

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução da Equação de  
Transporte Dependente do  
Tempo em Multi-Regiões pelo  
Método  $LTS_N$**

por

Sabrina Bobsin Salazar

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Profa. Dra. Cynthia Feijó Segatto  
Orientadora

Porto Alegre, Janeiro de 2008.

**CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO**

Salazar, Sabrina Bobsin

Solução da Equação de Transporte Dependente do Tempo em Multi-Regiões pelo Método  $LTS_N$  / Sabrina Bobsin Salazar.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2008.

50 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2008.

Orientadora: Segatto, Cynthia Feijó

Dissertação: Matemática Aplicada  
Equação de Transporte, Método  $LTS_N$

# Solução da Equação de Transporte Dependente do Tempo em Multi-Regiões pelo Método $LTS_N$

por

Sabrina Bobsin Salazar

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Teoria de Transporte e Transformadas Integrais

Orientadora: Profa. Dra. Cynthia Feijó Segatto

Banca examinadora:

Prof. Dr. Augusto Vieira Cardona  
FAMAT/PUC-RS

Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena  
PPGMAp/IM/UFRGS

Prof. Dr. Ricardo Carvalho de Barros  
IPRJ/UERJ

Dissertação apresentada e aprovada em  
24 de Janeiro de 2008.

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale  
Coordenador(a)

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à professora Cynthia Feijó Segatto pela orientação e ajuda na realização deste trabalho. Agradeço também ao professor Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena pelo apoio durante o período em que fui aluna do PPGMAp. Agradeço, novamente, à professora Cynthia Feijó Segatto, juntamente à comissão de Pós-graduação do PPGMAp pela compreensão durante todo o processo de realização deste trabalho.

Agradeço à colega Tífani, pela ajuda na obtenção dos resultados numéricos.

Agradeço aos amigos Cíntia e Bagé pelo apoio da defesa desta dissertação.

Agradeço aos membros da banca examinadora, em particular ao professor Augusto Vieira Cardona pela atenção na fase das correções deste trabalho.

De uma forma muito especial, agradeço a meu esposo, Eduardo. Agradeço pelo apoio, quando precisei de apoio, agradeço pelo carinho, quando precisei de carinho e agradeço, inclusive, os xingamentos, pois sei que também precisei de alguns. Agradeço ao Eduardo, por toda a companhia nos momentos difíceis e espero que possamos, agora, aproveitar os bons dias que estão por vir.

## Conteúdo

AGRADECIMENTOS . . . . .	I
LISTA DE FIGURAS . . . . .	III
LISTA DE TABELAS . . . . .	IV
RESUMO . . . . .	V
ABSTRACT . . . . .	VI
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 O MÉTODO $LTS_N$ . . . . .	6
2.1 Método $LTS_N$ : Domínio Homogêneo . . . . .	6
2.2 Método $LTS_N$ : Domínio Heterogêneo . . . . .	12
2.2.1 Método $LTS_N$ : 2 Regiões . . . . .	13
2.2.2 Método $LTS_N$ : $k$ Regiões . . . . .	14
3 A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DEPENDENTE DO TEMPO	19
3.1 O método $TLTS_N$ . . . . .	20
3.1.1 Inversão numérica da transformada de Laplace por fórmula de quadratura	26
4 O PROBLEMA EM DOMÍNIO HETEROGÊNEO . . . . .	28
4.1 O Problema Heterogêneo: 2 Regiões . . . . .	28
4.2 O Problema Heterogêneo: $k$ Regiões . . . . .	30
5 RESULTADOS NUMÉRICOS . . . . .	35
5.1 Problema Homogêneo . . . . .	35
5.2 Problema Heterogêneo . . . . .	38
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	40
BIBLIOGRAFIA . . . . .	41

## Lista de Figuras

Figura 2.1	Placa dividida em 2 regiões. . . . .	13
Figura 2.2	Placa dividida em $k$ regiões. . . . .	15
Figura 4.1	Placa dividida em 2 regiões para problema dependente do tempo. . . . .	29
Figura 4.2	Placa dividida em $k$ regiões para problema dependente do tempo. . . . .	31
Figura 5.1	Figura ilustrando a seqüência de problemas resolvidos. . . . .	38

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1	Resultados Numéricos para a taxa de absorção pelos métodos TLTS <sub>N</sub> e SP <sub>M</sub> -LTS <sub>N</sub> . . . . .	36
Tabela 5.2	Resultados Numéricos para a taxa de absorção pelos métodos TLTS <sub>N</sub> e SP <sub>18</sub> -LTS <sub>N</sub> . . . . .	37
Tabela 5.3	Resultados Numéricos para o fluxo escalar pelos métodos TLTS <sub>8</sub> e SP <sub>18</sub> -LTS <sub>8</sub> nos pontos $x = 5, 6, 7$ e $8$ . . . . .	37
Tabela 5.4	Resultados numéricos para o fluxo escalar com $N = 10$ em $t = 0.1$ pelo método TLTS <sub>N</sub> . . . . .	39

## RESUMO

Uma classe de problemas de transporte de interesse na comunidade científica são os problemas de transporte dependentes do tempo. Mas a solução analítica de problemas desse tipo é, em geral, complexa, quando possível de se obter em forma fechada. Pela aproximação de ordenadas discretas  $S_N$ , as soluções analíticas encontradas na literatura para problemas unidimensionais dependentes do tempo em domínio finito são: solução pelas aproximações de Pomraning-Endington e a solução pelo método SP-LTS<sub>N</sub>. Recentemente, foi desenvolvida uma solução analítica, denominada TLTS<sub>N</sub>, em forma integral para a equação unidimensional de ordenadas discretas dependente do tempo para domínio homogêneo. Neste trabalho, estendemos esta formulação para domínios heterogêneos. Para isto, dividimos a placa original em pequenas placas, onde, em cada uma delas, podemos considerar domínio homogêneo. Em cada uma das placas, aplicamos o método TLTS<sub>N</sub>, conforme desenvolvido anteriormente e para a solução final, aplicamos as condições de continuidade e de contorno ao problema acoplado.



## ABSTRACT

One kind of transport problems that has been of interest in the scientific community is the time-dependent transport problem. But the analytical solution of this type of problems is very complicated. By the  $S_N$  discrete ordinates approximation, the solutions for slab geometry time-dependent problems in finite domain found in the literature are: the solution using the Pomraning-Endington approximation and the solution by the SP-LTS $_N$  method. Recently, an analytical solution, termed TLTS $_N$ , has been developed in an integral form for one-dimensional time-dependent  $S_N$  discrete ordinates approximation for a homogeneous domain. In this work, we expand this formulation for heterogeneous domains. To do that, we divide the original slab in small slabs, and we consider each one as a homogeneous domain. In each slab, we use the TLTS $_N$  method and for the final solution, we apply appropriate continuity and boundary conditions to the coupled problem.

# 1 INTRODUÇÃO

Um dos métodos mais usados para resolver problemas de transporte de partículas é o método de ordenadas discretas. Este método foi introduzido por Chandrasekhar na década de 40 em seus estudos de transferência radiativa em atmosferas planetárias [Chandrasekhar, 1950]. Este método consiste na transformação de uma equação integro-diferencial em um sistema de equações diferenciais ordinárias através da aproximação do termo integral por quadratura gaussiana e discretização da variável angular. O método desenvolvido por Chandrasekhar encontra de forma analítica a solução deste sistema de equações, através de uma combinação linear de exponenciais que satisfazem a equação de ordenadas discretas unidimensional em geometria plana. Os termos desta combinação linear dependem de dois conjuntos de parâmetros: o primeiro é o conjunto de valores no argumento das exponenciais, que são determinados como raízes de um polinômio, e o segundo um conjunto de coeficientes, que são determinados a partir das condições de contorno. As dificuldades numéricas inerentes ao método de Chandrasekhar para encontrar os autovalores e autovetores do problema são discutidos no trabalho de Liou [Liou, 1973]. Nos últimos anos, uma atenção especial tem sido dada à solução analítica das equações de ordenadas discretas (equações  $S_N$ ) em geometria cartesiana unidimensional, como podemos ver em trabalhos de Siewert e colaboradores [Garcia e Siewert, 2005] [Siewert e Valougeorgis, 2002] [Barichello et al., 2002] [Barichello e Siewert, 1998]. Também, nas últimas duas décadas, apareceu na literatura o método  $LTS_N$ , cuja idéia básica é a solução das equações  $S_N$  através da aplicação da transformada de Laplace na variável espacial, transformando o problema em um sistema algébrico dependente do parâmetro complexo  $s$ . Este sistema algébrico é então resolvido para o fluxo transformado e a transformada inversa é feita de forma analítica, obtendo-se assim uma expressão para o fluxo angular de partículas.

Esta metodologia tem sido aplicada a uma classe abrangente de problemas de transporte de partículas neutras, entre os quais destacamos: problemas de

transporte unidimensionais em meio homogêneo [Barichello e Vilhena, 1993], que foi um dos primeiros problemas resolvidos pelo método  $LTS_N$  e, também, em meio heterogêneo, quando o domínio é subdividido em regiões de tal forma que possamos considerar o problema homogêneo em cada uma dessas regiões [Tavares, 2000] ou quando o meio é composto por dois materiais em mistura aleatória [Vasques, 2005]; modelos com um grupo [Barichello, 1992] e com multigrupos de energia [Vilhena e Barichello, 1995]; com ou sem simetria azimutal [Segatto e Vilhena, 1994] [Segatto, 1995] [Vilhena e Segatto, 1996] [Brancher et al., 1999], sendo que, neste último, foi resolvido um problema de transferência radiativa utilizando um método recursivo, que combina a decomposição de Schur e o método de particionamento, para a inversão da matriz associada ao problema [Segatto et al., 1999a]. Este método foi desenvolvido para resolver problemas sem simetria azimutal, que requerem alta ordem de quadratura para a obtenção de bons resultados. Mas mesmo para problemas com simetria azimutal se a ordem de quadratura ( $N$ ) é grande, é preciso grande esforço computacional para inverter a matriz associada. Problemas com elevada ordem de quadratura e para grandes espessuras já foram resolvidos pelo método  $LTS_N$  [Gonçalves, 1999] [Gonçalves et al., 2000], e nesse caso foi utilizada a técnica da diagonalização [Segatto et al., 1999b] para a inversão da matriz associada e uma mudança de variáveis que elimina o problema de *overflow* para esse tipo de placa. O método  $LTS_N$  já foi estendido para modelos de variável angular contínua [Segatto e Vilhena, 1997], para o caso onde  $N$  é inteiro [Bonemberger, 2005] e para o caso onde a razão de espalhamento  $c=1$  [Marona et al., 2007]. Além disso, o método  $LTS_N$  já foi implementado computacionalmente com um algoritmo em paralelo [Souto et al., 2003] e também já foi implementado utilizando uma abordagem multigrid [Santos, 2005] [Segatto et al., 2005]. O método  $LTS_N$  já foi combinado com o método da decomposição de Adomian para resolver problemas lineares e não lineares [Vargas e Vilhena, 1997] [Vargas e Vilhena, 1999] [Vilhena e Barichello, 1999].

O método  $LTS_N$  também já foi utilizado em diversas aplicações, dentre as quais podemos citar: problema de transferência radiativa com polarização [Simch, 2006] [Simch et al., 2006], no qual os autovalores da matriz associada são

complexos; solução da equação adjunta de nêutrons [Gonçalves et al., 2002], solução da equação de transferência radiativa condutiva [Lemos, 2000] e solução da equação de transferência radiativa do calor [Vargas et al., 2007]. O método também tem aplicações em problemas de engenharia nuclear [Borges e Vilhena, 2002], problemas de determinação de criticalidade [Batistela e Vilhena, 1997b] [Batistela e Vilhena, 1997a] [Batistela et al., 1999] [Orengo et al., 2004] e determinação de parâmetros radiantes [Segatto et al., 2001]. Além disso, o método também foi utilizado na resolução de problemas de aplicação na área de ótica hidrológica [Retamoso et al., 2002] [Velho et al., 2002] [Velho et al., 2003], onde é resolvido um problema inverso não-linear.

Devemos ainda observar que as equações  $S_N$  aproximam a equação de transporte, e que já foi provada, por Pazos e Vilhena [Pazos e Vilhena, 1999b] [Pazos e Vilhena, 1999a] a convergência desta solução para a solução exata desenvolvida por Case [Case, 1960]. A idéia central deste método também já foi aplicada a problema de transporte em geometria cilíndrica usando a transformada de Hankel [Vilhena et al., 2004] e na esfera utilizando a idéia desenvolvida por Mitsis [Vasques et al., 2003]. Também temos que ressaltar que esta metodologia não está limitada a problemas unidimensionais. A formulação  $LTS_N$  também foi estendida a problemas de transporte multidimensionais em geometria cartesiana, tanto aplicada a nêutrons [Zabadal et al., 1995] [Hauser et al., 2002] [Hauser et al., 2003] quanto a fótons e elétrons [Amaral Rodriguez et al., 2006] [Amaral Rodriguez et al., 2007], bem como a problemas em geometrias bi-dimensionais convexas [Zabadal et al., 1997]. Finalmente precisamos chamar atenção que a convergência do método também foi mostrada por Hauser et al. [Hauser et al., 2005].

