b são os deslocamentos nodais do centro de gravidade da seção homogenizada.

\underline{X}_{cp} e \underline{X}_{cr} são as forças devido a temperatura e retração. No presente cálculo não são levadas em consideração, portanto, são igual a zero.

\underline{X}_{cv} são as forças viscoelásticas do passo (tempo) anterior correspondentes a seção de concreto, referidas, como todo o resto, ao centro de gravidade da seção homogenizada.

7 - CÁLCULO DA CARGA VISCOELÁSTICA PARA BARRAS MISTAS E NOVA LOCALIZAÇÃO DO EIXO NEUTRO.

Esta seção utilizará a formulação empregada na seção 5.3 que trata do cálculo de cargas viscoelásticas em barras homogêneas e também as equações deduzidas para o cálculo da matriz de rigidez mista da seção 6.4.

Calcula-se a carga viscoelástica em seções mistas para alguns tipos particulares de deslocamentos que ocorrem num elemento de viga e expõe-se o procedimento empregado para a mudança da linha neutra. Os efeitos da temperatura e retração não são levados em consideração.

7.1 - Fórmulas empregadas.

Considere a mesma seção transversal do capítulo 6 desenhada na figura 7.1.

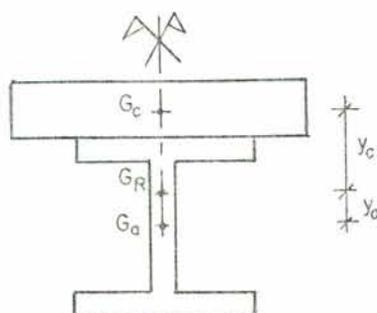


Figura 7.1 - Seção típica.

Para calcular a carga viscoelástica, X_v na barra necessita-se dos esforços que atuam somente na seção do concreto, que é a única que sofre deformação lenta.

Para uma barra homogênea a carga viscoelástica em $t = \Delta t$ ($= 1$ por exemplo) é dada pela equação 5.15 a seguir

$$X_v = C_2 X_u \quad (5.15)$$

repetida

As forças de engastamento perfeito devido as cargas externas ao longo do comprimento das barras não entram no cálculo dos esforços na seção de concreto ou de aço, mas somente depois, quando se somar a contribuição de ambas as partes do conjunto, porque não se sabe qual a quantia das forças de engastamento perfeito cabem para cada um dos elementos que compõe a barra.

No decorrer da análise, ao longo do tempo, a rigidez da barra vai variar devido a mudança da localização da linha neutra, decorrentes dos efeitos viscoelásticos sobre o concreto. Isto pode ser visto como uma diminuição do módulo de elasticidade do concreto que tende a baixar a linha neutra diminuindo a capacidade resistente da seção.

A modificação da linha neutra certamente vai depender da carga viscoelástica $X_{cv} = X_v$. A seguir, estuda-se um caso particular da mudança da linha neutra.

7.2 - Nova localização do eixo neutro para vigas com dois giros.

Parte-se do exemplo de uma viga bi-apoiada com carga q aplicada numa metade perto do apoio, de acordo com a figura 7.2.

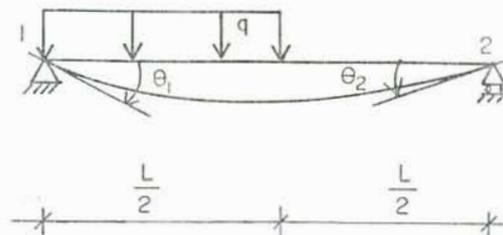


Figura 7.2 - Viga bi-apoiada com dois giros.

Sobre os efeitos do carregamento a viga sofre os deslocamentos indicados, θ_1^o e θ_2^o . Os esforços correspondentes ao concreto que surgem nas extremidades são dados pela 7.1. No tempo $t = 1$, $X_{cv} = X_v = 0$, então tem-se

$$X_{cs}^o = K_c^o U_b^o \tag{7.2}$$

onde

X_{cs}^o são os esforços devidos aos deslocamentos na seção de concreto descontando a parte viscoelástica, retração e temperatura. Estes últimos dois são consideradas nulos nesta análise.

$$\underline{U}_b^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_1^o & 0 & 0 & \theta_2^o \end{bmatrix}$$

onde o subíndice indica o nó ou o tipo de solicitação e o superíndice indica o tempo em que se está calculando.

Logo, utilizando uma parte da matriz de rigidez da barra (referente ao concreto) fornecida pela 6.13, com os coeficientes rearranjados, obtém-se pela 7.2

$$\underline{X}_{CS}^o = \begin{bmatrix} -K_c^o \theta_1^o + K_c^o \theta_2^o \\ * \\ * \\ K_c^o \theta_1^o + K_c^o \theta_2^o \\ * \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_c^o (\theta_1^o - \theta_2^o) \\ * \\ * \\ K_c^o (\theta_1^o - \theta_2^o) \\ * \\ * \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

onde * indica valores não calculados e que não influenciam no cálculo para a mudança da linha neutra e $K_c^o = y_c^o E_c A_c / L$.

E, A, L e y^o são o módulo de elasticidade, a área, o comprimento da barra e a distância ao centro de gravidade do concreto.

Os esforços da 7.3 só são calculados com a finalidade de obter a carga viscoelástica dada pela 5.15. Então, obtém-se

$$\underline{X}_{CV}^1 = C_2 \begin{bmatrix} -K_c^o (\theta_1^o - \theta_2^o) \\ * \\ * \\ K_c^o (\theta_1^o - \theta_2^o) \\ * \\ * \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

O vetor de cargas \underline{X}_{CV}^1 será adicionado ao vetor de cargas total da estrutura para obter um novo conjunto de deslocamento \underline{U}_b^1 .

Feito isso, ao calcular a força resultante na barra utiliza-se a equação abaixo

$$\underline{X}_S^1 = K_b^o \underline{U}_b^1 - \underline{X}_V^1 \quad (7.5)$$

Na equação anterior, falta a contribuição das forças de engastamento perfeito devido as cargas externas, que entrarão posteriormente.

Então, aplicando esta equação, obtém-se

$$\vec{X}_S^1 = \begin{bmatrix} N_{1S}^1 \\ Q_{1S}^1 \\ M_{1S}^1 \\ N_{2S}^1 \\ Q_{2S}^1 \\ M_{2S}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ * \\ 0 \\ * \\ * \end{bmatrix} - C_2 \begin{bmatrix} -K_C^0 (\theta_1^0 - \theta_2^0) \\ * \\ * \\ K_C^0 (\theta_1^0 - \theta_2^0) \\ * \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 K_C^0 (\theta_1^0 - \theta_2^0) \\ * \\ * \\ -C_2 K_C^0 (\theta_1^0 - \theta_2^0) \\ * \\ * \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Uma maneira de modificar a linha neutra é anular o termo $N_{1S}^1 = C_2 K_C^0 (\theta_1^0 - \theta_2^0)$, que não será afetado pelas forças de engastamento perfeito. A única forma de anulá-lo é mudar o termo $K_b^0 U_b^1$ na 7.5 que é igual a

$$(K_c^0 + K_a^0) U_b^1 \quad (7.7)$$

Tomando o termo do esforço axial da 7.7 e igualando-o a força normal viscoelástica N_{1v}^1 da 7.4 tem-se

$$(-y_c^0 \bar{K}_c - y_a^0 \bar{K}_a) \theta_1^1 + (y_c^0 \bar{K}_c + y_a^0 \bar{K}_a) \theta_2^1 = N_{1v}^1 \quad (7.8)$$

ou

$$y_c^0 \bar{K}_c + y_a^0 \bar{K}_a = \frac{N_{1v}^1}{\theta_2^1 - \theta_1^1} \quad (7.9)$$

onde $\bar{K}_c = E_c A_c / L$ e $\bar{K}_a = E_a A_a / L$,

Reordenando a anterior e considerando que

$$y_T = y_c^0 - y_a^0 \quad (7.10)$$

pode-se escrever

$$y_a^1 = \frac{C^1 - y_T \bar{K}_c}{\bar{K}_c + \bar{K}_a} \quad (7.11)$$

onde

$$C^1 = \frac{N_{1v}^1}{\theta_2^1 - \theta_1^1} \quad (7.12)$$

e

$$y_c^1 = y_T + y_a^1 \quad (7.13)$$

para o presente caso, em que tem-se $N_{1v}^1 = -C_2 K_C^0 (\theta_1^0 - \theta_2^0)$

$$C = \frac{-C_2 K_C^0 (\theta_1^0 - \theta_2^0)}{\theta_2^1 - \theta_1^1} \quad (7.14)$$

A mudança da linha neutra, baseada na 7.8, não poderá ser realizada pois não tem-se \underline{U}_b^1 , porque não foi montada, ainda, a matriz de rigidez da estrutura no tempo um. Portanto, para mudar a linha neutra, utiliza-se \underline{U}_b^0 (isto é, θ_1^0 e θ_2^0) em vez de \underline{U}_b^1 na 7.14 como aproximação, podendo, assim, montar a matriz de rigidez e com o vetor de cargas incrementado com \underline{X}_v^1 , obter \underline{U}_b^1 .

Ao utilizar \underline{U}_b^1 para calcular a força na barra pela 7.1 a força axial N_{1v}^1 não será totalmente anulada, pois a mudança da linha neutra foi feita utilizando \underline{U}_b^0 .

Então, deve-se modificar a linha neutra novamente pelas eqs. 7.11 à 7.13 utilizando \underline{U}_b^1 . Desta forma, ao ser calculada novamente a nova matriz de rigidez e o novo conjunto de deslocamentos, $\bar{\underline{U}}_b^1$, estes não serão muito diferentes dos encontrados anteriormente (ver diagrama de blocos da fig. 8.1, adiante). Se o cálculo é executado outra vez obtém-se mais precisão, dentro de cada passo de tempo.

Como se vê, trata-se de um processo iterativo. Observou-se, também, que com o segundo cálculo diminui sensivelmente a força axial resultante da 7.6.

A seguir estão algumas verificações efetuadas com a formulação apresentada anteriormente. Obs.: MLN é Mudança da Linha Neutra e Padrão é a MLN para a viga biapoiada descrita

anteriormente.

a)- A MLN é a igual ao padrão para o caso da viga bi-apoiada com carregamento distribuído uniforme ao longo de todo o comprimento do vão.

b)- A MLN é independente do comprimento do vão.

c)- A MLN é independente do valor da carga distribuída bem como do carregamento externo.

d)- Se os módulos de elasticidade mudarem na mesma proporção, a MLN ocorrerá da mesma forma que o padrão.

e)- A MLN é igual ao padrão para uma viga engastada-apoiada sujeita a carregamento uniforme.

f)- A MLN é igual ao padrão para uma viga engastada-livre com restrição na direção longitudinal.

8 - PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA A ANÁLISE DE PÓRTICO PLANO VISCOELÁSTICO COM VIGAS MISTAS.

Neste capítulo será explicado qual o procedimento adotado para desenvolver o programa sobre pórtico.

Na seção 8.1 informa-se de onde foi extraído o programa que serviu de base para o trabalho proposto e o equipamento utilizado. Na seção 8.2 as equações empregadas são retiradas dos capítulos anteriores e resumidas. Na seção 8.3 tem-se os diagramas de blocos, explica-se como o programa executa os cálculos e na seção 8.4 diz-se como foi organizada a entrada de dados e, finalmente, um exemplo simples fazendo a análise viscoelástica de uma viga biapoiada.

8.1 - Programa base.

O programa sobre pórtico desta dissertação está baseado num programa para estruturas elásticas de pórtico plano que pode ser encontrado na referência Brebbia e Ferrante¹⁰ e foi traduzido para a linguagem Basic e implementado num microcomputador compatível com a linha IBM-PC.

Utilizando os mesmos princípios de organização da referência, acima o programa foi subdividido em sub rotinas que realizam tarefas específicas e podem ser utilizadas diversas vezes. Essas subrotinas são comandadas por um programa principal que coordena e adapta o fluxo de cálculo de acordo com a análise desejada.

8.2 - Formulação empregada.

Após a entrada de dados o programa procede ao cálculo e montagem da matriz de rigidez dos elementos na matriz de rigidez global pelos métodos convencionais. (Ferrante e Brebbia¹⁰).

A matriz de rigidez para elementos mistos é dada na seção 6.4 e está repetida a seguir:

$$\mathbf{K}_e = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & \frac{-y A}{L} & \frac{-A}{L} & 0 & \frac{y A}{L} \\ & \frac{12 \bar{I}}{L^3} & \frac{6 \bar{I}}{L^2} & 0 & \frac{12 \bar{I}}{L^3} & \frac{6 \bar{I}}{L^2} \\ & & \frac{4 \bar{I}}{L} & \frac{y A}{L} & \frac{-6 \bar{I}}{L^2} & \frac{2 \bar{I}}{L} \\ & & & \frac{A}{L} & 0 & \frac{-y A}{L} \\ \text{Simétrica} & & & & \frac{12 \bar{I}}{L^3} & \frac{-6 \bar{I}}{L^2} \\ & & & & & \frac{4 \bar{I}}{L} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

onde

$$\bar{I} = I + Ay^2$$

I = momento de inércia do elemento.

A = seção transversal do elemento.

y = distância entre o centro de gravidade do elemento e o centro de gravidade da seção reduzida.

L = comprimento do elemento.

Se o tipo de mecanismo for o do CEB (ver item 8.1.4)

$$E = E_{c28} / (\beta_i + \beta_a)$$

onde

E_{c28} = módulo de elasticidade aos 28 dias.

β_i e β_a são constantes do CEB que dependem da idade de aplicação da carga e são dados no apêndice A.

Caso o modelo reológico for elástico ou standard E será o módulo de elasticidade dado na entrada de dados.

Feito isso calcula-se K_{θ} do outro elemento da barra, se houver, e soma-se ambos, após, esta soma é rotada para o sistema de eixos global da estrutura e montada na matriz de rigidez global.

