UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma coleção de resultados sobre Números Normais

Dissertação de Mestrado

Jairo Krás Mengue

Porto Alegre, 14 de março de 2008.

Dissertação submetida por Jairo Krás Mengue[1] como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:

Dra. Cydara Cavedon Ripoll

Banca Examinadora:

Dra. Cydara Cavedon Ripoll (PPGMat-UFRGS)

Dr. Artur Oscar Lopes (PPGMat-UFRGS)

Dr. Alexandre Tavares Baravieira (PPGMat-UFRGS)

Dr. Ali Tahzibi (ICMC-USP-São Carlos)

Data da Apresentação: 14 de março de 2008.

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Resumo

Entre os mais conhecidos estudos de probabilidades aplicados à teoria dos números, encontra-se o conceito de normalidade. Neste trabalho apresentamos uma coleção de resultados clássicos da teoria dos números normais, incluindo as provas da normalidade da *Constante de Champernowne* e da *Constante de Copeland-Erdös*.

Listamos também algumas aplicações obtidas da conexão desta teoria com a das seqüências equidistribuídas módulo um, estudadas em sistemas dinâmicos. Entre elas, vamos provar o resultado conhecido por *critério de normalidade* devido a Pjateckii-Sapiro.

Além disso, apresentamos um estudo que desenvolvemos sobre translações que preservam a normalidade, introduzindo o conceito de *número determinado*. Provamos aqui, independentemente, uma versão mais fraca de um resultado devido a Rauzy que caracterizou o conjunto dos números com os quais podemos formar translações que preservam a normalidade.

Abstract

Normal numbers have a known place in probability applied in number theory.

In this Dissertation we show a collection of classical theorems over normal numbers such as the normality of the Champernowne Constant and the Copeland-Erdos Constant.

We show some applications obtained from the relations of this theory with the theory of uniform distribution of sequences, studied in dynamical systems, such as the theorem called “normality criteria” of Pjateckii-Sapiro.

Besides that, we show a study over translations that preserve normality, introducing the concept of “determined numbers”. We prove here a weaker form of a Rauzy’s theorem, on the set of numbers that form normality preserving translations.

Agradecimentos

À Deus.

À professora Cydara Cavedon Ripoll, que esteve presente em minha vida acadêmica desde que ingressei na universidade. Que sempre esteve disposta a ajudar, nas mais diversas situações. Que me motivou a apresentar trabalhos em congressos e publicá-los, e aceitou com determinação a tarefa de me orientar. Não apenas me orientou na busca de livros e compreensão de teoremas, mas se colocou disposta a ouvir minhas idéias, encorajando a construção de novos resultados ou novas provas para resultados já conhecidos.

À todos os demais professores que contribuíram para minha formação acadêmica, dentre os quais merece destaque Artur Oscar Lopes, que sempre motivou meus estudos em matemática e me deu bastante atenção.

Aos colegas e amigos pelas trocas de ajuda nos exercícios e nas provas de alguns teoremas, e pelas conversas de descontração após as aulas.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq pelo financiamento da bolsa de mestrado.

Aos familiares que aceitaram minha ausência, até mesmo quando estava por perto, e impaciência até mesmo nas situações mais simples do dia-a-dia.

Sumário

1 Introdução

Qual dos dígitos ocorre com maior freqüência na expansão decimal de π?

Esta pergunta é um particular problema ainda não resolvido em Teoria dos Números e está intimamente ligada com a teoria que apresentamos neste trabalho. Por este motivo ela foi escolhida para iniciá-lo. Note que respondê-la equivale a, de certo modo, entender um pouco da expansão de π na base 10.

Neste trabalho, muitas vezes usaremos a palavra *freqüência*, como acima. Por tal motivo, devemos esclarecer seu significado:

Seja X um conjunto qualquer e $(x_1, x_2, ...)$ uma seqüência de elementos de X. Dizemos que um conjunto $Y \subset X$ é *visitado com freqüência* a por $(x_1, x_2, ...)$, se

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{i : x_i \in Y \text{ e } 1 \leq i \leq N\}}{N} = a.$$

Alternativamente podemos dizer que *os elementos de* Y *ocorrem com freqüência* a *em* $(x_1, x_2, ...)$. Se $(y_1, ..., y_k)$ é uma $k-$upla de elementos de X, dizemos que $(y_1, ..., y_k)$ ocorre com freqüência a em $(x_1, x_2, ...)$ se

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{i \leq N-k+1 : (x_i, ..., x_{i+k-1}) = (y_1, ..., y_k)\}}{N} = a.$$

Note que, por ser dada por um processo limite, nem sempre a freqüência está bem definida.

Um importante exemplo do que tratamos decorre do *Teorema dos Números Primos*, a partir do qual concluímos que os números primos ocorrem com freqüência zero entre os números naturais, quando obedecida a enumeração tradicional.

O conceito de normalidade de um número é um exemplo de estudo de freqüência em conjuntos enumeráveis, que foi introduzido por Borel, em 1909 (veja [6]). Fixado um inteiro $b \geq 2$, um número é dito *normal em base b* (ou $b-$normal) se, em sua expansão nesta base, qualquer dígito ocorre com freqüência $1/b$ e qualquer agrupamento de k dígitos ocorre com freqüência $\frac{1}{b^k}$. Um número é dito *absolutamente normal* se é normal em qualquer base $b \in \{2, 3, ...\}$.

Dado $X = \{0, 1, ..., b-1\}$, a expansão de um número real em base b pode ser vista como uma seqüência de elementos de X e um agrupamento de k dígitos pode ser visto como uma $k-$upla de elementos de X.

Em seu trabalho, Borel provou que quase todos[2] os números reais são absolutamente normais; no entanto, não pôde esboçar exemplo algum.

Em 1917 Sierpinski apresentou o primeiro exemplo de número absolutamente normal (ver [22]). No entanto entender a expansão do número dado por ele em qualquer base é aparentemente impraticável. Sierpinski construiu para cada $\varepsilon \in [0, 1)$ um conjunto fechado N_ε com medida de Lebesgue $> \varepsilon$ e formado apenas por números absolutamente normais. Então tomou como exemplo de número absolutamente normal o real $\alpha := \inf N_0$.

Quando não buscamos exemplos de números absolutamente normais, mas de números normais em uma base fixada, o trabalho é menos complicado. O próprio Borel observou isso e apresentou um exemplo de número normal em base 10. Entretanto, Borel não apresentou os detalhes da prova de normalidade deste número e sua construção não é muito simples.

Um exemplo simples de número normal foi dado por Champernowne em 1933 (ver [7]). A *Constante de Champernowne* $(.123456789101112...)_{10}$, que consiste na listagem encadeada dos números naturais, e a *Constante de*

[2]Dizemos que uma propriedade é satisfeita por quase todos os pontos de $[0, 1)$ (ou de $\mathbb{R}$) se o conjunto de pontos que não satisfazem tal propriedade possui medida de Lebesgue zero.

Copeland-Erdös $(.23571113171923...)_{10}$, que consiste na listagem encadeada dos números primos, são os dois mais conhecidos exemplos de números normais em base 10. Vamos apresentar as provas de normalidade destes dois números no capítulo 3.

Na mesma época - início e meados do século XX - também surgiram muitos resultados sobre Teoria da Medida e Teoria Ergódica que têm fortes relações com o estudo de normalidade. De fato, um dos resultados mais conhecidos da Teoria Ergódica diz que a medida de Lebesgue é ergódica para a transformação $T : [0,1) \to [0,1)$ dada por $T(x) = bx \ (mod 1)$, portanto quase todos os pontos $x \in [0,1)$ têm órbita equidistribuída em $[0,1)$; esses são justamente os números normais em base b. Por isso, no capítulo 4 lembramos a relação entre os estudos de números normais e das *seqüências equidistribuídas,* que nos proporciona uma prova elegante de alguns resultados clássicos sobre números normais. Nessa direção, o principal resultado que vamos provar é o chamado *Critério de Normalidade* de Pjateckii-Sapiro.

Finalmente, vamos introduzir no capítulo 5 o conceito de número $b-$determinado e apresentar caracterizações para estes números, análogas às dos números normais. Como conseqüência obtemos que se α é $b-$determinado e β é $b-$normal então $\alpha + \beta$ é $b-$normal.

Salientamos aqui que após desenvolver este estudo apresentado no capítulo 5, descobrimos que um resultado mais geral que o mencionado acima já havia sido provado por Rauzy em ([17]). Ele caracterizou o conjunto B_b formado pelos reais α tal que $\alpha + \beta$ é $b-$normal para todo número $b-$normal β. Os números $b-$determinados estão contidos em B_b.

2 Notações, definições e resultados básicos

Convenção: Em todo este trabalho, por b denotaremos um inteiro maior ou igual a 2.

Notação 1 *Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $(f : \mathbb{N} \to \mathbb{R})$ vamos utilizar*

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \liminf_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (\inf\{f(y) : y \geq x\})$$

e

$$\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x) = \limsup_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (\sup\{f(y) : y \geq x\}).$$

Notação 2 *Seja α um número real. Denotamos por:*

$\lfloor\alpha\rfloor$ *a parte inteira de α que é o maior inteiro menor ou igual a α.*

$\{\alpha\}$ *a parte fracionária de α, ou resto de α mod 1, que é o real contido no intervalo $[0, 1)$ que satisfaz: $\{\alpha\} = \alpha - \lfloor\alpha\rfloor$.*

$\lceil\alpha\rceil$ *o menor inteiro maior ou igual a α.*

Alguns resultados abaixo são bem conhecidos da Teoria dos Números e portanto não apresentaremos suas provas.

Teorema 3 *Dados $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $b \geq 2$ inteiro, existe uma única forma de escrevermos:*

$$\alpha = \lfloor\alpha\rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^i},$$

onde $a_1, a_2, a_3, ...$ são inteiros $0 \leq a_i < b$ e onde $a_i < b - 1$ para infinitos termos i. Da mesma forma, existem únicos inteiros c_j e $s \in \mathbb{N}^*$ satisfazendo $\lfloor\alpha\rfloor = \sum_{j=0}^{s} c_j \times b^j$, $0 \leq c_j < b$ e $c_s > 0$. Com isso α assume uma representação única da forma:

$$\alpha = \sum_{j=0}^{s} c_j \times b^j + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^i},$$

que reescrevemos neste trabalho na forma

$$\alpha = (c_s...c_1c_0.a_1a_2a_3...)_b.$$

Quando $\lfloor \alpha \rfloor = 0$, *a expansão de* α *em base* b *será simplesmente representada por*

$$(.a_1a_2a_3...)_b. \tag{1}$$

Definição 4 *De acordo com o teorema anterior, dizemos que*

$$(c_s...c_1c_0.a_1a_2a_3...)_b$$

é a ***expansão*** $b-$***nária de*** α, *ou* ***expansão de*** α ***em base*** b, *ou ainda que* $c_s...c_1c_0.a_1a_2a_3...$ *é* α ***escrito em base*** b.

Se $\beta = -\alpha$ *onde* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, *então denominamos* $-(c_s...c_1c_0.a_1a_2a_3...)_b$ *expansão b−nária de* β, *onde* $\alpha = (c_s...c_1c_0.a_1a_2a_3...)_b$.

Dizemos que a expansão $b-$*nária de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *é* ***finita*** *se existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $a_i = 0$ *para todo* $i > k$.

Cada a_i *e* c_j *é chamado* ***dígito*** $b-$***nário de*** α *ou* $b-$***dígito de*** α.

Observação 5 *No Brasil tradicionalmente representamos a expansão de* α *em base* b *por*

$$(c_s...c_1c_0, a_1a_2a_3...)_b,$$

usando-se "," para separar as partes inteira e fracionária. Neste trabalho vamos manter o "." e a representação dada em (1), usados em grande parte dos trabalhos sobre números normais existentes.

Observação 6 *Note que existem* b *dígitos* $b-$*nários e que a expressão "única forma" do Teorema acima deve-se ao fato de exigirmos que* $a_i < b - 1$ *para infinitos termos* i. *Assim, por exemplo, em base* 10, *excluímos a possibilidade de uma expansão periódica de período* 9.

Proposição 7 *$\alpha \in \mathbb{R}$ é racional se e somente se sua expansão $b-$nária é periódica. Equivalentemente, α é irracional se e somente se sua expansão $b-$nária é não periódica.*

Notação 8 *Sejam N um número natural, $B_k = b_1...b_k$ um bloco ordenado de k dígitos $b-$nários e α um número real.*

Denotamos por $\#_b(B_k; N; \alpha)$ o número de vezes que o bloco B_k aparece na expansão $b-$nária de $\{\alpha\}$ até seu $N-$ésimo dígito $b-$nário. Ou seja: se $\{\alpha\} = (.a_1a_2a_3...)_b$ e se $N \geq k$ então

$$\#_b(B_k; N; \alpha) = \#\{n \in \{1, ..., N-k+1\} : (a_n, ..., a_{n+k-1}) = (b_1, ..., b_k)\}.$$

Se $N < k$ então $\#_b(B_k; N; \alpha) = 0$.