Uma classe de problemas de transporte de interesse na comunidade científica são os problemas de transporte dependentes do tempo. Mas a solução desse tipo de problemas não é simples e, usualmente, são feitas simplificações para que o problema possa ser resolvido. Ainda assim, há uma vasta literatura sobre o assunto quando se tratam de soluções numéricas; dentre elas podemos citar: solução

da equação de transporte  $S_N$  unidimensional dependente do tempo em domínio finito pelo método nodal [Barros et al., 1998], obtenção de *benchmark* numérico em geometria plana e esférica para problemas unidimensionais através de métodos clássicos para solução de equações integrais [Olson e Herderson, 2004] e solução de problemas multidimensionais através de elementos ou volumes finitos [Aydin et al., 2005] [Chai, 2004] [Chai e Lama, 2004]. Também devemos citar a extensa contribuição de Ganapol na obtenção de soluções analíticas para problemas unidimensionais dependentes do tempo em domínio infinito ou semi-infinito, usualmente pelo método *multiple collision*. Dentre os trabalhos de Ganapol podemos citar: problemas em coordenadas cilíndricas e esféricas [Ganapol, 1976], problemas com reflexão especular [Ganapol, 1982] e problemas anisotrópicos [Ganapol e Filippone, 1982] [Ganapol, 1986]. Além das soluções obtidas por Ganapol, encontramos, na literatura, outras soluções analíticas ou semi-analíticas para problemas de transporte dependentes do tempo em domínio infinito ou semi-infinito como, por exemplo, soluções pelo método da máxima entropia [Abdou, 2005] [Abdou, 2006] e solução para problemas em meio estocástico [El-Wakil et al., 2004] [El-Wakil et al., 2005]. Porém, para problemas em domínio finito, as soluções analíticas ou semi-analíticas são poucas. Para o problema de ordenadas discretas  $S_N$  encontramos a solução pelas aproximações de Pomraning-Endington [El-Wakil e Sallah, 2004] [El-Wakil, 2006] e também pelo método SP-LTS $_N$  [Oliveira et al., 2002b], que é uma combinação dos métodos espectral e LTS $_N$ .

Recentemente, Gonzalez et al. [Gonzalez et al., 2007] desenvolveram uma solução analítica em forma integral para a equação unidimensional de ordenadas discretas dependente do tempo. Este método, que recebeu o nome de TLTS $_N$ , aplica a transformada de Laplace na variável temporal  $t$  transformando assim o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, na variável espacial. A solução deste sistema é então encontrada, de forma analítica pelo método LTS $_N$ . Neste trabalho, vamos seguir esta idéia para estendermos esta formulação para resolver problemas de transporte  $S_N$  em uma placa heterogênea. Para isto, dividimos o domínio unidimensional em subconjuntos homogêneos. Em

cada uma destas sub-placas, encontramos a solução pelo método  $TLTS_N$  e por fim aplicamos as condições de continuidade e contorno ao problema acoplado. Com esta finalidade dividimos esta dissertação da seguinte forma: no capítulo 2, fazemos uma revisão do método  $LTS_N$  com a sua formulação mais recente; no capítulo 3, fazemos a aplicação do método  $TLTS_N$  para o problema de transporte unidimensional dependente do tempo para domínio homogêneo; no capítulo 4, fazemos a extensão do método  $TLTS_N$  para domínio heterogêneo; no capítulo 5, apresentamos resultados numéricos e no capítulo 6, relatamos nossas conclusões e nossa proposta para futuros trabalhos.

## 2 O MÉTODO $LTS_N$

O método  $LTS_N$  resolve de forma analítica as equações  $S_N$  que aproximam a equação unidimensional de transporte de partículas em uma placa, considerando uma fonte arbitrária. No método  $LTS_N$ , primeiramente aplicamos a transformada de Laplace na variável espacial e encontramos assim um sistema algébrico, dependente de um parâmetro complexo  $s$ , para o fluxo angular de partículas transformado. Em um segundo passo, resolvemos este sistema algébrico para o fluxo transformado e, finalmente, determinamos o fluxo angular de partículas pela aplicação da transformada inversa de Laplace.

### 2.1 Método $LTS_N$ : Domínio Homogêneo

Para descrevermos o método  $LTS_N$ , consideramos a equação de transporte linear unidimensional monoenergética estacionária com simetria azimutal dada por,

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \sigma_t \Psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 p(\cos \Theta) \Psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu) \quad (2.1)$$

onde  $x \in [0, x_0]$ ,  $\mu \in [-1, 1]$ .

Aqui, para descrevermos o método, vamos considerar que conhecemos o fluxo de partículas incidente na fronteira da placa, isto é,

$$\Psi(0, \mu) = f(\mu) \text{ e } \Psi(x_0, -\mu) = g(\mu) \text{ para } \mu > 0. \quad (2.2)$$

A função  $\Psi(x, \mu)$  representa o fluxo angular de partículas, que depende de duas variáveis: a primeira é a variável de posição  $x \in [0, x_0]$  e a segunda é a variável de direção  $\mu \in [-1, 1]$ , onde  $\mu = \cos(\theta)$  com  $\theta$  sendo o ângulo polar. Na equação (2.1),  $\sigma_s$  representa a seção de choque macroscópica de espalhamento e  $\sigma_t$  a seção

de choque macroscópica total. A função de espalhamento está representada por  $p(\cos \Theta)$ , onde  $\Theta$  é o ângulo formado pela direção da partícula antes da interação e a direção da partícula após a interação. Finalmente,  $Q(x, \mu)$  é uma fonte externa de partículas.

A função de espalhamento pode ser aproximada através de uma série truncada em polinômios de Legendre e usamos o teorema da adição para os polinômios de Legendre resultando em

$$p(\cos \Theta) = \sum_{m=0}^M \sum_{\ell=m}^L \beta_{\ell}^m P_{\ell}^m(\mu') P_{\ell}^m(\mu) \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (2.3)$$

onde  $\varphi$  é o ângulo azimutal formado com um ângulo de referência  $\varphi'$ ,  $P_{\ell}^m(\mu)$  são funções associadas de Legendre e

$$\beta_{\ell}^m = \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \beta_{\ell}, \quad (2.4)$$

onde os coeficientes  $\beta_{\ell}$  são tabelados. Como neste trabalho vamos considerar que o fluxo angular de partículas possui simetria azimutal, temos que  $M = 0$  na equação (2.3). Desta forma obtemos a seguinte equação:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \sigma_t \Psi(x, \mu) = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu') P_{\ell}(\mu) \Psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu). \quad (2.5)$$

Para obtermos as equações de ordenadas discretas associadas à equação (2.5), seguindo a idéia de Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1950], aproximamos o termo integral desta equação por quadratura de Gauss-Legendre de ordem  $N$  e logo após, aplicamos o método da colocação na variável angular  $\mu$ , considerando o Delta de Dirac como *função teste* e como pontos de colocação as  $N$  raízes do polinômio de Legendre de grau  $N$ . Desta forma, a aproximação  $S_N$  da equação de transporte unidimensional estacionária em uma placa é escrita como,

$$\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_m(x) + \sigma_t \Psi_m(x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} \sum_{k=0}^N \Psi_k(x) \omega_k P_{\ell}(\mu_m) P_{\ell}(\mu_k) + Q_m(x), \quad (2.6)$$

para  $m = 1, 2, \dots, N$  onde  $\mu_m$  e  $\omega_k$  são, respectivamente, as  $N$  direções discretas ordenadas de forma decrescente e os pesos da fórmula de quadratura;



$\Psi_m(x)$  e  $Q_m(x)$  são, respectivamente, o fluxo angular e a fonte na direção  $\mu_m$ , e usando o mesmo procedimento nas condições de contorno temos

$$\Psi_m(0) = f_m \text{ e } \Psi_{m+N/2}(x_0) = g_m, \quad (2.7)$$

sendo  $f_m = f(\mu_m)$  e  $g_m = g(-\mu_m + \frac{N}{2})$  para  $m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ . Neste trabalho, por facilidade de notação, a partir deste ponto, vamos usar a seguinte notação:

$$\sigma^{mn} = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_m) P_l(\mu_n).$$

Desta forma a equação, se dividirmos a equação (2.6) por  $\mu_m$ , ela pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx} \Psi_m(x) + \frac{\sigma_t}{\mu_m} \Psi_m(x) = \frac{\sigma_s}{2\mu_m} \sum_{k=0}^N \sigma^{mn} \Psi_k(x) \omega_k + \frac{Q_m(x)}{\mu_m} \quad (2.8)$$

Para aplicarmos o método  $LTS_N$  na resolução do sistema de equações  $S_N$ , vamos reescrever as equações definidas pela equação (2.8) e suas condições de contorno definidas pela equação (2.7) em forma matricial, ou seja

$$\frac{d}{dx} \Psi(\mathbf{x}) - \mathbf{A} \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  é uma matriz de ordem  $N$  definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} -\frac{\sigma_t}{\mu_i} + \frac{\sigma_s w_i}{2\mu_i} \sigma^{ii} & i = j \\ \frac{\sigma_s w_j}{2\mu_i} \sigma^{ij} & i \neq j \end{cases} \quad (2.10)$$

com condições de contorno definidas por,

$$\begin{aligned} \Psi_1(0) &= \left[ f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{\frac{N}{2}} \right]^T, \text{ e} \\ \Psi_2(x_0) &= \left[ g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_{\frac{N}{2}} \right]^T. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aqui,  $\Psi(x)$  é o vetor fluxo angular de ordem  $N$ , definido como

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

onde  $\Psi_1(x)$  e  $\Psi_2(x)$  são sub-vetores de ordem  $N/2$  do vetor fluxo angular  $\Psi(x)$ , o primeiro contendo os fluxos nas  $N/2$  direções discretas positivas e o segundo nas

$N/2$  direções discretas negativas. Ainda  $\mathbf{Q}(x)$  é o vetor fonte de ordem  $N$  definido por

$$\mathbf{Q}(x) = \begin{bmatrix} \frac{Q_1(x)}{\mu_1} & \frac{Q_2(x)}{\mu_2} & \dots & \frac{Q_N(x)}{\mu_N} \end{bmatrix}^T. \quad (2.13)$$

Para resolvermos a equação matricial (2.9) aplicamos a transformada de Laplace na variável espacial  $x$  e, desta forma, obtemos o seguinte sistema algébrico

$$s\bar{\Psi}(\mathbf{s}) - \Psi(\mathbf{0}) - \mathbf{A}\bar{\Psi}(\mathbf{s}) = \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{s}), \quad (2.14)$$

onde definimos o fluxo transformado  $\bar{\Psi}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{\Psi(\mathbf{x})\}$  e a fonte transformada  $\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\{\mathbf{Q}(\mathbf{x})\}$ . Agora resolvemos o sistema (2.14) para o fluxo transformado, ou seja

$$\bar{\Psi}(\mathbf{s}) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\Psi(\mathbf{0}) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{s}). \quad (2.15)$$

Em continuidade, aplicamos a transformada inversa de Laplace para obtermos o vetor fluxo angular de partículas  $\Psi(x)$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\Psi(\mathbf{0}) + \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{s})\}. \quad (2.16)$$

Neste ponto devemos proceder à inversão da matriz  $\text{LTS}_N (s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ , que depende de um parâmetro complexo  $s$ , e calcular sua transformada inversa. Segatto et al. [Segatto et al., 1999b] e Marona et al. [Marona et al., 2007], observaram que quando  $\frac{\sigma_s}{\sigma_t}$  não é unitário, os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  são todos simétricos não-nulos e distintos e neste caso, a matriz  $\mathbf{A}$  é similar ao seu espectro, isto é

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1},$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz diagonal dos autovalores da matrix  $\mathbf{A}$ , e  $\mathbf{X}$  é a matriz cujas colunas são seus respectivos autovetores. Logo, usando esta decomposição espectral, podemos calcular de forma analítica a transformada inversa de Laplace da matriz inversa  $\text{LTS}_N$  como descrevemos a seguir. Primeiramente observamos que,

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} - \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1})^{-1}\} = \mathbf{X}\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}]\mathbf{X}^{-1}. \quad (2.17)$$

A seguir, tirando vantagem do fato da matriz simbólica  $s\mathbf{I}-\mathbf{D}$  ser diagonal, podemos invertê-la facilmente, isto é

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{D})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-d_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{s-d_N} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Podemos ainda aplicar a transformada inversa de Laplace em (2.18) de forma analítica e obtemos,

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{D})^{-1}\} = \begin{bmatrix} e^{d_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2 x} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{d_N x} \end{bmatrix} = e^{\mathbf{D}\mathbf{x}} \quad (2.19)$$

Finalmente obtemos, de forma analítica, a transformada inversa de Laplace da inversa da matriz  $LTS_N$ .