Terminada a montagem das rigidezas de todas as barras passa-se para o cálculo das forças de engastamento perfeito que atuam sobre a estrutura.

As forças de engastamento perfeito devido a temperatura são calculadas pelas fórmulas da seção 5.4 para cada elemento das barras e são dadas pelas fórmulas seguintes:

$$\begin{aligned} N_1 &= E A \alpha \Delta T & N_2 &= - N_1 \\ M_1 &= \frac{E I \alpha (T_i - T_s)}{h} & M_2 &= - M_1 \end{aligned} \quad (8.2)$$

onde

N_1 e N_2 são os esforços axiais no nó 1 e 2.

M_1 e M_2 são os momentos fletores no nó 1 e 2.

α = coeficiente de dilatação térmica (1.10^{-5} para o concreto e aço)

h = altura do elemento.

ΔT = variação de temperatura uniforme.

T_i e T_s = temperatura na parte inferior e superior do elemento.

E, A e I foram dados antes.

As forças de engastamento perfeito devido a retração são calculadas pelas fórmulas da seção 5.6 para cada elemento das barras e são dadas a seguir:

$$\begin{aligned} N_1 &= A E \varepsilon_{sh} & N_2 &= - N_1 \\ M_1 &= - N_1 y & M_2 &= - M_1 \end{aligned} \quad (8.3)$$

onde ε_{sh} é dado pelas fórmulas do CEB dadas no apêndice A, y é a distância entre o centro de gravidade do elemento e o centro de gravidade da seção homogeneizada e as demais notações foram dadas anteriormente.

Depois de calcular as forças de engastamento perfeito devido as cargas externas (ver. ref. Santos), temperatura e retração, coloca-se estas forças com sinal trocado no vetor de

cargas externas global da estrutura.

Após isso, é feito a introdução das condições de contorno e solução do sistema de equações.

As forças nas barras são calculadas de acordo com a seção 5.6. feito um looping sobre o número total de barras da estrutura e utiliza-se a seguinte formulação:

$$\vec{X}_{wb} = K_b U_b + \vec{X}_{nb} + \vec{X}_{pb} + \vec{X}_{rb} - \vec{X}_{vb} \quad (8.4)$$

onde tudo está em coordenadas locais e

K_b é a matriz de rigidez da barra (soma dos dois elementos que compõe a barra.

U_b são os deslocamentos nodais da barra.

\vec{X}_{nb} são as forças de engastamento perfeito devido ao carregamento externo.

\vec{X}_{pb} são as f.e.p. devido a temperatura de ambos os elementos que compõe a barra.

\vec{X}_{rb} idem retração.

\vec{X}_{vb} são as forças viscoelásticas de ambos os elementos que compõe a barra.

\vec{X}_{wb} são os esforços finais nas barras.

Também é feito o cálculo dos esforços em cada elemento da barra para posterior uso no cálculo da carga viscoelástica. A expressão é a mesma anterior só que as grandezas se referem a um elemento em particular e não entram as f.e.p. devido as cargas externas.

Como se verá a seguir no diagrama de blocos no começo de cada nova análise é feito o cálculo da carga viscoelástica pela formulação dada na seção 5.3.

Após é feito um looping sobre o número total de barras e de elementos em cada barra.

A seguir estão as equações utilizadas.

$$\vec{X}_v(t+\Delta t) = \vec{X}_d(t+\Delta t) + \vec{X}_f(t+\Delta t) \quad (8.5)$$

$$\underline{X}_d(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^n (\underline{X}_{di}(t) C_{1i} + \underline{X}_u(t) C_{2i}) \quad (8.6)$$

onde

$$C_{1i} = e^{-\Delta t E_{1i} / \eta_i}$$

$$C_{2i} = (1 - C_{1i}) E_D / E_{1i}$$

e

$$\underline{X}_f(t+\Delta t) = \underline{X}_f(t) + \underline{X}_u(t) C_f \quad (8.7)$$

As notações não indicadas estão nesta seção, na seção 2.1.6 ou nas notações utilizadas no início da dissertação.

Nestas expressões E_D assume os seguintes valores:

- Para o modelo standard $E_D = E$ e X_f é nulo. (8.8)
- Para o modelo do CEB $E_D = 1 / (\beta_i + B_a)$

Também, no diagrama de blocos a seguir, indica-se como é feita iterativamente a mudança da linha neutra e está de acordo com a formulação do capítulo 7.

É feito um looping sobre o número total de barras e calcula-se:

$$y_a^1 = \frac{C^1 - y_r (A_c E_c / L)}{\frac{A_c E_c}{L} + \frac{A_a E_a}{L}} \quad (8.9)$$

onde C^1 é o maior valor entre

$$A = N_{1v}^1 / (\theta_2^1 - \theta_1^1) \quad \text{e} \quad B = N_{2v}^1 / (\theta_1^1 - \theta_2^1) \quad (8.10)$$

Esta é a formulação usada no programa PORTICO.BAS.

8.3 - Diagrama de blocos.

Na fig. 8.1 tem-se o diagrama de blocos para o programa de pórtico. A entrada de dados é descrita na seção 8.4. É feita uma primeira análise elástica e após é feito um teste se já foi atingido o tempo máximo. Se positivo, o programa termina e, se negativo, é feita a análise viscoelástica. No caso de vigas mistas a linha neutra deve ser corrigida para eliminar a força normal

parasita. É um processo iterativo. O erro admissível pode ser fixado ou escolher o número de iterações. No programa o número de iterações foi fixado em duas vezes obtendo-se bons resultados.

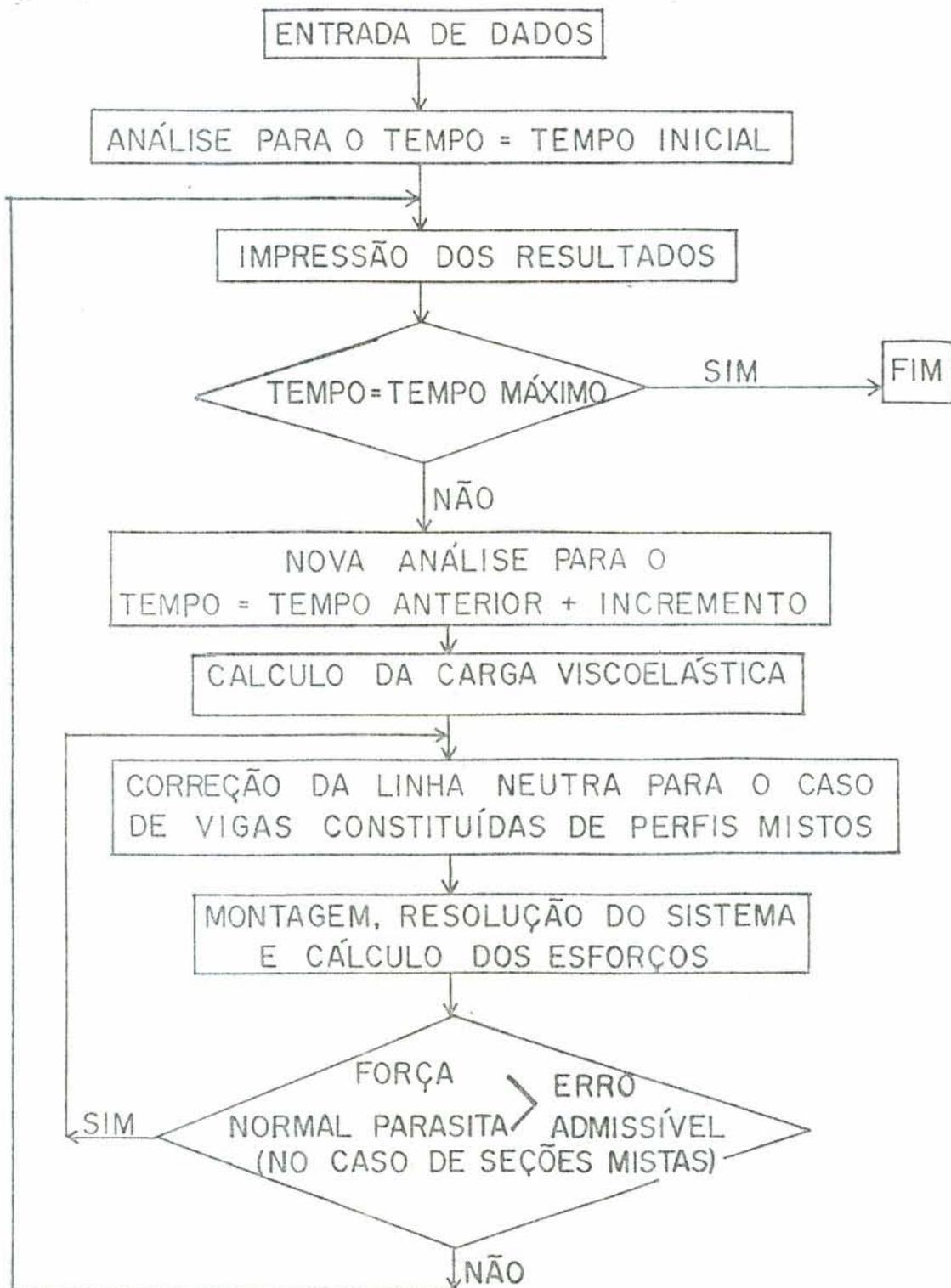


Figura 8.1 - Diagrama de blocos para o programa de pórtico.

8.4 - Uso do programa

8.4.1 - Entrada de dados

A seguir descreve-se os dados necessarios para usar o programa de nome PORTICO.BAS. Ao iniciar o programa os dados serão fornecidos interativamente, são agrupados em conjuntos que são gravados num arquivo randomico em disco e podem ser corrigidos para acertar ou modificar um exemplo. A estrutura de entrada de dados é a mesma que o programa de treliça descrito no capítulo 3. A seguir só serão indicadas as modificações feitas em relação ao citado capítulo. Os dados são pedidos pelo programa e devem ser fornecidos na seguinte ordem:

8.4.1.1 - Saída no video, impressora ou arquivo? (V/I/A)

8.4.1.2 - Nome do arquivo ?

8.4.1.3 - Os dados ja foram gravados ? (S/N)

Estes três itens são identicos aos do capítulo 3.

A continuação começa os conjuntos de dados.

8.4.1.4 - Tipo de análise.

- Considerar retração (S/N) ?

Se responder S ele pedirá os dados necessários para fazer a análise dos efeitos de retração em outro conjunto de dados apropriado caso contrário seguirá adiante.

- Variação de temperatura (S/N) ?

Idem anterior

- Seção transversal da barra:

1 - Mista (laje + perfil de aço)

2 - Homogênea.

Escolha o tipo de seção (1/2):

Se a estrutura tiver algum elemento misto deve-se escolher a seção 1 e se for só barras de um só material, isto é, um só elemento no interior de cada barra, escolher a seção 2.

- Tipo de deslocamento de apoio (Se houver).

S - Subito (ou ausente).

P - Progressivo.

Escolha o tipo (P/S):

Esta opção foi colocada para permitir ter o deslocamento de apoio progressivamente ao longo do tempo de acordo com uma lei dada por Ghali & Favre¹⁸ para argilas; em caso positivo os demais dados necessários para fazer esta análise serão solicitados adiante. Caso não haja deslocamento de apoio na estrutura ou se deseje dar ele subitamente escolha o tipo S.

Obs. Após cada entrada de um conjunto de dados aparece a mensagem "Dados corretos ? (S/N) ". Se responder S ou RETURN o programa seguirá em frente e se a resposta for N a entrada deste conjunto de dados será feita novamente.

8.4.1.5 - Dados internos.

Dados internos:

- Número de nos.
- Número de barras.
- Número de nos de contorno. (apoios)
- Número de nos carregados.
- Número de cargas concentradas na estrutura.
- Número de cargas distribuídas na estrutura.

Após estes dados o programa faz o dimensionamento de todos os vetores e matrizes utilizados no programa menos a matriz de rigidez que ainda precisa da semi largura de banda.

8.4.1.6 - Coordenadas.

8.4.1.7 - Conetividades.

Idem capítulo 3.

8.4.1.8 - Geometria.

A seguir é feito um looping sobre todas as barras da estrutura e é perguntado o seguinte:

- Se no tipo de análise foi escolhido seções de elementos mistos é perguntado quantos elementos compõe a barra (1 ou 2) e no caso de barras homogêneas assume-se que o número de elementos que compõe a barra é 1.

A seguir é feito um looping sobre o número de elementos que compõe a barra e deve-se fornecer:

- Area
- Inércia

- No caso de ser análise com elementos mistos e a presente barra ter 2 elementos é perguntado a distância entre o centro de gravidade do elemento e o centro de gravidade da seção homogeneizada. Este cálculo deve ser feito a parte através dos métodos convencionais da geometria das massas. Ver seção 6.3.

- Altura do elemento ou da barra.

Fim do looping sobre os elementos e as barras.

8.4.1.9 - Tipo de mecanismo.

Neste conjunto de dados define-se que lei constitutiva será utilizada para representar as propriedades mecânicas das barras.

Tipo de material:

- 1 - Modelo CEB
- 2 - Modelo standard
- 3 - Materiais elásticos

Tipo escolhido (1/2/3) ?

Para o tipo "1" o modelo de envelhecimento do material será o adotado pelas fórmulas do CEB e os demais dados necessários serão pedidos adiante.

Se for o tipo "2" o material seguirá o modelo standard descrito na seção 2.1.4, fig. 2.1 e o programa ainda neste conjunto de dados pedirá o número de mecanismos usados para todos os elementos de todas as barras.

Se for o tipo "3" os materiais dos elementos serão somente elásticos e não sofrerão envelhecimento ou efeitos da viscoelasticidade.

8.4.1.10 - Material que segue o modelo do CEB.

No caso de no item anterior ter escolhido o tipo "1" ou "3" será neste conjunto de dados que se dará a entrada das propriedades mecânicas.

