

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

PAULO FERREIRA NAIBERT

SELEÇÃO DE CARTEIRAS COM RESTRIÇÃO DA NORMA DO VETOR
DE ALOCAÇÃO: UMA APLICAÇÃO A DADOS BRASILEIROS

Porto Alegre
2015

PAULO FERREIRA NAIBERT

**SELEÇÃO DE CARTEIRAS COM RESTRIÇÃO DA NORMA DO VETOR
DE ALOCAÇÃO: UMA APLICAÇÃO A DADOS BRASILEIROS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. João Frois Caldeira

**Porto Alegre
2015**

CIP - Catalogação na Publicação

Naibert, Paulo

Seleção de carteiras com restrição da norma do
vetor de alocação: uma aplicação a dados brasileiros /
Paulo Naibert. -- 2015.
59 f.

Orientador: João Caldeira.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,
BR-RS, 2015.

1. Restrição da norma do vetor de alocação. 2.
Média-Variância. 3. Otimização de carteiras. 4.
Avaliação de desempenho. I. Caldeira, João, orient.
II. Título.

PAULO FERREIRA NAIBERT

SELEÇÃO DE CARTEIRAS COM RESTRIÇÃO DA NORMA DO VETOR
DE ALOCAÇÃO: UMA APLICAÇÃO A DADOS BRASILEIROS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Aprovada em: Porto Alegre, 01 de junho de 2015.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. João Fróis Caldeira – Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Prof. Dr. Flávio Augusto Zielgelmann
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Prof. Dr. Guilherme Valle Moura
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini
Universidade de São Paulo – Ribeirão Preto (USP–RP)

AGRADECIMENTOS

Primeiro, gostaria de agradecer minha família por sempre apoiar os meus estudos. Também gostaria de agradecer meus amigos, principalmente meus colegas de mestrado, que fizeram a jornada desses dois anos ficar mais divertida. Aos professores do PPGE/UFRGS, deixo um muito obrigado pelo conhecimento que me passaram em suas aulas. Em especial, gostaria de agradecer ao meu orientador João Caldeira que me ajudou muito durante a confecção deste trabalho. Finalmente, gostaria de agradecer ao CNPq pela bolsa de Mestrado concedida para eu realizar o curso de Mestrado na UFRGS.

RESUMO

Este trabalho estuda o problema de seleção de carteiras de variância mínima com base em uma recente metodologia para otimização de carteiras com restrições nas normas das exposições brutas proposta por Fan, Zhang e Yu (2012). Para esse propósito, consideram-se diferentes estimadores da matriz de covariâncias condicional e incondicional. A grande contribuição deste artigo é de natureza empírica para o mercado de ações brasileiro. Avaliam-se índices de desempenho fora da amostra das carteiras construídas para um conjunto de 61 ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BM&FBovespa). Os resultados mostraram que as restrições nas normas dos vetores de alocação (restrição de exposição bruta) geram ganhos substanciais em relação às carteiras restringidas para venda a descoberto, aumentando o retorno médio ajustado pelo risco e diminuindo o *turnover* dos portfólios.

Palavras-chaves: Restrição da norma do vetor de alocação. Média-Variância. Otimização de carteiras. Avaliação de desempenho.

ABSTRACT

This paper studies the problem of minimum variance portfolio selection based on a recent methodology for portfolio optimization restricting the allocation vector proposed by Fan, Zhang e Yu (2012). To achieve this, different conditional and unconditional covariance matrix estimators are considered. The great contribution of this paper is one of empirical nature for the brazilian stock market. We evaluate out-of-sample performance indexes for the portfolios constructed for a set with 61 different sotcks traded in the São Paulo stock exchange (BM&FBovespa). The results show that the restrictions on the norms of the allocation vector generate substantial gains compared to the no short-sale portfolio, raising the average return adjusted by the risk and lowering the portfolio turnover.

Key-words: Norm constrained allocation vector. Mean-Variance. Portfolio Optimization. Performance Assessment.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Índice de Sharpe Anualizado com Rebalanceamento Diário	44
Figura 2 – Índice de Sharpe Anualizado com Rebalanceamento Semanal	46
Figura 3 – Índice de Sharpe Anualizado com Rebalanceamento Mensal	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Desempenho das carteiras de variância mínima com rebalanceamento diário	43
Tabela 2 – Desempenho das carteiras de variância mínima com rebalanceamento semanal	45
Tabela 3 – Desempenho das carteiras de variância mínima com rebalanceamento mensal	47
Tabela 4 – O valor econômico da previsão de volatilidade ($\gamma = 1$)	52
Tabela 5 – O valor econômico da previsão de volatilidade ($\gamma = 10$)	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	REVISÃO DE LITERATURA	13
2.1	Markowitz	13
2.2	Sensibilidade dos vetores de alocação aos vetores de <i>input</i>	15
2.3	Soluções para o Problema de sensibilidade aos vetores de entrada	16
2.3.1	Alterar o estimador	16
2.3.2	Alterar o problema de otimização	17
3	METODOLOGIA	21
3.1	Definições de Retornos	21
3.2	Matrizes de Covariância	23
3.2.1	Matriz de Covariância Amostral	23
3.2.2	Risk Metrics (Média Móvel Exponencialmente Ponderada)	24
3.2.3	Estimador <i>Variance targeting scalar</i> VECH	24
3.2.4	Estimador Encolhimento	25
3.3	Seleção de Carteiras por Otimização de Média-Variância	28
3.4	Seleção de Carteiras com Restrição da Norma do Vetor de Alocação	30
3.5	Restrições	31
3.6	Conexão entre a Restrição da Norma do Vetor de Alocação com o Estimador de Encolhimento	32
3.7	Estratégias para Construção de Carteiras Ótimas	34
3.8	Metodologia para Avaliação de Desempenho	35
3.9	O valor econômico da otimização de carteiras	36
4	ESTUDO EMPÍRICO	39
4.1	Medidas de Desempenho dos Portfólios	39
4.2	Valor Econômico dos Portfólios	49
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

É razoável imaginar que os investidores sempre preferiram elevar sua riqueza e minimizar os riscos associados a qualquer ganho potencial. Para isso, em tomadas de decisão de investimento, gestores profissionais de carteiras recorrem à otimização de carteiras, que é um processo importante de diversificação no qual as proporções dos ativos financeiros mantidos na carteira são determinadas de forma a alcançar o máximo retorno esperado contingente a um nível de risco desejado. A abordagem clássica, introduzida por Markowitz (1952), é conhecida como moderna teoria de carteiras (*Modern Portfolio Theory* MPT) e visa otimizar o retorno esperado de uma carteira em relação à variância, como medida de risco. Essa estrutura de média-variância é a base para o posterior desenvolvimento da otimização de carteiras.

Desde os trabalhos seminais de Markowitz (1952) e Markowitz (1959), a otimização por média-variância se tornou a pedra fundamental para muitas áreas em finanças quantitativas, incluindo alocação de ativos, gestão de carteiras de ações e títulos de renda fixa. A abordagem define os pesos apropriados da carteira através da solução de um problema de otimização, o qual pode se apresentar em várias versões: uma busca maximizar o retorno esperado dado um nível de risco; outra visa minimizar a variância para um dado nível exigido de retorno; e ainda uma versão que maximiza uma função objetivo, isto é, o retorno esperado da carteira menos um múltiplo da variância da carteira (parâmetro de aversão ao risco). Apesar de apresentar algumas deficiências, uma delas sendo a sensibilidade dos pesos ótimos às variáveis de entrada (observado por participantes do mercado ao longo dos anos), e de muitas variantes dessa abordagem de construção de carteira terem sido desenvolvidas para superar tais deficiências, a otimização por média-variância continua a ser o pilar central da moderna teoria de gestão de carteiras. Assim, um sólido conhecimento desse método aliado a uma certa intuição é essencial para a compreensão e a implementação bem sucedida de estratégias quantitativas de investimento.

O trabalho de Markowitz (1952) lançou o marco inicial da seleção de carteiras e fundou a Moderna Teoria do Portfólio (MPT na sigla em inglês). Aquele trabalho foi o ponto de referência para a modernização do estudo de finanças, que antes desse trabalho tratava a interação entre risco e retorno de uma maneira *ad hoc*, como ressaltam Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014). Desde então, a seleção e otimização de carteiras é um problema fundamental em finanças, tanto do ponto de vista acadêmico como também para os praticantes de mercado. A MPT fornece uma resposta à questão fundamental do estudo de finanças: “Como um investidor deve alocar seus fundos entre as possíveis escolhas de investimentos?”.

Subjacente ao problema de otimização de Markowitz, há um problema econômico conhecido da Microeconomia: o da maximização da utilidade, o qual surge da definição do estudo Economia. A teoria de carteiras de Markowitz parte do princípio de que o investidor tem uma função utilidade côncava, que expressa um comportamento avesso ao risco. Markowitz formula a seleção de carteiras com base em dois critérios: média e variância. Uma das suposições básicas da economia é que os agentes econômicos querem alocar os seus recursos da maneira mais eficiente possível. No campo das finanças, é legítimo pensar que os investidores querem investir seus recursos (capital) da forma mais eficiente possível (ao maximizar os seus retornos e minimizar os seus riscos). Portanto, o problema de seleção de carteiras é um problema econômico genuíno que merece a atenção dos pesquisadores da área.

Entretanto, é prudente ressaltar que o processo de seleção de carteiras proposto por Markowitz tem vários pontos fracos. Por exemplo, ele apresenta elevada sensibilidade à incerteza nas variáveis de entrada do problema. Isso foi observado por Best e Grauer (1991a), que mostraram como as mudanças nas médias dos retornos esperados dos ativos alteram o retorno, a composição e o risco do portfólio, e por Chopra e Ziemba (1993), que examinaram o impacto relativo dos erros de estimação sobre as médias, variâncias e covariâncias das carteiras.

O presente trabalho insere-se no contexto de análise dos ganhos, em termos de desempenho fora da amostra de portfólios ótimos de mínima variância (PMV), os quais têm sido utilizados amplamente na literatura (DEMIGUEL et al., 2009; CALDEIRA; MOURA; SANTOS, 2013; CHAN; KARCESKI; LAKONISHOK, 1999; RUBESAM; BELTRAME, 2013). Especificamente, este trabalho utiliza as modificações no problema de seleção de carteiras de média-variância de Markowitz (1952) propostas por Fan, Zhang e Yu (2012). Além disso, este trabalho está estreitamente relacionado com Rubesam e Beltrame (2013), que investigam a obtenção de carteiras de variância mínima no mercado de ações brasileiro considerando diferentes modelos de estimação da matriz de covariâncias. Os autores analisam também o desempenho de carteiras de variância mínima com alavancagem do tipo 130/30. O trabalho também é relacionado com Santos e Tessari (2012), que avaliam o desempenho de diferentes estimadores para matrizes de covariância na construção de carteiras de mínima variância com ações de empresas negociadas na BM&FBovespa. No entanto, este trabalho difere dos anteriores por construir carteiras de mínima variância utilizando a abordagem proposta recentemente por Fan, Zhang e Yu (2012) que impõe uma restrição nas normas dos vetores de alocação (também chamada de restrição de exposição bruta da carteira). A estratégia é avaliada considerando diferentes níveis de exposição bruta da carteira (diferentes valores da soma das posições vendidas). Além disso, é implementada uma avaliação econômica da estrutura considerada aqui, similar à realizada em Fleming, Kirby e Ostdiek (2001), DePooter, Martens e Dijk (2008), Thornton

e Valente (2012), entre outros.

Como foi dito acima, este trabalho se baseia no arcabouço proposto por Fan, Zhang e Yu (2012) e analisa comparativamente diferentes níveis de restrição da norma do vetor de alocação comparativamente aos portfólios irrestrito e totalmente restrito para venda a descoberto. Além do arcabouço proposto por Fan, Zhang e Yu (2012), também são consideradas restrições individuais dos ativos. Como a estrutura de Markowitz usa as variâncias e covariâncias dos ativos como medida de risco, são utilizados diferentes estimadores da matriz de covariâncias, os quais abrangem a covariância amostral, o modelo *RiskMetrics*, o modelo *variance targeting scalar VECH (scalar vt-VECH)* e três estimadores de encolhimento propostos por Ledoit e Wolf (2004a), Ledoit e Wolf (2004b) e Ledoit e Wolf (2003). Esses estimadores são aplicados na previsão fora da amostra para as matrizes de covariância dos retornos de 61 ações negociadas no mercado financeiro brasileiro durante o período de 2000 a 2010. Aplica-se o modelo proposto por Fan, Zhang e Yu (2012), juntamente com as matrizes de covariâncias previstas, para estimar PMVs com diferentes níveis de restrição da norma do vetor de alocação (incluindo os casos especiais do portfólio irrestrito e da proibição das vendas a descoberto) e com restrição individual dos ativos.

As carteiras selecionadas por esses métodos são avaliadas através de indicadores de performance como retorno médio, variância, índice de Sharpe e *turnover* do portfólio. Além disso, é realizada uma avaliação econômica baseada em uma função de utilidade quadrática como no trabalho de Fleming, Kirby e Ostdiek (2001). Os resultados são, ainda, comparados àqueles obtidos pelo *benchmark* (portfólio restrito para a venda a descoberto com covariância amostral). Em resumo, são avaliados diferentes estimadores, tanto com uma abordagem incondicional, quanto com uma condicional, na estimação das matrizes de covariância com foco na seleção de ativos com base na recente metodologia proposta por Fan, Zhang e Yu (2012). Neste sentido, ao realizar uma aplicação com motivação econômica definida, este trabalho faz uma contribuição aos estudos empíricos que analisam o problema de seleção de carteiras de investimento.

A principal conclusão é que, de uma forma geral, os resultados obtidos neste trabalho indicam ganhos na utilização da metodologia proposta por Fan, Zhang e Yu (2012). Esses resultados apontam no sentido de que as carteiras com restrições sobre as normas dos vetores de alocação com valores entre $c = 1.4$ e $c = 1.6$ exibem menor risco. Para as frequências de rebalanceamento diária e semanal, as carteiras com restrições de $c = 1.4$ e $c = 1.6$ sobre a exposição bruta apresentam índice de Sharpe maior e um menor *turnover*. Isso quer dizer que as carteiras otimizadas com restrições sobre as normas obtêm um melhor retorno médio para cada unidade de risco envolvida e apresentam menores custos de transação que as carteiras irrestritas, o que, no final, permite explorar os ganhos associados à carteira sem incorrer em custos maiores de rebalanceamento. Além disso, é importante enfatizar que as vantagens da restrição sobre exposição bruta apontadas acima

são robustas ao estimador usado para obter a matriz de covariância. Ou seja, a simples adição da restrição nas normas melhora o desempenho da carteira, não importando qual estimador de matriz de covariância se está usando.

Este trabalho tem três capítulos além dessa introdução e de uma conclusão. No capítulo 2, contextualiza-se o trabalho com uma revisão de literatura sobre seleção de carteiras e seus problemas. No capítulo 3, apresentam-se os diferentes estimadores de matriz de covariância que serão utilizados ao longo do trabalho, descreve-se o problema da seleção de carteira e discute-se como a restrição das normas pode ajudar nesse problema, além de ser apresentada a conexão entre esse novo método de estimação e o estimador *shrinkage*. No capítulo 4, é feito o estudo empírico e mostram-se os resultados. Finalmente, o capítulo 5 conclui o trabalho ao apresentar as considerações finais.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo da dissertação, contextualiza-se onde este trabalho se encaixa na resolução do problema de seleção de carteiras, visto que outros autores já fizeram esforços anteriores para dar uma resposta a esse problema. Para se fazer isso, apresenta-se o problema de seleção de carteiras e como ele foi resolvido por Markowitz. Além disso, apresenta-se as falhas que surgem da resolução de Markowitz, em especial a hipersensibilidade dos vetores de alocação aos vetores de *input*, bem como os trabalhos que tentaram corrigir essa falha.

2.1 Markowitz

O trabalho de Markowitz (1952) lançou o marco inicial para o estudo quantitativo de seleção de carteiras. Antes, a interação entre risco e retorno era tratada de uma maneira *ad hoc* (KOLM; Tütüncü; FABOZZI, 2014)¹. A estrutura proposta por Markowitz foi um ponto de referência para a modernização dos estudos de finanças (RUBINSTEIN, 2002). Em seu trabalho, Markowitz (1952) expôs que a seleção de ativos é feita em dois passos. O primeiro começa com observação e experiência e termina com a crença sobre os desempenhos futuros dos ativos. O segundo começa com as crenças relevantes sobre o desempenho futuro e termina com a escolha da carteira. Markowitz também ressalta que o seu trabalho está apenas interessado no segundo passo, deixando o primeiro passo para trabalhos futuros.

Para a realização do segundo passo, Markowitz (1952) propôs para seleção de portfólios uma receita normativa sobre como os investidores devem agir, dadas as suas expectativas sobre o futuro. A receita consiste em se formar uma carteira de investimentos diversificada de modo a maximizar o seu retorno esperado dado um nível de risco, ou minimizar o risco esperado da carteira dado um nível de retorno mínimo (MARKOWITZ, 1952), sendo que o retorno da carteira é caracterizado pelo retorno esperado e o risco é estimado utilizando a variância. Markowitz chama essa receita de critério média-variância e diz que qualquer regra de investimento que não implique na superioridade da diversificação deve ser rejeitada.

Assim, Markowitz transformou o processo de alocação de ativos em um problema quantitativo de otimização com base no *trade-off* fundamental entre retorno esperado e risco. Uma noção essencial para a implementação da otimização por média-variância de Markowitz é a presença de correlação *imperfeita* entre os ativos. Se esta condição é

¹ Outras fontes que descrevem o problema de seleção de carteiras, sua perspectiva histórica, suas falhas e inovações posteriores são os seguintes trabalhos: Board, Sutcliffe e Ziemba (2001), Rubinstein (2002), Brennan (2008), Steinbach (2001), Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014), Kritzman (2011), Brandt (2010), Markowitz (1991), Markowitz (2014).

alcançada, pode haver uma combinação entre os ativos onde a variância é menor que a do ativo com menor variância e o retorno esperado da carteira é maior que o retorno esperado do ativo com menor retorno.

Entretanto, apesar de todo o sucesso alcançado pela abordagem proposta por Markowitz, a seleção de carteiras por média-variância apresenta vários pontos fracos. Vários autores analisaram as críticas sobre o modelo de Markowitz. Kritzman (2011) apresenta as três principais críticas (as quais serão melhor explicadas abaixo) sobre a otimização de Markowitz, quais sejam:

- a) Entradas ruins, desempenho ruim;
- b) Otimizadores são maximizadores de erros;
- c) Otimização por média-variância depende de suposições falsas.

Além disso, aquele autor apresenta refutações a essas críticas.

