Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Física
Curso de Física - Bacharelado em Pesquisa Básica

Guilherme Müller Peccini

Uma dedução alternativa às Transformações de Lorentz e o relatividade do tempo na Relatividade Restrita

Porto Alegre
2015

Guilherme Müller Peccini

Uma dedução alternativa às Transformações de Lorentz e o relativismo do tempo na Relatividade Restrita

Monografia apresentada ao Curso de Física - Bacharelado em Pesquisa Básica da UFRGS, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em Física - Bacharelado em Pesquisa Básica.

Orientador: Silvio Renato Dahmen

Porto Alegre

2015

Guilherme Müller Peccini

Uma dedução alternativa às Transformações de Lorentz e o relativismo do tempo na Relatividade Restrita

Monografia apresentada ao Curso de Física - Bacharelado em Pesquisa Básica da UFRGS, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em Física - Bacharelado em Pesquisa Básica.

BANCA EXAMINADORA

Silvio Renato Dahmen

Examinador 1

Examinador 2

Resumo

No presente trabalho serão discutidas as Transformações de Lorentz e o Paradoxo dos Gêmeos. Em relação às transformações, estas serão deduzidas levando-se em consideração apenas o Princícpio da Relatividade, a isotropia do espaço-tempo e a uniformidade do espaço-tempo. Como exemplo de aplicação das Transformações de Lorentz, trataremos do Paradoxo dos Gêmeos, fazendo uso apenas da Relatividade Restrita e dos efeitos de dilatação temporal concernentes a esta teoria.

Palavras-chave: Teoria da Relatividade Restrita, Transformações de Lorentz, Paradoxo dos Gêmeos

Abstract

In this work it is going to be discussed the Lorentz Transformations and the Twin Paradox. About the transformations, these are going to be deduced considering only the Principle of Relativity, the isotropy of space-time and the uniformity of space-time. As an example of aplication for the Lorentz Transformations, we are going to treat the Twin Paradox, using just Special Relativity and the efects of time dilation concerning to this theory.

Keywords: Special Relativity Theory, Lorentz Transformations, Twin Paradox

"A mente que se abre para uma nova ideia jamais retorna ao tamanho original".

Albert Einstein

Sumário

1 Introdução

Publicada em 1905 por Albert Einstein [1], a Teoria da Relatividade Restrita foi a primeira parte da chamada Teoria da Relatividade, cujo conteúdo, como uma teoria física do espaço-tempo quadridimensional, seria publicado por Hermann Minkowski em 1908 [2]. Com base nestas ideias, já em 1915, Einstein postulou a Teoria da Relatividade Geral, na qual são incluídos sistemas de referência não-inerciais. A Relatividade Geral é uma extensão da Relatividade Restrita, levando-se em conta o espaço-tempo como um todo na presença de campos gravitacionais e referenciais não-inerciais.

Já muito antes da Teoria da Relativadade, o conceito de *tempo* sempre fora de grande discussão para diversos pensadores. Newton propusera que o tempo seria algo absoluto, independente do referencial. Chegou-se a acreditar que existiria o que se designou por Éter, um sistema de referência absoluto no universo. A partir do início do século XX, vários pensadores passaram a questionar a validade do Éter, devido a resultados de experimentos em eletrodinâmica que corroboravam as previsões teóricas das Equações de Maxwell. Poincaré, expoente cientista francês, foi uma figura importante na derrubada da ideia de existência de um sistema absoluto de referência, postulando o que foi chamado de Princípio da Relatividade. [3]

Após a publicação da Teoria da Relatividade Restrita, houve uma mudança abrupta nos conceitos de espaço e de tempo, tornando evidente a existência de uma interrelação entre os mesmos de tal forma que não se pode falar em espaço e em tempo saparadamente. A Teoria da Relatividade, sobretudo, é uma consequência natural da isotropia e uniformidade do espaço, antes mesmo de se considerar que a velocidade da luz é uma velocidade constante e limite no universo. Como já dito anteriormente, experimentos de eletrodinâmica no final do século XIX mostravam que as Equações de Maxwell não podiam ser aplicadas fazendo o uso das Transformações de Galileu - equações estas que são utilizadas no cotidiano -, já que as velocidades dos objetos presenciados no dia-a-dia são muito menores que a velocidade da luz. Portanto, seria necessário um outro tipo de transformação que fizesse com que as leis do eletromagnetismo permanecessem invariantes frente a mudanças de sistemas de referência, o que não acontecia quando se utilizavam as transformações galileanas. Com base nas Equações de Maxwell, Lorentz formulou as

Transformações de Lorentz, as quais faziam com que as leis da física fossem as mesmas em qualquer sistema de referência inercial. Diante disso, Einstein formulou dois postulados, a partir dos quais ele pôde desenvolver toda a Teoria da Relatividade Restrita. O primeiro postulado afirma que as leis da física devem ser invariantes para quaisquer referenciais inerciais, o que vai de acordo com as Transformações de Lorentz. O segundo afirma que a velocidade da luz é constante, independentemente do raio de luz ter sido emitido por um corpo em movimento ou em repouso. Através destes dois postulados, é possível derivar todas as leis da Relatividade Restrita. Também pode ser mostrado que, mesmo que não se adotem estes postulados, chega-se aos mesmos resultados utilizando-se objetos mecânicos quaisquer no lugar do método dos raios de luz, sendo este último o mais utilizado na literatura.

2 Teoria da Relatividade Restrita

2.1 Transformações de Lorentz

Uma das questões mais importantes na Relatividade Restrita é o conceito de simultaneidade. Considerando dois corpos de massas iguais m e velocidades u_1 e u_2 no sistema de referência denominado Σ, a lei de conservação do momentum linear leva a

$$\sum_{k=1}^{2} m_k u_k = P = const \tag{2.1}$$

E dois corpos de massas iguais m', no sistema de referência Σ', com as respectivas velocidades u'_1 e u'_2,

$$\sum_{k=1}^{2} m'_k u'_k = P' = const', \tag{2.2}$$

onde m é diferente de m'. Os dois sistemas podem ser vistos, de forma hipotética, na Figura 2.1. Desde que a massa em (2.1) seja monotonicamente crescente em função da velocidade, tem-se que

$$m = m(u) \tag{2.3}$$

É simples mostrar que, em função destas três relações acima, no sistema Σ, a chegada simultânea dos dois corpos de massa m em iguais distâncias do centro, simetricamente repelidos um do outro, não será simultânea no sistema Σ' (em movimento). Suponha-se que duas bolas são repelidas uma da outra em $t = 0$, no ponto inicial x_0, com velocidades $-u$ e $+u$ em direção a x_1 e x_2, respectivamente, e que os pontos estão situados a uma mesma distância l do ponto inicial x_0. No instante $t = l/u$, as duas bolas atingirão as barreiras I e II, como pode ser visto na Figura 2.2. Portanto, neste sistema de referência, as bolas atingirão as barreiras ao mesmo tempo.