É feito um looping sobre o número total de barras da estrutura e sobre o número total de elementos da barra em

particular.

O programa pede pelo módulo de elasticidade aos 28 dias que como foi convencionado deve-se entrar em Newton por centímetros quadrados. Se necessário ver conversão de unidades utilizadas no início da dissertação.

Também para o tipo "3" ele pede o módulo de elasticidade aos 28 dias apesar de não importar em que idade ele é dado pois não sofrerá modificações.

Se não for o tipo "3" ele pedirá:

Este elemento será viscoelástico? (S/N)

Esta pergunta foi incluída para permitir colocar elementos elásticos junto com elementos viscoelásticos.

8.4.1.11 - Material que segue o modelo standard.

No caso de no item 8.4.1.9 ter escolhido o tipo "2" será neste conjunto de dados que se dará a entrada das propriedades mecânicas.

É feito um looping sobre o número total de barras da estrutura e sobre o número total de elementos da barra em particular.

O programa pede pelo módulo de elasticidade que como foi convencionado deve-se entrar em Newton por centímetros quadrados. Se necessário ver conversão de unidades utilizadas no início da dissertação. A seguir vem:

Este elemento será viscoelástico? (S/N)

Esta pergunta foi incluída para permitir colocar elementos elásticos junto com elementos viscoelásticos.

Se a resposta for "N" ele passará para o próximo elemento ou próxima barra e se for "S" ele fará um looping sobre o número de mecanismos que foi fixado no item 8.4.1.9 que é o mesmo para todas os elementos da estrutura e pedirá:

- Constante da mola:
- Constante do amortecedor:

Fim do looping dos mecanismos, elementos e barras.

8.4.1.12 - Tempos necessários para a análise.

Se não for análise elástica ou levar em conta os efeitos de retração e temperatura o programa pedirá:

Desenvolvimento do tempo:

- 1 - Arbitrado tempo e incremento fixo.
- 2 - Arbitrado passo do polinômio interpolador até 10000 dias.

Faça a escolha (1/2) :

Se for "1" o programa pedirá:

- Tempo máximo:
- Incremento de tempo:

Se for "2" o programa pedirá:

- Passo do polinômio interpolador (0 a 1)
- Número de passo será (10/Passo) :

No caso "2" foi adotado um polinômio que toma para a variação de 1 a 10 respectivamente, os valores 3, 7, 14, 28, 60, 100, 100, 200, 365, 1000 e 10000. Para o passo $p = 1$ estes serão os valores adotados. Para $p = 0,5$ serão tomados estes valores mais um intermediário entre eles, para $p=0,25$ são tomados dois intermediários e assim por diante.

A seguir é solicitado:

- Idade (dias) do carregamento da estrutura:

Este será o tempo 0 ou inicial dentro da análise.

- Se for levado em consideração os efeitos da temperatura deve-se fornecer a idade da aplicação da temperatura.

- Se houver deslocamento de apoio e foi feita a opção por deslocamento de apoio progressivo no item 8.4.1.4 então deve ser fornecido o tempo em que 95% do deslocamento de apoio total ocorre.

8.4.1.13 - Carregamento nodal.

Se houver cargas nodais é feito um looping sobre o número total cargas nodais da estrutura e perguntado:

- Número do no:

- Força horizontal:
- Força vertical:
- Momento fletor:

Obs. O sinal das forças referem-se ao sistema de eixos coordenados ortogonais gerais da estrutura.

8.4.1.14 - Cargas concentradas.

Se houver cargas concentradas é feito um looping sobre o número total cargas concentradas na estrutura e perguntado:

- Número do barra:
- Valor da força:
- Ponto de aplicação:
- Direção X(0) ou Y(1):

Obs.: Deve-se ter em mente, que as cargas concentradas estão referidas ao sistema de eixos locais de cada barra, tendo este sistema de eixos a origem no primeiro nó da barra. O sinal da força (+ ou -), o ponto de aplicação (distância ao primeiro nó) e direção X (eixo longitudinal do primeiro ao segundo nó) ou Y (eixo transversal) refere-se ao sistema local de coordenadas.

8.4.1.15 - Cargas distribuidas.

Se houver cargas distribuidas é feito um looping sobre o número total cargas distribuidas na estrutura e perguntado:

- Número do barra:
- Valor da força:
- Ponto inicial de aplicação:
- Ponto final de aplicação:
- Direção X(0) ou Y(1):

Obs. Ver observação no item 8.4.1.14, o qual também é válido para o ponto inicial e final de aplicação.

8.4.1.16 - Condições de contorno e deslocamento prescrito.

Convenção adotada: 0 = prescrito e 1 = livre

É feito um looping sobre o número de nós de contorno e perguntado:

- Número do nó.
- Direção x ==> 0 ou 1:

- Direção y ==> 0 ou 1:
- Giro ==> 0 ou 1:
- Deslocamento imposto ? (S/N)

Se for N ou RETURN ele perguntara pelo próximo nó de contorno e se for S vem:

- Deslocamento em (X) ==>
- Deslocamento em (Y) ==>
- Giro ==>

Da mesma maneira que as forças os sinais dos deslocamentos prescritos referem-se ao sistema de eixos coordenados ortogonais gerais da estrutura.

8.4.1.17 - Variáveis para gráfico.

- Deseja resultados para grafico ? (S/N).

Se responder N ele ira para o proximo conjunto de dados e se for S vira o seguinte:

- Nome do arquivo para grafico.
- Número do deslocamento.
- Número da reação.
- Número da barra da qual deseja a força.
- Se as seções das barras forem de elementos mistos o

programa pede o número da primeira e da segunda linha neutra.

Estes dados são fornecidos se o usuário tem intenção de formar um arquivo para desenhar um grafico em um programa aplicativo. A seguir explicamos melhor este conjunto de dados. O nome do arquivo para grafico (maximo quatro caracteres) será adicionado ao nome do arquivo dado anteriormente (ponto 2) e formara um arquivo com extensão ".PRN" para ser utilizado num aplicativo, por exemplo, tipo LOTUS ou SYMPHONY para gerar grafico com os dados dos deslocamentos, reação, força na barra e distâncias até a linha neutra.

O número do deslocamento e da reação são obtidos apartir da numeração dos nos da estrutura considerando que cada no tem três graus de liberdade. Sendo que o primeiro e horizontal, o segundo vertical e o terceiro giro. Assim, por exemplo, se desejar o deslocamento horizontal do no 5, toma-se

$(3 \times 4) + 1 = 14$ que será o número do deslocamento desejado, o mesmo vale para as reações.

Se precisar a força na barra considere que cada barra tem 6 esforços (3 em cada extremidade) e estão ordenados primeiro o esforço normal, depois o cortante e por último o momento fletor em cada nó. Assim, por exemplo, se desejar o esforço cortante do primeiro nó da barra 3, toma-se $(6 \times 2) + 2 = 14$ que será o número da força na barra desejado.

Finalmente se desejar as linhas neutras considere que cada barra tem duas e o programa permite fornecer dois números. Assim, por exemplo, se quiser a linha neutra superior da quarta barra e inferior da sexta barra tem $(2 \times 3) + 1 = 7$ e $(2 \times 5) + 2 = 12$ respectivamente.

8.4.1.18 - Dados para temperatura.

É feito um looping sobre o número de barras e de elementos em cada barra e perguntado:

Tipo de aumento de temperatura:

- 1 - Aumento uniforme de temperatura.
- 2 - Gradiente de temperatura.
- 3 - Elemento sem efeito de temperatura.

Faça a escolha (1/2/3) :

Se for "3" a opção já diz e passa para o próximo elemento.

Se for "1" ou "2" vem:

Entre com a temperatura em graus centígrados.

- Temperatura ambiente (inicial) ==>

Feito isso tem-se duas opções:

- Se for "1" fornecer a temperatura final ==>
- Se for "2" fornecer:
 - Temperatura final na parte superior da viga ==>

Fim do looping sobre o número de elementos e de barras.

8.4.1.19 - Dados para deformação lenta.

Este conjunto de dados é pedido somente se o modelo constitutivo dos materiais for do CEB ou levar em conta os

efeitos da retração.

É feito um looping sobre o número de barras e o número de elementos em cada barra e se a elemento não for elástico segue o seguinte:

Condições ambientais:

1 - Agua. 2 - Ar úmido. 3 - Ar ambiente. 4 - Ar seco
- Faça a escolha (1 a 4):

Unidades em centímetros.

- Perímetro em contato com o ar:

Fim do looping sobre o número de elementos e o número de barras.

Este é o último conjunto de dados de entrada.

8.4.1.20 - Opções para correção.

A seguir vem a opção para correção em que se pode voltar a um conjunto de dados em particular e corrigi-los. Deve-se tomar cuidado nestas correções pois a modificação de um conjunto de dado sem alterar outro que lhe diga respeito pode causar incompatibilidade. Por exemplo, alterar nos dados internos o número de nós de contorno para menos e não alterar nos nós de contorno de maneira correta causará erro. Ou modificar o tipo de mecanismo, de CEB para standard, e não dar as novas propriedades do modelo standard e no tipo de análise onde entra o número de mecanismos também dará erro, e assim por diante, etc.

No caso de dúvida é aconselhável rodar o exemplo desde o início.

8.4.1.21 - Impressão dos resultados.

Opcoes para impressão:

- 1 - Impressão das matrizes e esforços.
- 2 - Impressão dos esforços.
- 3 - Impressão de output.
- 4 - Dados para arquivo.
- 5 - Cálculos da visco.
- 6 - Cálculos da mudança da linha neutra.
- 7 - Efeitos da temperatura.
- 8 - Efeitos da retração.

- Faça a escolha ==>

Comentarios sobre os tipos de impressão.

Estes tipos de impressão foram incluídos para a fase de depuração do programa e foram mantidos por serem úteis.

Se for "1" serão impressos todos os dados gerais da estrutura a medida que forem calculados, isto é, as matrizes de rigidez de cada elemento e sua soma, isto é, a da barra. As forças de engastamento perfeito devido as cargas externas, retração e temperatura. A matriz de rigidez global e o vetor de cargas também global antes e depois da introdução das condições de contorno e da inclusão das cargas viscoelásticas. Os deslocamentos nodais obtidos após a resolução do sistema de equações, as forças nas barras em coordenadas locais (só K U), as mesmas forças com o desconto da carga viscoelástica, temperatura e retração. Os esforços finais em cada barra em coordenadas locais com as forças de engastamento perfeito e terminando a solução tem-se as reações nodais. Ainda, imprime-se os esforços nos elementos de cada barra em coordenadas locais sem e com os esforços viscoelásticos, temperatura e retração.

Além disso, no começo de cada nova análise imprime-se as forças viscoelásticas nos elementos, as cargas nodais viscoelásticas e a nova linha neutra modificada para cada barra além de imprimir tudo novamente o que está no parágrafo anterior.

Se for "2" imprime-se as forças de engastamento perfeito devido as cargas externas, temperatura e retração separadamente, os deslocamentos nodais, todos os esforços descritos anteriormente e as mudanças da linha neutra.

Se for "3" obtém-se os deslocamentos nodais, as forças axiais e as reações nodais.

Se for "4" obtém-se somente a impressão dos dados que serão armazenados no disquete com o nome do arquivo e demais itens definidos no conjunto de dados para gráfico.

Se for "5" obtém-se todos os cálculos feitos só na subrotina visco e que não são impressos nem na opção "1".

Idem para a "6" sobre a subrotina do cálculo da mudança

da linha neutra.

Idem para a "7" sobre a subrotina temperatura.

Idem para a "8" sobre a subrotina retração.

8.4.1.22 - Tipo de saída.

Idem item 3.4.1.1.

Aqui termina a entrada de dados e a seguir começa a análise.

8.4.2 - Exemplo de entrada de dados e resolução.

A seguir esta um exemplo simples que foi rodado com o programá PORTICO. A entrada de dados é fornecida pelo usuario e foi explicada na seção 8.4.1 e a formulação é a descrita neste capítulo.

```
*****
* Exemplo de entrada de dados de *
* uma viga mista biapoiada.      *
* Programa: PORTICO.BAS           *
*****
```

```
T I P O   D E   A N A L I S E. ATIA.POR
Nome do arquivo           = ATIA.POR
Considerar retração      = N
Variação de temperatura  = N
Seção transversal da barra = Mista (laje + perfil)
Deslocamento de apoio(Se houver)= Subito
```

Obs. ATIA.POR é o nome do arquivo onde os dados são gravados. "A" é o nome e "TIA.POR" é a extensão deste conjunto de dados.

```
D A D O S   I N T E R N O S. AINT.POR
Número de nos            = 2
Número de barras         = 1
Número de nos de contorno = 2
Número de nos carregados = 0
N. cargas conc. na estrut.= 0
N. cargas dist. na estrut.= 1
```

```
C O O R D E N A D A S   N O D A I S. ACOO.POR
No      Coord. (X)      Coord. (Y)
1        0                0
2        5                0
```

```
C O N E T I V I D A D E S. ACON.POR
Barra      No inicial      No final
1          1                2
```

G E O M E T R I A D O S E L E M E N T O S. AGEO.POR

Barra	Elem.	Area	Inercia	Dist.l.neutra	Altura
1	1	.12	.0004	.1286605	0
	2	.0118	.0002921	-.1713396	0

Obs. Altura só é fornecida se tiver variação de temperatura que gerem momentos fletores.