A primeira crítica diz respeito às variáveis de entrada do problema. Se o investidor utiliza um *input* ruim, terá um portfólio ruim. Se os valores de *input* forem errados, não é somente a otimização de portfólio que fornecerá informações erradas sobre como investir. A otimização não conseguirá converter *inputs* implausíveis em carteiras com desempenho superiores fora da amostra. Um outro aspecto a ser ressaltado é que, como foi dito acima, o trabalho de Markowitz (1952) não trata sobre como o investidor deveria formar as suas expectativas. Com isso, a otimização de média-variância se baseia essencialmente em estimadores amostrais que são computados sob a hipótese de normalidade. Então, há uma confusão dos termos usados para se referir a média amostral dos retornos e o retorno futuro esperado, visto que, com o uso de estimadores amostrais, eles são os mesmos. A palavra “média” na frase “otimização de média-variância” não se refere a média dos retornos *passados*, mas a expectativa dos retornos *futuros*.

A segunda crítica tem suas origens em vários trabalhos que analisaram a hipersensibilidade da otimização de carteiras por média-variância a erros nas entradas. Quem pôs a alcinha de maximizadores de erros aos otimizadores de carteira foi Michaud (1989), que mostra que a otimização é enviesada em direção a erros positivos nas médias e erros negativos na estimação do risco. Como a otimização é feita de forma determinística, sem levar em conta esses erros de estimação, resulta em portfólios errados. Apesar de essa crítica ser tecnicamente verdadeira, Kritzman (2011) a contrapõe ao dizer que os resultados das carteiras não são tão diferentes quanto alguns críticos acreditam.

Por último, a terceira crítica diz que a seleção de carteiras por média-variância supõe que:

- a) retornos têm uma distribuição elíptica (da qual a distribuição normal é um caso especial);

b) investidores têm utilidade quadrática.

Entretanto, Kritzman (2011) expõe que a seleção de carteiras por média-variância só exige que uma dessas hipóteses seja verdadeira. O autor acrescenta que as duas hipóteses são falsas, mas, na maioria dos casos, elas não são suficientemente falsas para invalidar a otimização por média-variância, visto que ela só falha quando as duas suposições são conjunta e significativamente violadas, o que dificilmente ocorre.

2.2 Sensibilidade dos vetores de alocação aos vetores de *input*

Como foi observado em Michaud (1989), a abordagem de Markowitz para seleção de carteiras apresenta muita sensibilidade à incerteza nos vetores de entrada do problema. Por sensibilidade, entende-se que pequenas mudanças na média ou variância dos retornos dos ativos estimados podem levar a mudanças drásticas na carteira, seja na composição dos pesos, na média dos retornos ou no risco associado à carteira. Conforme observado por Best e Grauer (1991a) e Best e Grauer (1991b), mudanças nas médias dos retornos dos ativos alteram o retorno, a composição e o risco da carteira. Chopra e Ziemba (1993) também examinaram o impacto relativo dos erros de estimação sobre as médias, variâncias e covariâncias. Sobre esse problema, Garlappi, Uppal e Wang (2007) destacam que, com os estimadores amostrais, sem levar em conta os erros de estimação, o resultado da otimização por média-variância leva a posições extremas nos ativos, flutuação substancial ao longo do tempo e fraco desempenho fora da amostra. Esse problema de erros de estimação também foi documentado por uma extensa lista de trabalhos empíricos, como, por exemplo, Chopra e Ziemba (1993), Broadie (1993), Best e Grauer (1990), Best e Grauer (1991a), Best e Grauer (1991b), Klein e Bawa (1976), Klein e Bawa (1977), Merton (1980), Michaud (1989).

O problema de erros de estimação fica ainda pior quando também se considera o que é conhecido como “maldição da dimensionalidade”, causada pelo grande número de ativos disponíveis para a seleção na carteira. Sobre isso, Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014) ressaltam que, no arcabouço clássico de otimização por média-variância, é necessário que o investidor forneça estimativas de retornos e covariâncias de todos os ativos no universo de investimentos considerado, o que é uma tarefa formidável dado o número de ativos disponíveis hoje em dia. Os autores também chamam a atenção para o fato de que é pouco provável que gestores de carteiras tenham um conhecimento detalhado de todos os ativos, empresas, indústrias e setores que têm à disposição. A maioria dos gestores se especializam em uma área específica, na qual eles se focam para obter retornos superiores. É simplesmente irrealista esperar que gestores profissionais de carteiras produzam estimativas razoáveis das variáveis de interesse necessárias na Teoria do Portfólio Clássica.

2.3 Soluções para o Problema de sensibilidade aos vetores de entrada

Nesta seção são discutidas algumas abordagens utilizadas para superar o problema da sensibilidade aos vetores de entrada. Fan, Zhang e Yu (2012) argumentam que existem duas abordagens alternativas para contornar o problema. A primeira consiste em alterar o estimador da matriz de covariância, em vez de usar a covariância amostral. A segunda abordagem propõe alterar o problema de seleção de carteira.

2.3.1 Alterar o estimador

Na literatura sobre seleção de carteiras, é possível encontrar vários exemplos de trabalhos que mudaram os estimadores da matriz de covariância para obter carteiras com melhor desempenho fora da amostra. Essa literatura está mais interessada em resolver o primeiro passo do problema de seleção de carteiras, o qual Markowitz (1952) deixou em aberto. Ledoit e Wolf (2003), Ledoit e Wolf (2004a) e Ledoit e Wolf (2004b) propuseram diversas abordagens usando estimadores de encolhimento da matriz de covariância, considerando diversos alvos para esse encolhimento. Ledoit e Wolf (2003) usaram um modelo de fator único de Sharpe (1963) como alvo de encolhimento, Ledoit e Wolf (2004a) usaram uma matriz de identidade como alvo de encolhimento, e Ledoit e Wolf (2004b) usaram um modelo de correlação constante como alvo de encolhimento. A ideia básica por trás desses estimadores é o *tradeoff* entre viés e variância, onde, por meio de um sacrifício do viés, pode-se obter um estimador mais eficiente que é menos sensível a mudança nos dados.

Relacionado aos estimadores de encolhimento, tem-se o modelo de Black e Litterman (1992), em que os autores combinaram visões dos gestores sobre os ativos com retornos esperados de equilíbrio, usando o modelo CAPM. Assim, a estimativa do retorno esperado é calculada como uma média ponderada do equilíbrio de mercado e as visões dos investidores. Isso vai ao encontro do que Markowitz (1952, p.91) sugeriu ao afirmar que o processo para achar médias e variâncias deveria combinar técnicas estatísticas com o julgamento de homens práticos.

Outras abordagens para a estimação de matrizes de covariância são o uso de modelos GARCH e de modelos de fatores. Os modelos GARCH têm o objetivo de modelar a variância condicional das séries de interesse, neste caso, a variância condicional dos retornos dos ativos. Um exemplo de estudo que usa essa abordagem é Engle e Sheppard (2008). Os modelos de fatores têm a vantagem de exigirem menos estimações e permitirem a previsão dos retorno de cada ativo com apenas algumas variáveis. Exemplos dessa abordagem são os trabalhos de Fan, Fan e Lv (2008) e Pesaran e Zaffaroni (2008).

Diversos autores brasileiros utilizaram diferentes estimadores para a matriz de covariância com o objetivo de melhorar o desempenho fora da amostra das carteiras. Santos e Tessari (2012) comparam os desempenhos de carteiras usando diversos estimadores de

matriz de covariância, incluindo os três estimadores de encolhimento propostos por Ledoit e Wolf. Já Caldeira, Moura e Santos (2013) comparam o desempenho de carteiras com diversos estimadores de matriz de covariância, com destaque especial para modelos de fatores e formulações GARCH. Por fim, Rubesam e Beltrame (2013) comparam o desempenho de carteiras construídas com diversos estimadores. Além disso, também consideram algumas variações do problema da otimização de Markowitz, por exemplo, minimizar a variância da carteira, maximizar o índice de Sharpe e maximizar a média geométrica dos retornos. Ademais, baseados no arcabouço de DeMiguel et al. (2009), Rubesam e Beltrame (2013) implementam e avaliam o desempenho de uma carteira conhecida como estratégia 130/30.

2.3.2 Alterar o problema de otimização

A segunda alternativa usada para superar o problema da sensibilidade aos vetores de entrada consiste em alterar o procedimento de otimização, o que pode ser feito de várias maneiras. O método mais simples de fazer isso é apenas ignorar a otimização e diversificar a carteira de modo ingênuo, atribuindo pesos iguais para todos os ativos selecionados. Esse método é usado para evitar os erros de estimação, visto que, como não há estimação, não há erros. O principal trabalho sobre esse tipo de diversificação é o de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), o qual compara as carteiras igualmente ponderadas com carteiras obtidas por otimização. Os autores chegam à conclusão que a estratégia de atribuir pesos iguais a $1/N$ para todos os ativos dificilmente é superada.

Muitos trabalhos que vieram depois criticaram as conclusões de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009). Por exemplo, Kritzman, Page e Turkington (2010) argumentam que a diversificação ingênua tem um baixo conteúdo informativo. Além disso, arguem que, com *inputs* ingênuos, carteiras otimizadas normalmente têm desempenho melhor que carteiras $1/N$. Sobre esse ponto Kritzman, Page e Turkington (2010) expõem que, no trabalho de DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), a superioridade da abordagem $1/N$ não surge das limitações da otimização, mas da confiança em “*rolling short-term samples*” para estimar retornos esperados. Os autores arrazoam que a abordagem da *rolling short-term samples* frequentemente rende expectativas implausíveis. Ao confiar em amostras mais longas para estimar retornos esperados ou até em suposições ingênuas, mas plausíveis, as carteiras ótimas superam as carteiras $1/N$ fora da amostra.

Apesar de toda a crítica à diversificação ingênua, Kritzman, Page e Turkington (2010) discutem algumas características da carteira $1/N$ que podem explicar o porquê de seu desempenho superior:

- a) evita posições concentradas;
- b) em datas de rebalanceamento, vende alto e compra baixo, portanto capitaliza em qualquer efeito de reversão à média;

- c) nunca é superada pelo ativo com pior desempenho;
- d) sempre investe no ativo com melhor desempenho;
- e) captura o “*size alpha*” porque ela sobrepondera ações *small caps* e subpondera ações *large caps*.

Contudo, eles concluem que, mesmo exigindo cuidados adicionais, a otimização de carteiras ainda deve ser usada.

Outro tipo de mudança que pode ser implementada no problema de otimização de carteiras é abrir mão da otimização por média-variância e partir para a otimização de mínima variância da carteira. Isso ocorre porque, de acordo com os resultados de Chopra e Ziemba (1993), os erros de estimação nas variâncias e covariâncias afetam menos o resultado da otimização que erros nas médias. Exemplos de trabalhos que usam mínima variância em vez de média-variância são Chan, Karceski e Lakonishok (1999) DeMiguel et al. (2009) e Caldeira, Moura e Santos (2013).

A adição de restrições também se mostra uma alternativa viável para a alteração do problema de otimização original. Nessa abordagem são impostas restrições individuais ou conjuntas aos pesos dos ativos. A ideia básica desse método é impedir posições concentradas ou extremas na carteira escolhida, o que melhora o desempenho fora da amostra das carteiras.

Jagannathan e Ma (2003) impõem limites inferiores e superiores a posições individuais de ativos e argumentam que carteiras com tais limites inferiores e superiores apresentam melhor desempenho fora da amostra. Os autores também explicaram por que a inclusão daquela restrição ajuda a minimizar o risco em um portfólio ótimo de Markowitz, mesmo quando a restrição está errada (razão do título do seu trabalho). A ideia vem de Green e Hollifield (1992), que mostraram que a presença de um fator dominante pode resultar em pesos negativos extremos num arcabouço de uma carteira eficiente de média-variância, mesmo quando não há erros de estimação. Por causa disso, a restrição de posições negativas deveria piorar o portfólio; entretanto, a evidência empírica indica exatamente o contrário. Jagannathan e Ma (2003) mostraram que, quando é imposta a restrição sobre posições vendidas, assim como limites superiores aos ativos, a matriz de covariância tem um desempenho comparável às estimativas baseadas em modelos de fatores, estimadores de encolhimento e dados diários. Além disso, mostraram que construir uma carteira usando limites inferiores e superiores é equivalente a construí-la sem qualquer restrição, mas usando um estimador de matriz de covariância de encolhimento proposto por Ledoit e Wolf (2003) e Ledoit e Wolf (2004a). Ou seja, mostraram que, “sem querer”, quando se considera a restrição sobre posições vendidas, altera-se a matriz de covariância amostral de forma a ficar parecida com uma matriz de covariância obtida com o estimador de encolhimento.

Outro tipo de restrição que pode ser utilizada para mudar o problema de otimização é a restrição sobre as posições vendidas totais. Essa restrição pode ser obtida ao se restringir a soma dos valores absolutos dos pesos da carteira (norma ℓ_1). Os trabalhos que propuseram esse tipo de restrição são Fan, Zhang e Yu (2012), DeMiguel et al. (2009) e Brodie et al. (2009). Considerando as abordagens desses estudos, o principal objetivo deste trabalho é a implementação empírica do problema de seleção de carteiras de variância mínima considerando as abordagens que impõem restrições na normas dos vetores de alocação.

Brodie et al. (2009) reformulam o problema de Markowitz como um problema de Mínimos Quadrados Restritos. Os autores adicionam uma função de penalidade proporcional à soma dos valores absolutos dos pesos do portfólio e dizem que essa penalidade regulariza o problema de otimização e ajuda a encontrar portfólios esparsos, que seriam portfólios com poucas posições ativas. Brodie et al. (2009) afirmam que, em sua abordagem, é possível obter a carteira sem posições vendidas como um caso especial. Em seu trabalho, foram construídos portfólios cujos desempenhos fora da amostra, em termos de retorno ajustado pelo risco (medidos pelo Índice de Sharpe), são consistentemente e significativamente melhores que a diversificação ingênua.

DeMiguel et al. (2009) forneceram um arcabouço geral para a construção de carteiras ótimas que apresentam bom desempenho fora da amostra na presença de erros de estimação. Isso é feito com a otimização por média-variância tradicional de Markowitz, mas com a adição de uma restrição na norma do vetor de alocação de ativos, ou seja, a soma desses valores absolutos deve ser menor que um dado limiar. Os autores mostraram que o arcabouço estabelecido pode ser visto como um caso especial das abordagens de encolhimento da matriz de covariância proposta por Jagannathan e Ma (2003), Ledoit e Wolf (2003) e Ledoit e Wolf (2004a).

A solução proposta por Fan, Zhang e Yu (2012) consiste em modificar o problema de maximização de utilidade ao adicionar-se uma restrição da norma do vetor de alocação, a qual foi denominada como restrição sobre exposição bruta. A restrição proposta pelos autores não proíbe as posições vendidas completamente. Com isso, é possível generalizar a restrição sobre as posições vendidas e achar um meio termo entre a restrição total ($c = 1$, c será definido na seção 3.4) e a otimização irrestrita das carteiras ($c = \infty$). Quanto mais a restrição sobre a norma do vetor de alocação for relaxada, mais perto do caso sem restrição a otimização estará. A vantagem desta abordagem é que o investidor pode expressar uma visão negativa sobre um ativo sem ser limitado pela proibição de vendas a descoberto e sem a manifestação de posições extremas pela sensibilidade da otimização de carteiras (JACOBS; LEVY, 2006). Fan, Zhang e Yu (2012) mostram que, com essa restrição, as carteiras selecionadas têm maior índice Sharpe, assim como menor *turnover* que as carteiras obtidas com a otimização tradicional sem essas restrições. Isso é demonstrado pelos autores ao criarem um arcabouço teórico que conecta o trabalho de Markowitz (1952) com o de

Jagannathan e Ma (2003). A inovação do trabalho de Fan, Zhang e Yu (2012) é mostrar que as carteiras construídas utilizando a restrição sobre exposição bruta também podem ter uma interpretação de encolhimento da matriz de covariância no sentido de Ledoit e Wolf (2003), Ledoit e Wolf (2004a) e Ledoit e Wolf (2004b).

Alguns autores recomendam, porém, cautela no uso de restrições na abordagem de Markowitz para seleção de carteiras. Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014) ressaltam que, quando as restrições são muito fortes, as alocações da carteira serão mais determinadas pelas restrições do que pelos retornos esperados e covariâncias estimadas. Outro tipo de mudança no problema de otimização pode ser a otimização robusta realizada por Goldfarb e Iyengar (2003), Ceria e Stubbs (2006) e DeMiguel e Nogales (2009).

3 METODOLOGIA

Neste capítulo do trabalho, detalha-se matematicamente o problema de otimização de carteiras, e como ele muda com a adição de restrições. Além disso, neste capítulo, são apresentados os estimadores de matriz de covariância usados ao longo do trabalho assim como os dados, os detalhes da obtenção das séries de retornos das carteiras ótimas e a metodologia da avaliação do desempenho dessas carteiras.

3.1 Definições de Retornos

Retorno e risco são duas características inerentes a qualquer investimento. Geralmente, o retorno de determinado investimento é melhor descrito por uma distribuição de probabilidade. Uma das questões mais desafiadoras em finanças quantitativas é selecionar um tipo de função de distribuição que modele adequadamente um determinado instrumento de investimento e que ainda possa ser modificável para uma análise matemática. Para ações, a escolha mais simples é a distribuição normal ou log-normal.

Conforme Campbell, Lo e MacKinlay (1997), a maioria dos estudos sobre finanças envolvem retornos, em vez de preços, de ativos. As principais razões para isso são: para o investidor comum, o retorno de um ativo é um sumário da oportunidade de investimento, e séries de retorno são mais fáceis de manusear do que séries de preço porque têm propriedades estatísticas mais atraentes, como estacionariedade e ergodicidade.

Assim, denotando por P_t o preço de um ativo no índice de tempo t , manter um ativo por um período de tempo da data $t - 1$ até a data t resulta no *retorno bruto simples*:

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad \text{ou} \quad P_t = P_{t-1}(1 + R_t)$$

O correspondente *retorno líquido simples* de um período, também chamado de *retorno simples* é:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}, \quad (3.1)$$

Assumindo que os retornos possam ser descritos por uma distribuição normal, tem-se que $R \sim N(\mu, \sigma^2)$, onde μ é a média ou retorno esperado e σ é o desvio padrão. A característica mais interessante de modelar retornos de ativos com distribuição normal é que a distribuição de uma carteira formada por esses ativos também será normal.

O logaritmo natural do retorno bruto simples de um ativo é chamado de retorno continuamente composto ou *log-retorno*. Usa-se log-retornos por duas principais razões. Primeiro, porque pode-se somar os retornos simples para se obter os retornos multi-períodos.

Segundo, as propriedades estatísticas dos log-retornos são mais tratáveis, o que os leva a serem mais usadas para a modelagem estatística dos retornos. O log-retorno é dado por

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = p_t - p_{t-1} = \Delta p_t, \quad (3.2)$$

onde $p_t = \ln(P_t)$.

