MATEMÁTICA NA ESCOLA
10 ANOS DO PPGEMAT - UFRGS
20 A 22 DE OUTUBRO DE 2014 - PORTO ALEGRE/RS

MATEMÁTICA DINÂMICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA A PARTIR DE SITUAÇÕES GEOMÉTRICAS

Eliana Bevilacqua Salin[1]
UFRGS- msalin@uol.com.br
Maria Alice Gravina
UFRGS - gravina@mat.ufrgs.br

RESUMO

Este artigo apresenta um recorte de pesquisa de mestrado que tratou de investigar o papel dos registros de representação semiótica na construção do conceito de função, em particular daquelas do tipo afim e quadrática. Parte da pesquisa também foi investigar de que forma o uso de um software de matemática dinâmica, o GeoGebra, pode ajudar no processo de aprendizagem do tópico em questão. A metodologia de pesquisa utilizada é inspirada nos moldes da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996). É através de uma das atividades da sequência didática projetada e implementada em 2013, com turma de alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Porto Alegre, que vamos ilustrar como aconteceu o desenvolvimento de conexões múltiplas entre as diversas representações de uma função (algébrica, gráfica e numérica), bem como a importância do software GeoGebra como recurso pedagógico quando se quer trabalhar com múltiplas representações. As respostas apresentadas pelos alunos foram analisadas tendo como referência a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003). Os resultados quanto ao uso do GeoGebra foram positivos especialmente quanto às possibilidades de visualização e manipulação simultânea de diferentes registros de representação do mesmo objeto, este um funcionamento cognitivo que, segundo Duval, é uma das condições para a compreensão em matemática.

Palavras-Chave: Função; Matemática Dinâmica; Representação Semiótica; Engenharia Didática; Geogebra.

1. INTRODUÇÃO

O conceito de função exige um poder de abstração acentuado, por envolver diferentes tipos de representações, em contextos algébrico e geométrico. Mas mesmo com as dificuldades que se apresentam no ensino deste assunto, consideramos que se o professor levar em conta os pré-requisitos para aprender (ou ensinar) um determinado assunto, as dificuldades de aprendizagem (ou mesmo de ensino) podem ser minimizadas.

[1] Este trabalho conta com o apoio da CAPES.

No breve estudo histórico por nós realizado, percebe-se que o conceito de função passou por relevantes mudanças, desde a antiguidade até a Idade Moderna (BOYER, 1974). Constata-se, nesse processo evolutivo, a necessidade de formalizar o conceito de função, e a elaboração mais abstrata está no conceito apresentado por Bourbaki (1939), que trata uma função como um subconjunto de um produto cartesiano obedecendo à restrição de unicidade. Como consequência desta formalização, teve-se nas escolas o movimento da matemática moderna, que trouxe consigo uma ênfase no formalismo. Sob esta influência, nos livros há uma predominância da representação algébrica, uma ênfase às questões de domínio e contradomínio, de injetividade e sobrejetividade de uma função, em detrimento de situações que poderiam explorar as multiplicidades de representações a partir de um determinado problema em contexto mais concreto.

É na direção de uma outra alternativa para o ensino de funções, e considerando também a importância de se repensar a prática didática de modo a melhor acompanhar o processo de aprendizagem dos alunos, que se insere o trabalho de mestrado que dá origem a este artigo. A sequência de atividades, projetada como parte da pesquisa, visa provocar o desenvolvimento de conexões múltiplas entre diversas representações (algébricas, gráficas e numéricas), para funções afim e quadrática, e utiliza o software GeoGebra.

No que segue, nas diferentes seções, vamos tratar de questões teóricas e da implementação e análise de uma das atividades realizadas na experiência feita com uma turma de alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Porto Alegre. Os resultados da experiência nos parecem animadores e é isto que queremos evidenciar neste artigo, tomando como fonte de informação um recorte da experiência realizada.

2. REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

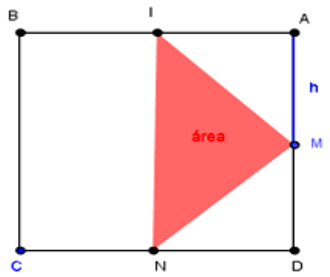
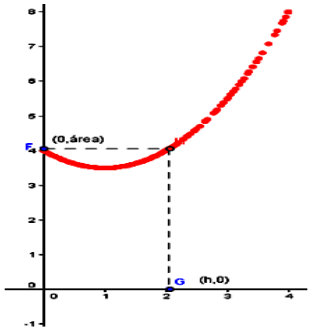
De acordo com Duval (2003), o sujeito só apropria-se de um determinado objeto matemático se recorrer à noção de representação, uma vez que a Matemática trabalha com objetos abstratos, seus conceitos, suas propriedades, suas estruturas, suas relações não são palpáveis. Esse autor também destaca a importância dos registros de representação semiótica na evolução do pensamento matemático, dizendo que “é suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição para a evolução do pensamento matemático” (Ibid., p. 13).

Ao afirmar que é através dos diferentes registros de representações semióticas e do trânsito entre eles que há compreensão matemática, Duval (2003, p. 30-31) sinaliza a importância de cuidadoso trabalho com as representações nas situações de aprendizagem. É necessário, no ensino da matemática, considerarmos as diferentes representações de um mesmo objeto, bem como a transição entre estas representações, pois estes procedimentos provocam as atividades cognitivas do pensamento. Ao pretender pesquisar sobre como o aluno articula os diferentes registros de representação para o entendimento das funções afim e quadrática, através de problemas em contexto geométrico, estaremos abordando não só o aspecto conceitual destes objetos, mas também formas de elaborar, resolver e representá-los matematicamente[2]. E, nestas resoluções e representações, o pensamento matemático é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos usados para representar os objetos e suas relações (GRANGER, 1979, p. 21).