Definição 9 *Um número real α é dito **normal** na base b ou **b$-$normal** se para todo natural k e para todo bloco ordenado B_k de dígitos $b-$nários*

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N} \#_b(B_k; N; \alpha) = \frac{1}{b^k}.$$

Salientamos que a Definição 9 acima não impede um número de ser normal em uma base e não ser em outra. Em [19] há uma prova dessa afirmação.

Definição 10 (Borel) *Um número real α é dito **absolutamente normal** se é normal em todas as bases de numeração $(b = 2, 3, 4, 5, ...)$.*

No capítulo 3 vamos ver que essa definição é natural, uma vez que esse conjunto é não vazio e seu complementar tem medida de Lebesgue nula.

Lembramos também que se $\beta = -(c_s...c_1c_0.a_1a_2a_3...)_b$ é não inteiro, então $\{\beta\} = 1 - (.a_1a_2a_3...)_b$ e não $(.a_1a_2a_3...)_b$, o que seria mais interessante. Por exemplo: $\beta = -(0.33333)_{10} \Rightarrow \{\beta\} = (0.66667)_{10}$. Esse fato sugere a princípio que a normalidade (veja Definição 9) perde seu sentido natural quando tratamos de números negativos, porque na definição da função $\#_b$ analisamos a expansão de $\{\beta\}$ e não a de β. No entanto esta idéia é falsa: o corolário abaixo garante que é equivalente, quanto ao aspecto de normalidade, analisarmos a expansão de α ou de $1-\alpha$, para α contido em $[0,1)$.

Proposição 11 *Seja α um número contido em $[0,1)$. Seja B_k um bloco qualquer de $b-$dígitos e seja T_k o bloco que satisfaz $T_k + B_k = \underbrace{b'b'...b'b'}_{k\ vezes}$, onde* $b' = (b-1)$:

i) Se a expansão $b-$nária de α é finita, então

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(B_k; N; \alpha)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(B_k; N; 1-\alpha)}{N},$$

ii) Se a expansão $b-$nária de α não é finita, então

$$\#_b(B_k; N; \alpha) = \#_b(T_k; N; 1-\alpha).$$

Prova. i) Se α tem expansão $b-$nária finita então $1-\alpha$ também tem e portanto

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(B_k; N; \alpha)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(B_k; N; 1-\alpha)}{N} = 1 \text{ ou } 0,$$

se B_k é formado só por zeros ou não, respectivamente.

ii) Suponhamos $\alpha = (.a_1a_2...)_b$, daí:

$$1-\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b-1}{b^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(b-1)-a_i}{b^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a'_i}{b^i},$$

onde $a'_i = (b-1) - a_i$, portanto pertence ao conjunto $\{0, ..., b-1\}$. Como temos infinitos $a_i \neq 0$, garantimos infinitos $a'_i \neq b-1$ e portanto $(a'_1a'_2...)_b$ é a expansão $b-$nária de $1-\alpha$.

Seja $B_k = b_1...b_k$ um bloco ordenado de dígitos $b-$nários. Seja $T_k = b'_1...b'_k$ onde $b_i + b'_i = b-1$, ou equivalentemente $b'_i = (b-1) - b_i$. Com isso para todo $n \geq 1$:

$$(a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+k-1}) = (b_1, b_2, ..., b_k) \Leftrightarrow$$
$$(a'_n, a'_{n+1}, ..., a'_{n+k-1}) = (b'_1, b'_2, ..., b'_k),$$

o que implica $\#_b(B_k; N; \alpha) = \#_b(T_k; N; 1-\alpha)$. ■

Corolário 12 *Se $\alpha \in [0,1)$ é $b-$normal então $1-\alpha$ também é $b-$normal.*

Prova. É claro que se α é $b-$normal, então a expansão de α na base b não é finita, pois implicaria em $\lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{N}\#_b(0; N; \alpha) = 1 \neq \frac{1}{b}$. Fixamos um natural $k > 0$. Seja T_k um bloco de k dígitos $b-$nários e seja B_k tal que $B_k + T_k = \underbrace{b'b'...b'b'}_{k \text{ vezes}}$, onde $b' = (b-1)$.Pela hipótese da normalidade de α e pela proposição anterior (ii) obtemos:

$$\frac{1}{b^k} = \lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{N}\#_b(B_k; N; \alpha) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{N}\#_b(T_k; N; 1-\alpha),$$

e portanto $1-\alpha$ é $b-$normal. ■

O próximo resultado nos mostra que o conceito de normalidade está restrito a números irracionais.

Proposição 13 *Nenhum racional é $b-$normal.*

Prova. Se α é racional, então $\{\alpha\}$ é racional e sua expansão $b-$nária é periódica, digamos, de período $b_1...b_k$:

$$\{\alpha\} = (.a_1a_2...a_t\overline{b_1...b_k})_b = (.a_1a_2a_3...a_tb_1...b_kb_1...b_k...)_b.$$

Tomando a seqüência crescente $N_j = t + jk$ temos que

$$\frac{1}{N_j}\#_b(b_1...b_k; N_j; \alpha) \geq \frac{j}{N_j} = \frac{j}{t+jk}.$$

Daí

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j}\#_b(b_1...b_k;N_j;\alpha) \geq \lim_{j\to\infty}\frac{j}{t+jk} = \frac{1}{k},$$

o que garante que $\frac{1}{N}\#_b(b_1...b_k;N;\alpha)$ não converge a $\frac{1}{b^k}$. ■

Na prova da proposição anterior, utilizamos um conhecido fato da análise real: é suficiente encontrarmos uma subseqüência $\left(\frac{1}{N_j}\#_b(b_1...b_k;N_j;\alpha)\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de $\left(\frac{1}{N}\#_b(b_1...b_k;N;\alpha)\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ não convergente a $\frac{1}{b^k}$, para provarmos que α não é normal. No entanto, já comentamos anteriormente que, dado um bloco B_k e um real α, nem sempre a seqüência $\frac{1}{N}\#_b(B_k;N;\alpha)$ converge para algum valor.

Isso nos mostra que não podemos calcular apenas o $\lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j}\#_b(B_k;N_j;\alpha)$ $-$ onde (N_j) é uma seqüência crescente de números naturais $-$ para decidirmos a convergência de $\frac{1}{N}\#_b(B_k;N;\alpha)$ (não é suficiente calcularmos o limite de uma subseqüência de $\frac{1}{N}\#_b(B_k;N;\alpha)$). No entanto é válido, e muito útil, um resultado mais fraco.

Lema 14 (Critério da convergência) *Sejam $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ uma função não decrescente e (N_j) uma seqüência crescente de números naturais tal que $\lim_{s\to\infty}\frac{N_j}{N_{j+1}}=1$. Se existe*

$$\lim_{s\longrightarrow\infty}\frac{1}{N_j}f(N_j)$$

então existe

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\frac{1}{N}f(N),$$

e eles têm o mesmo valor.

Prova. Vamos mostrar que

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j}f(N_j) \leq \underline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}f(N) \leq \overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}f(N) \leq \lim_{j\to\infty}\frac{1}{N_j}f(N_j). \qquad (2)$$

Dado N natural, existe um único $j = j(N)$ tal que $N_j \leq N < N_{j+1}$, uma vez que (N_j) é uma seqüência crescente de naturais. Tal $j = j(N)$ satisfaz ainda a propriedade que $N \to \infty$ se e somente se $j \to \infty$. Como f é não decrescente:

$$\frac{1}{N_{j+1}} f(N_j) \leq \frac{1}{N} f(N) \leq \frac{1}{N_j} f(N_{j+1}). \tag{3}$$

Daí, como $\lim_{N\to\infty} \frac{N_{j+1}}{N_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{N_{j+1}}{N_j} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \frac{1}{N_j} f(N_j) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N_j} f(N_j) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_j}{N_{j+1}} \frac{1}{N_j} f(N_j) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N_{j+1}} f(N_j) \\
&= \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N_{j+1}} f(N_j) \overset{(3)}{\leq} \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} f(N) \\
&\leq \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} f(N) \overset{(3)}{\leq} \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N_j} f(N_{j+1}) = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{N_j}{N_{j+1}} \frac{1}{N_j} f(N_{j+1}) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N_{j+1}} f(N_{j+1}) \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{N_{j+1}} f(N_{j+1}).
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{N_j} f(N_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{N_{j+1}} f(N_{j+1}),$$

concluímos a prova de (2). ■

Corolário 15 *Se (N_j) é uma seqüência crescente de números naturais tal que $\lim_{j\to\infty} \frac{N_j}{N_{j+1}} = 1$, então*

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{1}{N_j} \#_b(B_k; N_j; \alpha) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{N} \#_b(B_k; N; \alpha),$$

desde que o limite à esquerda exista.

Mostraremos adiante (veja 91) que se $\lim_{j\to\infty} \frac{N_{j+1}}{N_j} = C > 1$ e

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{1}{N_j} \#_b(B_k; N_j; \alpha) = \frac{1}{b^k}$$

para todo bloco B_k, então α é $b-$normal.

3 Normalidade de Constantes Artificiais

3.1 A Constante de Champernowne

Em 1933, D. G. Champernowne deu em [7] alguns exemplos simples de números $10-$normais, como a constante obtida artificialmente pela concatenação dos números naturais em base 10

$$C_{10} = (.12345678910111213...)_{10}$$

e que hoje é conhecida por *Constante de Champernowne.*

Toda esta seção será dedicada a uma prova alternativa da normalidade dessa constante, baseada em [14] e [15]. Em [14] apresentamos uma prova detalhada deste fato, mas muito extensa. Em [15] apresentamos uma prova mais curta, enfatizando as principais idéias e deixando os detalhes como exercício ao leitor. Aqui apresentamos uma prova completa, porém com novas estimativas que a tornam mais simples que as anteriores.

Para a prova que aqui apresentamos, é conveniente destacarmos os blocos formados apenas pelo dígito zero.

Notação 16 *Por 0_k denotamos o bloco formado por k zeros e por θ_k denotamos um bloco ordenado qualquer de k dígitos distinto de 0_k.*

Para provar que C_{10} é $10-$normal, precisamos mostrar, para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$(i)\ \lim_{N\to\infty} \frac{\#_{10}(0_k; N; C_{10})}{N} = \frac{1}{10^k} \quad \text{e} \quad (ii)\ \lim_{N\to\infty} \frac{\#_{10}(\theta_k; N; C_{10})}{N} = \frac{1}{10^k}.$$

Nosso trabalho inicial consiste em mostrar que basta provarmos (i).

Lema 17 *Para todo N natural não nulo e para todo bloco da forma θ_k temos*

$$\#_{10}(0_k; N; C_{10}) \leq \#_{10}(\theta_k; N; C_{10}).$$

Prova. A idéia é, uma vez fixado um bloco θ_k, associar a cada aparição de 0_k, na expansão decimal de C_{10}, uma aparição anterior de θ_k e mostrar que esta correspondência é injetiva, ou seja, que a ocorrências distintas de 0_k estão associadas ocorrências (anteriores) distintas do bloco θ_k. Com isto estaremos provando a desigualdade que se quer.

Note que C_{10} é formado por concatenações de naturais. Suponhamos então que 0_k ocorre na expansão decimal de algum natural γ, digamos:

$$\gamma = (c_1 c_2 ... c_s \underbrace{0...0}_{k}\ d_1 d_2 ... d_l)_{10},$$

que denotaremos abreviadamente por $(C_s\ 0_k\ D_l)_{10}$.

1º caso: $c_1 \neq 1$ ou $s > 1$

Aqui associamos a ocorrência de 0_k em γ, com a ocorrência de θ_k no natural:

$$\gamma' = (C'_s\ \theta_k\ D_l)_{10},$$

onde $(C'_s)_{10} = (C_s)_{10} - 1$. Note que $\gamma' < \gamma$.

2º caso: $c_1 = 1$ e $s = 1$. Neste caso $\gamma = (1\ 0_k\ D_l)_{10}$. Daí:

- se θ_k é da forma $\theta_k = b_1 ... b_k$, onde $b_1 \neq 0$, associamos a ocorrência de 0_k no natural $\gamma = (1\ 0_k\ D_l)_{10}$, com a ocorrência de θ_k no natural $\gamma' = (\theta_k\ D_l)_{10}$. Note que novamente $\gamma' < \gamma$.

- se θ_k é da forma $\theta_k = \underbrace{0...0}_{j} b_{j+1} ... b_k$, onde $b_{j+1} \neq 0$, associamos a ocorrência de 0_k no natural γ, com a ocorrência de θ_k na concatenação dos naturais:

$$\gamma' = (b_{j+1} ... b_k d_1 ... d_l \underbrace{0...0}_{j})_{10} \text{ e } \quad \gamma' + 1 = (b_{j+1} ... b_k d_1 ... d_l \underbrace{0...0}_{j-1} 1)_{10}.$$

Note que $\gamma' < \gamma' + 1 < \gamma$ e portanto γ' e $\gamma' + 1$ são listados antes de γ em C_{10}.