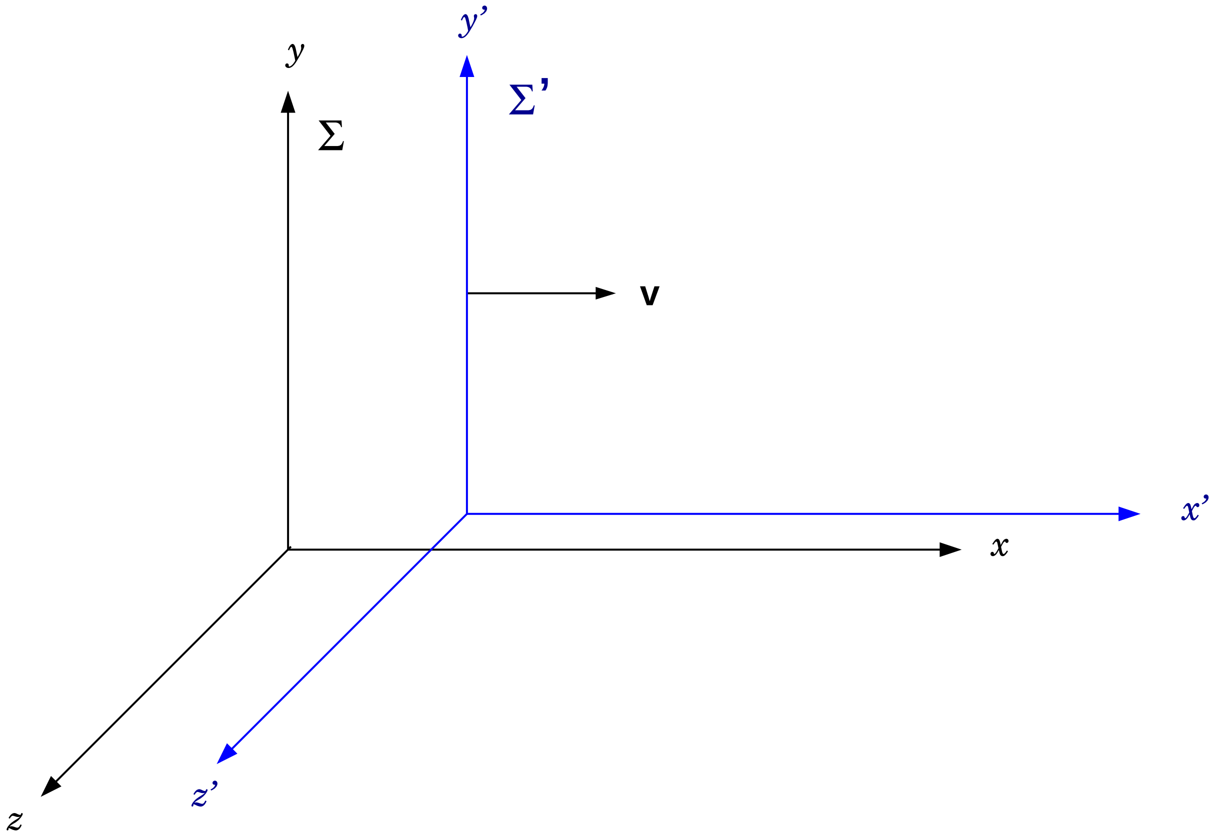

Figura 2.1: **Dois sistemas de referência, Σ e Σ', cujos eixos x e x' coincidem com a velocidade realtiva v.**

A mesma situação pode ser analisada do ponto de vista do sistema de referência Σ', que se move com velocidade $-u$ (Figura 2.3). Relativas a este sistema, as barreiras I e II se movem com velocidade $+u$. No momento da repulsão, ambas as bolas se movem para a direita com velocidade $+u$ e, portanto, com momentum linear total de $2m'(u)u$. Em $t' = 0$, de acordo com um relógio situado no sistema de referência Σ' e passando neste instante em x_0, as bolas são afastadas de x_0. A bola da esquerda adquire velocidade $-u$, ou seja, em relação ao sistema Σ', ela fica parada. Já a velocidade da bola da direita pode ser determinada utilizando a lei de conservação do momentum linear

$$P' = 2m(u)u = m(u')u' \tag{2.4}$$

O que resulta em

$$u' = 2u\frac{m(u)}{m(u')} \tag{2.5}$$

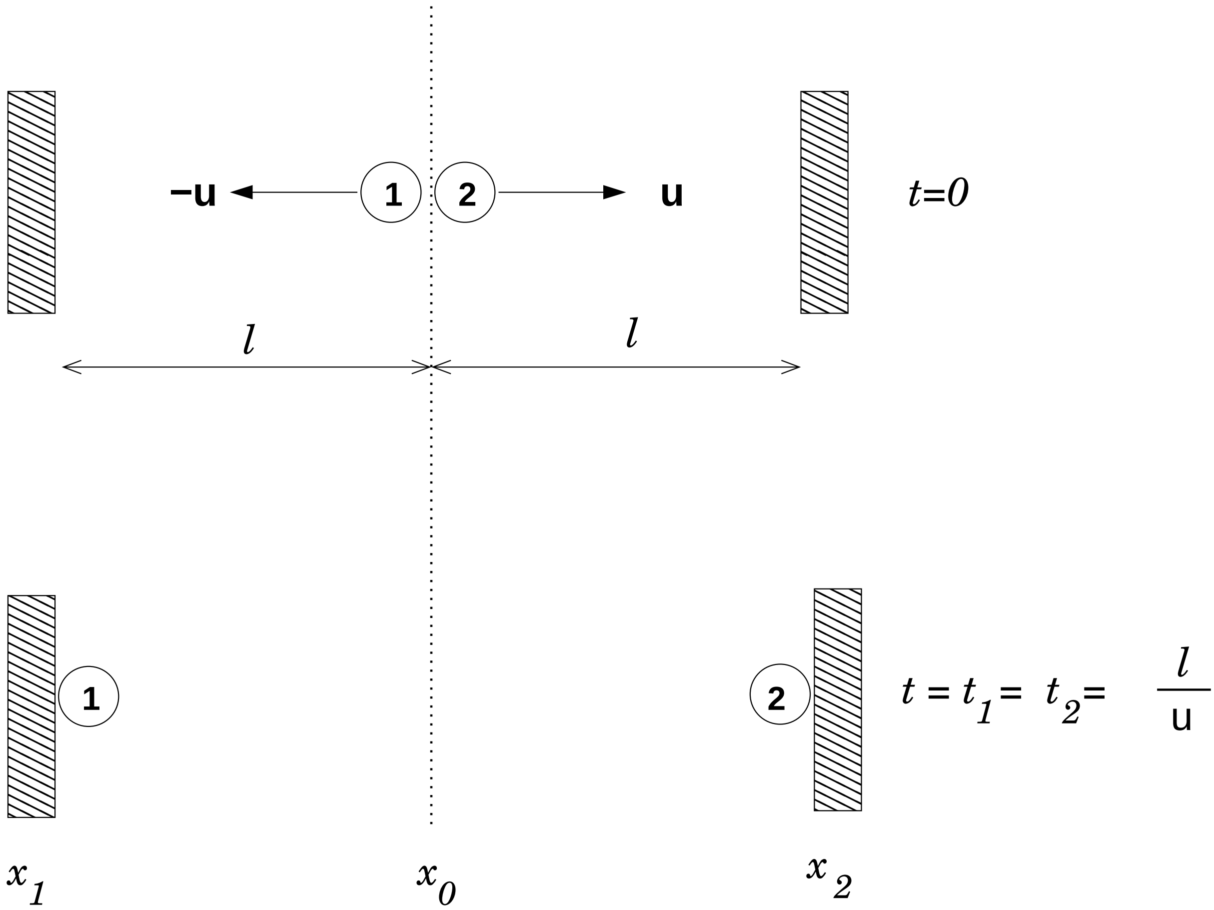

Figura 2.2: **Duas bolas com velocidades contrárias em um sistema de referência em repouso, denominado Σ.**

Portanto, a velocidade u' não é igual a $2u$, como seria o caso na Mecânica Clássica com massa invariante.