L E I C O N S T I T U T I V A. ATME.POR

Tipo escolhido ==> Modelo Standard

Número de mecanismos Kelvin ==> 1

P R O P R I E D A D E S M E C A N I C A S

Barra	Elem.	Mod.Elast.	Mola Kelvin	Amortecedor
1	1	2.75E+09	9.94E+08	2E+09
	2	2.1E+10	< == elemento elástico	

T E M P O S D E A N A L I S E. ATPO.POR

Desenvolvimento do tempo

1 - Arbitrado tempo e incremento fixo

Tempo maximo ==> 10

Incremento de tempo ==> .3333

Idade(dias) do carreg.da estrutura ==> 0

C A R G A S D I S T R I B U I D A S. ACAD.POR

Barra	Forca	Pto inicial	Pto final	Direção X(0) ou Y(1)
1	-9600	0	5	1

C O N D I C O E S D E C O N T O R N O. APRE.POR

Condições dos valores prescritos: 0=Impedido, 1=Livre.

No	Dir. (X)	Dir. (Y)	Giro	Desl. (X)	Desl. (Y)	Giro
1	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0

V A R I A V E I S P A R A G R A F I C O. AGRA.POR

Resultado p/ grafico? S/N = S

Nome do arquivo p/ grafico= A

Número do deslocamento = 6

Número da força na barra = 1

Número da reação = 2

N. da primeira l. neutra = 1

N. da segunda l. neutra = 2

Terminada a entrada de dados tem-se a resolução do

exemplo.

```
*****
* Resultados da resolução de uma *
* viga biapoida. *
* Programa: PORTICO.BAS *
*****
```

***** PRIMEIRA ANALISE, Tempo= 0 *****

Obs. Cálculo das rigidezes pela eq. 8.1.

	Rigidez	K_{ec}			
6.6E+07	0	-8491593	-6.6E+07	0	8491593
	630015.8	1575039	0	-630015.8	1575039
		5250131	8491593	-1575039	2625066
Simétrica.			6.6E+07	0	-8491593
				630015.8	-1575039
					5250131

	Rigidez	K_{ea}			
4.956E+07	0	8491590	-4.956E+07	0	-8491590
	287248	3218119	0	-1287248	3218119
		1.0727E+07	-8491590	-3218119	5363532
Simétrica.			4.956E+07	0	8491590
				1287248	-3218119
					1.0727E+07

	Rigidez total da barra		$K_{ec} + K_{ea}$			
1.1556E+08	0	-3	-1.1556E+08	0	3	
	1917263	4793159	0	-1917263	4793159	
		1.5977E+07	3	-4793159	7988597	
Simétrica.			1.1556E+08	0	-3	
				1917263	-4793159	
					1.5977E+07	

Rigidez rotada da barra 1

Como a barra esta na horizontal a rigidez é a mesma anterior.

Aplicando agora a eq. 8.10 vem

$$A = 3586354, B = 3586354 \text{ e daí } C = 3586354$$

e assim encontra-se a nova posição da linha neutra, eq. 8.9:

Posição da linha neutra.

Barra	d.l.n.conc.	d.l.n.aco	YCT
1	.159695	-.1403051	0.3

Agora monta-se novamente as matrizes de rigidez:

Rigidez K_{ec}					
6.6E+07	0	-1.0539E+07	-6.6E+07	0	1.0539E+07
913519.5	2283799	7612663	0	-913519.5	2283799
		1.0539E+07	-2283799	3806331	
Simétrica.		6.6E+07	0	-1.0539E+07	
			913519.5	-2283799	
				7612663	

Rigidez K_{ea}					
4.956E+07	0	6953519	-4.956E+07	0	-6953519
	1057168	2642921	0	-1057168	2642921
		8809735	-6953519	-2642921	4404868
Simétrica.		4.956E+07	0	6953519	
			1057168	-2642921	
				8809735	

Rigidez $K_{ec} + K_{ea}$					
1.1556E+08	0	-3586355	-1.1556E+08	0	3586355
	1970688	4926720	0	-1970688	4926720
		1.6422E+07	3586355	-4926720	8211199
Simétrica.		1.1556E+08	0	-3586355	
			1970688	-4926720	
				1.64224E+07	

Deve-se rotar a $K_{ec} + K_{ea}$, mas como a barra é horizontal ela é idêntica a anterior.

Rigidez global sem as cond. de contorno

E feita montagem como antes.

Carga inicial mais carga visc.

$$17957.37 \quad -24000 \quad -22775.64 \quad -17957.37 \quad -24000 \quad 22775.64$$

Rigidez global com contorno fica da mesma forma como antes

Vetor de carga com as cond. de contorno

0 0 -22775.64 0 0 22775.64

Deslocamentos nodais, tempo= .3333

No	Desloc. (X)	Desloc. (Y)	Giro
1	0	0	-2.773729E-03
2	0	0	2.773729E-03

Com estes novos deslocamentos aplica-se as eq. 8.9 e 8.10 novamente e tem-se os novos valores

A = 3237044, B = 3237044 e daí C = 3237044

e assim encontra-se pela segunda vez dentro deste passo de tempo a nova posição da linha neutra:

Posição da linha neutra.

Barra	d.l.n.conc.	d.l.n.aco	YCT
1	.1566723	-.1433278	0.3

Monta-se novamente as matrizes de rigidez e resolve-se o sistema com o mesmo vetor de cargas externos (carga inicial mais carga viscoelástica) do começo da análise obtendo os deslocamentos finais deste tempo.

Deslocamentos nodais, tempo= 0.3333

No	Desloc. (X)	Desloc. (Y)	Giro
1	0	0	-2.787734E-03
2	0	0	2.787734E-03

Esforços devido aos deslocamentos ($K_b U_b$).

Barra	No	Normal	Cortante	Momento
1	1	18048.04	0	-22775.64
	2	-18048.04	0	22775.64

Esforços elásticos (com visco, X_{wb} , eq. 8.4).

Barra	No	Normal	Cortante	Momento
1	1	90.67188	0	-20000
	2	-90.67188	0	20000

A força $N_{1w} = 90.6$ é a força parasita que restou das duas iterações feitas. Se fizéssemos mais uma iteração ela seria menor ainda. Observa-se, além disso, que se houvessem forças devido a retração e temperatura elas deveriam ser descontadas aqui também.

Esforços finais (com f.e.p.) = \underline{X}_{wb} (eq. 8.4)

Barra	No	Normal	Cortante	Momento
1	1	1.502141E-02	24000	1.953125E-03
	2	-1.502141E-02	24000	-1.953125E-03

A seguir coloca-se a contribuição dos esforços nos nós e tem-se:

Reacoes nodais

No	Horizontal	Vertical	Momento
1	1.502141E-02	24000	1.953125E-03
2	-1.502141E-02	24000	-1.953125E-03

A seguir, começa a análise viscoelástica.

Esforços elásticos nos elementos (\underline{X}_{se} , eq. 5.17 lembrando que em $t=0$, $\underline{X}_v = \underline{0}$)

Barra	Elem	No	Normal	Cortante	Momento
1	1	1	42518.57	0	-6572.031
		2	-42518.57	0	6572.031
	2	1	-42518.55	0	-13427.97
		2	42518.55	0	13427.97

*** NOVA ANALISE, TEMPO = 0.3333 ***

A seguir usa-se a eq. 8.5 e tem-se:

Forças viscoelásticas nos elementos (\underline{X}_v). Eq. 8.5 com

$\underline{X}_f = \underline{0}$ e $n = 1$

Barra	Elem	No	Normal	Cortante	Momento
1	1	1	N = 17957.37	0	-2775.643
		2	N = -17957.37	0	2775.643
	2	1	0	0	0
		2	0	0	0

Observe que as forças viscoelásticas do elemento 2 são nulos porque ele é elástico. Colocando a contribuição em cada nó vem as

Cargas nodais viscoelásticas.

No	Horizontal	Vertical	Momento
1	17957.37	0	-2775.643
2	-17957.37	0	2775.643

Força de engastamento perfeito em coordenadas globais devido a carga distribuída, \underline{X}_{nb} .

Barra	No	Normal	Cortante	Momento
1	1	0	24000	20000
	2	0	24000	-20000

Rigidez global (em forma de banda).

1.1556E+08	0	-3	-1.1556E+08	0	3
1917263	4793159	0	-1917263	4793159	0
1.5977E+07	3	-4793159	7988597	0	0
1.1556E+08	0	-3	0	0	0
1917263	-4793159	0	0	0	0
1.5977E+07	0	0	0	0	0

Vetor de cargas externas.

0	-24000	-20000	0	-24000	20000
---	--------	--------	---	--------	-------

Este vetor é armazenado pois é o vetor de cargas iniciais da estrutura.

Rigidez global com contorno.

1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1.5977E+07	0	0	7988597	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1.5977E+07	0	0	0	0	0

Vetor de carga com as cond. de contorno

0	0	-20000	0	0	20000
---	---	--------	---	---	-------

Após a solução do sistema tem-se:

Deslocamentos nodais, \underline{U}_b^0

No	Desloc. (X)	Desloc. (Y)	Giro
1	0	0	-2.503568E-03
2	0	0	2.503568E-03

Aplicando a eq. 8.4 vem:

Esforços devido a \underline{U} , $(\underline{K}_b \underline{U}_b^0) = \underline{X}_S$ (eq. 5.17)

Barra	No	Normal	Cortante	Momento
1	1	1.502141E-02	0	-20000
	2	-1.502141E-02	0	20000

Esforços finais (com f.e.p.).

Barra	No	Normal	Cortante	Momento
1	1	90.67188	24000	0
	2	-90.67188	24000	0

Reacoes nodais

No	Horizontal	Vertical	Momento
1	90.67188	24000	0
2	-90.67188	24000	0

Esforços sem visco no elemento (só $K_e U_b$)

Barra	Elem	No	Normal	Cortante	Momento
1	1	1	57652.41	0	-10259.14
		2	-57652.41	0	10259.14
	2	1	-39604.38	0	-12516.51
		2	39604.38	0	12516.51

Esforços elásticos no elemento (com visco, X_{se}).

Barra	Elem	No	Normal	Cortante	Momento
1	1	1	39695.05	0	-7483.496
		2	-39695.05	0	7483.496
	2	1	-39604.38	0	-12516.51
		2	39604.38	0	12516.51

Da mesma forma que antes, se houvessem forças devido a temperatura e retração elas deveriam ser incluídas aqui.

***** NOVA ANALISE, TEMPO= 0.6666 *****

Forças viscoelásticas nos elementos

Barra	Elem	No	Normal	Cortante	Momento
1	1	1	31980.92	0	-5512.514
		2	-31980.92	0	5512.514
	2	1	0	0	0
		2	0	0	0

Cargas nodais viscoelásticas

No	Horizontal	Vertical	Momento
1	31980.92	0	-5512.514
2	-31980.92	0	5512.514

Agora faz-se a mudança da linha neutra e assim por diante.

9 - EXEMPLOS NUMÉRICOS DE PÓRTICO.

A seguir são mostradas onze exemplos selecionados mostrando comportamentos variados. As unidades das grandezas envolvidas estão dadas nas "Conversões de unidades". Nos exemplos onde procurou-se mostrar algum fenômeno apenas qualitativamente, as unidades devem ser compatíveis entre si.

9.1 - Viga de dois vãos, homogênea, viscoelástica, sujeita à carga constante.

A viga da fig. 9.1 tem as propriedades e o carregamento indicados.

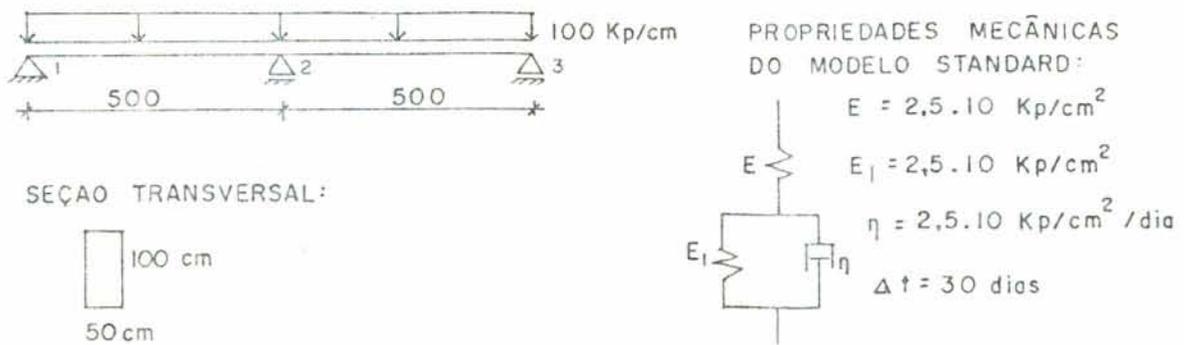


Fig. 9.1 - Viga de dois vãos do exemplo 1 à 4.



Fig. 9.2 - Experiência de creep para a viga da fig. 9.1.

Na fig. 9.2 vê-se o comportamento do giro no nó 1 ao longo do tempo obtido com o programa computacional PORTICO.BAS, juntamente com os dados obtidos da solução analítica baseada na aplicação da equação diferencial do modelo standard ($D(t, \tau_0)E\theta_0$, ver eq. 2.1.16 e 2.1.17). Pode-se ver a perfeita concordância entre os dois resultados.

9.2 - Viga de dois vãos com recalque de apoio.

Utilizou-se a mesma viga da fig. 9.1, submetendo-a a um deslocamento imposto igual a 5 cm no nó central para baixo na ausência de cargas externas.

Na fig. 9.3 pode-se ver a reação vertical no nó 1 em função do tempo obtido com o programa PORTICO.BAS e que está comparada com a solução analítica obtida com a resolução da equação diferencial do modelo standard. ($E(t, \tau_0)F_0/E$)



Fig. 9.3 - Experiência de relaxação da viga da fig.9.1.

9.3 - Viga de dois vãos com recalque progressivo.

A viga da fig. 9.1 é sujeita a um deslocamento de apoio para baixo no nó 2. Foi encontrada a variação da força F (reação no apoio central). F foi expresso em função de F_s , o valor da reação instantânea quando o deslocamento é introduzido subitamente considerando o material elástico. Este exemplo foi proposto por Ghali & Favre¹⁸.