Garantimos assim que, em qualquer caso, cada ocorrência de 0_k foi associada a uma ocorrência anterior de θ_k. Da forma como definimos γ'a partir de γ, decorre diretamente que esta correspondência é injetiva. ■

Lema 18 *Fixado* $k \in \mathbb{N}^*$

(i) A seqüência $\left(\frac{\#_{10}(0_k;\ N;C_{10})}{N}\right)$ *é limitada superiormente por* $\frac{1}{10^k}$.

(ii) Se $\lim_{N\to\infty} \frac{\#_{10}(0_k;\ N;C_{10})}{N} = \frac{1}{10^k}$, *então, para todo bloco* θ_k,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_{10}(\theta_k;\ N;C_{10})}{N} = \frac{1}{10^k}.$$

Prova. *Afirmação 1:* Há $10^k - 1$ blocos θ_k distintos.

Além disso, da definição de $\#_{10}$ decorre a

Afirmação 2: Para todo $N \geq k$

$$\frac{\#_{10}(0_k;\ N;C_{10})}{N} + \sum_{\theta_k} \frac{\#_{10}(\theta_k;\ N;C_{10})}{N} = \frac{N-k+1}{N} \leq 1.$$

Para mostrarmos *(i)* basta observarmos que, se para algum N ocorrer

$$\frac{\#_{10}(0_k;N;C_{10})}{N} > \frac{1}{10^k},$$

então, pela Afirmação 1 e pelo lema anterior, obtemos

$$\frac{\#_{10}(0_k;\ N;C_{10})}{N} + \sum_{\theta_k} \frac{\#_{10}(\theta_k;\ N;C_{10})}{N} > \frac{1}{10^k} + (10^k - 1)\frac{1}{10^k} = 1,$$

o que contradiz a Afirmação 2.

Para provar (ii) observamos que se $\lim_{N\to\infty} \frac{\#_{10}(0_k;\ N;C_{10})}{N} = \frac{1}{10^k}$, então dado $\varepsilon > 0$, para N suficientemente grande:

$$\frac{1}{10^k} \overset{(i)}{\geq} \frac{\#_{10}(0_k;\ N;C_{10})}{N} > \frac{1}{10^k} - \varepsilon. \tag{4}$$

Vamos fixar um bloco $\theta'_k \neq 0_k$. Então, para N suficientemente grande:

$$\begin{aligned}
&\frac{\#_{10}(\theta'_k;\ N; C_{10})}{N} + (10^k - 1)(\frac{1}{10^k} - \varepsilon) \\
&= \frac{\#_{10}(\theta'_k;\ N; C_{10})}{N} + (\frac{1}{10^k} - \varepsilon) + (10^k - 2)(\frac{1}{10^k} - \varepsilon) \\
&< \frac{\#_{10}(\theta'_k;\ N; C_{10})}{N} + \frac{\#_{10}(0_k;\ N; C_{10})}{N} + \sum_{\theta_k \neq \theta'_k} \frac{\#_{10}(\theta_k;\ N; C_{10})}{N} \\
&\overset{Af.\ 2}{=} \frac{N - k + 1}{N},
\end{aligned}$$

onde a única desigualdade acima decorre de (4), do lema anterior e da afirmação 1. Então

$$\frac{\#_{10}(\theta'_k;\ N; C_{10})}{N} + (10^k - 1)(\frac{1}{10^k} - \varepsilon) < 1.$$

Daí

$$\frac{\#_{10}(\theta'_k;\ N; C_{10})}{N} < \frac{1}{10^k} + 10^k\varepsilon.$$

Assim, concluímos que, para N suficientemente grande,

$$\frac{1}{10^k} - 10^k\varepsilon < \frac{1}{10^k} - \varepsilon \overset{(4)}{<} \frac{\#_{10}(0_k;\ N; C_{10})}{N} \overset{Lema}{\leq} \frac{\#_{10}(\theta'_k;\ N; C_{10})}{N} < \frac{1}{10^k} + 10^k\varepsilon,$$

e portanto

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_{10}(\theta'_k;\ N; C_{10})}{N} = \frac{1}{10^k},$$

o que completa a prova de *(ii)*. ■

O item (ii) acima nos garante a suficiência que buscávamos:

Corolário 19 *Se para todo* $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_{10}(0_k; N; C_{10})}{N} = \frac{1}{10^k},$$

então C_{10} *é* $10-$*normal.*

Note que o resultado acima simplifica o trabalho, pois, por exemplo, o bloco 0_k não ocorre em junções de naturais. Além disso, podemos procurar um padrão em $\#_{10}(0_k; N; C_{10})$ que dependa apenas de k e N.

Agora estamos interessados em provar que é satisfeita a hipótese do corolário acima.

Lema 20 *Para cada* $s \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{s} i \times 10^i = \frac{(9s-1) \times 10^{s+1} + 10}{81}$$

Prova. Escrevemos inicialmente

$$\sum_{i=1}^{s} i \times 10^i = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=j}^{s} 10^i.$$

Daí, aplicando a fórmula da soma de PG obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=j}^{s} 10^i &= \sum_{j=1}^{s} \frac{10^j(10^{s-j+1}-1)}{9} = \sum_{j=1}^{s} \frac{10^{s+1} - 10^j}{9} = s\frac{10^{s+1}}{9} - \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{s} 10^j \\ &= s\frac{10^{s+1}}{9} - \frac{1}{9}\frac{10(10^s - 1)}{9} = \frac{(9s-1) \times 10^{s+1} + 10}{81}. \end{aligned}$$

■

Notação 21 *Dado um natural* m, *denotamos por* $N(m)$ *o número de dígitos utilizados para concatenarmos todos os naturais de* 1 *até* m *em base* 10.

Proposição 22 *Para cada natural* m *de* $s+1$ *dígitos*

$$N(m) = \frac{9(s+1)(m+1) - 10^{s+1} + 1}{9} < (s+1)(m+1).$$

Em outras palavras: para cada natural m,

$$N(m) = \frac{9\lfloor \log m + 1 \rfloor (m+1) - 10^{\lfloor \log m + 1 \rfloor} + 1}{9} < \lfloor \log m + 1 \rfloor (m+1).$$

Prova. De 10^i até $10^{i+1}-1$ escrevemos $10^{i+1}-10^i = 9\times 10^i$ números, cada um com $i+1$ dígitos. Assim desde 1 até 10^s-1 utilizamos $\sum_{i=1}^{s}(9\times 10^{i-1}\times i)$ dígitos. Mas

$$\sum_{i=1}^{s}\left(9\times 10^{i-1}\times i\right) = \frac{9}{10}\sum_{i=1}^{s} i\times 10^i \overset{Lema\ 20}{=} \frac{(9s-1)\times 10^s+1}{9}.$$

Agora, desde 10^s até m escrevemos mais $(m-10^s+1)(s+1)$ dígitos. Assim

$$\begin{aligned} N(m) &= \frac{(9s-1)\times 10^s+1}{9} + (m-10^s+1)(s+1) = \\ &= \frac{9(s+1)(m+1)-10^{s+1}+1}{9} < (s+1)(m+1). \end{aligned}$$

■

Vamos precisar estimar, além de $N(m)$, também $\#_{10}(0_k; N(m); C_{10})$.

Lema 23 *Para k e s naturais com $k<s$, temos*

$$\#_{10}(0_k; N(10^s-1); C_{10}) = \frac{(9(s-k)-1)\times 10^{s-k}+1}{9} \geq (s-2k)\times 10^{s-k}.$$

Prova. Primeiramente vamos fixar $j>k$ e estimar quantas vezes 0_k ocorre quando escrevemos os naturais desde 10^{j-1} até 10^j-1, isto é, na listagem de todos os números de j dígitos. Fixado $t\in\{0,...,j-k-1\}$ temos que de

$$1\underbrace{0...0}_{t}\ 0_k\ \underbrace{0...0}_{j-t-k-1} \text{ até } 9\underbrace{9...9}_{t}\ 0_k\ \underbrace{9...9}_{j-t-k-1},$$

o bloco 0_k ocorreu $9(10^t)(10^{j-t-k-1}) = 9(10^{j-k-1})$ vezes, na posição fixada. Como $0\leq t\leq j-k-1$, concluímos que 0_k ocorre um total de $9\,(j-k)\,10^{j-k-1}$

vezes, desde 10^{j-1} até $10^j - 1$. Com isso obtemos:

$$\begin{aligned}
\#_{10}(0_k; N(10^s-1); C_{10}) &= \sum_{j=k+1}^{s} 9(j-k)10^{j-k-1} \overset{i:=j-k}{=} \\
&= \sum_{i=1}^{s-k} 9 \times i \times 10^{i-1} = \frac{9}{10}\sum_{i=1}^{s-k} i \times 10^i \\
&\overset{Lema\ 20}{=} \frac{(9(s-k)-1) \times 10^{s-k} + 1}{9} \\
&\geq (s-2k) \times 10^{s-k}.
\end{aligned}$$

■

Queremos um resultado mais forte do que o do lema acima. Mais precisamente: queremos obter uma estimativa para $\#_{10}(0_k; N(m); C_{10})$, onde m é um natural qualquer. Como parte desta estimativa já foi dada no lema acima, é natural introduzirmos a seguinte

Notação 24 *Se m é um natural de $s+1$ dígitos em base 10, então $T_{10}(0_k; m)$ denota o número de ocorrências de 0_k desde a expansão decimal de 10^s até a expansão decimal de m. Equivalentemente:*

$$T_{10}(0_k; m) = \#_{10}(0_k; N(m); C_{10}) - \#_{10}(0_k; N(10^s-1); C_{10}).$$

Lema 25 *Sejam $k,\ s \in \mathbb{N}^*$, tais que $s > 2k$, e seja m um natural cuja expansão decimal envolve $s+1$ dígitos. Então:*

$$T_{10}(0_k; m) \geq (s-2k)\frac{(m - 10^s - 10^k)}{10^k}.$$

Prova. Suponhamos

$$m = (a_s a_{s-1} ... a_1 a_0)_{10}.$$

Dado $j \in \{0, 1, ..., s-k\}$, vamos fixar o bloco 0_k na posição dos dígitos $a_{k+j-1}, a_{k+j-2}, ..., a_j$, e estimar o número de vezes que 0_k ocorre, nesta posição fixada, desde 10^s até

$$m'(j) = \begin{cases} (a_s...a_{k+j}\ 0_k\ a_{j-1}...a_1a_0)_{10}, \text{ se } j > 0 \\ (a_sa_{s-1}...a_k0_k)_{10}, \text{ se } j = 0 \end{cases}$$

que é um inteiro menor ou igual a m. Denotamos por A_{k+j}, o natural $(a_sa_{s-1}...a_{k+j})_{10}$, e por A'_j, o natural $(a_{j-1}...a_0)_{10}$, se $j > 0$ e $A'_0 = 0$.

Observamos que de 10^s até $m'(j)$, o bloco 0_k ocorreu exatamente

$$(A_{k+j} - 10^{s-k-j}) \times 10^j + A'_j + 1$$

vezes nesta posição fixada e portanto podemos afirmar que, nesta posição, de 10^s até m, o bloco 0_k ocorreu, no mínimo $(A_{k+j} - 10^{s-k-j}) \times 10^j + A'_j$ vezes.