No quadro 1, trazemos alguns exemplos de registros de representação semiótica que foram considerados na concepção da sequência de atividades utilizada na parte experimental de nosso trabalho.

[2] Ao introduzir a ideia de registro, Duval aprofunda as características de um sistema semiótico, ou seja, um sistema que, além de representar conceitos e ideias, tem regras de funcionamento, que permitem a realização de processos matemáticos que levam a novos conceitos e ideias.

Quadro 1: Exemplos de Registros de Representação Semiótica

Linguagem natural: textos escritos em língua portuguesa. Com regras convencionais de comunicação que permitem encontrar as informações ou dados para resolver o problema.	Da chapa metálica quadrada ABCD, com área 16m², deseja-se retirar a região triangular IMN, a fim de se obter uma chapa vazada. O corte será feito de modo que o vértice I coincida com o ponto médio do segmento AB, e tal que *AM* = *DN*. Onde devemos colocar M, para que o triângulo IMN tenha área mínima?
Geométrico (figura): é quando temos figuras geométricas. Com regras de tratamento que levam à identificação dos elementos pertinentes de uma figura.	
Geométrico (gráfico): é quando temos gráficos, no nosso caso cartesiano. Com regras de tratamento que permitem a identificação dos intervalos onde a função cresce/decresce e antecipação do resultado.	
Algébrico: é quando temos a escrita algébrica. Com suas regras de tratamento levam à resolução do problema.	$A(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4$

Fonte: as autoras

Ainda segundo Duval (2003), a compreensão da matemática depende de coordenação de pelo menos dois registros de representação. Para bem analisar o funcionamento cognitivo da compreensão matemática, ele destaca dois tipos de transformações que se fazem presentes quando se trabalha com sistemas de representação: o tratamento de uma representação e a conversão entre representações.

Quanto ao tratamento de uma representação: é a transformação de uma representação em outra, dentro de um mesmo registro; ou seja, é uma transformação interna a um registro, como mostra o exemplo do Quadro 2.

Quadro 2: Exemplo da operação de tratamento

$$A(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4$$

$$A(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 8)$$

$$A(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1 - 1 + 8)$$

$$A(x) = \frac{1}{2}[(x^2 - 2x + 1) + 7]$$

$$A(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow v = (1, \frac{7}{2})$$

Fonte: a autora

Quanto à conversão entre representações - é a transformação de uma representação que implica na mudança de registro; ou seja, é uma transformação que é exterior ao registro de partida, como mostra o esquema da figura 1.

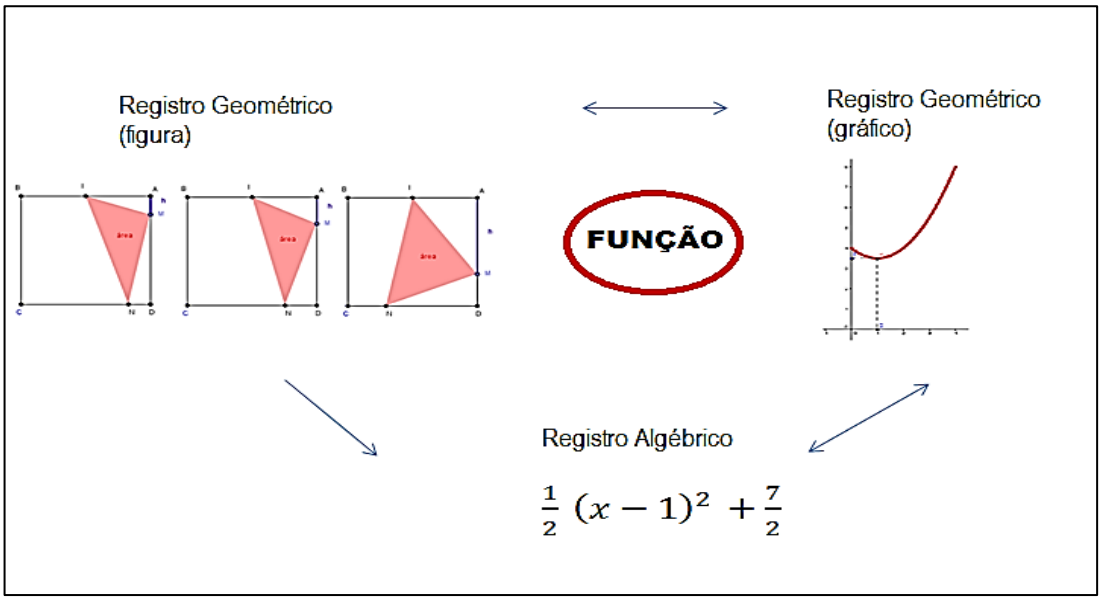


Figura 1: Exemplo da operação de conversão
Fonte: as autoras

É importante ressaltar que é na passagem de um registro para outro que se pode observar a importância das formas de representação. A mudança de registro pode propiciar a descoberta de diferentes aspectos de um mesmo objeto; também pode propiciar, no novo registro, tratamentos mais econômicos e/ou mais potentes; ou ainda, ter-se no segundo registro um suporte ou guia para melhor proceder no primeiro registro.