Considere dois casos:

a) δ é introduzido subitamente em $t_0 = 14$ dias e mantido constante até $t_2 = 10.000$ dias.

b) O recalque é introduzido gradualmente de zero em $t_0 = 14$ dias até um valor δ em $t_1 = 24, 104$ e 379 dias e mantido constante ao longo do tempo até $t_2 = 10.000$ dias.

As propriedades mecânicas do material foram tomadas do CEB com uma condição ambiental como ar ambiente ($CA = 3$) e espessura efetiva $h_0 = 40$ cm e que corresponde a um perímetro de 375 cm. Portanto, não valem as propriedades do modelo standard da fig. 9.1, apenas o módulo de elasticidade.

No caso, t_1 é o valor em que 95% do recalque ocorre. Assume-se que a variação do recalque com o tempo segue a seguinte lei:

$$\frac{\delta(t)}{\delta_{\infty}} = 1 - e^{-3 \frac{t - t_0}{t_{0,95} - t_0}} \quad (9.1)$$

onde $\delta(t)$ e δ_{∞} são o recalque no tempo t e o recalque último no tempo infinito; t_0 é tempo em que o recalque começa; $t_{0,95}$ é o tempo em que 95% do último recalque ocorre. A eq. 9.1 foi elaborada por Ghali & Favre¹⁸ e aproxima-se da curva de consolidação para argilas dada por Terzaghi & Peck na forma de um tabela.

Os resultados da análise, usando o programa PORTICO.BAS, são mostrados na fig. 9.4 em que o período $(t_{0,95} - t_0)$ (tempo durante o qual 95% do recalque ocorre) é igual a 0,10,90,365 ou 5 anos. O gráfico mostra a variação de F com o tempo; os valores de F são expressos em termos de F_s que é a reação instantânea em B se o recalque total ocorre subitamente em $t_0 = 14$ dias. A curva superior representa o caso em que $(t_{0,95} - t_0) = 5$ anos, com o creep ignorado. A curva da fig. 9.4 mostra claramente o efeito pronunciado do creep nas forças induzidas pelo recalque do apoio B.

Quando o recalque é súbito, a curva para F versus tempo tem a mesma forma da função de relaxação, que representa a variação da tensão com o tempo devido a deformação imposta na

idade t_0 e mantida constante no envelhecimento (CEB¹²). A queda súbita, AC, da força na idade t_0 (fig. 9.4) é causada pelo creep que é desenvolvido nos primeiros poucos dias mas é considerado como se ocorresse no tempo t_0 (quase instantâneo).

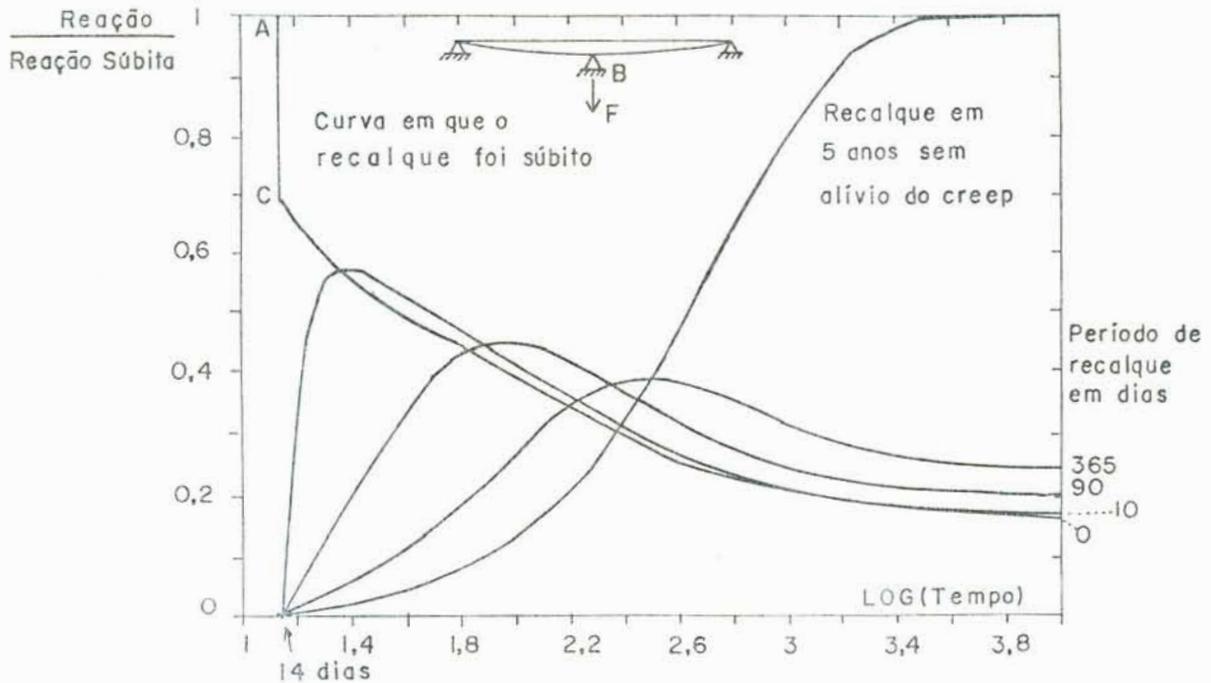


Fig. 9.4 - Tempo versus reação para recalque de apoio ocorrido em um período de: 0,10,90,365 dias ou 5 anos (Exemplo 9.3)

9.4 - Viga de dois vãos com propriedades diferentes em cada vão submetida a carga constante somente num deles.

Este exemplo foi selecionado para mostrar a redistribuição de esforços que ocorre na mesma viga da fig. 9.1 com as seguintes modificações.

- A carga é aplicada somente sobre o vão da direita com o mesmo valor da fig. 9.1.

- As propriedades mecânicas da barra da esquerda foi alterada passando a ser elástica, com $E = 2,5 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$ e a barra da direita continua a ser viscoelástica, com as propriedades mecânicas indicadas na fig. 9.1.

Na fig. 9.5 estão os resultados obtidos com o programa

PORTICO.BAS. No mesmo grafico estão representados as reações e giros nos três nós da viga ao longo do tempo. As reações e giros foram divididos pelos seus valores no tempo 0, isto é, seus valores elásticos, tornando-se assim, valores relativos.

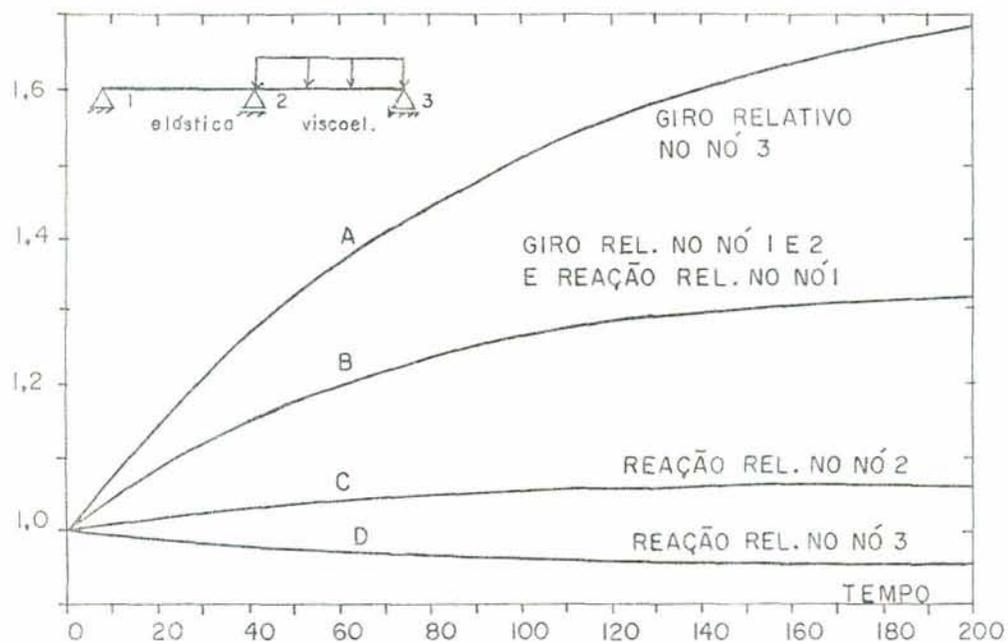


Figura 9.5 - Controle das reações e giro versus tempo da viga do exemplo 9.4.

A curva "A" é o giro relativo do nó 3 e a curva "B" o giro relativo dos nós 1 e 2. Observa-se que o nó 9 por estar mais carregado sofre um giro relativo maior.

A curva "B" também representa a reação relativa do nó 1 e as curvas "C" e "D" as reações relativas nos nós 2 e 3. Observa-se que como a barra esquerda é elástica ela absorve uma parte da reação que a outra barra, por ser viscoelástica, perde. Então a reação do nó 1 deve aumentar, o que confere (ver curva "B"). A reação no nó 3 deve diminuir (ver curva "D").

9.5 - Viga biengastada submetida à variação de temperatura.

A viga biengastada da fig. 9.6 é homogênea e constituída por um material que segue as propriedades do modelo standard indicado.

Ela foi submetida a uma variação de temperatura iguais na parte superior e inferior de 30° C.

Se a temperatura for aplicada subitamente o esforço normal na viga é dado por (ver seção 5.4).

$$N = E A \alpha \Delta T$$

$$N = 2,5 \cdot 10^5 \cdot 5000 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot 30 = 375000 \text{ Kp}$$

Isto representa uma tensão de compressão de

$$\sigma = N / A = 375000 / 5000 = 75 \text{ Kp/cm}^2$$

bastante elevada para uma variação no concreto e inadmissível se fosse o caso inverso de tração.

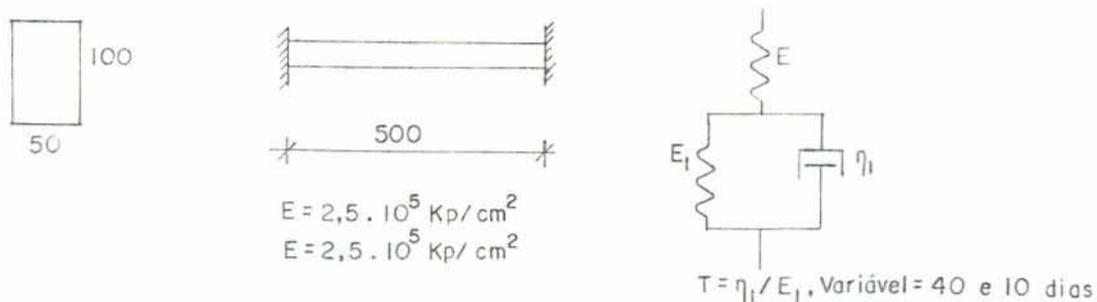


Fig. 9.6 Viga biengastada dos exemplos 9.5 e 9.7.

No caso de aplicar a temperatura progressivamente de 0 a 10 dias, tem-se a curva A da fig. 9.7, onde o material foi considerado elástico durante toda a análise. A força axial cresce linearmente até 10 dias e após, permanece constante.

Nas curvas B e C o material foi considerado viscoelástico com um tempo de retardação $T = \eta_1 / E_1 = 40$ e 10 respectivamente. Observa-se em ambas as curvas o efeito da relaxação sobre o esforço axial tendendo ambas para um mesmo valor num tempo infinito.

A curva B, como tem T maior, sofre menos rapidamente o efeito da relaxação que a curva A.

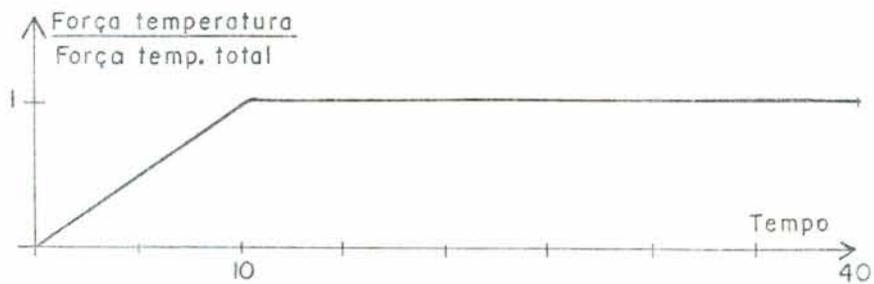
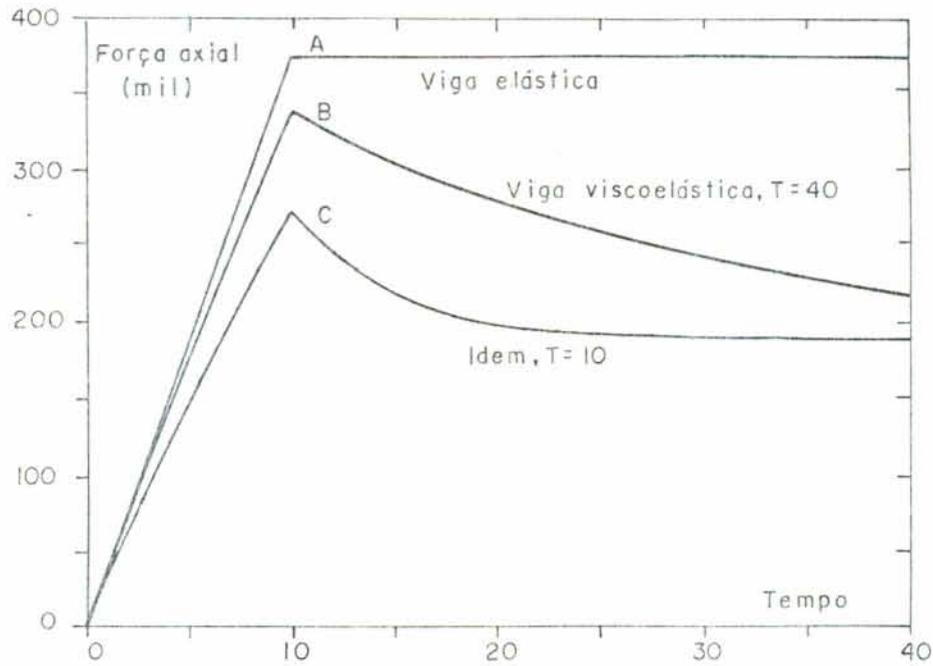


Figura 9.7 - Força axial versus tempo para viga biengastada submetida a variação de temperatura.