Se a distância entre as barreiras I e II no sistema Σ' é igual a $2l'$, em relação a este sistema de referência, a bola da esquerda alcançará a barreira I no tempo

$$t'_1 = \frac{l'}{u} \tag{2.6}$$

A outra bola atingirá a barreira II depois de percorrer uma distância de $2l'$ no tempo

$$t'_2 = \frac{2l'}{u'} = \frac{2l'}{2u}\frac{m(u')}{m(u)} = t'_1\frac{m(u')}{m(u)} \tag{2.7}$$

Como resultado da monotonicidade crescente da massa com a velocidade, tem-se que

$$m(u') > m(u), \quad u' > u \tag{2.8}$$

Portanto, de acordo com (2.7),

$$t'_2 > t'_1 \tag{2.9}$$

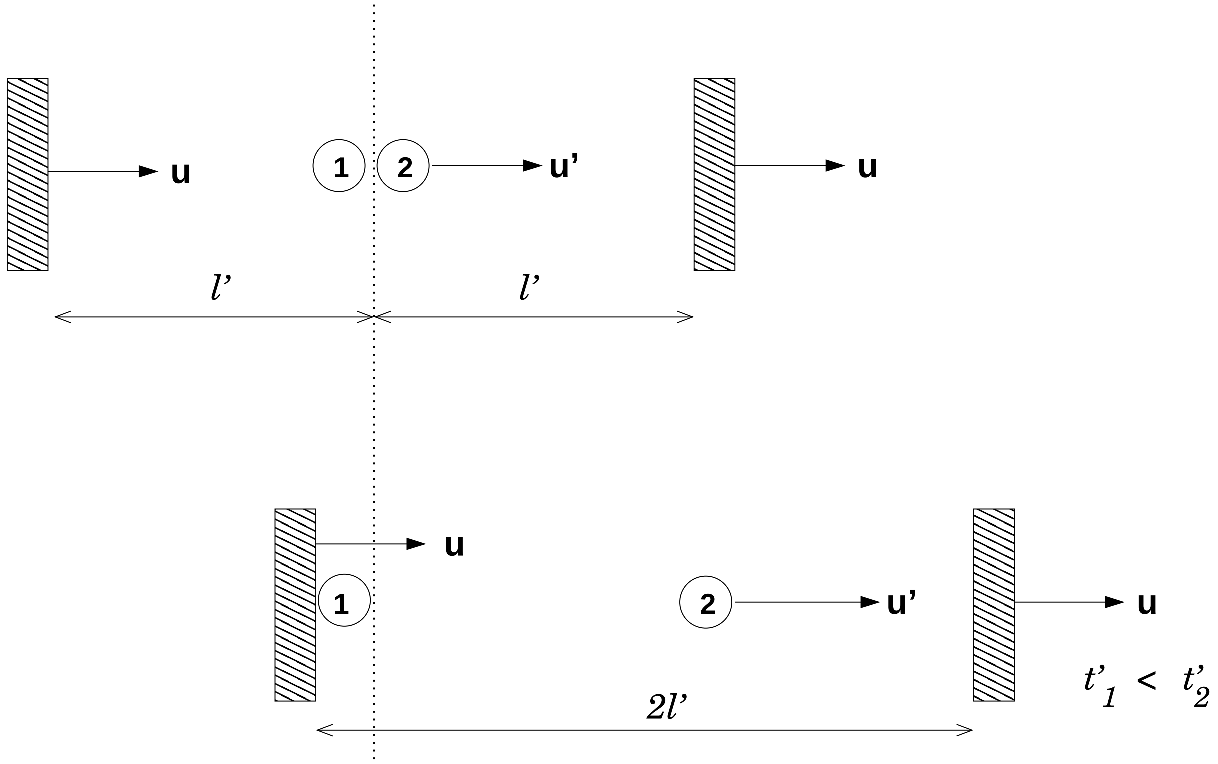

Figura 2.3: **Duas bolas com velocidades contrárias em um sistema de referência em movimento, denominado Σ', cuja origem se encontra na bola 1.**

Como afirmado anteriormente, as Transformações de Lorentz podem ser derivadas sem a utilização do postulado de constância da velocidade da luz, levando-se em conta apenas propriedades de espaço e tempo contidas na Física Clássica. Será utlizado, a seguir, o método discutido por Y. P. Terletskii [4].

Adotam-se as seguintes sentenças como axiomas:

1. A isotropia do espaço-tempo, ou seja, todas as direções espaciais são equivalentes;

2. A uniformidade do espaço e tempo, ou seja, a independência do espaço e tempo em relação à escolha dos pontos iniciais de medida;

3. O princípio da relatividade, ou seja, a equivalência entre qualquer sistema de referência inercial.

Os diferentes sistemas de referência são apenas distintas representações do mesmo espaço e tempo e, portanto, devem ter iguais propriedades. Devido a isso, as relações entre os diferentes sistemas não pode ser arbitrária, pois deve ser tal que torne invariante as propriedades físicas do espaço e tempo. Sejam (x', y', z', t') as coordenadas espaço-temporais no referencial Σ' e (x, y, z, t) as coordenadas espaço-temporais no referencial Σ. Baseando-se nos três axiomas citados acima, pode-se afirmar que,

$$x' = f_1(x, y, z, t) \tag{2.10}$$

$$y' = f_2(x, y, z, t) \tag{2.11}$$

$$z' = f_3(x, y, z, t) \tag{2.12}$$

$$t' = f_4(x, y, z, t) \tag{2.13}$$

Devido à uniformidade do espaço e tempo, as transformações devem ser lineares. Isso ocorre pelo fato de que, se as derivadas de f_1, f_2, f_3 e f_4 não fossem constantes, então $x'_2 - x'_1$, $y'_2 - y'_1$, $z'_2 - z'_1$, $t'_2 - t'_1$, que determinam as projeções das distâncias entre os pontos 1 e 2 no sistema em movimento, não dependeriam somente de $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, $t_2 - t_1$ no sistema em repouso, mas também das próprias coordenadas x, y, z, t, e isso iria contra o fato de que as propriedades do espaço não dependem da escolha da origem de coordenadas e do tempo.

