DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PARA ELEMENTOS ESTRUTURAIS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS A CARREGAMENTO MONOTÔNICO OU CÍCLICO

FERNANDO RICARDO GAMBETTA SCHIRMBECK

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Porto Alegre
Julho de 1988

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof. Pablo Gaston Bignon

Orientador

Prof. Jarbas Milititsky

Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil

BANCA EXAMINADORA:

1. Pablo Gaston Bignon

   D.Sc. pela COPPE/UFRJ

2. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal

   Ph.D. pela NCSU/USA

3. Dario Lauro Klein

   M.Sc. pelo CPGEC/UFRGS

4. Américo Campos Filho

   D.Sc. pela USP/São Paulo

A minha família

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Pablo Gaston Bignon pela dedicada orientação, pela paciência e pela amizade recebida ao longo deste trabalho.

Ao Professor Jarbas Milititsky, coordenador deste curso, e na sua pessoa a todos os professores, pela ajuda dispensada.

Ao Conselho Nacional de Energia Nuclear (CNEN), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação do Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro.

À Juliana Zart Bonilha, pela elaboração da bibliografia.

Ao Roberto Bisotto, pelo incentivo e constante colaboração.

Aos colegas e funcinários deste curso, pela amizade e apoio, e a todos àqueles que de alguma maneira ajudaram na realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo desenvolver e implementar, computacionalmente, procedimentos numéricos eficientes, aplicados à determinação do diagrama momento-curvatura, correspondentes à:

- uma seção típica, em vigas de concreto armado, submetida à carga monotônica ou cíclica de curta duração;
- um ponto genérico da superfície média em placas de concreto armado, submetidas à carga monotônica de curta duração.

Ainda, à luz dos resultados obtidos, visa também propôr um modelo simplificado em termos de resultantes de tensões e deformações generalizadas.

Inicialmente, é descrito um modelo laminar para vigas, no qual a carga é aplicada de forma incremental sendo que, para cada etapa, as equações de equilíbrio não-lineares são resolvidas de maneira iterativa. Como consequência é proposta uma relação momento-curvatura em termos de resultantes.

A fim de verificar a validade e aplicabilidade dos métodos e dos algoritmos estudados e comparar-se os resultados com dados experimentais e respostas obtidas por outros pesquisadores, é apresentada uma série de exemplos numéricos.

A continuação, é aplicado o procedimento anterior para modelos de laje, livres de solicitações de membrana. Finalmente através de um estudo paramétrico dos diversos fatores que afetam o diagrama momento-curvatura, propõe-se uma relação simplificada.

SUMMARY

The objective of the present study is to develop an efficient numerical procedure for obtaining the moment-curvature relationship, correspondents:

- a typical section, in reinforced concrete beams, under cyclic or monotonically short term loading;

- a generic point on the average of reinforced concrete plates under monotonic, short duration loading. On the basis of the results indicated above, a simplified model is proposed, in terms of generalized stresses and deformations.

At first, a laminar model applicable to beams is described. The loads are incrementaly applied and at each stage the nonlinear equilibrium equations are solved iterative manner. In consequence it is proposed moment-curvature relationship in term of resultants.

Several numerical examples are presented in order to verify the validity and applicability of the developed models. The results obtained are compared to experimental and analytical data obtained by others investigators.

Next, the procedure previously described is applied to slabs free of membrane stresses. Finally through a parametric study of the different factors that affect a moment-curvature relationshhip, a simplified diagram is proposed.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

1. Letras romanas maiúsculas

A_{ci} - área da camada de concreto i

A_{sj} - área da seção transversal da camada j da armadura

E_c - módulo de deformação longitudinal do concreto, tangente na origem

E_s - módulo de deformação longitudinal do aço, tangente na origem

F_{si} - resultantes normais na armadura no plano u , v.

N - força normal

N_u, N_v - esforço normal por unidade de comprimento na seção da laje perpendicular as direções u e v, respectivamente

M - momento fletor

M_u, M_v - momento fletor por unidade de comprimento na seção da laje perpendicular aos eixos u e v.

M_y - momento fletor de plastificação de uma seção de concreto armado

T-D - tensão-deformação

2. Letras romanas minúsculas

b - largura da seção transversal do elemento

b_i - largura da camada i

f_c - resistência à compressão no concreto

f_{ck} - resistência característica do concreto

f'_c - resistência cilíndrica à compressão do concreto

f'_t - tensão de fissuração do concreto

f_y - tensão de escoamento do aço

h - altura da seção transversal do elemento

h_i - altura da camada i

z - coordenada referida ao baricentro da seção transversal

z_{ci} - coordenada central da camada de concreto i

z_{sj} - coordenada central da camada de aço j

3. Letras gregas minúsculas

β - ângulo que define a posição do sistema u,v frente ao sistema x,y coincidente com as armaduras

ε - deformação específica uniaxial

ε_c - deformação do concreto

ε_{ij} - deformações específicas componentes do tensor cartesiano de deformações infinitesimais (simétrico)

ε^g_{ij} - valores de ε_{ij} no baricentro da seção transversal

ε_{co} - deformação de compressão igual a 2‰ associada a tensão máxima

ε_g - deformação normal na direção do eixo x e na posição do baricentro da seção transversal

$\varepsilon^u_g, \varepsilon^v_g$ - deformações nas direções u e v no baricentro da seção transversal

ε_s - deformação do aço

ε_{si} - deformação normal na camada i

ε_x - deformação normal na direção do eixo x

ε_y - deformação de escoamento do aço

σ - tensão normal

σ_c - tensão normal de compressão no concreto

σ_{ci} - tensão normal do concreto na camada i

σ_s - tensão normal no aço

σ_{sj} - tensão normal da armadura na camada j

χ - curvatura

χ_u, χ_v - curvaturas nas direções dos eixos principais u e v.

μ - taxa de armadura.

1. INTRODUÇÃO

1.1 - Generalidades

As estruturas em concreto armado devem ser projetadas para atender às condições de segurança, seja em relação aos estados limites últimos ou seja referentes aos estados limites de utilização. Em qualquer dos casos, é conveniente fazer uma previsão acurada de deslocamentos, forças internas e deformações da estrutura submetida às cargas de serviço que lhe são impostas. Tais cargas incluem tanto a história de carga ativa, à qual a estrutura está submetida incluindo o processo construtivo, quanto as cargas impostas pelas condições do ambiente no qual ela está inserida.

Para descrever a resposta em forma realística, a carga última deve ser estimada o melhor possível, sendo desejável, ainda, ter uma previsão do comportamento cinemático e mecânico da estrutura durante uma série de carregamentos, atingindo as fases elástica e inelástica, inclusive nas vizinhanças do colapso.

A determinação analítica de deslocamentos, forças internas, tensões e deformações em estruturas de concreto armado, durante toda sua história de carga, apresenta um elevado grau de complexidade em função de vários fatores:

- não-homegenidade do material;
- mudança contínua da topologia mecânica e geométrica do sistema, devida às variações no endurecimento e fissuração do concreto;
- relações tensão-deformação não-lineares e histeréticas dos materiais componentes;
- variação das propriedades do concreto com o tempo;
- deformações devidas à fluência, retração,

e mudanças de temperatura;

- efeitos da não-linearidade geométrica.

Decorrente destas dificuldaes, resulta natural atacar estes problemas impondo algumas restrições quanto as cargas, geometria e propriedades mecânicas e reológicas dos materiais dos materiais. Dentro desta óptica, serão abordados, nos cápitulos a seguir, alguns casos particulares.

1.2 - OBJETIVOS E METODOLOGIA

O presente estudo tem por objetivo desenvolver e implementar, computacionalmente, procedimentos numéricos eficientes, aplicados à determinação do diagrama momento-curvatura, correspondentes à:

- uma seção típica, em vigas de concreto armado, submetida à carga monotônica ou cíclica de curta duração;
- um ponto genérico da superfície média em placas de concreto armado, submetidas à carga monotônica de curta duração.

Ainda à luz dos resultados obtidos, visa também propôr modelos simplificados em termos de resultantes de tensões e deformações generalizadas.

O principal motivo que impulsionou o estudo e a proposição de uma relação momento-curvatura simplificada foi a possibilidade concreta de se agilizar os cálculos dos momentos a partir de curvaturas calculadas previamente por métodos numéricos, tais como o de Elementos Finitos, nos casos de vigas e placas de concreto armado.

Inicialmente, é descrito um modelo laminar para vigas, no qual a carga é aplicada de forma incremental sendo que, para cada etapa, as equações de equilíbrio não-lineares são resolvidas de maneira iterativa. A seção transversal do elemento é dividida em faixas simétricas em relação ao plano de atuação das cargas exteriores, permitindo acompanhar as variações da largura e das características mecânicas, levando em conta equações constitutivas uniaxiais de cada material. As solicitações internas são avaliadas por uma integração numérica na espessura, empregando, para compatibilizar as deformações a hipótese das seções planas.

Dando seguimento à dissertação, é proposto um modelo em termos de resultantes, definindo-se uma relação momento-curvatura - segundo um esquema trilinear histerético - onde aparecem, bem definidos, os estádios I, II e III e se inclui a possibilidade de efetuar laços histeréticos para descargas parciais.

A fim de verificar a validade e aplicabilidade dos métodos e dos algoritmos estudados e comparar-se os resultados com dados experimentais e respostas obtidas por outros pesquisadores, é apresentada uma série de exemplos numéricos.

À continuação, é aplicado este procedimento para modelos de laje, livres de solicitações de membrana, em que se considera a influência da orientação da armadura em relação às curvaturas principais e o estado das curvaturas principais aplicadas, mas agora para cargas monotônicas de curta duração.

Finalmente com este último modelo e através de um estudo paramétrico da influência dos diversos fatores que afetam a resposta, como por exemplo, a orientação da armadura em relação as curvaturas principais, o estado de aplicação das curvaturas principais e a taxa de armadura, propõe-se uma relação simplificada momento-curvatura para lajes, conforme estabelecido acima.

2. PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

2.1 - Considerações Gerais

As estruturas em concreto armado submetidas a carregamento cíclico são constituídas por seções com armadura ,geralmente dupla e simétrica, e se caracterizam por um comportamento mecânico sumamente complexo. O aço pode ser considerado um material homogêneo com propriedades, em geral, bem definidas. Porém o concreto é um material heterogêneo e suas propriedades dependem de muitos fatores e são de difícil definição. Entretanto, num sentido macroscópico, pode-se considerá-lo um material homogêneo, se suas propriedades são definidas com bases estatísticas. Essa hipótese é, em geral, aceita para as estruturas de Engenharia Civil e permite estudar o comportamento das peças como se fossem constituídas de dois materiais homogêneos.

As curvas tensão-deformação destes materiais, adquirem importância primordial na obtenção de resultados analitícos para interpretar o comportamento das estruturas sob carga estática ou dinâmica. As relações tensão-deformação para o concreto e o aço, quando submetidos a carregamento alternado, apresentam um comportamento histerético e extremamente não-linear. A curva tensão-deformação do primeiro é diferente para tração e compressão. A fissuração do concreto e a perda progressiva da aderência entre o aço e o concreto são alguns dos mais importantes fatores que contribuem para a não-linearidade física do conjunto. Além disso, as propriedades do concreto dependem de sua idade e das condições do ambiente, tais como a temperatura e umidade, bem como da história de carga.

O aço para armadura ordinária, geralmente, é assumido como tendo uma relação tensão-deformação (relação T-D) simétrica para tração e compressão, sendo que suas propriedades podem ser consideradas independentes do tempo e do ambiente para a maioria das aplicações em Engenharia Civil.

Apresenta-se, a seguir, vários modelos matemáticos idealizados para representar as relações tensão-deformação histeréticas destes materiais, sendo posteriormente utilizados na análise de vigas e lajes de concreto armado submetidas a carregamento cíclico e monotônico, respectivamente.

2.2 - Relações tensão-deformação para o concreto

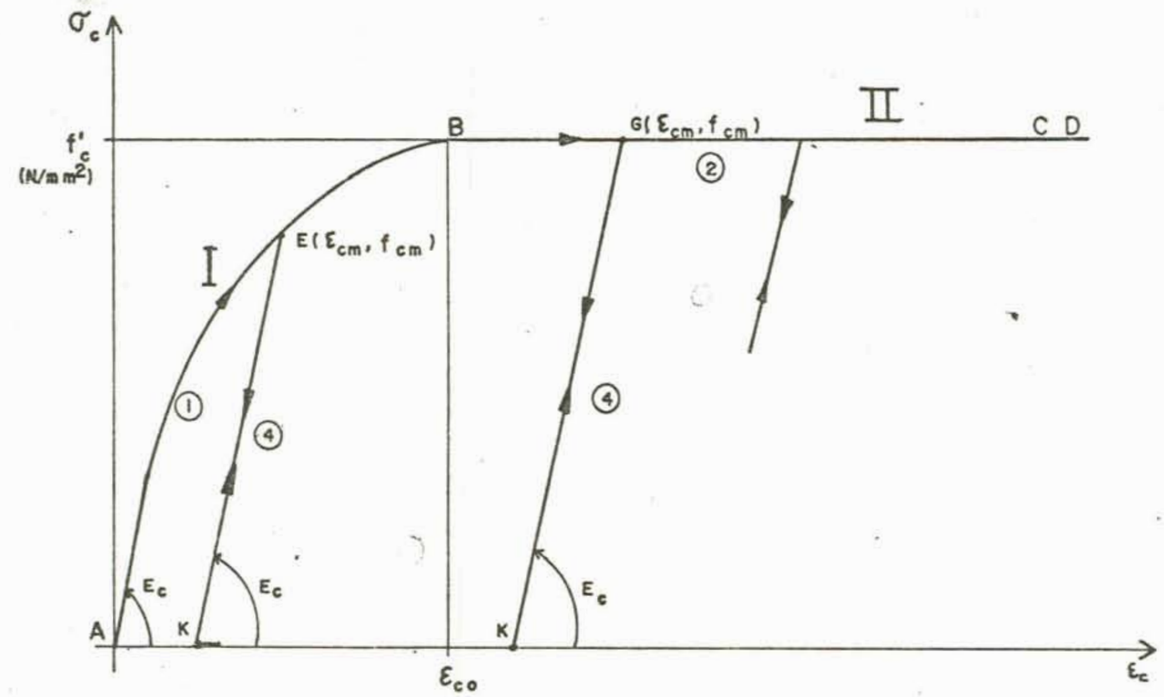
Os modelos matemáticos idealizados para representar a relação tensão-deformação histerética e não-linear do concreto são diferentes para compressão e para tração.

Nesta descrição, adota-se sinal positivo para compressão e negativo para tração nos modelos do concreto.

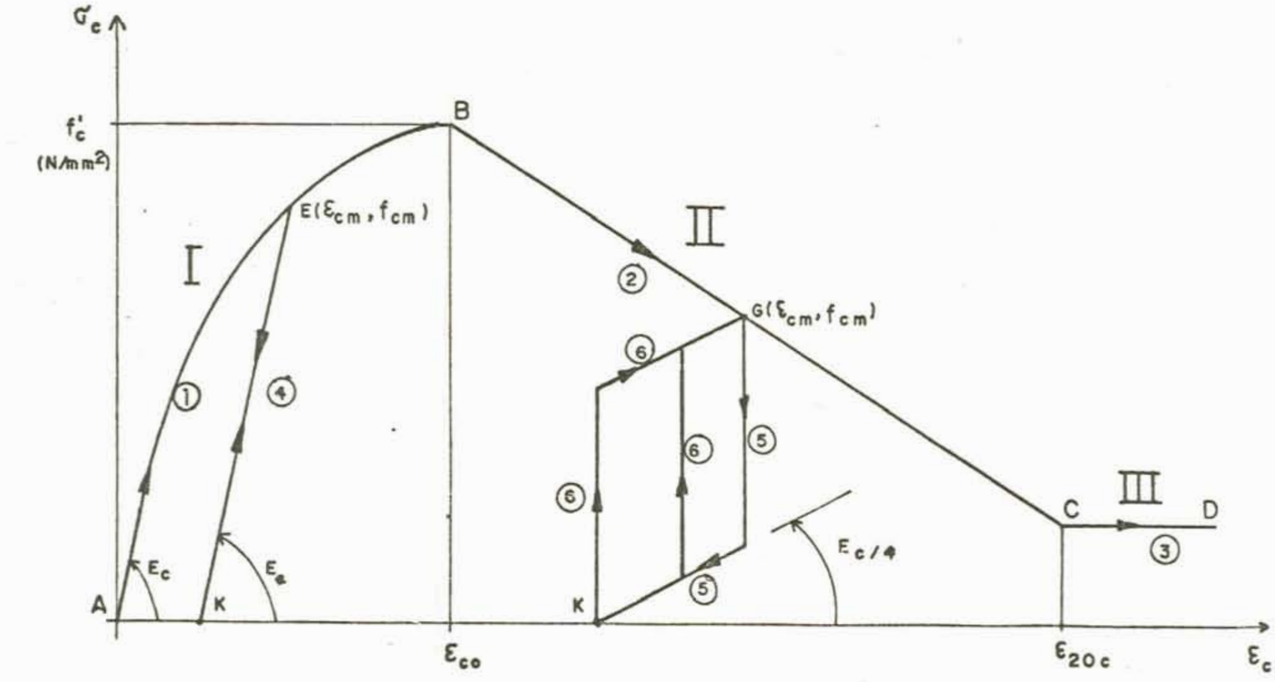
As curvas idealizadas para compressão e para tração são descritas separadamente.

2.2.1 - Compressão

Como exemplo da evolução das idealizações para representar a curva tensão-deformação do concreto, nas figuras 2.1.a, 2.1.b e 2.1.c mostram-se três diferentes modelos analíticos, o de Viana[15], o de Park e Kent[9] e o de Blakeley e Park[3], respectivamente. Estas relações apresentam uma curva tensão-deformação ABCD, que caracteriza o comportamento para uma sequência monotônica de incrementos de deformação, denominada de curva "esqueleto", a qual é definida por regiões, e acrescida de laços histeréticos para representar os decréscimos e posteriores incrementos de deformação.



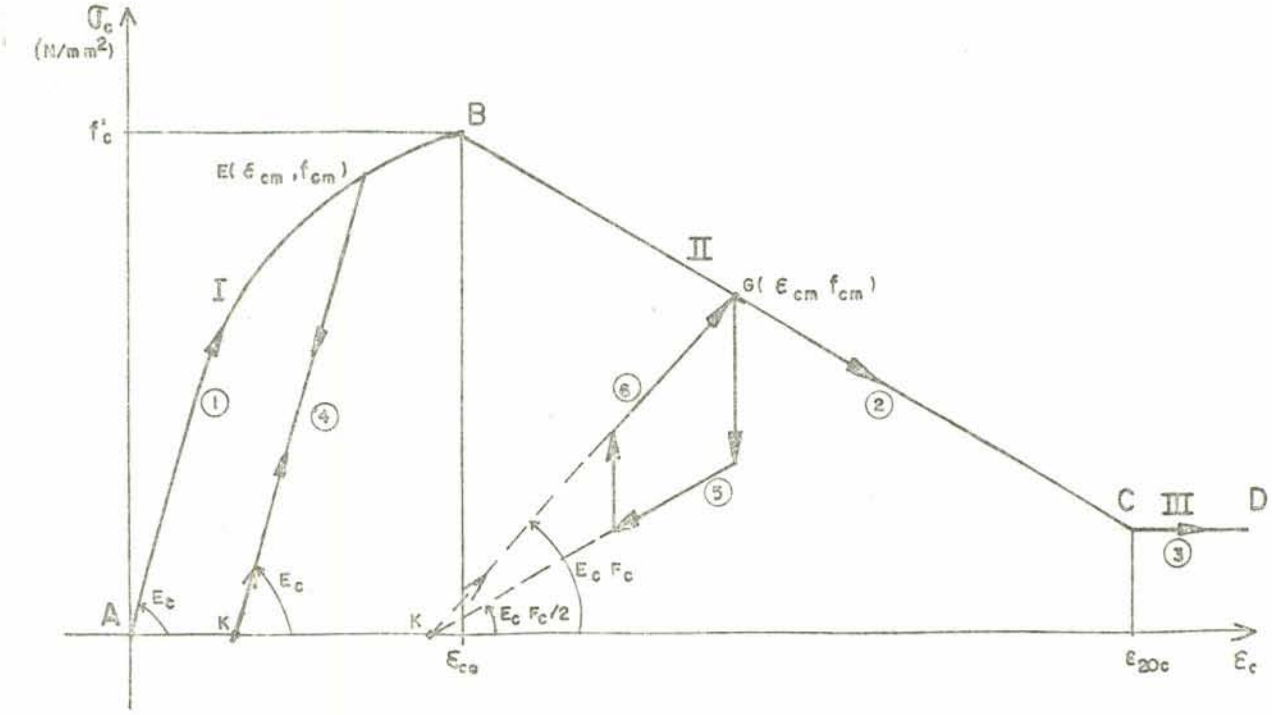
- a -



- b -

FIGURA 2.1. Relações T-D para o concreto na compressão.

a) Modelo 1: Viana;
b) Modelo 2: Park e Kent;
c) Modelo 3: Blakeley e Park.



\- c -

A seguir, serão descritas conjuntamente as regras gerais que regem estes modelos, e as regras particulares de cada modelo, sendo que cada um foi dividido em três regiões I, II e III.

Regra 1. A carga na Região I é definida pela equação da parábola seguinte:

$$\sigma_c = f'_c \{ 2 \varepsilon_c / \varepsilon_{co} - (\varepsilon_c / \varepsilon_{co})^2 \} \qquad (2.1)$$

onde ε_c = deformação do concreto; σ_c = tensão no concreto; f'_c = resistência cilíndrica à compressão em N/mm^2; ε_{co} = 0,002 = deformação do concreto associada à tensão máxima de compressão.

Regra 2. A relação tensão-deformação, para incrementos de deformação na região II, define-se para o modelo 1 como uma reta com tensão constante e igual a f'_c. Para o modelo 2 , toma-se a equação da reta

$$\sigma_c = f'_c \{ 1 - Z (\varepsilon_c - \varepsilon_{co}) \} \quad (2.2)$$

onde

$$Z = 0,5/\{(3 + 0,29 f'_c)/(145 f'_c - 1000) - \varepsilon_{co} + c\}, \quad (2.4)$$

e

$c = 0,75 \, p'' \sqrt{\frac{b''}{s}}$, que é o termo do confinamento e será desprezado, por conter informações não sempre disponíveis.

Regra 3. Os incrementos de deformação na Região III, para os modelos 2 e 3, se produzem sob tensão constante e igual a

$$\sigma_c = 0,20 f'_c . \quad (2.5)$$

Regra 4. A descarga e posterior recarga de pontos pertencentes á Região I, e também à Região II do modelo 1, se efetuam com uma rigidez definida pelo módulo de deformação longitudinal do concreto tangente na origem, E_c , que segundo (2.1) resulta

$$E_c = 1000 f'_c \quad (N/mm^2) . \quad (2.6)$$

Regra 5. Para decréscimos de deformação nas Regiões II e III, no modelo 2, a tensão diminui 3/4 da tensão atingida na curva esqueleto e depois varia linearmente com inclinação igual a 0,25 E_c. No modelo 3, a tensão diminui à metade e depois segue com inclinação igual a $0,5 \, E_c F_c$, sendo o fator de correção, F_c, definido por

$$F_c = 0,8 - \frac{0,7 \, (\varepsilon_{cm} - \varepsilon_{co})}{\varepsilon_{20c} - \varepsilon_{co}} , \text{ para } \varepsilon_{co} < \varepsilon_c < \varepsilon_{20c} \quad (2.7)$$

$$F_c = 0{,}1, \text{ para } \quad \varepsilon_c > \varepsilon_{20c} \quad . \tag{2.8}$$

onde

$$\varepsilon_{20c} = \varepsilon_{co} + 0{,}8 \; (Z)^{1/2} \tag{2.9}$$

A deformação na Região III é constante e igual a ε_{20c} dada por (2.9).

Regra 6. A recarga, a partir do nível atingido na regra 5, se produz com um incremento de tensão, sem variar a deformação, até o valor igual a 3/4 da tensão máxima atingida no ciclo. Continuando, segue com inclinação igual a $0{,}25E_c$ para o modelo 2 e no modelo 3 segue sem variar até o valor correspondente na reta superior, definida por uma inclinação igual a $E_c F_c$. Prosseguindo, através de incrementos sucessivos de deformação, atinge-se a máxima tensão do ciclo (ponto G).

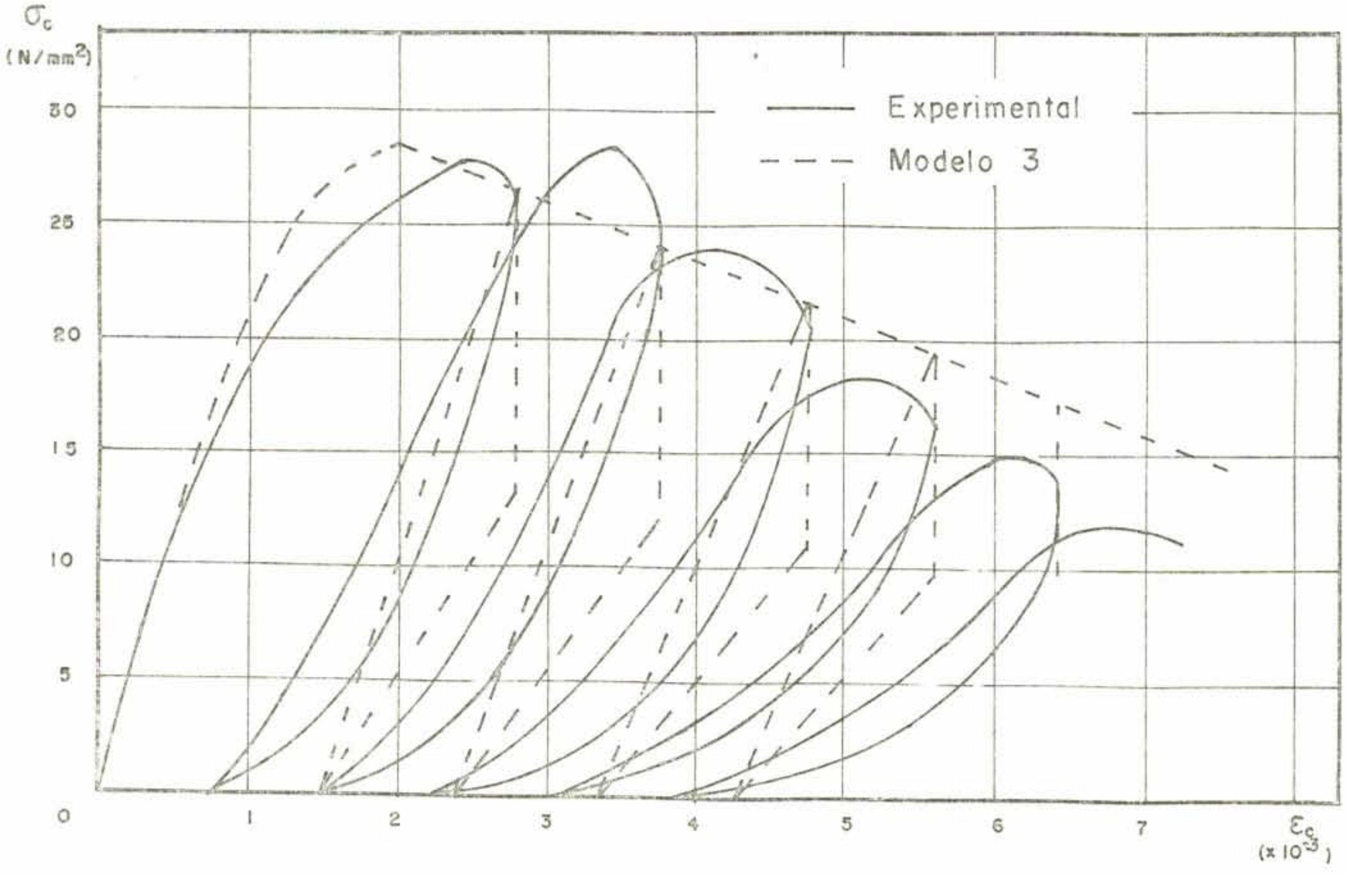


FIGURA 2.2 - Relações T-D para o concreto submetido a carga cíclica

A figura 2.2[1] mostra a curva determinada analiticamente pelo modelo 3 e a reposta experimental obtidas para ensaios sobre corpos cilíndricos de concreto, com f'_c igual a 25,85 N/mm^2, submetido á carga e descarga. Comparando ambas curvas, se verifica que ocorre uma pequena diferença nos laços de histerese devido, principalmente, a maior rigidez no início da descarga. Para os fins propostos e à luz dos resultados posteriores, considerou-se satisfatória a representação dos laços para o concreto, porque a influência no comportamento do conjunto é pequena frente ao dominante efeito histerético do aço.