9.6 - Pórtico homogêneo submetido à variação de temperatura.

O pórtico da fig. 9.8 foi submetido a uma variação uniforme de temperatura em todas as barras.

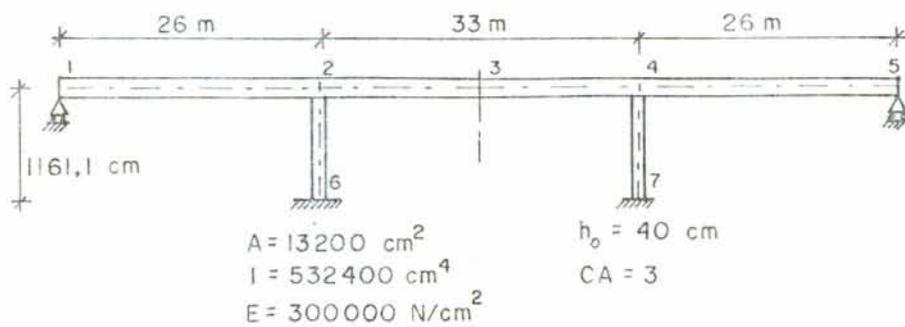


Fig. 9.8 . Pórtico dos exemplos 9.6 e 9.8.

A área e o momento de inércia das barras estão indicadas na figura e são as mesmas para todas as barras. A condição ambiental é normal ($CA = 3$). A estrutura foi carregada em $t_0 = 28$ dias e a temperatura foi aplicada integralmente também em $t_0 = 28$ dias.

Na fig. 9.9 está representado o momento no nó 7 ao longo do tempo. Pode-se ver o efeito da relaxação nas curvas "B" e "C". A curva "A" corresponde a estrutura elástica e a "B" e "C" correspondem a estrutura viscoelástica com as propriedades do CEB dadas anteriormente.

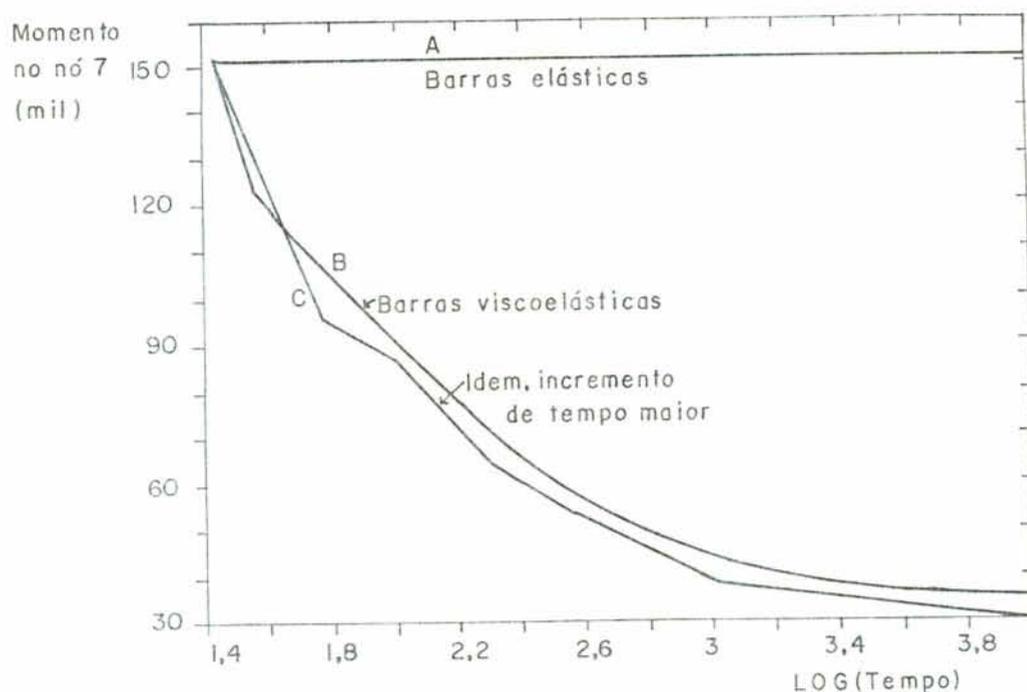


Figura 9.9 - Relaxação no pórtico submetido a variação de temperatura.

9.7 - Viga biengastada submetida à retração.

Novamente foi utilizada a viga biengastada da fig. 9.6, submetendo-a aos efeitos da retração.

A lei de variação da retração é a mesma dada pelo CEB (apêndice A). Foi considerada uma condição ambiental normal, isto é, ar ambiente, e uma espessura efetiva de 40 cm, correspondendo para a viga da figura um perímetro de 375 cm.

Dois casos foram considerados e estão mostrados na fig. 9.10 . Foi feito o controle da força axial ao longo de tempo. Na curva A o material foi considerado elástico e na curva B viscoelástico com um tempo de retardação $T = 100$.

Pode-se observar o efeito viscoelástico na diminuição da força axial da curva "B" para a "A".

O incremento de tempo foi de 20 dias. Para a curva "B" a força de engastamento perfeito N_R no tempo $t = 20$ dias foi de 17735 Kp, sendo a carga viscoelástica, $N_V = 0$. Em $t = 40$ dias, $N_R = 31448$ Kp e $N_V = 3214$ Kp resultando o esforço final $N_W = 28234$ Kp com os sinais dependendo do nó analisado.

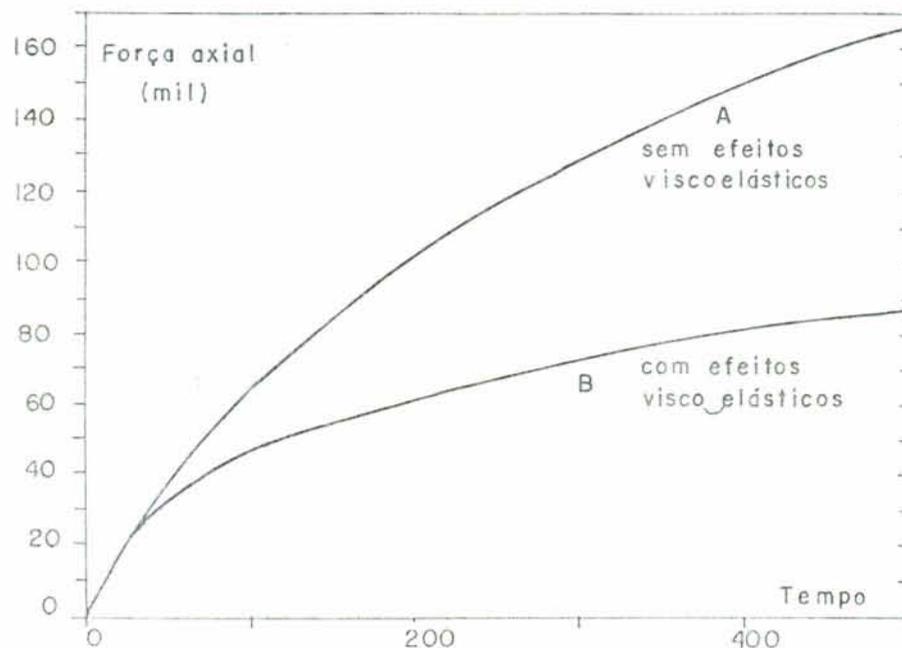


Fig. 9.10 - Força axial versus tempo numa viga biengastada submetida a retração.

9.8 - Pórtico homogêneo submetido a retração.

O pórtico da fig. 9.8 foi submetido ao efeito da retração dado pela lei fornecida pelo CEB, ver apêndice A.

Foi considerado dois tipos de materiais para a estrutura, um elástico e outro viscoelástico que segue a lei viscoelástica dado pelo CEB, conforme a formulação apresentada na seção 2.1.6. Escolheu-se a condição ambiental normal ($CA = 3$) e h_0

= 40 cm para todas as barras.

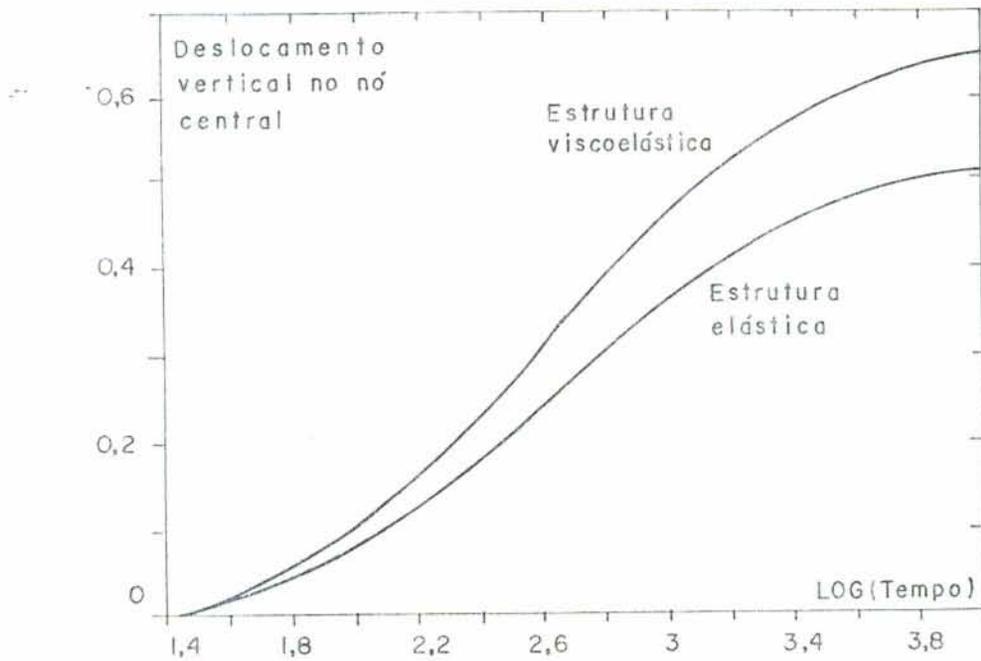


Fig. 9.11 - Curva deslocamento versus tempo do pórtico sobre efeito da retração.

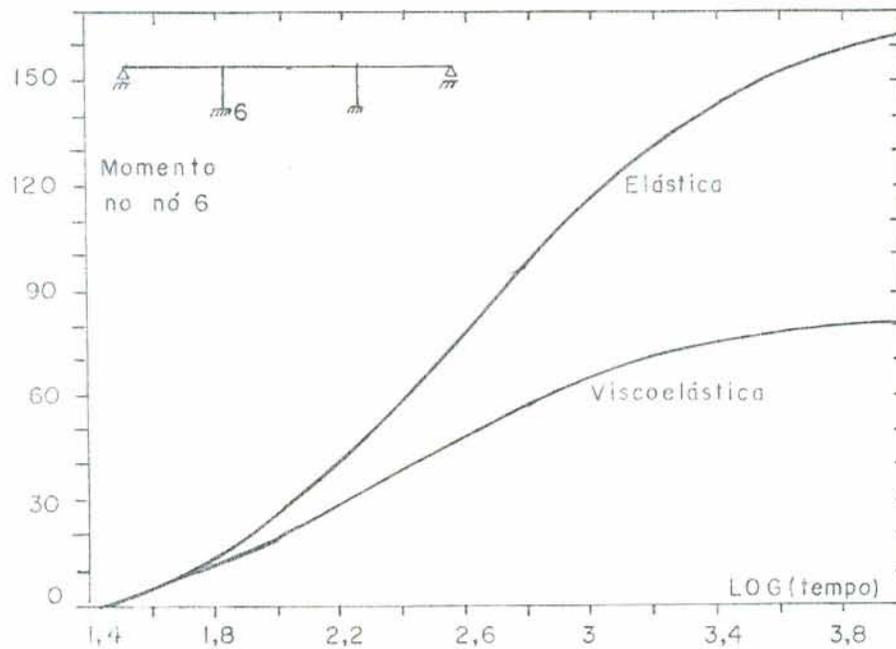


Fig. 9.12 - Curva momento versus tempo do pórtico sobre efeito da retração.

Na fig. 9.11 vê-se o comportamento ao longo do tempo do deslocamento vertical no nó central. Pode-se notar que o efeito viscoelástico tendo a aumentar o deslocamento.

Na fig. 9.12 está representada as curvas de reação correspondente ao momento fletor no nó 6 ao longo do tempo para os dois tipos de materiais. Pode-se ver o efeito da relaxação na estrutura que é viscoelástica comparada com a elástica.

9.9 - Efeitos viscoelásticos numa viga bi-apoiada mista submetida a carga constante.

Dada a viga da fig. 9.13 com as propriedades e carregamento indicado. Este exemplo foi proposto por Calzon (). Primeiramente são calculadas as distâncias do centro de gravidade das seção reduzida e pelos métodos usuais da geometria das massa (Calzon). Os valores obtidos também estão indicados na figura.