Se for considerado que as projeções da forma,

$$\xi' = x'_2 - x'_1 = f_1(x_2, ...) - f_1(x_1, ...) \tag{2.14}$$

dependem apenas das projeções de distância no sistema em repouso, ou seja,

$$\xi = x_2 - x_1 \tag{2.15}$$

mas não dependem de x_1, então

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x_1} = 0 \tag{2.16}$$

e

$$\xi' = const \tag{2.17}$$

Isto é,

$$\frac{\partial f_1(x_1+\xi,...)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x_1,...)}{\partial x_1} = 0 \tag{2.18}$$

Ou,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = const \tag{2.19}$$

Também pode-se mostrar que as derivadas de f_1 em relação a y_1, z_1, t_1 são constantes. De maneira geral, as derivadas de f_1, f_2, f_3, f_4 são constantes em relação a x, y, z, t, o que atesta que as transformações são lineares.

Escolhe-se o sistema Σ' de modo que em $t' = 0$, $x' = 0$, $y' = 0$ e $z' = 0$ e, da mesma forma, no sistema estacionário, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. O sistema Σ' só tem componente da velocidade na direção x, tal como ilustra a Figura 2.1. Se for considerada a premissa de isotropia do espaço, então as transformações para o sistema em movimento podem ser escritas como

$$x' = k(v)(x - vt) \tag{2.20}$$

$$y' = \lambda(v)y \tag{2.21}$$

$$z' = \lambda(v)z \tag{2.22}$$

$$t' = \mu(v)t + \alpha(v)x \tag{2.23}$$

onde v é a velocidade do sistema Σ' em relação ao sistema Σ.

Isotropia também implica em simetria do espaço, portanto nada pode mudar nas expressões de transformação se os sinais de x e v são trocados. Desta forma, tem-se que

$$-x' = k(-v)(-x + vt) \tag{2.24}$$

$$y' = \lambda(-v)y \tag{2.25}$$

$$z' = \lambda(-v)z \tag{2.26}$$

$$t' = \mu(-v)t - \alpha(-v)x \tag{2.27}$$

Comparando os dois conjuntos de equações acima, é possível obter

$$k(-v) = k(v),\ \alpha(-v) = -\alpha(v) \tag{2.28}$$

$$\mu(-v) = \mu(v),\ \lambda(-v) = \lambda(v) \tag{2.29}$$

Por conveniência, define-se α como segue,

$$\alpha(v) = -\frac{v}{\eta(v)}\mu(v) \tag{2.30}$$

De acordo com (2.28), (2.29) e (2.30), $\eta(v)$ é uma função simétrica, ou seja, $\eta(-v) = \eta(v)$. Fazendo uso destas três expressões, escrevem-se as transformações (2.24) a (2.27) como segue,

$$x' = k(v)(x - vt) \tag{2.31}$$

$$y' = \lambda(v)y \tag{2.32}$$

$$z' = \lambda(v)z \tag{2.33}$$

$$t' = \mu(v)[t - \frac{v}{\eta(v)}x] \tag{2.34}$$

As funções $k(v), \lambda(v)$ e $\eta(v)$ também são simétricas.

Devido ao Princípio da Relatividade, as transformações do sistema Σ para Σ' devem ser equivalentes às de Σ' para Σ. Portanto, as transformações inversas têm a forma

$$x = k(-v)(x' - (-v)t') \tag{2.35}$$

$$y = \lambda(-v)y' \tag{2.36}$$

$$z = \lambda(-v)z' \tag{2.37}$$

$$t = \mu(-v)[t' - \frac{(-v)}{\eta(-v)}x'] \tag{2.38}$$

Analisando os dois conjuntos de equações anteriores,

$$\lambda(v)\lambda(-v) = 1 \tag{2.39}$$

Mas, como $\lambda(-v) = \lambda(v)$, então $\lambda^2 = 1$, ou seja, $\lambda = \pm 1$. Entretanto, somente λ positivo faz sentido, já que em $v = 0$ um valor negativo para λ inverteria o sistema com respeito a y e z. Logo, $\lambda = 1$.

Como já dito anteriormente, k, μ e η são função simétricas de v, portanto as equações (2.31) e (2.34), e (2.35) e (2.38) podem ser escritas como

$$x' = k(x - vt)\ (a1), \quad x = k(x' + vt')\ (a2) \tag{2.40}$$

$$t' = \mu(t - \frac{v}{\eta}x)\ (b1), \quad t = \mu(t' + \frac{v}{\eta}x')\ (b2) \tag{2.41}$$

Multiplicando (a1) por μ, (b1) por vk, e em seguida somando as duas expressões,

$$\mu x' + vkt' = \mu k(1 - \frac{v^2}{\eta})x \tag{2.42}$$

$$x = \frac{x'}{k(1 - \frac{v^2}{\eta})} + \frac{vt'}{\mu(1 - \frac{v^2}{\eta})} \tag{2.43}$$

Comparando essa expressão com (a2),

$$k = \frac{1}{k(1 - \frac{v^2}{\eta})} \tag{2.44}$$

$$k = \frac{1}{\mu(1 - \frac{v^2}{\eta})} \tag{2.45}$$

Portanto,

$$\mu = k \tag{2.46}$$

e,

$$k^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{\eta}} \tag{2.47}$$

Tomando a raiz quadrada da expressão acima e levando em conta só o sinal postivo, se obtém

$$\mu(v) = k(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta(v)}}} \tag{2.48}$$

E as transformações adquirem a forma

$$x' = k(v)(x - vt),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = k(v)(t - \frac{v}{\eta(v)}x) \tag{2.49}$$

Ou também,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \frac{vx}{\eta}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\eta}}} \tag{2.50}$$

Para determinar $\eta(v)$, utiliza-se novamente o Princípio da Relatividade. Assim sendo, as mudanças de Σ para Σ' devem ser as mesmas que as de um sistema Σ' para Σ'', ocorrendo o mesmo no caso das transformações inversas. Esta exigência - que deriva do Princípio da Relatividade-, implica que, no caso de um sistema Σ', que se move em relação à Σ com velocidade v_1 (medida em relação ao referencial Σ), e um sistema Σ'', que se move em relação à Σ' com velocidade v_2 (medida em relação à Σ'), então infere-se que seja possível escrever diretamente as transformações que levam às coordenadas Σ'' como função das coordenadas de Σ, mas com velocidade v_3 e função $k(v_3)$.