A partir das informações acima, tem-se que:

$$r_t = \ln(1 + R_t) \implies \exp(r_t) = 1 + R_t \implies R_t = \exp(r_t) - 1 \quad (3.3)$$

Considerando um universo de investimentos com N ativos S_1, S_2, \dots, S_N com retornos futuros incertos R_1, R_2, \dots, R_n . Denota-se por \mathbf{R} o vetor desses retornos, onde

$$\mathbf{R} = [R_1, R_2, \dots, R_n]^T. \quad (3.4)$$

Ao se assumir que a distribuição conjunta dos múltiplos retornos é uma normal multivariada, tem-se que $\mathbf{R} \sim N(\mu, \Sigma)$, onde, μ é o vetor de retornos esperados e Σ é a matriz de covariância entre os retornos.

O vetor de retornos esperados $\mu = E(\mathbf{R})$ tem como elementos $\mu_i = E(R_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$ e é denotado por:

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T \quad (3.5)$$

A matriz de covariância entre os retornos, $\Sigma = V(\mathbf{R})$, tem como elementos $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ e $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ (para $i \neq j$), onde σ_i é o desvio padrão de R_i e ρ_{ij} o coeficiente de correlação entre os retornos dos ativos S_i e S_j (para $i \neq j$). A matriz de covariância Σ é simétrica e denotada por:

$$\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,N} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Todas as matrizes de covariância válidas são positivas semidefinidas, ou equivalentemente, todos os autovalores são não-negativos.

Uma carteira é representada pelo vetor N -dimensional \mathbf{w} , onde

$$\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T \quad (3.7)$$

e w_i é a parcela de recursos totais investidos no ativo i . O vetor \mathbf{w} também pode ser chamado de vetor de alocação. O retorno (incerto) da carteira R_p depende linearmente

dessas parcelas e é uma média ponderada dos retornos simples dos ativos envolvidos, onde o peso de cada ativo é a porcentagem do valor da carteira investido naquele ativo (TSAY, 2010).

$$R_p = w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n = \sum_{i=1}^N w_i R_i = \mathbf{w}^T \mathbf{R} \quad (3.8)$$

Portanto, o retorno esperado da carteira μ_p é uma média ponderada dos retornos esperados individuais e a variância σ_p^2 da carteira é uma função quadrática do vetor de pesos. É possível representar essas variáveis da seguinte forma:

$$\mu_p = E(R_p) = E(\mathbf{w}^T \mathbf{R}) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \quad (3.9)$$

$$\sigma_p^2 = V(R_p) = V(\mathbf{w}^T \mathbf{R}) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (3.10)$$

Os log-retornos de um portfólio, entretanto, não têm as propriedades convenientes acima. Uma combinação linear de variáveis log-normal não é log-normal. Portanto, os retornos da carteira não são log-normais mesmo quando os ativos individuais são. Se os retornos simples R_{it} são todos pequenos em magnitude, então tem-se:

$$r_p \approx \sum_{i=1}^N w_i r_i, \quad (3.11)$$

onde $r_{p,t}$ são os retornos continuamente compostos da carteira no tempo t .

3.2 Matrizes de Covariância

Como foi exposto acima, é possível definir a variância $V(R_p)$ e o desvio-padrão $\sigma(R_p)$ dos retornos da carteira por:

$$V(R_p) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (3.12)$$

$$\sigma(R_p) = \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} \quad (3.13)$$

O desvio-padrão dos retornos da carteira $\sigma(R_p)$, também referido como volatilidade, é frequentemente usado como medida do risco da carteira com pesos \mathbf{w} .

Cabe lembrar que Fan, Zhang e Yu (2012) destacam que uma das maneiras de se resolver o problema de sensibilidade dos vetores de alocação aos vetores de entrada é usar um estimador diferente de matriz de covariância. Assim, apresenta-se os diferentes estimadores de matriz de covariância que serão usados ao longo desse trabalho.

3.2.1 Matriz de Covariância Amostral

A matriz de covariâncias amostral, H_t^1 , para a construção da previsão da covariância dos retornos é dada por:

$$H_t^1 = \frac{1}{\tau - 1} \sum_{k=1}^{\tau} (\mathbf{R}_{t-k} - \bar{\mathbf{R}})' (\mathbf{R}_{t-k} - \bar{\mathbf{R}}), \quad (3.14)$$

onde R_{t-k} é o vetor $1 \times N$ de retornos no tempo $t - k$. \bar{R} é o vetor da média dos retornos dentro da amostra e τ é o tamanho da janela de estimação.

Definindo \mathbf{R} como a matriz $N \times T$ com T observações em um sistema com N variáveis aleatórias representando T retornos num universo de N ativos, a equação (3.14) pode ser representada com a seguinte notação matricial:

$$H_t^1 = \frac{1}{T} \mathbf{R} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{T} \iota \iota^T \right) \mathbf{R}^T, \quad (3.15)$$

onde ι é um vetor $N \times 1$ de uns e \mathbf{I} é uma matriz identidade $N \times N$.

Ledoit e Wolf (2003) chamam a atenção que, na equação (3.15), é possível observar que, se o número de ativos é maior que o número de pontos de dados ($N \leq T$), a matriz de covariância amostral não é invertível, visto que o posto de H_t^1 é no máximo igual ao posto da matriz $\mathbf{I} - \iota \iota^T / T$, que é $T - 1$.

3.2.2 Risk Metrics (Média Móvel Exponencialmente Ponderada)

O modelo Risk Metrics consiste em um modelo de média móvel ponderada exponencialmente para modelar as covariâncias condicionais. Neste modelo, a matriz de covariância condicional é definida recursivamente como:

$$H_t^2 = (1 - \lambda) R_{t-1} R_{t-1}' + \lambda H_{t-1}^2, \quad (3.16)$$

com o valor recomendado para o parâmetro em estimações com dados diários sendo $\lambda = 0.94$.

3.2.3 Estimador *Variance targeting scalar* VECH

O objetivo dos modelos ARCH/GARCH é modelar a variância condicional das séries de interesse. Mas, se o interesse for num conjunto de séries de dados com várias variáveis, é possível estimar as volatilidades condicionais de cada variável simultaneamente. Modelos GARCH multivariados se aproveitam do fato de que choques contemporâneos às variáveis podem ser relacionados entre si. Além disso, essa classe de modelos permite “transbordamento” de volatilidade, de forma que choques de volatilidade para uma variável possam afetar a volatilidade de outras variáveis relacionadas.

O método de estimação usando *variance targeting* tem como objetivo contornar dificuldades encontradas na aplicação de quase-máxima verossimilhança (QML) aos modelos GARCH, utilizando, para isso, um procedimento em dois passos proposto por Francq, Horvath e Zakoïan (2011). Em primeiro lugar, a equação de volatilidade é reparametrizada de forma que o intercepto é substituído pela variância não condicional dos retornos. A variância não condicional é estimada e, condicionalmente a essa medida, no segundo passo,

os parâmetros remanescentes são estimados por QML. Nesse caso, as condições para que a matriz de covariâncias condicional seja positiva definida são simplificadas.

Seguindo Engle e Sheppard (2008), a especificação *Variance targeting Scalar VECH* (*scalar vt-VECH*) é definida por

$$H_t^3 = C + \alpha R_t R_t' + \beta H_{t-1}^3, \quad (3.17)$$

onde α e β são escalares. Sendo C positiva definida e α e β não negativos, a covariância condicional será positiva definida. Assumindo covariância estacionária com o objetivo de contornar o problema da maldição da dimensionalidade e sendo $\bar{H} = E[R_t R_t']$ a covariância não condicional do retornos:

$$E[H_t^3] = C + \alpha \odot E[R_{t-1} R_{t-1}'] + \beta \odot E[H_{t-1}^3], \quad (3.18)$$

$$\bar{H} = CC + \alpha \odot \bar{H} + \beta \odot \bar{H}, \quad (3.19)$$

$$C = (\iota' - \alpha - \beta) \odot \bar{H}, \quad (3.20)$$

onde ι é um vetor de uns $N \times 1$. Portanto, C não está ligado a H_t^3 e pode ser substituído pela estimativa em 3.20.

3.2.4 Estimador Encolhimento

Em seu trabalho, Ledoit e Wolf (2003) expõem que um princípio básico da Teoria das Decisões Estatísticas é que existe um ótimo interior no *trade-off* entre viés e erro de estimação. Ledoit e Wolf (2003) relatam que, desde o trabalho seminal de Stein (1956), sabe-se que uma forma de obter um melhor estimador é simplesmente tomar uma média ponderada entre um estimador enviesado, mas sem erro de estimação, e um não-enviesado, mas com erro de estimação. Esse processo é chamado de encolhimento (*Shrinkage*) do estimador não-enviesado em direção a um alvo fixo representado pelo estimador enviesado. Assim, a ideia básica do método de encolhimento para matrizes de covariância é fazer uma média ponderada do tipo:

$$\delta F_t + (1 - \delta) S_t \quad (3.21)$$

onde S_t é o estimador sem estrutura alguma (normalmente representado por uma matriz de covariância amostral); F_t é o estimador com bastante estrutura, também chamado de alvo de encolhimento; e $\delta \in [1, 0]$ é a constante, ou intensidade, de encolhimento.

O estimador sem estrutura alguma mais frequentemente usado é a matriz de covariância amostral (H_t^1), neste trabalho também se considera este estimador. Para escolher F_t , Ledoit e Wolf (2004b) afirmam que o alvo de encolhimento deve preencher duas exigências ao mesmo tempo: ele deve envolver apenas um pequeno número de

parâmetro livres (ou seja, bastante estrutura) e deve refletir a características importantes da variável sendo estimada. Assim, Ledoit e Wolf (2003), Ledoit e Wolf (2004a) e Ledoit e Wolf (2004b) usam como alvo de encolhimento o modelo de mercado com fator único, uma matriz identidade e um modelo de correlação constante entre os ativos, respectivamente.

Ledoit e Wolf (2003) assumem um modelo de mercado com processo gerador do retorno j no tempo t :

$$r_{j,t} = \alpha_j + \beta_j r_{M,t} + \varepsilon_{j,t}, \quad (3.22)$$

onde $r_{M,t}$ é o retorno do índice de mercado no tempo t e $\varepsilon_{j,t}$ é o resíduo. Considerando $r_{M,t}$ e $\varepsilon_{j,t}$ não correlacionados e os termos residuais mutuamente não correlacionados, o estimador da matriz de covariâncias dos retornos em um conjunto de ações é dado por F_t^1 :

$$F_t^1 = s_{m,t}^2 B B' + D_t, \quad (3.23)$$

onde B é o vetor de β 's, $s_{m,t}^2$ é a variância amostral de $r_{M,t}$ e D_t é a matriz diagonal das variâncias dos resíduos amostrais. Dessa forma, obtém-se o estimador H_t^4 :

$$H_t^4 = \delta F_t^1 + (1 - \delta) H_t^1 \quad (3.24)$$

Ledoit e Wolf (2004a) usam como alvo de encolhimento a matriz de identidade. Assim, o estimador utilizados por Ledoit e Wolf (2004a) pode ser descrito pela seguinte equação:

$$H_t^5 = \delta F_t^2 + (1 - \delta) H_t^1 \quad (3.25)$$

onde $F_t^2 = \mathbf{I}$.

Ledoit e Wolf (2004b) consideram um modelo de correlação constante entre os ativos para formar o alvo de encolhimento F_t^3 . Este modelo seria inapropriado se os ativos fosse de *classes de ativos* diferentes como ações e títulos. Todavia, como neste trabalho só se usa ações, pode-se usar esse modelo sem maiores preocupações. Para formar a matriz de covariância com correlações constantes, F_t^3 , primeiro se define H_t^1 como a covariância amostral. A matriz H_t^1 tem como elemento da linha i e coluna j a entrada h_{ij} . As correlações amostrais entre os retornos das ações i e j são dados por:

$$r_{ij} = \frac{h_{ij}}{\sqrt{h_{ii}h_{jj}}} \quad (3.26)$$

cuja média é:

$$\bar{r} = \frac{2}{(N-1)N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N r_{ij} \quad (3.27)$$

Dessa forma, a matriz de correlação constante F_t^3 pode ser definida por meio das variâncias amostrais e médias amostrais das correlações.

$$f_{ii} = h_{ii} \quad \text{e} \quad f_{ij} = \bar{r} \sqrt{h_{ii}h_{jj}} \quad (3.28)$$

e é possível definir o estimador H_t^6 como

$$H_t^6 = \delta F_t^3 + (1 - \delta)H_t^1 \quad (3.29)$$

Para estimar cada matriz de covariância, e achar a constante de encolhimento, usa-se os códigos que Ledoit e Wolf disponibilizam no site <<http://www.ledoit.net/research.htm>>. Ledoit e Wolf (2004b) explicam qual é a lógica usada por eles para acharem o valor de δ ótimo. Ledoit e Wolf usam uma função de perda quadrática a partir norma de Frobenius. O valor de δ ótimo é o que minimiza a função de perda quadrática.

A norma de Frobenius de uma matriz simétrica Z de dimensão $N \times N$ com as entradas $(z_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ é definida por:

$$\|Z\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_{ij}^2 \quad (3.30)$$

Ao se considerar a norma de Frobenius da diferença entre o estimador de encolhimento e a matriz de covariância verdadeira, chega-se na seguinte função de perda quadrática:

$$L(\delta) = \|\delta F + (1 - \delta)S - \Sigma\|^2 \quad (3.31)$$

O objetivo é achar a constante de encolhimento δ que minimiza o valor esperado da perda:

$$R(\delta) = E(L(\delta)) = E(\|\delta F + (1 - \delta)S - \Sigma\|^2) \quad (3.32)$$

Sob a hipótese de que N é fixo enquanto T tende ao infinito, Ledoit e Wolf (2003) provam que o valor ótimo δ^* se comporta assintoticamente como uma constante sobre T . Essa constante, chamada de κ , pode ser escrita como:

$$\kappa = \frac{\pi - \rho}{\gamma} \quad (3.33)$$

Aqui, π denota a soma das variâncias assintóticas das entradas da matriz de covariância amostral escalonadas por \sqrt{T} . ρ denota a soma das covariâncias assintóticas das entradas do alvo de encolhimento com as entradas da matriz de covariância amostral escalonadas por \sqrt{T} . Finalmente, γ mede a má especificação do alvo de encolhimento.

Se κ fosse conhecido, poderia se usar κ/T como a intensidade de encolhimento na prática. Infelizmente, κ é desconhecido, então é necessário achar um estimador consistente para κ . Isso é feito ao achar estimadores consistentes para os três ingredientes, π , ρ e

γ (para detalhes sobre a obtenção desses estimadores, consultar Ledoit e Wolf (2004b)). Assim, obtém-se:

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\pi} - \hat{\rho}}{\hat{\gamma}} \quad (3.34)$$

Finalmente, a intensidade de encolhimento estimada que os autores propõem para a prática é:

$$\hat{\delta}^* = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{\hat{\kappa}}{T}, 1 \right\} \right\} \quad (3.35)$$

A razão para essa fórmula é que, apesar de ser pouco provável, em princípio, pode ocorrer de, em amostras finitas, $\hat{\kappa}/T < 0$ ou que $\hat{\kappa}/T > 1$, nesse caso simplesmente se trunca o resultado em 0 ou 1, respectivamente.

3.3 Seleção de Carteiras por Otimização de Média-Variância

O paradigma média-variância de Markowitz (1952) é, de longe, a abordagem mais comum do problema de seleção de carteiras. Supondo-se que existam N ativos de risco com vetor retornos aleatórios r_t , definindo a média condicional e a matriz de covariância por μ_t e Σ_t , respectivamente. Assume-se aqui que o investidor só pode distribuir sua riqueza entre os N ativos de risco. Seja Ω , o subconjunto de \mathbb{R}^n que denota o conjunto de carteiras permissíveis. Em particular $\mathbf{w} \in \Omega$ significa que os pesos do portfólio têm de satisfazer as restrições que são impostas na carteira.

Para resolver o problema de média-variância, o Investidor age de maneira ótima para achar o seu vetor de alocações ótimas \mathbf{w}^* . Formalmente, a carteira de média-variância pode ser obtida através da solução do problema de maximização da utilidade do investidor com base no *trade-off* entre risco e retorno esperado,

$$\text{Max}_{\mathbf{w} \in \Omega} \quad \mathbf{w}^T \mu - \lambda \cdot \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}, \quad (3.36)$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{-1}{\lambda}$ resulta em:

$$\text{Min}_{\mathbf{w} \in \Omega} \quad \mathbf{w}^T \hat{\Sigma} \mathbf{w} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{w}^T \mu, \quad (3.37)$$

onde \mathbf{w} é o vetor de pesos ótimos, Σ_t é a matriz de covariâncias condicionais, μ_t é o vetor de médias condicionais e λ é o coeficiente de aversão ao risco do investidor. Esse parâmetro determina o *trade-off* entre o retorno esperado e o risco do portfólio. Conforme Caldeira, Moura e Santos (2013), a carteira de variância mínima corresponde à solução ótima para o problema de média-variância para o investidor com coeficiente de aversão ao risco tendendo ao infinito ($\lambda \rightarrow \infty$). Neste caso, o problema pode ser representado como:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde $\iota = (1, \dots, 1)'$, denota um vetor de uns.

Nesse caso, o investidor importa-se apenas na minimização do risco da carteira, sem levar em consideração seu retorno esperado. Sob esse aspecto, a obtenção da carteira de variância mínima também é um problema econômico relevante que trata da maximização de utilidade do investidor semelhante ao introduzido originalmente por Markowitz (1952). As carteiras de mínima variância possuem uma série de características que as tornam mais atrativas em relação às carteiras de média-variância. Em primeiro lugar, carteiras de média-variância terão um desempenho superior ao das carteiras de mínima variância somente quando a média condicional dos retornos puder ser prevista. Entretanto, a evidência empírica aponta que a dependência temporal da média condicional dos retornos, quando existe, tende a ser fraca. Em segundo lugar, a estimação de retornos esperados está sujeita a um maior erro de estimação em comparação à estimação de covariâncias Merton (1980), e o erro de estimação nos retornos esperados tem um impacto negativo maior nos pesos da carteira quando comparado ao impacto do erro de estimação nas covariâncias (BEST; GRAUER, 1991b; CERIA; STUBBS, 2006; MENDES; LEAL, 2005; MICHAUD, 1989). Chopra e Ziemba (1993), por exemplo, observam que os erros de estimação das covariâncias dos ativos afetam menos o resultado final da seleção de carteiras que os erros de estimação na média condicional dos retornos.