Agora, usamos este resultado para reescrever a equação (2.16), como

$$\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}\mathbf{x}}\mathbf{X}^{-1}\Psi(\mathbf{0}) + \mathbf{X}e^{\mathbf{D}\mathbf{x}}\mathbf{X}^{-1} * \mathbf{Q}(\mathbf{x}), \quad (2.20)$$

onde  $*$  denota a operação convolução.

Dessa forma encontramos em (2.20) uma expressão analítica para o fluxo angular de nêutrons  $\Psi(\mathbf{x})$ . Desta expressão podemos observar o caráter exponencial da solução  $LTS_N$ . Este caráter exponencial acarreta problemas computacionais de *overflow* para problemas de grandes espessuras ou que requeiram uma ordem de quadratura muito elevada, como acontece em problemas sem simetria azimutal [Segatto et al., 1999a, Brancher et al., 1999]. Por este motivo, Gonçalves et al [Gonçalves et al., 2000] introduziram uma formulação que elimina este problema, tanto da parte homogênea quanto do termo de convolução gerado pela fonte. Para isto, dividimos a matriz diagonal exponencial, que aparece na solução (2.20) como a soma de duas matrizes, a primeira contendo todos os elementos que possuem expoentes positivos e a segunda contendo os termos de expoente negativo, isto é

$$e^{\mathbf{D}\mathbf{x}} = e^{\mathbf{D}^+\mathbf{x}} + e^{\mathbf{D}^-\mathbf{x}} \quad (2.21)$$

onde as matrizes diagonais  $e^{\mathbf{D}^+x}$  e  $e^{\mathbf{D}^-x}$  tem os elementos da diagonal definidos por

$$e^{\mathbf{D}^+x} = \begin{cases} e^{d_i x}, & \text{se } d_i > 0 \\ 0, & \text{se } d_i < 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

$$e^{\mathbf{D}^-x} = \begin{cases} 0, & \text{se } d_i > 0 \\ e^{d_i x}, & \text{se } d_i < 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Daí definimos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= \mathbf{X}e^{\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}(e^{\mathbf{D}^+x} + e^{\mathbf{D}^-x})\mathbf{X}^{-1} = \\ &= \mathbf{X}e^{\mathbf{D}^+x}\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}e^{\mathbf{D}^-x}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{B}^+(x)\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{B}^-(x)\mathbf{X}^{-1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Assim, de acordo com a formulação apresentada em [Gonçalves et al., 2002] podemos reescrever a solução  $\text{LTS}_N$  (2.20) como

$$\Psi(x) = \mathbf{B}^+(x - x_0)\mathbf{X}^{-1}\Psi(x_0) + \mathbf{B}^-(x)\mathbf{X}^{-1}\Psi(0) + \mathbf{H}(x) \quad (2.25)$$

onde o vetor convolução  $\mathbf{H}(x)$  está definido por

$$\mathbf{H}(x) = \int_{x_0}^x \mathbf{B}^+(x - u)\mathbf{Q}(u)du + \int_0^x \mathbf{B}^-(x - u)\mathbf{Q}(u)du \quad (2.26)$$

Então observamos que  $\frac{N}{2}$  componentes de  $\mathbf{X}^{-1}\Psi(x_0)$  e  $\frac{N}{2}$  componentes de  $\mathbf{X}^{-1}\Psi(0)$  são multiplicadas por zero, então podemos escrever a solução (2.25) como

$$\Psi(x) = (\mathbf{B}^+(x - x_0) + \mathbf{B}^-(x))\xi + \mathbf{H}(x) = \mathbf{B}^*(x)\xi + \mathbf{H}(x) \quad (2.27)$$

onde o vetor  $\xi$  é formado pelas  $\frac{N}{2}$  componentes desconhecidas de  $\mathbf{X}^{-1}\Psi(x_0)$  e pelas  $\frac{N}{2}$  componentes desconhecidas de  $\mathbf{X}^{-1}\Psi(0)$ . Para mostrarmos o procedimento usado para determinarmos este vetor, vamos primeiramente reescrever a equação (2.27) com notação de matrizes bloco, assim

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^*(x) & \mathbf{B}_{12}^*(x) \\ \mathbf{B}_{21}^*(x) & \mathbf{B}_{22}^*(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(x) \\ \mathbf{H}_2(x) \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

onde  $\Psi_1(x)$  representa o fluxo angular para as  $\frac{N}{2}$  direções positivas e  $\Psi_2(x)$  representa o fluxo angular para as  $\frac{N}{2}$  direções negativas.

Aplicamos então as condições de contorno da seguinte forma: a condição referente a  $\Psi_1(0)$  é aplicada nas  $\frac{N}{2}$  primeiras equações de (2.28) e a condição referente a  $\Psi_2(x_0)$  é aplicada nas  $\frac{N}{2}$  últimas equações de (2.28). Fazendo isto obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^*(0) & \mathbf{B}_{12}^*(0) \\ \mathbf{B}_{21}^*(x_0) & \mathbf{B}_{22}^*(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1(0) - \mathbf{H}_1(0) \\ \Psi_2(x_0) - \mathbf{H}_2(x_0) \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

com os vetores  $\Psi_1(0)$  e  $\Psi_2(x_0)$  dados pelas condições de contorno (2.11). Resolvendo o sistema (2.29), o vetor  $\xi$  é determinado e, conseqüentemente, a expressão (2.27) para o fluxo angular também.

Para finalizar esta seção, devemos observar que nesta dissertação apenas consideramos o caso de condições de contorno de fluxo incidente prescrito, contudo o método  $LTS_N$  é facilmente adaptado para outros tipos de condições de contorno, e a única mudança no método é a montagem do sistema linear (2.29) para a determinação do vetor  $\xi$ .

## 2.2 Método $LTS_N$ : Domínio Heterogêneo

Nesta seção, vamos apresentar a solução  $LTS_N$  quando consideramos uma placa heterogênea. Neste caso, subdividimos a placa original em  $k$  regiões, de forma que, em cada uma delas, consideramos o meio homogêneo. Em cada uma destas  $k$  placas usamos a solução  $LTS_N$  conforme desenvolvida na seção anterior. Para encontrarmos o vetor fluxo angular nos extremos de cada placa usamos as condições de contorno do problema e de continuidade de fluxo nas interfaces. Para explicarmos este procedimento, vamos, primeiramente, aplicá-lo a 2 regiões e, posteriormente, vamos estender esta formulação para um número arbitrário de regiões.

### 2.2.1 Método $LTS_N$ : 2 Regiões

Vamos considerar uma placa composta de 2 materiais distintos. Vamos, ainda, considerar que conhecemos o fluxo de partículas incidente nos extremos desta placa e que as seções de choque macroscópicas total e de espalhamento e fonte externa em cada uma dessas placas são conhecidas. A figura (2.1) ilustra o problema.

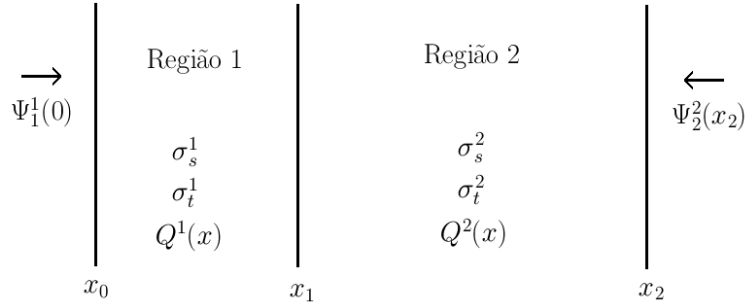


Figura 2.1: Placa dividida em 2 regiões.

Assim, em cada placa, temos as seguintes equações  $S_N$

$$\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_m^i(x) + \sigma_t^i \Psi_m^i(x) = \frac{\sigma_s^i}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mni} w_n \Psi_n^i(x) + Q_m^i(x) \quad (2.30)$$

onde  $i = 1$  e  $2$  representam o índice das placas 1 e 2,  $\Psi_m^i(x)$  e  $Q_m^i(x)$  são, respectivamente, o fluxo angular de nêutrons e a fonte na direção discreta  $\mu_m$ ,  $\sigma_s^i$  é a seção de choque macroscópica de espalhamento,  $N$  é a ordem da quadratura,  $w_n$  são os pesos da quadratura e  $\sigma^{mni} = \sum_{l=0}^L \beta_l^i P_l(\mu_m) P_l(\mu_n)$  é a função de espalhamento.

Para aplicarmos o método  $LTS_N$  fazemos uma mudança de variáveis  $x = x - x_{i-1}$  na região  $i$ , para  $i = 1, 2$ , e, desta forma, as espessuras de cada placa são dadas por  $L_1 = x_1 - x_0$  e  $L_2 = x_2 - x_1$ . Fazendo isto, as condições de contorno dadas por:

$$\begin{aligned} \Psi_m^1(0) &= f_m \\ \Psi_{m+\frac{N}{2}}^2(L_2) &= g_m \end{aligned} \quad (2.31)$$

para  $m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ . Na justaposição das placas vamos considerar a continuidade de fluxo, que é descrita por

$$\Psi_m^1(L_1) = \Psi_m^2(0), \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.32)$$

isto é, o fluxo angular de partículas no extremo direito da região 1 é igual ao fluxo angular de partículas na origem da região 2.

Aplicando o método  $LTS_N$  em cada placa, obtemos

$$\begin{bmatrix} \Psi_1^i(x) \\ \Psi_2^i(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^{*i}(x) & \mathbf{B}_{12}^{*i}(x) \\ \mathbf{B}_{21}^{*i}(x) & \mathbf{B}_{22}^{*i}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^i(x) \\ \mathbf{H}_2^i(x) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

para  $i=1, 2$ , onde  $\Psi_1^1$  denota o fluxo angular de nêutrons para  $\mu_m > 0$  e  $\Psi_2^1$  o fluxo para  $\mu_m < 0$  na placa 1,  $\Psi_1^2$  o fluxo de nêutrons para  $\mu_m > 0$  e  $\Psi_2^2$  o fluxo para  $\mu_m < 0$  na placa 2 e  $\xi^i$  são vetores desconhecidos.

Para que a solução (2.33) fique completamente determinada, precisamos determinar os vetores  $\xi^i$ , para  $i=1, 2$ . Para isto, aplicamos as condições de contorno e de continuidade (2.31) e (2.32), as quais podemos escrever da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Psi_1^1(0) &= \mathbf{B}_{11}^{*1}(0)\xi_1^1 + \mathbf{B}_{12}^{*1}(0)\xi_2^1 + \mathbf{H}_1^1(0) \\ \mathbf{B}_{11}^{*1}(L_1)\xi_1^1 + \mathbf{B}_{12}^{*1}(L_1)\xi_2^1 + \mathbf{H}_1^1(L_1) &= \mathbf{B}_{11}^{*2}(0)\xi_1^2 + \mathbf{B}_{12}^{*2}(0)\xi_2^2 + \mathbf{H}_1^2(0) \\ \mathbf{B}_{21}^{*1}(L_1)\xi_1^1 + \mathbf{B}_{22}^{*1}(L_1)\xi_2^1 + \mathbf{H}_2^1(L_1) &= \mathbf{B}_{21}^{*2}(0)\xi_1^2 + \mathbf{B}_{22}^{*2}(0)\xi_2^2 + \mathbf{H}_2^2(0) \\ \Psi_2^2(L_2) &= \mathbf{B}_{21}^{*2}(L_2)\xi_1^2 + \mathbf{B}_{22}^{*2}(L_2)\xi_2^2 + \mathbf{H}_2^2(L_2) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Podemos escrever esse sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^{*1}(0) & \mathbf{B}_{12}^{*1}(0) & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{11}^{*1}(L_1) & \mathbf{B}_{12}^{*1}(L_1) & -\mathbf{B}_{11}^{*2}(0) & -\mathbf{B}_{12}^{*2}(0) \\ \mathbf{B}_{21}^{*1}(L_1) & \mathbf{B}_{22}^{*1}(L_1) & -\mathbf{B}_{21}^{*2}(0) & -\mathbf{B}_{22}^{*2}(0) \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{21}^{*2}(L_2) & \mathbf{B}_{22}^{*2}(L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1^1(0) - \mathbf{H}_1^1(0) \\ \mathbf{H}_1^1(L_1) - \mathbf{H}_1^2(0) \\ \mathbf{H}_2^1(L_1) - \mathbf{H}_2^2(0) \\ \Psi_2^2(L_2) - \mathbf{H}_2^2(L_2) \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Resolvendo o sistema (2.35), de ordem  $2N \times 2N$ , os vetores  $\Psi^i(x)$  da expressão (2.33), para  $i = 1$  e  $2$ , ficam completamente determinados e assim encontramos a solução  $LTS_N$  para o problema (2.30).