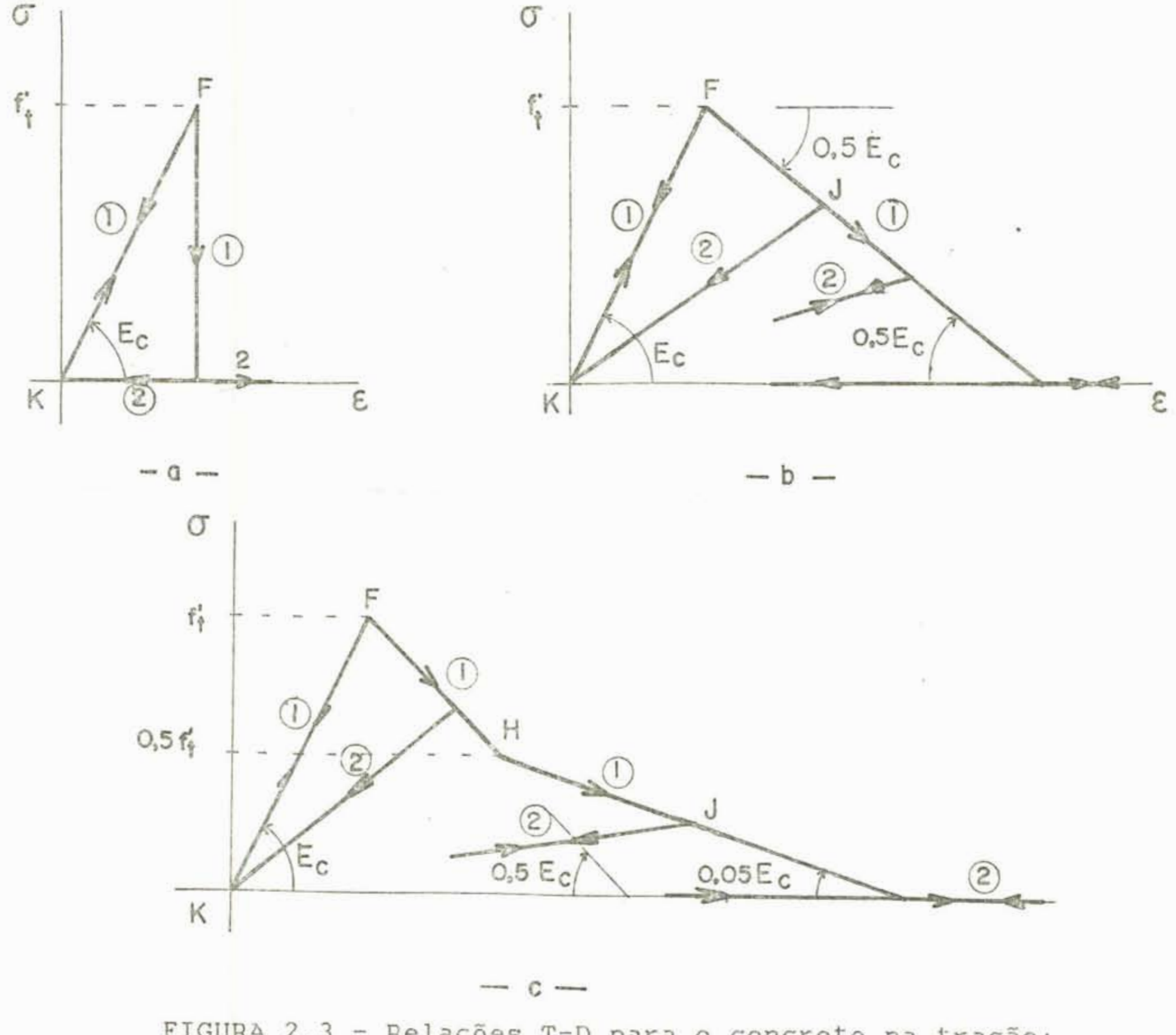


FIGURA 2.3 - Relações T-D para o concreto na tração:
a) Modelo 4: usual, fissuração brusca
b) Modelo 5: Vebo e Galhi modificado
c) Modelo 6: Vebo e Galhi modificado.

2.2.2 - Tração

As relações tensão-deformação, idealizadas para representar a tração na flexão do concreto, são mostrados nas figuras 2.3.a (Relação usual), 2.3.b e 2.3.c (Relações modificadas de Vebo e Galhi[14]), denominadas respectivamente como modelos 4, 5 e 6. Estes diagramas dependem apenas do conhecimento da resistência cilíndrica à compressão, f'_c, sendo, a partir deles, calculados módulo de deformação longitudinal e tensão de fissuração, que definem os parâmetros dos modelos.

O ponto de origem das relações T-D de tração, K, corresponde nas curvas de compressão ao ponto no qual a tensão é igual a zero.

A seguir, serão descritas em forma conjunta as regras referentes estes modelos, citando as excessões para cada modelo.

Regra 1. A descarga se verifica com inclinação igual ao módulo de deformação longitudinal, E_c, até atingir a tensão de fissuração, f'_t, dada por:

$$f'_t = 0{,}625\ (f'_c)^{1/2}\ (N/mm^2). \qquad (2.10)$$

A partir daí, ocorre a fissuração, e a tensão:

- Vale zero, para o modelo 4.
- Segue com inclinação negativa igual a $0{,}5E_c$ até atingir a tensão zero, para o modelo 5.
- Igual ao modelo 5 até atingir a tensão $0{,}5f'_t$. Após, segue com declividade negativa igual a $0{,}05E_c$ até alcançar a tensão nula, para o modelo 6.

Para estes 3 modelos, as tensões, após atingirem o valor zero, permanecem nulas para decréscimos da deformações.

Regra 2. Se o concreto não fissurou, a recarga se faz com inclinação igual à E_c até chegar à zona de compressão. Se fissurou, a recarga é definida pela reta que passa pelos pontos de início de recarga, J, e de início de descarga, K, até chegar à zona de compressão.

Deve-se salientar, que os modelos 5 e 6 não pretendem representar a relação T-D em um ensaio de tração uniaxial, mas sim introduzir, numa formulação contínua para flexão de concreto armado, a colaboração da tração no concreto entre fissuras, que é um fenômeno discreto.

2.3 - Relação tensão-deformação para o aço

2.3.1. Modelo elasto-plástico

As regras da relação, mostrada na figura 2.4, são as seguintes :

Regra 1. A carga e descarga na Região I é elástica linear, com inclinação igual ao módulo tangente inicial, E_s.

Regra 2: A carga na Região II se verifica com inclinação igual à $0.005E_s$.

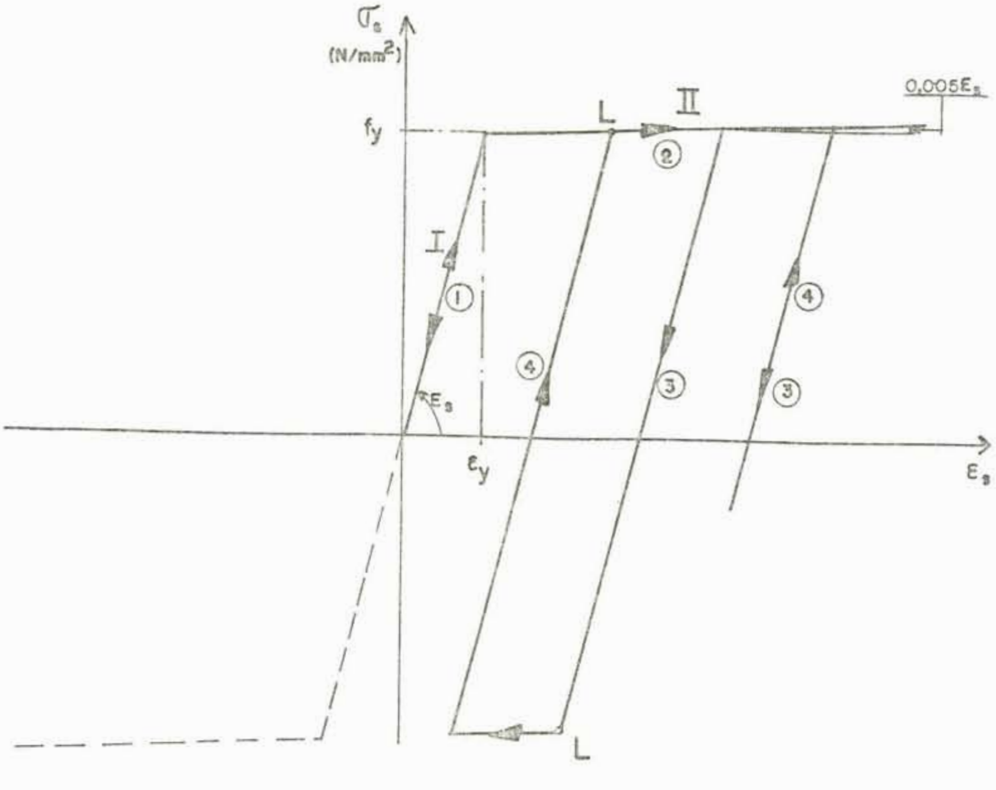


FIGURA 2.4 - Relação T-D elastoplástica

Regra 3. A descarga, a partir da Região II, se produz com inclinação igual à da regra 1 até o ponto L, intersecção desta com a reta da Região II, de sinal oposto à tensão máxima atingida no início do ciclo. Depois segue com inclinação igual a $0{,}005E_s$.

Regra 4. A recarga desde a tensão atingida na regra 3 é com inclinação definida pelo módulo tangente inicial.

2.3.2. Modelo de Agrawal

Esta relação tensão-deformação[1] descreve o comportamento das armaduras submetidas a carregamentos cíclicos e possui o ciclo típico mostrado na figura 2.5. As regras são as seguintes:

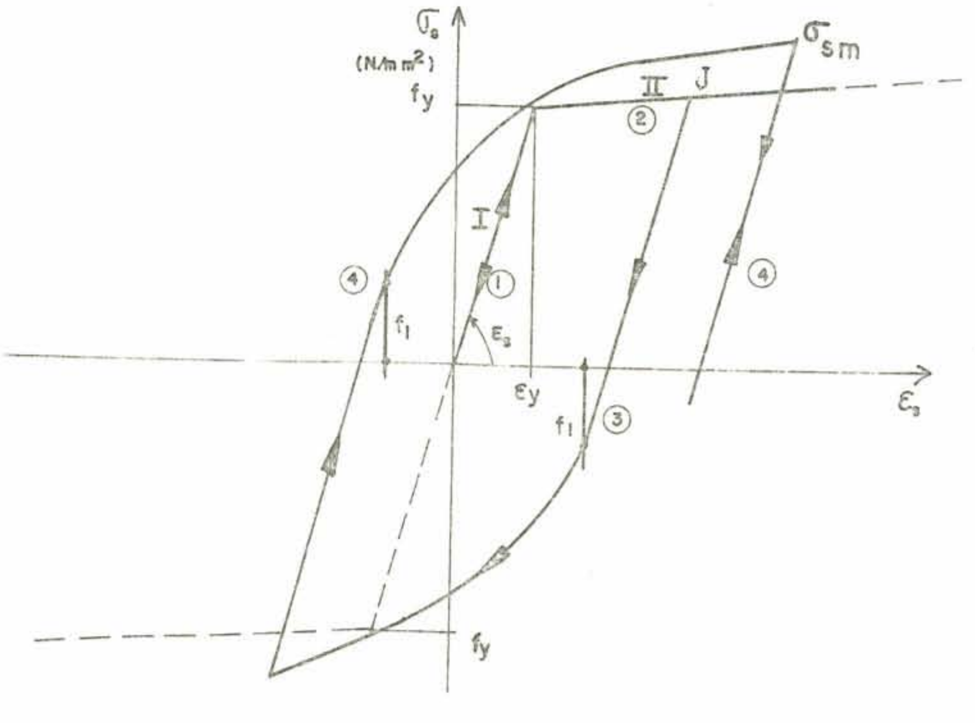


FIGURA 2.5 - Relação T-D para o aço.

Regra 1. Na Região I a carga e descarga é elástica e linear com rigidez definida pelo módulo tangente inicial, E_s.

Regra 2. A carga na Região II se verifica com inclinação igual à $0{,}005E_s$.

Regra 3. A descarga a partir da tensão máxima atingida na regra 2, ponto J, se efetua com inclinação igual a da Região I até atingir a tensão f_1, de sinal oposto. A tensão f_1 é definida pelo ponto de intersecção da reta anterior com a curva correspondente à equação (2.11), conforme a figura 2.6. O trecho curvo, que se segue a partir da tensão f_1, tem a equação

$$f_s = \pm 6{,}895 \left| 64{,}5 - 52{,}7\,(0{,}838)^{1000E} \right| \; (N/mm^2) \qquad (2.11)$$

onde o sinal positivo corresponde à tensões de tração e

$$E = \left| \varepsilon_s - \varepsilon_N \right| . \qquad (2.12)$$

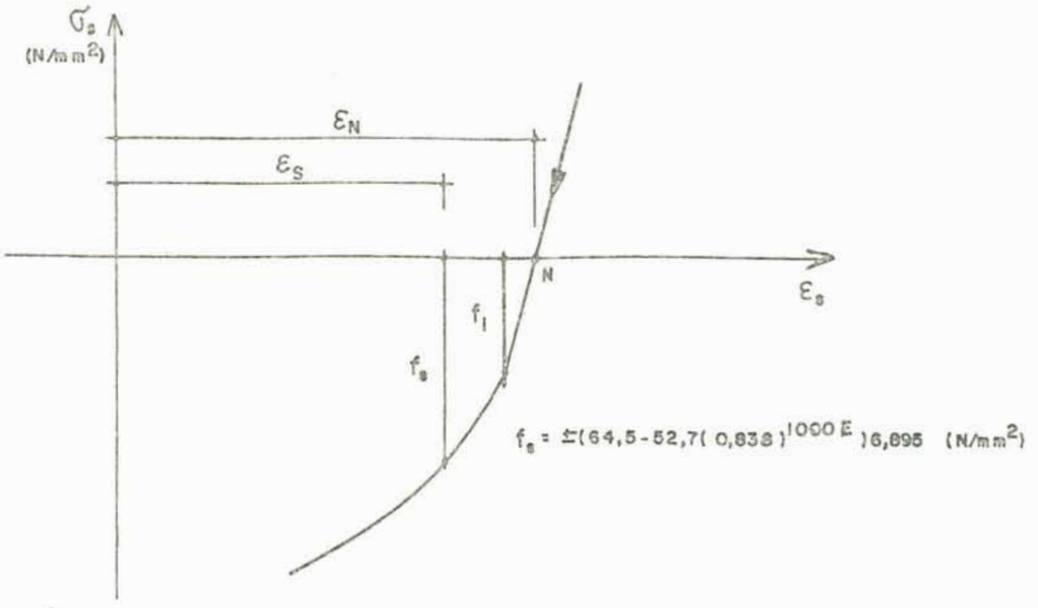


FIGURA 2.6 - Ponto de interseção correspondente a tensão f_1

A tensão f_1 é calculada com a deformação igual a 0,00065. Para os aços com tensão de escoamento diferentes multiplica-se o coeficiente 6,895 da equação (2.11) por $f_y/363$ (N/mm^2).

Regra 4. A recarga, a partir da tensão atingida na regra 3, se a tensão f_1 não foi atingida, origina uma reta com inclinação correspondente ao módulo de deformação longitudinal até à tensão máxima neste ciclo, $_{sm}$, retomando a curva de carga anterior. Se for atingida a tensão f_1, a recarga passa a ser controlada de forma semelhante a regra 3.

3. MODELOS HISTERÉTICOS PARA SEÇÕES DE VIGA EM CONCRETO ARMADO

3.1 - Generalidades

A predição do comportamento de vigas de concreto armado, submetidas a carregamento cíclico, é muito importante como ponto de partida para o estudo da resposta dinâmica de estruturas de concreto armado solicitadas por ações de vento, sismo ou impacto. Este problema é extremamente complicado por diversos fatores que o influenciam, tais como, abertura e fechamento de fissuras, variações na aderência entre o concreto e o aço, fluência do concreto, efeito de Bauschinger no aço, história de carga, laços de histerese e plastificação local.

As cargas consideradas neste capítulo variam apenas quase-estaticamente e serão descritos modelos histeréticos para elementos de viga de concreto armado, obtendo-se as respostas em termos de resultantes de tensões e deformações generalizadas. São apresentados modelos laminares com as diferentes relações tensão-deformação para o aço e o concreto descritos no capítulo anterior, sendo também proposto um diagrama momento-curvatura simplificado.

Posteriormente, compara-se os resultados analíticos destes modelos com as respostas experimentais de ensaios em vigas de concreto armado submetida a carga e descarga.

3.2 - Modelos Laminares

3.2.1 - Procedimento para obtenção dos diagramas momento-curvatura.

Considerando como exemplo típico uma viga, em flexão, carregada no seu plano de simetria, cuja seção transversal simétrica mostra-se na figura 3.1 e onde, por simplicidade, adotou-se seção retangular. Assumem-se as seguintes hipóteses:

I) A formulação está inserida no marco da Mecânica do contínuo. Desta forma, os efeitos da fissuração, escorregamento da armadura e de toda e qualquer fonte localizada de descontinuidade do campo de deslocamentos consideram-se dispersos em forma contínua nas vizinhanças da zona afetada, de modo que as deformações generalizadas médias são compatíveis e contínuas.

   Deste modo, o eixo médio, originalmente reto, se deforma segundo uma curva, que verifica as condições de intregabilidade.

II) As seções transversais planas permanecem planas e normais ao eixo deformado após a deformação;

III) A uma distâcia z do baricentro da seção transversal, as deformações longidutinais das armaduras são iguais às deformações longitudinais médias do concreto circundante.

IV) A formulação fica restrita a ações de curta duração, não sendo levados em consideração fluência, retração e fontes de auto-deformação;

V) As deformações transversais foram desprezadas.

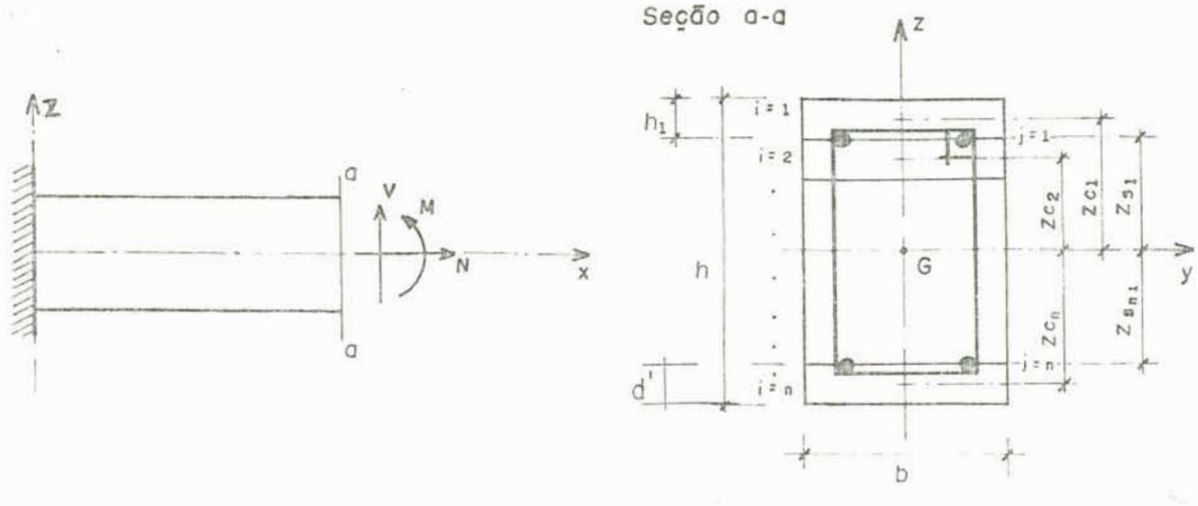


FIGURA 3.1 - Discretização da seção transversal da viga

A flexão ocorre no plano de simetria x-z, sendo que o eixo x se situa na direção longitudinal e a seção transversal é subdividida na direção z, conforme a figura 3.1, em camadas ($i = 1,2, \ldots\ldots, n$) de área, A_{ci}, e coordenadas centrais, z_{ci}, referidas ao baricentro da seção de concreto. Os níveis das camadas de armadura longitudinal são denotados por z_{sj} ($j = 1,2, \ldots\ldots, n_1$). A área da seção transversal da armadura é definida por A_{sj}.

De acordo com a hipótese I, as deformações normais longitudinais, ε_x, em cada camada podem ser calculadas a partir do conhecimento da deformação ε_g no baricentro da seção transversal da viga -ponto G da figura 3.1- e da curvatura média, χ, pela expressão

$$\varepsilon_x = \varepsilon_g - z\,\chi \tag{3.1}$$

onde z = coordenada baricêntrica do nível considerado.

As tensões nas camadas de concreto e de armadura são calculadas através das deformações normais, obtidas anteriormente, e das relações tensão-deformação assumidas.

A distribuição de tensões longitudinais, na seção normal, pode ser reduzida à um sistema estaticamente equivalente de solicitações internas, N-M, que depende do centro de redução. Tomando como centro o ponto G, em termos as eformações generalizadas ε_g, χ resultam os valores da resultante N aplicada em G e do momento do binário associado M dados por

$$N = \sum_{j=1}^{n_1} A_{sj}\,\sigma_{sj}\,(\varepsilon_g,\chi) + \sum_{i=1}^{n} b_i\,h_i\,\sigma_{ci}\,(\varepsilon_g,\chi) \tag{3.2}$$

e

$$M = \sum_{j=1}^{n_1} A_{sj} z_{sj} \sigma_{sj}(\varepsilon_g, \chi) + \sum_{j=1}^{n} b_i h_i z_{ci} \sigma_{ci}(\varepsilon_g, \chi) \qquad (3.3)$$

onde σ_{sj} = tensão normal nas camadas de armadura; b_i = largura da camada de concreto; h_i = espessura ra da camada de concreto; σ_{ci} = tensão normal na camada de concreto; A_{sj} = área da armadura na camada j; z_{sj} = coordenada central da armadura; z_{ci} = coordenada central das camadas de concreto.

Devido ao acoplamento funcional das variáveis cinemáticas ε_g, χ com as físicas M-N, decorrente da não-linearidade das equações constitutivas, os diagramas momento-curvatura, além de dependerem do centro de redução, se apresentam na forma de uma família de curvas, onde cada componente corresponde a um nível constante de esforço normal. Em particular, no caso de peças submetidas a flexão simples é:

$$N = 0 \qquad (3.4)$$

Para a obtenção dos diagramas momento-curvatura aplica-se um processo computacional do tipo incremental-iterativo, conforme as figuras 3.2 e 3.3, partindo do estado natural onde as deformações generalizadas e resultantes de tensões são nulas.

Nos modelos laminares não se adota nenhuma limitação para as deformações últimas do concreto e do aço. A ruptura é determinada pela instabilidade numérica, que ocorre no processo iterativo.

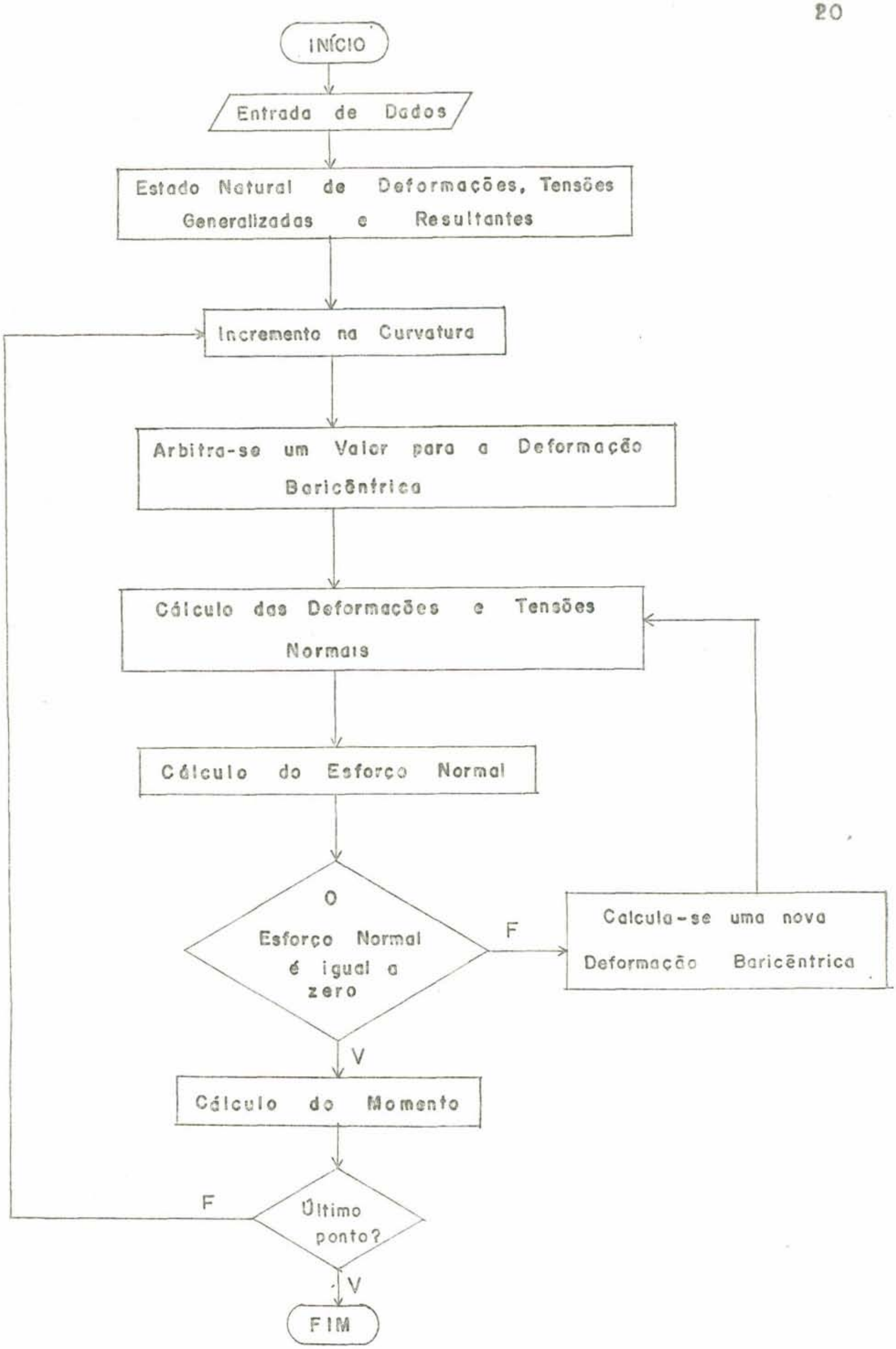


FIGURA 3.2 - Diagrama de bloco do modelo laminar para o elemento de viga.

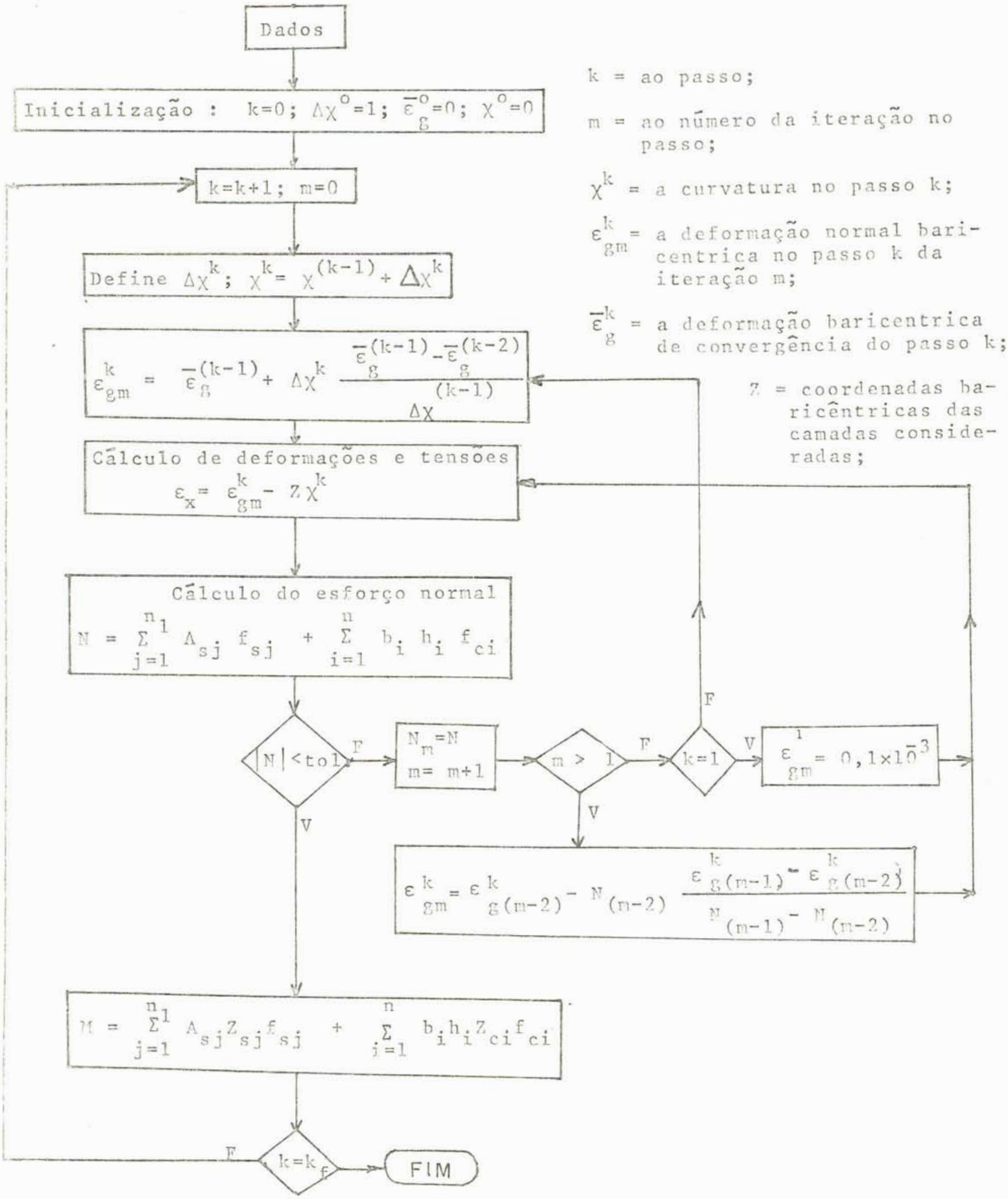


FIGURA 3.3 - Fluxograma detalhado do modelo laminar para o elemento de viga.