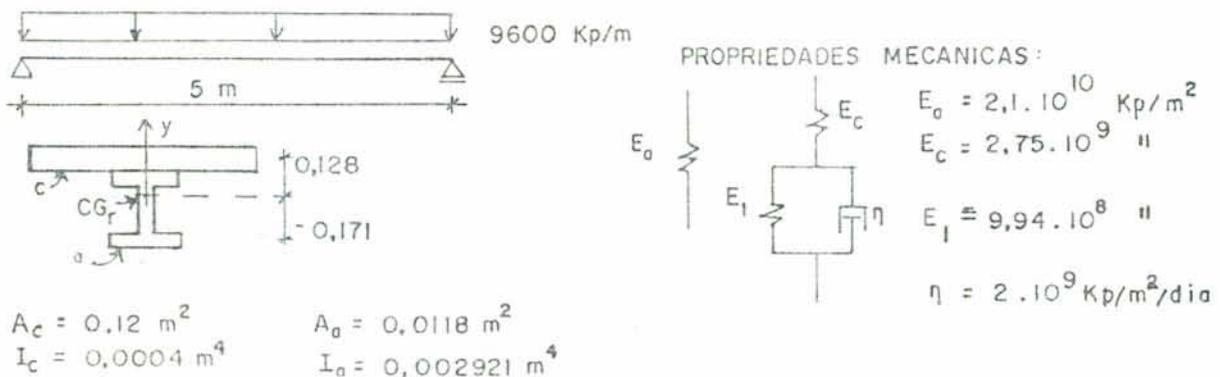


Fig. 9.13 - Viga biapoiada mista do exemplo 9.9.

Calzon determinou o coeficiente de equivalência $n = E_a / E_c$ para um tempo infinito e consequentemente novas propriedades e tensões para o carregamento dado.

Para utilizar o programa PORTICO.BAS é necessário calcular as constantes do modelo Kelvin a fim de ter o mesmo n no tempo infinito. Foi dado no exemplo de Calzon que $n_\infty = 28,75$ e daí tem-se

$$n_\infty = E_s / E_\omega \quad \text{logo} \quad E_\omega = 7,3 \cdot 10^8 \text{ Kp/cm}^2$$

Da equação 2.1.18 da viscoelasticidade sabe-se que

$$E_{\infty} = E_c E_1 / (E_c + E_1) \quad \text{logo} \quad E_1 = 9,946 \cdot 10^8 \text{ Kp/cm}^2$$

Para a análise foi utilizado o valor de $\eta = 2 \cdot 10^9$ Kp/cm²/dia.

Com estes dados entra-se no programa PORTICO.BAS, obtendo-se a curva da fig. 9.14. Os dados foram obtidos com 2 modificações da linha neutra em cada tempo de análise. Na figura também está indicada a distância entre os centros de gravidade do concreto e da seção reduzida para o tempo infinito obtido por Calzon¹¹.



Fig. 9.14 - Experiência de creep da viga mista.

9.10 - Efeitos viscoelásticos num pórtico misto submetido a carga constante.

O pórtico da fig. 9.15 é misto. A seção transversal da viga BC está indicada na fig. 9.15.c, com as seguintes propriedades: $A_c = 13200 \text{ cm}^2$, $A_a = 390 \text{ cm}^2$, $I_c = 532400 \text{ cm}^4$, $I_a = 1,5 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$, $E_c = 3 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$, $E_a = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$, onde o subíndice "c" é para o concreto e o subíndice "a" é para o aço.

A seção de concreto foi considerada esposta a condições ambientais normais (CEB), com um perímetro em contato com o ar de 990 cm, resultando num $h_o = 40 \text{ cm}$.

As colunas BE e CF são compostas de dois perfis de aço com $A_a = 300 \text{ cm}^2$, $I_a = 1,2 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$ e $E_a = 3 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$.

Para a entrada de dados do programa PORTICO.BAS é necessário calcular, para a viga BC, onde localiza-se a linha neutra e as distâncias dos elementos que compõe a barra até ela.

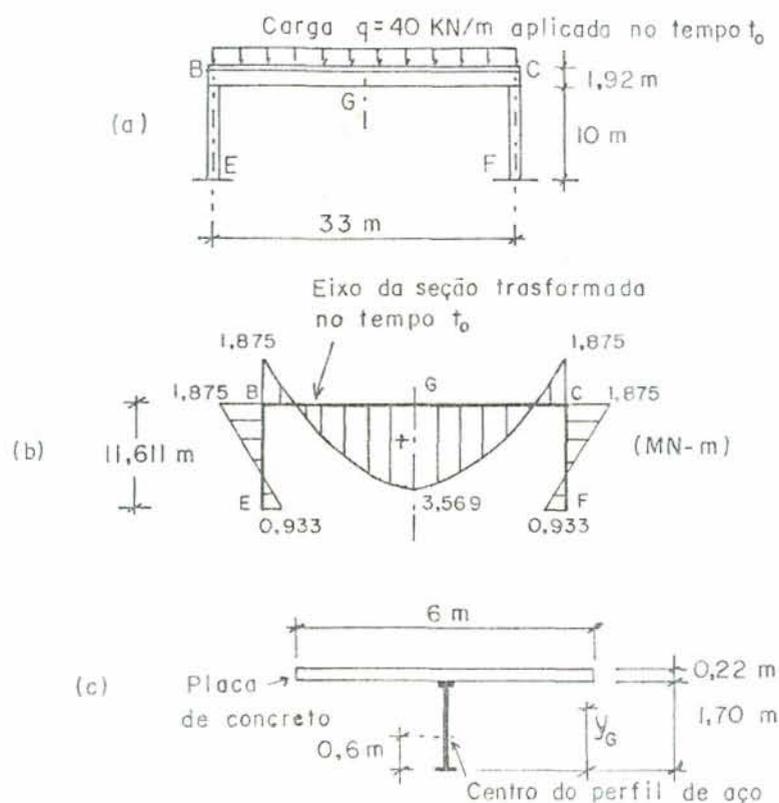


Fig. 9.15 - Pórtico misto sujeito a efeitos viscoelásticos.

Então tem-se (ver fig. 9.15.c)

$$y_G = \frac{390 \frac{2 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^6} 60 + 13200 \cdot 131}{390 \frac{2 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^6} + 13200} = 161,1 \text{ cm}$$

e daí tira-se

$$y_c = 19,9 \text{ cm} \quad y_a = -101,1 \text{ cm}$$

As coordenadas da estrutura devem ser dadas com relação a y_G . Foi aplicada uma carga de 400 N/cm de baixo para cima na viga BC e mantida constante ao longo do tempo. As colunas, por serem de aço foram consideradas elásticas e não geram, por isso, cargas viscoelásticas.

Os resultados para a análise elástica estão dadas na fig. 9.15.b e diferem aproximadamente em 5% dos resultados obtidos por Ghali e Favre.

Na fig. 9.16 têm-se os resultados da análise viscoelástica. Todos os valores apresentados foram tornados relativos, dividindo-os pelo seu respectivo valor obtido na análise elástica para permitir representar diferentes resultados num mesmo gráfico. O tempo foi tomado em escala logarítmica.

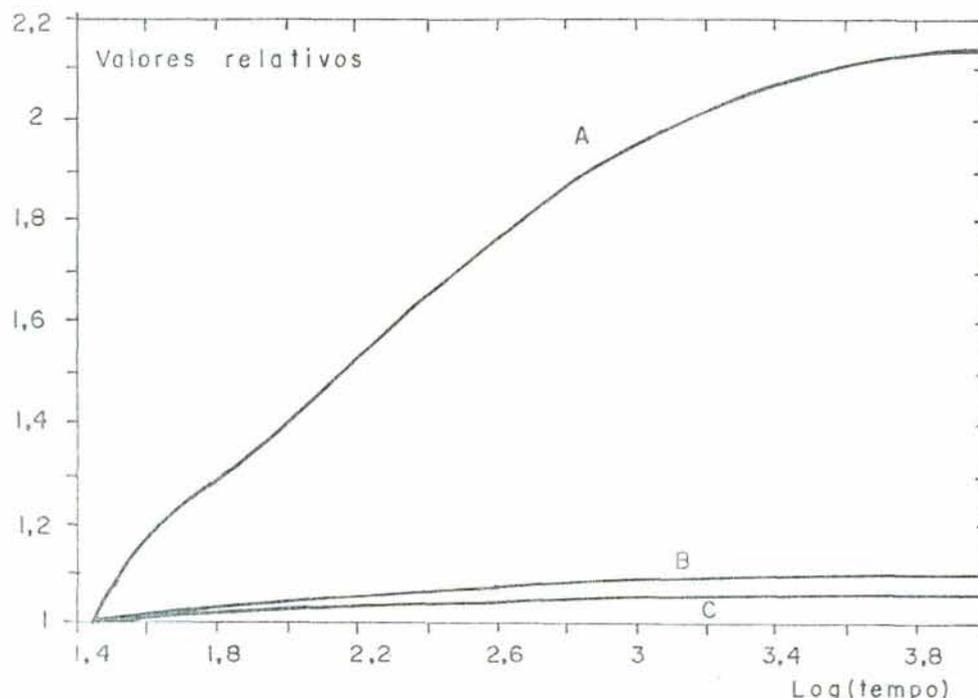


Fig. 9.16 - Resultados do pórtico misto viscoelástico.

A curva A é a distância à linha neutra da placa de concreto até o centro de gravidade da seção homogeneizada. Ela tende a aumentar. Pode ser visto com uma diminuição do módulo de elasticidade do concreto ao longo do tempo.

A curva B é o momento relativo no nó F e a curva C é o deslocamento vertical no nó central.

9.11 - Efeitos viscoelásticos num pilar armado simetricamente.

O pilar da fig. 9.17 é armado simetricamente e o concreto tem as propriedades do modelo standard e aço é considerado elástico.

A área do concreto é $A_c = 100 \text{ cm}^2$. As constantes do modelo reológico são $E = 200000 \text{ Kp/cm}^2$, $E_1 = 100000 \text{ Kp/cm}^2$ e $\eta = 1.10^7 \text{ Kp/cm}^2/\text{dia}$. O módulo de elasticidade do aço é $E_a = 1.10^6 \text{ Kp/cm}^2$. $F = 1000 \text{ Kp}$ e o incremento de tempo é $\Delta t = 10 \text{ dias}$.

No tempo $t = 0$ o deslocamento vertical em A é de $3,571 \cdot 10^{-3}$ cm e o posterior desenvolvimentno com o tempo deste deslocamento para o modelo reológico adotado está indicado na figura 9.17.

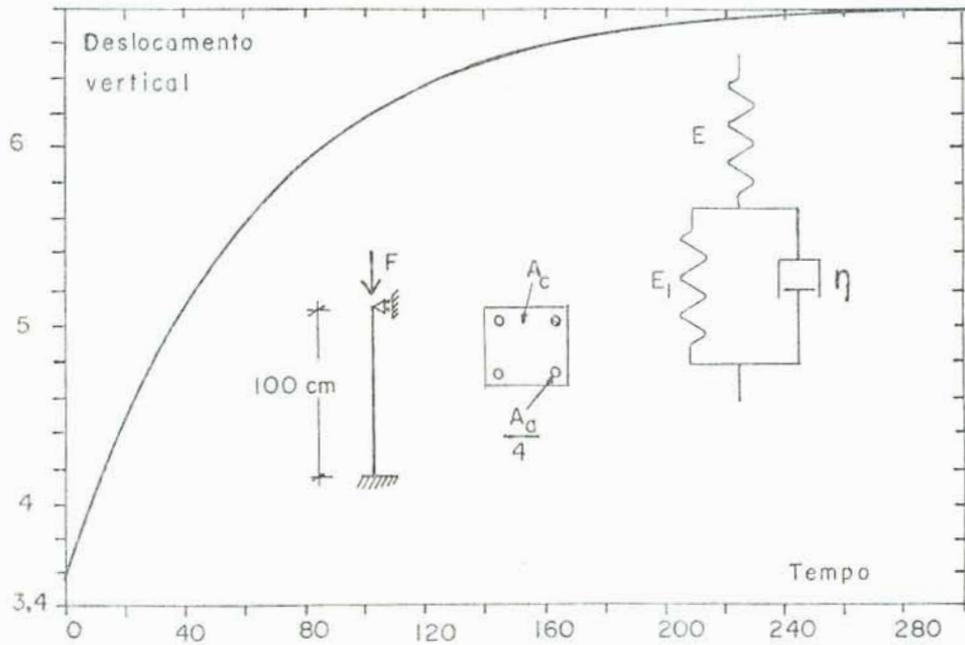


Fig. 9.17- Curva deslocamento versus tempo do pilar.

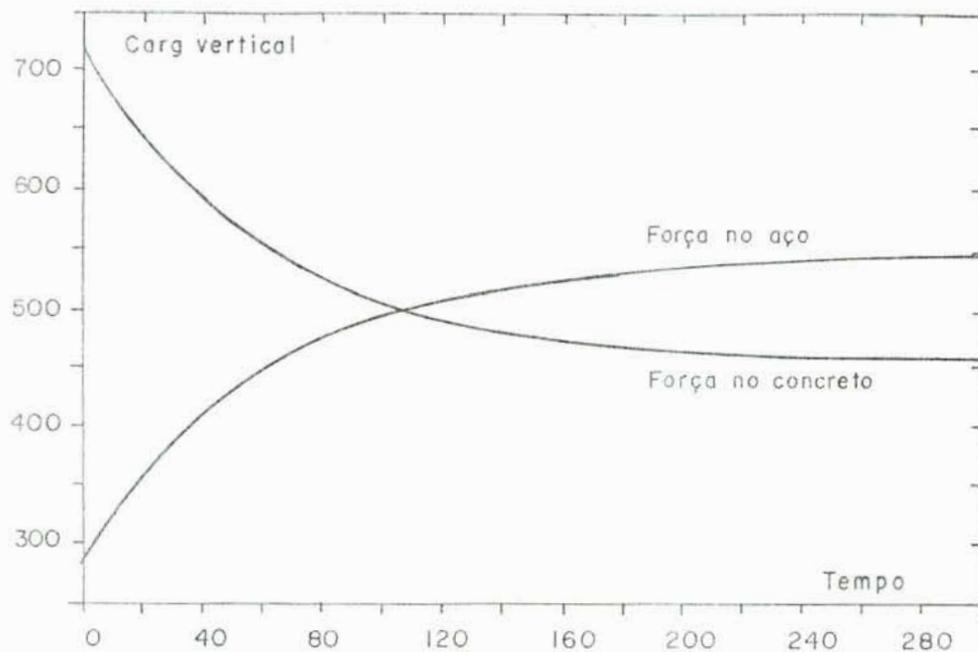


Fig. 9.18 - Curva força versus tempo do pilar.