Portanto, a pesquisa acadêmica recente tem focado em carteiras de mínima variância, a qual depende somente da estimação de covariâncias e estão sujeitas a uma quantidade menor de erro de estimação em comparação às carteiras de média-variância (DEMIGUEL et al., 2009). Vários trabalhos têm apontado que carteiras de mínima variância possuem um desempenho fora da amostra melhor que quaisquer carteiras de média-variância, mesmo quando o critério de desempenho considera tanto o retorno da carteira como também seu risco; a esse respeito ver, por exemplo, Jagannathan e Ma (2003), Ledoit e Wolf (2003), Engle e Sheppard (2008), DeMiguel et al. (2009), Caldeira, Moura e Santos (2013), dentre outros. Além disso, as carteiras de mínima variância são de interesse também de gestores profissionais e não apenas de acadêmicos. Cornuejols e Tütüncü (2006) destacam que a estratégia de minimização da variância condicional é muito adotada por gestores de fundos de investimento ao redor do mundo.

Neste trabalho utiliza-se a versão proposta por Fan, Zhang e Yu (2012) da abordagem média-variância para a obtenção de carteiras ótimas de mínima variância utilizando um conjunto de ações de empresas brasileiras negociadas na BM&FBovespa. Fan, Zhang e Yu (2012) alteram o problema de seleção de carteiras por média-variância introduzindo uma restrição de exposição bruta sobre o vetor de alocações. Essa abordagem ameniza algumas problemas encontrados em aplicações práticas da abordagem de Markowitz na medida em que ao permitir que o parâmetro de exposição bruta varie no intervalo $[1, \infty)$, o problema varia progressivamente entre a restrição total à venda a descoberto e nenhuma

restrição. Fan, Zhang e Yu (2012) mostram que com um amplo conjunto de parâmetros de restrição a carteira ótima não depende sensivelmente dos erros de estimação na média e variância condicional.

Existem várias formulações alternativas do problema de seleção de carteiras por média-variância:

- a) Uma consiste em maximizar o retorno esperado da carteira para um dado nível de risco:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\mathbf{w} \in \Omega} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \leq \sigma_{max}^2 \end{aligned}$$

- b) Outra minimiza a variância da carteira para um dado nível de retorno esperado:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{w} \in \Omega} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \geq R_{min} \end{aligned}$$

3.4 Seleção de Carteiras com Restrição da Norma do Vetor de Alocação

Para solucionar o problema de sensibilidade aos vetores de entrada, Fan, Zhang e Yu (2012) utilizam a minimização de variância com uma restrição da norma do vetor de alocação. Dessa forma, o problema de otimização de carteiras fica:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\iota} = 1 \\ & \|\mathbf{w}\|_1 \leq c \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde $\|\mathbf{w}\|_1 = \sum_{i=1}^N |w_i|$. Portanto $\|\mathbf{w}\|_1 \leq c$ fornece: $\sum_{i=1}^N |w_i| \leq c$.

A Restrição sobre as normas impõe restrições nas posições vendidas e compradas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} w^+ &= \frac{\|\mathbf{w}\|_1 + 1}{2} \\ w^- &= \frac{\|\mathbf{w}\|_1 - 1}{2} \\ w^+ - w^- &= 1 \\ w^+ + w^- &= \|\mathbf{w}\|_1 \end{aligned}$$

onde w^- é a soma das posições vendidas e w^+ é a soma das posições compradas. Portanto, com uma restrição de $c = 1.6$ tem-se uma posição vendida máxima de $w^- = 0.3$ e posição comprada máxima de $w^+ = 1.3$. Uma carteira com esta restrição, de $c = 1.6$, é conhecida

com uma carteira 130/30, a qual é amplamente utilizada por participantes do mercado com evidenciado em Lo e Patel (2008) e Gastineau (2008). Mas esse é apenas um exemplo, visto que o valor de c pode variar de acordo com a preferência do investidor. Se $c = 1$, quer dizer que posições vendidas não são permitidas, visto que $w^- = 0$; e se $c = \infty$, não há restrições sobre posições vendidas, ou seja a solução é a mesma que a da carteira irrestrita.

Assim, c pode variar no intervalo $[1, \infty)$, e a restrição não proíbe as posições vendidas completamente. Dessa forma, o investidor não precisa mais ficar entre a otimização com a proibição de vendas a descoberto e a otimização irrestrita, como ocorria antes da utilização dessa abordagem. Agora, é possível generalizar a restrição sobre as posições vendidas e achar um meio do caminho entre a proibição completa de posições vendidas ($c = 1$) e a otimização irrestrita das carteiras ($c = \infty$). Quanto maior for o valor de c , mais perto do caso sem restrição a otimização estará. A vantagem dessa abordagem é que o investidor pode expressar uma visão negativa sobre um ativo sem a manifestação de posições extremas pela sensibilidade da otimização de Markowitz (JACOBS; LEVY, 2006), além de poder escolher um valor de c que ele julgue razoável e ter o melhor entre dois mundos.

3.5 Restrições

Adicionar restrições a um problema de otimização por média-variância não pode melhorar o resultado da otimização ex-ante. Isso ocorre porque essas restrições diminuem o conjunto em que é possível fazer a minimização da variância. Assim, as alocações encontradas por esse problema resultam, no máximo a carteira de mínima variância ($A \subseteq B \implies Sup(A) \leq Sup(B)$). Entretanto, na prática, a inclusão de restrições na otimização por média-variância pode levar a desempenho fora da amostra melhor. Isso pode ser explicado pelo fato de que uma restrição sobre a carteira pode impedir de assumir posições muito extremas, mitigando o problema da sensibilidade da otimização de Markowitz. Gestores profissionais frequentemente usam restrições de vendas a descoberto ou limites superiores e inferiores para cada ativo com o intuito de evitar concentração excessiva em poucos ativos e tentar melhorar o desempenho fora da amostra de suas carteiras.

Um exemplo de limites superiores e inferiores para cada ativo para evitar concentração excessiva em poucos ativos, seria:

$$-0.15 \leq w_i \leq 0.15, \forall i, \quad (3.40)$$

onde se restringe cada ativo a tomar uma posição comprada ou vendida máxima de 15% do valor total da carteira. Como foi dito anteriormente, essa é uma restrição que impede o investidor de tomar posições muito concentradas e extremas na carteira. Exemplos de restrições desse tipo aparecem em Rubesam e Beltrame (2013) e Neto, Leal e Almeida (2011).

A restrição sobre exposição bruta, além de impedir que a carteira assuma posições muito extremas, ajuda a controlar o *turnover* da carteira (justamente porque toma posições menos extremas). Assim, a carteira tem um duplo papel, o de diminuir o risco associado à carteira e o de diminuir os custos de transação dela.

Uma ressalva a ser feita é que como Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014) argumentam, usar restrições sem entender e quantificar o impacto das mesmas pode levar a carteiras com desempenhos ruins que não refletem as visões e a perícia do gestor. Além disso, se são utilizadas muitas restrições na otimização de carteira, o vetor de alocação resultante será mais influenciado pela restrições impostas do que pela otimização de carteiras em si. Outros exemplos de restrições podem ser encontrados em Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014).

3.6 Conexão entre a Restrição da Norma do Vetor de Alocação com o Estimador de Encolhimento

Aqui, se expõe como a restrição da norma do vetor de alocação se conecta com o estimador de encolhimento. Entretanto, antes, deve-se expor como limites superiores e inferiores para cada ativo se conectam com aquele estimador. Jagannathan e Ma (2003) argumentam que pelo método dos multiplicadores de Lagrange, as condições necessárias e suficientes para o problema

$$\text{Min}_{\mathbf{w}} \quad \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (3.41)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{w}^T \boldsymbol{\iota} = 1 \quad (3.42)$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.43)$$

$$w_i \leq \bar{w}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.44)$$

são

$$\sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_j - \lambda_i + \delta = \lambda_0 \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.45)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \text{e} \quad \lambda_i = 0 \quad \text{se} \quad w_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.46)$$

$$\delta_i \geq 0, \quad \text{e} \quad \delta_i = 0 \quad \text{se} \quad w_i < \bar{w}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.47)$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)'$ são os multiplicadores de Lagrange para a restrição de não negatividade (3.43), $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_N)'$ os multiplicadores para a restrição (3.44) e λ_0 é o multiplicador da restrição (3.42).

Jagannathan e Ma (2003), em sua Proposição 1, mostram que:

Seja

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma + (\delta \boldsymbol{\iota}^T + \boldsymbol{\iota} \delta^T) - (\lambda \boldsymbol{\iota}^T + \boldsymbol{\iota} \lambda^T) \quad (3.48)$$

onde ι um vetor coluna de uns, $\tilde{\Sigma}$ é simétrica e positiva semi-definida, e pode-se interpretar $\tilde{\Sigma}$ como uma versão *encolhida* de Σ , no espírito de Ledoit e Wolf (2004a), onde o encolhimento é realizado em direção a matriz identidade. Uma apresentação parecida com essa pode ser encontrada em DeMiguel et al. (2009, p.802). Além disso, denotando a solução da minimização de variância para a carteira restrita (3.41) - (3.44) como \mathbf{w}^{++} , \mathbf{w}^{++} é uma carteira de variância mínima global.

Uma extensão dessa proposição de Jagannathan e Ma (2003) é o Teorema 4 de Fan, Zhang e Yu (2012) que é apresentado a seguir. O problema com a restrição de exposição bruta:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \iota = 1 \\ & \|\mathbf{w}\|_1 \leq c \end{aligned} \tag{3.49}$$

é resolvido pelo método dos multiplicadores de Lagrange, o que resulta em:

$$\frac{\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}}{2} + \lambda_1 (\|\mathbf{w}\|_1 - c) + \lambda_2 (1 - \mathbf{w}^T \iota)$$

definindo \mathbf{g} como o vetor subgradiente da função $\|\mathbf{w}\|_1$, cujo elemento i é -1 ou 1 , ou qualquer elemento entre $[-1, 1]$, dependendo se w_i é positivo, negativo ou zero. Então as condições Karush-Kuhn-Tucker para a otimização (3.49) são:

$$\hat{\Sigma} \mathbf{w} + \lambda_1 \mathbf{g} - \lambda_2 \iota = 0 \tag{3.50}$$

$$\lambda_1 (\|\mathbf{w}\|_1 - c) = 0, \quad \lambda_1 \geq 0 \tag{3.51}$$

Então, o teorema de Fan, Zhang e Yu (2012) mostra que o problema de otimização de carteiras (3.49) é equivalente ao problema de mínima variância:

$$\text{Min}_{\mathbf{w}^T \iota = 1} \quad \mathbf{w}^T \tilde{\Sigma}_c \mathbf{w}$$

com a matriz de covariância regularizada

$$\tilde{\Sigma}_c = \Sigma + \lambda_1 (\tilde{\mathbf{g}}^T \iota + \iota \tilde{\mathbf{g}}^T)$$

quando $\tilde{\mathbf{g}}$ é o subgradiente avaliado em $\tilde{\mathbf{w}}$ e λ_1 é o multiplicador de Lagrange definido em (3.50) e (3.51). Fan, Zhang e Yu (2012) afirmam que esse resultado é similar ao de Jagannathan e Ma (2003) (o que se pode verificar acima) e de DeMiguel et al. (2009). Ou seja, com a restrição sobre exposição bruta, há uma “*diminuição*” da matriz de covariância, usando a palavra diminuir no sentido do estimador da equação (3.21). Como foi exposto acima, a proposição 1 de Jagannathan e Ma (2003) mostra que isso ocorre quando há proibição de vendas a descoberto, a inovação de Fan, Zhang e Yu (2012) e de DeMiguel et al. (2009) é a generalização dessa restrição de forma que há a “*diminuição*” da matriz de covariância mesmo havendo a possibilidade de vendas a descoberto.

3.7 Estratégias para Construção de Carteiras Ótimas

A partir dos dados de preços diários são calculados os retornos dos ativos como a diferença dos logaritmos dos preços, como na equação (3.2). Para a construção dos retornos das carteiras otimizadas, é seguido um processo parecido com o de DeMiguel et al. (2009, p.806). Primeiro, escolhe-se uma janela pela qual se executará a estimação das matrizes de covariância a partir da séries de retornos e, em seguida, estimam-se as matrizes de covariância. Denota-se o tamanho da janela de estimação por $\tau < T$, onde T é o número total de retornos no conjunto de dados. Para este experimento, usa-se uma janela de estimação de $\tau = 252$ pontos de dados, o que para retornos diários correspondem a um ano. Segundo, usando os dados sobre as matrizes de covariância, calculam-se 15 carteiras (\mathbf{w}_t) para cada uma das seis matrizes de covariância, o que é feito usando o pacote de Grant e Boyd (2014) para o software MATLAB.:

Uma carteira irrestrita

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Sete carteiras sem restrição de posição para ativos individuais considerando os seguintes valores de $c = \{1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2\}$. Com estes valores de c , temos carteiras com alavancagem de 0%, 10%, 20%, 30%, 40%, 50% e 60%. A carteira com 0% de alavancagem seria uma carteira com a proibição de vendas a descoberto. Já a carteira com 10% de alavancagem seria uma carteira 110/10, ou seja ela fica com posição vendida máxima de 10% e posição comprada máxima de 110% , o mesmo vale para as carteiras com alavancagem maior que zero.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \\ & \|\mathbf{w}\|_1 \leq c \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sete carteiras com restrição nas posições para ativos individuais com os seguintes valores de $c = \{1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2\}$.

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1 \\ & \|\mathbf{w}\|_1 \leq c \\ & -0.15 \leq w_i \leq 0.15, \forall i, \end{aligned} \quad (3.54)$$

No final desse processo, são gerados $T - \tau$ vetores de pesos de carteira para cada uma das $15 \times 6 = 90$ estratégias. Ou seja, tem-se 90 matrizes \mathbf{W} de tamanho $(T - \tau) \times N$ contendo $T - \tau$ ($t = \tau, \dots, T - 1$) vetores \mathbf{w}_t de tamanho $1 \times N$. Mantendo a carteira portfólio \mathbf{w}_t para cada período, obtém-se o retorno fora da amostra no tempo $t+1$: $\mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1}$. O que será analisado é justamente essas séries temporais de $\mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1}$.

3.8 Metodologia para Avaliação de Desempenho

A avaliação de desempenho das carteiras otimizadas é semelhante à realizada em DeMiguel et al. (2009). A análise leva em conta o retorno médio das carteiras, a variância, o Índice Sharpe fora da amostra das carteiras e o *turnover*. As fórmulas dessas medidas estão apresentadas abaixo:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_p &= \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^{T-1} \mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1} \\ \hat{\sigma}_p^2 &= \frac{1}{T - \tau - 1} \sum_{t=\tau}^{T-1} (\mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1} - \hat{\mu})^2 \\ SR &= \frac{\hat{\mu}_p}{\hat{\sigma}_p},\end{aligned}\tag{3.55}$$

$$TO = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^{T-1} \sum_{i=1}^N \left| w_{i,t+1} - w_{i,t} \frac{1 + R_{i,t+1}}{1 + \mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1}} \right|\tag{3.56}$$

onde R_{ibov} são os retornos do Índice BOVESPA e $\mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1}$ é o retorno fora da amostra da carteiras.

Nesse estudo, impostos e custos de transação foram ignorados. Entretanto, calcula-se o turnover das carteiras com a fórmula apresentada em 3.56. Essa medida, como destacado por DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009), pode ser interpretada como a fração média da riqueza transacionada em cada período.

Conforme Liu (2009), o *turnover* pode ser entendido da seguinte forma: no momento anterior ao rebalanceamento, cada real investido na carteira mudou o valor da ação i para $w_{i,t}(1 + R_{i,t+1})$ e o peso da ação i mudou de $w_{i,t}$ para $w_{i,t} \frac{1 + R_{i,t+1}}{1 + \mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1}}$. onde $w_{i,t}$ é o i -ésimo elemento de \mathbf{w}_t e o i -ésimo elemento de \mathbf{R}_t é denotado como $R_{i,t}$. Portanto, a taxa de *turnover* no tempo t após rebalancear o portfólio pode ser definida como:

$$TO_t = \sum_{i=1}^N \left| w_{i,t+1} - w_{i,t} \frac{1 + R_{i,t+1}}{1 + \mathbf{w}_t^T \mathbf{R}_{t+1}} \right|,$$

ao avaliar-se a média dessa medida ao longo do tempo, obtém-se a equação (3.56).

O resultado da equação (3.55), que é o Índice de Sharpe, indica o *tradeoff* entre a média e a variância dos retornos, ele exprime a quantidade de média que a série de retornos obtém para cada unidade de variância que ela sofre.

Para testar a significância estatística das diferenças entre as variâncias e índices de Sharpe dos retornos de duas carteiras competidoras, é empregado o procedimento de *bootstrap* introduzido por Ledoit e Wolf (2008). Este procedimento é robusto para retornos não-normais e serialmente correlacionados. Em particular, é utilizado o *bootstrap* estacionário de Politis e Romano (1994) com $B=1,000$ reamostragens e tamanho de bloco $b = 5$. Os p -valores do teste foram obtidos usando a metodologia sugerida por Ledoit e Wolf (2008, Remark 3.2).

3.9 O valor econômico da otimização de carteiras

Além de avaliar os portfólios com as medidas usuais apresentadas acima, também é considerada a abordagem utilizada por Fleming, Kirby e Ostdiek (2001) e Fleming, Kirby e Ostdiek (2003), e é realizada uma avaliação econômica baseada numa utilidade quadrática para medir o valor dos ganhos de desempenho associados com a estratégia proposta por Fan, Zhang e Yu (2012).

Sejam R_{p1t} e R_{p2t} retornos sobre as carteiras obtidas usando duas estratégias diferentes, conforme Fleming, Kirby e Ostdiek (2001), para medir o valor econômico de usar a segunda estratégia em vez da primeira, calcula-se a constante Δ , que satisfaça:

$$\sum_{t=1}^T U(R_{p1t}) = \sum_{t=1}^T U(R_{p2t} - \Delta)$$

essa constante representa o retorno máximo que o investidor estaria disposto a sacrificar a cada período de tempo t para obter o ganho de desempenho associado com a troca para a segunda estratégia.

Em geral, é possível ver a utilidade quadrática como uma aproximação de segunda ordem para a utilidade verdadeira do investidor. Sob essa aproximação, a utilidade realizada do investidor no período $t + 1$ pode ser escrita como:

$$U(W_{t+1}) = W_t R_{p,t+1} - \frac{aW_t^2}{2} R_{p,t+1}^2, \quad (3.57)$$

onde W_{t+1} é a riqueza do investido em $t + 1$, a é a sua aversão absoluta ao risco e

$$R_{p,t} = 1 + \mathbf{w}'_t \mathbf{r}_{t+1},$$

é o retorno bruto da carteira selecionada em t no período $t + 1$.