Em um passo genérico k, a curvatura é fixada incrementalmente na forma

$$\chi^k = \chi^{(k-1)} + \Delta\chi^k \tag{3.5}$$

e, com χ^k constante, para ajustar iterativamente (3.4), emprega-se na redefinição da deformação, ε_g, á equação:

$$\varepsilon^k_{g(m+1)} = \varepsilon^k_{g(m-1)} - N_{(m-1)} \frac{\varepsilon^k_{gm} - \varepsilon^k_{g(m-1)}}{N_m - N_{(m-1)}} \tag{3.6}$$

onde o índice m numera as iterações. Aplicando as equações (3.1) ,(3.2) e (3.6) e as equações constitutivas, se recalcula o esforço normal até à convergência, que fica definida quando N alcança um valor pequeno previamente estabelecido.

Para iniciar o processo iterativo, no primeiro passo com $\chi^1 = \Delta\chi^1$, toma-se $\varepsilon^1_{g1} = 1\times10^{-4}$; $\varepsilon^1_{go} = 0$, o que permite calcular N_1 e N_0 e aplicar à equação (3.6). Como os incrementos de curvatura podem ser variáveis em cada passo e a curva $M - \chi$, pode experimentar descontinuidades na derivada, o algoritmo resulta favorecido se, nas etapas subsequentes, a inicialização se efetuar com

$$\varepsilon^k_{go} = \bar{\varepsilon}^{(k-1)}_g \;\; ; \;\; \varepsilon^k_{g1} = \bar{\varepsilon}^{(k-1)}_g + \Delta\chi^k \frac{\bar{\varepsilon}^{(k-1)}_g - \bar{\varepsilon}^{(k-2)}_g}{\Delta\chi^{k-1}} \, , \tag{3.7}$$

onde símbolos com traço representam valores de convergência.

Em cada etapa, uma vez obtida a convergência, o momento é determinado em forma direta pela aplicação da equação (3.3). Repete-se todas as etapas anteriores, a cada novo incremento dado na curvatura, obtendo-se, desta forma, sucessivos pontos do diagrama momento-curvatura.

3.3 - Modelo histerético proposto

Embora os modelos laminares que utilizam boas representações possam oferecer acurados resultados, significativas vantagens computacionais normalmente ocorem com processos simplificados em termos de resultantes.

Existe evidência experimental[1] de que o comportamento de vigas submetidas a carregamento variável, repetido e reverso é predominantemente afetado pela resposta do aço e pouco influenciado pelas propriedades do concreto. Em função disso, apresenta-se um modelo para relação momento-curvatura que foi gerado como uma adaptação trilinear do esquema de Agrawal para o aço, embora incluindo a possibilidade de efetuar laços histeréticos para descargas parciais com regras similares ao modelo de Blakeley e Park para o concreto. O modelo proposto[10], conforme figura 3.4, é definido pelos pontos A, B e C, respectivamento pontos de fissuração, plastificação e ruptura. Estes pontos são determinados pelo modelo laminar ou por fórmulas empíricas. As regras deste modelo são as seguintes:

Regra 1. No estádio I tanto a carga quanto a descarga é elástica linear.

Regra 2. A descarga, desde o estádio II, se efetua com rigidez igual àquela do estádio I até metade do momento máximo atingido, ponto H. Depois procura-se o ponto de fissuração de sinal contrário.

Regra 3. A descarga, a partir do estádio III, se realiza com rigidez idem àquela do estádio I até a metade do momento máximo atingido, ponto L. Depois, continua com rigidez igual à do estádio II até chegar a um momento pré-determinado, Mo, de sinal oposto.

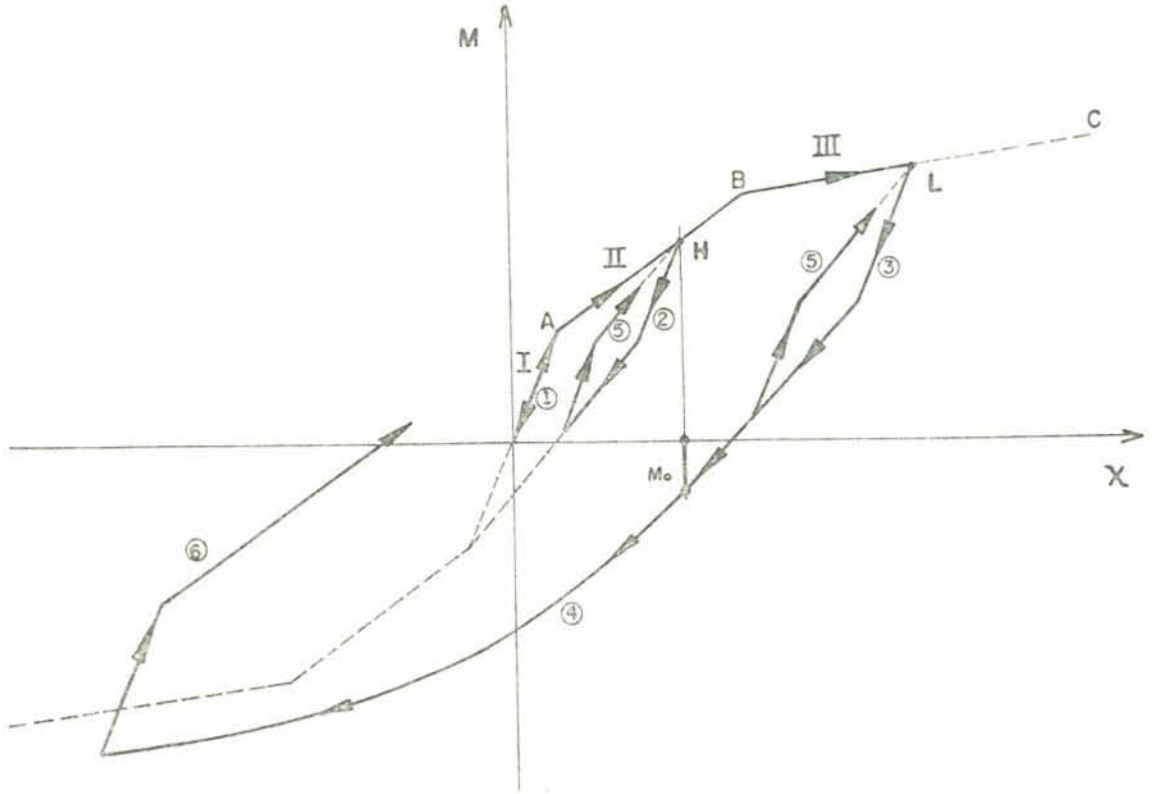


FIGURA 3.4 - Modelo proposto

Regra 4. A descarga, desde Mo, alcançado na regra 3, continua governada pela equação empírica:

$$M = M_y \, (1,1 - 0,838^{g}) \; , \tag{3.8}$$

onde $g = |\chi_A - \chi| \, h$; M_y = momento de plastificação; h = altura da seção transversal da viga; χ = curvatura atual; χ_A = curvatura correspondente ao ponto de momento nulo, conforme fig. (3.5).

Regra 5. A recarga, desde um ponto obtido com a regra 2 ou regra 3, se efetua com rigidez igual à do estádio I até à metade do momento máximo atingido. Após, procura-se o ponto de momento máximo do ciclo presente.

Regra 6. A recarga, a partir dos pontos determinados pela regra 4, é realizada de forma semelhante à descrita pela regra 3.

O momento Mo, mencionado na regra 3, é determinado previamente, de forma iterativa, pela intersecção da reta de descarga com rigidez igual à do estádio II com a curva que atinge, no ponto A, o valor 0,1 M_y, como mostra a figura 3.5.

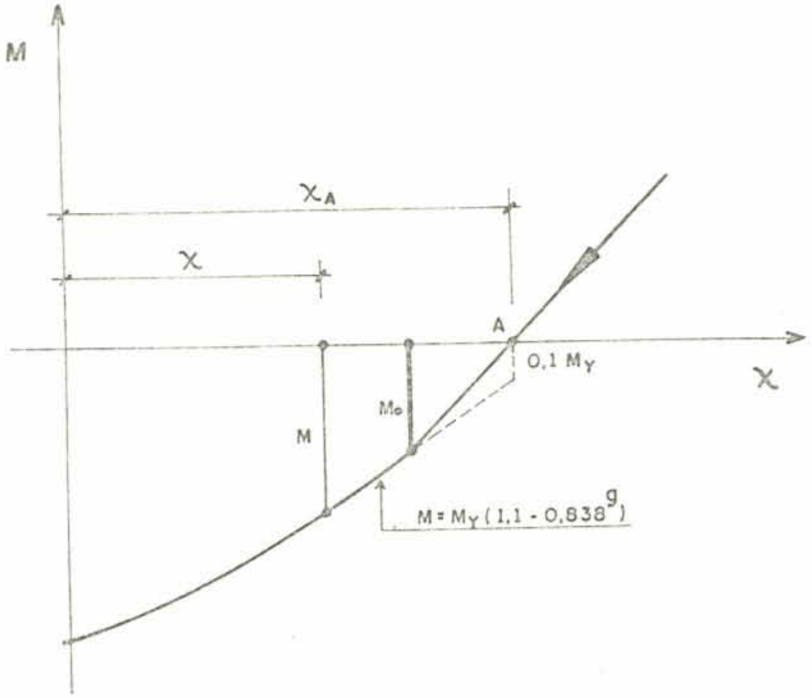


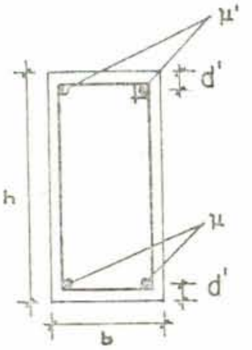
FIGURA 3.5 - Ponto de momento M_o.

3.4 - Comparações entre resultados teóricos e experimentais

Os resultados experimentais de três ensaios distintos, extraídos da literatura, foram confrontados com as representações oferecidas pelos modelos seguintes:

a) Modelo laminar I, com a relação bilinear elasto-plástica para o aço e esquema de Blakeley e Park para o concreto.
b) Modelo laminar II, com as relações tensão-deformação de Agrawal para o aço e Blakeley e Park para o concreto.
c) Modelo trilinear em termos de resultantes, de Takeda[12].
d) Modelo histerético proposto 1.

As propriedades dos materiais e os detalhes das vigas ensaiadas estão mostrados na figura 3.6 e os procedimentos experimentais são descritos detalhadamente nas referências[1,9,13].



Viga	f'_c (N/mm²)	Aço		Taxa de Armadura $\mu = \mu'$	d'/h	b (mm)	h (mm)
		f_y (N/mm²)	E_s (N/mm²)				
1	30,3	351	210.000	0,011	0,166	76,2	152,4
2	31,9	283	210.000	0,0172	0,135	229	457
3	47,9	320	210.000	0,010	0,156	125,5	203,2

FIGURA 3.6 - Propriedades dos elementos de viga.

A figura 3.7 mostra a comparação entre as respostas analíticas e a experimental da Viga 1, a qual está sujeita a carregamento cíclico, que varia da carga máxima até zero. Os dois modelo laminares apresentam resultados muito semelhantes, caracterizados pela pequena histerese exibida, atribuível apenas à colaboração do concreto, já que os modelos do aço apresentam recarga elástica para descargas parciais. A seção de concreto nestes modelos foram divididas em 21 camadas. O modelo de Takeda também resulta incapaz de aproximar os laços de histerese, além do que subestima a rigidez de descarga e sobre-estima o efeito degradativo. Já o modelo proposto, apesar de aproximar melhor os laços histeréticos da resposta experimental, resulta um pouco rígido no começo da descarga.

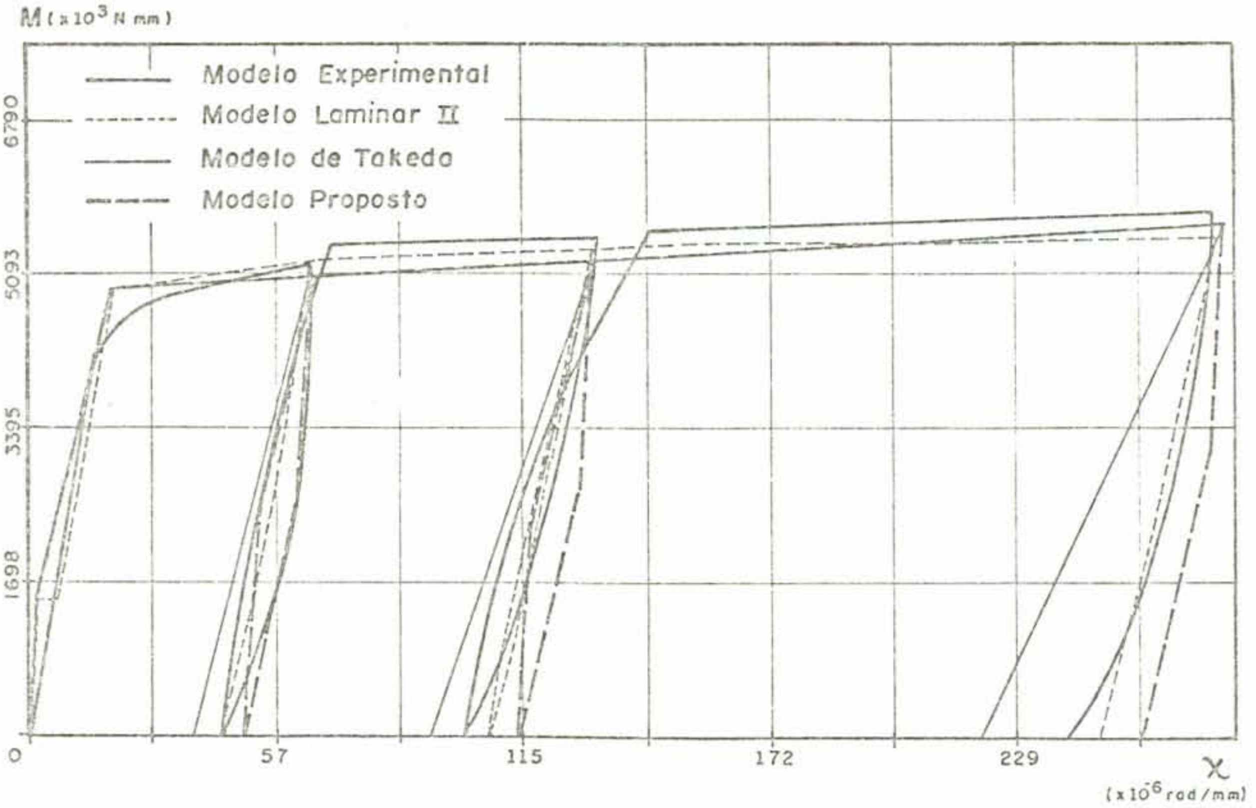


FIGURA 3.7 - Diagrama M-χ para a viga 1 submetida a carregamento cíclico.

Nas Figuras 3.8 e 3.9 mostra-se a comparação entre as respostas analíticas e experimentais para Vigas 2 e 3, as quais estão sujeitas a carregamento cíclico reverso. A diferença verificada entre o resultado experimental e os modelos laminares está após a reversão da carga, sendo devida às características extremamente não-lineares da armadura sujeita à carga reversa.

No modelo proposto, uma pequena diferença é observada no início da descarga e da recarga, em cada ciclo, tal como alguma tendência a sobre-estimar a energia dissipada nos laços de histerese.

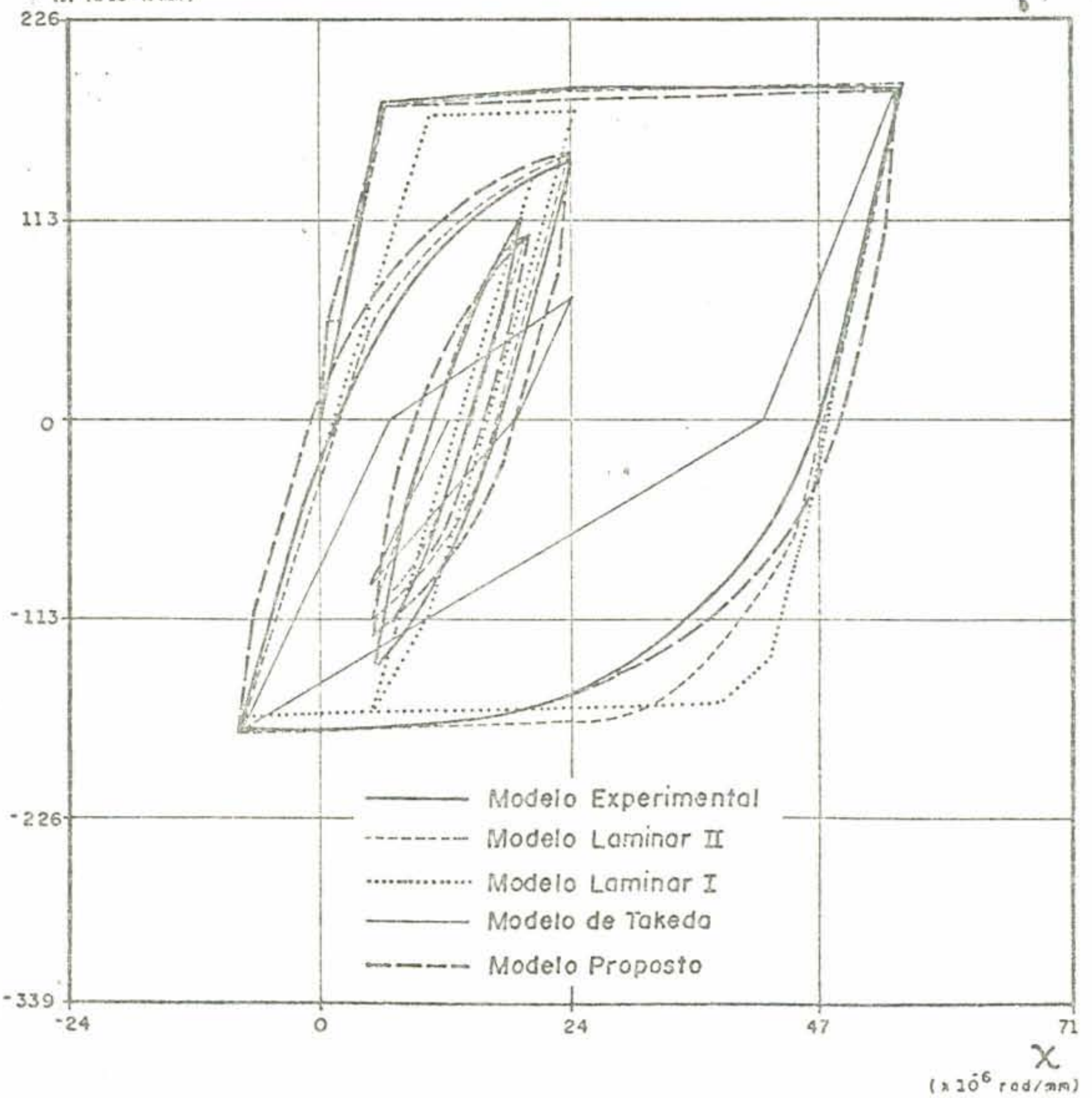


FIGURA 3.8 - Diagrama M-χ para a viga 2 submetida a carregamento cíclico reverso.

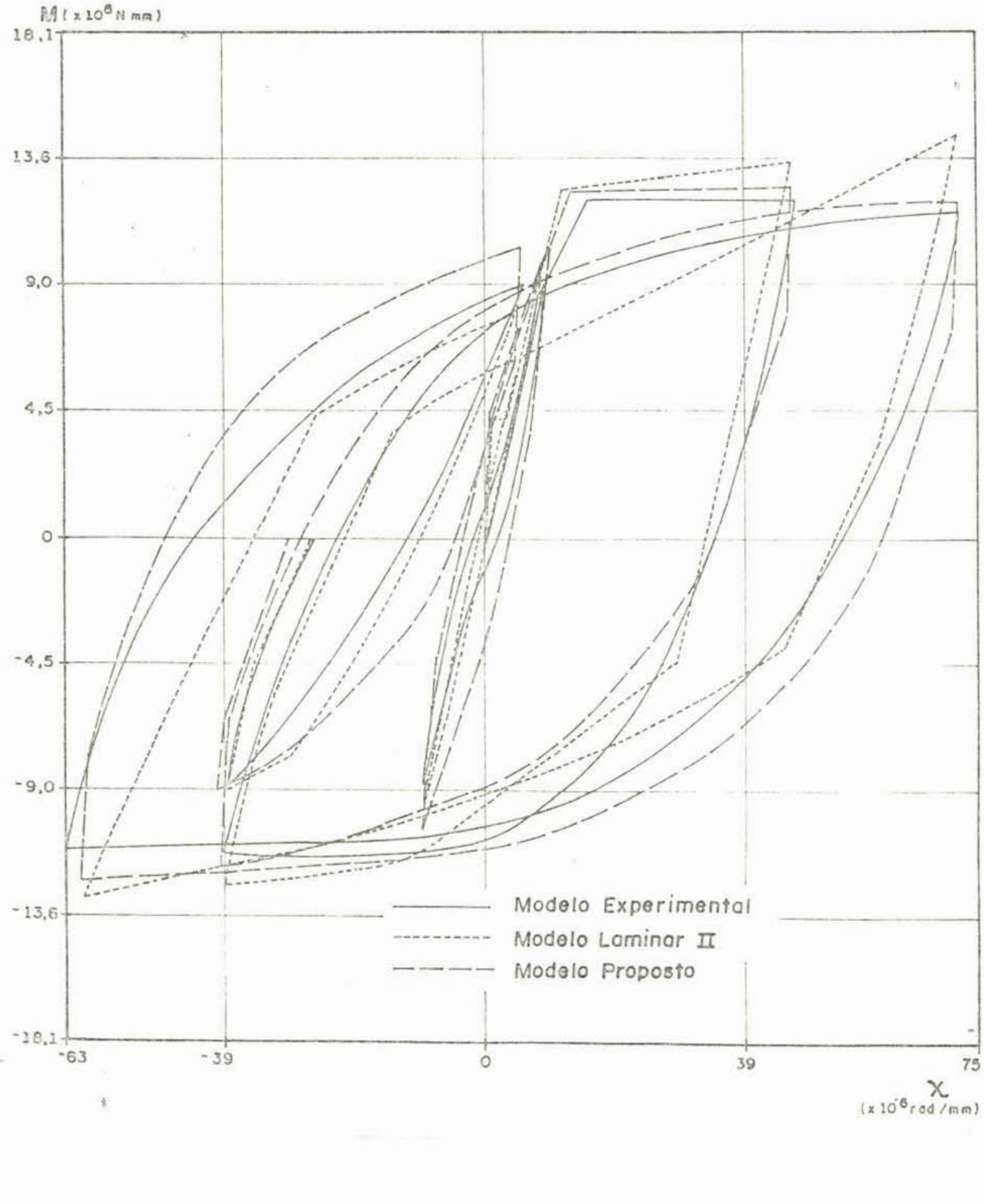


FIGURA 3.9 - Diagrama M-χ para a viga 3, submetida a carregamento cíclico reverso.

Os modelos laminares I e II apresentam a mesma curva T-D para tração no concreto, mostrada na figura 2.3.a. Os resultados analíticos obtidos, apresentaram um decréscimo do momento após a fissuração, até atingir a estabilização quando, então, recomeça a aumentar, conforme a figura 3.10, exemplo da Viga 1. Nos diagramas M-χ obtidos anteriormente, simplificou-se por uma linha reta.

A resposta experimental não está representada na figura 3.10 pela dificuldade de observar-se no resultado do ensaio onde foi extraída.

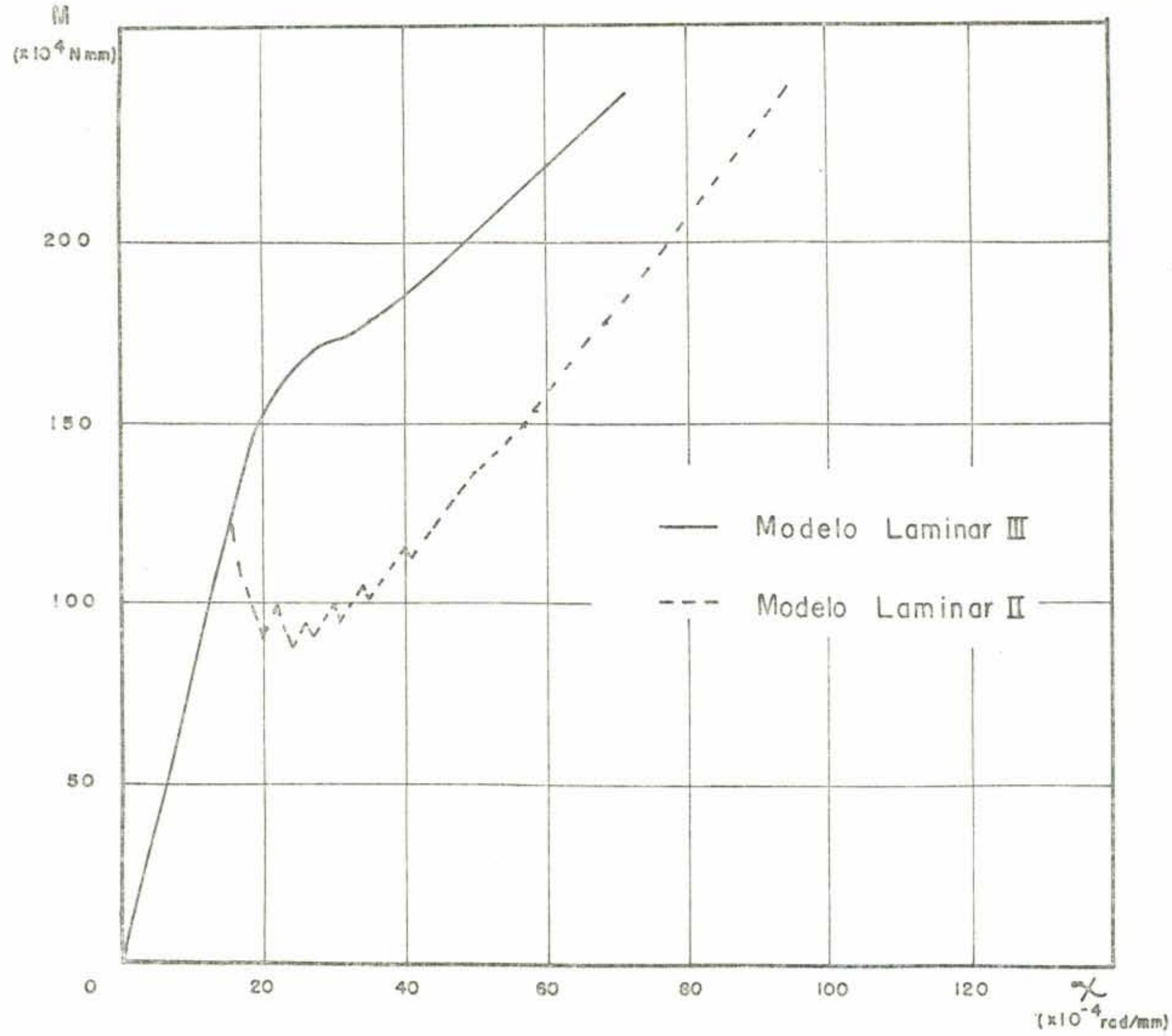


FIGURA 3.10 - Diagrama M-χ com diferentes curvas T-D do concreto à tração da Viga 1.

Observou-se que cada aumento da fissura, para uma nova camada, acarretava uma certa instabilidade numérica, conduzindo a um maior número de iterações até à convergência. Este incoveniente foi corrigido, utilizando o modelo 6 para tração no concreto, mostrado na figura 2.3.c, sendo o modelo resultante denominado de Modelo Laminar III.

Na figura 3.10 compara-se o modelo laminar III com o II. Verifica-se que após a fissuração, no primeiro modelo, não ocorre mais a instabilidade númerica.