E na aprendizagem da matemática, as conversões exigem uma operação cognitiva mais complexa do que a transformação do tipo tratamento. Para os alunos, a variação na congruência[3] nas conversões é uma das maiores causas da incompreensão ou de erros de interpretação dos enunciados dos problemas. Segundo Duval (2011, p.103): "[...] os alunos ficam sem argumentos se as conversões a realizar não são congruentes e se os tratamentos a efetuar não são uma aplicação automática de algoritmos de cálculo".

É tomando como referência o trabalho de Duval que tratamos de elaborar uma sequência de atividades na qual se estabelecem situações de aprendizagem que favorecem a coordenação dos registros de representação semiótica. Ao longo das atividades propostas, o aluno é provocado a fazer uso de diferentes registros de representação semiótica sobre um determinado objeto matemático. Os exemplos que ilustram as considerações feitas nesta seção foram tomados da sequência de atividades e neles têm-se evidências da nossa intenção.

3. SOBRE O POTENCIAL DO SOFTWARE GEOGEBRA

Quanto ao uso do *software* de matemática dinâmica GeoGebra, de início justificamos nossa escolha. Gravina (2001) diz que são ferramentas que "desencadeiam alguma das primeiras ações mentais características do pensar matemático - o estabelecer relações e conjecturar". Acreditamos que este desencadeamento se dá pelas inúmeras possibilidades que os *softwares* oferecem e, dentre elas, destacamos algumas que serão fundamentais para o entendimento do conceito de função: a visualização simultânea de diferentes registros de representação de um mesmo objeto; a análise qualitativa das variáveis que estão relacionadas e que são evidenciadas no movimento dinâmico, através de manipulações de pontos da figura; a obtenção do gráfico da função antes mesmo de determinar a expressão analítica.

Vale mencionar que a interface do GeoGebra é dinâmica e interativa. Ela permite que

[3] Quando podemos "ver", facilmente, nos registros de partida e de chegada, o mesmo objeto matemático, então há congruência. Se a representação terminal não transparece absolutamente no registro de partida, então há o fenômeno da não congruência.

o aluno transite, ao mesmo tempo e com muita versatilidade, entre os diferentes registros de representação de um objeto. Este recurso do *software* propicia uma constante interpretação das ações sobre as diferentes representações que se descortinam, de forma simultânea, na tela do computador. E uma exploração em que o aluno consiga visualizar e identificar o mesmo objeto em suas diferentes representações é uma das condições para a compreensão em matemática, conforme já mencionado anteriormente.

Em particular quanto ao potencial das múltiplas representações, nos diz Gravina:

> Considerando que um mesmo objeto matemático pode receber diferentes representações e que estas registram diferentes facetas do mesmo, uma exploração que transita em diferentes sistemas torna-se significativa no processo de construção do conceito. Por exemplo, a uma função pode-se associar uma representação gráfica que evidencia variações qualitativas, [...] ou ainda um fenômeno cujo comportamento é dado pela função. Ou ainda, pode-se estudar família de funções sob o ponto de vista de operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados. O aluno pode concentrar-se em interpretar o efeito de suas ações frente às diferentes representações, até de forma simultânea, e não em aspectos relativos a transição de um sistema a outro, atividade que geralmente demanda tempo. (GRAVINA, 2001, p. 14).

O *software* GeoGebra possibilita o trabalho tanto em registro algébrico sincronizado como em registro geométrico e gráfico. O próprio nome GeoGebra, Geo para geometria e Gebra para álgebra, sinaliza este potencial, e assim ele vem sendo considerado como um interessante e rico exemplar de *software* de matemática dinâmica. Ele também tem as vantagens de ser um *software* livre e de poder ser instalado em computador com qualquer sistema operacional[4].

No nosso trabalho, vamos propor uma experiência de ensino na qual o *software* GeoGebra se torna um recurso tecnológico de fundamental importância. A ideia geral das atividades que compõem a sequência é a seguinte: aos alunos será apresentada uma construção geométrica já pronta. Valendo-se dos recursos dinâmicos do software, os alunos vão observar/explorar, inicialmente de forma qualitativa, relações de dependência entre variáveis. Nas construções geométricas serão exploradas variáveis que correspondem a grandezas geométricas, do tipo medida de comprimento, de área, de perímetro. Após esta exploração qualitativa será feita a construção do gráfico. E, como última parte da atividade, será deduzida a "lei" da função e serão resolvidas analiticamente as questões que, de início, foram exploradas de forma qualitativa (crescimento, decrescimento, ponto de máximo/ponto de mínimo). É importante dizer que a realização das construções geométricas não é propósito

[4] Outras informações e *download* podem ser obtidos em: <http://www.geogebra.org/cms>.

de ensino, mas sim que é através delas que os alunos vão trabalhar com a ideia de variabilidade, que é crucial no conceito de função.

A figura 2 ilustra o espírito do trabalho a ser feito com os alunos. Ela traz uma construção geométrica a ser explorada qualitativamente para então observar-se as variações, neste momento de caráter visual, que podem ser percebidas no dinamismo da figura. Vê-se que, conforme é alterado o comprimento do segmento azul, o pentágono rosa muda de forma. Esse dinamismo é obtido através da manipulação direta de ponto extremo do segmento destacado em azul. Com esta exploração qualitativa, espera-se que os alunos percebam relações entre variáveis e que estabeleçam as características de crescimento/decrescimento entre as variáveis, que façam uma previsão de como será a forma do gráfico e que estimem a existência ou não de pontos extremos.