## 2.2.2 Método $LTS_N$ : $k$ Regiões

Vamos, agora, estender a formulação anterior para um número arbitrário de placas. Então, consideremos um placa composta de  $k$  materiais distintos. Suponhamos também, que conhecemos o fluxo de partículas incidente nos extremos da placa e que também são conhecidas as seções de choque macroscópicas total e de

espalhamento bem como a fonte externa em cada uma das  $k$  placas. A figura (2.2) ilustra o problema.

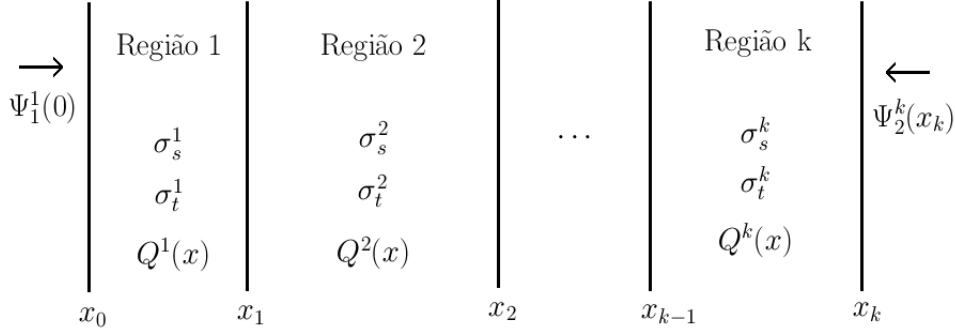


Figura 2.2: Placa dividida em  $k$  regiões.

As equações  $S_N$  que descrevem o problema unidimensional, com simetria azimutal não dependentes do tempo para cada placa são dadas por

$$\mu_m \frac{d}{dx} \Psi_m^i(x) + \sigma_t \Psi_m^i(x) = \frac{\sigma_s^i}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mni} w_n \Psi_n^i(x) + Q_m^i(x) \quad (2.36)$$

para  $i = 1, 2, \dots, k$ , onde  $\Psi_m^i(x)$  é o fluxo angular de partículas na direção discreta  $\mu_m$ ,  $\sigma_s^i$  é a seção de choque macroscópica de espalhamento,  $Q_m^i(x)$  é a fonte,  $N$  é a ordem da quadratura,  $w_n$  são os pesos da quadratura e  $\sigma^{mni} = \sum_{l=0}^L \beta_l^i P_l(\mu_m) P_l(\mu_n)$  é a função de espalhamento.

Novamente, a fim de aplicar a transformada de Laplace, fazemos a mudança de variáveis  $x = x - x_{i-1}$  na região  $i$ , para  $i = 1, \dots, k$ . As espessuras de cada placa são dadas por  $L_i = x_i - x_{i-1}$ . Desta forma, as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} \Psi_m^1(0) &= f_m \\ \Psi_{m+\frac{N}{2}}^k(L_k) &= g_m \end{aligned} \quad (2.37)$$

para  $m = 1, \dots, \frac{N}{2}$  e as condições de continuidade de fluxo nas  $k - 1$  interfaces são dadas por

$$\Psi_m^i(L_i) = \Psi_m^{i+1}(0) \quad (2.38)$$

Assim, aplicamos o método  $LTS_N$  conforme feito nas seções anteriores. Utilizamos a diagonalização proposta em [Segatto et al., 1999b] e a formulação proposta em



[Gonçalves et al., 2002] até obtermos uma expressão para o fluxo angular de partículas semelhante a (2.27), porém para  $\Psi^i(x)$ , com  $i = 1, 2, \dots, k$ . A fim de determinarmos completamente os vetores fluxo angular  $\Psi^i(x)$ , precisamos conhecer os vetores  $\xi^i$ . Com esta finalidade, aplicamos novamente as condições de contorno do problema seguindo a mesma idéia de (2.34). Fazendo isto obtemos o sistema matricial

$$\mathbf{M}\xi = \mathbf{P} \quad (2.39)$$

sendo

$$\xi = \left[ \xi_1^1 \quad \xi_2^1 \quad \dots \quad \xi_1^i \quad \xi_2^i \quad \dots \quad \xi_1^k \quad \xi_2^k \right]^T, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \Psi_1^1(0) - \mathbf{H}_1^1(0) \\ \mathbf{H}_1^1(L_1) - \mathbf{H}_1^2(0) \\ \mathbf{H}_2^1(L_1) - \mathbf{H}_2^2(0) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_1^i(L_i) - \mathbf{H}_1^{i+1}(0) \\ \mathbf{H}_2^i(L_i) - \mathbf{H}_2^{i+1}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_1^{k-1}(L_{k-1}) - \mathbf{H}_1^k(0) \\ \mathbf{H}_2^{k-1}(L_{k-1}) - \mathbf{H}_2^k(0) \\ \Psi_2^k(L_k) - \mathbf{H}_2^k(L_k) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

e



Esse é um sistema de  $kN$  equações por  $kN$  incógnitas. Resolvendo esse sistema, as expressões para os fluxos angulares  $\Psi^i(x)$  ficam completamente determinadas.

### 3 A EQUAÇÃO DE TRANSPORTE DEPENDENTE DO TEMPO

A equação de transporte dependente do tempo tem sido estudada no meio científico tanto por interesse puramente matemático como por interesse na obtenção de *benchmark* [Olson e Herderson, 2004]. Apesar de haver soluções numéricas para os casos bi e tridimensionais para o problema de transporte dependente do tempo [Chai, 2004] [Chai e Lama, 2004], usualmente restringe-se à busca por soluções semi-analíticas do problema unidimensional, devido à complexidade da equação de transporte dependente do tempo. Além disso, mesmo com essa restrição, a literatura sobre o assunto só é ampla para os casos onde o domínio é infinito ou semi-infinito, como nos trabalhos de Ganapol [Ganapol e Filippone, 1982] [Ganapol, 1986] [Ganapol e Grossman, 1973] [Ganapol e Peddicord, 1977]. Para os casos onde o domínio é finito encontramos somente os trabalhos [Oliveira et al., 2002b] [Oliveira et al., 2002a][El-Wakil e Sallah, 2004][El-Wakil, 2006][Gonzalez et al., 2007].

Seguindo nosso objetivo, neste capítulo resolvemos a equação de transporte  $S_N$  dependente do tempo utilizando o método TLTS $_N$ . Esse método consiste na solução das equações  $S_N$  [Chandrasekhar, 1950] através da aplicação da transformada de Laplace, uma vez na variável temporal  $t$  e outra na variável espacial  $x$ . O problema transformado é dado por um sistema algébrico de equações, que é resolvido de forma analítica pela inversão da matriz associada. Para determinarmos o fluxo angular de partículas aplicamos a transformada inversa de Laplace, primeiramente na variável espacial. Essa inversão segue o mesmo raciocínio utilizado no capítulo anterior. Em seguida, aplicamos a transformada inversa de Laplace na variável temporal utilizando a integral de Bromwich. Com isso obtemos uma expressão para o fluxo angular de partículas na forma integral, o que caracteriza uma solução analítica. Para a obtenção de resultados numéricos, aproximamos a integral de Bromwich por uma fórmula de quadratura [Stroud e Secrest, 1966] e, com isso, as nossas soluções são obtidas de forma semi-analítica.

### 3.1 O método TLTS<sub>N</sub>

Consideremos as equações S<sub>N</sub> para o problema de transporte unidimensional dependente do tempo com simetria azimutal, dada por

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_m(t, x) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi_m(t, x) + \sigma_t \Psi_m(t, x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} \omega_n \Psi_n(t, x) + S_m(t, x) \quad (3.1)$$

onde  $\Psi_m(t, x)$  e  $S_m(t, x)$  denotam, respectivamente, o fluxo e a fonte de partículas e no tempo  $t$ , na posição  $x$  e na direção discreta  $\mu_m$ ,  $v$  é a velocidade dos nêutrons,  $\sigma_t$  é a seção de choque macroscópica total,  $\sigma_s$  é a seção de choque macroscópica de espalhamento,  $\sigma^{mn} = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_m) P_l(\mu_n)$  é a função de espalhamento,  $\mu_m$  é direção discreta de propagação da partícula e  $\omega_n$  são os pesos da quadratura.

Vamos supor também que conhecemos o fluxo angular de partículas para o tempo inicial e o fluxo angular incidente nos extremos da placa, ou seja, as condições inicial e de contorno, são dadas respectivamente por

$$\Psi_m(0, x) = \phi_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, N; \quad (3.2)$$

$$\Psi_m(t, 0) = f_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} \quad (3.3)$$

e

$$\Psi_{m+\frac{N}{2}}(t, x_0) = g_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}. \quad (3.4)$$

Aplicando a Transformada de Laplace na variável temporal  $t$  em (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{v}(p\bar{\Psi}_m(p, x) - \Psi_m(0, x)) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \bar{\Psi}_m(p, x) + \sigma_t \bar{\Psi}_m(p, x) = \\ \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} w_n \bar{\Psi}_n(p, x) + \bar{S}_m(p, x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde

$$\bar{\Psi}_m(p, x) = \mathcal{L} \{ \Psi_m(t, x), t \longrightarrow p \} \quad (3.6)$$

e

$$\bar{S}_m(p, x) = \mathcal{L} \{ S_m(t, x), t \longrightarrow p \}. \quad (3.7)$$

Reorganizando os termos da equação (3.5) obtemos

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{d}{dx} \bar{\Psi}_m(p, x) + \left( \sigma_t + \frac{p}{v} \right) \bar{\Psi}_m(p, x) = \\ \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} w_n \bar{\Psi}_n(p, x) + \frac{1}{v} \Psi_m(0, x) + \bar{S}_m(p, x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dividindo por  $\mu_m$  e denotando

$$\sigma_t^p = \sigma_t + \frac{p}{v}$$

e

$$\bar{\phi}_m(p, x) = \frac{1}{v} \Psi_m(0, x) + \bar{S}_m(p, x)$$

obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{\Psi}_m(p, x) + \frac{\sigma_t^p}{\mu_m} \bar{\Psi}_m(p, x) = \frac{\sigma_s}{2\mu_m} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} w_n \bar{\Psi}_n(p, x) + \frac{\bar{\phi}_m(p, x)}{\mu_m}. \quad (3.9)$$

Neste ponto observamos que a equação (3.9) tem a forma da aproximação  $S_N$  para a equação de transporte unidimensional, com simetria azimutal, porém não dependente do tempo. Sendo assim, aplicamos o método  $LTS_N$  conforme descrito no capítulo anterior, ou seja, aplicamos a transformada de Laplace na variável espacial da equação (3.9), obtendo

$$s\bar{\bar{\Psi}}_m(p, s) - \bar{\Psi}_m(p, 0) + \frac{\sigma_t^p}{\mu_m} \bar{\bar{\Psi}}_m(p, s) = \frac{\sigma_s}{2\mu_m} \sum_{n=1}^N \sigma^{mn} w_n \bar{\bar{\Psi}}_n(p, s) + \frac{\bar{\bar{\phi}}_m(p, s)}{\mu_m}, \quad (3.10)$$

onde

$$\bar{\bar{\Psi}}_m(p, s) = \mathcal{L} \{ \bar{\Psi}_m(p, x), x \longrightarrow s \} \quad (3.11)$$

e

$$\bar{\bar{\phi}}_m(p, s) = \mathcal{L} \{ \bar{\phi}_m(p, x), x \longrightarrow s \}. \quad (3.12)$$

Se reorganizarmos os termos da equação (3.10) na forma

$$\left( s + \frac{\sigma_t^p}{\mu_m} - \frac{\sigma_s \sigma^{mm} w_m}{2\mu_m} \right) \bar{\bar{\Psi}}_m(p, s) - \frac{\sigma_s}{2\mu_m} \sum_{n=1, n \neq m}^N \sigma^{mn} w_n \bar{\bar{\Psi}}_n(p, s) = \frac{\bar{\bar{\phi}}_m(p, s)}{\mu_m} + \bar{\Psi}_m(p, 0), \quad (3.13)$$

podemos reescrever a equação (3.13) na forma matricial. Fazendo isto obtemos

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}(p)) \bar{\bar{\Psi}}(p, s) = \bar{\Psi}(p, 0) + \bar{\bar{\phi}}(p, s) \quad (3.14)$$

como a forma matricial de (3.13) onde

$$a_{ij}(p) = \begin{cases} -\frac{\sigma_t^p}{\mu_i} + \frac{\sigma_s \sigma^{ii} w_i}{2\mu_i} & \text{para } i = j \\ \frac{\sigma_s \sigma^{ij} w_j}{\mu_i} & \text{para } i \neq j \end{cases}, \quad (3.15)$$

$$\bar{\bar{\Psi}}(p, s) = \left[ \bar{\bar{\Psi}}_1(p, s) \quad \dots \quad \bar{\bar{\Psi}}_N(p, s) \right]^T, \quad (3.16)$$

$$\bar{\Psi}(p, 0) = \left[ \bar{\Psi}_1(p, 0) \quad \dots \quad \bar{\Psi}_N(p, 0) \right]^T, \quad (3.17)$$

e

$$\bar{\bar{\phi}}(p, s) = \left[ \frac{\bar{\bar{\phi}}_1(p, s)}{\mu_1} \quad \dots \quad \frac{\bar{\bar{\phi}}_N(p, s)}{\mu_N} \right]^T. \quad (3.18)$$