Para facilitar comparações entre carteiras, aW_t é mantido constante. Isso é equivalente a definir a aversão relativa ao risco do investidor, $\gamma_t = \frac{aW_t}{(1 - aW_t)}$, igual a um valor fixo, γ . Com a aversão ao risco mantida constante, é possível usar a média da utilidade realizada, $\bar{U}(\cdot)$, para estimar consistentemente a utilidade realizada gerada por um dado

nível de riqueza inicial. Em particular tem-se:

$$\bar{U}(\cdot) = W_0 \left[\sum_{t=1}^T \left(R_{p,t+1} - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} R_{p,t+1}^2 \right) \right]$$

Assim, estima-se o valor econômico da troca de estratégias ao equacionar-se a média das utilidade para duas carteiras alternativas. Supondo, por exemplo, que manter uma carteira passiva produz a mesma utilidade média que deter uma carteira ativa sujeita a despesas diárias de Δ expressas como uma fração da riqueza investida. Uma vez que o investidor seria indiferente entre essas duas alternativas, Δ pode ser interpretado como a taxa que ele estaria disposto a pagar para mudar da estratégia passiva para a ativa. Para estimar essa taxa, calcula-se o valor que satisfaz a seguinte equação:

$$\sum_{t=1}^T \left[(R_{1,t+1}) - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} R_{1,t+1}^2 \right] = \sum_{t=1}^T \left[(R_{2,t+1} - \Delta) - \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} (R_{2,t+1} - \Delta)^2 \right] \quad (3.58)$$

Para fazer isso, primeiro define-se:

$$g = \frac{\gamma}{2(1+\gamma)} = \frac{\gamma}{2+2\gamma}$$

o que fornece o seguinte resultado:

$$\sum_{t=1}^T \left[(R_{1,t+1}) - gR_{1,t+1}^2 \right] = \sum_{t=1}^T \left[(R_{2,t+1} - \Delta) - g(R_{2,t+1} - \Delta)^2 \right] \quad (3.59)$$

Então, definindo $k = \sum_{t=1}^T [R_{1t} - gR_{1t}^2]$, e distribuindo o operador de somatório na direita, resulta em:

$$k = \sum_{t=1}^T R_{2t} - \sum_{t=1}^T \Delta - g \sum_{t=1}^T R_{2t}^2 - g \sum_{t=1}^T \Delta^2 + 2g \sum_{t=1}^T R_{2t} \Delta \quad (3.60)$$

definindo $\sum_{t=1}^T R_{2t} = M_1$ e $\sum_{t=1}^T R_{2t}^2 = M_2$, obtém-se:

$$k = M_1 - T\Delta - gM_2 - gT\Delta^2 + 2gM_1\Delta \quad (3.61)$$

a reorganização dos termos resulta em:

$$\begin{aligned} gT\Delta^2 + T\Delta - 2gM_1\Delta + k - M_1 + gM_2 &= 0 \\ gT\Delta^2 + \Delta(T - 2gM_1) + k - M_1 + gM_2 &= 0 \end{aligned}$$

definindo os coeficientes da equação quadrática:

$$\begin{aligned} a &= gT \\ b &= T - 2gM_1 \\ c &= k - M_1 + gM_2 \end{aligned}$$

usando a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.62)$$

resolve-se a equação (3.62). Relata-se Δ como uma taxa anualizada em pontos base usando os diferentes valores de $\gamma = 1$ e $\gamma = 10$.

4 ESTUDO EMPÍRICO

Esse é um estudo empírico sobre o desempenho da otimização de Carteiras com restrição nas normas dos ativos. Assim, neste capítulo é avaliado o desempenho fora da amostra das carteiras construídas a partir dos diferentes estimadores da matriz de covariâncias, baseadas em dados diários, considerando restrições individuais de ativos e diferentes níveis de restrição nas exposições brutas das carteiras. Os portfólios são rebalanceados em frequência diária, semanal e mensal e analisados de acordo com seu desempenho em termos de retorno médio, desvio padrão, índice de Sharpe, *turnover* e uma avaliação econômica baseada numa utilidade quadrática.

Os dados utilizados são preços de $N = 61$ ações que fizeram parte do Índice Bovespa de Janeiro de 1999 até Dezembro de 2010, o que resulta num total de $T + 1 = 2970$ observações de preços diários para cada um dos 61 ativos. Os dados foram obtidos da Bloomberg e são ajustados para *split* e dividendos. Os retornos são calculados como a diferença dos logaritmos dos preços, como na equação (3.2). Então, se antes havia 61 séries de preços com 2970 observações de preços, agora há 61 séries com $T = 2969$ observações de retornos diários. A partir dos retornos, constroem-se as carteiras conforme a apresentação da seção 3.7

4.1 Medidas de Desempenho dos Portfólios

Neste exercício empírico são considerados os seguintes estimadores para a matriz de covariância: covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2004a) (LW1), Ledoit e Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit e Wolf (2003) (LW3). A avaliação fora da amostra é implementada recursivamente para evitar viés de antecipação. Especificamente, as previsões das matrizes de covariância são geradas usando parâmetros estimados com informações disponíveis apenas até o momento em que a previsão é realizada. Realizar as previsões dessa forma simula a situação de um investidor em tempo real. Em todas as tabelas, o modelo de *benchmark* é a carteira de variância mínima com restrição $c = 1.0$, sem restrição para ativos individuais e matriz de covariância amostral.

As tabelas 1 a 3 apresentam os referidos indicadores de desempenho para as frequências de rebalanceamento diário, semanal e mensal, respectivamente. Os resultados da Tabela 1 indicam que, no caso em que o investidor realiza o ajuste diário da carteira, o estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2003) (LW3) gera portfólios com menor desvio padrão para o caso de portfólios sem restrição para ativos individuais mas considerando diferentes níveis de restrição sobre as exposições brutas. Em termos de retorno ajustado ao

risco e retorno médio, o estimador de encolhimento LW3 também apresenta o desempenho mais satisfatório. Nota-se que, à medida que relaxa-se a restrição sobre a norma do vetor de alocação, o desempenho das carteiras melhora até determinado ponto, geralmente para níveis de restrição entre $c = 1.4$ e $c = 1.8$. A partir desse ponto diminuir a restrição sobre as exposições brutas leva à deterioração do desempenho dos portfólios. Estes resultados vão ao encontro com os de Fan, Zhang e Yu (2012), que sugerem que algum nível de exposição à venda descoberto é melhor do que a restrição total ou nenhuma restrição. As carteiras com pior desempenho em termos de risco são provenientes do modelo *RiskMetrics*, exibindo desempenho inferior aos demais estimadores para a matriz de covariância com todos os níveis de restrição.

A utilização de restrição nas exposições a ativos individuais, que buscam evitar exposição excessiva a ativos específicos, melhora o desempenho das carteiras em termos de desvio padrão. Conforme pode ser observado na Tabela 1, os portfólios otimizados com restrição nas exposições a ativos individuais apresentam menor risco, sendo as diferenças em relação ao *benchmark* estatisticamente significantes ao nível de 10%. Apenas o modelo *RiskMetrics* não apresenta desvio padrão estatisticamente significativo menor que o modelo *benchmark*. Mais uma vez a modelagem através do encolhimento LW3 apresentou os melhores resultados, tanto em termos de risco quanto retorno médio e ajustado pelo risco.

Os resultados da Tabela 1 mostram que o modelo de *benchmark* (carteira de variância mínima com estimador amostral e restrição $c = 1.0$) apresentou desvio padrão anualizado igual a 14.99% e retorno ajustado ao risco, índice de Sharpe, igual a 1.54. Para cada estimador da matriz de covariância, são considerados portfólios com restrições na norma das exposições de $c = \{1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2\}$, tanto para carteiras com restrições sobre exposições a ativos individuais quanto irrestritas. No caso dos portfólios irrestritos às exposições individuais, os menores níveis de risco são alcançados com restrição de exposição bruta de $c = 1.4$ e $c = 1.6$, sendo que, para todos os estimadores de encolhimento, as diferenças em relação ao *benchmark* são estatisticamente significantes ao nível de 10%. Mais especificamente, o melhor desempenho é obtido com o estimador de encolhimento LW3 e restrição de exposição bruta $c = 1.6$, que apresenta desvio padrão anualizado de 13.81%. Quando se considera o desempenho ajustado pelo risco, o melhor resultado também é obtido pelo estimador LW3 e $c = 1.6$, que obtém índice de Sharpe anualizado de 1.89. Nota-se que o pior desempenho, tanto em termos de desvio padrão quanto de retorno ajustado pelo risco, é do modelo *RiskMetrics*, o que está em linha com a literatura relacionada.

A importância econômica da imposição de restrições sobre as exposições a ativos individuais para redução do risco das carteiras de variância mínima é substancial: em média 0.40% ao ano abaixo do *benchmark*. Particularmente, a variância dos portfólios construídos com base no modelo de encolhimento LW3 é sistematicamente menor do que

aqueles obtidos para os estimadores remanescentes, e isso vale também para os casos com ajuste semanal e mensal dos portfólios. Os resultados encontrados também evidenciam que, mesmo com o uso de restrições específicas, os melhores resultados são obtidos quando se considera $c = 1.4$ e $c = 1.6$. Especificamente, o melhor resultado é encontrado com o estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2003) (LW3) com $c = 1.6$ e restrição individual para os ativos em 15% ($|w_i| \leq 0.15$). Pode-se observar na Tabela 1, bem como nas outras frequências de rebalanceamento, Tabelas 2 e 3, que as carteiras ótimas obtidas com o uso do estimador LW3, sejam restritas ou irrestritas, além de exibirem menor risco, também são as que apresentam menor *portfolio turnover*. Esse resultado é extremamente relevante, na medida em que indica um menor custo de transação na utilização dessa estratégia.

A Figura 1 apresenta o índice de Sharpe para os portfólios restritos e irrestritos obtidos com todos os estimadores para a matriz de covariância considerados nos casos de rebalanceamento diário. Nota-se que essa figura conta uma história similar ao que foi discutido anteriormente, em que os melhores resultados são obtidos com restrição na norma do vetor de alocação de $c = 1.4$ e $c = 1.6$ e com o modelo de encolhimento LW3. A observação dos gráficos também deixa claro que o desempenho das carteiras melhora com o aumento de c até alcançar $c = 1.6$. A partir desse valor, aumentar o c leva a uma piora nos resultados. Do ponto de vista da gestão de carteiras, esse resultado é bastante importante, já que indica que pode existir um nível ótimo de restrição sobre a norma das exposições brutas. Além disso, o melhor desempenho obtido com $c = 1.6$ corrobora o uso da estratégia 130/30, comum entre os participantes do mercado (GASTINEAU, 2008; JACOBS; LEVY, 2006; LO; PATEL, 2008).

Os resultados apresentados na Tabela 1 são baseados na suposição de que os investidores ajustam suas carteiras diariamente. Entretanto, isso dificilmente ocorre na prática, em decorrência dos altos custos de transação gerados por essa frequência de rebalanceamento. Para contornar esse problema, os investidores usam frequências menores para ajustarem os pesos de suas carteiras. O lado negativo do rebalanceamento menos frequente dos pesos das carteiras é que os pesos ficam livres para variar até o próximo rebalanceamento. Assim, se retornos extremos ocorrerem, o portfólio resultante dessa evolução dos pesos não se assemelha em nada com o portfólio montado seguindo a otimização de carteiras. Dessa forma, a restrição de exposição bruta é desrespeitada, assim como as restrições de posições individuais. Isso permite que o portfólio tome posições mais extremas, o que compromete o desempenho da carteira. Apresentamos o desempenho de carteiras com rebalanceamento semanal e mensal nas tabelas 2 e 3, respectivamente.

A Tabela 2 apresenta os indicadores de desempenho para a frequência de rebalanceamento semanal. Essa tabela conta uma história similar a da tabela 1 apresentada anteriormente. O estimador com menor volatilidade e melhor desempenho ajustado pelo

risco continua sendo o estimador LW3. A restrição com menor desvio padrão, geralmente, é a mesma que apresenta o maior índice Sharpe, e os menores desvios-padrão são alcançados com restrições de exposição bruta entre $c = 1.4$ e $c = 1.8$. Nesta tabela, o modelo *benchmark* com matriz de covariância amostral sem restrições individuais e exposição bruta de $c = 1.0$ apresentou índice de Sharpe igual a 1.53 e desvio padrão anualizado igual a 15.14. O maior índice de Sharpe (2.04) é obtido com o estimador de encolhimento LW3 com exposição bruta de $c = 1.6$ e restrição individual para os ativos em 15% ($|w_i| \leq 0.15$). Para ilustrar de forma mais clara o comportamento descrito acima, a figura 2 apresenta o índice de Sharpe para os portfólios restritos e irrestritos obtidos com todos os estimadores para a matriz de covariância considerados para rebalanceamento semanal. A partir da comparação entre as figuras 1 e 2, podemos observar que o índice de Sharpe para o rebalanceamento semanal parece obedecer ao mesmo comportamento que o índice para o rebalanceamento diário.

Na tabela 3, apresenta-se os indicadores de desempenho para a frequência de rebalanceamento mensal. O modelo *benchmark* com matriz de covariância amostral sem restrições individuais e exposição bruta de $c = 1.0$ apresentou índice de Sharpe igual a 1.44 e desvio padrão anualizado igual a 15.61. O maior índice de Sharpe (1.93) é com o estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2003) (LW3) com $c = 1.8$ e restrição individual para os ativos em 15% ($|w_i| \leq 0.15$). Nesta tabela, a restrição com menor desvio-padrão, geralmente, não é a mesma que apresenta o maior índice Sharpe. O menor desvio padrão está associado com um valor da restrição de exposição bruta igual entre $c = 1.4$ e 1.8. Entretanto, o índice Sharpe parece crescer junto com a restrição de exposição bruta. Esse fato pode ser melhor observado na figura 3, que apresenta o índice de Sharpe para os portfólios restritos e irrestritos obtidos com todos os estimadores para a matriz de covariância considerados para rebalanceamento mensal. Outros padrões gerais que podemos observar das tabelas 1, 2 e 3 é que o *turnover* cresce junto com o valor da restrição c , e ele também é maior quanto mais frequente é rebalanceamento da carteira.

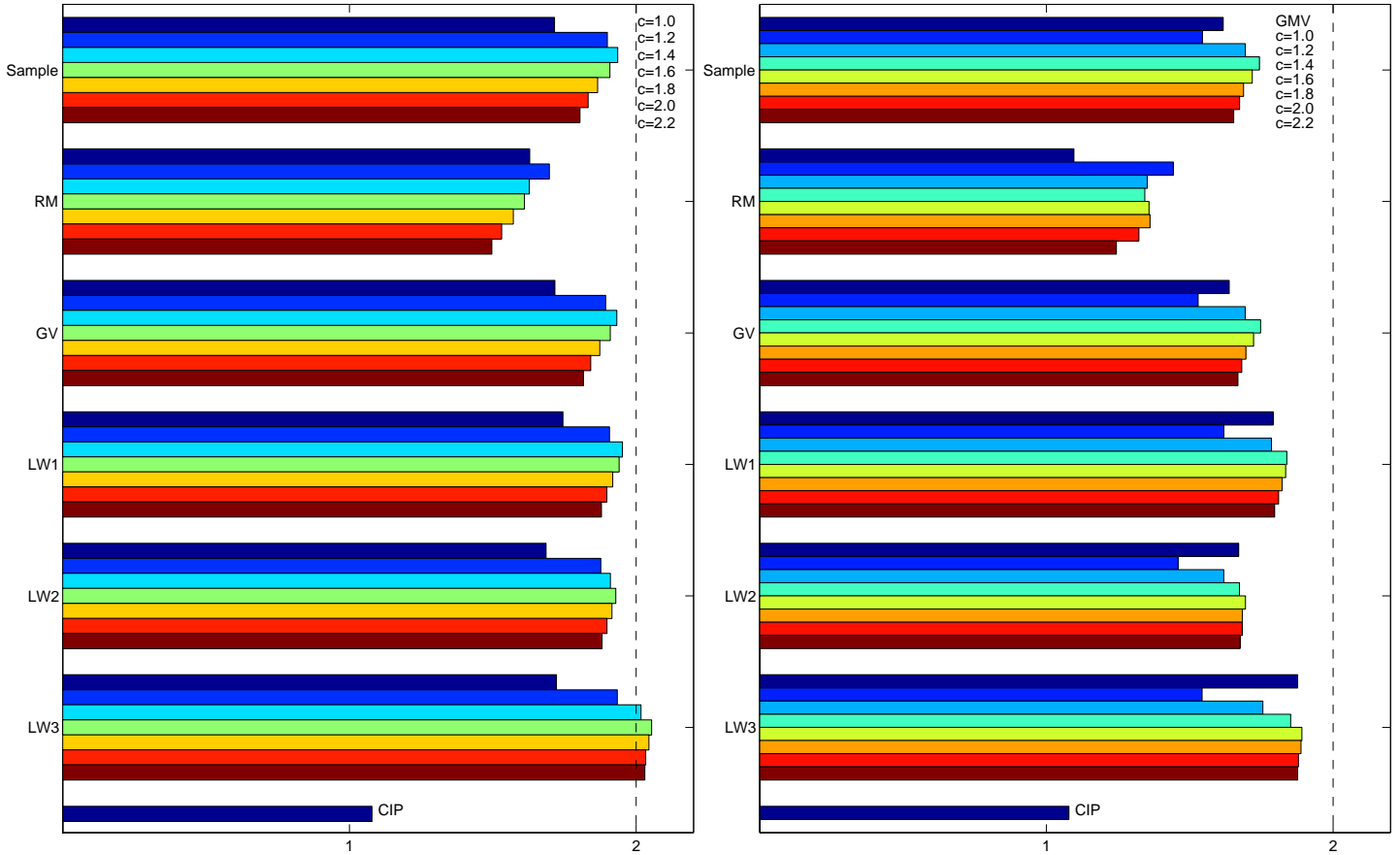
Tabela 1 – Desempenho das carteiras de variância mínima com rebalanceamento diário