Como $0 \leq j \leq s-k$, obtemos que de 10^s até m, o bloco 0_k ocorreu pelo menos $\sum_{j=0}^{s-k}[(A_{k+j} - 10^{s-k-j}) \times 10^j + A'_j]$ vezes, e portanto:

$$\begin{aligned} T_{10}(0_k; m) &\geq \sum_{j=0}^{s-k}[(A_{k+j} - 10^{s-k-j}) \times 10^j + A'_j] \\ &= -(s-k+1) \times 10^{s-k} + \sum_{j=0}^{s-k}[A_{k+j} \times 10^j + A'_j]. \end{aligned} \tag{5}$$

Lembramos que

$$A_{k+j} = \sum_{i=k+j}^{s} a_i \times 10^{i-k-j} \text{ e que, para } j > 0, \text{ temos } A'_j = \sum_{i=0}^{j-1} a_i \times 10^i.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{s-k}[A_{k+j} \times 10^j + A'_j] &= \sum_{j=0}^{s-k}\sum_{i=k+j}^{s} a_i \times 10^{i-k} + \sum_{j=1}^{s-k}\sum_{i=0}^{j-1} a_i \times 10^i = \\ &= \sum_{i=k}^{s}(i-k+1) \times a_i \times 10^{i-k} + \sum_{i=0}^{s-k-1}(s-k-i) \times a_i \times 10^i \end{aligned}$$

Como $s > 2k$, temos $s - k - 1 \geq k$. Então escrevemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{s-k}[A_{k+j} \times 10^j + A'_j] \\
&= \sum_{i=k}^{s}(i-k+1) \times a_i \times 10^{i-k} + \sum_{i=0}^{s-k-1}(s-k-i) \times a_i \times 10^i \\
&= \sum_{i=k}^{s-k-1} a_i[(i-k+1) \times 10^{i-k} + (s-k-i) \times 10^i]+ \\
&+ \sum_{i=s-k}^{s}(i-k+1) \times a_i \times 10^{i-k} + \sum_{i=0}^{k-1}(s-k-i) \times a_i \times 10^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{i=k}^{s-k-1} a_i[(i-k+1) \times 10^{i-k} + (s-k-i) \times 10^i]+ \\
&+ \sum_{i=s-k}^{s}(i-k+1) \times a_i \times 10^{i-k} \\
&\geq \sum_{i=k}^{s-k-1}(s-2k+1) \times a_i \times 10^{i-k} + \sum_{i=s-k}^{s}(i-k+1) \times a_i \times 10^{i-k} \\
&\geq \sum_{i=k}^{s-k-1}(s-2k+1) \times a_i \times 10^{i-k} + \sum_{i=s-k}^{s-1}((s-k)-k+1) \times a_i \times 10^{i-k} \\
&+ (s-k+1) \times a_s \times 10^{s-k} \\
&= \sum_{i=k}^{s-k-1}(s-2k+1) \times a_i \times 10^{i-k} + \sum_{i=s-k}^{s-1}(s-2k+1) \times a_i \times 10^{i-k} \\
&+ (s-k+1) \times a_s \times 10^{s-k} \\
&= (s-k+1) \times a_s \times 10^{s-k} + \sum_{i=k}^{s-1}(s-2k+1) \times a_i \times 10^{i-k}
\end{aligned}$$

Assim, concluímos de (5) que:

$$
\begin{aligned}
T_{10}(0_k; m) &\geq (s-k+1) \times (a_s - 1) \times 10^{s-k} + (s-2k+1) \times \sum_{i=k}^{s-1} a_i \times 10^{i-k} \\
&\geq (s-2k) \times \left((a_s - 1) \times 10^{s-k} + \sum_{i=k}^{s-1} a_i \times 10^{i-k} \right) \\
&= (s-2k) \times \left(\sum_{i=k}^{s} (a_i \times 10^{i-k}) - 10^{s-k} \right) \\
&= \frac{(s-2k)}{10^k} \times \left(\sum_{i=k}^{s} (a_i \times 10^{i}) - 10^{s} \right) \\
&= \frac{(s-2k)}{10^k} \times \left(m - \sum_{i=0}^{k-1} (a_i \times 10^{i}) - 10^{s} \right) \\
&\geq (s-2k) \frac{(m - 10^s - 10^k)}{10^k},
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. ■

Partindo dos dois últimos lemas, como vemos abaixo, obtemos uma boa estimativa para $\#_{10}(0_k; N(m); C_{10})$:

Proposição 26 *Suponha que $s > 2k$, onde k e s são naturais. Seja m um natural de $s+1$ dígitos, então*

$$
\#_{10}(0_k; N(m); C_{10}) \geq \frac{(s-2k)(m-10^k)}{10^k}.
$$

Prova. Partindo da definição de T_{10} e dos Lemas 23 e 25 temos:

$$
\begin{aligned}
\#_{10}(0_k; N(m); C_{10}) &= \#_{10}(0_k; N(10^s - 1); C_{10}) + T_{10}(0_k; m) \\
&\geq (s-2k) \times 10^{s-k} + (s-2k) \frac{(m - 10^s - 10^k)}{10^k} \\
&\geq \frac{(s-2k)(m-10^k)}{10^k}.
\end{aligned}
$$

■

Com isso podemos provar o principal resultado desta seção:

Teorema 27 *C_{10} é normal na base* 10.

Prova. De acordo com as Proposições 22 e 26, obtemos a desigualdade:

$$\frac{\#_{10}(0_k; N(m); C_{10})}{N(m)} \geq \frac{1}{10^k} \frac{(s-2k)(m-10^k)}{(s+1)(m+1)}, \tag{6}$$

para k e m naturais, onde m possui $s+1$ dígitos e $s > 2k$.

Aplicando agora o ítem (i) do Lema 18 obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{10^k} &\geq \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\#_{10}(0_k; N(m); C_{10})}{N(m)} \geq \underline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\#_{10}(0_k; N(m); C_{10})}{N(m)} \overset{(6)}{\geq} \\ &\geq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{10^k} \frac{(s-2k)(m-10^k)}{(s+1)(m+1)} = \frac{1}{10^k}. \end{aligned}$$

Isso mostra que $\lim_{m\to\infty} \frac{\#_{10}(0_k;N(m);C_{10})}{N(m)} = \frac{1}{10^k}$. Aplicando agora o Critério da Convergência dado no Lema 14 (ou seu corolário) concluímos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_{10}(0_k; N; C_{10})}{N} = \frac{1}{10^k}$$

e então pelo ítem (ii) do Lema 18 obtemos também que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_{10}(\theta_k; N; C_{10})}{N} = \frac{1}{10^k},$$

o que completa a prova. ■

3.2 As idéias de Champernowne

O trabalho de Champernowne "The Construction of Decimals Normal in the Scale of Ten" não se limitou a dar exemplos de números normais. Em [7], Champernowne apresentou as idéias básicas para construirmos números normais partindo-se da normalidade de outros números. A proposta defendida por ele é baseada no princípio de que alterações "raras" na expansão de um número normal não alteram sua normalidade. Por exemplo, fazendo uso da normalidade de C_{10} e do fato conhecido de que $\frac{\pi(m)}{m} \longrightarrow 0$, quando

$m \to \infty$, onde $\pi(m)$ denota o número de primos menores ou iguais a m, ele comentou ser possível provar que a constante

$$(.46891012141516182021...)_{10},$$

obtida concatenando-se os números compostos escritos em base 10 é também $10-$normal. Aqui neste texto optamos por apresentar uma prova alternativa da normalidade de C_{10} e por isso não apresentamos uma das partes mais interessantes do trabalho de Champernowne: suas idéias. Assim, para deixarmos mais claras as idéias de Champernowne que citamos acima, vamos agora aplicá-las provando, a partir da normalidade de C_{10}, que a concatenação dos números ímpares forma um número normal.

Observação 28 *Poderíamos dizer que para obtermos tal constante partindo de C_{10} seria suficiente retirarmos desta, os naturais pares concatenados. No entanto nada saberíamos dizer sobre sua normalidade, pois estaríamos retirando muitos de seus dígitos. Assim precisamos ser mais cautelosos, como faremos a seguir:*

Proposição 29 *A constante* $(.135791113151719...)_{10}$, *obtida concatenando-se os números ímpares, é um número normal em base* 10.

Prova. Seja B_k um bloco de k dígitos $b-$nários. Por hipótese a constante $C_{10} = (.123456789101112131415...)_{10}$ é $10-$normal e então

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N} \#_{10}(B_k; N; C_{10}) = \frac{1}{10^k}.$$

Além disso, lembrando que C_{10} é formado por concatenação de naturais, temos que

$$\#_{10}(B_k; N; C_{10}) = \#_{10}^{f}(B_k; N; C_{10}) + \#_{10}^{j}(B_k; N; C_{10}), \tag{7}$$

onde por $\#_{10}^{j}(B_k;N;C_{10})$ denotamos o número de vezes que B_k ocorreu na junção de naturais concatenados e por $\#_{10}^{f}(B_k;N;C_{10})$ denotamos o número de vezes que B_k ocorreu fora de junções, até o $N-$ésimo dígito da expansão de C_{10}. Vamos inicialmente provar a

Afirmação 1: $\lim_{N\longrightarrow\infty}\frac{1}{N}\#_{10}^{j}(B_k;N;C_{10})=0$.

De fato, de acordo com a Proposição 22, após concatenarmos os primeiros m naturais, utilizamos $N(m)$ dígitos, onde:

$$N(m)=\frac{9\lfloor 1+\log m\rfloor(m+1)-10^{\lfloor 1+\log m\rfloor}+1}{9}\geq(m+1)\log m-10m.$$

Enquanto isso B_k não pode ter ocorrido mais do que k vezes em cada junção de dois naturais, logo terá ocorrido no máximo km vezes. Agora

$$\begin{aligned}0&\leq\varliminf_{m\to\infty}\frac{1}{N(m)}\#_{10}^{j}(B_k;N(m);C_{10})\leq\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{N(m)}\#_{10}^{j}(B_k;N(m);C_{10})\\&\leq\varlimsup_{m\to\infty}\frac{km}{N(m)}\leq\lim_{m\to\infty}\frac{km}{(m+1)\log m-10m}=0,\end{aligned}$$

portanto

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{1}{N(m)}\#_{10}^{j}(B_k;N(m);C_{10})=\lim_{m\to\infty}\frac{km}{N(m)}=0.$$

Agora, basta aplicarmos o Critério da Convergência dado no Lema 14 para obtermos

$$\lim_{N\longrightarrow\infty}\frac{1}{N}\#_{10}^{j}(B_k;N;C_{10})=0,$$

e concluirmos a prova da afirmação 1.

Em particular - usando (7) e o fato que C_{10} é $10-$normal - concluímos:

Afirmação 2: $\lim_{N\longrightarrow\infty}\frac{1}{N}\#_{10}^{f}(B_k;N;C_{10})=\frac{1}{10^k}$.

Agora estamos em condições de fazer modificações em C_{10} como segue:

Afirmação 3: O decimal $\alpha=(.111112222233333...)_{10}$, *obtido concatenando-se cada natural repetido cinco vezes, é* $10-$*normal.*

Para provarmos a afirmação 3 observamos que

$$\#_{10}(B_k;N;\alpha) = \#^f_{10}(B_k;N;\alpha) + \#^j_{10}(B_k;N;\alpha),$$

onde por $\#^j_{10}(B_k;N;\alpha)$ denotamos o número de ocorrências de B_k na junção de dois naturais ou do mesmo natural repetido na expansão de α e por $\#^f_{10}(B_k;N;\alpha)$ denotamos o número de ocorrências de B_k fora de junções, até o $N-$ésimo dígito da expasão de α.

Primeiramente observamos que também aqui

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{N}\#^j_{10}(B_k;N;\alpha) = 0.$$

De fato, até a concatenação dos primeiros m naturais distintos em α utilizamos $5N(m)$ dígitos. Além disso, passamos a ter no máximo $5m$ junções, e portanto B_k não pode ter ocorrido mais do que $5km$ vezes nas junções. Assim, como

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \frac{km}{N(m)} = 0 \Longrightarrow \lim_{m\longrightarrow\infty} \frac{5km}{5N(m)} = 0,$$

aplicando novamente o Lema 14 (Critério da Convergência) obtemos que

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{N}\#^j_{10}(B_k;N;\alpha) = 0.$$

Agora vamos mostrar que $\lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{N}\#^f_{10}(B_k;N;\alpha) = \frac{1}{10^k}$. Observamos que

$$\#^f_{10}(B_k;5N(m);\alpha) = 5\#^f_{10}(B_k;N(m);C_{10});$$

daí,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \frac{1}{5N(m)}\#^f_{10}(B_k;5N(m);\alpha) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{N(m)}\#^f_{10}(B_k;N(m);C_{10}) \overset{\text{afirmação 2}}{=} \\ &= \frac{1}{10^k},\end{aligned} \tag{8}$$

e aplicando o Critério da Convergência dado no Lema 14, concluímos a prova da Afirmação 3.

Afirmação 4: Se inserirmos novos dígitos (quaisquer) entre cada dois naturais concatenados (iguais ou não) em α, obtemos ainda um número normal. Ou seja

$$\alpha' = (.1a_1 1a_2 1a_3 1a_4 1a_5 2a_6 ...9a_{45} 10a_{46} 10a_{47} ...10a_{50} 11...)_{10}$$

é $10-$*normal, para dígitos* a_i *quaisquer.*

Observamos inicialmente que α' é obtido de α inserindo novos dígitos entre intervalos cada vez maiores, conforme os naturais escritos na expansão de α crescem.

Para provarmos a Afirmação 4 observamos que

$$\#_{10}(B_k; N; \alpha') = \#_{10}^{n}(B_k; N; \alpha') + \#_{10}^{d}(B_k; N; \alpha'),$$

onde $\#_{10}^{n}(B_k; N; \alpha')$ denota o número de ocorrências de B_k que não envolvem os novos dígitos em α' e $\#_{10}^{d}(B_k; N; \alpha')$ denota o número de ocorrências de B_k envolvendo os novos dígitos (ou seja, quando algum dígito de B_k coincide com um dos novos dígitos na contagem) de α' até o $N-$ésimo dígito de α'.