O sistema (3.14) é resolvido analiticamente como

$$\bar{\bar{\Psi}}(p, s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}(p))^{-1} \bar{\Psi}(p, 0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A}(p))^{-1} \bar{\bar{\phi}}(p, s) \quad (3.19)$$

Neste ponto, utilizamos o fato que a matriz  $\mathbf{A}(p)$  é diagonalizável [Segatto et al., 1999b] e a escrevemos como

$$\mathbf{A}(p) = \mathbf{X}(p)\mathbf{D}(p)\mathbf{X}(p)^{-1} \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{D}(p)$  é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores da matriz  $\mathbf{A}(p)$  e  $\mathbf{X}(p)$  é a matriz cujas colunas são os autovetores da matriz  $\mathbf{A}(p)$ . Com isso, obtemos

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{X}(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \mathbf{X}^{-1}. \quad (3.21)$$



A partir deste ponto, por simplicidade de notação, adotaremos

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(p), \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(p) \quad e \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(p).$$

Então a equação (3.19) torna-se

$$\overline{\overline{\Psi}}(p, s) = \mathbf{X}(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\overline{\overline{\Psi}}(p, 0) + \mathbf{X}(s\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\overline{\overline{\phi}}(p, s) \quad (3.22)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em relação a variável  $s$  na equação (3.22) e utilizando a mesma idéia de (2.17), (2.18) e (2.19) obtemos

$$\overline{\overline{\Psi}}(p, x) = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1}\overline{\overline{\Psi}}(p, 0) + \mathbf{X}e^{\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1} * \overline{\overline{\phi}}(p, x) \quad (3.23)$$

onde o sinal  $*$  representa a operação convolução na variável  $x$ . Neste ponto, vemos, novamente, o caráter exponencial da solução  $LTS_N$ . Isto pode acarretar problemas de *overflow* para placas de grande espessura. Daí utilizamos, mais uma vez, a formulação proposta por Gonçalves [Gonçalves et al., 2000] e definimos

$$\mathbf{B}(p, x) = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}x}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}e^{\mathbf{D}^+(x-x_0)}\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}e^{\mathbf{D}^-x}\mathbf{X}^{-1} \quad (3.24)$$

Denotamos, a título de facilitar o entendimento, a equação (3.24) por

$$\mathbf{X}e^{\mathbf{D}^+(x-x_0)}\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}e^{\mathbf{D}^-x}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{B}^+(p, x - x_0) + \mathbf{B}^-(p, x) \quad (3.25)$$

onde

$$\mathbf{D}^+ = \begin{cases} d_i(p), & se \quad d_i(p) > 0 \\ 0, & se \quad d_i(p) < 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

e

$$\mathbf{D}^- = \begin{cases} 0, & se \quad d_i(p) > 0 \\ d_i(p), & se \quad d_i(p) < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

com  $d_i(p)$  autovalores da matriz  $\mathbf{A}$ .

De acordo com a formulação apresentada em [Gonçalves et al., 2000] obtemos (3.23) como

$$\bar{\Psi}(p, x) = \mathbf{B}^*(p, x)\xi + \bar{\mathbf{H}}(p, x) \quad (3.28)$$

onde  $\mathbf{B}^*(p, x)$  é obtido de forma similar a (2.27),  $\xi$  é um vetor desconhecido e  $\mathbf{H}(p, x)$  contém os termos de convolução.

Se utilizarmos uma notação por blocos, com  $\bar{\Psi}_1$  denotando o fluxo angular transformado de nêutrons para  $\mu_m > 0$  e  $\bar{\Psi}_2$  o fluxo angular transformado de nêutrons para  $\mu_m < 0$ , podemos escrever a solução (3.28) da forma

$$\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_1(p, x) \\ \bar{\Psi}_2(p, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^*(p, x) & \mathbf{B}_{12}^*(p, x) \\ \mathbf{B}_{21}^*(p, x) & \mathbf{B}_{22}^*(p, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_1(p, x) \\ \bar{\mathbf{H}}_2(p, x) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde  $\bar{\Psi}_1(p, x)$  e  $\bar{\Psi}_2(p, x)$  são vetores com  $\frac{N}{2}$  componentes de  $\bar{\Psi}(p, x)$  para  $\mu_m > 0$  e  $\mu_m < 0$ , respectivamente.

Neste ponto, a fim de determinar o vetor  $\xi$ , aplicamos as condições de contorno seguindo a mesma idéia do capítulo anterior, ou seja, aplicamos a transformada de Laplace na condição referente a  $\Psi_1(t, 0)$  e a aplicamos nas  $\frac{N}{2}$  primeiras equações de (3.29), então aplicamos a transformada de Laplace na condição referente  $\Psi_2(t, x_0)$  e a aplicamos nas  $\frac{N}{2}$  últimas equações de (3.29). Fazendo isto podemos montar o sistema matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^*(p, 0) & \mathbf{B}_{12}^*(p, 0) \\ \mathbf{B}_{21}^*(p, x_0) & \mathbf{B}_{22}^*(p, x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_1(p, 0) - \bar{\mathbf{H}}_1(p, 0) \\ \bar{\Psi}_2(p, x_0) - \bar{\mathbf{H}}_2(p, x_0) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Resolvendo esse sistema, determinamos completamente a expressão (3.28) para o fluxo transformado na variável temporal  $\bar{\Psi}(p, x)$ . Para reconstruímos o fluxo

angular  $\Psi(t, x)$  basta procedermos à inversão da transformada de Laplace na variável temporal  $t$ . Isto é feito através da integral de Bromwich

$$\Psi(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{\Psi}(p, x) e^{pt} dp, \quad (3.31)$$

E assim obtemos a solução do problema proposto na forma integral. Para obtermos resultados numéricos vamos utilizar uma fórmula de quadratura para aproximar a integral (3.31).

### 3.1.1 Inversão numérica da transformada de Laplace por fórmula de quadratura

Existem muitas técnicas para a inversão numérica da transformada de Laplace. Nesta dissertação iremos usar quadratura Gaussiana para fazer esta inversão [Stroud e Secrest, 1966]. A técnica de quadratura Gaussiana apropriada para encontrar a inversa da transformada de Laplace é dada pela seguinte fórmula:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(p) \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{n=1}^N A_n F(p_n) \quad (3.32)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária,  $c$  é um número positivo arbitrário e  $F(p)$  é uma função analítica no semi-plano direito do plano complexo. As abscissas  $p_n$  e pesos  $A_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  são determinados de forma que (3.32) seja exata sempre que a função  $F(p)$  é um polinômio de  $\frac{1}{s}$  com grau menor ou igual à  $2N - 1$ . Segundo Heydarian et al. [Heydarian et al., 1981], podemos calcular as abscissas  $p_n$  como sendo as raízes do seguinte polinômio

$$(-1)^N \sum_{r=0}^N \frac{(-1)^{N-r} N(N+r-1)!}{r!(N-r)!} p^{N-r} = 0, \quad (3.33)$$

e os pesos  $A_n$  da equação (3.32) podem ser encontrados através da solução de

$$\sum_{n=1}^N A_n p_n^{-r} = \frac{1}{r!}, \quad 0 \leq r \leq N - 1.$$

Assim, se queremos encontrar a transformada inversa de Laplace de uma função  $U(s)$ , pela integral de Bromwich fazemos

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} U(s) ds. \quad (3.34)$$

Para usarmos a fórmula de quadratura definida pela equação (3.32), fazemos a seguinte mudança de variável em (3.34)

$$st = p$$

e desta forma temos que

$$tu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma t-i\infty}^{\gamma t+i\infty} e^p U\left(\frac{p}{t}\right) dp. \quad (3.35)$$

Podemos reescrever a equação (3.35) como:

$$tu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p \frac{F(p)}{p} dp, \quad (3.36)$$

onde  $F(p) = pU\left(\frac{p}{t}\right)$ . Resumindo, a função  $F(p)$ , que aparece na fórmula de quadratura Gaussiana (3.32) está relacionada com a função a ser invertida  $U(s)$  por:

$$F(p) = \frac{p}{t} U\left(\frac{p}{t}\right)$$

onde  $t$  é o tempo em que desejamos obter a inversão. Devemos notar que podemos encontrar um algoritmo para o cálculo destas abscissas e raízes em trabalhos de Piessens [Piessens, 1973].

Desta forma, podemos estimar o valor da integral de linha descrito pela fórmula (3.31) através de quadratura Gaussiana. Assim, o fluxo angular de partículas em  $x$  no instante  $t$  pode ser calculado como

$$\Psi(t, x) = \sum_{i=1}^M A_i \frac{p_i}{t} \bar{\Psi}\left(\frac{p_i}{t}, x\right) \quad (3.37)$$

onde  $A_i$  são as raízes da quadratura e  $p_i$  são os pesos descritos acima.

## 4 O PROBLEMA EM DOMÍNIO HETEROGÊNEO

Neste capítulo fazemos a extensão do método TLTS<sub>N</sub> para o problema de ordenadas discretas S<sub>N</sub> unidimensional em domínio heterogêneo. Para isto utilizamos uma formulação semelhante à proposta na seção (2.2), isto é, subdividimos a placa original em  $k$  regiões, de tal forma que possamos considerar meio homogêneo em cada uma das regiões. Então, em cada uma delas, aplicamos o método TLTS<sub>N</sub> da maneira como foi explicado no capítulo anterior. Consideramos que conhecemos o fluxo angular de partículas para o tempo inicial, o fluxo angular incidente nos extremos da placa e que há continuidade de fluxo nas interfaces das regiões. Estas condições nos permitem encontrar uma expressão para o fluxo angular transformado  $\bar{\Psi}(p, x)$  na placa. E utilizando a transformada inversa de Laplace na variável temporal, obtemos o vetor fluxo angular  $\Psi(t, x)$ . Para exemplificar esse procedimento vamos proceder como na seção (2.2), ou seja, vamos, primeiramente, aplicá-lo a duas regiões e então estender a formulação para um número arbitrário de regiões.

### 4.1 O Problema Heterogêneo: 2 Regiões

Vamos considerar uma placa composta de 2 materiais distintos. Vamos ainda considerar que conhecemos o fluxo de partículas incidentes nos extremos desta placa e que as seções de choque macroscópicas total e de espalhamento e fonte externa em cada uma destas placas são conhecidas. A figura (4.1) ilustra este caso.

Assim, para cada placa  $i$ , as equações S<sub>N</sub> que descrevem o problema de transporte unidimensional, com simetria azimutal, dependente do tempo são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_m^i(t, x) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi_m^i(t, x) + \sigma_t^i \Psi_m^i(t, x) = \\ \frac{\sigma_s^i}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mni} w_n \Psi_n^i(t, x) + S_m^i(t, x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

para  $i = 1$  e  $2$ ,  $m = 1, \dots, N$ , onde  $v$  é a velocidade dos nêutrons,  $\sigma_t^i$  é a seção de choque total na região  $i$ ,  $\sigma_s^i$  é a seção de choque de espalhamento na região  $i$ ,  $\Psi_m^i(t, x)$  e  $S_m^i(t, x)$  são, respectivamente, o fluxo angular e a fonte de partículas na direção discreta  $\mu_m$ , no tempo  $t$ , na posição  $x$  do material  $i$ ,  $\sigma^{mni} = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_m) P_l(\mu_n)$  é a função de espalhamento da região  $i$ .

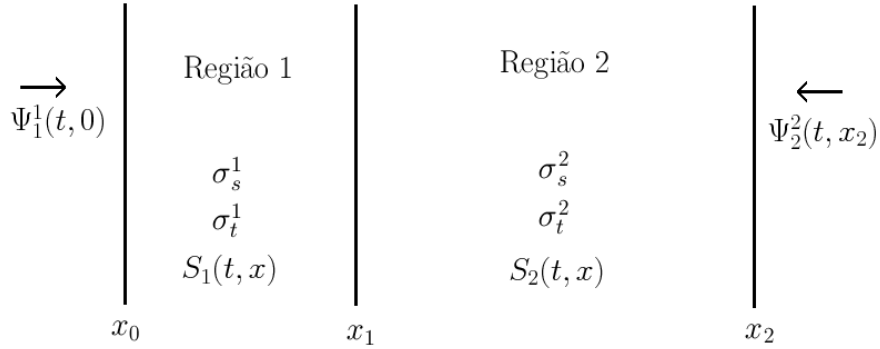


Figura 4.1: Placa dividida em 2 regiões para problema dependente do tempo.