	Carteiras Irrestritas				Carteiras Restritas ($w_i \leq 0.15$)			
	Média (%)	SD (%)	Sharpe	Turnover	Média (%)	SD (%)	Sharpe	Turnover
<i>Painel A: Matriz de Covariância Amostral</i>								
GMV	24.36	15.07	1.62	0.160				
$c = 1.0$	23.15	14.99	1.54	0.056	25.14	14.66	1.72	0.061
$c = 1.2$	24.50	14.46*	1.69*	0.058	26.61	14.01*	1.90*	0.055
$c = 1.4$	24.93	14.30*	1.74*	0.076	26.89	13.89*	1.94*	0.073
$c = 1.6$	24.68	14.37*	1.72	0.094	26.63	13.95*	1.91*	0.090
$c = 1.8$	24.52	14.53*	1.69	0.113	26.40	14.15*	1.87*	0.109
$c = 2.0$	24.63	14.72	1.67	0.130	26.35	14.38	1.83*	0.125
$c = 2.2$	24.60	14.88	1.65	0.143	26.27	14.56	1.80	0.139
<i>Painel B: Estimador Risk Metrics</i>								
GMV	24.43	22.29*	1.10	0.957				
$c = 1.0$	22.74	15.76	1.44	0.184	24.56	15.08	1.63	0.177
$c = 1.2$	22.66	16.76	1.35	0.230	25.27	14.89	1.70	0.225
$c = 1.4$	22.18	16.52	1.34	0.277	24.59	15.11	1.63	0.271
$c = 1.6$	22.20	16.35	1.36	0.321	24.78	15.39	1.61	0.315
$c = 1.8$	22.38	16.44	1.36	0.365	24.74	15.74	1.57	0.357
$c = 2.0$	22.09	16.70*	1.32	0.409	24.65	16.10*	1.53	0.399
$c = 2.2$	21.25	17.08*	1.24	0.454	24.73	16.52*	1.50	0.440
<i>Painel C: Estimador GARCH Vech</i>								
GMV	24.73	15.10	1.64	0.164				
$c = 1.0$	22.97	15.02	1.53	0.057	25.19	14.68	1.72	0.064
$c = 1.2$	24.51	14.47*	1.69*	0.060	26.56	14.03*	1.89*	0.057
$c = 1.4$	25.02	14.32*	1.75*	0.078	26.89	13.92*	1.93*	0.075
$c = 1.6$	24.77	14.38*	1.72	0.097	26.68	13.97*	1.91*	0.092
$c = 1.8$	24.65	14.54*	1.70	0.115	26.52	14.16*	1.87*	0.111
$c = 2.0$	24.77	14.73	1.68	0.132	26.50	14.39*	1.84*	0.127
$c = 2.2$	24.85	14.90	1.67	0.147	26.49	14.59	1.82	0.142
<i>Painel D: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004a)</i>								
GMV	25.37	14.16*	1.79*	0.100				
$c = 1.0$	23.83	14.72*	1.62*	0.049	25.57	14.66	1.74*	0.058
$c = 1.2$	25.21	14.12*	1.78*	0.053	26.64	13.97*	1.91*	0.051
$c = 1.4$	25.63	13.94*	1.84*	0.067	26.95	13.80*	1.95*	0.066
$c = 1.6$	25.60	13.96*	1.83*	0.081	26.84	13.83*	1.94*	0.080
$c = 1.8$	25.61	14.06*	1.82*	0.092	26.77	13.96*	1.92*	0.091
$c = 2.0$	25.55	14.12*	1.81*	0.097	26.65	14.04*	1.90*	0.096
$c = 2.2$	25.41	14.15*	1.80*	0.099	26.47	14.09*	1.88*	0.099
<i>Painel E: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004b)</i>								
GMV	24.38	14.60*	1.67	0.097				
$c = 1.0$	21.97	15.06	1.46*	0.054	24.67	14.63	1.69	0.059
$c = 1.2$	23.51	14.52*	1.62	0.052	26.26	13.99*	1.88*	0.050
$c = 1.4$	24.02	14.35*	1.67	0.065	26.43	13.84*	1.91*	0.062
$c = 1.6$	24.39	14.40*	1.69	0.079	26.79	13.89*	1.93*	0.075
$c = 1.8$	24.41	14.50*	1.68	0.090	26.90	14.04*	1.92*	0.087
$c = 2.0$	24.50	14.55*	1.68	0.094	26.83	14.13*	1.90*	0.092
$c = 2.2$	24.43	14.58*	1.68	0.096	26.68	14.19*	1.88*	0.094
<i>Painel F: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2003)</i>								
GMV	25.99	13.85*	1.88*	0.067				
$c = 1.0$	22.88	14.82*	1.54	0.049	25.00	14.52	1.72	0.052
$c = 1.2$	24.76	14.11*	1.75*	0.043	26.71	13.81*	1.93*	0.042
$c = 1.4$	25.63	13.84*	1.85*	0.053	27.34	13.56*	2.02*	0.052
$c = 1.6$	26.11	13.81*	1.89*	0.062	27.81	13.54*	2.05*	0.060
$c = 1.8$	26.11	13.83*	1.89*	0.065	27.80	13.59*	2.04*	0.065
$c = 2.0$	26.02	13.85*	1.88*	0.066	27.71	13.63*	2.03*	0.066
$c = 2.2$	25.99	13.85*	1.88*	0.067	27.68	13.63*	2.03*	0.067
Estratégia Passiva								
1/N	25.78	23.90	1.08	0.018				
IBOV	18.16	31.34	0.58	–				
CDI	14.51	0.25	–	–				

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: A tabela apresenta a média anual dos retornos da carteira, a média anual do desvio-padrão da carteira, o índice de Sharpe anualizado médio e o *portfolio turnover* das carteiras de variância mínima considerando diferentes níveis de restrição da exposição bruta e a presença ou ausência de restrições individuais a ativos com os seguintes estimadores para a matriz de covariância: covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH Vech VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2004a) (LW1), Ledoit e Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit e Wolf (2003) (LW3). O modelo *benchmark* é a carteira de variância mínima sem restrição individual dos ativos, nível de exposição bruta igual a $c = 1.0$ e estimador amostral da matriz de covariância. O asterisco (*) representa a diferença estatisticamente significativa entre os desvios-padrão das carteiras e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos pelo modelo *benchmark*.

Figura 1 – Índice de Sharpe Anualizado com Rebalanceamento Diário



(a) Portfólios Restritos

(b) Portfólios Irrestritos

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: As figuras apresentam o índice de Sharpe anualizado médio das carteiras de variância mínima considerando diferentes níveis de restrição da exposição bruta e a presença ou ausência de restrições individuais a ativos com os seguintes estimadores para a matriz de covariância: covariância amostral (Sample), *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2004a) (LW1), Ledoit e Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit e Wolf (2003) (LW3).

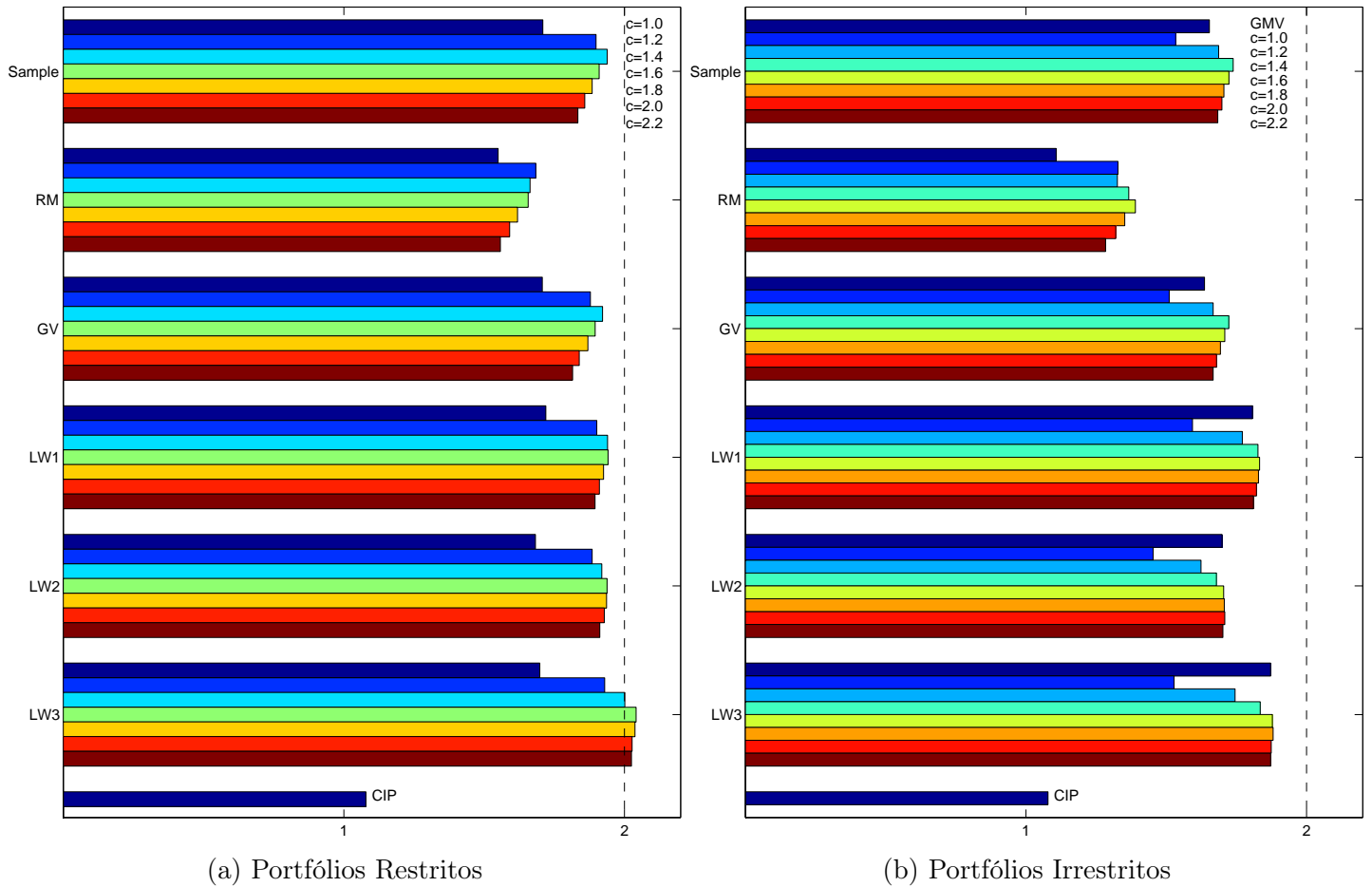
Tabela 2 – Desempenho das carteiras de variância mínima com rebalanceamento semanal

	Carteiras Irrestritas				Carteiras Restritas ($w_i \leq 0.15$)			
	Média (%)	SD (%)	Sharpe	Turnover	Média (%)	SD (%)	Sharpe	Turnover
<i>Painel A: Matriz de Covariância Amostral</i>								
GMV	25.25	15.27	1.65	0.081				
$c = 1.0$	23.22	15.14	1.53	0.023	25.35	14.83	1.71	0.023
$c = 1.2$	24.66	14.62*	1.69*	0.031	26.89	14.16*	1.90*	0.029
$c = 1.4$	25.19	14.49*	1.74*	0.040	27.26	14.07*	1.94*	0.037
$c = 1.6$	25.10	14.56*	1.72*	0.048	27.00	14.14*	1.91*	0.045
$c = 1.8$	25.11	14.72*	1.71	0.057	27.04	14.35*	1.88*	0.055
$c = 2.0$	25.35	14.92	1.70	0.066	27.11	14.59	1.86*	0.063
$c = 2.2$	25.39	15.08	1.68	0.073	27.11	14.78	1.83*	0.070
<i>Painel B: Estimador Risk Metrics</i>								
GMV	24.75	22.35*	1.11	0.484				
$c = 1.0$	21.59	16.26	1.33	0.088	23.54	15.19	1.55	0.080
$c = 1.2$	22.20	16.75	1.33	0.118	25.36	15.06	1.68	0.113
$c = 1.4$	22.41	16.40	1.37	0.142	25.40	15.27	1.66	0.136
$c = 1.6$	22.72	16.35	1.39	0.163	25.74	15.54	1.66	0.157
$c = 1.8$	22.19	16.41	1.35	0.184	25.71	15.88	1.62	0.176
$c = 2.0$	21.97	16.64*	1.32	0.204	25.85	16.25*	1.59	0.195
$c = 2.2$	21.86	17.03*	1.28	0.225	25.96	16.67*	1.56	0.215
<i>Painel C: Estimador GARCH Vech</i>								
GMV	25.05	15.31	1.64	0.083				
$c = 1.0$	22.89	15.15	1.51*	0.024	25.30	14.82	1.71	0.023
$c = 1.2$	24.39	14.63*	1.67*	0.032	26.64	14.18*	1.88*	0.029
$c = 1.4$	24.98	14.50*	1.72*	0.041	27.07	14.09*	1.92*	0.038
$c = 1.6$	24.89	14.57*	1.71	0.049	26.82	14.15*	1.90*	0.046
$c = 1.8$	24.94	14.73*	1.69	0.059	26.84	14.36*	1.87*	0.055
$c = 2.0$	25.07	14.93	1.68	0.067	26.85	14.60	1.84*	0.064
$c = 2.2$	25.17	15.10	1.67	0.074	26.87	14.80	1.82	0.071
<i>Painel D: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004a)</i>								
GMV	25.96	14.37*	1.81*	0.050				
$c = 1.0$	23.68	14.86*	1.59	0.021	25.45	14.80	1.72*	0.021
$c = 1.2$	25.28	14.28*	1.77*	0.028	26.84	14.12*	1.90*	0.027
$c = 1.4$	25.79	14.12*	1.83*	0.035	27.11	13.97*	1.94*	0.034
$c = 1.6$	25.92	14.14*	1.83*	0.041	27.21	14.01*	1.94*	0.040
$c = 1.8$	26.07	14.26*	1.83*	0.047	27.26	14.16*	1.93*	0.046
$c = 2.0$	26.09	14.32*	1.82*	0.049	27.23	14.25*	1.91*	0.048
$c = 2.2$	25.99	14.35*	1.81*	0.050	27.08	14.29*	1.90*	0.049
<i>Painel E: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004b)</i>								
GMV	25.09	14.77*	1.70	0.050				
$c = 1.0$	22.09	15.20	1.45*	0.023	24.88	14.78	1.68	0.021
$c = 1.2$	23.81	14.67*	1.62	0.028	26.63	14.13*	1.88*	0.026
$c = 1.4$	24.36	14.51*	1.68	0.035	26.84	13.98*	1.92*	0.032
$c = 1.6$	24.82	14.56*	1.70	0.041	27.22	14.05*	1.94*	0.039
$c = 1.8$	25.03	14.67*	1.71	0.047	27.50	14.21*	1.94*	0.044
$c = 2.0$	25.15	14.72*	1.71	0.049	27.57	14.30*	1.93*	0.046
$c = 2.2$	25.11	14.75*	1.70	0.050	27.45	14.36*	1.91*	0.048
<i>Painel F: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2003)</i>								
GMV	26.29	14.04*	1.87*	0.035				
$c = 1.0$	22.89	14.98*	1.53	0.020	24.93	14.68	1.70	0.020
$c = 1.2$	24.90	14.27*	1.75*	0.023	26.95	13.97*	1.93*	0.022
$c = 1.4$	25.71	14.02*	1.83*	0.028	27.48	13.73*	2.00*	0.027
$c = 1.6$	26.28	13.99*	1.88*	0.032	28.02	13.73*	2.04*	0.031
$c = 1.8$	26.37	14.02*	1.88*	0.034	28.10	13.79*	2.04*	0.033
$c = 2.0$	26.31	14.04*	1.87*	0.034	28.02	13.82*	2.03*	0.034
$c = 2.2$	26.29	14.04*	1.87*	0.035	27.99	13.83*	2.02*	0.034
Estratégia Passiva								
1/N	24.87	23.89	1.04	0.008				
IBOV	18.16	31.34	0.58	–				
CDI	14.51	0.25	–	–				

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: A tabela apresenta a média anual dos retornos da carteira, a média anual do desvio-padrão da carteira, o índice de Sharpe anualizado médio e o *portfolio turnover* das carteiras de variância mínima considerando diferentes níveis de restrição da exposição bruta e a presença ou ausência de restrições individuais a ativos com os seguintes estimadores para a matriz de covariância: covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2004a) (LW1), Ledoit e Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit e Wolf (2003) (LW3). O modelo *benchmark* é a carteira de variância mínima sem restrição individual dos ativos, nível de exposição bruta igual a $c = 1.0$ e estimador amostral da matriz de covariância. O asterisco (*) representa a diferença estatisticamente significante entre os desvios-padrão das carteiras e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos pelo modelo *benchmark*.

Figura 2 – Índice de Sharpe Anualizado com Rebalanceamento Semanal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: As figuras apresentam o índice de Sharpe anualizado médio das carteiras de variância mínima considerando diferentes níveis de restrição da exposição bruta e a presença ou ausência de restrições individuais a ativos com os seguintes estimadores para a matriz de covariância: covariância amostral (Sample), *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2004a) (LW1), Ledoit e Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit e Wolf (2003) (LW3).

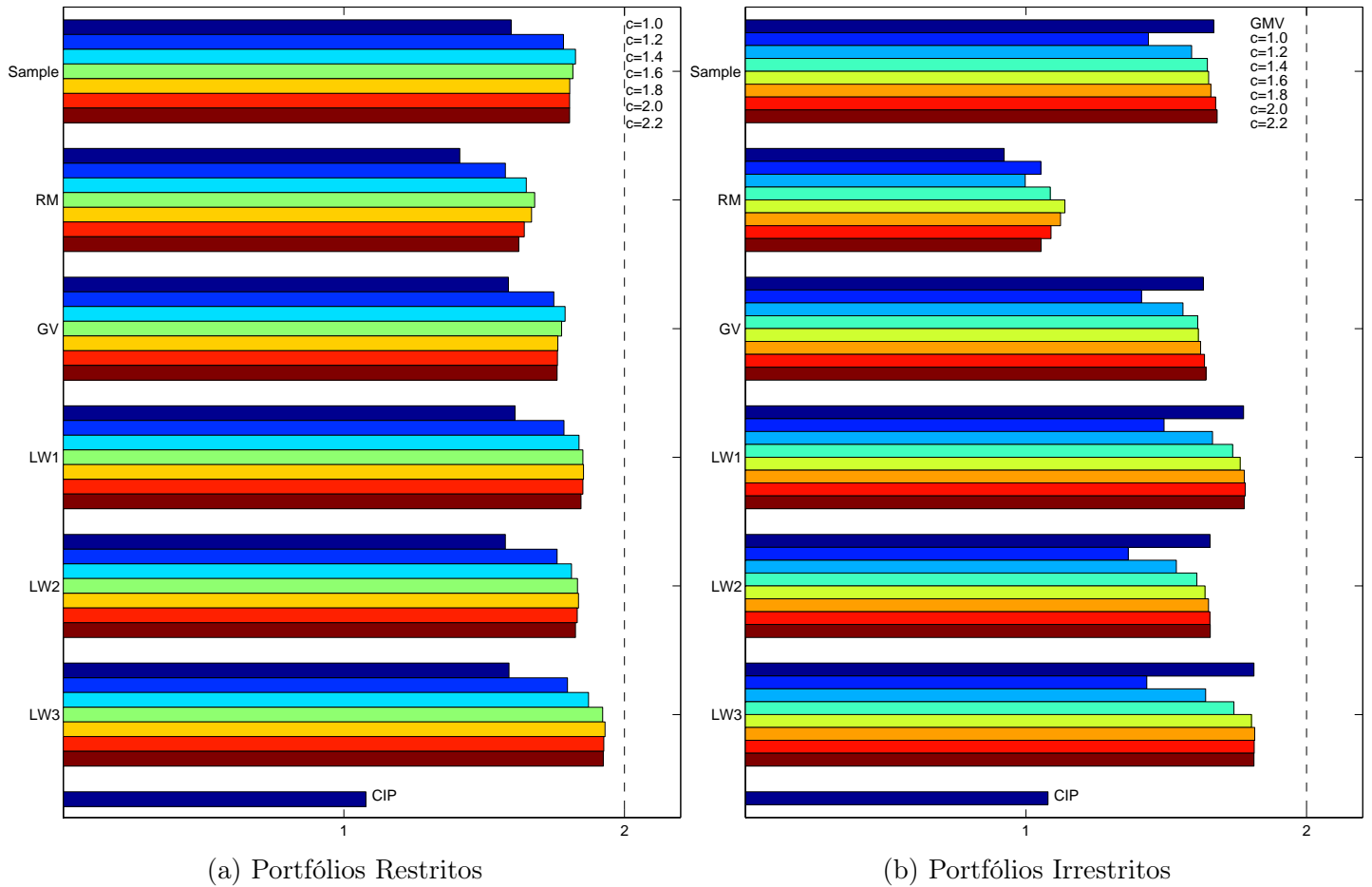
Tabela 3 – Desempenho das carteiras de variância mínima com rebalanceamento mensal