Finalmente, pode-se mencionar que o modelo simplificado descrito em 3.2, embora fosse estabelecido para carregamentos quase-estáticos, foi posteriormente aplicado por Bignon[2], sem modificações, para analisar os resultados de um ensaio consistente no impacto de um projétil flexível sobre uma laje de concreto armado de espessura média. Foram obtidos resultados promissores, neste complexo problema, onde o modelo de Takeda tinha oferecido resultados inaceitáveis.

4. MODELOS MOMENTO-CURVATURA EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

4.1 - Considerações Iniciais

Desenvolve-se, neste capítulo, um estudo analítico e comparativo em relações M-χ em lajes de concreto armado, com armadura inferior e/ou superior e sujeita a um estado de flexão e torção, caracterizado pelas curvaturas principais, em ausência de solicitações normais e tangenciais no plano.

Os métodos analíticos, utilizados para obter os diagramas momento-curvatura, serão implementados a partir dos modelos descritos no capítulo 3.

As considerações teóricas a serem efetuadas para a definição da relação M-χ em lajes de concreto armado levam em conta o comportamento não-linear dos materiais, a orientação das armaduras e o valor relativo das curvaturas principais existentes no estado de deformação.

4.2 - Modelo Laminar IV

As hipóteses assumidas são as seguintes:

I - Os efeitos da fissuração, escorregamento da armadura e de toda qualquer fonte localizada de descontinuidade do campo de deslocamentos consideram-se dispersos em forma contínua nas vizinhanças da zona afetada, de modo que as deformações generalizadas médias são compatíveis e contínuas.

Desta forma, a superfície média, originalmente plana, se deforma segundo uma superfície curva no espaço, que verifica as condições de integrabilidade.

As curvaturas desta superfície devem ser consideradas como valores médios das curvaturas descontínuas reais existentes e, desta forma, a formulação recupera as ferramentas tensoriais que regem as transformações de tensões e deformações sob mudança de coordenadas no meio contínuo.

II - As retas normais ao plano médio permanecem retas

e normais à superfície deformada (hipóteses de Kirchoff de flexão de placas isótropas homogêneas).
Por outro lado as forças de volume, e as tensões e deformações tangenciais atuantes na placa são neglicenciadas.

Estas hipóteses implicam na existência de um estado plano de tensões (generalizado) e uma distribuição linear das deformações na seção transversal da laje [6], ou seja:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{g}_{ij} - z\,\chi_{ij} \qquad i,j = 1,2 \qquad (4.1)$$

onde ε^{g}_{ij} são as deformações generalizadas médias de membrana, χ_{ij} as curvaturas médias de flexão e torção e z a distância à superfície média.

Pela hipótese I, ε^{g}_{ij} e χ_{ij} são tensores cartesianos simétricos de segunda ordem, no domínio bidimensional [5], e podem diagonalizar-se segundo o procedimento tradicional.

Em particular, o sistema ortogonal para o qual χ_{ij} assume uma forma diagonal é o sistema de eixos principais e as curvaturas respectivas são curvaturas principais.
Consequentemente, nas direções principais de curvatura, a curvatura de torção é nula.

III - A uma distância z do plano médio, as deformações longitudinais das armaduras são iguais às deformações longitudinais médias do concreto circundante.

IV - A armadura ordinária é colocada em camadas, formando uma malha retangular.

V - As armaduras estão sujeitas apenas a tensões uniaxiais.

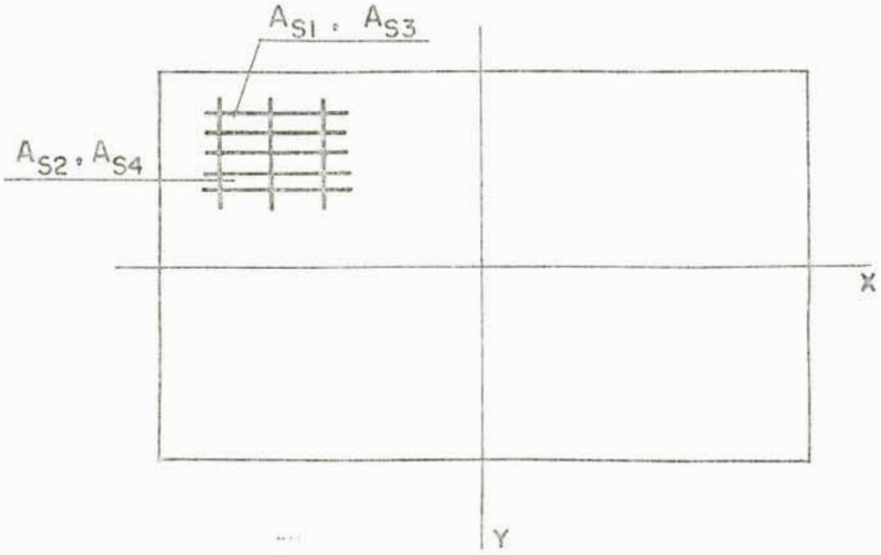
VI - A interação no concreto, entre as tensões normais associadas com as direções principais de curvatura, é ignorada, coeficiente de Poisson nulo.

VII - As curvas tensão-deformação uniaxiais do concreto e do aço são idênticas às empregadas no modelo III.

No que segue, as referências de curvas M-χ devem entender-se como relações entre curvaturas principais e respectivos momentos fletores, sendo que as direções principais de curvatura podem estar defasadas de um ângulo β com relação às direções das armaduras.

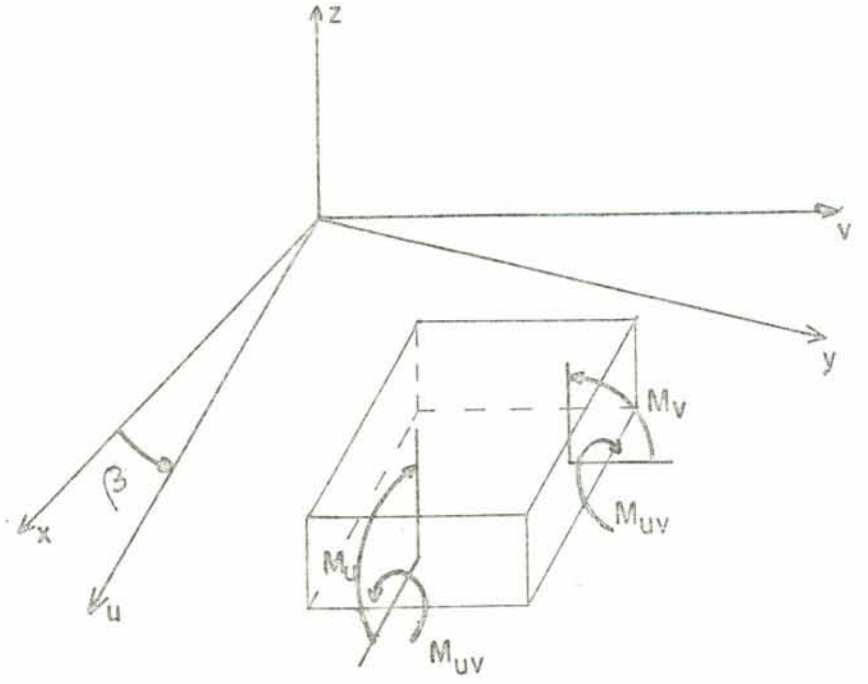
4.2.1 - Relações de geometria e equilíbrio

Considera-se, na figura 4.1.a, um elemento de laje com a armadura orientada nas direções x,y e assume-se existir um estado de deformação, caracterizado pelas curvaturas principais χ_u, χ_v. Os momentos, segundo as direções principais de curvatura u,v, são representados pelos valores M_u, M_v e M_{uv}, mostrados na fig. 4.1.b. Nesta figura, o ângulo β define a posição do sistema u,v frente ao sistema x,y coincidente com as armaduras.



\- a -

FIGURA 4.1 - Laje de concreto armado:
a) orientação da armadura;
b) momentos associados com as direções principais de curvatura.



\- b -

Para definir as relações procuradas, assume-se que χ_u, e χ_v crescem monotonicamente desde o estado natural até à ruptura, conforme a equação abaixo:

$$w = \chi_v \,/\, \chi_u \tag{4.2}$$

onde χ_u devè ser maior ou igual que χ_v e w = constante.

A seção transversal do elemento de laje - com comprimento unitário na direção normal a x e y - é mostrada na figura 4.2.a, indicando a espessura da laje, h, as áreas da seção transversal de armadura longitudinal, A_{sj}, e os níveis das camadas de armadura, denotados por z , com

$j = 1,2,3$ e 4. A seção transversal de concreto, figura 4.2.b, é subdividida na direção z, em camadas $i = 1,2, \ldots, n$ com área A_{ci} e coordenadas do centro da camada, z_{ci}, referidas ao baricentro da seção.

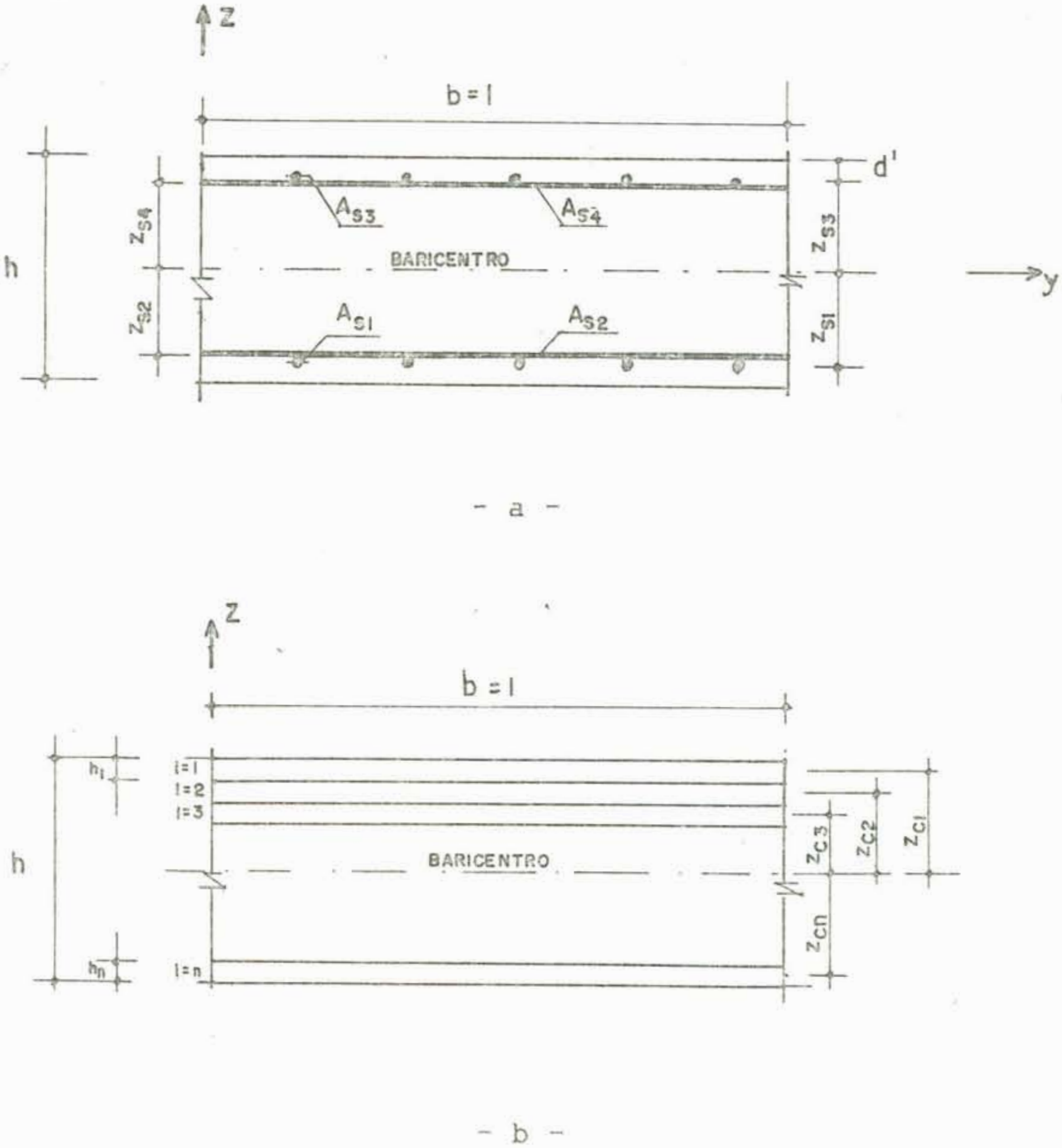


FIGURA 4.2 - Discretização da seção transversal da laje normal à direção x:
a) da armadura;
b) do concreto.

De acordo com a hipótese da variação linear de deformações ao longo da espessura e conhecidas as curvaturas principais médias χ_u e χ_v, calculam-se, então, as deformações normais longitudinais, ε_u e ε_v, da camada localizada à distância z do plano baricêntrico, particularizando a equação (4.1) com $\chi_{uv} = 0$, ou seja,

$$\varepsilon_u = \varepsilon_u^g - z\,\chi_u \qquad (4.3)$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^g - z\,\chi_v \qquad (4.4)$$

onde:

- ε_u^g e ε_v^g são as deformações longitudinais no baricentro da seção transversal nas direções u e v.

Para um nível z dado, as deformações longitudinais normais à seção transversal, sob mudanças de coordenadas e mantendo o eixo z fixo, transformam-se como um tensor cartesiano bidimensional de segunda ordem,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_u \cos^2\beta + \varepsilon_v \operatorname{sen}^2\beta + 2\,\varepsilon_{uv} \operatorname{sen}\beta \cos\beta \qquad (4.5)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_u \operatorname{sen}^2\beta + \varepsilon_v \cos^2\beta - 2\,\varepsilon_{uv} \operatorname{sen}\beta \cos\beta \qquad (4.6)$$

Considera-se desprezíveis as solicitações de membrana atuantes na laje e, como $\varepsilon_{uv} = 0$ nos eixos principais de curvatura, ficam então as equações (4.5) e (4.6) reduzidas a:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_u \cos^2\beta + \varepsilon_v \operatorname{sen}^2\beta \qquad (4.7)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_u \operatorname{sen}^2\beta + \varepsilon_v \cos^2\beta \qquad (4.8)$$

Estas deformações, segundo os eixos x e y, serão necessárias para determinar as solicitações nas armaduras.

4.2.2 - Resultantes de Tensões

Utilizando as equações (4.3) e (4.4) para obter as deformações normais longitudinais do concreto nas direções u e v, ε^{u}_{ci} e ε^{v}_{ci}, respectivamente, em cada camada i, e com a relação tensão-deformação assumida para o concreto, calcula-se as tensões f^{u}_{ci} e f^{v}_{ci} na altura da ordenada central da camada.

As tensões, nas camadas de armadura, devem ser calculadas nas direções x e y -onde estas estão orientadas- para depois calcular suas componentes nos eixos u e v. A tal efeito, primeiramente, obtem-se as deformações ε_u e ε_v no concreto pelas equações (4.3) e (4.4) nos níveis das camadas da armadura longitudinal. Então, utilizando as equações (4.7) e (4.8), obtem-se as deformações no sistema de coordenadas (x,y). Pela hipótese III, estas são as deformações do aço e, com a relação tensão-deformação assumida para o aço, calcula-se as tensões longitudinais das armaduras no sistema x e y:

$$\{ \bar{f}_{si} (\bar{\varepsilon}_{si}) \}^{T} = \{ f^{x}_{s1}, f^{y}_{s2}, f^{x}_{s3}, f^{y}_{s4} \} \qquad (4.9)$$

onde:

- f^{x}_{s1} e f^{x}_{s3} : tensões normais longitudinais da armadura inferior e superior na direção x, respectivamente;
- f^{y}_{s2} e f^{y}_{s4} : tensões normais longitudinais da armadura inferior e superior na direção y, respectivamente;
- $\bar{\varepsilon}_{si}$: as deformações nos respectivos níveis das camadas de armadura longitudinal.

As forças resultantes por unidade de comprimento devidas ao aço, $\bar{F}_{si}$, são calculados por

$$\bar{F}_{si} = A_{si} \bar{f}_{si} (\varepsilon_{si}) \;, \; i = 1,2,3,4 \qquad (4.10)$$

As forças por unidade de comprimento, $\bar{F}_{si}$, pela hipótese V, se transformam da mesma forma que as tensões de um estado plano cujas direções principais de tensões são x,y.

Então, as componentes nas direções principais de curvatura u,v podem ser calculadas através da transformação

$$\{F_{si}\}_u = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen}^2\beta \end{bmatrix} \{\bar{F}_{si}\} \qquad (4.11)$$

$$\{F_{si}\}_v = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}^2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}^2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2\beta \end{bmatrix} \{\bar{F}_{si}\} \qquad (4.12)$$

onde:

$$\{F_{si}\}_u^T = \{F_{s1}\ ,\ F_{s2}\ ,\ F_{s3}\ ,\ F_{s4}\}_u\ , \qquad (4.13)$$

$$\{F_{si}\}_v^T = \{F_{s1}\ ,\ F_{s2}\ ,\ F_{s3}\ ,\ F_{s4}\}_v\ , \qquad (4.14)$$

são as componentes procuradas.

Pela ausência de solicitações normais plano da laje, a soma das forças normais por unidade de comprimento na na direção de u se anula, podendo-se escrever que

$$\sum_{i=1}^{4} (F_{si})_u + \int_{-h/2}^{+h/2} b\, f_{ci}^{u}(z)\, dz = 0\ . \qquad (4.15)$$

De forma aproximada, considera-se - em cada camada de concreto - a tensão normal constante e de valor igual aquele obtido no baricentro. Então, por aplicação de (4.3), (4.4) e a equação constitutiva do concreto, a equação (4.15) pode ser substituída por:

$$\sum_{i=1}^{4} (F_{si})_u + \sum_{-h/2}^{+h/2} b_i\, h_i\, f_{ci}^{u}(\varepsilon_g^{u}\ ,\ \chi_u) = 0\ . \qquad (4.16)$$

Com igual aproximação, o momento em relação ao centro geométrico desta seção é obtido pela equação:

$$M_u = \sum_{i=1}^{4} (F_{si})_u \, z_{si} + \sum_{i=1}^{n} b_i h_i z_{ci} f_{ci}(\varepsilon_g^u, \chi_u) \; . \qquad (4.17)$$

De forma semelhante, a resultante das forças normais, para a direção de v, é dada por:

$$\sum_{i=1}^{4} (F_{si})_v + \sum_{i=1}^{n} b_i h_i f_{ci}^v(\varepsilon_g^v, \chi_v) = 0 \; . \qquad (4.18)$$

e o momento M_v correspondente, pode ser escrito conforme a equ. 4.19.

$$M_v = \sum_{i=1}^{4} (F_{si})_v \, z_{si} + \sum_{i=1}^{n} b_i h_i z_{ci} f_{ci}^v(\varepsilon_g^v, \chi_v) \qquad (4.19)$$

onde b_i = unitário; h_i = espessura da camada i de concreto; f_{ci} = tensão normal central da camada i do concreto.

O problema fica reduzido ao sistema algébrico não-linear de equações (4.2), (4.16) e (4.18) para as incógnitas ε_g^u, ε_g^v, χ_u e χ_v.

Como existe uma incógnita a mais do que o número de equações disponíveis, é lícito assumir um valor dado para uma delas - χ_u por exemplo - e determinar o valor das demais incógnitas em função desta. As equações (4.17) e (4.19) ficam em forma residual para calcular os momentos associados com as curvaturas da solução. Dada à dificuldade evidente que ofereceria uma solução analítica fechada, é conveniente adotar um procedimento númerico iterativo. No parágrafo seguinte será descrito um algoritmo elaborado para solucionar este problema.

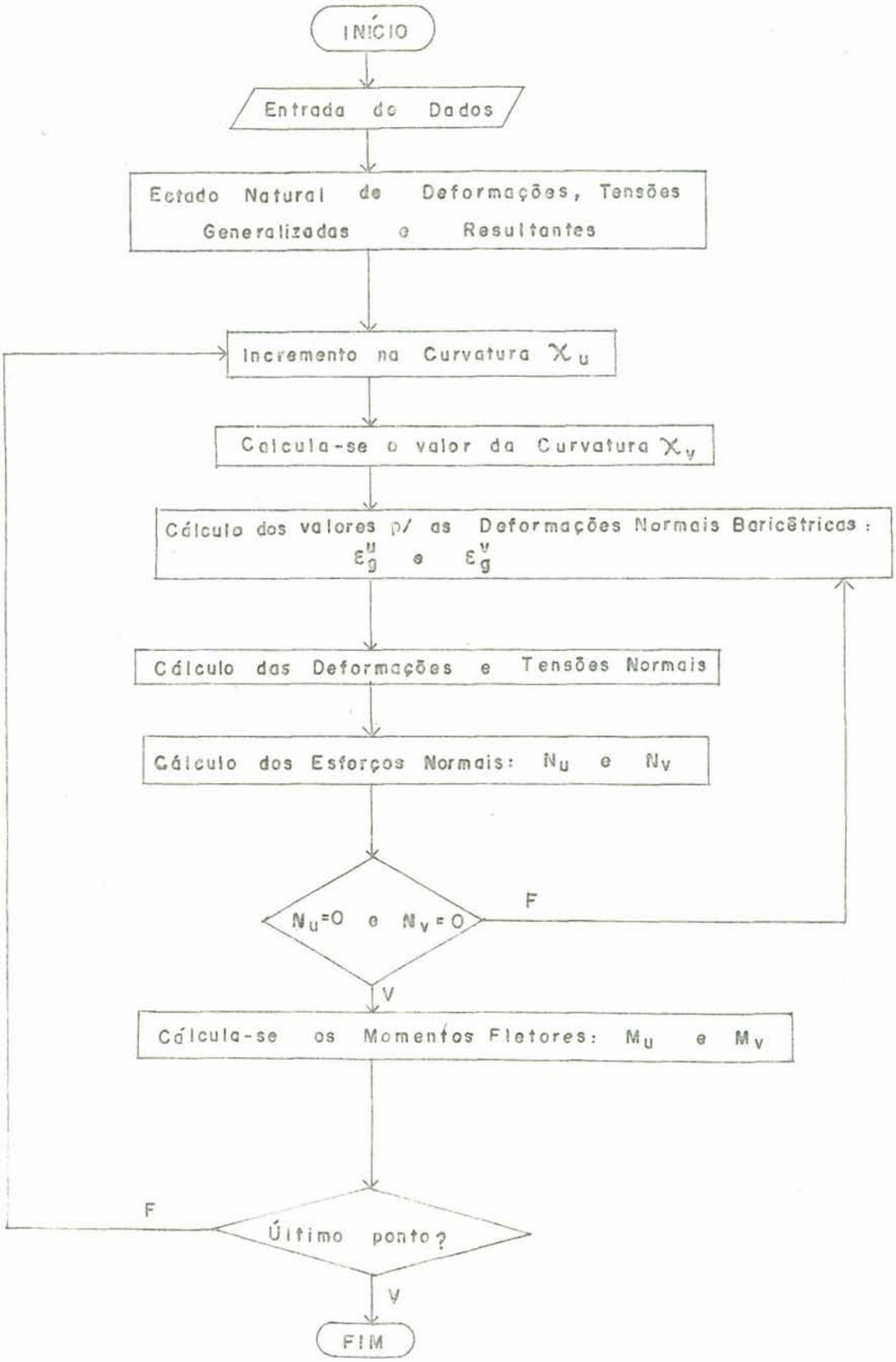


FIGURA 4.3 - Algoritmo do modelo laminar IV para laje de concreto armado.

4.2.3 - Procedimento numérico

O procedimento numérico adotado para obtenção dos diagramas M-χ num elemento de laje é iterativo-incremental, conforme o algoritmo mostrado na figura 4.3, dando-se incrementos na curvatura χ_u, os quais representam as etapas do carregamento. A continuação, iterando por aproximações sucessivas até a convergêcia, dentro de uma certa tolerância, determinam-se os correspondentes valores para χ_v, ε^u_g e ε^v_g, tais que satisfaçam às equações (4.2), (4.16) e (4.18). Após, os valores dos momentos M_u e M_v são calculados pelas equações (4.17) e (4.19).

Os dados requeridos são:

I - As propriedades geométricas, definindo a espessura, as áreas do aço e seus respectivos recobrimentos;

II - As propriedades dos materiais, definindo a resistência cilíndrica à compressão do concreto e a tensão de escoamento do aço;

III - O ângulo β segundo a figura 4.1.

IV - A razão w, definida em (4.2).

Partindo do estado natural -onde tensões, deformações, resultantes de tensões e deformações generalizadas são nulas - dá-se, para cada passo i, um incremento na curvatura, $\Delta\chi_{ui}$, (eventualmente variável) de forma que as curvaturas acumuladas até a etapa i sejam determinadas por

$$\chi_{ui} = \chi_{u(i-1)} + \Delta\chi_{ui} \quad . \tag{4.20}$$

O valor da curvatura na direção v, χ_v, é obtido no início de cada passo, aplicando a equação (4.2) na forma

$$\chi^j_{vi} = w\chi_{ui} \tag{4.21}$$

onde i = o número do passo;

j = o número da iteração neste passo i.

Para encontrar os valores de ε_g^u e ε_g^v, das equações (4.3) e (4.4), de maneira que as equações (4.16) e (4.18) sejam satisfeitas, utiliza-se o procedimento iterativo descrito para o elemento de viga da seção (3.1.1), conforme figura 3.3, só que agora, para as duas direções u e v simultâneamente conforme figura 4.3. Para tanto, redefine-se ε_g^u e ε_g^v, segundo a fórmula (3.6) particulizada, em relação à cada eixo. A influência da orientação da armadura, β, no cálculo das deformações normais no nível destas camadas é levada em consideração pelas equ. (4.7) e (4.8). A resultante de tensões da armadura, obtida no sistema de coordenadas (x,y) deve ser transformado para (u,v), utilizando as equações (4.11) e (4.12).

Obtida a convergência, dentro da margem de tolerância prefixada, calcula-se os momentos M_u e M_v pelas equações (4.17) e (4.19), obtendo-se então um ponto dos diagramas $M_u - \chi_u$; $M_v - \chi_v$.

Repete-se todas as etapas anteriores, a cada novo incremento dado em χ_u, equação (4.20), conseguindo, assim, obter sucessivos pontos do diagrama $M-\chi$.

4.3 - Comparações entre resultados teóricos e experimentais

Os resultados experimentais de três ensaios distintos em lajes com carregamento monotônico foram confrontados com a representação obtida pelo Modelo Laminar IV, descrito anteriormente neste capítulo.

As propriedades dos materiais e os detalhes das lajes ensaiadas B35, C2 e B16 estão mostrados na figura 4.4. Os procedimentos experimentais são descritos detalhadamente nas referências[4,8,14]. Salienta-se que nestes trabalhos o parâmetro "w" é a relação entre os momentos principais, e aqui, toma-se como sendo as curvaturas principais, com o mesmo valor.

Propriedades / Laje	h	Taxa de Armadura				d'/h				f_{yk}	f_{yk}
	(mm)	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	c_1	c_2	c_3	c_4	(N/mm^2)	(N/mm^2)
B - 16	102,6	0,00817	0,00891	0,00817	0,00891	0,124	0,186	0,124	0,186	333,0	32,4
C - 2	104,6	0,00801	0,00874			0,121	0,182			344,8	31,7
B - 35	104,6	0,00801	0,00874	0,00801	0,00874	0,121	0,182	0,121	0,182	372,0	31,7

FIGURA 4.4 - Propriedades das lajes.[14]

As comparações foram realizadas em termos de resultantes de tensões e deformações, diagramas Momento-Curvatura, sendo feito apenas na direção da curvatura principal χ_u .

Na figura 4.5 a laje C2 está sujeita a flexão pura (w=1) com armadura isotrópica orientada na direção das curvaturas principais, isto é, $\beta = 0^\circ$. Comparando-se as curvas experimental e analítica, nota-se que ocorreu uma pequena diferença nos pontos de fissuração e plastificação.

Na fissuração, a reposta obtida com o modelo laminar apresenta uma rigidez superior ao do experimental, devido ao modelo utilizado para a tração. Por outro lado, as declividades nas fases plásticas são muito bem aproximadas.