Procedendo com a seguinte mudança de variável  $x = x - x_{i-1}$  na região  $i$ , para  $i = 1, 2$ , as espessuras de cada região são dadas por  $L_i = x_i - x_{i-1}$ . As condições iniciais, de contorno e de continuidade de fluxo tomam a forma

$$\Psi_m^i(0, x) = \phi_m^i(x), \quad m = 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_m^1(t, 0) &= f_m(t), \quad m = 1, \dots, \frac{N}{2} \\ \Psi_{m+\frac{N}{2}}^2(t, L_2) &= g_m(t) \quad m = 1, \dots, \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

e

$$\Psi_m^1(t, L_1) = \Psi_m^2(t, 0), \quad m = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Aplicando o método TLTS<sub>N</sub>, conforme descrito na seção anterior, para cada região  $i$ , obtemos a solução transformada da equação (4.1), para  $i = 1$  e  $2$ , como sendo

$$\bar{\Psi}^i(p, x) = \mathbf{B}^{*i}(p, x)\xi^i + \bar{\mathbf{H}}^i(p, x) \quad (4.5)$$

para  $i = 1, 2$ , onde  $\overline{\Psi}^i(p, x)$  é o fluxo angular transformado na região  $i$ ,  $\mathbf{B}^{*i}(p, x)$  é definido de forma similar a (2.27),  $\xi$  é um vetor desconhecido e  $\overline{\mathbf{H}}^i(p, x)$  é o vetor que contém os termos de convolução na variável  $x$ .

A fim de que os fluxos transformados  $\overline{\Psi}^i(p, x)$  fiquem determinados na expressão (4.5), aplicamos as condições de contorno como em (2.34) e obtemos o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^{*1}(p, 0) & \mathbf{B}_{12}^{*1}(p, 0) & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_{11}^{*1}(p, L_1) & \mathbf{B}_{12}^{*1}(p, L_1) & -\mathbf{B}_{11}^{*2}(p, 0) & -\mathbf{B}_{12}^{*2}(p, 0) \\ \mathbf{B}_{21}^{*1}(p, L_1) & \mathbf{B}_{22}^{*1}(p, L_1) & -\mathbf{B}_{21}^{*2}(p, 0) & -\mathbf{B}_{22}^{*2}(p, 0) \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_{21}^{*2}(p, L_2) & \mathbf{B}_{22}^{*2}(p, L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\Psi}_1^1(p, 0) - \overline{\mathbf{H}}_1^1(p, 0) \\ \overline{\mathbf{H}}_1^1(p, L_1) - \overline{\mathbf{H}}_1^2(p, 0) \\ \overline{\mathbf{H}}_2^1(p, L_1) - \overline{\mathbf{H}}_2^2(p, 0) \\ \overline{\Psi}_2^2(p, L_2) - \overline{\mathbf{H}}_2^2(p, L_2) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Resolvendo esse sistema, a expressão para o fluxo angular transformado  $\overline{\Psi}^i(p, x)$  de (4.5) fica completamente determinada, para  $i = 1$  e  $2$ . O vetor fluxo angular para cada região  $i$   $\Psi^i(t, x)$  é obtido através da aplicação da transformada inversa de Laplace utilizando a integral de Bromwich como em (3.31). Após para a obtenção dos resultados numéricos, aproximamos tal integral por um esquema de quadratura, seguindo os passos da seção 3.1.1.

## 4.2 O Problema Heterogêneo: $k$ Regiões

Vamos agora estender a formulação TLTS<sub>N</sub> para uma placa heterogênea composta por um número arbitrário de regiões. Para isto vamos considerar uma placa composta por  $k$  materiais distintos. Vamos considerar também que o fluxo de partículas no tempo inicial é conhecido, bem como o fluxo incidente nos extremos da placa. Além disso, vamos supor que há continuidade de fluxo nas interfaces das regiões e que são conhecidas as seções de choque macroscópica total e de espalhamento e a fonte externa em cada uma das placas. A figura (4.2) ilustra o problema.

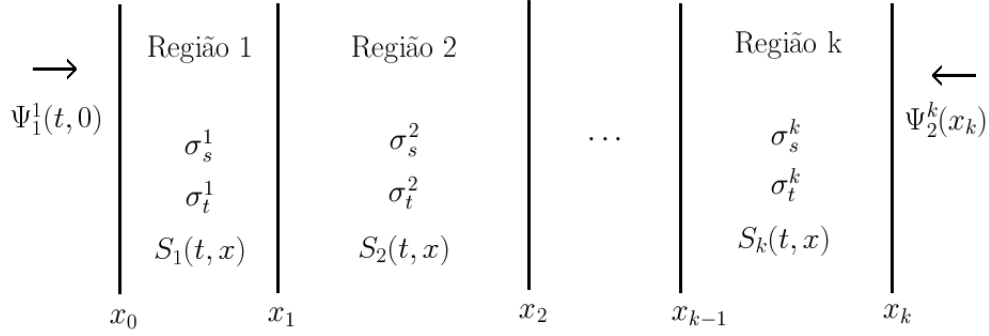


Figura 4.2: Placa dividida em  $k$  regiões para problema dependente do tempo.

A aproximação  $S_N$  que descreve o problema de transporte unidimensional, dependente do tempo, com simetria azimutal em cada placa é dada por

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_m^i(t, x) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi_m^i(t, x) + \sigma_t^i \Psi_m^i(t, x) = \frac{\sigma_s^i}{2} \sum_{n=1}^N \sigma^{mni} w_n \Psi_n^i(t, x) + S_m^i(t, x) \quad (4.7)$$

para  $i = 1, \dots, k$ ,  $m = 1, \dots, N$ , onde  $v$  é a velocidade dos nêutrons,  $\sigma_t^i$  é a seção de choque total na região  $i$ ,  $\sigma_s^i$  é a seção de choque de espalhamento na região  $i$ ,  $\Psi_m^i(t, x)$  e  $S^i(t, x)$  denotam, respectivamente o fluxo angular e a fonte de partículas na direção discreta  $\mu_m$ , no tempo  $t$ , na posição  $x$  do material  $i$ ,  $\sigma^{mni} = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu_m) P_l(\mu_n)$  é a função de espalhamento da região  $i$ .

Procedendo com a seguinte mudança de variável  $x = x - x_{i-1}$  na região  $i$ , para  $i = 1, \dots, k$ , as espessuras de cada região são dadas por  $L_i = x_i - x_{i-1}$ . As condições iniciais, de contorno e de continuidade de fluxo tomam a forma

$$\Psi_m^i(0, x) = \phi_m^i(x), \quad m = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, k, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Psi_m^1(t, 0) &= f_m(t), \quad m = 1, \dots, \frac{N}{2} \\ \Psi_{m+\frac{N}{2}}^k(t, L_k) &= g_m(t) \quad m = 1, \dots, \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

e

$$\Psi_m^i(t, L_i) = \Psi_m^{i+1}(t, 0), \quad m = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (4.10)$$



Aplicando o método TLTS<sub>N</sub>, para cada uma das equações (4.7) obtemos sua solução transformada como

$$\bar{\Psi}^i(p, x) = \mathbf{B}^{*i}(p, x)\xi^i + \bar{\mathbf{H}}^i(p, x) \quad (4.11)$$

para  $i = 1, \dots, k$ , onde  $\bar{\Psi}^i(p, x)$  é o fluxo angular transformado na região  $i$ ,  $\mathbf{B}^{*i}(p, x)$  é definido de forma similar a (2.27),  $\xi$  é um vetor desconhecido e  $\bar{\mathbf{H}}^i(p, x)$  é o vetor que contém os termos de convolução na variável  $x$ .

Para que a solução para o fluxo transformado (4.11) fique completamente determinada, precisamos determinar o vetor  $\xi$ . Para isto aplicamos as condições de contorno (4.9) e de continuidade (4.10) e montamos o sistema matricial

$$\mathbf{M}\xi = \mathbf{P} \quad (4.12)$$

onde



$$\xi = \left[ \xi_1^1 \quad \xi_2^1 \quad \dots \quad \xi_1^i \quad \xi_2^i \quad \dots \quad \xi_1^k \quad \xi_2^k \right]^T \quad (4.14)$$

e

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_1^1(p, 0) - \bar{\mathbf{H}}_1^1(p, 0) \\ \bar{\mathbf{H}}_1^1(p, L_1) - \bar{\mathbf{H}}_1^2(p, 0) \\ \bar{\mathbf{H}}_2^1(p, L_1) - \bar{\mathbf{H}}_2^2(p, 0) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{H}}_1^i(p, L_i) - \bar{\mathbf{H}}_1^{i+1}(p, 0) \\ \bar{\mathbf{H}}_2^i(p, L_i) - \bar{\mathbf{H}}_2^{i+1}(p, 0) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{H}}_1^{k-1}(p, L_k - 1) - \bar{\mathbf{H}}_1^k(p, 0) \\ \bar{\mathbf{H}}_2^{k-1}(p, L_{k-1}) - \bar{\mathbf{H}}_2^k(p, 0) \\ \bar{\Psi}_2^k(p, L_k) - \bar{\mathbf{H}}_2^k(p, L_k) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Resolvendo tal sistema, a solução para o fluxo transformado (4.11) é totalmente determinada. Para a solução final, aplicamos a transformada inversa de Laplace na variável temporal  $t$ , utilizando a integral de Bromwich como em (3.31) para cada região  $i$ , encontrando assim, a solução para o problema de ordenadas discretas unidimensional dependente do tempo na forma integral. Após, para a obtenção de resultados numéricos, fazemos uma aproximação desta integral seguindo os passos da seção 3.1.1. E isto completa a extensão do método TLTS<sub>N</sub> para domínio heterogêneo.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de validar o algoritmo proposto para a solução do problema de transporte  $S_N$  unidimensional dependente do tempo em geometria cartesiana, primeiramente testamos os resultados gerados pelo nosso programa em meio homogêneo. Fazemos isto comparando os resultados obtidos pela nossa proposta com os resultados obtidos em [Oliveira et al., 2002a]. Num segundo passo, para analisar a formulação proposta para meio heterogêneo, como não encontramos trabalhos na literatura, vamos considerar uma seqüência de problemas em duas regiões, onde a primeira região possui espessura  $L_1$ , seções de choque total  $\sigma_t = 1$  e espalhamento  $\sigma_s = 0,9$ . A segunda região será considerada com uma espessura  $L_2$ ,  $\sigma_t = 1$  e os valores de  $\sigma_s$  para a segunda região assumirão um valor em cada problema formando uma seqüência de valores se aproximando de 0,9.

### 5.1 Problema Homogêneo

Considere o problema homogêneo, conforme seção 3. Suponhamos que  $\sigma_t = 1$ ,  $\sigma_s = 0,999$ ,  $v = 10^6$  e que a espessura da placa é  $x_0 = 50$ . Consideremos, também, condições de contorno reflexiva à esquerda e de vácuo à direita. Suponhamos uma fonte unitária na região  $0 < x < 10$  e que, no instante  $t = 0$ , esta fonte é retirada, gerando assim um problema dependente do tempo, cuja condição inicial é dada pela solução do problema estacionário descrito pelas equações

$$\mu_m \frac{d}{dx} \phi_m(x) + \sigma_t \phi_m(x) = \frac{\sigma_s}{2} \sum_{n=0}^N \omega_n \phi_n + Q_m(x), \quad (5.1)$$

$$\phi_n(0) = \phi_{N-n+1}(0), \quad n = 1, \dots, N/2, \quad (5.2)$$

$$\phi_n(x_0) = 0, \quad n = (N/2 + 1), \dots, N, \quad (5.3)$$

$$Q_m(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 10 \\ 0, & 10 < x < 50. \end{cases} \quad (5.4)$$

As tabelas seguintes mostram o valor da taxa de absorção dada por

$$R_a(t) = (\sigma_t - \sigma_s) \int_{45}^{50} \sum_{n=1}^N \omega_n \Psi_n(x, t) dx, \quad (5.5)$$

Na tabela 5.1 apresentam-se os resultados numéricos determinados para a taxa de absorção na região  $45 < x < 50$ , no instante  $t = 10^{-5}$ s, fazendo-se uso dos métodos  $TLTS_N$  e  $SP_M-LTS_N$ , o qual foi proposto em [Oliveira et al., 2002a], considerando as ordens de quadratura  $N = 2, 4, 6, 8$  e  $12$  para a aproximação  $S_N$ , ordem de quadratura igual a  $8$  para a inversão numérica da transformada de Laplace e ordem de aproximação em polinômios de Laguerre igual a  $M = 30$ .