Se v_1 é a velocidade do sistema Σ' em relação a Σ, e v_2 a velocidade de Σ'' em relação a Σ', então, de acordo com (2.49),

$$x' = k(v_1)(x - v_1 t), \; x'' = k(v_2)(x' - v_2 t') \tag{2.51}$$

$$t' = k(v_1)(t - \frac{v_1 x}{\eta(v_1)}), \; t'' = k(v_2)(t' - \frac{v_2 x'}{\eta(v_2)}) \tag{2.52}$$

Pode-se expressar x'' e t'' em termos de x e t, obtendo-se

$$x'' = k(v_2)k(v_1)[x - v_1 t - v_2(t - \frac{v_1}{\eta(v_1)}x)] \tag{2.53}$$

$$t'' = k(v_2)k(v_1)[t - \frac{v_1}{\eta(v_1)}x - \frac{v_2}{\eta(v_2)}(x - vt)] \tag{2.54}$$

Pela exigência mencionada acima, essas transformações podem ser escritas da seguinte forma,

$$x'' = k(v_3)(x - v_3 t) \tag{2.55}$$

$$t'' = k(v_3)(t - \frac{v_3}{\eta(v_3)}x) \tag{2.56}$$

O coeficiente de x na primeira das equações acima e o coeficiente de t na segunda das equações acima, são os mesmos. Com isso, comparando (2.53) e (2.54) com (2.55) e (2.56),

$$k(v_2)k(v_1)[1 + \frac{v_1 v_2}{\eta(v_1)}] = k(v_2)k(v_1)[1 + \frac{v_2 v_1}{\eta(v_2)}] \tag{2.57}$$

Isso só pode ocorrer se

$$\eta(v_1) = \eta(v_2) = const \tag{2.58}$$

A função η, pelas equações (2.50), tem unidade de velocidade quadrática. Para determinar sua magnitude, é necessário considerar fatos experimentais. Para η tendendo a infinito, pode-se perceber que as transformações (2.50) se reduzem às Transformações de Galileu. Porém, estas equações não podem ser usadas quando as variações de massa passam a não ser mais desprezíveis. Neste caso, o Princípio da Relatividade de simultaneidade entre eventos de diferentes sistemas deve ser adotado, e este é incompatível com as transformações de Galileu. Conclui-se, portanto, que η deve ser finito.

Do experimento de Lewis-Tolman (1909) [5] , é sabido que para altas velocidades,

$$\frac{d(mu)}{dt} = F,\ m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{2.59}$$

onde m_0 é a massa do corpo para baixas velocidades, conhecida como *massa de repouso*, e c é uma constante que vale $3.10^8\ m/s$. Como pode ser observado, c^2 na equação acima tem a mesma unidade de η nas equações (2.50), o que leva-nos a considerar como hipótese que $\eta = c^2$. Assim, as transformações (2.50) ficam reescritas como

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.60}$$

Equivalentemente,

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ y = y',\ z = z',\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.61}$$

As equações acima são as chamadas Transformações de Lorentz. Como se percebe, poderia ter se assumido que $\eta = -c^2$ ao invés de $\eta = c^2$. Porém, levando em conta a equação (2.59), isso faria com que a massa diminuísse à medida que a velocidade aumentasse, o que vai contra as evidências experimentais. Outra questão que atesta o fato de que $\eta = c^2$ é que, de acordo com a Teoria da Relatividade Restrita, a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{2.62}$$

deve ter a mesma forma frente à transformação de sistema de referência. E isso é verificado se $\eta = c^2$, pois

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \tag{2.63}$$

Como foi mostrado, chegou-se às Transformações de Lorentz fazendo uso apenas dos conceitos de uniformidade e isotropia do espaço e tempo, do Princípio da Relatividade e das equações experimentais de dependência da massa na velocidade. Portanto, pode-se afirmar que as Transformações de Lorentz expressam, de forma geral, propriedades do espaço e tempo para qualquer processo físico. Independentemente do método utilizado, chega-se sempre às mesmas equações, atestando o fato de que tais relações caracterizam propriedades intrínsecas do espaço e tempo.

2.2 A relatividade da simultaneidade, do tempo e do espaço

Usando as equações (2.60),

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.64}$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.65}$$

Subtraindo as duas equações para x',

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.66}$$

De forma equivalente,

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.67}$$

onde $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ e $\Delta t = t_2 - t_1$. Usando novamente as equações (2.60),

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.68}$$

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.69}$$

Subtraindo as duas equações para t',

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.70}$$

Equivalentemente,

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.71}$$

onde $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ e $\Delta x = x_2 - x_1$.

Para tratar da relatividade da simultaneidade, seja considerado $\Delta t = 0$ (eventos simultâneos no referencial Σ). Fazendo $\Delta t = 0$ em (2.67) e (2.71),

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.72}$$

$$\Delta t' = \frac{-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.73}$$

Desta maneira, se dois eventos ocorrem em pontos diferentes no referencial Σ, de modo que $\Delta x \neq 0$, então

$$\Delta t' = \frac{-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \neq 0 \tag{2.74}$$

Ou seja, eventos simultâneos em Σ não são necessariamente simultâneos em Σ', a menos que os eventos ocorram no mesmo ponto ($\Delta x = 0$).

Para melhor perceber a relatividade no tempo, considera-se $\Delta x = 0$ no referencial Σ, de maneira que, usando (2.71),

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.75}$$

sendo esta relação válida para o observador no sistema Σ'. Pela equação acima, percebe-se que os intervalos de tempo não são iguais em referenciais diferentes, quando se considera $\Delta x = 0$

Para tratar da relatividade do espaço, considera-se uma situação hipotética em que $\Delta x = L$ é o tamanho de uma régua, colocada em repouso em relação ao eixo x no referencial Σ. Para que se determine o comprimento desta régua no referencial Σ', o observador neste referencial deve fazer as medidas das extremidades da régua simultaneamente, de modo que $\Delta t' = 0$. De (2.67) e (2.71),

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.76}$$

$$0 = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.77}$$

As medidas do comprimento da régua, feitas simultaneamente no referencial Σ', não são percebidas como simultâneas no referencial Σ, visto que, da equação (2.77),

$$\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x \tag{2.78}$$

Portanto, inserindo este resultado na equação (2.76) e considerando $\Delta x = L$ e $\Delta x' = L'$, resulta que

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{\gamma} \tag{2.79}$$

onde L' é o comprimento da régua medido no referencial Σ' e γ é o fator de Lorentz, que vale $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Como γ é maior que a unidade, os comprimentos da régua medidos nos referenciais Σ e Σ' são diferentes, atestando a relatividade do espaço. [6]

2.3 Efeito Doppler relativístico

Um dos aspectos muito importantes na Teoria da Relatividade é o Efeito Doppler. A ideia é utilizar as Transformações de Lorentz para derivar as equações do Efeito Doppler e, com isso, analisar o Paradoxo dos Gêmeos, cuja solução mostrará o que já foi discutido anteriormente: o tempo é uma medida relativa, pois só faz sentido se medido em relação à um referencial específico.

A ideia do Efeito Doppler é muito simples, e consiste no fato de que há uma mudança na frequência de um sinal recebido por um objeto em relação à frequência que está sendo emitida por outro objeto, quando os mesmos possuem uma velocididade relativa entre si. Considerando que o sinal é emitido na mesma direção de movimento do observador O' (que está no referencial Σ') (Efeito Doppler radial), quando o observador

O (que está no referencial Σ) emite um sinal de luz de período T, o observador O' medirá um período diferente de T, já que os observadores estão em referenciais diferentes. Não será discutido o Efeito Doppler transversal, que ocorre em direções perpendiculares ao movimento relativo.

Suponhamos que quando o sinal é emitido, O e O' estejam no mesmo ponto, e $t = t' = 0$. Após um período T, um novo sinal é enviado por O, mas aí a velocidade da luz relativa a O' (do ponto de vista de Σ) não é c, mas sim $c - v$.