Na fig. 9.18 estão indicadas as forças no concreto e no

aço ao longo do tempo. Em $t = 0$ o concreto absorve uma força de 714 Kp enquanto o aço, naturalmente, fica com o que falta para 1000 Kp.

Devido aos efeitos da relaxação as forças no concreto tendem a diminuir e as no aço tendem a aumentar. Poderia-se rodar o mesmo exemplo no programa PORTICO.BAS adotando o modelo reológico dado pelo CEB.

10 - CONCLUSÕES E INDICAÇÕES PARA TRABALHOS POSTERIORES.

A primeira parte da dissertação analisa o problema das deformações finitas em treliças viscoelásticas. É um assunto de interesse especialmente acadêmico, no geral existem poucas referências e, além disso, ainda estão referidas a modelos muito simplificados. A formulação e o programa desenvolvidos foram verificados com as soluções existentes e permitem a solução de treliças planas de qualquer tipo de material e geometria, podendo descrever toda a história de deformação da estrutura. A formulação básica pode, em princípio, ser estendida, sem dificuldades, a outros tipos de estruturas, como pórticos, cascas, etc.

A segunda parte da dissertação analisa pórticos planos (eventualmente com vigas mistas) e é de bastante aplicação prática. Permite analisar a maioria dos problemas relacionados com deformação lenta em estruturas de concreto sob carga de serviço: deformações, redistribuição de tensões, efeitos de temperatura, de retração e de deslocamento de apoio. Pode trabalhar com qualquer representação da deformação lenta, e em particular, com a formulação do CEB, que está inserida no programa. A extensão desta formulação a pórticos espaciais não deve apresentar dificuldades maiores. Mais interessante, e também mais complexa, é a análise do deslizamento na interface concreto-aço e do comportamento não linear dos materiais.

11 - BIBLIOGRAFIA.

- 1 - AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Committee 209. Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures. In: ADRIAN PAUW SYMPOSIUM ON DESIGNING FOR CREEP AND SHRINKAGE IN CONCRETE STRUCTURES, Houston, Nov. 1978. Papers... Detroit, ACI, 1982. p.193-300. (ACI. Special Publication, 76)
- 2 - BALMER, H. A. Another aspect os the error in excentric beam formulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 12(11):1761-71, 1978.
- 3 - BATHE, K.-J. Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Clifs, N.J.,Prentice Hall,1985, 735 p
- 4 - BATHE, K.-J. & DVORKIN, E.N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations. Computers and Structures, Oxford, 17:871-9,1983.
- 5 - BAZANT, Z.P. Mathematical models for creep and shrinkage of concrete. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FUNDAMENTAL RESEARCH ON CREEP AND SHRINKAGE OF CONCRETE, Lausanne, Sept. 1980.Papers Chichester , John Wiley, 1982.
- 6 - BERGAN, P. et alli, Solution techniques for non- linear finite element problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 12:1677-96, 1978.
- 7 - BIGNON, P.G. Interpolação exata e aproximada na teoria de vigas excêntricas. Trabalho à ser publicado nos anais da 25^o Jornadas Sulamericanas de Ingenieria Estructural, Madrid, 1988.
- 8 - BRANSON, D.E. Deformation of concrete structures, New York, McGraw Hill, 1977. 546 p. 1, 1977. 546 p.
- 9 - BREBBIA, C.A. & FERRANTE,A.J. The finite element technique.

Porto Alegre. Ed. da UFRGS, 1975.410p.

- 10- _____ . Computacional methods for the solution of engineering problems, London, Pentech Press, 1978, 354 p.
- 11- CALZON, J.M. & HERRERA, J.O. Construccion mixta, hormigon-acero. Madrid, Rueda, 1979. 910 p.
- 12- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. Structural effects of time-dependent behavior or concrete. Paris, 1984. (Bulletin d'information No. 142/142Bis)
- 13- CREUS, G.J. Analisis no lineal de estructuras: elementos básicos y aplicaciones. Porto Alegre, CPGEC da UFRGS, 1985. 106 P. (Caderno de Engenharia, 7)
- 14- _____ . Viscoelasticity: Basic theory and applications to Concret Structures. Heidelberg, Springer-Verlag, 1986, 169 p.
- 15- CRISFIELD, M.A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. Computeres and Structures, Oxford, 13:55-62, 1981.
- 16- CROLL, J.G.A. & WALKER, A.C. Elements of structural stability, London, Macmillan, 1972, 223 p.
- 17- EUROPEAN CONVENTION FOR CONSTRUCTIONAL STEELWORK. Composite structures, London, The Construction Press, 1981, 183p.
- 18- GHALI, A. & FAVRE, R. Concrete structures: stresses and deformation. New York, Champman and Hall, 1986. 352p.
- 19- GUPTA, A.K. & MA, P.S. Error in eccentric beam formulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 11:1473-83, 1977.
- 20- HAISLER, W.E. & STRICKLIN, J.A. Displacement incrementation in non-linear structural analysis by the self-correcting method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 11:3-10, 1977.
- 21- HENSLEY, R.C. & AZAR, J.J. Computer analysis of non-linear truss-structures. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 94(6):1427-39, June 1968.
- 22- HIRST, M.J.S. & YEO, M.F. The analysis of composite beams using standard finite element programs. Computeres and

- Structures, Oxford, 11:233-7, 1980.
- 23- HUSEYIN, K. Nonlinear theory of elastic stability. Noordhoof International, 1975. 220 p.
- 24- HULT, J. Oil canning problems in creep. Creep in structures. Ed. N.I.Hoff, Academic Press, New York, 1962.
- 25- ISHAI, O. Elastic and inelastic behaviour of hardened mortar in torsion. SYMPOSIUM ON CREEP OF CONCRETE, Houston, Tex., Mar. 1964. Papers... Detroit, American Concrete Institute, 1964, P.65-94. (ACI. Special Publication, 9)
- 26- JOHNSON, R.P. Reserach on steel-concrete composite beams, Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 96(3):445-59, Mar. 1970.
- 27- JOHNSON, R.P. & MAY, I.M. Partial-interaction design of composite beams, The Structural Engineer, London, 53(8):305-11, Aug. 1975.
- 28- KONDOH, K. & ATLURI, S.N. Influence of local bukling on global instability: simplified, large deformations, post-bukling analysis of plane trusses. Computeres and Structures, Oxford, 21(4):613-27, 1985.
- 29- LEIPHOLZ, H. Stability of elastic systems, Alphen aan den Rijn, Sigthoof & Noordhoff, 1980. 475 p.
- 30- LEONHARDT, F. Construções de Concreto; Verificação da capacidade de utilização. Rio de Janeiro, Interciências, 1979, v.4, 210 p.
- 31- MARTIN, H.C. & CAREY, G.F. Introduction to finite element analysis. New York, McGraw Hill, 1973. 386 p.
- 32- MILLER, R.E. Reduction of the error in excentric beam modeling, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 15:575-82, 1980.
- 33- MOFFAT, K.R. & DOWLONG, P.J. The longitudinal bending behaviour of composite box girder bridges having incomplete interaction. The Structural Engineers, London, 56B(3):53-60, Sept. 1978.
- 34- NEVILLE, A.M. & DILGER, W. Creep of concrete: plain,

reinforced and prestressed. Amsterdam, North Holland, 1970. 621p.

- 35- NOOR, A.K. & PETERS, J.K. Recent advances in reduction methods for instability analysis of structures. Computeres and Structures, Oxford, 16:67-80, 1983.
- 36- PAPADRAKAKIS, M. Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods, Computeres and Structures, Oxford, 14(5/6):393-402, 1981.
- 37- PAUW, A. & MEYERS, B.L. Effect of creep and shrinkage of the behavior of reinforced concrete members. In: SYMPOSIUM ON CREEP OF CONCRETE. Papers ... Detroit, American Concrete Institute, 1964. p.129-58. (ACI. Special Publication, 9)
- 38- PLUM, D.R. & HORNE, M.R. The analysis of continuous composite beams with partial interaction. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, London, 59(pt.2):625-643, Dec. 1975.
- 39- POWELL, G.H. & SIMONS, J. Improved iteration strategy for nonlinear structures. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 17(10):1455-67, Oct. 1981.
- 40- PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of Matrix Structural Analysis, New York, Mc Graw Hill, 1973. 386 p.
- 41- REILLY, R.J. & SUTTON, E.L. An iterative solution for geometrically nonlinear trusses. Computeres and Structures, Oxford, 3(5):1053-65, 1973.
- 42- RIKS, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. Journal Applied Mechanics, 39:1060-66, 1972.
- 43- _____. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. International Journal for Solids and Structures, Oxford, 15:529-51, 1979.
- 44- ROSEN, A. & SCHMIT Jr., L. A. Design-oriented analysis of imperfect trusses structures. Part I: Accurate analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 14(9):1309-21, 1979.
- 45- _____. Part II. Approximate analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering,

- Sussex, 15(4):483-94, 1980.
- 46- RUSH, H. et alli. Creep and shrinkage. New York, Springer, 1983. 284 p.
- 47- SABNIS, G.M. Composite construction in steel and concrete. In: KONG, F.K., ed. Handbook of structural concrete. London, Pitman, 1983.
- 48- SANTOS, M.I.G. dos & KLEIN, S.P. Análise matricial de estruturas de barras pelo método da rigidez. Porto Alegre, CPGEC da UFRGS, 1984, 76 p.
- 49- SHARIFI, P. & POPOV, E.P. Nonlinear buckling analysis of sandwich arches. Journal of the Engineering Mechanics Division, New York, ASCE, 97:1397-1412, 1971.
- 50- SZYSZKOWSKI, W. & GLOCKNER, P.G. Finite deformation analysis of linearly viscoelastic simple structures. International Journal Nonlinear Mechanics, 20(3):153-175, 1985.
- 51- SZILARD, R. Critical load and post-buckling analysis by FEM using energy balancing technique. Computers and Structures, Oxford, 20(1/3):277-86, 1985.
- 52- THOMPSON, J.M.T. & HUNT, G.W. Elastic instability phenomena. Chichester, John Wiley, 1984. 209p.
- 53- _____. A general theory of elastic stability. London, John Wiley, 1973. 322p.
- 54- TIMOSHENKO, S.P. & GERE, J.M. Theory of elastic stability. 2.ed New York, McGraw-Hill, 1961. 541p.
- 55- VENANCIO FILHO, F. Análise matricial de estruturas. Rio de Janeiro, Almeida Neves 1975. 256 p.
- 56- ZIENKIEWICZ, O.C. Incremental displacement in nonlinear analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Sussex, 3:587-92, 1971.
- 57- _____. The finite element method, 3.ed. London, McGraw-Hill, 1977. 787p.

12 - APÊNDICESApêndice A.

Este apêndice reproduz as fórmulas do Apêndice D do CEB, usadas principalmente na seção 2.1.6 e representam deformações dependentes do tempo no concreto. A seguir, estão as expressões analíticas usadas. Seu significado está na seção acima referida.

Expressões para calcular deformação lenta:

$$D(t, \tau_0) = \beta_i(\tau_0) + \beta_a(\tau_0) + \varphi_d \beta_d(t - \tau_0) + \varphi_f [\beta_f(t) - \beta_f(\tau_0)]$$

$$\beta_i(\tau_0) = 0,875 \left[\frac{\tau_0 + 47}{\tau_0} \right]^{1/7,35}$$

$$\beta_a(\tau_0) = 0,8 \left\{ 1 - \left[\frac{\tau_0}{\tau_0 + 47} \right]^{1/2,45} \right\}$$

$$\beta_d(\tau_0) = \left[\frac{t - \tau_0}{t - \tau_0 + 328} \right]^{1/4,2}$$

$$\beta_f(t) = \left[\frac{t}{t + K_1(h_0)} \right]^{K_2(h_0)}$$

$$K_1(h_0) = e \left[5,02/h_0 + \ln (6,95 h_0^{1,25}) \right]$$

$$K_2(h_0) = e \left[0,00144 h_0 - 1,1 / h_0 - \ln (1,005 h_0^{0,2954}) \right]$$

$$\varphi_f = \varphi_{f1} \varphi_{f2}$$

$$\varphi_{f1} = 4,45 - 0,0035 R_h$$

$$\varphi_{f2} = e \left[4,4 \cdot 10^{-5} h_o - 0,357/h_o - \ln (h_o^{0,167}/2,6) \right]$$

Expressões para calcular retração:

$$\varepsilon_{sh} = \varepsilon_{s1} \varepsilon_{s2} \left[\beta_s(t) - \beta_s(\tau_o) \right]$$

$$\beta_s(t) = \left[\frac{t}{t + K_3(h_o)} \right]^{K_4(h_o)}$$

$$K_3(h_o) = 11,8 h_o + 16$$

$$K_4(h_o) = e \left[-0,00257 h_o + 0,32/h_o + \ln (0,22 h_o^{0,4}) \right]$$

$$\varepsilon_{s1} = \left[\frac{59}{90000} R_h^3 - 0,1254444 R_h^2 + 0,36888 R_h - 228 \right] 10^{-5}$$

Observação : A expressão para ε_{s1} foi modificada, pois desta forma representa melhor os valores dados na tabela do apêndice D do CEB.

$$\varepsilon_{s2} = e \left[0,00174 h_o - 0,32/h_o - \ln (h_o^{0,251}/1,9) \right]$$

Nota: Em todas as equações deste apêndice h_o está em centímetros, t e τ_o estão em dias e R_h está em porcentagem.

Apêndice B.

Diferenciação de integrais.

$$\frac{d}{dy} \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y) dx = \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) dx - f(g,y) \frac{dg}{dy} + f(h,y) \frac{dh}{dy}$$