N	$TLTS_N$	$SP_M-LTS_N$
2	0.1265737376187556	-
4	0.1265737376187556	-
6	0.1265737376187557	-
8	0.1265737376187572	0.1265737376187571

Tabela 5.1: Resultados Numéricos para a taxa de absorção pelos métodos  $TLTS_N$  e  $SP_M-LTS_N$

Na tabela 5.1, pode-se observar que o método  $TLTS_N$  convergiu desde a ordem de quadratura de  $N = 2$ .

Na tabela 5.2, apresentam-se os valores para a taxa de absorção na região  $45 < x < 50$ , dada por (5.5) no instante  $t = 1$ s para o método  $LTS_N$ , considerando as ordens de quadratura  $N = 2, 4, 6, 8$  e  $12$  para a aproximação  $S_N$  e ordem de quadratura  $8$  para a inversão numérica da transformada de Laplace. Esses resultados são comparados com os obtidos pelo método  $SP-LTS_N$ , considerando ordem de aproximação em polinômios de Laguerre igual a  $M = 18$ . Enquanto que, na tabela 5.3, são apresentados os valores para o fluxo escalar no instante

$t = 8s$ , ordem de quadratura 8 para a aproximação  $S_N$  e para a inversão numérica da transformada de Laplace nos pontos  $x = 5, 6, 7$  e  $8$  da placa. Esses resultados são comparados com os resultados obtidos pelo método  $SP_M$ - $LTS_N$  com ordem 18 para a aproximação em polinômios de Laguerre.

$N$	$LTS_N$	$SP_M$ - $LTS_N$
2	1.0161399	1.016139
4	1.0161399	1.016139
6	1.0161399	1.016139
8	1.0161398	1.016139
12	1.0161398	1.016139

Tabela 5.2: Resultados Numéricos para a taxa de absorção pelos métodos  $TLTS_N$  e  $SP_{18}$ - $LTS_N$

$x$	$LTS_8$	$SP_{18}$ - $LTS_8$
5	0.00779734523	0.007797345
6	0.00240506489	0.002405064
7	0.00067846751	0.000678467
8	0.00017045100	0.000170451

Tabela 5.3: Resultados Numéricos para o fluxo escalar pelos métodos  $TLTS_8$  e  $SP_{18}$ - $LTS_8$  nos pontos  $x = 5, 6, 7$  e  $8$

Observando atentamente as tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, pode-se concluir que o método  $TLTS_N$  apresenta uma boa aproximação em comparação com os resultados do método  $SP_M$ - $LTS_N$ . Destacamos ainda que o método  $TLTS_N$  não necessita de recursividade em sua resolução como é preciso no  $SP_M$ - $LTS_N$ . Por este motivo precisamos resolver apenas um problema estacionário para cada abcissa  $p_n$ , dada na fórmula (3.37) e a implementação computacional é facilitada. Com isso afirmamos que o método  $TLTS_N$  é robusto computacionalmente para resolver o problema de transporte  $S_N$  dependente do tempo em uma placa.

Em suma, concluímos a convergência numérica do método  $TLTS_N$  em comparação ao método  $SP$ - $LTS_N$ . Isto pôde ser verificado tanto com a variação da ordem de aproximação dos polinômios de Laguerre, como com a variação da ordem das equações  $S_N$ .

## 5.2 Problema Heterogêneo

Para testarmos nossa formulação para problemas em domínio heterogêneo, vamos resolver uma seqüência de problemas de transporte unidimensionais dependentes do tempo em domínio heterogêneo. Vamos considerar uma placa composta de duas regiões, onde  $v = 10^6$ ,  $L_1 = 3$ ,  $S^1(t, x) = 0$ ,  $\sigma_t^1 = 1$ ,  $\sigma_s^1 = 0,9$ ,  $L_2 = 7$ ,  $S^2(t, x) = 0$ ,  $\sigma_t^2 = 1$  e  $\sigma_s^2$  assume uma seqüência de valores convergindo para  $\sigma_s^1 = 0,9$ . A figura 5.1 ilustra o caso.

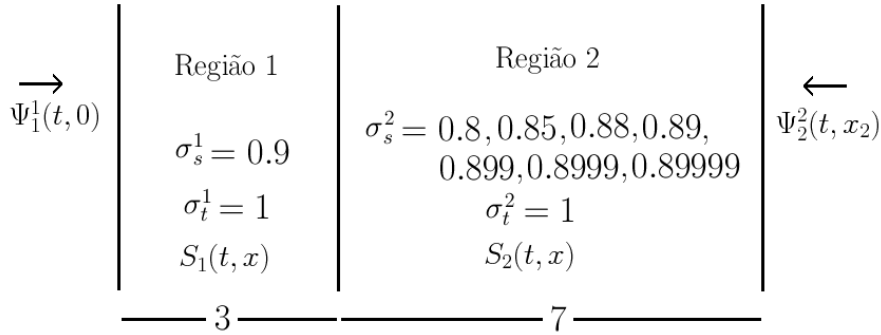


Figura 5.1: Figura ilustrando a seqüência de problemas resolvidos.

Neste problema, consideramos como condições iniciais e de contorno, respectivamente, as condições

$$\begin{aligned}
 \Psi_m(0, x) &= 10^6, \quad m = 1, \dots, N \\
 \Psi_m^1(t, 0) &= 0, \quad m = 1, \dots, \frac{N}{2} \\
 \Psi_m^2(t, x_2) &= 0, \quad m = \frac{N}{2}, \dots, N
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Na tabela 5.4 apresentamos os valores obtidos pelo método TLTS<sub>N</sub> para o fluxo escalar dado por

$$\varphi(t, x) = \sum_{n=1}^N w_n \Psi_n(t, x) \tag{5.7}$$

para a ordem  $N = 10$ , para as posições  $x = 0, 3$  e  $10$  no instante  $t = 0.1$ . Estes resultados são comparados com os resultados obtidos pelo método TLTS<sub>N</sub> em domínio homogêneo com  $x_0 = 10$ ,  $\sigma_t = 1$  e  $\sigma_s = 0.9$  listados na última linha da tabela.

$\sigma_s$	$x = 0$	$x = 3$	$x = 10$
0.8	0.0267405082297	0.00437852441138	1.3231050610119
0.85	0.0267348290615	0.00432857691846	1.2884719563727
0.88	0.0267378139524	0.00428714029475	1.2476239475617
0.89	0.0267399864273	0.00405837491857	1.2100562718238
0.899	0.0267400194382	0.00383847562745	1.2100037281910
0.8999	0.0267403491837	0.00373302738494	1.2098514483992
0.89999	0.0267405082296	0.00373381979639	1.2042519774918
0.9	0.0267405082296	0.00373342773961	1.2042519765982

Tabela 5.4: Resultados numéricos para o fluxo escalar com  $N = 10$  em  $t = 0.1$  pelo método  $\text{TLTS}_N$

Podemos observar, na tabela 5.4 que obtivemos resultados satisfatórios com a aplicação do método  $\text{TLTS}_N$  para domínio heterogêneo. Podemos afirmar isso, pois foi proposta uma seqüência de problemas heterogêneos convergindo para um problema homogêneo e nos resultados obtidos também observa-se essa convergência.



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nos resultados apresentados no capítulo anterior e também na própria formulação do método TLTS<sub>N</sub> apresentada nas seções 3 e 4, é importante salientar os seguintes aspectos: a solução obtida  $\Psi_m(t, x)$  é uma solução analítica das equações  $S_N$  no sentido de que nenhuma aproximação foi feita para sua derivação, a menos de erros de arredondamento; a aplicação do método LTS<sub>N</sub> a cada uma das regiões, reduz um problema mais complexo em um problema simples, que pode ser resolvido acoplando todas as soluções obtidas ao seu término; a rápida convergência numérica do método TLTS<sub>N</sub> na resolução do problema de transporte  $S_N$  dependente do tempo, ou seja, a precisão desejada é encontrada para um valor pequeno de  $N$ ; o método mostrou-se eficiente tanto na resolução de problemas de transporte dependente do tempo em domínios homogêneos e heterogêneos; face à complexidade dos problemas resolvidos, vale salientar a simplicidade da formulação proposta, o que facilita a implementação de códigos computacionais; com facilidade essa formulação pode ser adequada para resolver outros tipos de problemas, tais como, problemas anisotrópicos, problemas envolvendo outros tipos de condições de contorno e iniciais, por exemplo, condições reflexivas; a confiabilidade dos resultados encontrados é reforçada pela demonstração da convergência do método SP<sub>M</sub>-LTS<sub>N</sub> apresentada em [Vilhena et al., 2003]. Face ao exposto, pode-se afirmar que a formulação proposta é adequada na geração de problemas *benchmark*, basta testarmos outras formas de inversão numérica para a transformada de Laplace.

Concluindo, pode-se afirmar que o objetivo deste trabalho foi atingido, uma vez que foi mostrada a generalidade do método na resolução de problemas de transporte  $S_N$  unidimensionais dependente do tempo, em uma placa plana, em meio homogêneo ou heterogêneo.

Como trabalho futuro, sugerimos testar outras formas de inversão numérica da transformada de Laplace no tempo. Também sugerimos a aplicação desta metodologia na solução de problemas de cinética de reatores.

## Bibliografia

- [Abdou, 2005] Abdou, M. (2005). On the solution of time-dependent transport equation with time-varying cross sections. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 94:189–199.
- [Abdou, 2006] Abdou, M. (2006). Chapman-Enskog-maximum entropy method on time-dependent neutron transport equation. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 101:210–225.
- [Amaral Rodriguez et al., 2006] Amaral Rodriguez, B., Vilhena, M., e Borges, V. (2006). Determination of the exposure build-up factor in a slab using the  $LTS_N$  method. *Kerntechnik*, 4:182–184.
- [Amaral Rodriguez et al., 2007] Amaral Rodriguez, B., Vilhena, M., Borges, V., e Malamut, C. (2007). The exposure buildup factor formulation in a slab and rectangle geometry by the  $LTS_N$  method. *International Journal of Low Radiation*, 4:102–116.
- [Aydin et al., 2005] Aydin, E., Katsimichas, S., e de Oliveira, C. (2005). Time-dependent diffusion and transport calculations using a finite-element-spherical harmonics method. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 95:349–363.
- [Barichello, 1992] Barichello, L. (1992). *Formulação analítica para solução do problema de ordenadas discretas unidimensional*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre:Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica(PROMECC).
- [Barichello et al., 2002] Barichello, L., Rodrigues, P., e Siewert, C. (2002). An analytical discrete-ordinates solution for dual-mode heat transfer in a cylinder. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 73:583–602.

- [Barichello e Siewert, 1998] Barichello, L. e Siewert, C. (1998). On the equivalence between the discrete ordinates and the spherical harmonics methods in radiative transfer. *Nuclear Science and Engineering*, 130:79–84.
- [Barichello e Vilhena, 1993] Barichello, L. e Vilhena, M. (1993). A general analytical approach to one group one dimensional transport equation. *Kerntechnik*, 58:182–184.
- [Barros et al., 1998] Barros, R., Yavuz, M., D. A. M., Filho, H., e Mello, J. (1998). Progress in spectral nodal methods applied to discrete ordinates transport problems. *Progress in Nuclear Energy*, 33:117–154.
- [Batistela e Vilhena, 1997a] Batistela, C. e Vilhena, M. (1997a). Cálculo de criticidade pelo método  $LTS_N$ . In *XI ENFIR-Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*, volume 1, pages 226–231, Poços de Caldas, M.G., Brasil.
- [Batistela e Vilhena, 1997b] Batistela, C. e Vilhena, M. (1997b). Criticality by the  $LTS_N$  method. *Journal of Nuclear Science and Technology*, 34:603–606.
- [Batistela et al., 1999] Batistela, C., Vilhena, M., e Borges, V. (1999). Determination of the effective multiplication factor in slab by the  $LTS_N$  method. *Annals of Nuclear Science*, 26:761–676.
- [Bonemberger, 2005] Bonemberger, N. H. (2005). Método  $LTS_N$  para  $n$  inteiro. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada- $PPGMA_p$  Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
- [Borges e Vilhena, 2002] Borges, V. e Vilhena, M. T. M. B. (2002). Uso do método  $lts_N$  aplicado a problemas de engenharia nuclear. In *INAC - International Nuclear Atlantic Conference - XIII ENFIR*.
- [Brancher et al., 1999] Brancher, J., Segatto, C., e Vilhena, M. (1999). The  $LTS_N$  solution for radiative transfer problem without azimuthal symmetry with se-

- vere anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 62:743–753.
- [Case, 1960] Case, K. M. (1960). Elementary solution of transport equation and their applications. *Annals of Physic*, 9:1–23.
- [Chai e Lama, 2004] Chai, J.C., H. P. e Lama, Y. (2004). Three-dimensional transient radiative transfer modeling using the finite-volume method. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 86:299–313.
- [Chai, 2004] Chai, J. (2004). Transient radiative transfer in irregular two-dimensional geometries. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 84:281–294.
- [Chandrasekhar, 1950] Chandrasekhar, S. (1950). *Radiative transfer*. Dover Publications, Inc., Oxford University Press, London.
- [El-Wakil e Sallah, 2004] El-Wakil, S.A., D. A. e Sallah, M. (2004). Time-dependent neutron transport in finite media using pomraning-eddington approximation. *Annals Nuclear Energy*, 85:13–24.
- [El-Wakil, 2006] El-Wakil, S. (2006). Time-dependent radiation transfer with rayleigh scattering in finite slab media. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 102:152–161.
- [El-Wakil et al., 2004] El-Wakil, S., Degheidy, A., e Sallah, M. (2004). Time-dependent radiation transfer in a semi-infinite stochastic medium with rayleigh scattering. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 85:1324.
- [El-Wakil et al., 2005] El-Wakil, S., Degheidy, A., e Sallah, M. (2005). Time-dependent polarized radiation transfer in semi-infinite binary markovian media. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 90:259273.