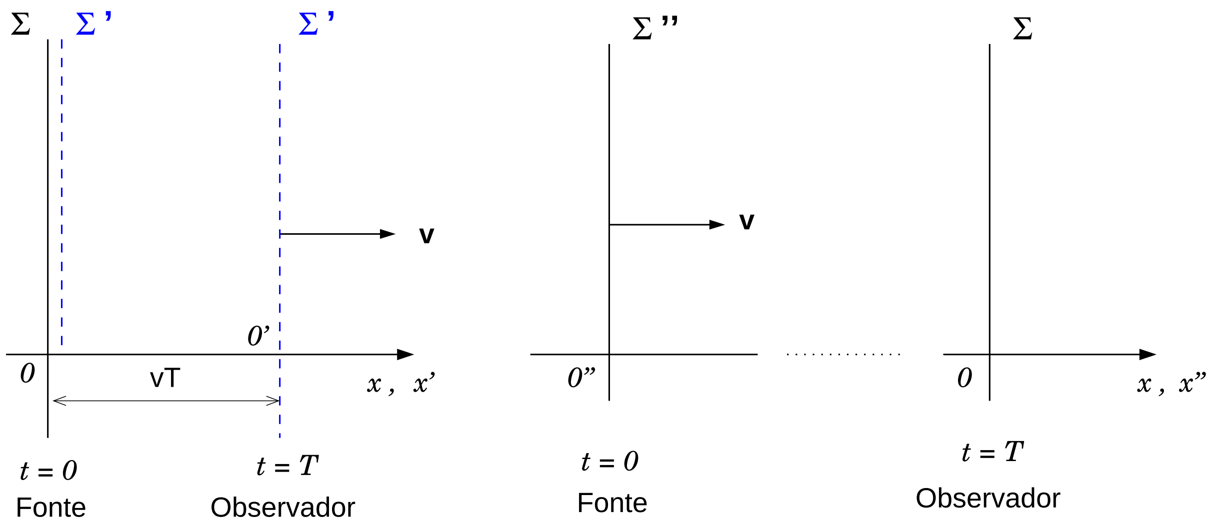

Figura 2.4: **A derivação das equações do Efeito Doppler radial.**

Portanto, um raio de luz precisará de um tempo a mais para atingir O', dado por $vT/(c - v)$. Por conseguinte, o observador O' irá receber o sinal após um período de tempo

$$T' = T + \frac{vT}{c - v} = (1 + \frac{v/c}{1 - v/c})T = (\frac{1}{1 - \beta})T \tag{2.80}$$

onde $\beta = v/c$ é chamado de fator relativístico. O valor do intervalo medido em Σ' pode ser obtido através da relação de dilatação temporal (2.75). Sabendo que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}}$,

$$T'_0 = \frac{T'}{\gamma} \tag{2.81}$$

onde T'_0 é chamado de tempo próprio do observador O', pois é medido em seu referencial, e deve ser visto como Δt na equação (2.75), enquanto T' deve ser visto como $\Delta t'$ na mesma equação. Levando em conta as equações (2.80) e (2.81),

$$T'_0 = \frac{1}{1-\beta} T \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} T \tag{2.82}$$

Definindo $f_0 = \frac{1}{T}$ e $f' = \frac{1}{T'_0}$, tem-se que

$$f' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_0 \tag{2.83}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração dentro da raiz por $(1-\beta)$ e ignorando o termo β^2 no denominador, se obtém o resultado aproximado de f', que vale

$$f' \simeq f_0(1-\beta) \tag{2.84}$$

No caso do observador estar viajando em direção ao sistema de referência Σ, a velocidade do sinal em relação a este sistema de referência é $c+v$. Fazendo o mesmo processo anterior, porém considerando a velocidade do sinal como $c+v$,

$$T'' = \frac{1}{1+\beta} T \tag{2.85}$$

$$T''_0 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} T \tag{2.86}$$

Da onde se chega a

$$f'' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f_0 \simeq f_0(1+\beta) \tag{2.87}$$

O que este resultado mostra é que uma fonte emissora que se afasta de um referencial e que emite um sinal de frequência f_0(no referencial Σ), será visto por um observador (no referencial Σ') com uma frequência menor, simbolizada acima por f' (desvio para o vermelho). Por outro lado, quando este mesmo sinal f_0 é emitido por uma fonte que se aproxima do observador, o mesmo medirá uma frequência maior, simbolizada acima por f'' (desvio para o azul). Este resultado será fundamental para a discussão sobre o Paradoxo dos Gêmeos.

3 O Paradoxo dos Gêmeos

3.1 O Paradoxo dos Gêmeos

Muito conhecido na Relatividade Restrita, o Paradoxo dos Gêmeos trata da situação de dois irmãos gêmeos em que um deles fica na Terra (denominado aqui por Z_1) e o outro parte em viagem (denominado Z_2). Considerando o efeito de dilatação temporal, o paradoxo se dá no momento em que se faz o seguinte raciocínio: para o irmão Z_1, o tempo passa mais rapidamente do que para o irmão Z_2 devido ao efeito de dilatação temporal. Semelhantemente, para o irmão 2, o tempo passa mais rapidamente do que para seu irmão que ficou na Terra; portanto, qual dos gêmeos terá envelhecido mais caso os dois se encontrem novamente?

Uma das explicações mais conhecidas para este paradoxo é que não se pode considerar as leis da Relatividade Restrita para esse caso, visto que o irmão em viagem teria que sofrer aceleração para retornar à Terra. Desta forma, é necessário que se considere a Relatividade Geral, pois trata-se de um referencial acelerado. Todavia, através do Efeito Doppler relativístico, é possível mostrar que, embora ambos os irmãos enxerguem a situação de forma semelhante - ou seja, para Z_1 o tempo passa mais rapidamente para si do que para seu irmão e, da mesma forma, para Z_2, o tempo passa mais rapidamente para si do que para o outro -, o envelhecimento do que fica na Terra de fato acontece, e isso ocorre somente porque Z_2 cruza a linha de mundo de Z_1 na volta, sendo linha de mundo, por definição, a sequência de eventos de um objeto em seu referencial. É justamente ao iniciar a viagem de retorno que o irmão viajante muda para um outro referencial inercial, o que o leva a um salto no tempo. Trata-se de um efeito puramente cinético, como será demonstrado logo adiante. [7]

Admite-se que Z_1 fica na Terra e que Z_2 parte em viagem para uma estrela qualquer denominada U e que tanto a viagem de ida quanto a de volta ocorram de maneira simétrica, com velocidades de mesmo módulo; supondo-se também que, durante o desenrolar da viagem, a distância d entre a Terra e a estrela U não varie. Isso pode ser visto na Figura 3.1, onde está sendo utilizado o Diagrama de Minkowski, ferramenta esta que possibilita a comparação entre diferentes referenciais. Olhando do ponto de vista do irmão Z_2, e portanto do seu referencial, ele pode dizer que a realidade na Terra (e portanto Z_1) afasta-se dele com velocidade $-v$, ao passo que a estrela U aproxima-se com velocidade v. Passado um tempo $T'/2$, medido em seu referencial, a estrela e a Terra invertem suas velocidades instantaneamente (de $-v$ para v e vice-versa) e, depois de um tempo igual, a Terra o alcança. Pela Relatividade Restrita, do ponto de vista de Z_2, foi seu irmão junto ao planeta Terra que viajou e portanto ele (Z_2) deve envelhecer mais, em contradição à conclusão de Z_1, que também acha que ele (Z_1) envelheceu mais.