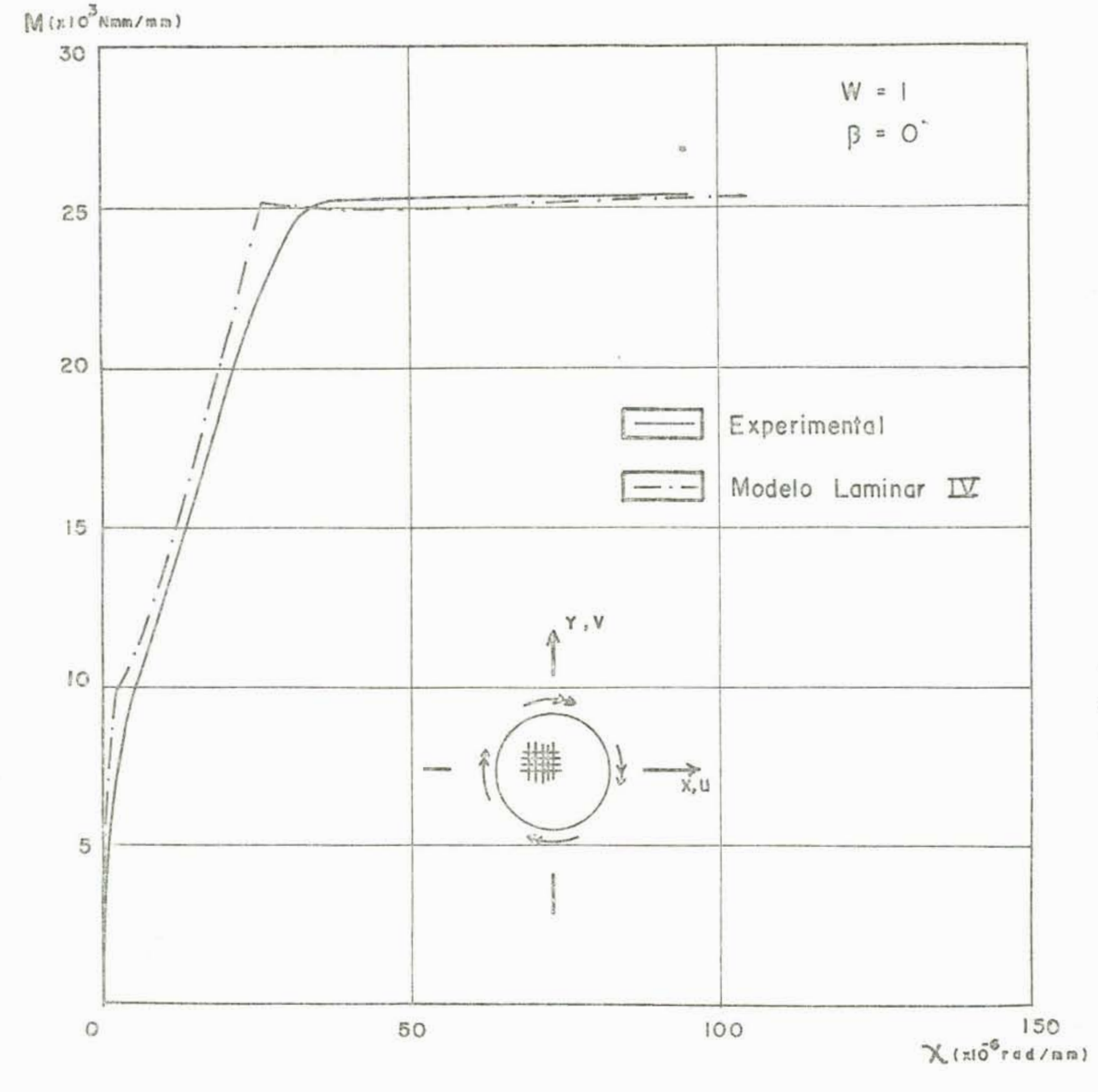


FIGURA 4.5 - Diagrama M-χ para a laje C2.

Na figura 4.6 a laje B16 está sujeita a torção pura (w = -1) com a armadura isotrópica orientada a 45° em relação ao plano das curvaturas principais, β = 45°. Na figura 4.7 a laje B35 está sujeita a um caso geral de flexão e torção combinada (w = - 0.45), com a armadura também isotrópica orientada a -34° em relação ao plano das curvaturas principais, $\beta = 34°$.

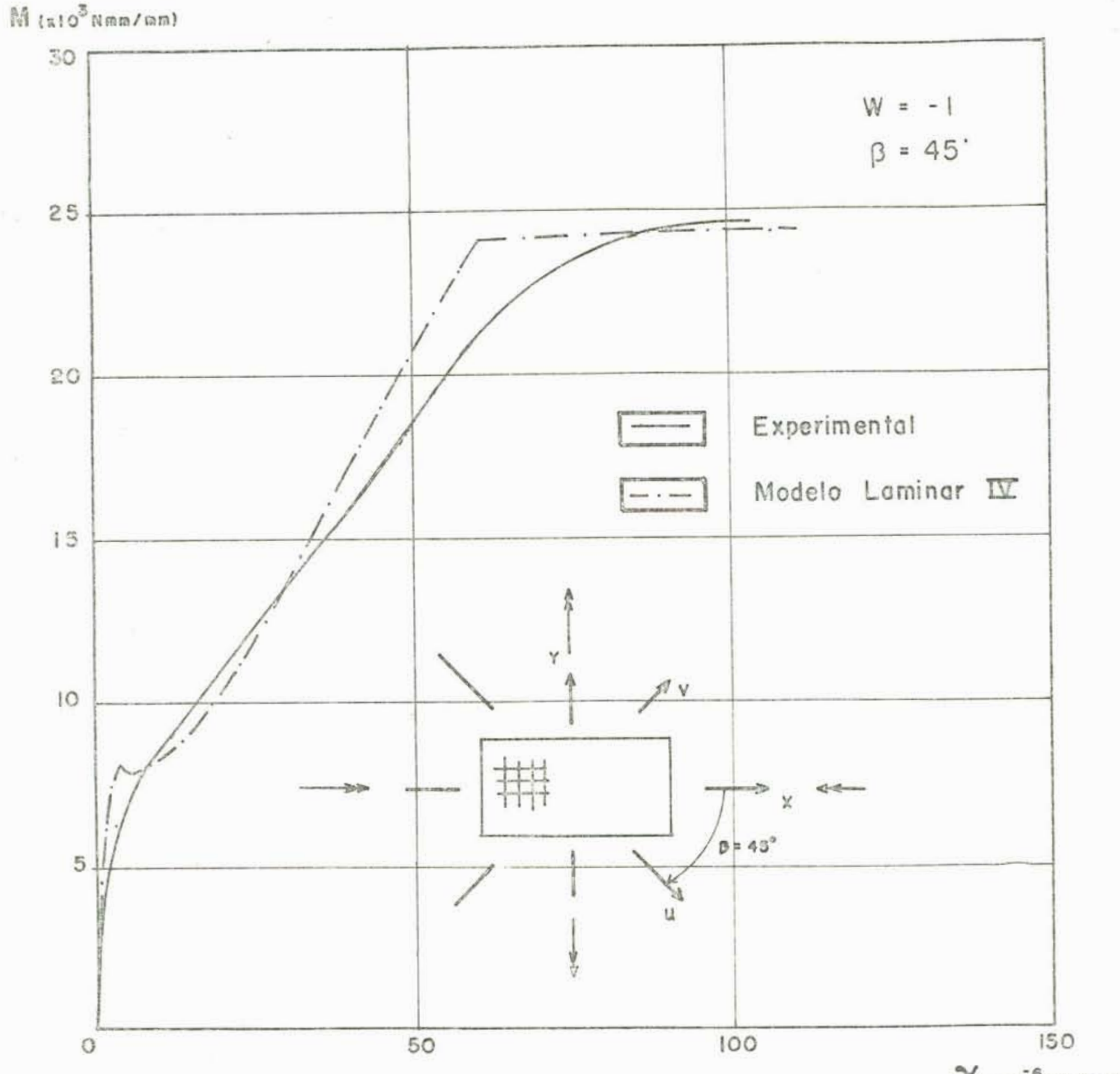


FIGURA 4.6 - Diagrama M-χ para a laje B16.

Observa-se que as curvas analíticas representaram razoavelmente os diagramas experimentais. As diferenças verificadas foram novamente após a fissuração, agora apresentando uma certa instabilidade e decréscimo no momento , influenciado pela orientação das armaduras. Os pontos de fissuração e de plastificação são detectados em forma acurada e os diagramas M-X obtidos pelo Modelo Laminar IV representara aproximações das curvas experimentais.

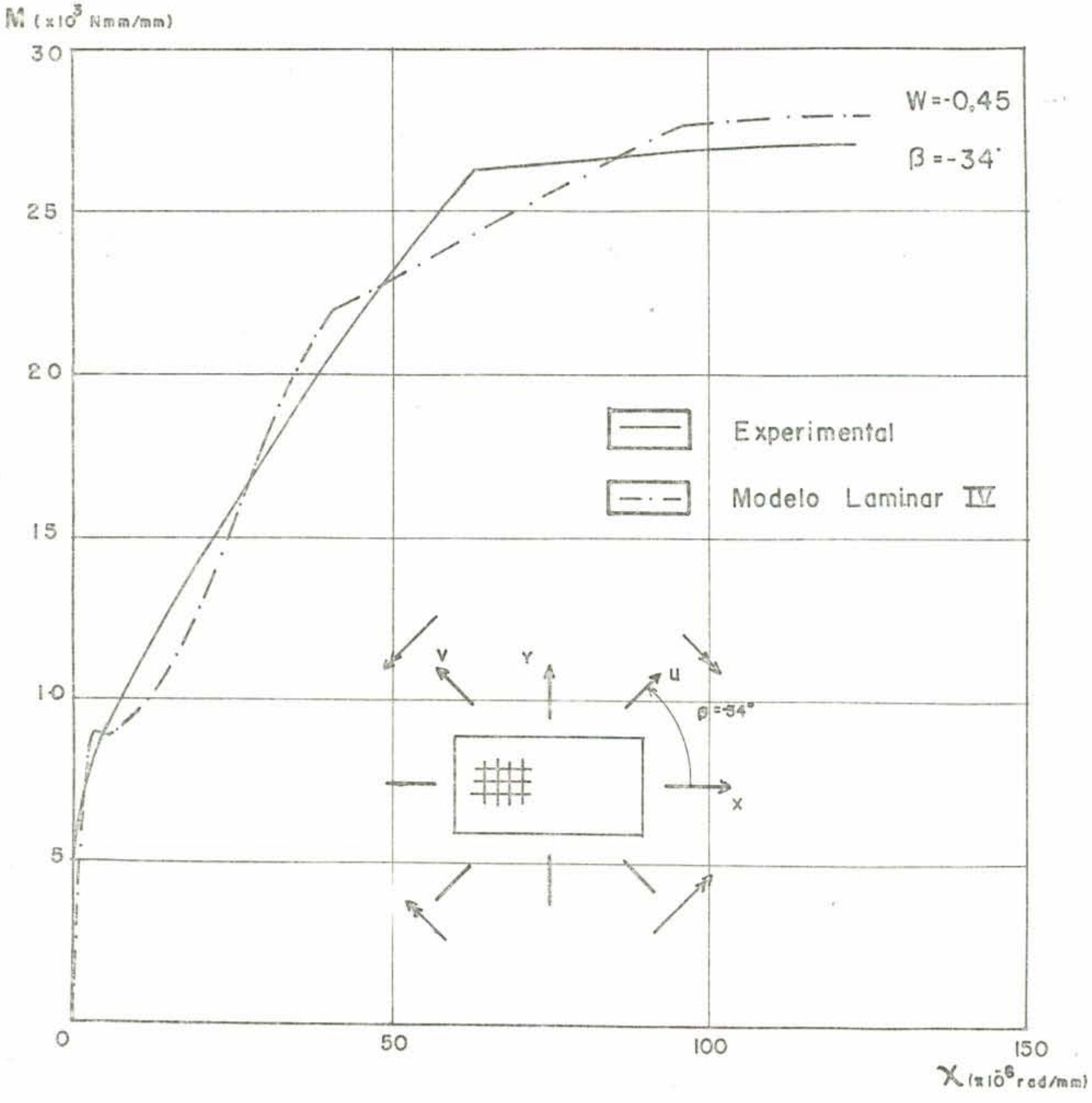


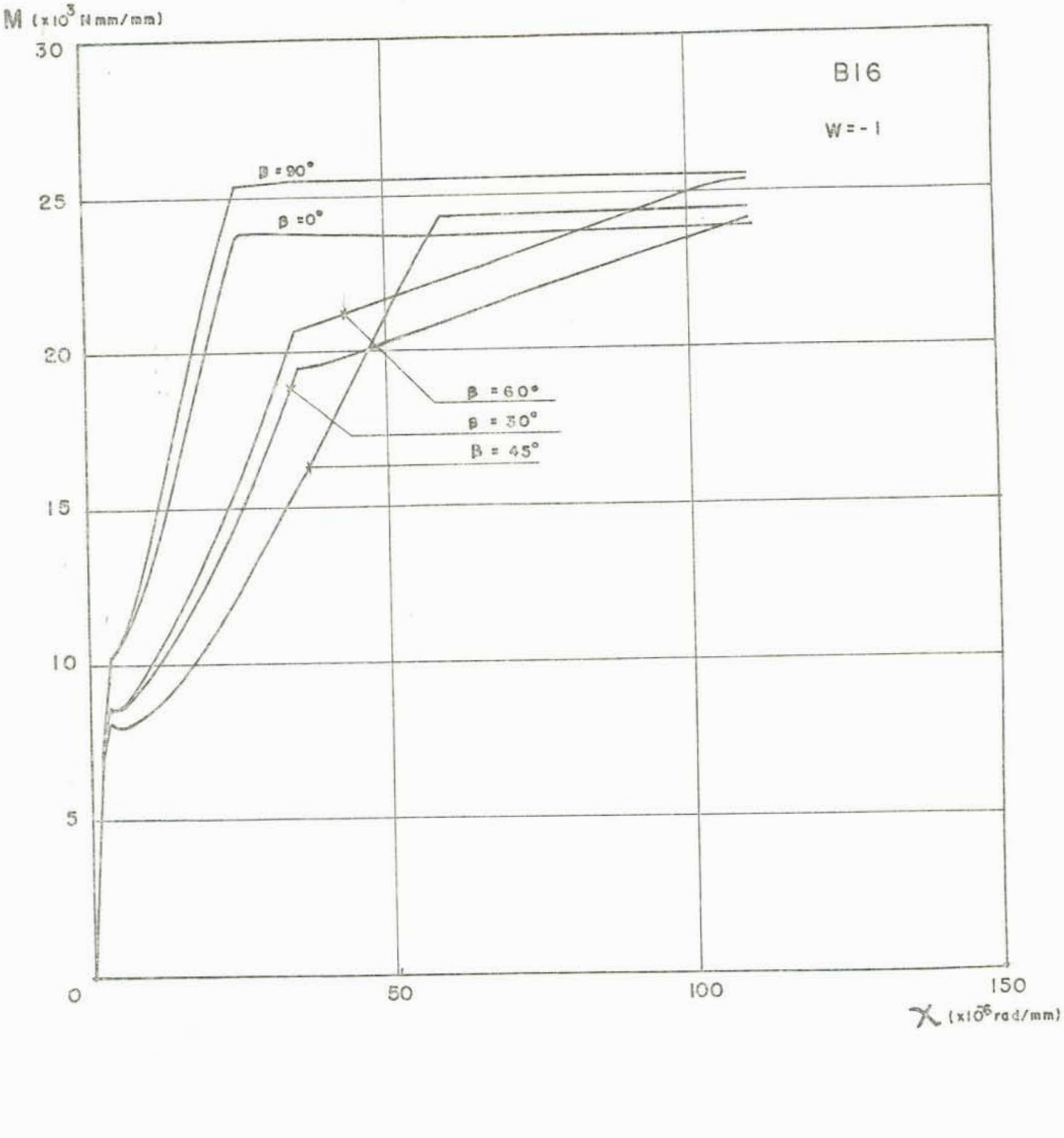
FIGURA 4.7 - Diagrama M-X para a laje B35.

Com este modelo analítico, efetua-se agora um estudo paramétrico, examinando a influência da variação na relação entre as curvaturas principais consideradas e da orientação da armadura em relação ao plano das curvaturas principais nos diagramas Momento-Curvatura. Os resultados foram obtidas nas lajes C2, B16 e B35.

Na figura 4.8.a, a laje B16 está sujeita a torção pura ($w = -1$) e varia-se a orientação da armadura em relação as curvaturas principais no intervalo $0^\circ <= \beta <= 90^\circ$. Observa-se que a fissuração ocorre ao redor do ponto com o momento $M_u = 7,0$ KN m/m e a curvatura $\chi_u = 0,0022$ rad/m. A instabilidade numérica após fissuração aumenta conforme o incremento no ângulo , até atingir um máximo em 45°. Nota-se também que para os ângulos complementares, por exemplo $\beta = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$, os resultados são muito próximos mas não idênticos, devendo-se atribuir este efeito ao fato de que as camadas das armaduras nas direções u,v não são coplanares, embora o produto das áreas pelas distâncias ao plano médio sejam as mesmas. Já que a diferença é mínima, nas análises subsequentes somente será considerado o intervalo de variação $0^\circ <= \beta <= 45^\circ$. Pode observar-se que a variação na orientação da armadura influencia significativamente o ponto de plastificação.

Na figura 4.8.b a laje B35 também está sujeita a torção pura($w= -1$) e o ângulo β varia de 0° a 45°. Novamente ficam corroboradas as considerações relativas ao ponto de plastificação.

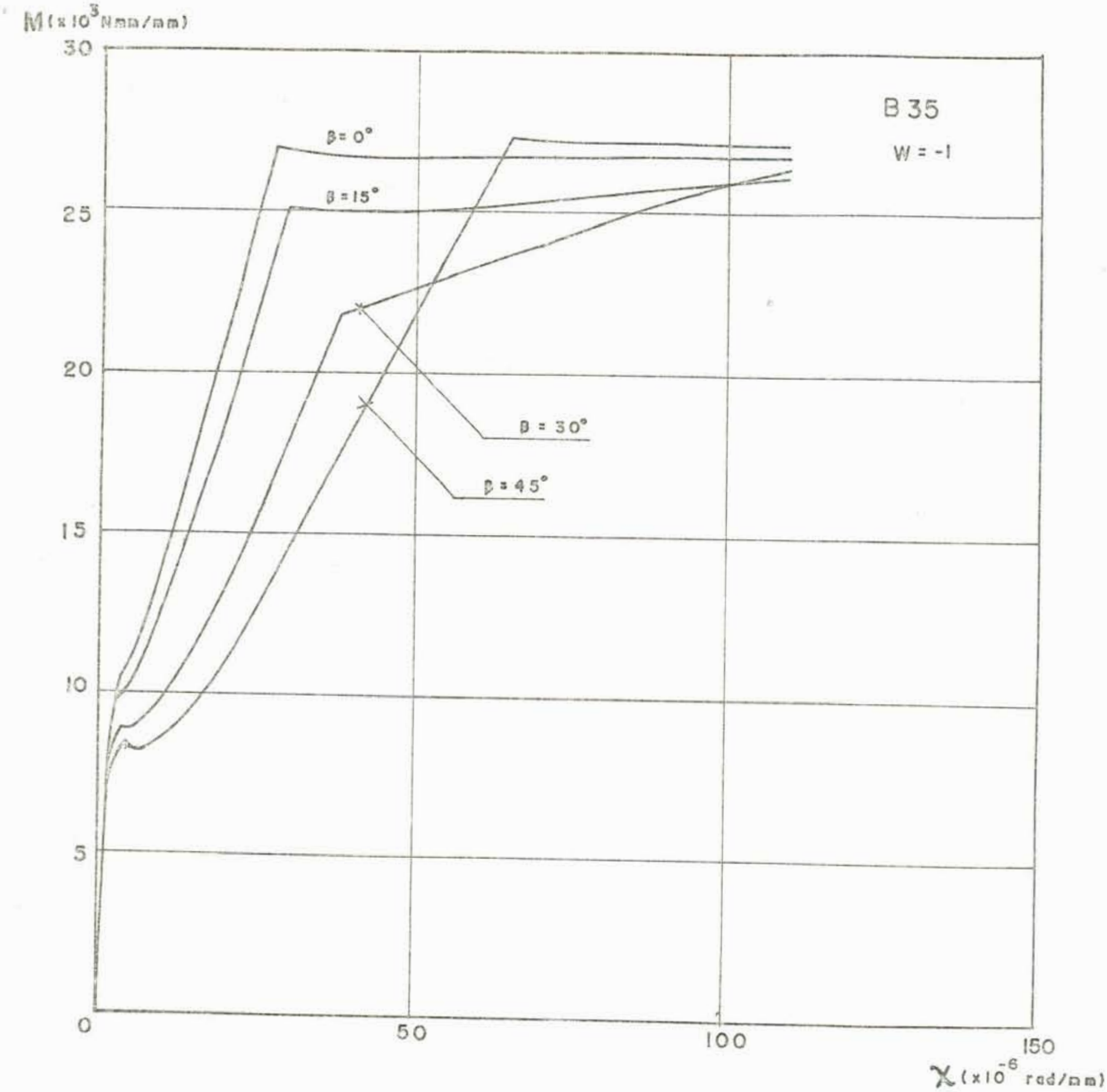
Na figura 4.8.c, a laje C2 está sujeita a flexão pura ($w = 1$) variando-se o ângulo β de 0° a 45°. A representação M-χ apresenta uma diferença da ordem de 5% no momento e na curvatura de plastificação.



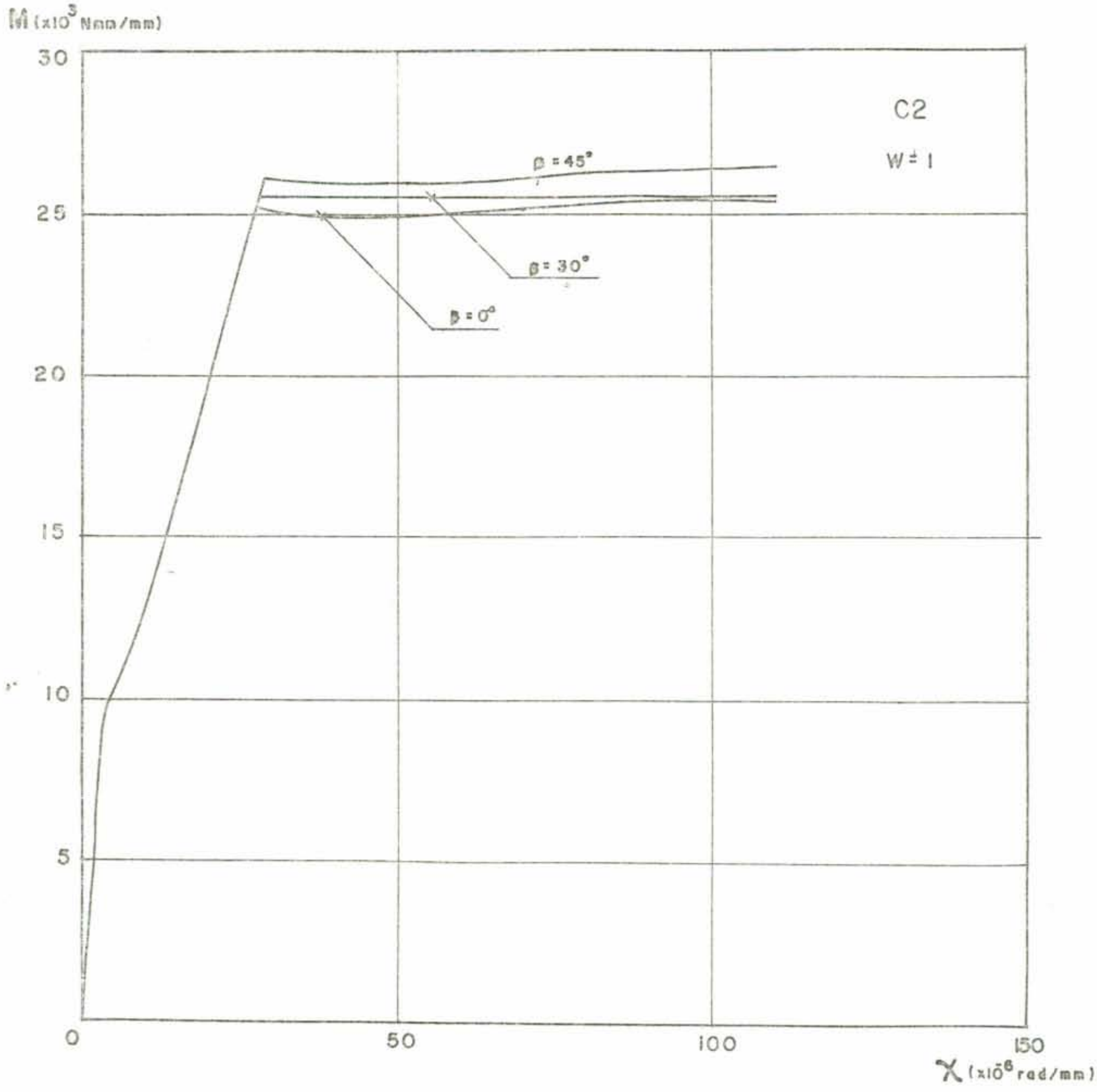
- a -

FIGURA 4.8. Efeito da variação de β no diagrama M-χ das lajes:

a) B16
b) B35
c) C2

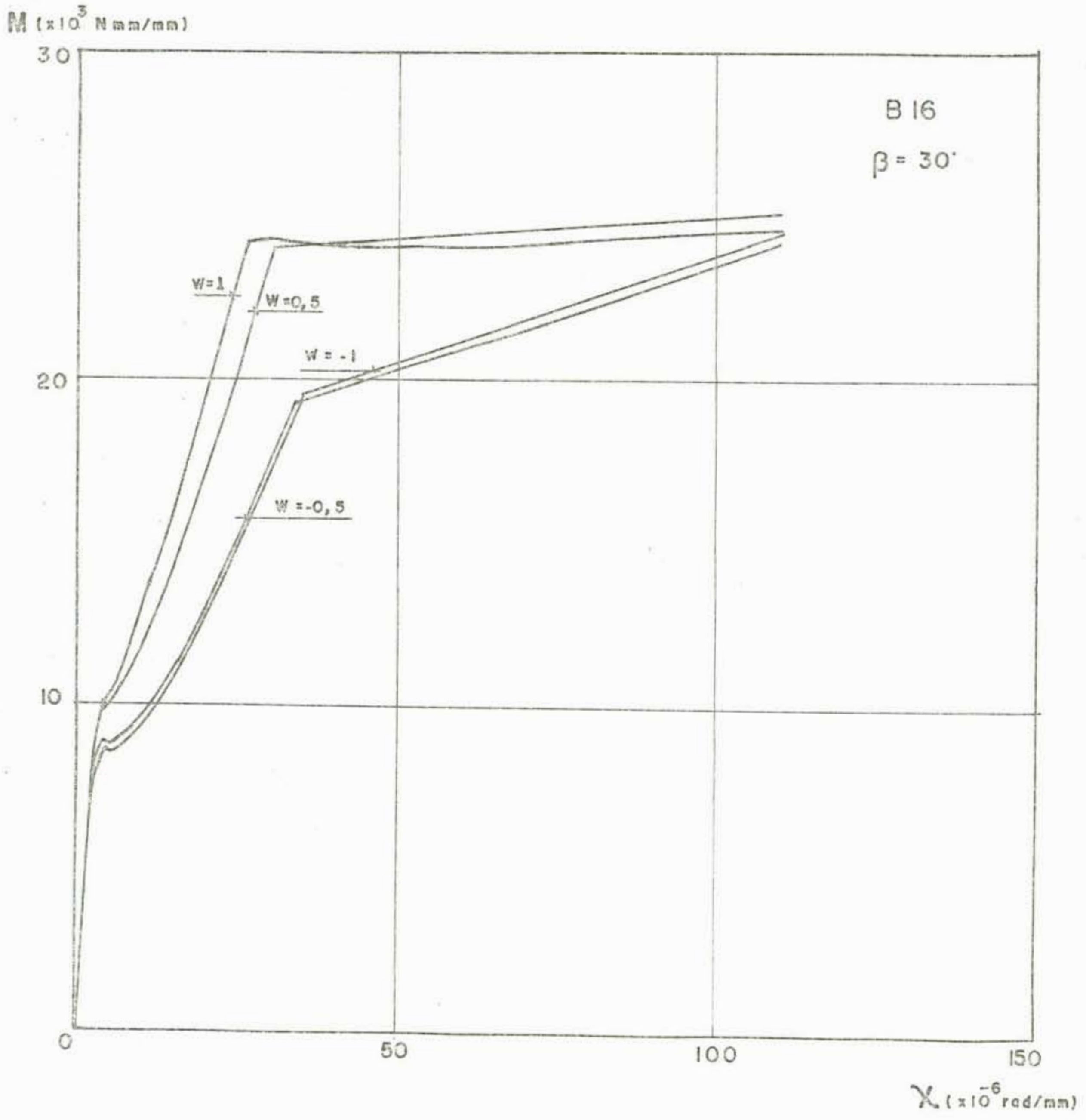

M (x10^3 Nmm/mm)
30
25
20
15
10
5
0
50
100
150
χ (x10^-6 rad/mm)
B 35
W = -1
β = 0°
β = 15°
β = 30°
β = 45°

- b -

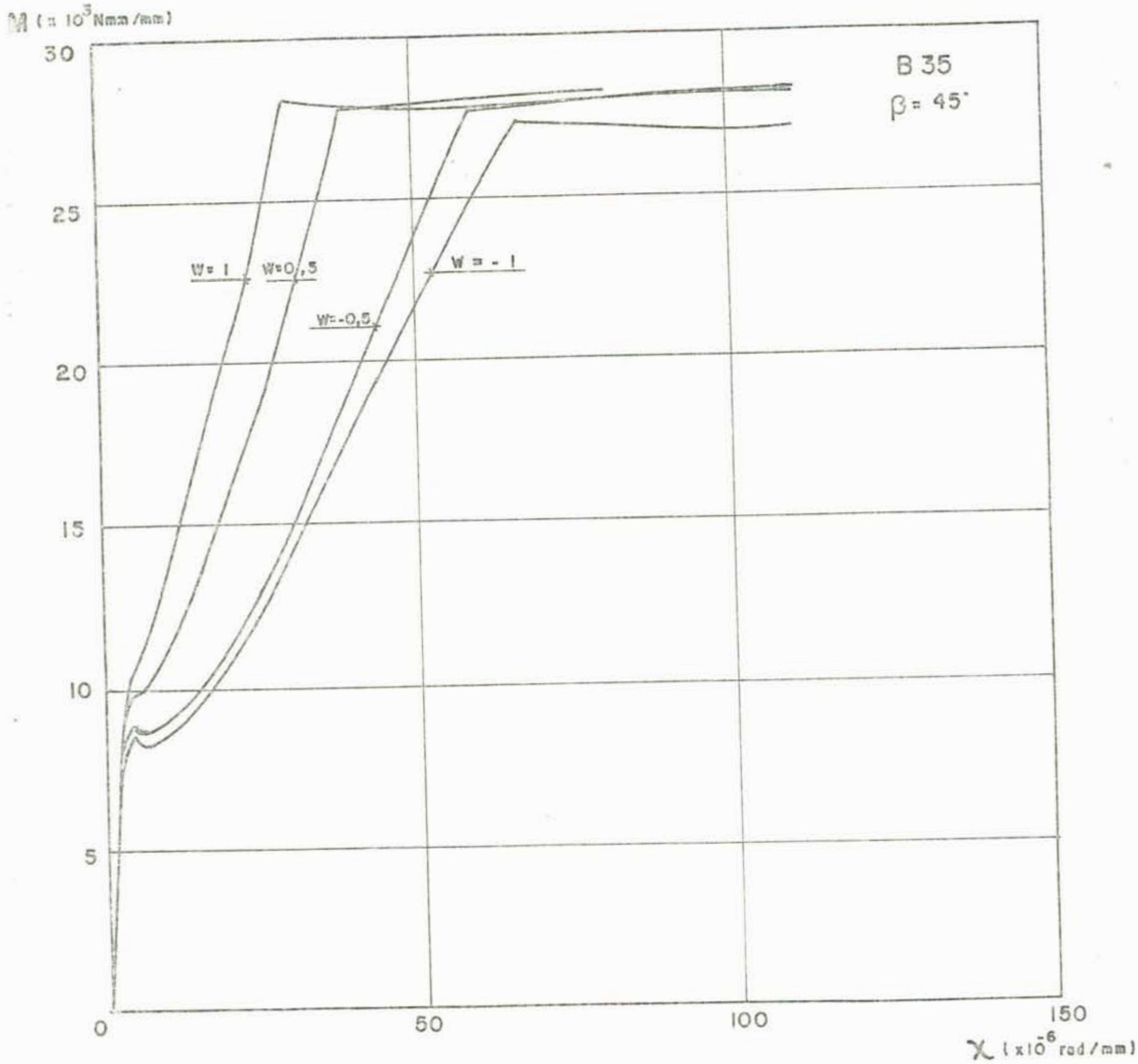

M (x10^3 Nmm/mm)
30
25
20
15
10
5
0
50
100
150
χ (x10^{-6} rad/mm)
C2
W = 1
β = 45°
β = 30°
β = 0°

- c -

Na figura 4.9.a a laje B16 está com a armadura orientada com $\beta = 30^{\circ}$ e w varia de 1 até -1. A diferença verificada no ponto de fissuração com M_u = 7,6 KN m/m e χ_u = 0,0022 rad/m devido a variação de w é mínima. A maior influência de w é obtida no ponto de plastificação. As rigidezes no Estádio III aumentam com a diminuição de w.