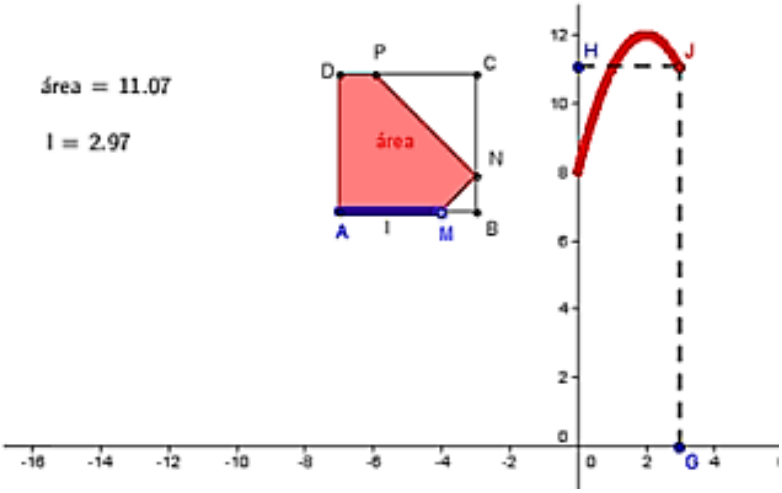


Figura 2: Gráfico da função quadrática a partir do movimento de M
Fonte: as autoras

Depois desta exploração inicial, será feita a construção do gráfico sem que se tenha a necessidade da mediação de expressões algébricas ou tabelas. Com os recursos de medida de segmento e medida de área, são construídos os pontos que correspondem às variáveis independente e dependente, sobre os eixos OX e OY; depois é construído o ponto que pertence ao gráfico e que pode ter seu "Rastro" habilitado – esse rastro é a curva vermelha na Figura 2. O traçado[5] do gráfico vai sendo desenhado conforme o ponto M, um dos extremos do segmento azul no polígono cor-de-rosa, é manipulado.

[5]Aqui usamos a função rastro do GeoGebra.

A tela do GeoGebra nos dá, também, a possibilidade de observar empiricamente as mudanças nos valores numéricos das variáveis, que ocorrem quando movimentamos o ponto M. Podemos acompanhar as atualizações de valores de medida do segmento azul e de área do polígono rosa, na janela de álgebra do software, conforme muda a forma do pentágono, na janela de visualização do software, conforme ilustra a Figura 3.

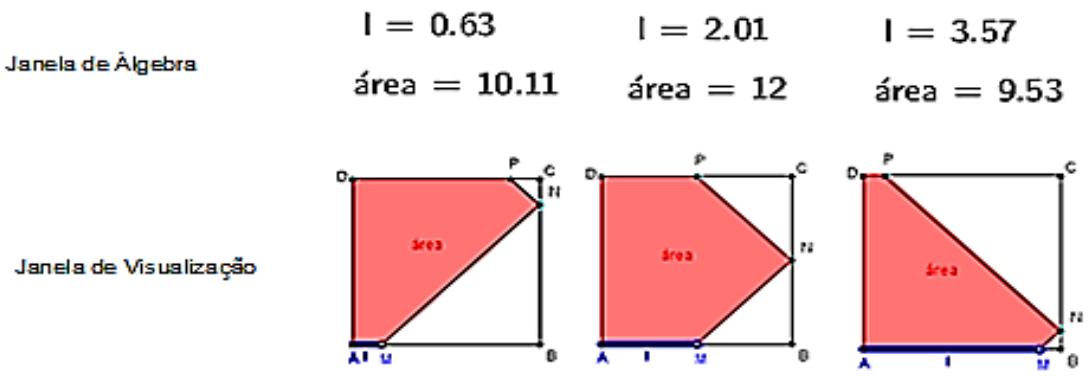


Figura 3: Registro numérico e geométrico
Fonte: as autoras

Acreditamos que os *softwares* de matemática dinâmica podem contribuir muito para explorar a transformação de conversão, na sala de aula, pois eles possibilitam a representação de um mesmo objeto em diferentes registros de representação. O exemplo acima mostra a representação de uma situação que explora intuitivamente o conceito de função.

Trata-se de uma atividade em que os alunos movimentam um ponto pré-determinado na figura e, em consequência, a forma dessa figura muda. Num primeiro momento, queremos que o aluno perceba que o valor associado à área do pentágono depende da posição desse ponto (segmento azul, nomeado de l). Através do registro numérico (janela da álgebra), o aluno pode ver a atualização de valores provocada pelo movimento na figura e, ao mesmo tempo, ele pode, através do registro geométrico (gráfico), explorar a situação, determinando os intervalos em que a área está crescendo e/ou decrescendo e também fazer uma previsão de onde ela é máxima e/ou mínima. Conforme mostra a figura 4.