Vamos mostrar inicialmente que $\lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N} \#_{10}^{d}(B_k; N; \alpha') = 0$. De fato, o número de dígitos para concatenarmos os primeiros m naturais distintos em α' é igual a $5N(m) + 5m$, pois inserimos um novo dígito após a repetição de cada natural (e cada natural está escrito cinco vezes). Agora o número de ocorrências de B_k envolvendo um novo dígito é no máximo igual a $5km$ vezes. Daí, como

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{5km}{5N(m)} = 0 \Longrightarrow \lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{5km}{5N(m) + 5m} = 0,$$

aplicando o Lema 14 (Critério da Convergência), concluímos que

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \frac{1}{N} \#_{10}^{d}(B_k; N; \alpha') = 0.$$

Agora precisamos mostrar que $\lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{N}\#^n_{10}(B_k; N; \alpha') = \frac{1}{10^k}$. Para isso, observamos que, da definição de α',

$$\#^n_{10}(B_k; 5N(m) + 5m; \alpha') = \#^f_{10}(B_k; 5N(m); \alpha)$$

e da igualdade

$$\lim_{m\to\infty} \frac{5m}{5N(m)} = 0,$$

decorre que

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \frac{1}{5N(m)+5m}\#^n_{10}(B_k; 5N(m) + 5m; \alpha') \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{5N(m)}\#^n_{10}(B_k; 5N(m) + 5m; \alpha') \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{5N(m)}\#^f_{10}(B_k; 5N(m); \alpha) \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{10^k}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 14 (Critério da Convergência) concluímos que

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{1}{N}\#^n_{10}(B_k; N; \alpha') = \frac{1}{10^k},$$

decorrendo que α' é 10-normal, o que prova a afirmação 4.

Em particular, se nossos dígitos inseridos para formar α', na afirmação 4, forem

$$1, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 7, 9, ...$$

obtemos que

$$(.111315171921232527 29...)_{10}$$

é 10−normal, e portanto inserindo-se no início da expansão mais cinco novos dígitos concluímos que também é 10−normal o número:

$$(.135791113151719212325 27...)_{10},$$

obtido concatenando-se os números ímpares escritos em base 10. ∎

É claro que os mesmos argumentos podem ser usados para provarmos que concatenando os números pares obtemos um número normal em base 10. Além disso, aplicando de forma criativa estas construções, podemos obter muitos outros números normais interessantes.

Champernowne comentou ainda que, com construções semelhantes, é possível provar a seguinte

Proposição 30 *Seja f é uma função afim da forma $f(x) = ax + h$, onde a e h são naturais e $a \neq 0$. Então o decimal*

$$(.f(1)f(2)f(3)...)_{10}$$

é normal em base 10.

Apresentamos uma prova alternativa desta proposição no Exemplo 34.

Gostaríamos de destacar ainda uma conseqüência importante da afirmação 1 da prova dada acima:

Corolário 31 *Seja x_n uma seqüência crescente de naturais escritos na base b. Seja B_k um bloco de k dígitos $b-$nários e seja $\alpha = (.x_1x_2...)_b$ o real formado pela concatenação dos termos x_i. Então*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#_b(B_k; N; \alpha)$$

não depende das ocorrências de B_k nas junções dos blocos x_i.

Prova. Vamos denotar por:

$N(x_j)$ o número de dígitos utilizados para listar $x_1x_2....x_j$.

$\#_b^j(B_k; N; \alpha)$ o número de vezes que B_k ocorreu na junção dos naturais x_i até o $N-$ésimo $b-$dígito de α.

$j = j(m)$ o natural que satisfaz $N(x_{j+1}) > m > N(x_j),\ m \in \mathbb{N}$.

Dado um natural s, como x_n é crescente, existe n_0 tal que os naturais $x_{n_0+1},\ x_{n_0+2},\ x_{n_0+3}, ...$ têm tamanho maior que s. Daí

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\#_b^j(B_k; m; \alpha) &\leq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{N(x_j)}\#_b^j(B_k; N(x_{j+1}); \alpha) \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \frac{kj}{N(x_j)} \leq \lim_{j\to\infty} \frac{kj}{N(x_{n_0}) + s(j-n_0)} = \frac{k}{s}. \end{aligned}$$

Como s é arbitrário, fazendo $s \to \infty$, concluímos o desejado. ■

3.3 A constante de Copeland-Erdös

No final de seu artigo (ver [7]) Champernowne conjecturou que a constante

$$(.23571113171923...)_{10},$$

obtida concatenando-se os números primos escritos em base 10, era também um número normal nesta base.

A solução para esta conjectura foi apresentada 13 anos após. Em 1946 Copeland e Erdös apresentaram em [8] a prova de um teorema, muito mais geral, do qual decorria a confirmação desta conjectura. Por esse motivo, hoje tal número é conhecido como *Constante de Copeland-Erdös.*

Teorema 32 (Copeland-Erdos) *Seja (x_n) uma seqüência crescente de naturais. Se para todo $\theta < 1$,*

$$\#\{x_n < W\} > W^\theta \text{ para todo natural } W \text{ suficientemente grande},$$

então

$$(.x_1x_2x_3...)_b$$

é $b-$normal, onde b é a base em que cada x_i é escrito.

Antes de provarmos este teorema , apresentamos algumas de suas aplicações.

Exemplo 33 *A normalidade da Constante de Champernowne decorre deste teorema tomando-se a seqüência* $x_n = n$. *De fato, dado um inteiro* W *temos que* $\#\{x_n < W\} = W - 1$ *e para todo* $\theta < 1$, *tomando-se* W *suficientemente grande, obtemos* $W - 1 > W^\theta$.

Exemplo 34 *Decorre deste teorema uma prova alternativa para a Proposição 30. Seja* $x_n = an + h$, *onde* a *e* h *são naturais e* $a \neq 0$. *Para um inteiro* W *suficientemente grande temos* $\#\{x_n < W\} > \frac{W-h}{2a}$. *Assim resta-nos mostrar que dado* $\theta < 1$, $\frac{W-h}{2a} > W^\theta$ *para* W *suficientemente grande. Para isso, observamos que*

$$\frac{W-h}{2a} > W^\theta \iff \frac{W-h}{2aW} > W^{\theta-1}$$

e que, para W *suficientemente grande,* $\frac{W-h}{2aW} > W^{\theta-1}$, *pois* $\frac{W-h}{2aW}$ *converge a* $\frac{1}{2a}$ *enquanto que* $W^{\theta-1}$ *converge a zero.*

Os exemplos acima são bastante ilustrativos, mas estamos interessados em mostrar que deste teorema decorre a prova da normalidade da *Constante de Copeland-Erdös*. Faremos isso agora:

Corolário 35 *A constante* $(.23571113171923...)_{10}$, *obtida concatenando-se os números primos escritos em base* 10 *é normal nesta base.*

Prova. Seja x_n o $n-$ésimo primo. Para cada natural W, denotamos por $\pi(W)$ o número de primos menores que W. Precisamos mostrar que, fixado $\theta < 1$, $\pi(W) > W^\theta$ para W suficientemente grande. O Teorema dos Números Primos afirma que $\frac{\pi(W)}{W} \ln W \to 1$, portanto para W suficientemente grande $\pi(W) > \frac{W}{2 \ln W}$. Assim, é suficiente mostrar que, para W suficientemente grande $\frac{W}{2 \ln W} > W^\theta$, ou equivalentemente

$$\frac{1}{2 \ln W} > W^{\theta-1}.$$

Seja $T = \ln W$, então

$$\frac{1}{2\ln W} > W^{\theta-1} \iff W^{1-\theta} > 2\ln W \iff e^{T(1-\theta)} > 2T,$$

o que se verifica para T suficientemente grande, pois $(1-\theta) > 0$. ■

Observamos que todos estes resultados são verdadeiros para uma base b qualquer, pois em momento algum nas provas foi necessário particularizar a base que estávamos utilizando.

O restante dessa seção tem por objetivo obter a prova do Teorema de Copeland-Erdös. A prova que apresentamos aqui é baseada na versão original (veja [8]), com algumas modificações e complementações. Esta também é sistemática e baseada no conceito de (ε, k)-normalidade, que Copeland e Erdös comentam ter sido introduzido por Besicovitch em [5].

Definição 36 *Fixados $\varepsilon \in (0,1)$ e $k \in \mathbb{N}^*$, um natural m é dito $(\varepsilon, k)-$normal em base b se em sua expansão nesta base qualquer bloco de k dígitos $b-$nários ocorre com freqüência*[3] *entre*

$$\frac{1}{b^k} - \varepsilon \text{ e } \frac{1}{b^k} + \varepsilon.$$

Exemplo 37 $m = (1234567890)_{10}$ *é $(\varepsilon, 1)-$normal em base* 10*, seja qual for a escolha de $\varepsilon \in (0,1)$.*

Exemplo 38 *Seja $\alpha = (.a_1a_2a_3...)_b$ um número normal com $a_1 \neq 0$. Fixados ε e k temos que, para n suficientemente grande, o natural $(a_1a_2...a_n)_b$ é $(\varepsilon, k)-$normal em base b.*

Observação 39 *A idéia da prova do teorema de Copeland-Erdös é a seguinte: Fixados ε, k, vamos mostrar que para W suficientemente grande, a*

[3]Note que os naturais possuem expansão finita e a expressão "freqüência" aqui representa a razão entre o número de ocorrências e número total de dígitos de m..

quantidade de números naturais $< W$ que não são $(\varepsilon, k)-$ normais é "pequena" (isto é, menor que W^{δ} para algum $\delta = \delta(\varepsilon, k) < 1$).

Se uma seqüência crescente de naturais (x_n) satisfaz a hipótese do Teorema de Copeland-Erdös, garantimos que (x_n) possui uma quantidade "grande" de termos $< W$ (isto é, maior que W^{θ} para todo $\theta < 1$).

Assim, é natural esperarmos que, mesmo que (x_n) contenha todos naturais que não são $(\varepsilon, k)-$normais, terá de ter "muitos" naturais que o são e além disso em quantidade muito maior. Daí a quantidade de dígitos fornecida pelos naturais x_i que não são $(\varepsilon, k)-$normais será desprezível na expansão de

$$\alpha := (.x_1x_2...)_b.$$

Como os demais x_i são $(\varepsilon, k)-$normais, é natural supormos que qualquer bloco de tamanho k ocorre em α com a freqüência desejada, exceto por um erro $< \varepsilon$ (que pode ser tomado arbitrariamente pequeno).

Conforme os comentários da observação acima, queremos, numa primeira etapa, mostrar que, fixados k e b, existe, para cada $\varepsilon > 0$ um $\delta < 1$ tal que, para W suficientemente grande, o número de naturais $< W$ que não são $(\varepsilon, k)-$normais na base b é menor que W^{δ}.

Começamos analisando o caso $k = 1$.

Lema 40 *Sejam c um real positivo, m um número natural e $\varepsilon \in (0, 1)$. Se cada $b-$dígito ocorre entre $\frac{c(2-\varepsilon)}{b}$ e $\frac{c(2+\varepsilon)}{b}$ vezes na expansão $b-$nária de m, então m é $(\varepsilon, 1)-$normal em base b.*

Prova. Se cada $b-$dígito ocorre na expansão de m entre $\frac{c(2-\varepsilon)}{b}$ e $\frac{c(2+\varepsilon)}{b}$ vezes, então m possui entre $c(2-\varepsilon)$ e $c(2+\varepsilon)$ dígitos e cada dígito ocorre em m com freqüência entre

$$\frac{(2-\varepsilon)}{b(2+\varepsilon)} \text{ e } \frac{(2+\varepsilon)}{b(2-\varepsilon)}.$$

Resta verificar que

$$\frac{1}{b} - \varepsilon \leq \frac{(2-\varepsilon)}{b(2+\varepsilon)} \ \leq \ \frac{(2+\varepsilon)}{b(2-\varepsilon)} \leq \frac{1}{b} + \varepsilon.$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} - \varepsilon \leq \frac{(2-\varepsilon)}{b(2+\varepsilon)} &\Leftrightarrow 1 - b\varepsilon \leq \frac{(2-\varepsilon)}{(2+\varepsilon)} \\ &\Leftrightarrow 2 + \varepsilon - 2b\varepsilon - b\varepsilon^2 \leq 2 - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon(1 - 2b - b\varepsilon) \leq -\varepsilon \\ &\Leftrightarrow 1 - 2b - b\varepsilon \leq -1 \\ &\Leftrightarrow 2 \leq b(2+\varepsilon) \end{aligned}$$

o que é verdade pois $b \geq 2$ e $\varepsilon > 0$. Analogamente,

$$\frac{(2+\varepsilon)}{b(2-\varepsilon)} \leq \frac{1}{b} + \varepsilon \Leftrightarrow 2 \leq b(2-\varepsilon),$$

o que é verdade pois $b \geq 2$ e $\varepsilon \in (0,1)$. ■

Notação 41 *Com base neste último lema, fixados um inteiro positivo x e $\varepsilon \in (0,1)$, vamos denotar por*

$$r = r(x,\varepsilon) = \left\lfloor \frac{x(2-\varepsilon)}{2b} \right\rfloor \ \text{e}\ R = R(x,\varepsilon) = \left\lceil \frac{x(2+\varepsilon)}{2b} \right\rceil.$$

Observação 42 *Com relação ao lema anterior, aqui, na definição de r e R, trocamos c, que era um real qualquer, por $x/2$. Dado x inteiro, estamos interessados em ter r e R menores ou iguais a x, o que é verdade da forma como definimos e não seria verdade se tivéssemos trocado c apenas por x.*

Corolário 43 *Sejam x um inteiro positivo, $\varepsilon \in (0,1)$ e m um número natural. Sejam $r = r(x,\varepsilon)$ e $R = R(x,\varepsilon)$ os mesmos definidos na Notação 41. Se cada $b-$dígito ocorre entre $r+1$ e $R-1$ vezes em m, então m é $(\varepsilon,1)-$normal na base b.*

Prova. Inicialmente, note que

$$r \leq \frac{x(2-\varepsilon)}{2b} < r+1 \qquad \text{e} \qquad R-1 < \frac{x(2+\varepsilon)}{2b} \leq R,$$

logo cada dígito da base b ocorre entre $\frac{x(2-\varepsilon)}{2b}$ e $\frac{x(2+\varepsilon)}{2b}$ vezes em m. Daí, aplicando o lema anterior com $c = x/2$, concluímos a prova. ∎

Notação 44 *Fixado um inteiro positivo x, para cada s vamos denotar por*

$$T_s = T_s(x) = (b-1)^{x-s} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = (b-1)^{x-s} \frac{x!}{(x-s)!s!}.$$

Lema 45 *Dados um inteiro positivo x e $\varepsilon \in (0,1)$, o número de naturais $m < b^x$ que não são $(\varepsilon, 1)-$normais na base b é menor ou igual a*

$$b(x+1)\left(\sum_{s=0}^{r} T_s + \sum_{s=R}^{x} T_s\right).$$

Prova. Estamos considerando apenas os naturais m que possuem x ou menos $b-$dígitos. Pelo corolário anterior, é suficiente estimar um valor máximo para o número de naturais $< b^x$ que possuem pelo menos um $b-$dígito d que ocorre entre 0 e r ou entre R e x vezes em sua expansão.