- a -



- b -

FIGURA 4.9. Efeito da variação de w no diagrama M- χ das lajes:

a) B16
b) B35.

Na laje B-35 com ângulo $\beta = 45°$ e w variando de 1 à -1, mostrada na figura 4.9.b, não há diferença no ponto de fissuração com $M_u \cong 6.5$ KN m/m e $\chi_u = 0{,}002$ rad/m. Já o ponto de plastificação é o mais influenciado pelo w, sendo obtida a maior variação em (χ_u^p, M_u^p) quando o valor de w é igual a -1. As rigidezes no estádio III são praticamente iguais e muito pequenas em relação a do estádio II.

4.4 - Modelo proposto para laje

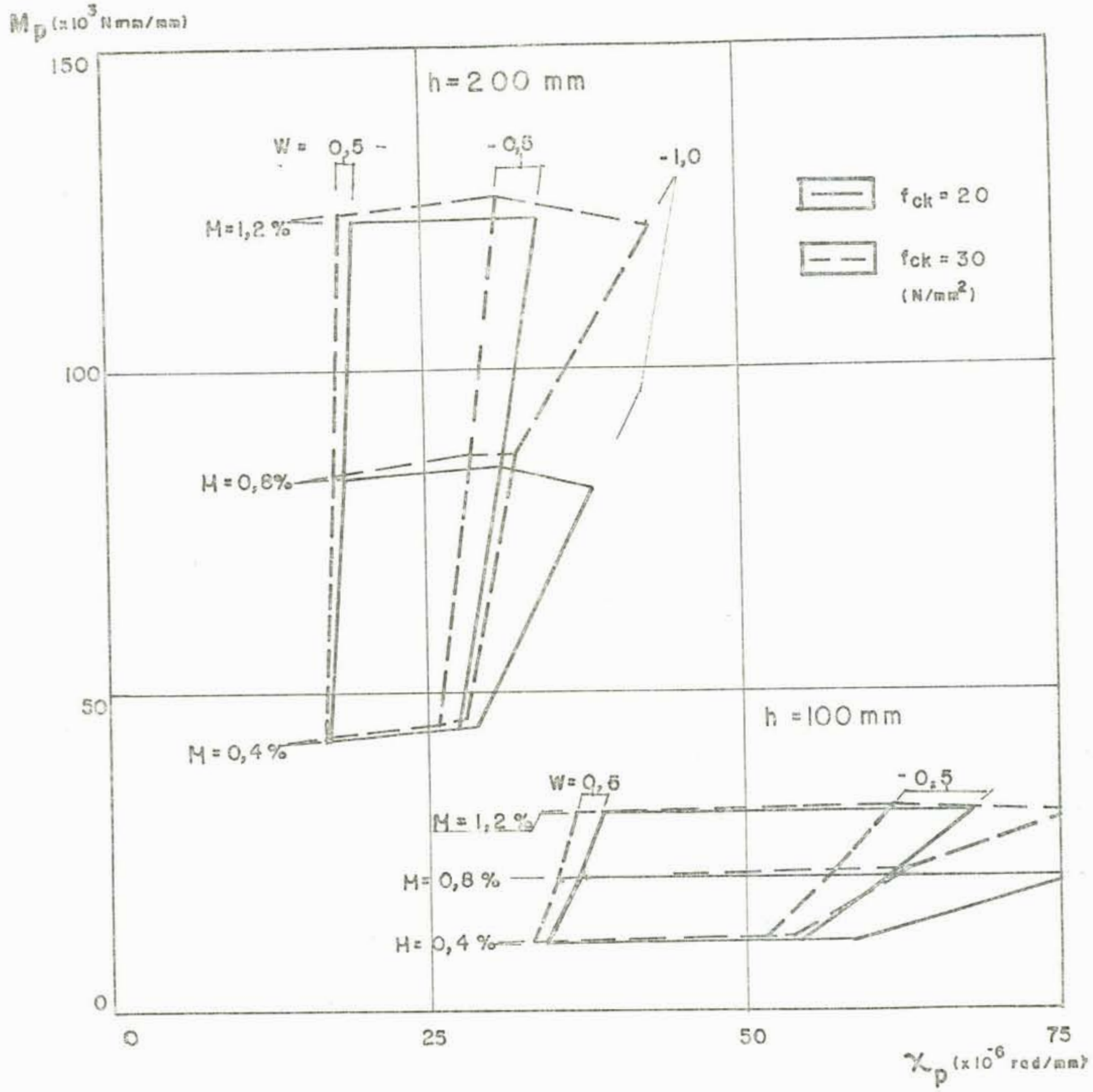
Conforme as comparações descritas anteriormente, deve-se salientar que o ponto mais influenciado pela variação de β e w é o da plastificação, enquanto o ponto de fissuração permanece praticamente constante. Também, pode-se dizer que no estádio III, as curvas M-χ das lajes sujeitas a variação de β e w convergem para o mesmo ponto, o da ruptura.

Então, com base no que foi dito, o Modelo Proposto para lajes de concreto armado, com armadura dupla, sujeito a um estado de curvaturas principais aplicadas, definido por w, e a armadura orientada em relação ao plano das curvaturas principais com o ângulo β, terá os pontos de fissuração e ruptura fixos e encontrados com $\beta = 0°$ e w = 1. A influência da variação de w e β nos diagramas da laje será dada apenas na curvatura e no momento de plastificação, e por consequência acarretará as modificações nas rigidezes do estádio II e III.

A partir de agora, se passará a estudar o efeito da variação da taxa de armadura, altura da laje e resistência dos materiais f_{ck} e f_{yk}, no ponto de plastificação (χ_u^p, M_u^p), submetida também à variação em β e w.

Primeiramente, são apresentados diagramas momento de plastificação-curvatura de plastificação, em que o elemento de laje com a armadura orientada a 45°, isto é $\beta = 45°$, o estado de aplicação das curvaturas principais w varia de 0,5 à -1,0.

Na figura 4.10.b, apenas permanece constante o $f_{ck} = 20$ N/mm^2 e o recobrimento, enquanto na figura 4.10.a permanece constante o $f_{yk} = 330$ N/mm^2 e também o recobrimento.

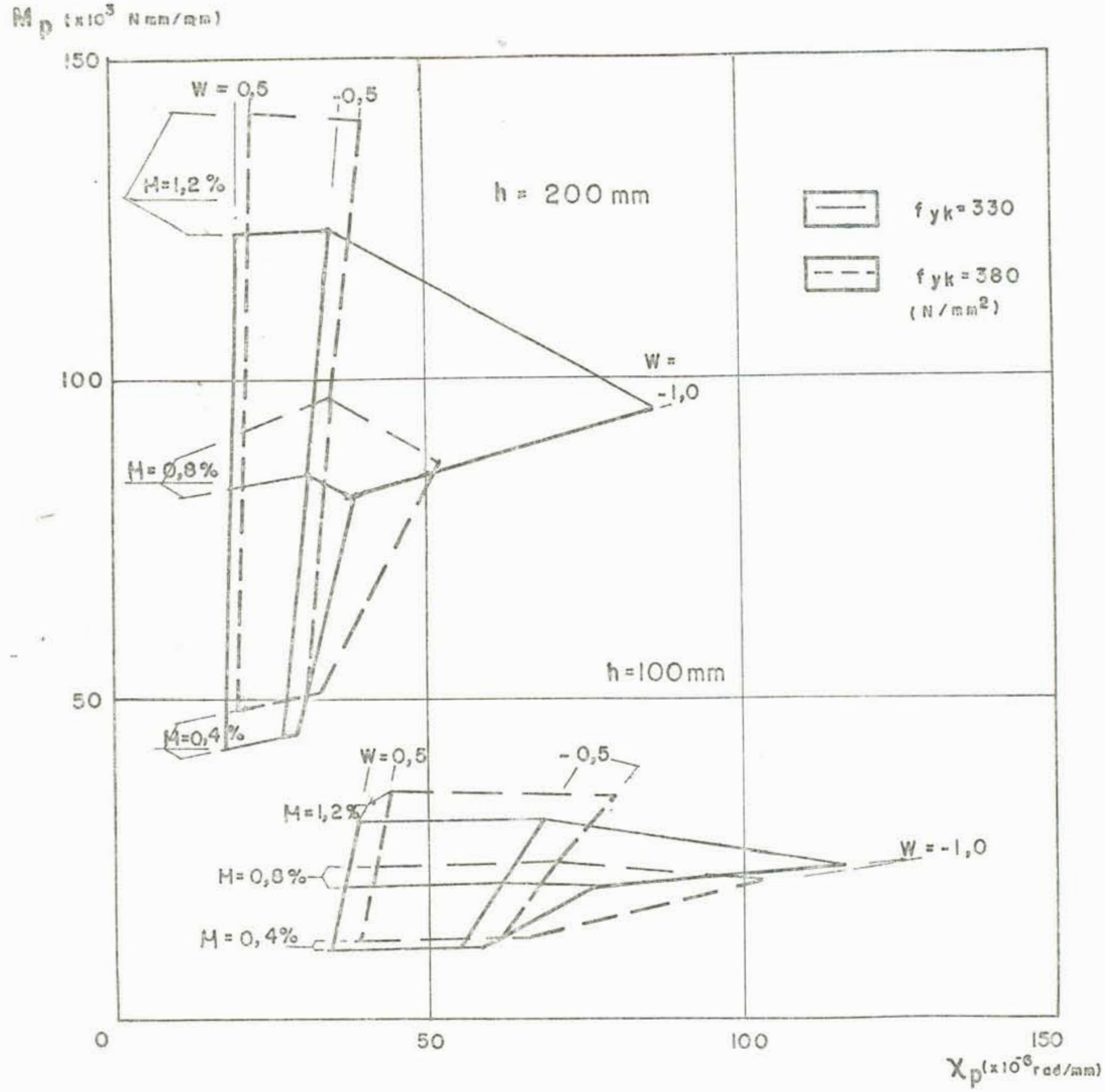


- a -

FIGURA 4.10. Pontos de plastificação das lajes:

a) f_{yk} e o recobrimento constantes;

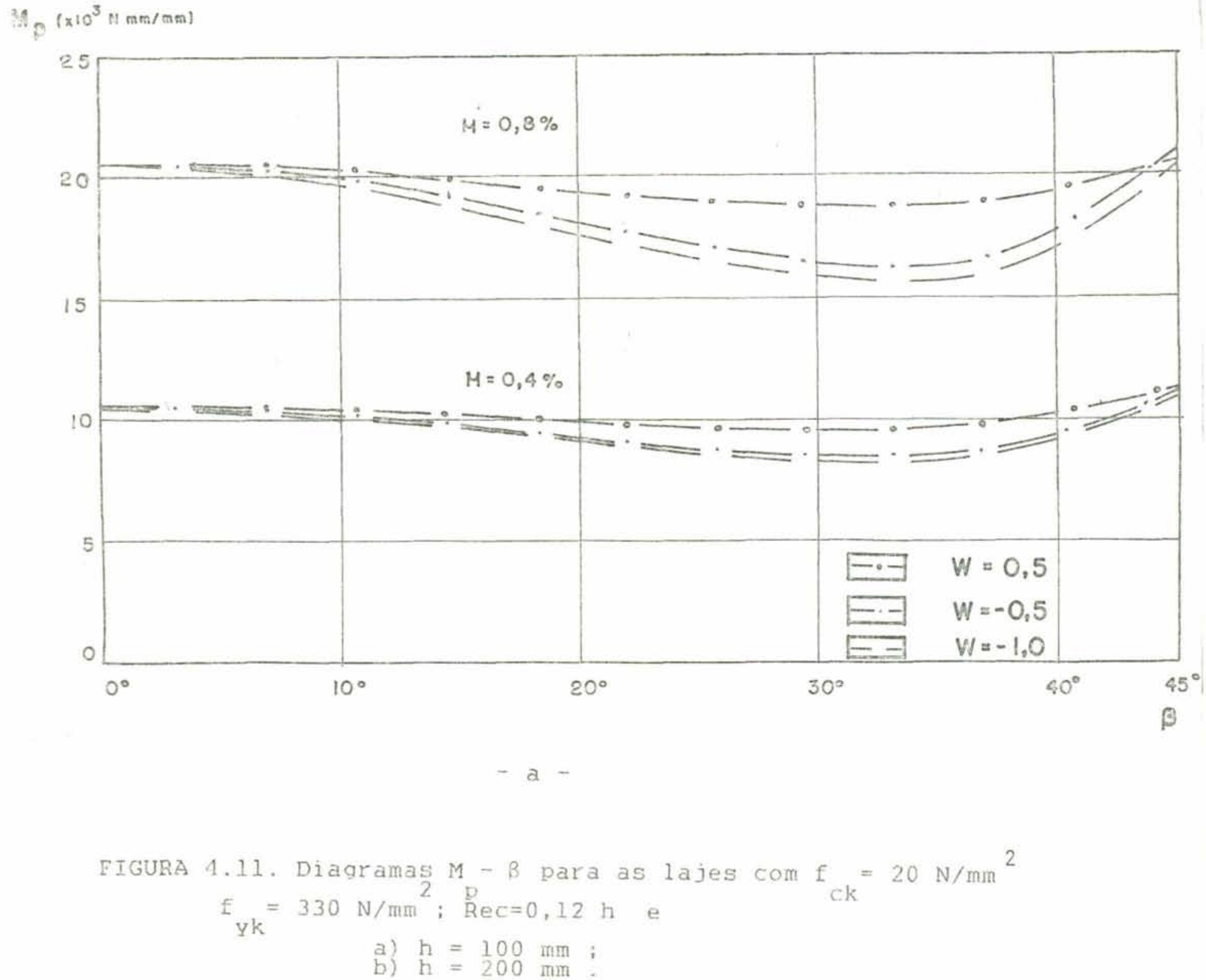
b) f_{ck} e o recobrimento constantes.



\- b -

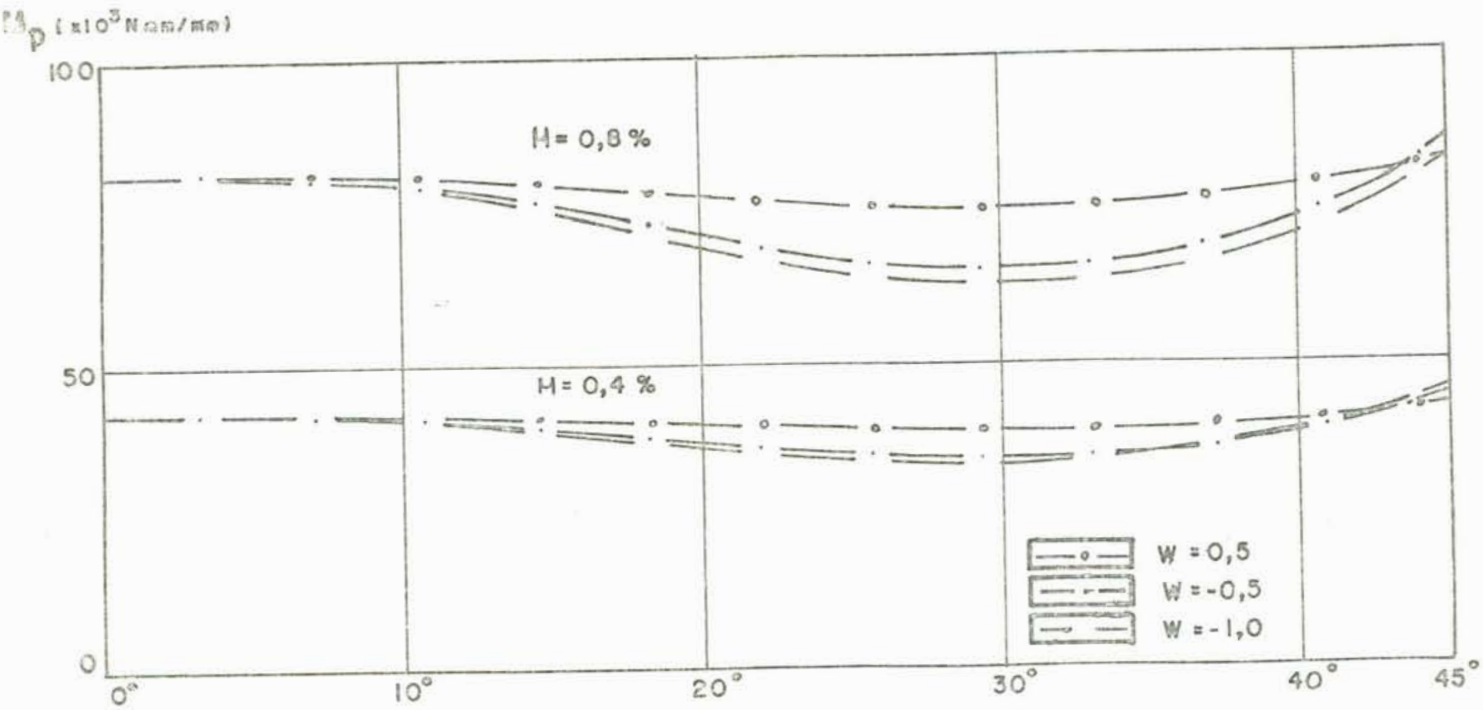
Pode-se observar nestas figuras a influência de cada parâmetro no momento e curvatura de plastificação. Salienta-se que, quando w=-1, pode ocorrer a ruptura por esmagamento do concreto antes do escoamento da armadura, dependendo da taxa de armadura.

Para melhor verificar-se a influência de cada parâmetro nos pontos (X_p, M_p) nas próximas figuras os resultados anteriores são apresentados de forma diferente. Na figura 4.11.a e 4.11.b são mostrados curvas M_p-β e pode-se observar que o momento de plastificação diminui até o ângulo $\beta = 34°$ a partir daí aumenta, o aumento da taxa de armadura aumenta a perda no momento e também nota-se que quando w passa a ser negativo o momento decresce menos.



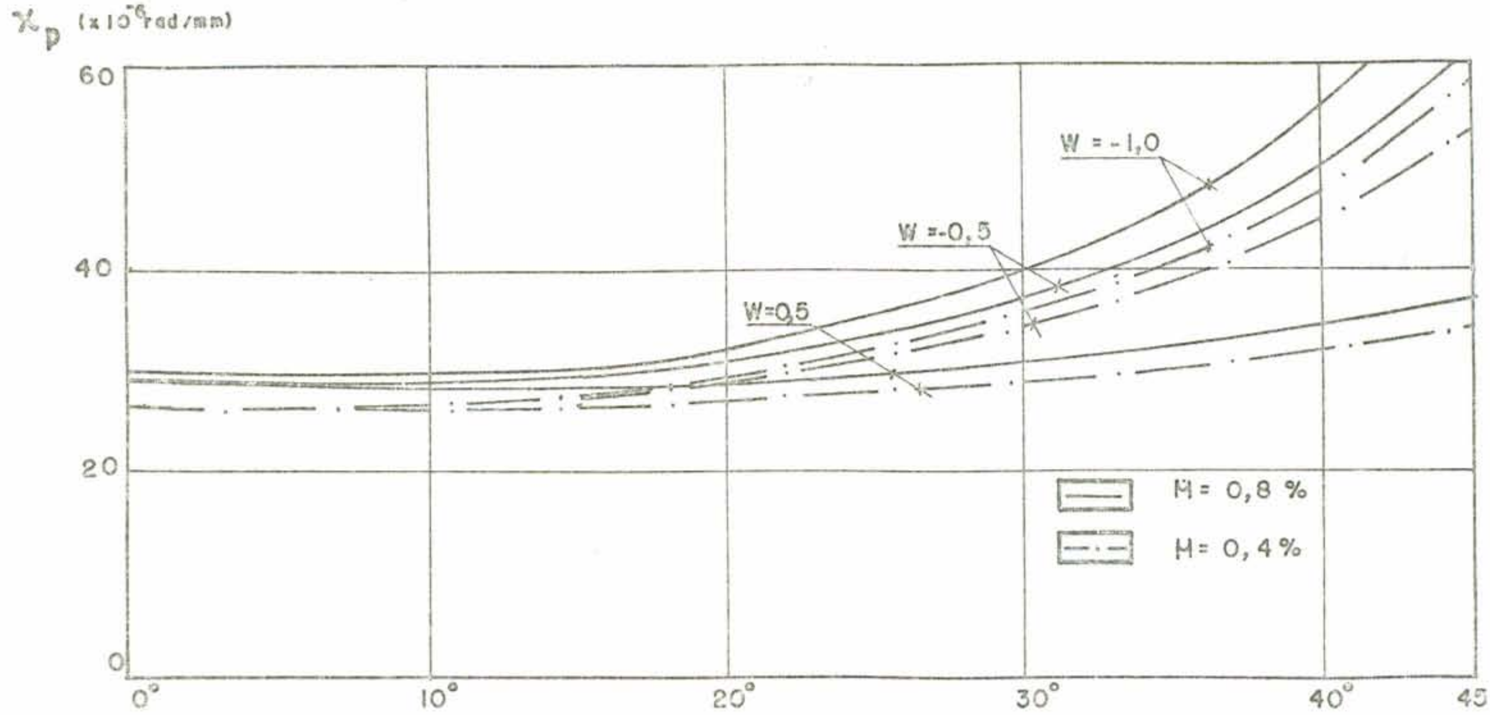
\- a -

FIGURA 4.11. Diagramas M_p - β para as lajes com f_{ck} = 20 N/mm^2
f_{yk} = 330 N/mm^2 ; Rec=0,12 h e
a) h = 100 mm ;
b) h = 200 mm .



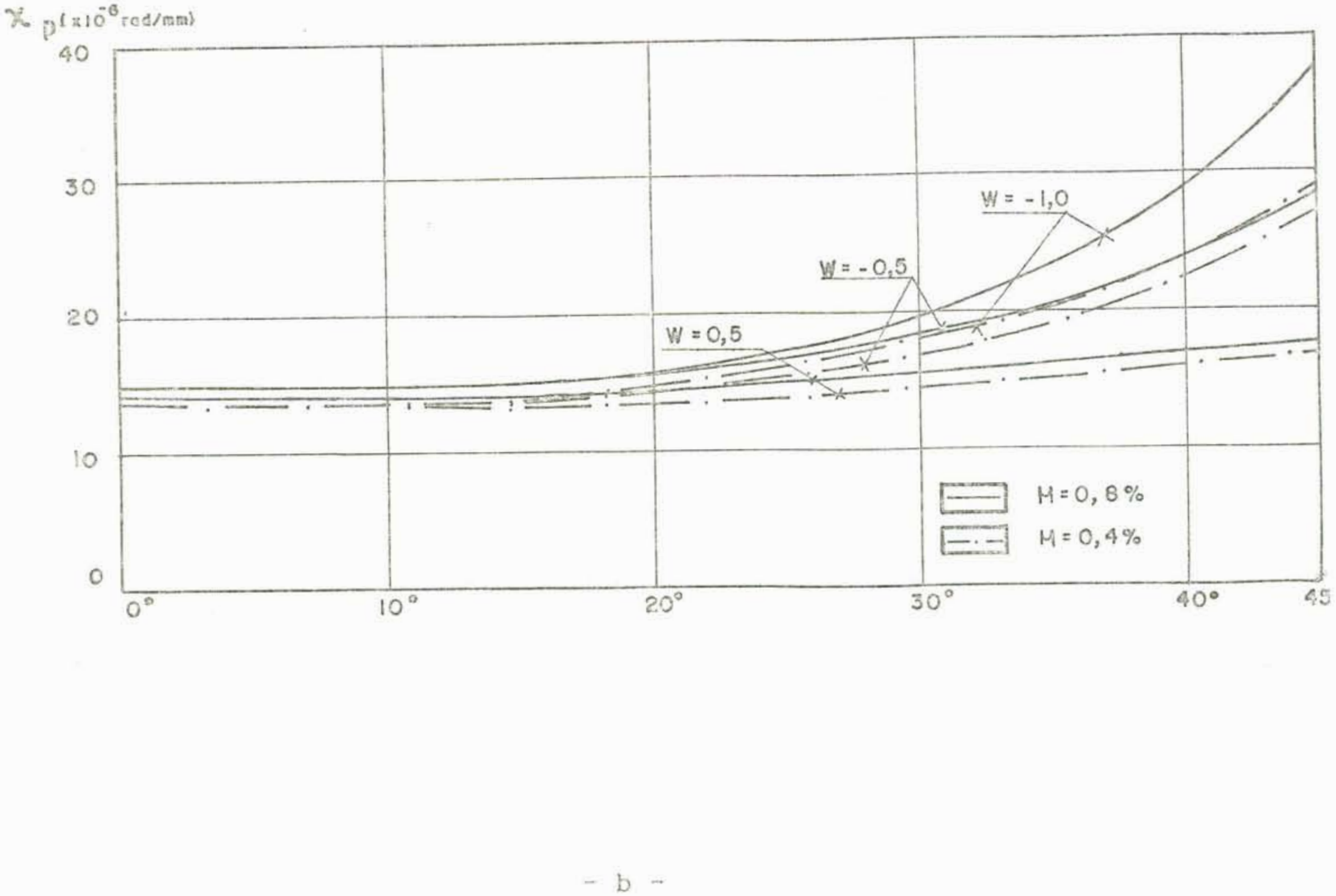
\- b -

Já na figura 4.12.a e 4.12.b são apresentados curvas $\chi_p - \beta$ observa-se que para o ângulo β menor que 20° a variação nas curvaturas de plastificação sofre pouca influência, mas a partir daí, há um incremento sensível na curvatura de plastificação deste elemento de laje, em função de w, μ e β .



- a -

FIGURA 4.12. Diagramas $\chi_p - \beta$ para as lajes com $f_{ck} = 20\ N/mm^2$
$f_{yk} = 330\ N/mm^2$; Rec=0,12 h e
a) h = 100 mm ;
b) h = 200 mm .