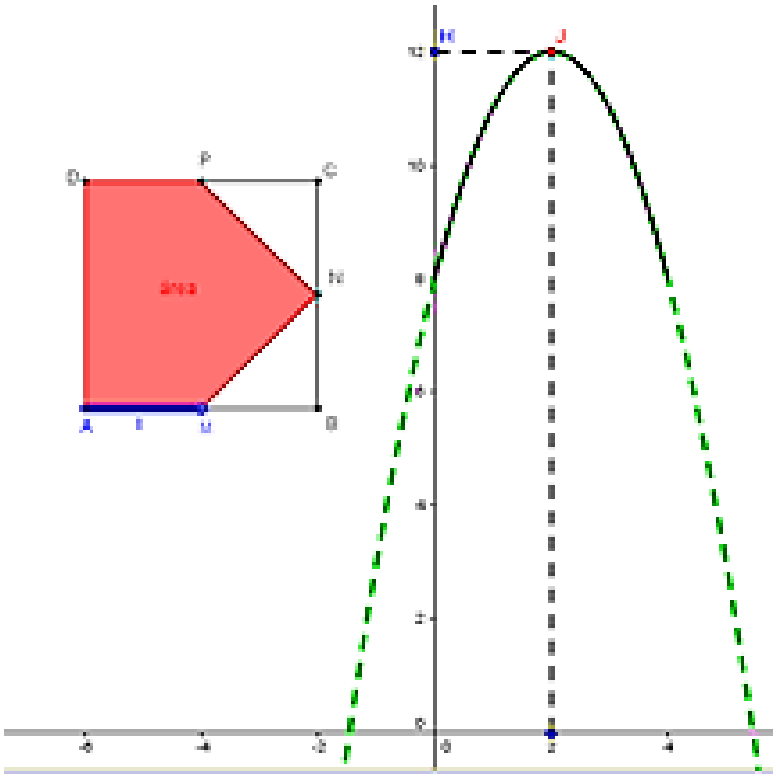


Figura 4: Registros de Representação de Função no GeoGebra.
Fonte: as autoras

Na figura 4 temos, na janela de visualização, o gráfico da função que informa a área do pentágono correspondente à variação do comprimento do segmento azul e, na janela de álgebra, tem-se o registro numérico destas variações. Neste caso, além de permitir a representação, o *software* de matemática dinâmica permite a interação sobre o objeto matemático através da representação geométrica (figura), representação geométrica (gráfico) e representação numérica. Este é um fato importante, pois privilegia os dois sentidos da transformação de conversão[6], permitindo uma compreensão mais aprofundada do conceito de função.

Com o GeoGebra também é possível partir de registro geométrico gráfico e obter o registro algébrico. O gráfico obtido como a trajetória de um ponto, na figura 4, também pode ser obtido utilizando o recurso "Lugar Geométrico", junto com o menu de construção de cônicas. Para que a equação seja informada pelo GeoGebra, é necessário que se construa a cônica correspondente ao gráfico obtido como lugar geométrico; isto porque o *software* só informa equações de retas, circunferência ou, mais geralmente, de curvas cônicas.

[6] Nesse caso, quando há essa articulação nos dois sentidos da conversão, dizemos que há congruência semântica.

É tirando proveito das representações dinâmicas que projetamos uma sequência de atividades que pretende minimizar as dificuldades, dos alunos, no que se refere à visualização, interpretação e compreensão de situações que envolvam as distintas representações de funções afim e quadrática.

4. METODOLOGIA E CONTEXTO DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada no segundo semestre de 2013, em uma escola estadual de Porto Alegre. A escolha desta escola para o desenvolvimento da pesquisa deve-se ao fato do professor/pesquisador exercer suas atividades docentes neste local. Participaram da pesquisa 28 alunos e foi como professora e pesquisadora que a primeira autora deste artigo esteve presente ao longo dos encontros.

Para a realização das atividades, os alunos foram organizados em pequenos grupos. As atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática e nele tínhamos também à disposição um projetor multimídia, utilizado na condução dos trabalhos no grande grupo. No total foram onze encontros, diferentemente da expectativa inicial de nove encontros.

No desenho da experiência foram previstas duas etapas de trabalho. Na primeira etapa – que podemos caracterizar como de exploração – foram sete encontros, sendo que o primeiro deles tratou da revisão de conteúdos que seriam pré-requisitos para o desenvolvimento da experiência. Nos demais encontros, da primeira etapa, as atividades trataram da introdução às funções afim e quadrática através de problemas geométricos. Na segunda etapa foram quatro encontros – esta a etapa de sistematização e institucionalização do conhecimento construído na primeira etapa.

A organização da pesquisa tomou como base os pressupostos da Engenharia Didática Artigue (1996, apud CARNEIRO, 2005, p. 87-120). A partir de análises prévias, que tratam dos aspectos teóricos que fundamentaram nossa pesquisa, foi elaborada a sequência de atividades, acompanhada de análise *a priori*, tendo como propósito apresentar uma nova abordagem para o ensino e aprendizagem das funções afim e quadrática, utilizando o software Geogebra. Foi feita uma experiência de ensino e através de análise *a posteriori* da sequência de atividades buscou-se obter subsídios para responder a questão de pesquisa; como instrumento de análise da construção de conhecimento, por parte dos alunos, ao longo da experiência utilizamos a teoria dos registros de representação semiótica.

Para cada atividade têm-se três momentos definidos. No momento 1, é solicitado ao

aluno que faça a interpretação do enunciado, apresentado na forma de texto, analisando o que "é dado" e o que é solicitado no problema, e que faça um esboço da situação geométrica usando lápis e papel. No momento 2, é solicitado que o aluno abra o arquivo do GeoGebra, com a construção da situação geométrica apresentada no problema proposto. Agora, o aluno vai usar o dinamismo da figura e, fazendo manipulações, vai estabelecer relações entre as variáveis e comparar com aquelas já identificadas no Momento 1. Perguntas provocativas são colocadas para que o aluno avance na análise qualitativa das relações entre variáveis. No momento 3 é solicitado ao aluno que obtenha a "lei" da função que aparece na situação geométrica. Espera-se que, para obter esta "lei", o aluno utilize os conceitos geométricos que foram retomados no primeiro encontro da experiência e que também utilize suas habilidades para fazer manipulações algébricas.