	Carteiras Irrestritas				Carteiras Restritas ($w_i \leq 0.15$)			
	Média (%)	SD (%)	Sharpe	Turnover	Média (%)	SD (%)	Sharpe	Turnover
<i>Painel A: Matriz de Covariância Amostral</i>								
GMV	26.29	15.75*	1.67	0.042				
$c = 1.0$	22.42	15.61	1.44	0.012	24.55	15.38	1.60	0.011
$c = 1.2$	23.98	15.08*	1.59*	0.017	26.24	14.72*	1.78*	0.015
$c = 1.4$	24.60	14.94*	1.65*	0.021	26.66	14.60*	1.83*	0.019
$c = 1.6$	24.78	15.01*	1.65*	0.025	26.65	14.67*	1.82*	0.023
$c = 1.8$	25.17	15.18*	1.66	0.030	26.87	14.89*	1.81*	0.028
$c = 2.0$	25.77	15.37	1.68	0.034	27.29	15.13	1.80*	0.032
$c = 2.2$	26.12	15.54	1.68	0.037	27.63	15.31	1.80*	0.036
<i>Painel B: Estimador Risk Metrics</i>								
GMV	21.79	23.62*	0.92*	0.220				
$c = 1.0$	18.69	17.75	1.05	0.042	22.96	16.25	1.41	0.037
$c = 1.2$	18.66	18.71	1.00	0.056	25.45	16.15	1.58	0.051
$c = 1.4$	19.95	18.35	1.09	0.065	26.74	16.20	1.65	0.061
$c = 1.6$	20.68	18.16	1.14	0.075	27.54	16.39	1.68	0.070
$c = 1.8$	20.33	18.10	1.12	0.084	27.75	16.63	1.67	0.080
$c = 2.0$	19.91	18.28*	1.09	0.093	27.91	16.99*	1.64	0.089
$c = 2.2$	19.62	18.61*	1.05	0.103	28.27	17.41*	1.62	0.098
<i>Painel C: Estimador GARCH Vech</i>								
GMV	25.79	15.80*	1.63	0.042				
$c = 1.0$	22.04	15.61	1.41*	0.012	24.45	15.41	1.59	0.011
$c = 1.2$	23.55	15.10*	1.56*	0.017	25.78	14.75*	1.75*	0.016
$c = 1.4$	24.12	14.96*	1.61*	0.021	26.18	14.64*	1.79*	0.020
$c = 1.6$	24.26	15.03*	1.61	0.026	26.12	14.71*	1.78*	0.024
$c = 1.8$	24.66	15.20*	1.62	0.030	26.29	14.92*	1.76*	0.028
$c = 2.0$	25.20	15.40	1.64	0.034	26.69	15.15	1.76*	0.033
$c = 2.2$	25.57	15.58	1.64	0.038	27.02	15.35	1.76	0.036
<i>Painel D: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004a)</i>								
GMV	26.44	14.89	1.78	0.026				
$c = 1.0$	22.92	15.36*	1.49	0.011	24.69	15.33	1.61*	0.010
$c = 1.2$	24.63	14.79*	1.67*	0.015	26.20	14.68*	1.78*	0.014
$c = 1.4$	25.41	14.63*	1.74*	0.018	26.69	14.52*	1.84*	0.018
$c = 1.6$	25.85	14.66*	1.76*	0.022	26.97	14.56*	1.85*	0.021
$c = 1.8$	26.27	14.77*	1.78*	0.024	27.26	14.70*	1.85*	0.024
$c = 2.0$	26.45	14.84*	1.78*	0.026	27.40	14.79*	1.85*	0.025
$c = 2.2$	26.45	14.88*	1.78*	0.026	27.37	14.83*	1.85*	0.026
<i>Painel E: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2004b)</i>								
GMV	25.16	15.19	1.66	0.026				
$c = 1.0$	21.27	15.58	1.36*	0.012	24.02	15.25	1.58	0.010
$c = 1.2$	23.15	15.07*	1.54	0.016	25.79	14.66*	1.76*	0.014
$c = 1.4$	24.01	14.93*	1.61	0.019	26.31	14.53*	1.81*	0.017
$c = 1.6$	24.54	14.98*	1.64	0.022	26.74	14.59*	1.83*	0.020
$c = 1.8$	24.90	15.08*	1.65	0.025	27.06	14.74*	1.84*	0.023
$c = 2.0$	25.07	15.15*	1.66	0.026	27.19	14.84*	1.83*	0.024
$c = 2.2$	25.15	15.18*	1.66	0.026	27.21	14.90*	1.83*	0.025
<i>Painel F: Estimador de Encolhimento de Ledoit-Wolf (2003)</i>								
GMV	26.18	14.45*	1.81*	0.019				
$c = 1.0$	22.08	15.43*	1.43	0.010	24.26	15.27	1.59	0.010
$c = 1.2$	24.16	14.73*	1.64*	0.013	26.15	14.55*	1.80*	0.012
$c = 1.4$	25.17	14.45*	1.74*	0.015	26.77	14.30*	1.87*	0.015
$c = 1.6$	25.99	14.41*	1.80*	0.017	27.44	14.28*	1.92*	0.017
$c = 1.8$	26.19	14.43*	1.82*	0.018	27.65	14.32*	1.93*	0.018
$c = 2.0$	26.19	14.44*	1.81*	0.019	27.62	14.34*	1.93*	0.018
$c = 2.2$	26.18	14.45*	1.81*	0.019	27.61	14.35*	1.92*	0.018
Estratégia Passiva								
1/N	24.07	23.83	1.01	0.004				
IBOV	18.16	31.34	0.58	–				
CDI	14.51	0.25	–	–				

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: A tabela apresenta a média anual dos retornos da carteira, a média anual do desvio-padrão da carteira, o índice de Sharpe anualizado médio e o *portfolio turnover* das carteiras de variância mínima considerando diferentes níveis de restrição da exposição bruta e a presença ou ausência de restrições individuais a ativos com os seguintes estimadores para a matriz de covariância: covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH Vech VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2004a) (LW1), Ledoit e Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit e Wolf (2003) (LW3). O modelo *benchmark* é a carteira de variância mínima sem restrição individual dos ativos, nível de exposição bruta igual a $c = 1.0$ e estimador amostral da matriz de covariância. O asterisco (*) representa a diferença estatisticamente significante entre os desvios-padrão das carteiras e índices de Sharpe em relação àqueles obtidos pelo modelo *benchmark*.

Figura 3 – Índice de Sharpe Anualizado com Rebalanceamento Mensal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: As figuras apresentam o índice de Sharpe anualizado médio das carteiras de variância mínima considerando diferentes níveis de restrição da exposição bruta e a presença ou ausência de restrições individuais a ativos com os seguintes estimadores para a matriz de covariância: covariância amostral (Sample), *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2004a) (LW1), Ledoit e Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit e Wolf (2003) (LW3).

4.2 Valor Econômico dos Portfólios

Esta seção apresenta os resultados da análise do valor econômico associado à utilização de uma determinada política de seleção de carteiras. Para comparar o desempenho de uma determinada política de portfólio com o modelo *benchmark* é calculada a taxa de performance máxima, Δ_γ , que um investidor avesso ao risco estaria disposto a pagar para mudar do modelo *benchmark* para a outra estratégia de seleção de carteiras. A medida de performance, Δ_γ , é expressa em pontos base, anualizada, e é calculada para o período fora da amostra considerado.

As tabelas 4 e 5 apresentam a taxa máxima que um investidor com utilidade quadrática e coeficiente de aversão ao risco constante $\gamma = 1$ e $\gamma = 10$, respectivamente, estaria disposto a pagar para mudar da estratégia *benchmark* para a política de investimento alternativa considerada. A estratégia *benchmark* é carteira de variância mínima com restrição de exposição bruta $c = 1.0$, sem restrição para ativos individuais e matriz de covariância amostral. Nas linhas das tabelas 4 e 5, a taxa Δ_γ varia de acordo com cada um dos estimadores da matriz de covariâncias considerados mas mantendo fixo o nível de restrição sobre a norma do vetor de alocações. Já nas colunas, Δ_γ varia de acordo com o nível de restrição para um dado estimador da matriz de covariâncias.

O interessante das tabelas 4 e 5 é que elas apresentam uma medida de valor econômico baseado em utilidade, o que nos permite observar a substituição entre média e variância de retorno dos agentes analisados. A função de utilidade usada para a construção dos dados das tabelas 4 e 5 é a equação (3.57), que é uma otimização de média-variância. No entanto, quando a carteira de mínima variância é otimizada, ignoram-se os retornos e apenas a variância interessa para esse processo. Dessa forma, o agente que analisamos nem sempre vai pagar uma taxa maior pela carteira com menor variância. Ele vai analisar o *trade-off* entre média e variância e, de acordo com o seu coeficiente de aversão ao risco, selecionar qual taxa ele está disposto a pagar para abandonar a carteira de *benchmark* e selecionar a carteira alternativa apresentada.

Os resultados apresentados nas tabelas 4 e 5 corroboram com os resultados das tabelas 1 a 3. Nota-se que quando se considera os estimadores GV, LW1, LW2 e LW3, em todos o investidor está disposto a pagar uma taxa para adotar a política de investimento alternativa (exceto quando $c = 1.0$ para esses estimadores) e que essa taxa de performance assume valor máximo para valores de $c = 1.4$ e $c = 1.6$, o que está de acordo com o que foi observado anteriormente. Esse resultado fica ainda mais evidente quando eleva-se o coeficiente de aversão ao risco γ . Por exemplo, um investidor com coeficiente de aversão ao risco $\gamma = 1$ está disposto a pagar uma taxa anualizada de 313 pontos base para mudar da estratégia *benchmark* para a carteira que utiliza $c = 1.6$, sem restrições aos ativos individuais e o estimador LW3. Se considerarmos o coeficiente de aversão ao risco

$\gamma = 10$, o investidor estaria disposto a pagar uma taxa anualizada de 468 pontos base para realizar a mesma troca. Nota-se também que quando são consideradas as restrições sobre concentração excessiva a ativos individuais a taxa de performance que o investidor está disposto a pagar para trocar a estratégia *benchmark* pela alternativa é maior do que no caso de carteiras irrestritas, em média 150 pontos base.

Na tabela 4, com coeficiente de aversão ao risco $\gamma = 1$, as maiores taxas a serem pagas são, para as frequências diária, semanal e mensal, a matriz de covariância de Ledoit e Wolf (2003) (LW3) com restrição de exposição bruta $c = 1.6$ e com restrição individual de ativos $|w_i| \leq 0.15$, a matriz de covariância LW3 com restrição de exposição bruta $c = 1.8$ e com restrição individual de ativos $|w_i| \leq 0.15$ e a matriz de covariância *RiskMetrics* com restrição de exposição bruta $c = 2.2$ e com restrição individual de ativos $|w_i| \leq 0.15$.

Nesta tabela, é possível observar que o valor da taxa paga pelo investidor para mudar de estratégia é mais alta quando se usa as restrições individuais dos ativos. Também pode ser notado que o estimador de covariância de Ledoit e Wolf (2003), geralmente, recebe uma taxa maior para abandonar a estratégia de *benchmark* quando as frequências e os níveis de exposição bruta das carteiras são mantidos constantes. Outra característica da tabela 4 é que as maiores taxas pagas pela troca de estratégia são encontradas quando a restrição de exposição bruta tem o valor de $c = 1.4$ e $c = 1.6$ para frequência diária; $c = 1.8$ a $c = 2.2$ para frequência semanal; e $c = 2.0$ e $c = 2.2$ com frequência mensal.

Quando $\gamma = 10$, esperamos que o investidor pague mais pela segurança que quando $\gamma = 1$. Dessa forma, os portfólios menos arriscados terão um “preço” maior. Na tabela 5, com coeficiente de aversão ao risco $\gamma = 10$, as maiores taxas a serem pagas são, para as frequências diária, semanal e mensal, a matriz de covariância de Ledoit e Wolf (2003) com restrição de exposição bruta $c = 1.6$ e com restrição individual de ativos $|w_i| \leq 0.15$, a matriz de covariância de Ledoit e Wolf (2003) com restrição de exposição bruta $c = 1.6$ e com restrição individual de ativos $|w_i| \leq 0.15$ e a matriz de covariância Ledoit e Wolf (2003) com restrição de exposição bruta $c = 1.8$ e com restrição individual de ativos $|w_i| \leq 0.15$.

Nesta tabela, assim como na tabela 4, é possível observar que o valor da taxa paga pelo investidor para mudar de estratégia é mais alta quando se usa as restrições individuais dos ativos e que o estimador de covariância de Ledoit e Wolf (2003), geralmente, recebe uma taxa maior para abandonar a estratégia de *benchmark* quando as frequências e os níveis de exposição bruta das carteiras são mantidos constantes. Também é possível notar que as maiores taxas pagas pela troca de estratégia são encontradas quando a restrição de exposição bruta tem o valor de $c = 1.4$ a $c = 1.8$ para todas as frequências.

Como foi dito anteriormente, quando $\gamma = 1$, o investidor é menos avesso ao risco e substituirá média de retorno por desvio padrão mais facilmente, o que explica os valores

maiores da restrição de exposição bruta na tabela 4. Se as taxas pagas por um agente com aversão ao risco muito alta, como por exemplo $\gamma = 100$, fossem analisadas, seria observado que ele sempre pagaria taxas maiores por estratégias com o menor risco possível. Nas tabelas 1 a 3 foi observado que as estratégias com menor risco são quando a restrição de exposição bruta da carteira tem um valor de $c = 1.4$ a $c = 1.8$. Dessa forma, o agente com $\gamma = 100$ pagaria taxas mais elevadas para esses valores de exposição bruta das carteiras.

Cabe notar que cada frequência de rebalanceamento tem seu *benchmark* próprio. Assim, não é possível comparar as taxas a serem pagas para as diferentes frequências. De qualquer forma, é interessante observar que, quando a frequência de rebalanceamento diminui, os pesos evoluem mais livremente e não se consegue obter uma volatilidade menor da carteira, o que faz com que o investidor pague mais por portfólios com c maior.

Tabela 4 – O valor econômico da previsão de volatilidade ($\gamma = 1$)

	Carteiras Irrestritas						Carteiras Restritas ($w_i \leq 0.15$)					
	Amostral	RM	GV	LW1	LW2	LW3	Amostral	RM	GV	LW1	LW2	LW3
<i>Painel A: Ajustamento Diário</i>												
GMV	120.36	-7.75	156.20	234.42	129.58	301.05						
$c = 1.0$	0.00	-52.64	-18.21	72.11	-118.51	-24.51	204.12	140.37	208.88	247.08	157.17	192.68
$c = 1.2$	142.80	-77.30	143.75	218.48	42.80	174.22	360.58	214.22	355.70	363.77	325.85	372.87
$c = 1.4$	188.44	-120.51	197.09	263.45	96.33	264.46	390.22	142.56	390.14	397.06	344.98	440.13
$c = 1.6$	162.78	-115.90	171.27	260.14	132.95	313.28	363.44	157.57	368.42	385.82	379.94	487.31
$c = 1.8$	143.95	-99.06	157.37	259.52	133.61	312.86	337.68	148.03	349.58	377.71	388.81	484.77
$c = 2.0$	152.60	-132.45	166.07	253.39	141.42	303.63	328.97	133.08	344.14	363.78	380.37	475.53
$c = 2.2$	146.65	-223.26	171.24	239.00	134.29	301.09	318.94	133.77	340.47	344.98	365.26	472.29
<i>Painel B: Ajustamento Semanal</i>												
GMV	201.76	18.32	180.62	285.79	192.81	323.37						
$c = 1.0$	0.00	-179.76	-32.99	50.23	-113.43	-30.44	218.04	31.82	213.37	229.04	171.86	178.02
$c = 1.2$	152.08	-126.72	124.78	219.58	66.95	181.59	382.20	215.45	356.67	377.87	356.25	390.56
$c = 1.4$	206.95	-100.38	186.08	272.45	124.16	266.23	420.39	216.44	400.79	406.06	378.89	446.61
$c = 1.6$	196.62	-68.15	176.02	284.99	169.40	322.73	393.22	246.67	375.12	415.42	416.69	501.09
$c = 1.8$	195.82	-122.76	178.63	298.18	188.39	332.15	394.28	238.10	374.07	419.06	442.61	507.59
$c = 2.0$	216.33	-148.61	189.07	299.64	199.96	325.59	397.95	245.74	371.36	414.20	447.93	499.19
$c = 2.2$	218.60	-165.59	195.90	288.97	194.95	323.39	394.87	250.51	370.43	399.40	434.93	496.83
<i>Painel C: Ajustamento Mensal</i>												
GMV	384.46	-220.31	333.82	412.56	280.01	393.44						
$c = 1.0$	0.00	-408.73	-38.26	54.03	-115.03	-31.65	216.45	44.06	205.64	231.04	165.85	188.85
$c = 1.2$	164.13	-429.19	120.62	233.19	81.21	187.17	395.21	293.93	349.19	391.55	351.70	388.81
$c = 1.4$	228.06	-294.17	179.87	313.28	169.73	292.16	438.96	421.99	390.18	443.45	405.18	454.85
$c = 1.6$	244.91	-217.36	193.11	357.08	221.11	374.55	437.30	499.09	383.66	470.66	447.30	521.79
$c = 1.8$	281.92	-251.27	229.69	397.43	255.48	394.90	455.85	516.57	397.45	497.66	477.42	542.11
$c = 2.0$	338.08	-296.49	281.01	414.19	272.26	394.04	494.61	526.27	433.70	509.83	488.10	539.18
$c = 2.2$	371.30	-331.88	315.48	414.03	279.12	393.46	525.51	554.70	464.14	506.24	489.20	537.61

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: Esta tabela apresenta a taxa anualizada, Δ_γ , em pontos base, que um investidor com utilidade quadrática e coeficiente de aversão ao risco constante $\gamma = 1$ estaria disposto a pagar para mudar da estratégia *benchmark*. A estratégia *benchmark* é carteira de variância mínima com restrição de exposição bruta $c = 1.0$, sem restrição para ativos individuais e matriz de covariância amostral. Nas linhas desta tabela, a taxa Δ_γ varia de acordo com cada um dos estimadores considerados, covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH VECM VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2004a) (LW1), Ledoit e Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit e Wolf (2003) (LW3). Já nas colunas desta tabela, a taxa Δ_γ varia de acordo com a exposição bruta da carteira, sem haver comparação entre as frequências de rebalanceamento.