- b -

Pela observação dos diagramas anteriores, pode-se ver, que é muito difícil obter uma lei com base nestas curvas e levando em conta todos os parâmetros que influenciam o ponto de plastificação da laje. Para tanto, tenta-se normalizar estes resultados dividindo-se as curvaturas e momentos de plastificação obtidos para o elemento de laje em estudo, pelo respectivos

$\chi_p^{\cdot}$ e $M_p^{\cdot}$ com $\beta = 0^{\circ}$ e $w = 1$, de acordo com as equações abaixos,

$$\bar{\chi}_p = \chi_p / \chi_p^{\cdot} \tag{4.22}$$

$$\bar{M}_p = M_p / M_p^{\cdot} \tag{4.23}$$

onde

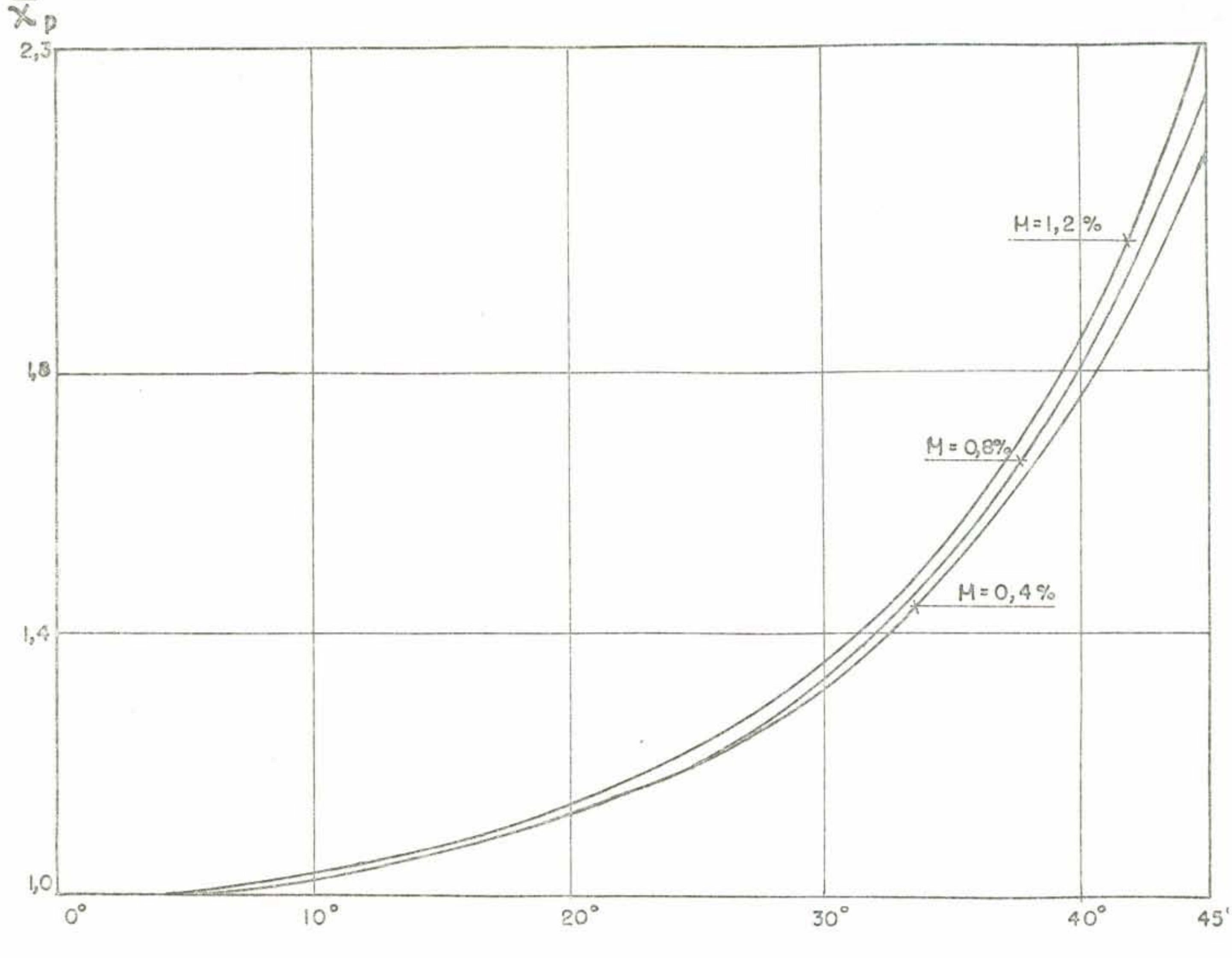
χ_p, M_p = a curvatura e o momento de plastificação obtidos;

$\chi_p^{\cdot}$, $M_p^{\cdot}$ = a curvatura e o momento de plastificação com $\beta = 0^{\circ}$ e $w = 1$;

$\bar{\chi}_p$, $\bar{M}_p$ = a curvatura e o momento normalizados.

A seguir são apresentados os diagramas normalizados para um elemento de laje com armadura simétrica, sendo estudado o efeito da variação na taxa de armadura, f_{ck}, f_{yk}, h, β e w.

Na fig. 4.13.a e 4.13.b são mostrados as curvas $\bar{\chi}_p - \beta$ e $\bar{M}_p - \beta$, para o elemento de laje com $f_{ck} = 20$ N/mm^2, $f_{yk} = 330$ N/mm^2, com H = 100 mm, variando-se a taxa de armadura, $\mu = 0{,}4\%$, $0{,}8\%$ e $1{,}2\%$, e com $w = -0{,}5$ e β variando de 0° a 45°. A diferença verificada entre as curvas é muito pequena.

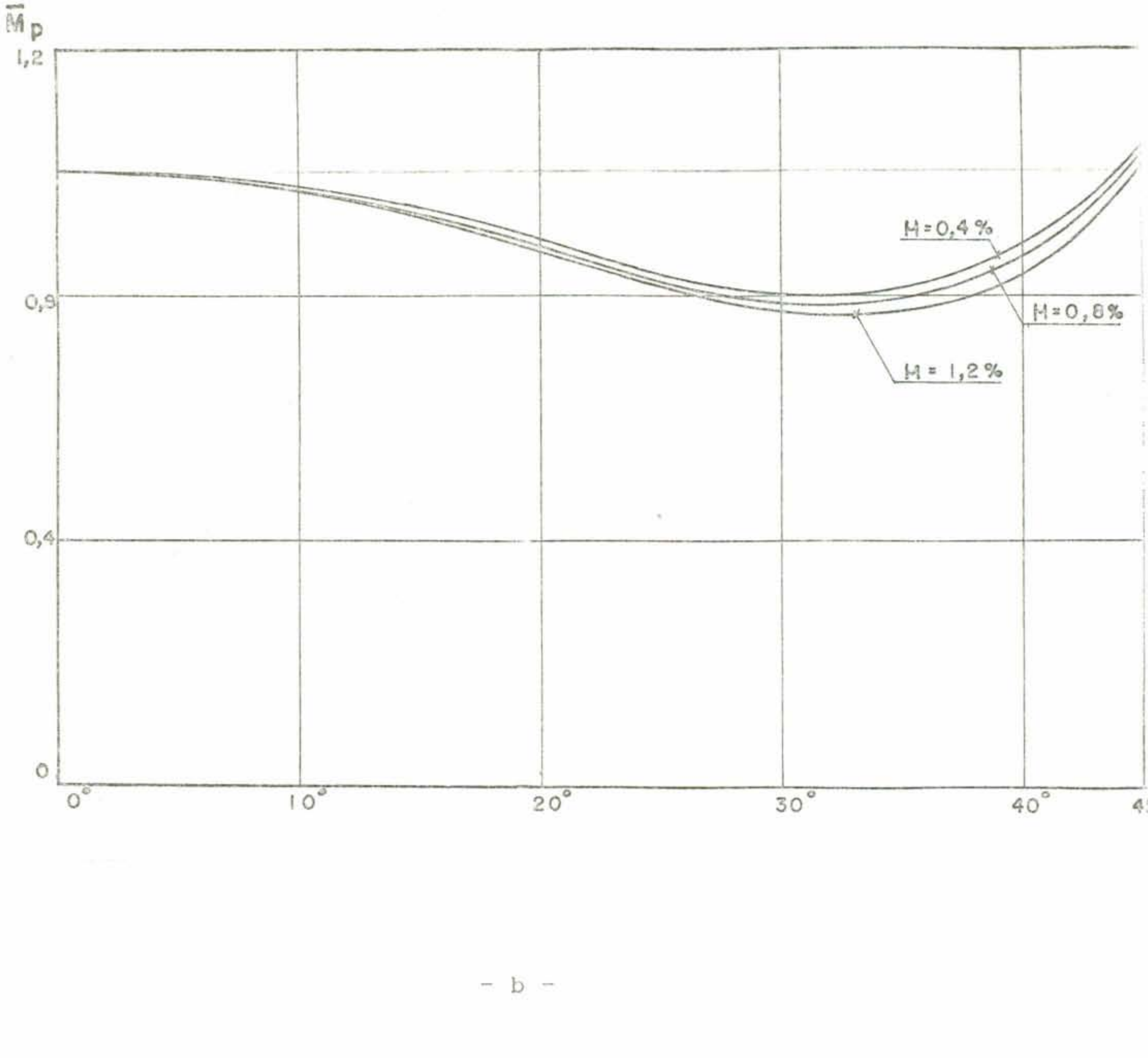


\- a -

FIGURA 4.13. Elemento de laje em que varia-se a taxa de armadura:

a) diagrama $\bar{\chi}_p - \beta$

b) diagrama $\bar{M}_p - \beta$



\- b -

Já na figura 4.14 são apresentados os diagramas $\overline{M}_p - \beta$ e $\overrightarrow{\chi}_p - \beta$, onde varia-se a altura da laje, as curvas permanecem iguais.

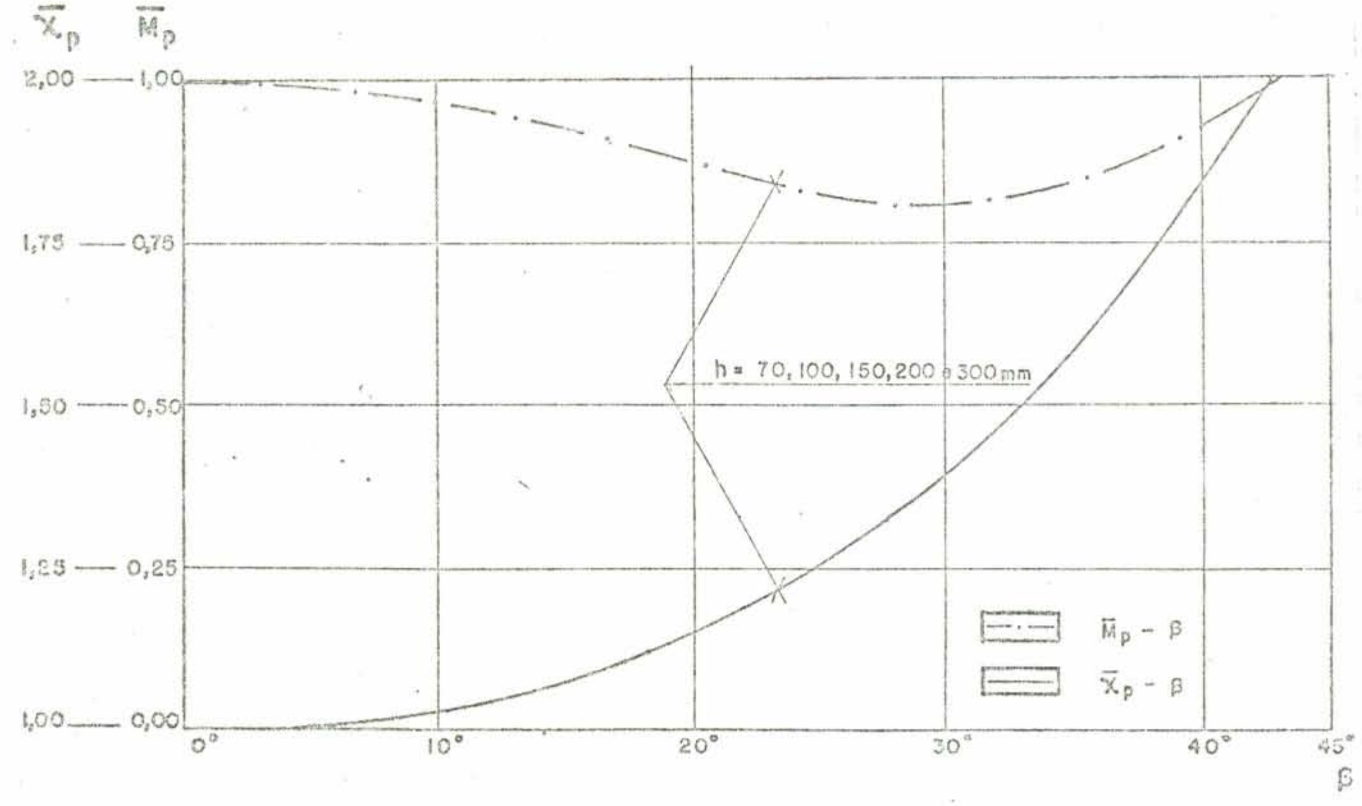
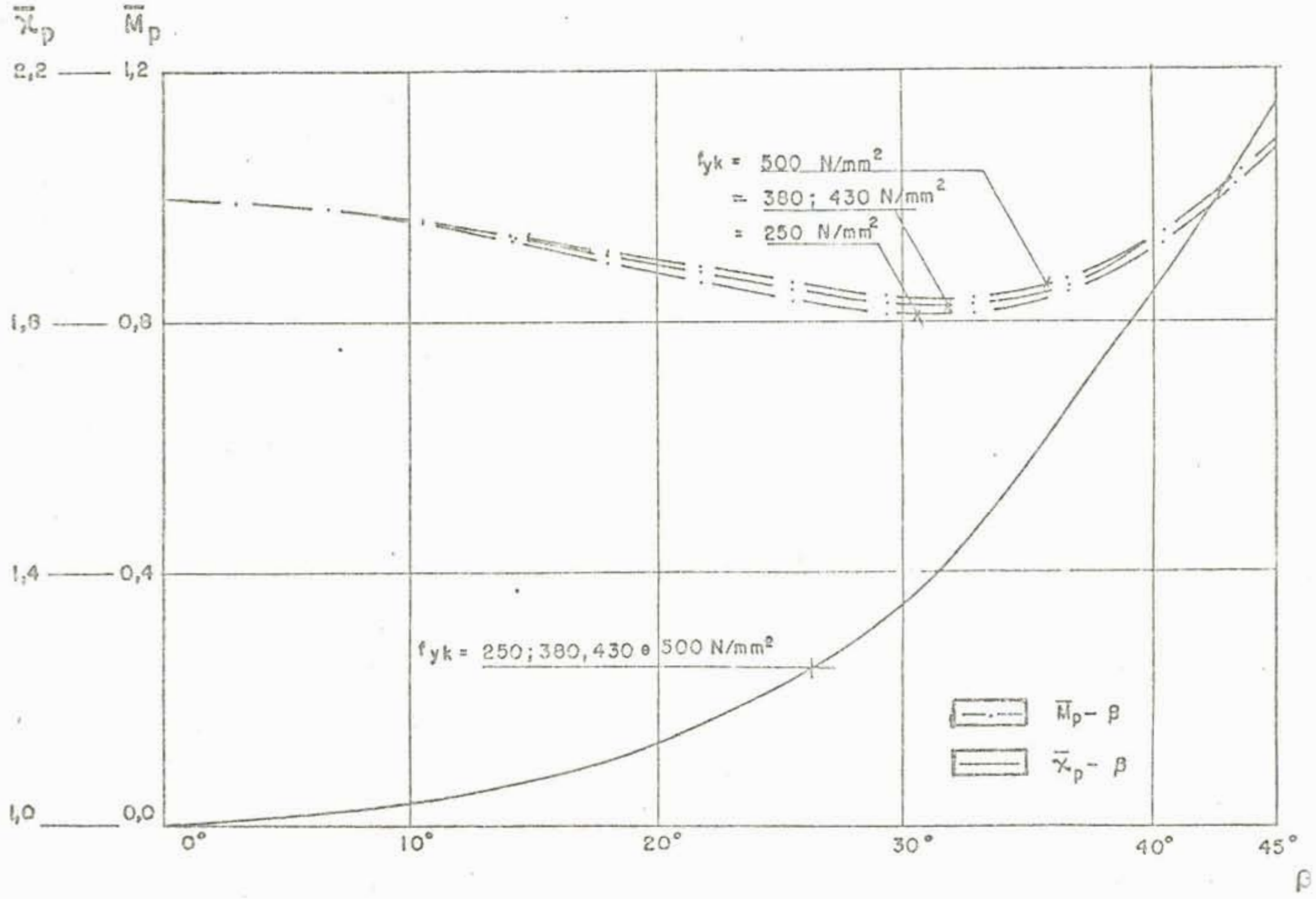


FIGURA 4.14 - Efeito da variação de h das lajes nos diagramas normalizados.

Nas figuras 4.15.a e 4.15.b são apresentados os diagramas $\overline{M}_p - \beta_2$ e $\overline{\chi}_p - \beta$ para o elemento de laje com μ = 0,4%, f_{yk} = 30 N/mm², h = 200 mm e w = -1, e a outra com μ = 0,4%, f_{ck} 20 N/mm², h = 100 mm e w = -0.5, respectivamente, varia-se o f_{ck} e o f_{yk}. Observando a curva $\overline{\chi}_p$ - β nota-se que não ocorreu influêcia significativa variando-se o f_{yk}, enquanto a curva $\overline{M}_p$ - β apresenta a maior diferença, ainda que pequena, quando β = 34°, sendo a influência mais acentuada quando menor for o f_{yk}.



- a -

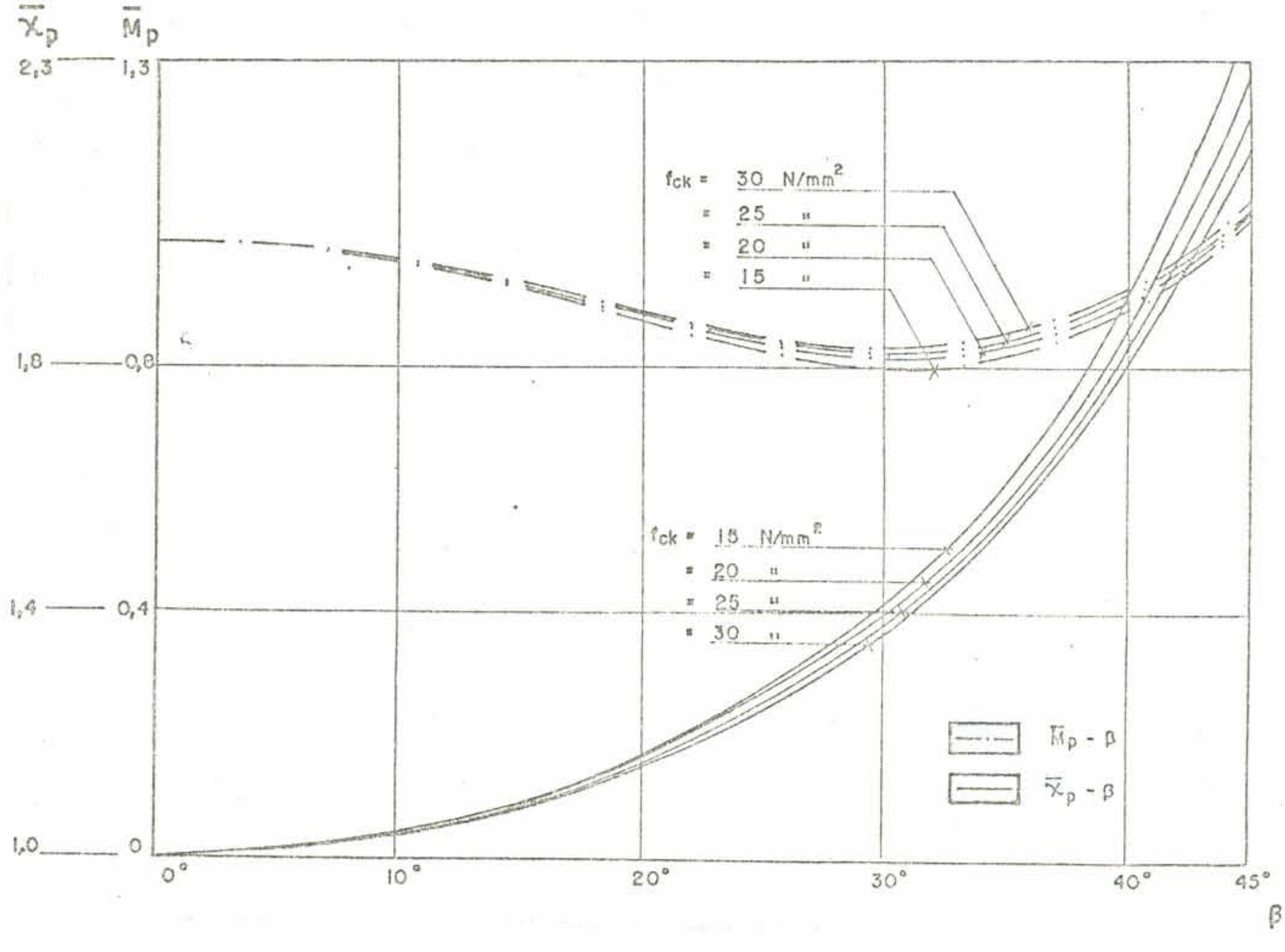
FIGURA 4.15. Efeito da variação de f_{yk} nos diagramas normalizados para a laje:

a) μ = 0,4% ; f_{ck} = 30 N/mm^2 ; h = 200 mm e w = -1

b) μ = 0,4% ; f_{ck}= 20 N/mm^2 ; h= 100 mm e w =-0,

\- b -

Nas figuras 4.16.a e 4.16.b são mostrados os diagramas $\bar{M}_p-\beta$ e $\bar{\chi}_p-\beta$ onde no elemento de laje varia-se o o f_{ck}. Observa-se que ocorre uma diferença pequena nestes diagramas, sendo a influência mais acentuada quanto menor for o f_{ck}.

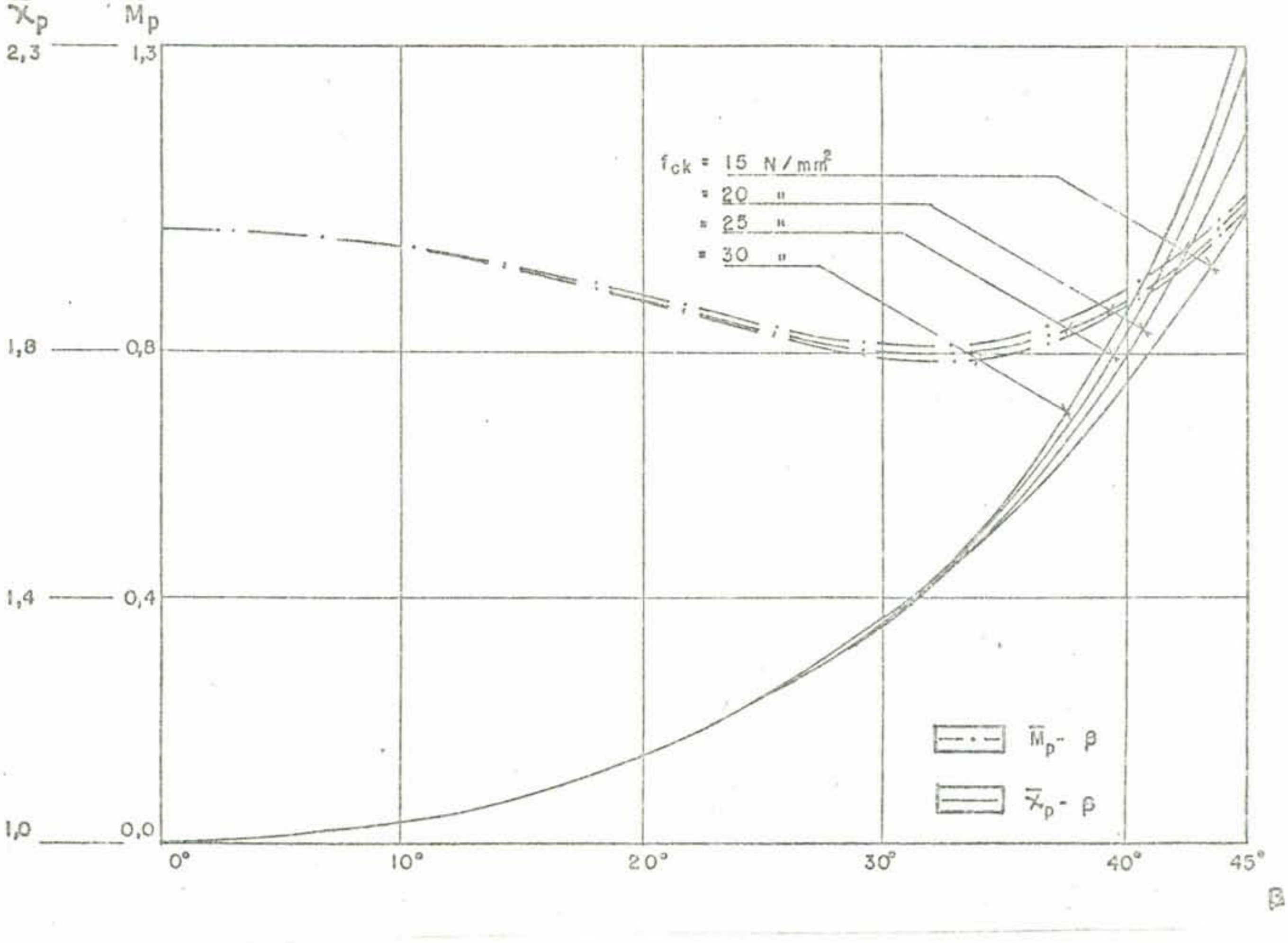


\- a -

FIGURA 4.16. Efeito da variação do f_{ck} nos diagramas normalizados para as lajes:

a) f_{yk}= 330 N/mm^2 ; μ = 0,4% ; h = 100 mm e w = -

b) f_{yk}= 330 N/mm^2 ; μ = 0,8% ; h = 200 mm e w = 0



$\bar{x}_p$
$\bar{M}_p$
2,3
1,3
1,8
0,8
1,4
0,4
1,0
0,0
f_{ck} = 15 N/mm²
= 20 "
= 25 "
= 30 "
$\bar{M}_p$ - β
$\bar{x}_p$ - β
0°
10°
20°
30°
40°
45°
β

- b -

Em geral, os diagramas obtidos pela normalização dos resultados, experimentaram uma influência reduzida ao variar-se os parâmetros f_{ck}, f_{yk}, h, μ.

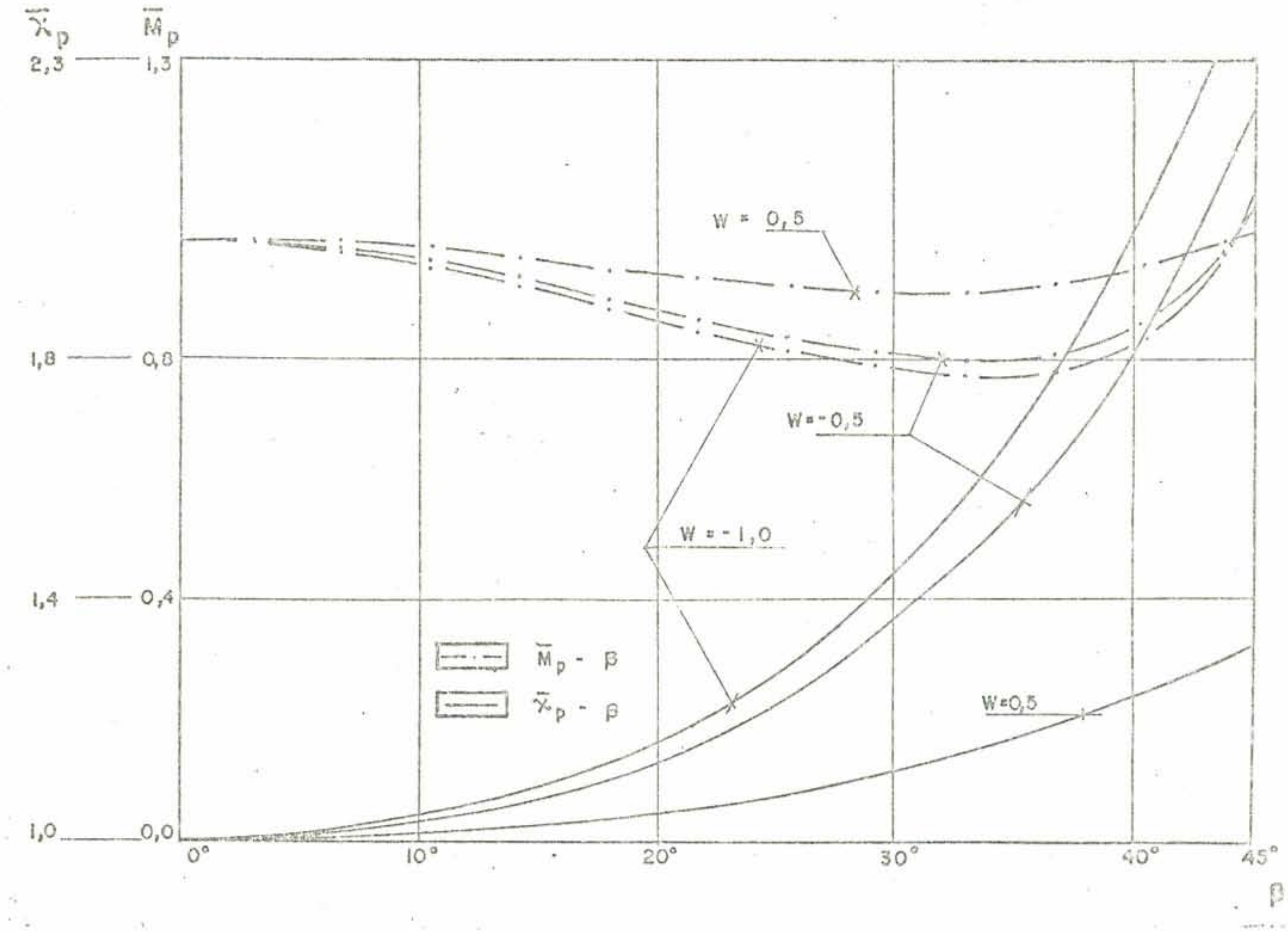


FIGURA 4.17 - Curvas Ideais $\bar{M}_p - \beta$ e $\bar{\chi}_p - \beta$.