Para medir o tempo de viagem no referencial de Z_1 e Z_2, faz-se o uso de sinais luminosos que são enviados um para o outro. Ambos possuem aparelhos emissores idênticos, que envia sinais com uma frequência fixa f_0 (quando vista de seus respectivos referenciais). A análise a ser feita será dividida em duas partes: primeiro a viagem de ida e volta de Z_2 vista por Z_1, e depois a viagem de ida e volta de Z_1, vista por Z_2.

3.1.1 A viagem de Z_2 vista por Z_1

O gêmeo (Z_2) que parte em viagem emite constantemente sinais de luz para o irmão que está na Terra. Considerando o Efeito Doppler relativístico (Eq. 2.83), Z_1 receberá o sinal com uma frequência

$$f_2^i = f_0\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \tag{3.1}$$

onde o índice 2 significa que os sinais são emitidos pelo irmão 2, e o índice i significa que a viagem é de ida. O tempo que Z_1 demorará para saber que Z_2 reverteu seu trajeto vale,

$$t_1 = \frac{T}{2} + \frac{d}{c} \tag{3.2}$$

onde d é a distância entre a Terra e a estrela (medida por Z_1). O número de pulsos que Z_1 receberá de Z_2, neste intervalo de tempo t_1, será

$$N_2^i = f_2^i t_1 \tag{3.3}$$

Levando em conta que

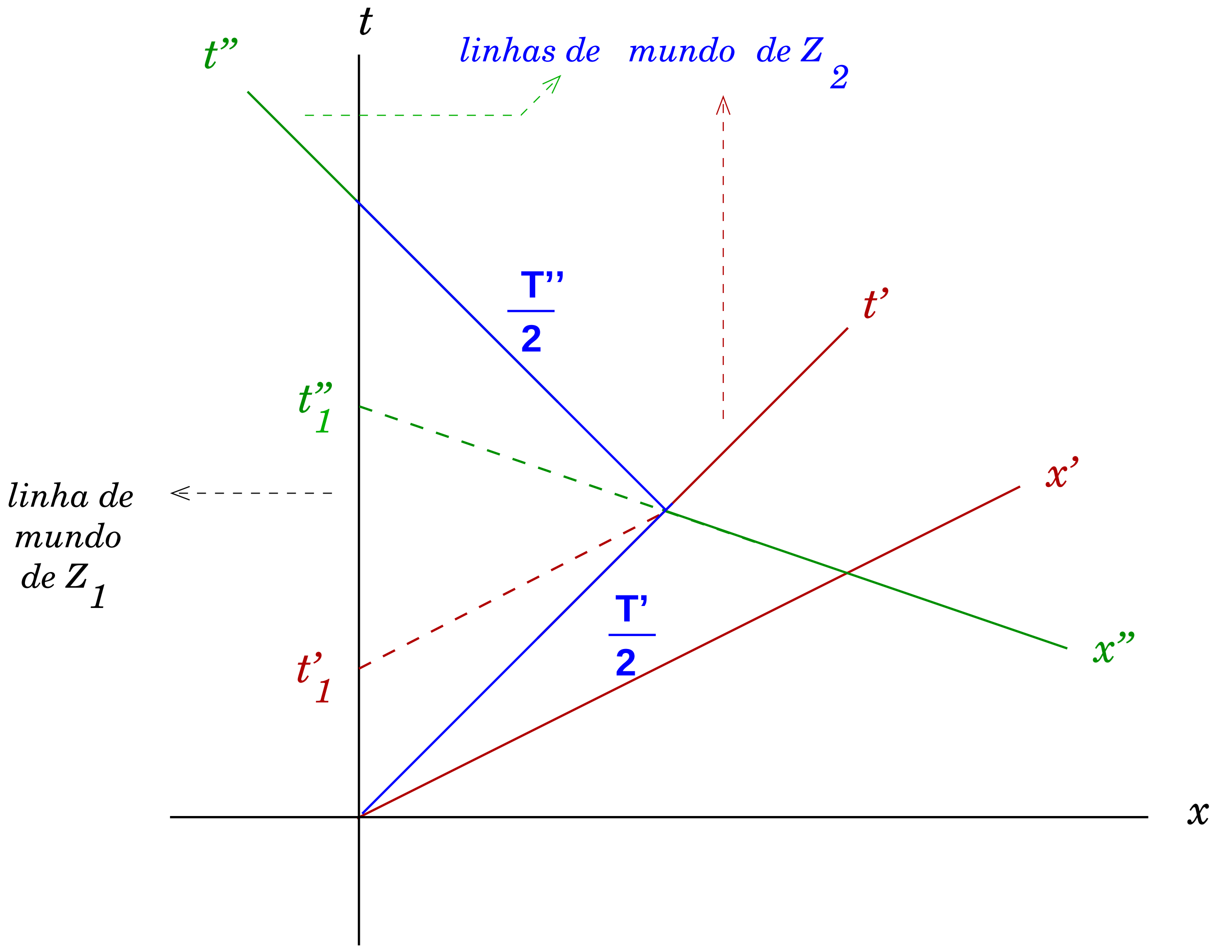

Figura 3.1: **Diagrama de Minkowski para a viagem. O eixo em cor negra representa o referencial da Terra. Os dois eixos, em vermelho e verde, representam as coordenadas do gêmeo viajante, Z_2, nas viagens de ida e volta, respectivamente, como representadas no referencial da Terra. As linhas de mundo deste viajante são representadas em azul, pelos eixos t' e t''. A linha de mundo do gêmeo Z_1, que permaneceu na Terra, é o eixo t em negro.**

$$\frac{T}{2} = \frac{d}{v} \tag{3.4}$$

e considerando as equações (3.1) e (3.2), chega-se a

$$N_2^i = f_0 \frac{d}{v} \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{3.5}$$

Tratando agora da viagem de volta de Z_2. Visto que a velocidade deste irmão muda de sinal, ter-se-á que a frequência medida por Z_1, de acordo com (2.87), agora será,

$$f_2^v = f_0\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \tag{3.6}$$

onde o índice v indica que a viagem é de volta. Levando em conta que o intervalo da volta vale $T - t_1$, o número de pulsos recebidos por Z_1 na viagem de volta vale,

$$N_2^v = f_2^v(T - \frac{T}{2} - \frac{d}{c}) \tag{3.7}$$

O que equivale a

$$N_2^v = f_2^v\frac{d}{v}(1 - v/c) \tag{3.8}$$

Usando a equação (3.6),

$$N_2^v = f_0\frac{d}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{3.9}$$