Tabela 5 – O valor econômico da previsão de volatilidade ($\gamma = 10$)

	Carteiras Irrestritas						Carteiras Restritas ($w_i \leq 0.15$)					
	Amostral	RM	GV	LW1	LW2	LW3	Amostral	RM	GV	LW1	LW2	LW3
<i>Painel A: Ajustamento Diário</i>												
GMV	110.02	-1247.90	141.73	344.34	182.99	450.65						
$c = 1.0$	0.00	-160.04	-21.48	109.50	-127.25	-1.57	249.47	128.56	251.91	292.54	206.14	256.21
$c = 1.2$	213.97	-332.46	213.76	334.00	106.06	291.06	490.24	228.50	483.12	498.82	457.67	528.44
$c = 1.4$	280.32	-338.77	286.84	401.67	181.94	415.88	534.89	126.41	531.63	552.80	496.79	626.63
$c = 1.6$	246.44	-309.08	253.22	396.72	212.75	468.69	500.12	102.73	502.97	538.23	525.21	675.52
$c = 1.8$	206.23	-305.88	218.55	383.40	199.83	465.41	449.38	43.53	460.22	514.24	514.31	666.58
$c = 2.0$	189.85	-378.97	201.73	369.10	200.64	453.95	411.52	-23.34	424.98	489.36	494.25	653.45
$c = 2.2$	162.57	-527.82	184.36	350.56	189.91	450.71	376.75	-85.25	395.27	464.98	472.39	649.33
<i>Painel B: Ajustamento Semanal</i>												
GMV	183.30	-1214.14	157.42	389.34	243.05	468.62						
$c = 1.0$	0.00	-340.32	-35.08	88.39	-121.55	-8.90	259.77	24.79	256.55	275.12	219.99	240.34
$c = 1.2$	222.16	-359.96	193.56	334.87	130.96	297.52	511.85	226.49	483.96	513.46	490.46	545.33
$c = 1.4$	294.34	-281.25	272.20	408.23	208.49	415.02	562.82	198.47	540.59	560.05	531.90	631.35
$c = 1.6$	274.56	-241.24	252.77	417.59	247.02	474.60	526.17	190.92	506.77	564.55	561.52	686.29
$c = 1.8$	252.13	-305.47	233.56	416.10	252.41	480.08	500.53	133.26	479.04	549.60	567.04	684.90
$c = 2.0$	245.68	-366.28	217.26	408.80	256.59	471.47	472.28	87.49	444.01	532.74	559.97	672.45
$c = 2.2$	226.05	-442.28	201.33	394.18	247.45	468.66	443.23	29.15	416.42	512.71	539.80	669.58
<i>Painel C: Ajustamento Mensal</i>												
GMV	364.57	-1652.98	306.25	512.09	337.76	551.91						
$c = 1.0$	0.00	-732.99	-38.75	88.57	-111.55	-6.74	248.43	-48.56	233.25	269.47	216.27	235.97
$c = 1.2$	237.55	-914.11	191.55	345.75	155.92	308.51	517.33	215.41	467.47	518.90	482.21	533.38
$c = 1.4$	320.44	-718.23	269.35	447.47	264.37	449.61	576.69	336.00	523.41	591.72	553.28	632.03
$c = 1.6$	328.33	-609.57	273.50	487.38	308.43	537.77	565.56	385.20	507.41	613.53	586.71	702.51
$c = 1.8$	342.36	-632.49	287.01	512.69	328.86	555.61	555.78	366.51	493.30	622.03	597.20	716.78
$c = 2.0$	371.12	-708.12	310.38	520.02	336.83	553.47	561.97	322.06	497.39	622.24	593.84	711.51
$c = 2.2$	381.09	-799.57	319.84	515.36	339.17	551.93	566.77	283.56	499.68	613.44	586.71	709.31

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota: Esta tabela apresenta a taxa anualizada, Δ_γ , em pontos base, que um investidor com utilidade quadrática e coeficiente de aversão ao risco constante $\gamma = 10$ estaria disposto a pagar para mudar da estratégia *benchmark*. A estratégia *benchmark* é carteira de variância mínima com restrição de exposição bruta $c = 1.0$, sem restrição para ativos individuais e matriz de covariância amostral. Nas linhas desta tabela, a taxa Δ_γ varia de acordo com cada um dos estimadores considerados, covariância amostral, *RiskMetrics* (RM), GARCH VECH VT Scalar (GV), estimador de encolhimento de Ledoit e Wolf (2004a) (LW1), Ledoit e Wolf (2004b) (LW2) e Ledoit e Wolf (2003) (LW3). Já nas colunas desta tabela, a taxa Δ_γ varia de acordo com a exposição bruta da carteira, sem haver comparação entre as frequências de rebalanceamento.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho foi realizado um estudo empírico sobre o problema de seleção de carteiras de variância mínima com restrições nas normas das exposições brutas como proposto por Fan, Zhang e Yu (2012). No capítulo 2, a literatura relevante foi discutida, e o contexto em que este trabalho se insere foi apresentado. No capítulo 3, a metodologia utilizada ao longo do estudo empírico foi exposta. No quarto capítulo, os resultados do estudo empírico foram apresentados e discutidos.

Sobre as restrições de ativos individuais, a conclusão deste trabalho foi que elas melhoraram o desempenho fora da amostra das carteiras analisadas. Essas restrições melhoram a carteira em todos os aspectos analisados nesse trabalho: elas diminuem o *turnover* da carteira, aumentam a média dos retornos, diminuem o risco associado e, assim, aumentam o índice de Sharpe das carteiras analisadas. Além disso, as restrições individuais aumentam o valor da taxa que um investidor está disposto a pagar pela mudança de estratégia na avaliação econômica baseada em utilidade quadrática de Fleming, Kirby e Ostdiek (2001).

As restrições da norma do vetor de alocação diminuíram o desvio padrão dos portfólios para todas as frequências de rebalanceamento e estimadores de matriz de covariância analisados, apresentando um ponto ótimo entre os valores $c = 1.4$ e $c = 1.8$. Dessa forma, esses são os melhores valores para se executar a minimização de variância. Esses níveis de restrição também apresentam *turnover* de carteira menor que as carteiras GMV para o mesmo estimador de matriz de covariância e mesma frequência de rebalanceamento. Isso permite que o investidor tenha um risco associado à carteira menor que os métodos tradicionais (carteiras GMV e *long-only*), ao mesmo tempo que o investidor incorra em menores custos de transação associados a sua carteira. Os valores entre $c = 1.4$ e $c = 1.8$ para a restrição de exposição bruta das carteiras também chamam a atenção para a carteira 130/30, a qual é amplamente utilizada por participantes do mercado como evidenciado em Lo e Patel (2008) e Gastineau (2008).

Em relação ao índice de Sharpe, as restrições de exposição bruta funcionam melhor com as frequências de rebalanceamento diária e semanal. Isso ocorre porque, quando o rebalanceamento é menos frequente, a evolução dos pesos leva as carteiras selecionadas a desprezarem as restrições que foram impostas quando a carteira foi otimizada, e isso leva a um desempenho desfavorável. Dessa forma, uma regra de rebalanceamento como uma janela de controle, em vez de intervalos de tempo definidos, pode melhorar o desempenho das carteiras selecionadas.

Um aspecto positivo sobre as restrições de exposição da bruta apresentadas nesse

trabalho é que, além de elas aumentarem o índice de Sharpe, elas diminuem o *turnover* da carteira, o que, no final, permite que o investidor fique com os ganhos associados à carteira sem incorrer em custos maiores de rebalanceamento com ela. Além disso, dependendo do estimador de covariância, um valor de restrição de exposição bruta entre $c = 1.4$ e $c = 1.6$ com frequência semanal pode fornecer um *turnover* com valor menor ou igual ao portfólio GMV do estimador amostral com rebalanceamento mensal.

Finalizando, pelo que foi exposto acima, a otimização de carteiras com restrição das normas dos vetores de alocação é uma alternativa viável aos métodos tradicionais de otimização de carteira. Essa abordagem restringe a soma das posições vendidas da carteira e, junto com restrições individuais de ativos, ela evita que as carteiras tomem posições muito extremas, o que melhora o desempenho delas fora da amostra ao mesmo tempo que diminui os custos de transação da carteira.

REFERÊNCIAS

- BEST, M. J.; GRAUER, R. R. The efficient set mathematics when mean-variance problems are subject to general linear constraints. *Journal of Economics and Business*, v. 42, n. 2, p. 105–120, May 1990.
- BEST, M. J.; GRAUER, R. R. On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. *Review of Financial Studies*, v. 4, n. 2, p. 315–42, 1991.
- BEST, M. J.; GRAUER, R. R. Sensitivity Analysis for Mean-Variance Portfolio Problems. *Management Science*, v. 37, n. 8, p. 980–989, Aug. 1991.
- BLACK, F.; LITTERMAN, R. Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal*, v. 48, n. 5, p. 28–43, Sept./Oct. 1992.
- BOARD, J.; SUTCLIFFE, C.; ZIEMBA, W. Portfolio selection: markowitz mean-variance model/portfolio selection: Markowitz mean-variance model. In: FLOUDAS, C.; PARDALOS, P. (Ed.). *Encyclopedia of Optimization*. [S.l.]: Springer US, 2001. p. 1992–1998.
- BRANDT, M. W. Portfolio choice problems. In: HANSEN, Y. A.-S. P. (Ed.). *Handbook of Financial Econometrics*. San Diego: North-Holland, 2010, (Handbooks in Finance, v. 1). p. 269 – 336.
- BRENNAN, M. capital asset pricing model. In: DURLAUF, S. N.; BLUME, L. E. (Ed.). *The New Palgrave Dictionary of Economics*. Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2008.
- BROADIE, M. Computing efficient frontiers using estimated parameters. *Annals of Operations Research*, v. 45, n. 1, p. 21–58, 1993.
- BRODIE, J. et al. Sparse and stable markowitz portfolios. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 106, n. 30, p. 12267–12272, 2009.
- CALDEIRA, J.; MOURA, G.; SANTOS, A. Seleção de carteiras utilizando o modelo fama-french-carhart. *Revista Brasileira de Economia*, Rio de Janeiro, v. 67, n. 1, p. 45 – 65, Março 2013.
- CAMPBELL, J.; LO, A.; MACKINLAY, A. *The Econometrics of Financial Markets*. [S.l.]: Princeton University Press, 1997.
- CERIA, S.; STUBBS, R. Incorporating estimation errors into portfolio selection: Robust portfolio construction. *Journal of Asset Management*, v. 7, n. 2, p. 109–127, 2006.
- CHAN, L.; KARCESKI, J.; LAKONISHOK, J. On portfolio optimization: forecasting covariances and choosing the risk model. *Review of Financial Studies*, v. 12, n. 5, p. 937–974, 1999.
- CHOPRA, V. K.; ZIEMBA, W. T. The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *Journal of Portfolio Management*, v. 19, n. 2, p. 6–11, 1993.

- CORNUEJOLS, G.; TÜTÜNCÜ, R. *Optimization Methods in Finance*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- DEMIGUEL, V. et al. A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. *Management Science*, v. 55, n. 5, p. 798–812, May 2009.
- DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1-N Portfolio Strategy? *Review of Financial Studies*, v. 22, n. 5, p. 1915–1953, May 2009.
- DEMIGUEL, V.; NOGALES, F. J. Portfolio selection with robust estimation. *Operations Research*, v. 57, n. 3, p. 560–577, 2009.
- DEPOOTER, M.; MARTENS, M.; DIJK, D. van. Predicting the Daily Covariance Matrix for S&P 100 Stocks Using Intraday Data—But Which Frequency to Use? *Econometric Reviews*, v. 27, n. 1-3, p. 199–229, 2008.
- ENGLE, R.; SHEPPARD, K. *Evaluating the specification of covariance models for large portfolios*. [S.l.], 2008.
- FAN, J.; FAN, Y.; LV, J. High dimensional covariance matrix estimation using a factor model. *Journal of Econometrics*, v. 147, n. 1, p. 186–197, Nov. 2008.
- FAN, J.; ZHANG, J.; YU, K. Vast portfolio selection with gross-exposure constraints. *Journal of the American Statistical Association*, v. 107, n. 498, p. 592–606, 2012.
- FLEMING, J.; KIRBY, C.; OSTDIEK, B. The Economic Value of Volatility Timing. *Journal of Finance*, v. 56, n. 1, p. 329–352, Feb. 2001.
- FLEMING, J.; KIRBY, C.; OSTDIEK, B. The economic value of volatility timing using realized volatility. *Journal of Financial Economics*, v. 67, n. 3, p. 473–509, Mar. 2003.
- FRANCQ, C.; HORVATH, L.; ZAKOÏAN, J.-M. Merits and drawbacks of variance targeting in garch models. *Journal of Financial Econometrics*, v. 9, n. 4, p. 619–656, 2011.
- GARLAPPI, L.; UPPAL, R.; WANG, T. Portfolio Selection with Parameter and Model Uncertainty: A Multi-Prior Approach. *Review of Financial Studies*, v. 20, n. 1, p. 41–81, 2007.
- GASTINEAU, G. L. The short side of 130/30 investing. *The Journal of Portfolio Management*, v. 34, n. 2, p. 39–52, Jan. 2008.
- GOLDFARB, D.; IYENGAR, G. Robust portfolio selection problems. *Math. Oper. Res.*, v. 28, n. 1, p. 1–38, 2003.
- GRANT, M.; BOYD, S. *CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1*. 2014.
- GREEN, R. C.; HOLLIFIELD, B. When Will Mean-Variance Efficient Portfolios Be Well Diversified? *Journal of Finance*, v. 47, n. 5, p. 1785–809, Dec. 1992.
- JACOBS, B. I.; LEVY, K. N. Enhanced active equity strategies. *The Journal of Portfolio Management*, v. 32, n. 3, p. 45–55, Jan. 2006.

- JAGANNATHAN, R.; MA, T. Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. *Journal of Finance*, v. 58, n. 4, p. 1651–1684, Aug. 2003.
- KLEIN, R. W.; BAWA, V. S. The effect of estimation risk on optimal portfolio choice. *Journal of Financial Economics*, v. 3, n. 3, p. 215–231, 1976.
- KLEIN, R. W.; BAWA, V. S. The effect of limited information and estimation risk on optimal portfolio diversification. *Journal of Financial Economics*, v. 5, n. 1, p. 89 – 111, 1977.
- KOLM, P. N.; TütüNCü, R.; FABOZZI, F. J. 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 356 – 371, 2014.
- KRITZMAN, M. Invited editorial comment. *The Journal of Portfolio Management*, v. 37, n. 2, p. 3–5, Jan. 2011.
- KRITZMAN, M.; PAGE, S.; TURKINGTON, D. In defense of optimization: The fallacy of 1/ n. *Financial Analysts Journal*, v. 66, n. 2, p. 31–39, Feb. 2010.
- LEDOIT, O.; WOLF, M. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, v. 10, n. 5, p. 603–621, Dec. 2003.
- LEDOIT, O.; WOLF, M. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 88, n. 2, p. 365–411, Feb. 2004.
- LEDOIT, O.; WOLF, M. Honey, i shrunk the sample covariance matrix. *The Journal of Portfolio Management*, v. 30, n. 4, p. 110–119, 2004.
- LEDOIT, O.; WOLF, M. Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. *Journal of Empirical Finance*, v. 15, n. 5, p. 850–859, Dec. 2008.
- LIU, Q. On portfolio optimization: How and when do we benefit from high-frequency data? *Journal of Applied Econometrics*, v. 24, n. 4, p. 560–582, 2009.
- LO, A. W.; PATEL, P. N. 130/30: The new long-only. *The Journal of Portfolio Management*, v. 34, n. 2, p. 12–38, Jan. 2008.
- MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, Mar. 1952.
- MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: Yale University Press, 1959. (Cowles Commission for Research in Economics: Monographs).
- MARKOWITZ, H. Mean–variance approximations to expected utility. *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, p. 346 – 355, 2014. 60 years following Harry Markowitz’s contribution to portfolio theory and operations research.
- MARKOWITZ, H. M. Foundations of Portfolio Theory. *Journal of Finance*, v. 46, n. 2, p. 469–77, June 1991.
- MENDES, B.; LEAL, R. Robust multivariate modeling in finance. *International Journal of Managerial Finance*, v. 1, n. 2, p. 95–106, 2005.

- MERTON, R. C. On estimating the expected return on the market : An exploratory investigation. *Journal of Financial Economics*, v. 8, n. 4, p. 323–361, Dec. 1980.
- MICHAUD, R. O. The markowitz optimization enigma: Is ‘Optimized’ optimal? *Financial Analysts Journal*, v. 45, n. 1, p. 31–42, Jan. 1989.
- NETO, C. T.; LEAL, R. P. C.; ALMEIDA, V. d. S. e. Um índice de mínima variância de ações brasileiras. *Economia Aplicada*, v. 15, p. 535 – 557, 2011.
- PESARAN, M.; ZAFFARONI, P. *Optimal Asset Allocation with Factor Models for Large Portfolios*. [S.l.], 2008. Disponível em: <<http://www3.imperial.ac.uk/pls/portallive/docs/1/49997704.PDF>>. Acesso em: 8 jun. 2014.
- POLITIS, D. N.; ROMANO, J. P. The stationary bootstrap. *Journal of the American Statistical Association*, v. 89, n. 428, p. 1303–1313, 1994.
- RUBESAM, A.; BELTRAME, A. L. Carteiras de Variância Mínima no Brasil. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 11, n. 1, p. 81–118, 2013.
- RUBINSTEIN, M. Markowitz’s “portfolio selection”: A fifty-year retrospective. *The Journal of Finance*, v. 57, n. 3, p. 1041–1045, 2002.
- SANTOS, A. A. P.; TESSARI, C. Técnicas Quantitativas de Otimização de Carteiras Aplicadas ao Mercado de Ações Brasileiro. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 10, n. 3, p. 369–394, 2012.
- SHARPE, W. F. A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, v. 9, n. 2, p. 277–293, 1963.
- STEIN, C. *Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution*. Berkeley, Calif., 1956. 197–206 p.
- STEINBACH, M. Markowitz revisited: Mean-variance models in financial portfolio analysis. *SIAM Review*, v. 43, n. 1, p. 31–85, 2001.
- THORNTON, D. L.; VALENTE, G. Out-of-Sample Predictions of Bond Excess Returns and Forward Rates: An Asset Allocation Perspective. *Review of Financial Studies*, v. 25, n. 10, p. 3141–3168, 2012.
- TSAY, R. S. *Analysis of Financial Time Series*. 3. ed. Cambridge, Mass: Wiley, 2010.