1º caso: $d \neq 0$.

Afirmamos que o número de naturais $< b^x$, cuja expansão contém o $b-$dígito $d \neq 0$ ocorrendo s vezes é

$$T_s = (b-1)^{x-s} \frac{x!}{(x-s)!s!}.$$

De fato, assumindo que um natural m possui x dígitos (os primeiros podendo ser zeros) e o $b-$dígito $d \neq 0$ ocorre neste natural s vezes, então há $\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = \frac{x!}{(x-s)!s!}$ formas diferentes de os dígitos d estarem posicionados. Nas demais posições há $(b-1)$ possibilidades de dígitos. Assim existem

$$T_s = (b-1)^{x-s} \frac{x!}{(x-s)!s!}$$

naturais distintos $m < b^x$ tal que o dígito d ocorre s vezes. Concluímos que o número de naturais $< b^x$ onde o dígito d ocorre entre 0 e r ou entre R e x vezes em sua expansão é igual a

$$\sum_{s=0}^{r} T_s + \sum_{s=R}^{x} T_s$$

que por sua vez é menor que

$$(x+1)\left(\sum_{s=0}^{r} T_s + \sum_{s=R}^{x} T_s\right).$$

2º caso: $d = 0$

Fixados s e n tais que $s \leq n < x$, existem

$$(b-1)^{n-s+1}\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix} = (b-1)^{n-s+1}\frac{n!}{(n-s)!s!}$$

naturais com $n+1$ dígitos tais que o dígito zero ocorre s vezes em sua expansão, pois o primeiro dígito de um natural nunca é zero. Logo há

$$\begin{aligned}\sum_{n=s}^{x-1}(b-1)^{n-s+1}\frac{n!}{(n-s)!s!} &\leq \sum_{n=s}^{x-1}(b-1)^{x-s}\frac{x!}{(x-s)!s!} \\ &\leq (x+1)(b-1)^{x-s}\frac{x!}{(x-s)!s!} \\ &= (x+1)T_s\end{aligned}$$

naturais $< b^x$ tais que o dígito zero ocorre s vezes em sua expansão. Variando s concluímos que existem no máximo

$$\sum_{s=0}^{r}(x+1)T_s + \sum_{s=R}^{x}(x+1)T_s = (x+1)\left(\sum_{s=0}^{r} T_s + \sum_{s=R}^{x} T_s\right)$$

naturais $< b^x$ com o dígito zero ocorrendo entre 0 e r ou entre R e x vezes em sua expansão.

Juntando as estimativas do primeiro e segundo caso e lembrando que temos b dígitos na base b, concluímos que o número de naturais $m < b^x$ que não são $(\varepsilon, 1)-$normais na base b é menor ou igual a

$$b(x+1)(\sum_{s=0}^{r} T_s + \sum_{s=R}^{x} T_s).$$

■

Observação 46 *No artigo original os autores sugerem que há no máximo*

$$b(\sum_{s=0}^{r} T_s + \sum_{s=R}^{x} T_s)$$

naturais $< b^x$ *que não são* $(\varepsilon, 1)-$*normais na base* b *(sem comentários de como obter tal expressão). Mostramos que para dígitos* $d \neq 0$ *temos exatamente* $\sum_{s=0}^{r} T_s + \sum_{s=R}^{x} T_s$ *naturais* $< b^x$ *onde o dígito* d *ocorre entre* 0 *e* r *ou entre* R *e* x *vezes em sua expansão. Mas para o dígito zero a estimativa não é tão simples; portanto resolvemos modificar esta estimativa original (deixando em aberto a verificação de sua veracidade) e adaptá-la ao restante da prova, sem prejuízo na validade do resultado principal desta seção.*

Lema 47 *Fixados um inteiro positivo* x *e* $\varepsilon \in (0, 1)$, *com as notações 41 e 44 anteriores temos:*

(i) $\sum_{s=0}^{r} T_s < (x+1)T_r$

(ii) $\sum_{s=R}^{x} T_s < (x+1)T_R$.

Prova. Para verificarmos (i) observamos que $r < x/b$ e que

$$\frac{(x - x/b)}{x/b} = (b-1), \text{ donde } \forall j \leq x/b, \ \frac{(x-j+1)}{j} > b-1. \tag{9}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{r} T_s &= T_r + \sum_{s=0}^{r-1} \left((b-1)^{x-s} \frac{x!}{(x-s)!s!} \right) \\
&= T_r + \sum_{s=0}^{r-1} \left((b-1)^{x-r} (b-1)^{r-s} \frac{x!}{(x-s)!s!} \right) \overset{(9)}{<} \\
&< T_r + \sum_{s=0}^{r-1} \left((b-1)^{x-r} \left(\prod_{j=s+1}^{r} \frac{(x-j+1)}{j} \right) \frac{x!}{(x-s)!s!} \right) \\
&= T_r + \sum_{s=0}^{r-1} \left((b-1)^{x-r} \frac{x!}{(x-r)!r!} \right) \\
&= \sum_{s=0}^{r} T_r = (r+1) T_r < (x+1) T_r.
\end{aligned}$$

Para verificarmos (ii) observamos que $R > x/b$ e que

$$\frac{x/b}{(x - x/b)} = \frac{1}{b-1}, \text{ donde } \forall j \geq \frac{x}{b} + 1, \ \frac{j}{(x-j+1)} > \frac{1}{b-1}. \tag{10}$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=R}^{x} T_s &= T_R + \sum_{s=R+1}^{x} \left((b-1)^{x-s} \frac{x!}{(x-s)!s!} \right) \\
&= T_R + \sum_{s=R+1}^{x} \left((b-1)^{x-R} \left(\frac{1}{(b-1)^{s-R}} \right) \frac{x!}{(x-s)!s!} \right) \overset{(10)}{<} \\
&< T_R + \sum_{s=R+1}^{x} \left((b-1)^{x-R} \left(\prod_{j=R+1}^{s} \frac{j}{(x-j+1)} \right) \frac{x!}{(x-s)!s!} \right) \\
&= T_R + \sum_{s=R+1}^{x} \left((b-1)^{x-R} \frac{x!}{(x-R)!R!} \right) = \sum_{s=R}^{x} T_R < (x+1) T_R.
\end{aligned}$$

■

Dos Lemas 45 e 47 obtemos

Corolário 48 *Dados um inteiro positivo x e $\varepsilon \in (0,1)$, o número de naturais $m < b^x$ que não são $(\varepsilon, 1)-$normais na base b é menor ou igual a*

$$b(x+1)^2(T_r + T_R).$$

Observamos que, dados um inteiro positivo x e um inteiro positivo $s < x$:

$$\frac{T_{s+1}}{T_s} = \frac{(b-1)^{x-s-1}\frac{x!}{(x-s-1)!(s+1)!}}{(b-1)^{x-s}\frac{x!}{(x-s)!s!}} = \frac{x-s}{(s+1)(b-1)}. \tag{11}$$

Decorre daí que $\frac{T_{s+1}}{T_s}$ é decrescente em s, ou seja,

$$x > s_1 > s_2 > 0 \Rightarrow \frac{T_{s_1+1}}{T_{s_1}} < \frac{T_{s_2+1}}{T_{s_2}}. \tag{12}$$

Agora vamos trabalhar com algumas estimativas bastante técnicas, e para isso precisamos inserir novas notações:

Notação 49 *Fixados um inteiro positivo x e $\varepsilon \in (0,1)$, vamos denotar por*

$$r' = r'(x,\varepsilon) = \left\lfloor \frac{x}{2b}(2-\frac{\varepsilon}{2}) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x(4-\varepsilon)}{4b} \right\rfloor \quad e$$

$$R' = R'(x,\varepsilon) = \left\lceil \frac{x}{2b}(2+\frac{\varepsilon}{2}) \right\rceil = \left\lceil \frac{x(4+\varepsilon)}{4b} \right\rceil.$$

Vamos denotar, ainda, por

$$\rho_1 = \frac{T_{r'}}{T_{r'-1}}; \quad \rho_2 = \frac{T_{R'}}{T_{R'+1}} \quad e \quad \Psi = \Psi(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{4(b-1)}$$

Note que, pela Notação 41

$$r \le r' \le R' \le R.$$

Lema 50 *Dados um inteiro positivo x e $\varepsilon \in (0,1)$, com as notações anteriores temos que $\rho_1, \rho_2 \ge \Psi > 1$.*

Prova. É claro que $\Psi = 1 + \frac{\varepsilon}{4(b-1)} > 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{T_{r'}}{T_{r'-1}} \overset{(11)}{=} \frac{x-r'+1}{r'(b-1)} = \frac{x - \left\lfloor \frac{x(4-\varepsilon)}{4b} \right\rfloor + 1}{\left\lfloor \frac{x(4-\varepsilon)}{4b} \right\rfloor} \frac{1}{(b-1)} \\
&\ge \frac{x - \frac{x(4-\varepsilon)}{4b} + 1}{\frac{x(4-\varepsilon)}{4b}} \frac{1}{(b-1)} \ge \frac{x - \frac{x}{b} + \frac{\varepsilon x}{4b}}{\frac{x}{b}} \frac{1}{(b-1)} \\
&= \frac{\frac{(b-1)x}{b} + \frac{\varepsilon x}{4b}}{\frac{x}{b}} \frac{1}{(b-1)} = \left((b-1) + \frac{\varepsilon}{4}\right) \frac{1}{(b-1)} \\
&= 1 + \frac{\varepsilon}{4(b-1)} = \Psi.
\end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\rho_2 = \frac{T_{R'}}{T_{R'+1}} \overset{(11)}{=} \frac{(R'+1)(b-1)}{x-R'} = \frac{(\left\lceil \frac{x(4+\varepsilon)}{4b} \right\rceil + 1)(b-1)}{x - \left\lceil \frac{x(4+\varepsilon)}{4b} \right\rceil}$$

$$\geq \frac{\frac{x(4+\varepsilon)}{4b}+1}{x-\frac{x(4+\varepsilon)}{4b}}(b-1) \geq \frac{\frac{x}{b}+\frac{\varepsilon x}{4b}}{x-\frac{x}{b}}(b-1)$$

$$= \frac{\frac{x}{b}+\frac{\varepsilon x}{4b}}{\frac{(b-1)x}{b}}(b-1) = \frac{1+\frac{\varepsilon}{4}}{b-1}(b-1) = 1+\frac{\varepsilon}{4} > \Psi.$$

■

Lema 51 *Com as notações anteriores, dado* $\varepsilon \in (0,1)$, *para cada* x *inteiro positivo suficientemente grande temos:*

i) $T_r \Psi^{\frac{\varepsilon x}{5b}} < T_{r'} < b^x$;

ii) $T_R \Psi^{\frac{\varepsilon x}{5b}} < T_{R'} < b^x$.

Prova. A segunda desigualdade de i) e ii) decorre do Binômio de Newton pois

$$b^x = ((b-1)+1)^x = \sum_{s=0}^{x} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} (b-1)^{x-s} = \sum_{s=0}^{x} T_s$$

e $r', R' \in \{0, ..., x\}$.