Portanto, o número total de pulsos recebidos por Z_1 será

$$N_2 = N_2^i + N_2^v = 2f_0\frac{d}{v}\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{3.10}$$

$$N_2 = f_0T\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{3.11}$$

Em contrapartida, o número de sinais emitidos por Z_1 foi

$$N_1 = f_0T \tag{3.12}$$

Comparando N_1 e N_2, percebe-se que

$$N_1 > N_2 \tag{3.13}$$

pois,

$$f_0 T > f_0 T \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{3.14}$$

Logo,

$$T' < T \tag{3.15}$$

3.1.2 A viagem de Z_1 vista por Z_2

Agora, do ponto de vista de Z_2, Z_1 se afasta com velocidade $-v$. Então, o tempo total de viagem de Z_1 será

$$T' = \frac{T'}{2} + \frac{T'}{2} \tag{3.16}$$

Para Z_2, a distância Terra-Estrela não é d, pois deve-se considerar a contração espacial (2.79). Portanto,

$$d' = \frac{d}{\gamma} = \frac{T'}{2}(-v) \tag{3.17}$$

onde d' é a distância Terra-Estrela medida por Z_2 no referencial Σ'. A frequência dos sinais emitidos por Z_1 e captados por Z_2 será

$$f_1^i = f_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \tag{3.18}$$

O tempo t_1' no qual Z_2 muda de direção é

$$t_1' = \frac{T'}{2} \tag{3.19}$$

O número de sinais recebidos por Z_2 até o tempo t_1' vale

$$N_1^i = f_1^i t_1' = \frac{T'}{2} f_1^i = f_0 \frac{d}{v}(1 - v/c) \tag{3.20}$$

Tratando agora a viagem de volta,

$$f_1^v = f_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \tag{3.21}$$

E,

$$d'' = \frac{d}{\gamma} = d' \tag{3.22}$$

O número de sinais captados por Z_2 será

$$N_1^v = f_1^v \frac{T'}{2} = f_0 \frac{d}{v}(1 + v/c) \tag{3.23}$$

Então,

$$N_1 = N_1^i + N_1^v = f_0(\frac{2d}{v}) \tag{3.24}$$

Sendo o número de sinais emitidos por Z_2 durante a viagem igual a

$$N_2 = f_0 T' = f_0 \frac{2d}{v\gamma} \tag{3.25}$$

Portanto,

$$T = \frac{2d}{v} > T' \tag{3.26}$$

Ou seja, em ambos os referencias $T > T'$ e, portanto, ocorre de fato o efeito de envelhecimento de Z_1

Concluímos assim que o efeito de envelhecimento do irmão que ficou na Terra é real e tem uma causa puramente cinética, relacionada à mudança de referencial do gêmeo viajante. Isso se deve ao fato de que a linha de mundo de Z_2 cruza a de Z_1 na viagem de volta e, portanto, somente em razão disso, há sentido em se comparar as idades dos dois. Se Z_2 viajasse indefinidamente, de tal modo que sua linha de mundo não mais cruzasse a linha de mundo de Z_1, não faria sentido a comparação de idades adotando-se o ponto de vista de ambos - fato este que cria o paradoxo -, pois é necessário que as comparações sejam feitam em relação a apenas um sistema de referência, o que é verificado quando as linhas de mundo dos dois irmãos se cruzam.

Concluímos que, sem levar em conta o fato de que, numa situação real, o irmão Z_2 necessitaria sofrer acelerações e desacelerações par se afastar e depois inverter sua velocidade para empreender a viagem de volta - o que faz com que ele esteja em algum momento em um referencial não-inercial e o Princípio da Relatividade deixa de ser válido - mesmo na situação em que as acelerações não existem, o envelhecimento do irmão Z_1 pode ser deduzido do efeito cinético da dilatação temporal na Relatividade Restrita. Pode-se argumentar que a situação da viagem é artificial, pois Z_2 muda instantaneamente de referencial inercial, caracterizada por (x', t') na ida e por (x'', t'') na volta. Pode-se, portanto, ver este experimento como um *Gedankenexperiment* (em alemão, *experimento mental*), o que mostra que, em princípio, não é necessário utilizar a Relatividade Geral [8] para explicar o paradoxo.

4 Conclusão

Entre as mais importantes teorias da Física, a Teoria da Relatividade sempre despertou um grande interesse e levantou várias questões acerca da natureza do tempo. Como já dito, o tema *tempo* sempre foi algo muito discutido e debatido por cientistas, filósofos e pessoas no geral. Afinal, quem consegue responder à pergunta: *O que é o tempo?*

Através da dedução das Transformações de Lorentz, feita neste trabalho, ficou evidente o fato de que a medida de tempo é algo que depende de um sistema de referência, e que portanto só faz sentido se for realizada em um referencial específico, em relação a outro. Partiu-se de um sistema puramente mecânico e concluiu-se que, perante uma mudança de sistema de referência inercial, se o espaço for uniforme e isotrópico, as quantidades físicas devem se transformar de acordo com as Transformações de Lorentz. Isso se deve ao fato de que as propriedades de cada sistema devem se manter invariantes, pois não há motivo para supor que existam referenciais privilegiados.

Como foi visto no caso do Paradoxo dos Gêmeos, constatou-se que o irmão que ficou na Terra envelheceu mais do que o seu irmão que viajou, devido ao cruzamento de suas linhas de mundo, fato este que possibilita a comparação de medidas do tempo porque considera os dois no mesmo referencial. Caso suas linhas de mundo não mais se cruzassem após a partida de Z_2, não faria sentido a comparação das idades levando em consideração os referenciais de cada um, situação esta que gera o paradoxo. Mesmo desconsiderando o efeito das acelerações, o irmão que ficou na Terra de fato envelheceu mais que o outro irmão, devido a um efeito puramente cinético da dilatação temporal na Relatividade Restrita.

Referências Bibliográficas

[1] A. Einstein, *Über die Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17** (1905), 891. *Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento* em *Textos fundamentais da Física Moderna*, vol. I, 3a. edição, Fundação Calouste Gulbenkian, p. 47.

[2] H. Minkowski, *Raum und Zeit*, Physikalische Zeitschrift 10 (1909), 104. *Espaço e tempo* em *Textos fundamentais da Física Moderna*, vol. I, 3a. edição, Fundação Calouste Gulbenkian, p. 93.

[3] M. Paty, *Pensamento Racional e Criação Científica em Poincaré*, Scientiae Studia, vol. 8 no. 2, São Paulo, 2010.

[4] Y. P. Terletskii, *Paradoxes in the Theory of Relativity*, Plenum Press, Nova Iorque, 1968.

[5] G. N. Lewis and R. C. Tolman, *The Principle of Relativity and non Newtonian mechanics*, Philos. Mag. **18**, 510-523 (1909).

[6] R. Resnick, *Introdução à Relatividade Especial*, Ed. USP/Polígono, SP, 1971.

[7] H. Goenner, *Spezielle Relativitätstheorie und die klassische Feldtheorie*, Spektrum Verlag, Heildelberg, 2003.

[8] C. Moller. *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, Londres, 1952.