- [Ganapol, 1976] Ganapol, B. (1976). Time-dependent moments of the monoenergetic transport equation in spherical and cylindrical geometry. *Nuclear Science and Engineering*, 60:103.
- [Ganapol, 1982] Ganapol, B. (1982). Time-dependence surface angular flux for a semi-infinite medium with specular reflection. *Nuclear Science and Engineering*, 80:412–415.
- [Ganapol, 1986] Ganapol, B. (1986). Solution of the one-group time-dependent neutron transport equation in an infinite medium by polynomial reconstruction. *Nuclear Science and Engineering*, 92(2):272–279.
- [Ganapol e Filippone, 1982] Ganapol, B. e Filippone, W. (1982). Time-dependent emergent intensity from an anisotropically scattering semi-infinite atmosphere. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 27(1):15–21.
- [Ganapol e Grossman, 1973] Ganapol, B. e Grossman, L. (1973). Collided flux expansion method for time-dependent neutron transport. *Nuclear Science and Engineering*, 52(4):454–460.
- [Ganapol e Peddicord, 1977] Ganapol, B.D., M. P. e Peddicord, K. (1977). The generation of time-dependent neutron transport solutions in infinite media. *Nuclear Science and Engineering*, 42:19–26.
- [Garcia e Siewert, 2005] Garcia, R. e Siewert, C. (2005). The linearized boltzmann equation: Sound-wave propagation in a rarefied gas. *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik*, 57:94–122.
- [Gonçalez et al., 2007] Gonçalez, T., Segatto, C., e Vilhena, M. (2007). A closed form solution for the one-group time-dependent transport equation in a slab by the  $LTS_N$  method. In *Anais do XV ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*, Santos, SP, Brazil.

- [Gonçalves et al., 2002] Gonçalves, G., Oliveira, G., e Vilhena, M. (2002). The  $LTS_N$  solution of the adjoint neutron transport equation with arbitrary source for high order of quadrature in a homogeneous slab. *Annals of nuclear energy*, 29:561–569.
- [Gonçalves, 1999] Gonçalves, G. A. (1999). Solução  $LTS_N$  da equação adjunta de transporte de nêutron com fonte arbitrária para elevada ordem de quadratura numa placa homogênea. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica-*PROMEC* Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
- [Gonçalves et al., 2000] Gonçalves, G. A., Segatto, C. F., e Vilhena, M. T. (2000). The  $LTS_N$  particular solution in a slab for an arbitrary source and large order of quadrature. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 66:271–276.
- [Hauser et al., 2003] Hauser, E., Pazos, R., Barros, R., e Vilhena, M. (2003). Solution and study of nodal neutron transport equation applying the  $lts_n$ -diagexp method. In *Annals of 18th International Conference on Transport Theory*, pages 303–307, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- [Hauser et al., 2005] Hauser, E., Pazos, R., e Vilhena, M. (2005). An error estimate of the nodal  $LTS_N$  solution in cartesian geometry. *Annals of Nuclear Energy*, 32:1146–1156.
- [Hauser et al., 2002] Hauser, E., Vilhena, M., e Pazos, R. (2002). Solution and study of the two dimensional nodal neutron transport equation. *Proceedings Of Icone 10*, 1:1–5.
- [Heydarian et al., 1981] Heydarian, M., Mullineux, N., e Reed, J. (1981). Solution of parabolic partial-differential equations. *Applied Mathematical Modeling*, 5:448–449.
- [Lemos, 2000] Lemos, R. (2000). Solução da equação de transferência radiativa condutiva em placa plana pelo método da decomposição e  $lts_2$ . Master's

thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, Porto Alegre, RS, Brasil.

- [Liou, 1973] Liou, K. (1973). A numerical experiment on chandrasekhar's discrete-ordinate method for radiative transfer. *Journal of Atmospheric Sciences*, 30:1303–1326.
- [Marona et al., 2007] Marona, D., Segatto, C., e Vilhena, M. (2007). On the  $LTS_N$  solution of the transport equation in a slab for  $c = 1$ . In *Anais do XV ENFIR - Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*, Santos, SP, Brazil.
- [Oliveira et al., 2002a] Oliveira, J., Cardona, A., e Vilhena, M. (2002a). Solution of the one-dimension time-dependent discrete ordinates problem in a slab by the spectral and  $LTS_N$  methods. *Annals of Nuclear Energy*, 29:13–20.
- [Oliveira et al., 2002b] Oliveira, J., Cardona, A., Vilhena, M., e Barros, R. (2002b). A semi-analytical numerical method for time-dependent radiative transfer problems in a slab geometry with coherent isotropic scattering. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 73:55–62.
- [Olson e Herderson, 2004] Olson, K. e Herderson, D. (2004). Numerical benchmark solutions for time-dependent neutral particle transport in one-dimensional homogeneous media using integral transport. *Annals of Nuclear Energy*, 31:1495–1537.
- [Orengo et al., 2004] Orengo, G., Vilhena, M., C.O., G., Caldeira, G., e G.A., G. (2004). Recent advances in the  $LTS_N$  method for criticality calculations in a slab geommetry. *Annals of Nuclear Energy*, 31:2195–2202.
- [Pazos e Vilhena, 1999a] Pazos, R. P. e Vilhena, M. T. M. B. (1999a). Convergence in transport theory. *Applied Numerical Mathematics*, 30:79–92.

- [Pazos e Vilhena, 1999b] Pazos, R. P. e Vilhena, M. T. M. B. (1999b). Convergence of the  $LTS_N$  method: Approach of  $c_0$  semi-groups. *Progress in nuclear energy*, 30:77–86.
- [Piessens, 1973] Piessens, R. (1973). Gaussian quadrature formulas for bromwich's integarl[d1]. *Communications of the ACM*, 16(8):486–487.
- [Retamoso et al., 2002] Retamoso, M., Vilhena, M., Velho, H., e Ramos, F. (2002). Estimation of boundary condition in hydrologic optics. *Applied Numerical Mathematics*, 40:87–100.
- [Santos, 2005] Santos, M. A. (2005).  $mgls_N^M$  aproximação angular multigrigrid em uma placa plana. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada-PPGMA<sub>p</sub> Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
- [Segatto, 1995] Segatto, C. (1995). *Extensão da formulação  $LTS_N$  para problemas de transporte sem simetria azimutal e problemas dependentes do tempo*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica(PROMECC).
- [Segatto e Vilhena, 1994] Segatto, C. e Vilhena, M. (1994). Extension of the  $LTS_N$  formulation for discrete ordinates problem without azimuthal symmetry. *Annals of Nuclear Energy*, 21:701–710.
- [Segatto e Vilhena, 1997] Segatto, C. e Vilhena, M. (1997). Solução genérica da equação de transporte unidimensional para elevadas ordens de quadratura. In *Anais do XI Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica.*, volume 1, pages 238–242, Minas Gerais, Brasil.
- [Segatto et al., 1999a] Segatto, C., Vilhena, M., e Brancher, J. (1999a). The one-dimensional  $LTS_N$  formulation for high degree of anisotropy. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 61:39–43.



- [Segatto et al., 1999b] Segatto, C., Vilhena, M., e Gomes, M. (1999b). The one-dimensional  $LTS_N$  solution in a slab with high degree of quadrature. *Annals of Nuclear Energy*, 26:925–934.
- [Segatto et al., 2005] Segatto, C. F., Vilhena, M. T., e Leite, S. (2005). The  $LTS_N$  angular multigrid approach in a slab. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 95:415–442.
- [Segatto et al., 2001] Segatto, C. F., Vilhena, M. T., e Tavares, L. S. (2001). The determination of radiant parameters by the  $LTS_N$  method. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 70:227–236.
- [Siewert e Valougeorgis, 2002] Siewert, C. e Valougeorgis, D. (2002). An analytical discrete-ordinates solution of the s-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 72:531–550.
- [Simch, 2006] Simch, M. (2006). *Solução  $LTS_N$  para problemas de transferência radiativa com polarização em geometria plana*. PhD thesis, Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica(PROMEC).
- [Simch et al., 2006] Simch, M., Segatto, C., e Vilhena, M. (2006). An analytical solution for the  $s_N$  radiative transfer equations with polarization in a slab by the  $lts_N$  method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 97:424–435.
- [Souto et al., 2003] Souto, R., Velloso, H., Stephany, S., Preto, A., Segatto, C., e Vilhena, M. (2003). A parallel implementation of the  $lts_n$  method for a radiative transfer problem. In *Proceedings of the 15th Symposium on Computer Architecture and High Performance Computing*, pages 116–128, São Paulo, SP, Brazil.
- [Stroud e Secrest, 1966] Stroud, A. e Secrest, D. (1966). *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice-Hall Inc., New Jersey.

- [Tavares, 2000] Tavares, L. (2000). Cálculo dos parâmetros superficiais de radiação pelo método  $LTS_N$ . Master's thesis, Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica(PROMECC).
- [Vargas et al., 2007] Vargas, R., C.F., S., e Vilhena, M. (2007). Solution of the radiative heat transfer equation with internal energy sources in a slab by the  $LTS_N$  method. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 105:1–7.
- [Vargas e Vilhena, 1997] Vargas, R. e Vilhena, M. (1997). Analytical solution of the discrete ordinates problem by the decomposition method. *Annals of Nuclear Energy*, 24:785–791.
- [Vargas e Vilhena, 1999] Vargas, R. e Vilhena, M. (1999). A closed-form solution for the one-dimensional radiative conductive problem by the decomposition and  $LTS_N$  methods. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 61:303–308.
- [Vasques, 2005] Vasques, R. (2005). A review of particle transport theory in a binary stochastic medium. Master's thesis, Universidade Federal do Rio grande do Sul, Porto Alegre: Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada.
- [Vasques et al., 2003] Vasques, R., Segatto, C., e Vilhena, M. (2003). The  $lts_n$  solution for the neutron transport equation in spherical geometry. In *18'th Internatinal Conference in Transport Theory*, Rio de Janeiro, RS, Brazil.
- [Velho et al., 2002] Velho, H., Retamoso, M., e Vilhena, M. (2002). Inverse problems for estimating bottom boundary conditions of natural waters in engineering. *Internacional for numerical methods in engineering*, 54:1357–1368.
- [Velho et al., 2003] Velho, H., Vilhena, M., Retamoso, M., e Pazos, R. (2003). An application of the  $lts_n$  method on inverse problem in hydrological optics. *Progress in Nuclear Energy*, 40:457–468.

- [Vilhena e Barichello, 1995] Vilhena, M. e Barichello, L. (1995). An analytical solution for the multigroup slab geometry discrete ordinates problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 24:1337–1352.
- [Vilhena e Barichello, 1999] Vilhena, M. e Barichello, L. (1999). A closed-form solution to the one-dimensional linear and nonlinear radiative transfer problem. *Hybrid Methods In Engineering*, 1:1–17.
- [Vilhena e Segatto, 1996] Vilhena, M. e Segatto, C. (1996). A new iterative method to solve the radiative transfer equation. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 55:493–498.
- [Vilhena et al., 2004] Vilhena, M., Velho, H., Segatto, C., e Gonçalves, G. (2004). Analytical solution of the one-dimensional discrete ordinates equation by the laplace and hankel integral transform. In *Integral Methods in Science and Engineering*, pages 267–272. Ed. Birkhauser, Editors: C. Constanda and M.Ahuesand A. Largillier.
- [Zabadal et al., 1995] Zabadal, J., Vilhena, M., e Barichello, L. (1995). Solution for three dimensional one group discrete ordinates problem by the  $LTS_N$  method. *Annals of nuclear Energy*, 22:131–134.
- [Zabadal et al., 1997] Zabadal, J., Vilhena, M., e Barichello, L. (1997). An analytical solution for the two-dimensional discrete ordinate problem in a convex domain. *Progress in Nuclear Energy*, 31:225–228.