Para provarmos a primeira desigualdade de *i)* observamos inicialmente que

$$\frac{x(4-\varepsilon)}{4b} - \frac{x(2-\varepsilon)}{2b} = \frac{\varepsilon x}{4b} \Longrightarrow \left\lfloor \frac{x(4-\varepsilon)}{4b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x(2-\varepsilon)}{2b} \right\rfloor > \frac{\varepsilon x}{4b} - 2.$$

Logo, para x suficientemente grande,

$$r' - r = \left\lfloor \frac{x(4-\varepsilon)}{4b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x(2-\varepsilon)}{2b} \right\rfloor > \frac{\varepsilon x}{4b} - 2 \geq \frac{\varepsilon x}{5b}.$$

Então, aplicando o lema anterior, obtemos

$$\Psi^{\frac{\varepsilon x}{5b}} \overset{\text{Lema 50}}{\leq} \rho_1^{\frac{\varepsilon x}{5b}} < \rho_1^{r'-r} = \left(\frac{T_{r'}}{T_{r'-1}}\right)^{r'-r} \overset{(12)}{<}$$

$$< \frac{T_{r'}}{T_{r'-1}} \frac{T_{r'-1}}{T_{r'-2}} \cdots \frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{T_{r'}}{T_r}.$$

A prova da primeira desigualdade de ii) é análoga:

$$\frac{x(2+\varepsilon)}{2b} - \frac{x(4+\varepsilon)}{4b} = \frac{\varepsilon x}{4b} \overset{x \text{ grande}}{\Longrightarrow} R - R' > \frac{\varepsilon x}{5b},$$

daí

$$\begin{aligned} \Psi^{\frac{\varepsilon x}{5b}} \overset{\text{Lema 50}}{\leq} \rho_2^{\frac{\varepsilon x}{5b}} < \rho_2^{R-R'} = \left(\frac{T_{R'}}{T_{R'+1}}\right)^{R-R'} \overset{(12)}{<} \\ < \frac{T_{R'}}{T_{R'+1}} \frac{T_{R'+1}}{T_{R'+2}} \cdots \frac{T_{R-1}}{T_R} = \frac{T_{R'}}{T_R}. \end{aligned}$$

■

Corolário 52 *Dados $\varepsilon \in (0,1)$ e um inteiro positivo x suficientemente grande, o número de naturais $m < b^x$ que não são $(\varepsilon,1)-$normais na base b é menor ou igual a*

$$2b(x+1)^2 \left(\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}} b\right)^x.$$

Prova. Pelos ítens *i)* e *ii)* do último lema temos

$$(T_r + T_R)\Psi^{\frac{\varepsilon x}{5b}} < 2b^x,$$

para x suficientemente grande. Daí

$$b(x+1)^2(T_r + T_R) \leq 2b(x+1)^2 \left(\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}} b\right)^x.$$

Agora basta aplicar o Corolário 48. ■

Agora podemos mostrar que a quantidade de números naturais $< W$ que não são $(\varepsilon,1)-$ normais é "pequena".

Lema 53 *Dado $\varepsilon \in (0,1)$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) < 1$ tal que, para todo W suficientemente grande, o número de naturais $\leq W$ que não são $(\varepsilon,1)-$normais na base b é menor que W^δ.*

Prova. Dado um natural W, seja x tal que

$$b^{x-1} \leq W < b^x. \tag{13}$$

Como $W < b^x$, é suficiente mostrar que existe $\delta < 1$ tal que o número de naturais $< b^x$ que não são $(\varepsilon, 1)-$normais na base b é menor ou igual a W^δ. Aplicando o Corolário anterior, vemos que é suficiente mostrar que existe $\delta < 1$ tal que para W suficientemente grande

$$2b(x+1)^2 \left(\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}} b\right)^x < W^\delta.$$

Para isso observamos que, como $\Psi > 1$, então $\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}} < b^0$, logo podemos escolher $c \in (-1, 0)$ tal que $\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}} < b^c$. Daí

$$\left(\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}} b\right)^x < \left(b^{c+1}\right)^x.$$

Seja $0 < c' < -c$. Chamando

$$\delta = 1 + c + c' < 1$$

temos que para x suficientemente grande (W suficientemente grande)

$$2b(x+1)^2 < b^{c'x-\delta},$$

pois a expressão à esquerda é quadrática em x, enquanto a expressão à direita é exponencial em x. Segue que

$$2b(x+1)^2 \left(\Psi^{-\frac{\varepsilon}{5b}} b\right)^x < b^{c'x-\delta} \left(b^{c+1}\right)^x = b^{(c'+c+1)x-\delta} = b^{\delta x-\delta} = b^{(x-1)\delta} \overset{(13)}{\leq} W^\delta,$$

pela definição de x. ■

Nosso objetivo agora é provar um resultado análogo para os blocos de tamanho k :

Teorema 54 *Fixados $\varepsilon \in (0,1)$ e $k \in N^*$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, k) < 1$ tal que para qualquer natural W suficientemente grande, o número de naturais $\leq W$ que não são $(\varepsilon, k)-$normais na base b é menor que W^δ.*

Prova. Para $k = 1$ podemos usar o lema anterior, portanto podemos considerar $k \geq 2$ inteiro. Observando que

$$s \to \infty \Rightarrow \frac{\frac{s}{k}}{\lfloor \frac{s}{k} \rfloor} \to 1 \Rightarrow \frac{(\frac{1}{b^k} - \varepsilon)\frac{s}{k} + 1}{\lfloor \frac{s}{k} \rfloor} \to (\frac{1}{b^k} - \varepsilon) \text{ e}$$
$$s \to \infty \Rightarrow \frac{\frac{s}{k}}{\lceil \frac{s}{k} \rceil} \to 1 \Rightarrow \frac{(\frac{1}{b^k} + \varepsilon)\frac{s}{k}}{\lceil \frac{s}{k} \rceil} \to (\frac{1}{b^k} + \varepsilon),$$

concluímos que, para s suficientemente grande,

$$\frac{(\frac{1}{b^k} - \varepsilon)\frac{s}{k} + 1}{\lfloor \frac{s}{k} \rfloor} < \frac{1}{b^k} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{b^k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{(\frac{1}{b^k} + \varepsilon)\frac{s}{k}}{\lceil \frac{s}{k} \rceil}. \tag{14}$$

Seja então $s_0 = s_0(\varepsilon, k) > k$ tal que para $s > s_0$ as desigualdades acima são satisfeitas.

Dado W um natural de x dígitos $b-$nários, com $x > s_0$, seja $m \leq W$ um natural de s dígitos $b-$nários, onde $k < s_0 < s \leq x$, digamos,

$$m = (a_s a_{s-1} ... a_2 a_1)_b.$$

Juntamos os dígitos de m em grupos de tamanho k, sendo o grupo mais à esquerda possivelmente de tamanho $\leq k$:

$$m = ((a_s ...) ... (a_{2k} ... a_{k+1})(a_k ... a_1))_b.$$

Cada um desses grupos representa um único dígito de m na base b^k e portanto, nesta base, m possui $\lceil \frac{s}{k} \rceil$ dígitos.

Considere agora os naturais:

$$m_1 = (a_s a_{s-1} ... a_2 a_1)_b = m$$
$$m_2 = (a_s a_{s-1} ... a_2)_b$$
$$...$$
$$m_k = (a_s a_{s-1} ... a_{k+1} a_k)_b.$$

Note que cada um dos m_i possui entre $\left\lfloor \frac{s}{k} \right\rfloor$ e $\left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil$ dígitos na base b^k.

Suponhamos que m não é $(\varepsilon, k)-$normal na base b. Então, pela Definição 36 existe um bloco T, de k dígitos, que ocorre menos que $(\frac{1}{b^k} - \varepsilon)s$ ou mais que $(\frac{1}{b^k} + \varepsilon)s$ vezes na expansão de m na base b. Como conseqüência, o dígito t que corresponde a T na base b^k ocorre menos que $(\frac{1}{b^k} - \varepsilon)\frac{s}{k} + 1$ ou mais que $(\frac{1}{b^k} + \varepsilon)\frac{s}{k}$ vezes em pelo menos um dos m_i, escrito na base b^k. Como m_i possui entre $\left\lfloor \frac{s}{k} \right\rfloor$ e $\left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil$ dígitos na base b^k, concluímos que t ocorre em m_i com freqüência entre 0 e $\frac{(\frac{1}{b^k} - \varepsilon)\frac{s}{k} + 1}{\left\lfloor \frac{s}{k} \right\rfloor}$ ou entre $\frac{(\frac{1}{b^k} + \varepsilon)\frac{s}{k}}{\left\lceil \frac{s}{k} \right\rceil}$ e 1. Assim por (14) m_i não é $(\frac{\varepsilon}{2}, 1)-$normal na base b^k.

Até aqui mostramos que, dado m satisfazendo $b^{s_0} \leq m \leq W$, se m não é $(\varepsilon, k)-$normal na base b então algum dos m_i a ele associados não é $(\frac{\varepsilon}{2}, 1)-$normal na base b^k. Dado agora $n \leq W$ existem no máximo kb^k naturais $m \leq W$ com $m_i = n$ para algum $i \in \{1, ..., k\}$. Pelo Lema anterior existe δ' tal que o número de naturais $n \leq W$ que não são $(\frac{\varepsilon}{2}, 1)-$normais na base b^k é menor que $W^{\delta'}$ (para W suficientemente grande), assim garantimos que o número de naturais $m \leq W$ que não são $(\varepsilon, k)-$normais na base b é menor que

$$b^{s_0} + kb^k W^{\delta'}.$$

Como s_0 e k são constantes, para δ satisfazendo $\delta' < \delta < 1$ e para W suficientemente grande,

$$b^{s_0} + kb^k W^{\delta'} < W^{\delta},$$

o que conclui a prova. ■

Agora podemos apresentar a prova do Teorema de Copeland-Erdös:

Prova do Teorema 32 de Copeland-Erdös:

Seja (x_n) uma seqüência crescente de naturais tal que, para todo $\theta < 1$ fixado, vale que $\#\{x_i < W\} > W^\theta$ para W suficientemente grande. Queremos mostrar que $\alpha := (.x_1x_2x_3...)_b$ é $b-$normal.

Fixamos k natural e $\varepsilon \in (0,1)$. Dado um natural W, seja x o inteiro tal que

$$b^x \leq W < b^{x+1}.$$

Pelo Teorema anterior, existe $\delta < 1$ tal que se W é suficientemente grande

$$\#\{x_i < W : x_i \text{ não é } (\varepsilon, k) - \text{normal}\} < W^\delta.$$

Para estes ε e δ fixos, escolhemos $\theta < 1$ tal que $\theta > \delta$ e $\theta > 1 - \varepsilon$.

Pelo menos $W^\theta - W^{1-\varepsilon}$ dos números $x_i < W$ possuem mais que $x(1-\varepsilon)$ dígitos, pois, de acordo com a hipótese, há pelo menos W^θ números x_i menores que W e $b^{x(1-\varepsilon)} \leq W^{1-\varepsilon}$, onde $b^{x(1-\varepsilon)}$ é maior que o número de naturais que não possuem mais que $x(1-\varepsilon)$ dígitos. Observamos também que esses pelo menos $W^\theta - W^{1-\varepsilon}$ naturais envolvem pelo menos $x(1-\varepsilon)\left(W^\theta - W^{1-\varepsilon}\right)$ dígitos.

Seja $N(W)$ o número de $b-$dígitos utilizados para concatenarmos os naturais $x_1, x_2, ..., x_s$ que são menores que W. Então

$$x(1-\varepsilon)\left(W^\theta - W^{1-\varepsilon}\right) \leq N(W). \tag{15}$$

Como a expansão de W em base b possui $x+1$ dígitos temos que $x_i < W \Rightarrow x_i$ tem no máximo $x+1$ dígitos. Assim, se B_k é um bloco de k dígitos na base b, temos que B_k não pode ocorrer mais que $x+1$ vezes em cada $x_i < W$. Logo

$$\frac{1}{N(W)}\begin{pmatrix} n^o \text{ de ocorrências de } B_k \\ \text{nos } x_i \text{ não } (\varepsilon,k)-\text{normais}\end{pmatrix} \le \frac{x+1}{N(W)}\begin{pmatrix} n^o \text{ de termos } x_i \\ \text{não } (\varepsilon,k)-\text{normais}\end{pmatrix}$$

$$\le \frac{x+1}{N(W)}W^{\delta} \overset{(15)}{\le} \frac{(x+1)W^{\delta}}{x(1-\varepsilon)\left(W^{\theta}-W^{1-\varepsilon}\right)}.$$

Além disso, denotando por $l(x_i)$ o número de dígitos de x_i,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N(W)}\begin{pmatrix} n^o \text{ de ocorrências de } B_k \\ \text{nos } x_i\ (\varepsilon,k)-\text{normais}\end{pmatrix}\\
&\le \left(\sum_{x_i\ (\varepsilon,k)-\text{normais}} l(x_i)\right)^{-1}\begin{pmatrix} n^o \text{ de ocorrências de } B_k \\ \text{nos } x_i\ (\varepsilon,k)-\text{normais}\end{pmatrix}\\
&\le \left(\sum_{x_i\ (\varepsilon,k)-\text{normais}} l(x_i)\right)^{-1}\left(\sum_{x_i\ (\varepsilon,k)-\text{normais}} l(x_i)\left(\frac{1}{b^k}+\varepsilon\right)\right)\\
&= \left(\frac{1}{b^k}+\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Decorre que

$$\begin{aligned}
\frac{\#_b(B_k;N(W);\alpha)}{N(W)} &= \frac{1}{N(W)}\begin{pmatrix} n^o \text{ de ocorrências de } B_k \\ \text{nos } x_i\ (\varepsilon,k)-\text{normais}\end{pmatrix} +\\
&+ \frac{1}{N(W)}\begin{pmatrix} n^o \text{ de ocorrências de } B_k \\ \text{nos } x_i \text{ não } (\varepsilon,k)-\text{normais}\end{pmatrix} +\\
&+ \frac{1}{N(W)}\begin{pmatrix} n^o \text{ de ocorrências de } B_k \\ \text{nas junções dos } x_i\end{pmatrix}\\
&\le \left(\frac{1}{b^k}+\varepsilon\right) + \frac{(x+1)W^{\delta}}{x(1-\varepsilon)\left(W^{\theta}-W^{1-\varepsilon}\right)} + R(W),
\end{aligned}$$

onde $R(W)$ representa a razão entre o número de vezes em que B_k ocorreu nas junções dos x_i e $N(W)$.