A coleta de dados consistiu nos relatórios produzidos pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades, em vídeos com áudio feitos durante a experiência e nas observações anotadas pelo professor/pesquisador. As respostas apresentadas pelos alunos foram analisadas tendo como referência a teoria dos registros de representação Duval (2003). Na próxima sessão, apresentamos um recorte da experiência realizada, acompanhado de reflexões teóricas e comentários em relação com o que foi dito até o momento.

5. DESCRIÇÃO COMENTADA DE UMA ATIVIDADE DESENVOLVIDA

Esta atividade foi realizada no quinto encontro. Aqui eles já estavam adquirindo mais autonomia, criando suas próprias estratégias de resolução, como veremos a seguir.

O problema proposto foi o seguinte:

> *Considere a seguinte situação: da chapa metálica quadrada ABCD, com área 16m², deseja-se retirar a região triangular IMN, a fim de se obter uma chapa vazada. O corte será feito de modo que o vértice I coincida com o ponto médio do segmento AB, e tal que AM = DN. Onde devemos colocar M, para que o triângulo IMN tenha área mínima?*

No que segue, trazemos registros das produções dos alunos nos diferentes momentos da atividade, acompanhados de nossos comentários e reflexões. No momento 1, de interpretação do enunciado e de esboço da situação geométrica, usando lápis e papel, os alunos apresentaram desenhos variados. As figuras 5 e 6 mostram a produção de dois grupos.

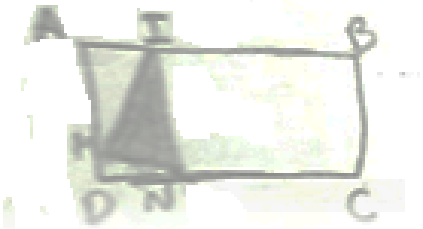


Figura 5: Momento 1 (grupo 1)

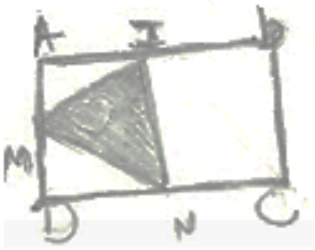


Figura 6: Momento 1 (grupo 5)

A seguir, aconteceu a socialização com o grande grupo. Eles compararam os desenhos e constataram que o ponto M havia sido colocado em posições diferentes ao longo de CD e observaram também que os triângulos tinham formas diferentes. Nesse momento, observamos que os tratamentos, citados por Duval (2003) como um funcionamento cognitivo importante, e que no caso foram aplicados aos triângulos, proporcionaram fazer conjecturas a respeito da relação entre a posição do ponto M e a área do correspondente triângulo, e assim foram colocadas, de forma muito natural, as variáveis do problema.

No momento 2, de exploração da construção feita no GeoGebra, os alunos manipularam o ponto M, o que proporcionou o estabelecimento de relações entre as variáveis. A figura 7 ilustra algumas das formas do triângulo rosa, dadas em função do comprimento do segmento azul, que foram coletadas pela professora no momento da exploração feita pelos alunos.

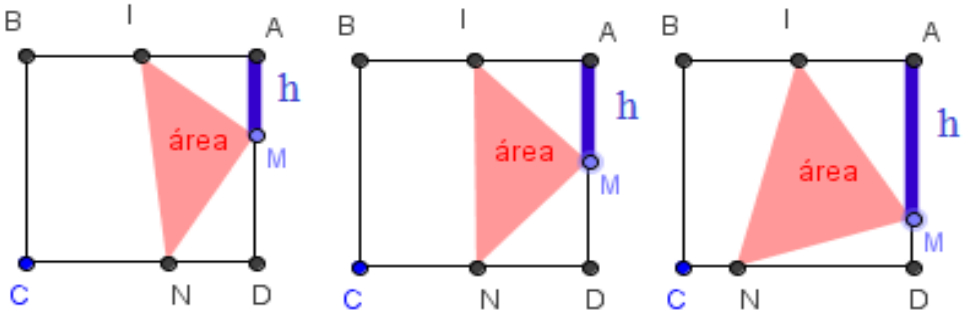


Figura 7: Representações do triângulo IMN dependendo da posição de M

Poucos grupos notaram que no início do deslocamento do ponto M, quando ele se afasta de A, a área do triângulo rosa diminui até certo valor e depois aumenta até chegar ao ponto D. A figura 8 mostra a produção dos alunos do grupo 5.

- Movimente o segmento azul e observe o que acontece. Como é a variação deste segmento?

observei o ponto azul M se move ele muda a área O é 4

Quando o segmento azul é muito pequeno, qual o valor da área do triângulo IMN?

4

- Quando o segmento azul aumenta, o que acontece com a área do triângulo IMN? Quando o segmento azul é quase igual ao lado do quadrado, com fica a área do triângulo?

quanto aumenta a altura a área diminui e depois aumenta

-Segmentos azuis diferentes podem produzir triângulos de mesma área?

pode reproduzir só 2 triangulos do mesmo área

- No contexto do problema quais grandezas podem variar?