Consequentemente, para determinar as relações $M - \chi$ para a laje de concreto armado, propõe-se o seguinte modelo trilinear unidimensional. As regras são definidas conforme o modelo proposto para o elemento de viga da figura 3.4, atuando somente carregamento monotônico, sendo os pontos de fissuração (χ_f, M_f), plastificação (χ_p , M_p) e ruptura (χ_r , M_r) determinados de acordo com as seguintes regras:

a) Em função dos dados f_{ck} , f_{yk} , h, μ se determinam $\dot{M}_p$, $\dot{M}_f$, $\dot{\chi}_p$, $\dot{\chi}_f$ e valores de ruptura, todos eles com $\beta = 0^\circ$, $w = 1$, através da aplicação do algoritmo baseado no modelo laminar IV ou por fórmulas empíricas aproximadas, obtendo-se assim os pontos de fissuração e ruptura da laje.

b) O ponto de plastificaçao é obtido através das equações 4.24 até 4.29, que representam a média dos resultados normalizados, analizados no estudo paramétrico e que respondem às curvas definidas com f_{ck}= 20 N/mm^2 , f_{yk}= 330 N/mm^2, h = 100 mm e μ = 0,6% conforme a figura 4.17. As equações são as seguintes:

$$\chi_p = \bar{\chi}_p \;/\; \dot{\chi}_p \qquad (4.24)$$

e

$$M_p = \bar{M}_p \;/\; \dot{M}_p \;. \qquad (4.25)$$

As equações que representam este universo de curvas são as seguintes:

$$\bar{\chi}_p(\beta,w) = 1 + 1,5.0,838^{a} .\; 0,825^{20.(1-\beta/45^\circ)} \qquad (4.26)$$

onde $\quad a = 4,1\ (w+1)^{1,87}$

e para $\bar{M}_p$ se

$$0^{\circ} <= \beta <= 35^{\circ} \Rightarrow \bar{M}_p(\beta, w) = 1 - (1 - M')\beta/35^{\circ} \qquad (4.27)$$

$$35^{\circ} > \beta >= 45^{\circ} \Rightarrow \bar{M}_p(\beta, w) = M' + \{1 - M' + 0{,}06(1-w)/2\}.0{,}7^{b} \qquad (4.28)$$

onde

$$M' = 0{,}77.0{,}97^{c} \qquad (4.29)$$

$$b = 20(4{,}5 - 0{,}1\beta)^{2}$$

$$c = -8{,}55.\left|(w+1)/2\right|^{1{,}55}.$$

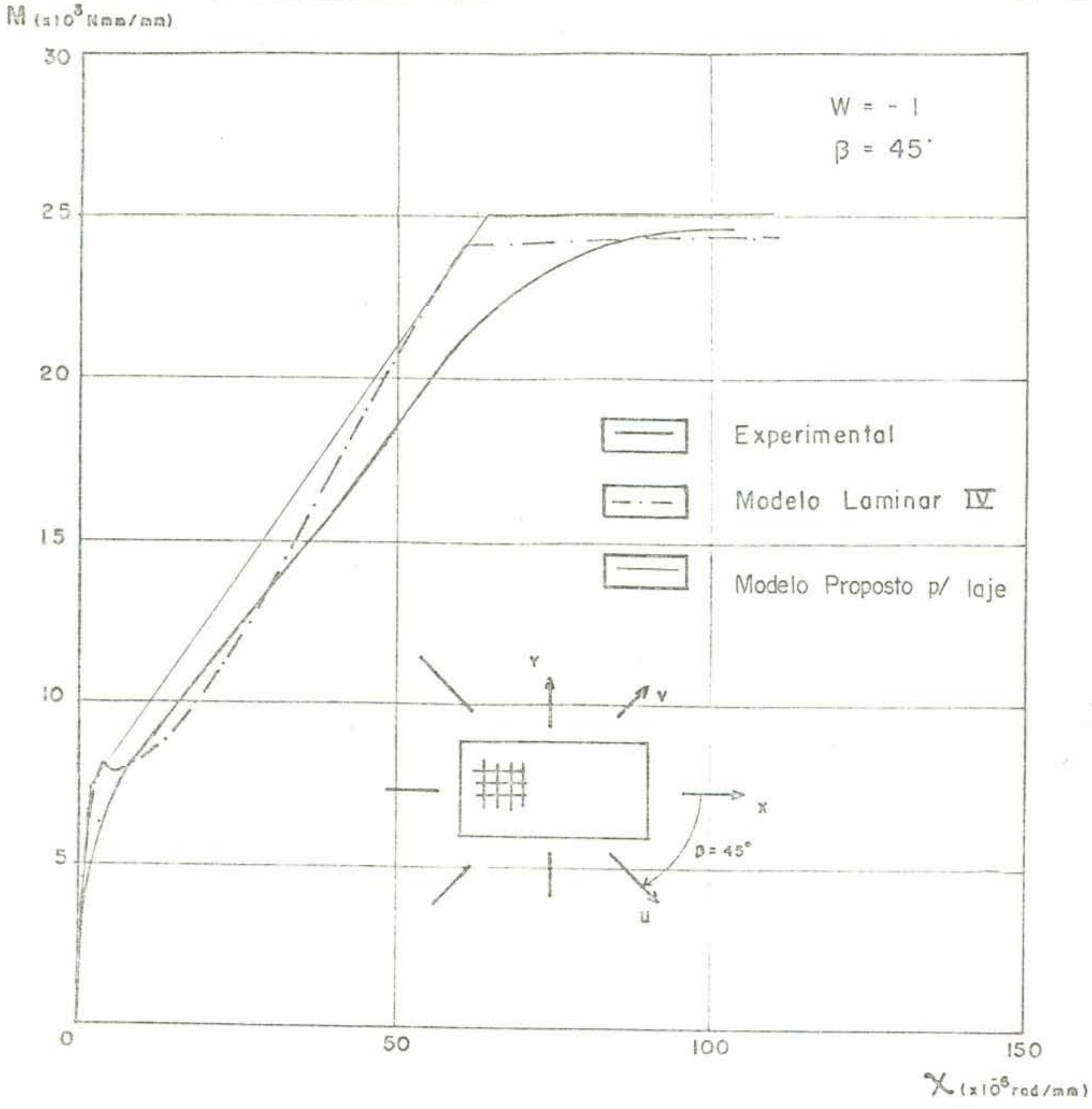


FIGURA 4.18 - DIGRAMA M - X da laje B16

<u>Exemplo 1</u>: Seja a laje B16, cujas características estão definidas na figura 4.4, $w = 1$ e $\beta = 45^{\circ}$. O procedimento para obter-se o Modelo Proposto desta laje, conforme descrito anteriormente será:

Passo 1: Com o Modelo Laminar IV, e com as características geométricas da seção transversal, as resistências dos materiais, taxa das armaduras, $\beta = 0^{\circ}$ e $w = 1$, determina-se os pontos anteriormente salientados do diagrama $M - \chi$ desta Laje :

a) Ponto de Fissuração :

$$\chi_f^{\cdot} = 0{,}0022 \text{ rad/m} \quad \text{e} \quad M_f^{\cdot} = 7{,}46 \text{ KN m/m.}$$

b) Ponto de Plastificação :

$$\chi_p^{\cdot} = 0{,}0252 \text{ rad/m} \quad \text{e} \quad M_p^{\cdot} = 24{,}1 \text{ KN m/m}$$

c) Ponto de Ruptura:

$$\chi_r^{\cdot} = 0{,}240 \text{ rad/m} \quad \text{e} \quad M_r^{\cdot} = 25{,}0 \text{ KN m/m.}$$

Passo 2: Para determinar o ponto de plastificação M_p, χ_p da laje B16 com $\beta = 45^{\circ}$ e $w = -1$, aplicam-se as equações de (4.24) à (4.29), calculando então :

- A curvatura de plastificação (χ_p) pela equação (4.24) tem-se

$$\chi_p = \bar{\chi}_p \cdot \chi_p^{\cdot} ,$$

determina-se $\bar{\chi}_p$ pela equação (4.26)

$$\bar{\chi}_p = 1 + 1{,}5 . 0{,}838^{a} . 0{,}825^{20\ (1 - \beta / 45^{\circ})} =$$

onde $\quad a = 4{,}1\ (w+1)^{1{,}87} = 4{,}1\ (-1 + 1)^{1{,}87} = 0$

$$\bar{\chi}_p = 1 + 1{,}5 . 0{,}838^0 . 0{,}825^{20(1-45^\circ/45^\circ)} =$$

$$= 1 + 1{,}5 . 0{,}838^0 . 0{,}825^0 = 2{,}5$$

substituindo este valor na equação anterior fica:

$$\chi_p = 2{,}5 . 0{,}0252 = 0{,}0630 \text{ rad/m} .$$

que é a curvatura de plastificação desta laje.

- Momento de plastificação pela equação (4.25) tem-se:

$$M_p = \bar{M}_p . M_p^*$$

e utilizando (4.28) determina-se $\bar{M}_p$:

$$\bar{M}_p(\beta, w) = M' + \{1 - M' + 0{,}06(1-w)/2\} . 0{,}7^b =$$

onde

$$M' = 0{,}77 . 0{,}97^c = 0{,}77 . 0{,}97^0 = 0{,}77$$

$$b = 20(4{,}5 - 0{,}1\beta)^2 = 20(4.5 - 0{,}1.45)^2 = 0$$

$$c = -8{,}55 . |(w+1)/2|^{1{,}55} = -8.55 . |(-1+1)/2|^{1{,}55} = 0$$

$$\bar{M}_p = 0{,}77 + \{1 - 0{,}77 + 0{,}06 . (1+1)/2\} . 0{,}7^0 =$$

$$\bar{M}_p = 0{,}77 + (1 - 0{,}77 + 0{,}06.1) = 1{,}06$$

finalmente, aplicando o valor calculado de $\bar{M}_p$ em (4.25) ficará:

$$M_p = \bar{M}_p \, . \, M_p^{\cdot} = 1,06 \, . \, 24,1 = 25,54 \text{ KN m/m.}$$

que é o momento de plastificação desta laje.

Na figura 4.18 está representado o diagrama M-χ desta laje.

<u>Exemplo 2</u>: Seja a laje C2, com as características definidas na na figura 4.4, e com $w = 1$ e $\beta = 0^{\circ}$. Seguindo o mesmo procedimento do exemplo anterior, obtem-se os pontos do diagrama M - χ para esta laje:

a) Ponto de Fissuração :

$$\chi_f = 0,0024 \text{ rad/m} \quad \text{e} \quad M_f = 7,5 \text{ KN m/m}$$

b) Ponto de Plastificação :

$$\chi_p = 0,0264 \text{ rad/m} \quad \text{e} \quad M_p = 25,1 \text{ KN m/m}$$

c) Ponto de Ruptura:

$$\chi_r = 0,232 \text{ rad/m} \quad \text{e} \quad M_r = 25,3 \text{ KN m/m.}$$

Na figura 4.19a está representado o diagrama M - χ desta laje.

<u>Exemplo 3</u>: Seja a laje B35, com as características definidas na na figura 4.4, e com $w = -1$ e $\beta = -34^{\circ}$. Seguindo o mesmo procedimento do exemplo 1, obtem-se os pontos do diagrama M -χ para esta laje:

a) Ponto de Fissuração :

$$\chi_f = 0,0021 \text{ rad/m} \quad \text{e} \quad M_f = 6,8 \text{ KN m/m}$$

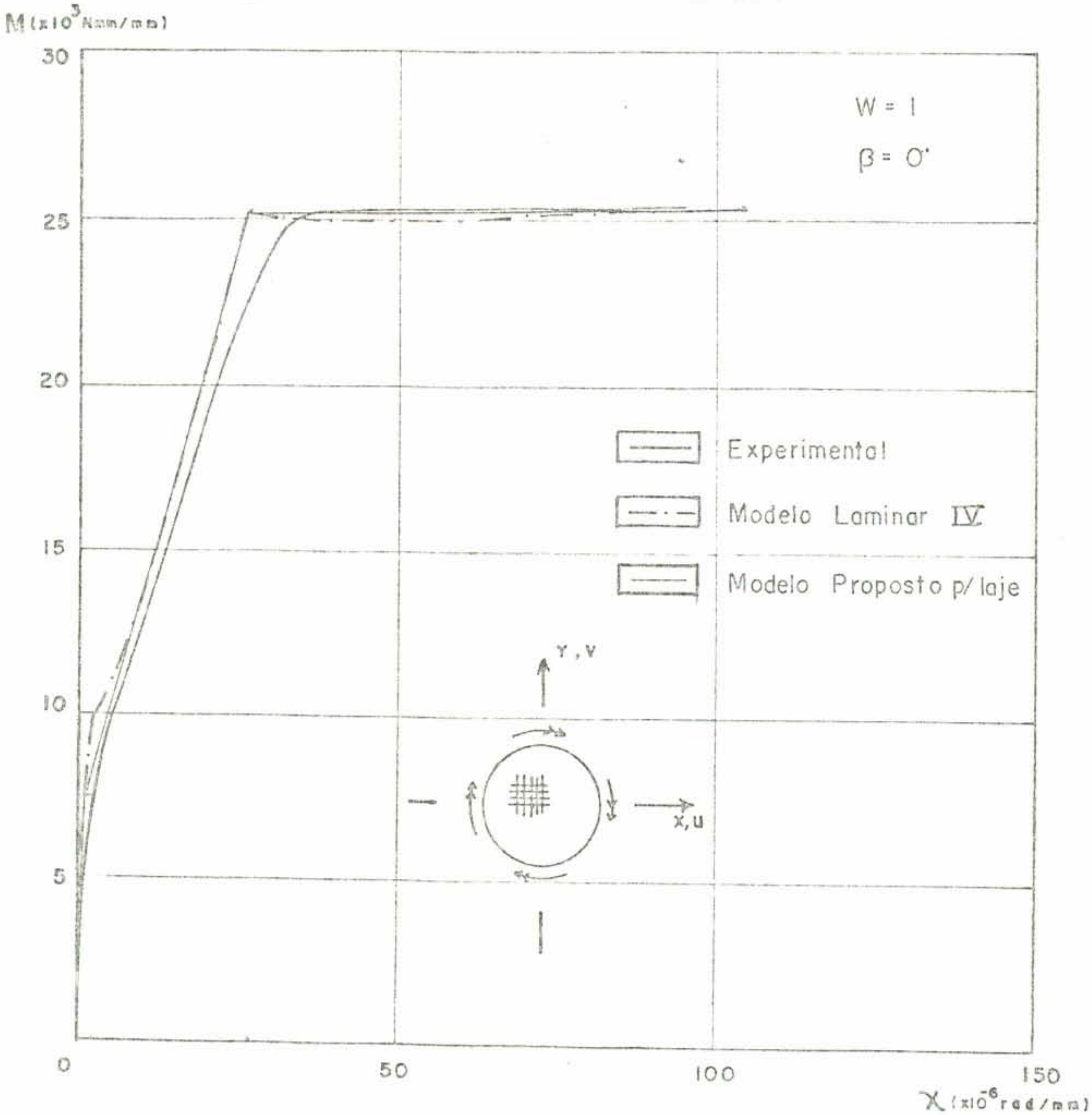
b) Ponto de Plastificação :

$$\chi_p = 0,0420 \text{ rad/m} \quad \text{e} \quad M_p = 22,7 \text{ KN m/m}$$

c) Ponto de Ruptura:

$\chi_r = 0{,}245$ rad/m e $M_r = 27{,}5$ KN m/m.

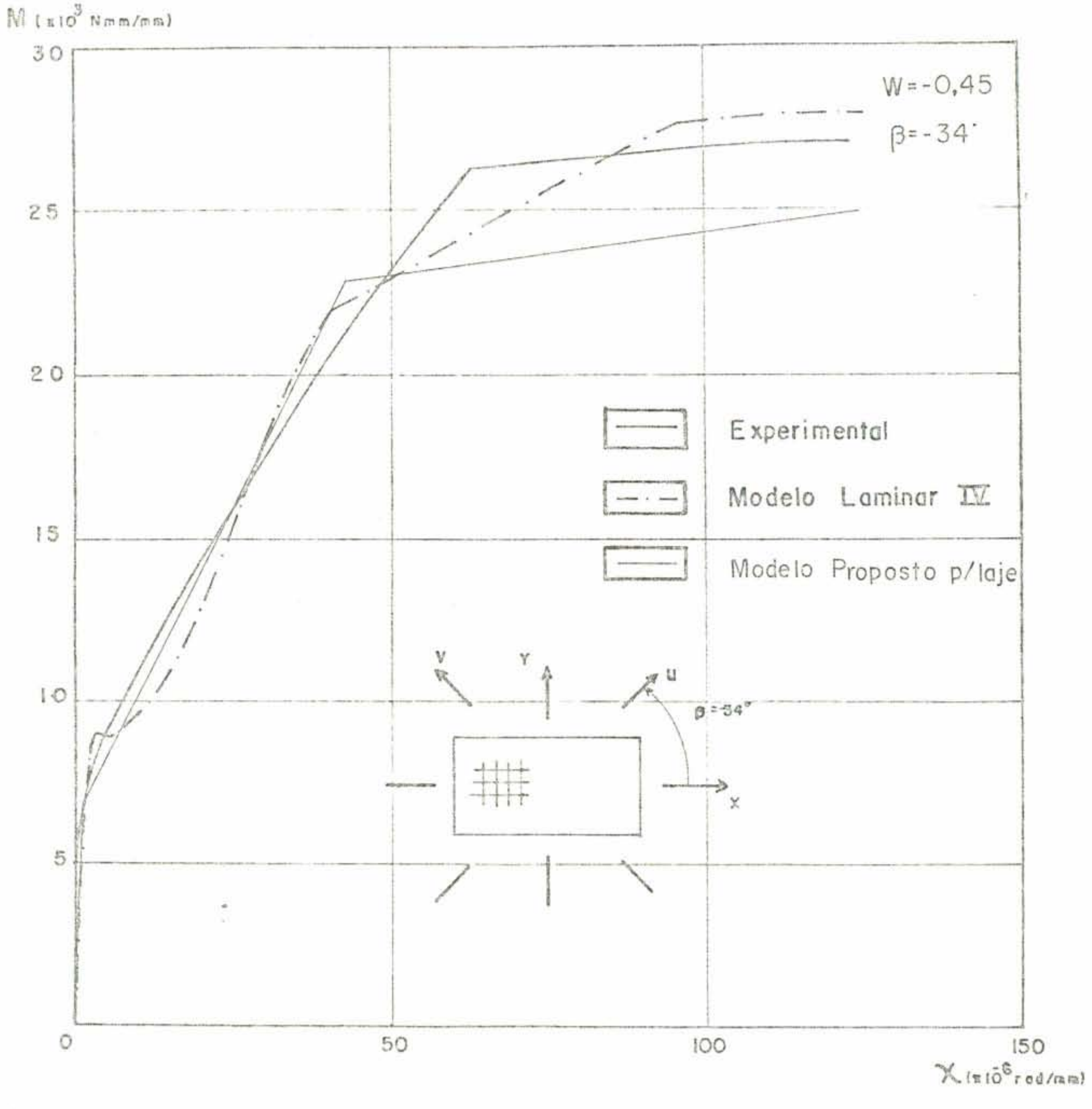
Na figura 4.19b está representado o diagrama M - X desta laje.



- a -

FIGURA 4.19 - Diagramas M - χ das lajes:

a) C2
b) B35



M (x10³ Nmm/mm)
30
25
20
15
10
5
0
50
100
150
X (x10⁻⁶ rad/mm)
W=-0,45
β=-34°
Experimental
Modelo Laminar IV
Modelo Proposto p/laje
V
Y
U
X
β=-34°

- b -

Nas figuras 4.18, 419a e 4.19b estão representados os diagramas M - χ obtidos experimentalmente, pelo modelo laminar IV e pelo Modelo Proposto Trilinear para lajes. Verifica-se que a aproximação obtida com este modelo em relação ao resultado experimental é boa.

5. CONCLUSÕES

5.1 - Generalidades

As conclusões a que se chegou no final deste trabalho, podem ser colocadas em dois grupos, onde o primeiro engloba as considerações do ponto de vista teórico, com relação aos modelos empregados para a análise de elementos estruturais de concreto armado, e o segundo se refere àquelas que dizem respeito ao ponto de vista computacional da implementação dos algoritmos desenvolvidos.

5.2 - Ponto de Vista Teórico

As conclusões são válidas tanto para o elemento de viga como para o de laje de concreto armado, as quais são:

- Comparando-se os resultados obtidos pelos métodos e algoritmos empregados, com os dados experimentais e as respostas apresentadas por outros pesquisadores, uma das primeiras conclusões a que se chega é a possibilidade de se analisar os elementos de concreto armado, a partir do conhecimento das propriedades dos materiais componentes do conjunto, desde que seja incluída a não-linearidade física. Fica em evidência a impossibilidade de sequer aproximar a resposta em deslocamentos ou tensões de elementos estruturais de concreto armado, com um modelo linear, além do ponto de fissuração.

- Com fundamento nas mesmas comparações observa-se, dentro da ordem de precisão alcançada, que é semelhante a de outros modelos similares[7, 11, 14], o conjunto das hipóteses assumidas pode conduzir a resultados de interesse prático.

- A consideração da colaboração do concreto na resistência aos esforços de tração, mostra que, apesar de ser a fissuração um fenômeno discreto, é suficiente obter uma relação tensão-deformação que considere a rigidez entre as fissuras, para obter-se uma boa aproximação após a fissuração.

- Os modelos laminares resultam adequados para representar os diagramas momento-curvatura de seções de concreto armado submetidas a carregamentos alternados, desde que a relação tensão-deformação para o aço seja realisticamente acurada na aproximação do comportamento histerético. Consequentemente, não é recomendável empregar simples esquemas bilineares para o aço porque a resposta do conjunto ficará prejudicada, ainda que empregando um modelo refinado para o concreto.

As conclusões com respeito a cada um dos elementos de concreto armado, será:

a) Elemento de viga de concreto armado

- As formulações em função de resultantes de tensões são muito vantajosas em termos computacionais mas, ainda as mais elaboradas como a de Takeda, podem oferecer discrepâncias importantes, já nos primeiros ciclos de carga.

- As representações do modelo proposto mostraram-se regularmente aproximadas quando confrontadas com dados experimentais de diversas fontes, e os resultados poderiam ser melhorados adotando rigidezes variáveis nos ramos de descarga e recarga, correspondentes às regras 2, 3 e 5.

b) Elemento de laje de concreto armado

- Os diagramas M-χ são influenciados significativamente segundo seja a orientação das armaduras com respeito às, direções principais de curvatura sendo que a máxima eficiência observa-se para $\beta = 0^\circ$. Na medida que β cresce, diminui o momento de plastificação até o valor de 45°. Para valores maiores, as pequenas discrepâncias entre os resultados correspondentes a ângulos complementares, são devidas, como foi já indicado a que as armaduras ortogonais não são coplanares por razões construtivas.

- Nos diagramas M-χ para uma laje com caraterísticas dos materiais e da seção transversal fixas, variando-se β e w, observa-se que não sofrem influência significativa os pontos de fissuração pelas hipóteses assumidas e de ruptura. Já no ponto de plastificação ocorre grandes variações.

- A mudança nos parâmetros h, f_{ck}, f_{yk} e μ nas de concreto armado acarretam alterações importantes no ponto de plastificação do diagrama M- χ. Pelos diagramas normalizados $\bar{M}_p - \bar{\chi}_p$ a influência de h, f_{ck}, f_{yk} e μ é muito pequena neste ponto.

5.3 - Ponto de Vista Computacional

A vantagem computacional dos modelos em resultantes, tais como os modelos propostos para viga e laje, reside na facilidade de se obter rapidamentte as relações M - χ, que pode ser importante nos casos de abordar-se a análise de grandes estruturas submetidas a cargas dinâmicas de longa duração ou sísmico, que requerem pesadas cargas iterativas ou incrementais para ajustar o equilíbrio dinâmico global.

A técnica iterativa utilizada para obter-se a convergência das equações de equilíbrio não lineares apresentaram muito bons resultados, mesmo nos pontos mais críticos fissuração e plastificação.

5.4 - Considerações Finais

É de salientar-se que o grau de complexidade do problema abordado torna difícil sua solução, se é pretentida em modelo excessivamente simplificado, embora, a partir das características mêcanicas dos materiais componentes, seja possível obter resultados de interesse prático como os aqui apresentados. Como era previsto e à luz das analises efetuadas resulta evidente que para interpretar exaustiva e rigorosamente os resultados experimentais e aproximar acuradamente as soluções numéricas, novos e sofisticados modelos deverão ser desenvolvidos, ampliando desta forma o campo de pesquisa nesta área.

BIBLIOGRAFIA

1. AGRAWAL, G. L.; TULIN, L. G.; GERSTKE, K. H. Response of doubly reinforced concrete beams to cyclic loading. Journal of the American Concrete Institute, 62(7): 823-35, july 1965.

2. BIGNON, P. G. A trilinear hysteretic moment-curvature model for impact analysis of reinforced concrete structures. CONFERÊNCIA SOBRE ANÁLISE E PROJETO ESTRUTURAL DE CENTRAIS NUCLEARES, Porto Alegre, 3-5 out. 1984. Anais ... Porto Alegre, CPGEC/URFGS, 1984. v.3, p.19-34

3. BLAKELEY, R. W. G. & PARK, R. Prestressed concrete sections with cyclic flexure. Journal of the Structural Division, ASCE, 99(8):1717-42, Aug. 1973.

4. CARDENAS, A. E. Strength and behavior of isotropically and nonisotropically reinforced slabs subjected to combinations of flexural and torsional moments. Urbana, University of Illinois, 1968. Tese dout.

5. FUNG, Y. C., Foundations of solid mechanics. New Delhi, Prentece-hall, 1968.

6. GREEN, A. E. & ZERNA, W. Theoretical elasticity. 2.ed. Oxford, Claredon Press, 1968. 454p.

7. HOGNESTAD, E. A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. Urbana, University of Illinois, 1951. (bulletin, 399)

8. LENSCHOW, R. J., & SOZEN, M. Z. A yield criterion of reinforced concrete under biaxial moments and forces. Urbana, University of Illinois, 1966. 527p. (Civil Engeneering Studies Structural Research Series, 311)

9. PARK, R.; KENT, D. C.; SAMPSON, R. A. Reinforced concrete members with cyclic loading. Journal of the Structural Division, ASCE, 98(7):1341-60, July, 1972.

10. SCHIRMBECK, F. R. G. & BIGNON, P. G. Modelo histeréticos degradativos para concreto armado. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 5., Salvador, out./nov. 1984. v.1, p.78-96.

11. SINHA, B. P.; GERSTLE, K. H.; TULIN, L. G. The response of singly reinforced concrete beams to cyclic loading. Journal of the American Concrete Institute, 61(8): 1021-1038, Aug. 1964.

12. TAKEDA, T.; SOZEN, M. A.; NIELSEN, N. N. Reinforced concrete response to simulated earthquakes. Journal of the Structural Division, ASCE, 96(12):2557-73, Dec. 1970.

13. THOMPSON, K. J. & PARK, R. Moment-curvature behaviour of cyclically loaded structural concrete members. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 69(Part 2):317-41, June 1980.

14. VEBO, 1. & GHALI, A. Moment-curvature relation of reinforced concrete slabs. Journal of the Structural Division, ASCE, 103(3):515-31, Mar. 1977.

15. VIANA, S. L. M. Análise não-linear de pórticos em concreto armado ou protendido, para cargas de curta duração. CPGEC/UFRGS, 1984. Diss. mestr.