área e altura

- O que nos informa o menor ponto do gráfico?

nos informa o menor área do triangulo: 3,5

Quais os intervalos onde a função é crescente? e decrescente?

decrescente [0,1]. crescente [1,4]

Figura 8 : Momento 2 (grupo 5)

O grupo 5 percebeu que, à medida que o ponto M se afastava de A, o valor da área mudava. Não especificaram como se dava essa mudança. Nos questionamentos seguintes, perceberam que, quando o segmento azul era muito pequeno, o valor aproximado da área do triângulo IMN (rosa) era igual ao lado do quadrado, ou seja, quatro. No item seguinte, responderam que quando o segmento azul (*h*) aumentava, a área diminuía, e depois aumentava, sem especificar de que forma isso acontecia. Perceberam também que segmentos azuis diferentes produziam triângulos de mesma área. Eles manipulavam o ponto M na figura na janela de visualização e comparavam as respectivas medidas na janela da álgebra, fazendo uma articulação entre os dois registros.

Perguntados sobre se já poderiam prever como seria o gráfico, eles voltaram a

manipular o ponto M e, olhando os valores de *h*[7] e da área, na janela da álgebra, foram descrevendo o movimento: "começa do quatro desce, vai até 3,5 e depois sobe até oito, sinalizando com gesto a forma de U". Isso mostra que já conseguiam ver o gráfico como um todo, fazendo mentalmente o caminho da função rastro do GeoGebra. Também determinaram os intervalos em que a função era crescente/decrescente.

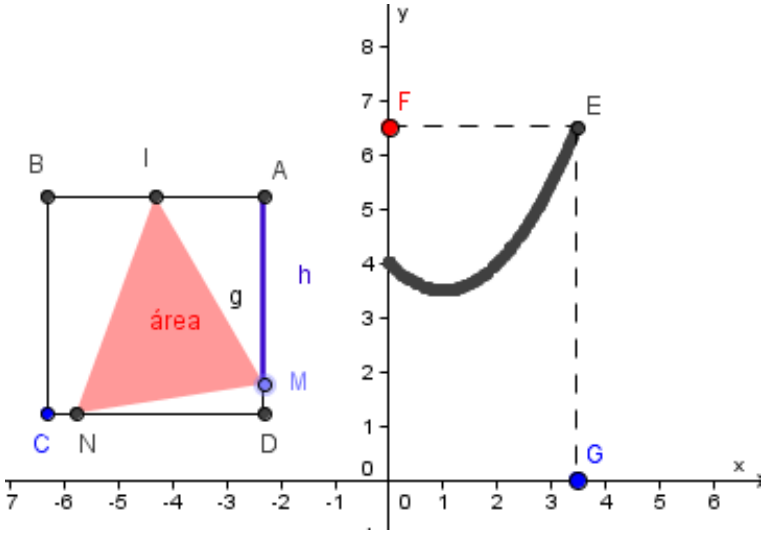


Figura 9: Mostra o traçado do gráfico conforme manipulamos o ponto M na construção geométrica.

As produções dos alunos, bem como nossas observações, nos mostraram que, no Momento 2, houve a conversão do registro geométrico do tipo figura (a construção geométrica com dinamismo evidenciando variabilidade) para o registro geométrico do tipo gráfico (o gráfico correspondente às variáveis em relação). Percebeu-se, nas atitudes e questionamentos apresentados, que eles estavam realizando de maneira bastante natural essa coordenação entre registros, mostrando assim um avanço cognitivo, como havíamos antecipado no momento de concepção da sequência de atividades.

No Momento 3, para encontrar a "lei" algébrica que representava a relação entre as variáveis da situação geométrica, os alunos diziam com suas palavras que "para encontrar a área do triângulo rosa, precisamos encontrar a área do quadrado e subtrair aquelas outras três que não estão pintadas". Os grupos identificavam os dois triângulos, mas não identificavam o trapézio BINC, como esperado pela professora. Um dos grupos se manifestou perguntando se poderia dividir aquele quadrilátero, referindo-se ao trapézio BINC, em dois triângulos. Isso mostrou que esse grupo estava adquirindo autonomia e também desenvolvendo habilidades para resolver problemas.

[7] Quando é criado um segmento, qualquer, no GeoGebra ele automaticamente rotula (nomeia) esse segmento. Aqui o segmento azul foi nomeado de *h*.

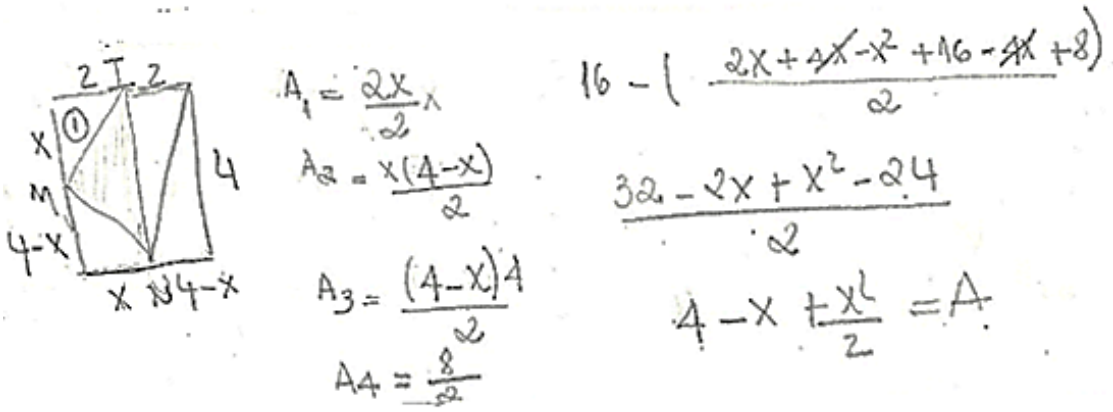


Figura 10: “Lei” algébrica da área do triângulo (grupo 5)

Os grupos também mostraram suas habilidades ao perceber que o trapézio, uma figura não muito usual para eles, poderia ser dividida em dois triângulos, esta sim bem mais conhecida de todos. Nesse Momento 3, identificamos que os alunos fizeram, ainda que de forma um tanto hesitante, a conversão do registro geométrico (a construção geométrica) para o registro algébrico.

A última parte da atividade solicitava escrever a lei algébrica e, a partir dela, calcular com precisão a área mínima do triângulo IMN. Aqui, através de um tratamento de registros, eles escreveram a expressão algébrica, que foi obtida no momento 3, a partir da manipulação algébrica das fórmulas de áreas, em sua forma canônica, através do trinômio quadrado perfeito e do “completamento” de quadrados. Pois, ao representarmos a função quadrática em sua forma canônica, é possível determinar, com mais facilidade, as coordenadas do vértice da parábola, sem o uso de fórmulas.

a) Retomando o problema da chapa metálica, da 1ª fase, cuja representação algébrica era:

$A(x) = \frac{x^2}{2} - x + 4$ *, encontre com precisão a área mínima do triângulo IMN.*

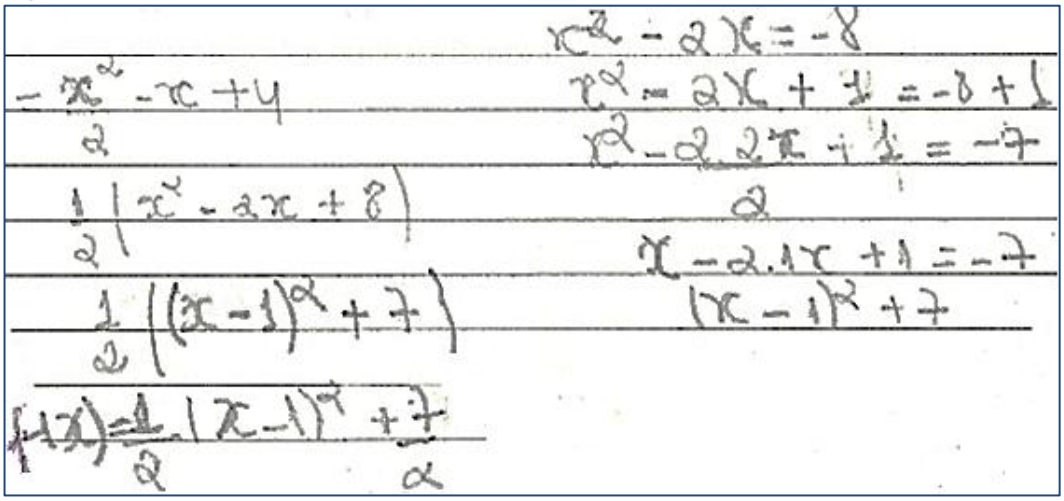


Figura 11: tratamento realizado na expressão algébrica (grupo 4)

Percebemos que alguns grupos tiveram dificuldades em fazer as manipulações algébricas para chegar à forma canônica da função. Acreditamos que isso se deva ao fato, nesse caso, do coeficiente ser um número racional e também pela abstração exigida quando se lida com as representações algébricas.

De modo geral, os alunos se envolveram com as atividades e mostraram ter compreendido os conceitos explorados. Também avaliaram como positiva a utilização do software GeoGebra no desenvolvimento das atividades, pois segundo eles, “ficava mais fácil de enxergar o que estava acontecendo”, referindo-se à identificação das variáveis do problema, aos intervalos em que a função crescia/decrescia e na previsão do resultado através do gráfico.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, apresentamos e avaliamos a produção de alunos em uma das atividades que faz parte de sequência didática que trata da construção do conceito de função afim e quadrática. E a sequência pressupõe o uso do GeoGebra, pois todas as atividades iniciam com a manipulação de uma construção geométrica. E mais, o GeoGebra é um recurso fundamental pois permite, de forma versátil, fazer conversões de registros de representação.

O enfoque das atividades deixou de apresentar a predominância algébrica, tão presente na usual abordagem escolar. Buscou-se uma forma de explorar funções partindo-se de uma construção geométrica, para depois construir o gráfico através da variação de medidas de

elementos geométricos (comprimentos e áreas), e então finalmente encontrar a "lei" da função. As variações qualitativas e quantitativas presentes no dinamismo das construções geométricas exploradas no GeoGebra, juntamente com a possibilidade de visualizar diferentes registros de representação de um objeto matemático, este um funcionamento cognitivo que, segundo Duval, é uma das condições para a compreensão em matemática, constituíram sem dúvida um dos grandes pilares na construção do conceito de função. É isto que nossa pesquisa, ainda em andamento e a ser finalizada com a elaboração do texto final da dissertação, já nos mostrou até o momento, sinalizando que é possível tirar proveito da tecnologia digital para implementar novas práticas de ensino na escola.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1974.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké**, FE-Unicamp, v.13, n.23, p.87-120, jan./jun. 2005.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (org.). **Aprendizagem Matemática:** Representação Semiótica. São Paulo: Papirus, 2003. p.11-34.

GRANGER, G. G. **Langages et épistémologie**. Paris: Éditions Klincksieck, 1979.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Porto Alegre: UFRGS, 2001. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.