Pelo Corolário 31, $R(W)$ é desprezível, ou seja

$$\lim_{W\to\infty} R(W) = 0.$$

Como $\theta > \delta$ e $\theta > 1-\varepsilon$, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{W\to\infty}} \frac{\#_b(B_k; N(W); \alpha)}{N(W)} &\leq \lim_{W\to\infty} (\frac{1}{b^k} + \varepsilon) + \lim_{W\to\infty} \frac{(x+1)W^\delta}{x(1-\varepsilon)\,(W^\theta - W^{1-\varepsilon})} \\
&= (\frac{1}{b^k} + \varepsilon) + \lim_{W\to\infty} \frac{W^{\delta-\theta}}{(1-\varepsilon)\,(1 - W^{1-\varepsilon-\theta})} = \frac{1}{b^k} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomando ε cada vez menor, concluímos que

$$\overline{\lim_{W\to\infty}} \frac{\#_b(B_k; N(W); \alpha)}{N(W)} \leq \frac{1}{b^k}. \tag{16}$$

Queremos mostrar agora [4] que

$$\underline{\lim_{W\to\infty}} \frac{\#_b(B_k; N(W); \alpha)}{N(W)} \geq \frac{1}{b^k}. \tag{17}$$

Para isso, fixamos inicialmente $\rho > 0$. Como k está fixo, temos apenas b^k blocos de tamanho k na base b, que é uma quantidade finita. É claro que (16) vale para todos eles, portanto para todo bloco B_k

$$\frac{\#_b(B_k; N(W); \alpha)}{N(W)} < \frac{1}{b^k} + \rho,$$

para W suficientemente grande. Vamos fixar um dos blocos de tamanho k e denotá-lo por B_k^*. Lembrando que

$$\sum_{B_k} \frac{\#_b(B_k; N(W); \alpha)}{N(W)} = \frac{N(W) - k + 1}{N(W)} \to 1, \tag{18}$$

garantimos que

$$\frac{1}{b^k} - b^k\rho < \frac{\#_b(B_k^*; N(W); \alpha)}{N(W)},$$

[4] Se já tivéssemos provado o Critério de Normalidade de Pjateckii-Sapiro (veja Teorema 91), a demonstração deste teorema terminaria aqui. Optamos no entanto, neste trabalho, pela ordem cronológica dos resultados.

pois do contrário teríamos

$$\begin{aligned}\sum_{B_k} \frac{\#_b(B_k; N(W); \alpha)}{N(W)} &= \frac{\#_b(B_k^*; N(W); \alpha)}{N(W)} + \sum_{B_k \neq B_k^*} \frac{\#_b(B_k; N(W); \alpha)}{N(W)} \\ &\leq (\frac{1}{b^k} - b^k \rho) + \sum_{B_k \neq B_k^*} \left(\frac{1}{b^k} + \rho \right) \\ &= 1 - \rho \nrightarrow 1,\end{aligned}$$

contrariando (18). Como ρ pode ser arbitrariamente pequeno, provamos (17). Decorre de (16) e (17) que para todo B_k

$$\lim_{W \to \infty} \frac{\#_b(B_k; N(W); \alpha)}{N(W)} = \frac{1}{b^k}.$$

Finalmente, como $b^x \leq W < b^{x+1}$, garantimos que

$$N(W+1) \leq N(W) + (x+1).$$

Então

$$1 \leq \frac{N(W+1)}{N(W)} \leq \frac{N(W) + (x+1)}{N(W)} \xrightarrow{(15)} 1.$$

Aplicando o Lema 14 do Critério da Convergência, concluímos que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\#_b(B_k; N; \alpha)}{N} = \frac{1}{b^k},$$

encerrando a prova do teorema. ■

Copeland e Erdös ainda conjecturaram que se f é um polinômio tal que $f(\mathbb{N}^*) \subset \mathbb{N}$ então $(.f(1)f(2)...)_{10}$ é normal nesta base. Esse resultado foi mostrado mais tarde por Davenport e Erdös em [10]. Enunciamos abaixo esse resultado, no entanto não apresentaremos sua prova.

Teorema 55 (Davenport-Erdos) *Se f é uma função polinomial de grau não nulo que satisfaz $f(\mathbb{N}^*) \subseteq \mathbb{N}^*$, então o número*

$$(.f(1)f(2)f(3)...)_{10}$$

obtido concatenando-se $f(1), f(2), ...$ escritos em base 10 é $10-$normal.

4 Propriedades dos números normais

4.1 Conexão com Sistemas Dinâmicos

A referência para este capítulo é [13], que apresenta uma coleção de resultados da teoria das seqüências equidistribuídas módulo um. Nosso objetivo aqui é apresentar o "caminho mais curto" para a prova dos resultados encontrados na seção 1.8 de [13]. O principal objetivo deste capítulo é provar o Critério de Normalidade dado no Teorema 91 e apresentar algumas de suas aplicações.

Notação 56 *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma seqüência de números reais, I um conjunto contido em $[0,1)$ e N um número natural positivo.*

Denotamos por $\#(I;N;(x_n))$ o número de vezes em que os N primeiros termos de $(\{x_n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ visitam I, ou seja

$$\#(I;N;(x_n)) = \#\{s \in \{1,...N\} : \{x_s\} \in I\}.$$

Convenção - Dada uma seqüência de números reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, referiremonos à "seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ módulo 1", ou simplesmente "$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mod 1", quando quisermos falar da seqüência $(\{x_n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ das partes fracionárias dos x_n.

Convenção - Dados um intervalo $I \subseteq [0,1)$ e um número real x utilizaremos, com um abuso de linguagem, a expressão "x visita I" se ocorrer $\{x\} \in I$.

Seja $\alpha = (.a_1a_2a_3...)_b$. Definimos, a partir de α, a seqüência $(x_n) = (\{b^n\alpha\})$. Assim, por exemplo,

$$(x_0) = (.a_1a_2a_3...)_b,$$

$$(x_1) = (.a_2a_3a_4...)_b,$$

$$(x_2) = (.a_3a_4a_5...)_b, ...$$

Observamos agora que se considerarmos a aplicação

$$T : [0,1) \to [0,1) \text{ definida por } T(x) = \{bx\},$$

vemos que (x_n) representa a órbita de α pela aplicação T, ou seja

$$x_0 = \alpha,$$
$$x_1 = T(\alpha),$$
$$x_2 = T^2(\alpha) = T(T(\alpha)), ...$$

A aplicação T acima é uma das mais conhecidas em Teoria Ergódica e Sistemas Dinâmicos e sua relação com o que estudamos até aqui, também muito conhecida nestas áreas, é dada pelo próximo teorema:

Definição 57 *Dado um bloco $B_k = b_1...b_k$ de k dígitos $b-$nários, definimos o cilindro de B_k por*

$$\begin{aligned} C(B_k) &= \{(.a_1a_2...)_b : a_1 = b_1, ..., a_k = b_k\} \\ &= \left[(.b_1...b_k)_b, (.b_1...b_k)_b + \frac{1}{b^k}\right). \end{aligned}$$

Teorema 58 *Fixados um real α e um bloco B_k de k dígitos $b-$nários, temos que*

$$\#_b(B_k; N; \alpha) = \#(C(B_k); N - k + 1; (b^n\alpha)).$$

Em particular

$$\#_b(B_k; N; \alpha) \leq \#(C(B_k); N; (b^n\alpha)) \leq \#_b(B_k; N; \alpha) + k.$$

Prova. Sejam $(.a_1a_2a_3...)_b$ a expansão $b-$nária de $\{\alpha\}$ e $B_k = b_1b_2...b_k$. Então, para cada $m \geq 1$, o bloco $a_ma_{m+1}...a_{m+k-1}$ é idêntico a B_k se e somente se

$$\{\alpha\} = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{a_i}{b^i}\right) + \left(\frac{b_1}{b^m} + ... + \frac{b_k}{b^{m+k-1}}\right) + \left(\sum_{i=m+k}^{\infty} \frac{a_i}{b^i}\right)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\left\{b^{m-1}\alpha\right\} &= \left(\frac{b_1}{b}+...+\frac{b_k}{b^k}\right)+\left(\sum_{i=m+k}^{\infty}\frac{a_i}{b^{i-m+1}}\right)\\ &= \frac{b_1\times b^{k-1}+...+b_k}{b^k}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{a_{i+m-1}}{b^i},\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\left\{b^{m-1}\alpha\right\}\in\left[(.b_1...b_k)_b,(.b_1...b_k)_b+\frac{1}{b^k}\right)=C(B_k).$$

Isto mostra que $\#_b(B_k;N;\alpha)=\#(C(B_k);N-k+1;(b^n\alpha))$. ∎

Corolário 59 *α é $b-$normal se e somente se, para quaisquer naturais k e x com $\left[\frac{x}{b^k},\frac{x+1}{b^k}\right)\subset[0,1)$, temos que*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{x}{b^k},\frac{x+1}{b^k}\right);N;(b^n\alpha)\right)=\frac{1}{b^k}.$$

Prova. Para cada par x,k como na hipótese, existe um único bloco B_k tal que $C(B_k)=\left[\frac{x}{b^k},\frac{x+1}{b^k}\right)$. Daí, aplicando o teorema anterior temos:

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{x}{b^k},\frac{x+1}{b^k}\right);N;(b^n\alpha)\right)\\ &=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#_b\left(B_k;N+k-1;\alpha\right)\\ &=\lim_{N\to\infty}\frac{N+k-1}{N}\frac{1}{N+k-1}\#_b\left(B_k;N+k-1;\alpha\right)\\ &=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+k-1}\#_b\left(B_k;N+k-1;\alpha\right)\\ &=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left(B_k;N;\alpha\right).\end{aligned}$$

Portanto α é normal se e somente se

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{x}{b^k},\frac{x+1}{b^k}\right);N;(b^n\alpha)\right)=\frac{1}{b^k},$$

para quaisquer x e k como na hipótese. ∎

Levando em conta que a medida de Lebesgue é ergódica [5] para a transformação $y \to \{by\}$, obtemos o seguinte

Corolário 60 *Quase todos os números do intervalo* $[0,1)$ *são* $b-$*normais, ou seja o conjunto dos números não normais em base* b *possui medida de Lebesgue nula.*

Prova. Sendo a medida de Lebesgue m ergódica para $y \to \{by\}$, temos que para cada par (x,k) de números naturais tal que $\left[\frac{x}{b^k}, \frac{x+1}{b^k}\right) \subset [0,1)$, existe um conjunto $E_{x,k} \subset [0,1)$ com medida zero, tal que para todo $y \in [0,1)\backslash E_{x,k}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left(\left[\frac{x}{b^k}, \frac{x+1}{b^k} \right) ; N; (b^n y) \right) = \frac{1}{b^k}.$$

Tomando então a união enumerável dos conjuntos $E_{x,k}$ obtemos um conjunto E de medida zero. Pelo corolário anterior $[0,1)\backslash E$ é formado apenas de números normais na base b. ■

Para provarmos outras propriedades dos números normais, vamos usar os conceitos de função de distribuição e seqüência equidistribuída. Futuramente vamos ainda dar outra prova para o corolário acima usando um resultado de Weyl para seqüências equidistriuídas módulo 1 (Teorema 78).

4.2 Função de distribuição Assintótica

As funções de distribuição assintótica possuem uma importante aplicação na teoria que vamos apresentar neste capítulo. O objetivo desta seção é apresentar resultados preliminares usados na prova do Teorema 90 e do Critério de Normalidade dado no Teorema 91.

[5] Lembramos que a medida de Lebesgue m, é ergódica para $T : [0,1) \to [0,1)$, se T é mensurável e para qualquer conjunto mensurável $A \subset [0,1)$ vale que $T^{-1}(A) = A \Rightarrow m(A) = 0$ *ou* 1. Neste caso, decorre do Teorema Ergódico de Birkhoff que, dado um intervalo $[a,b) \subset [0,1)$, temos que $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# ([a,b); N; (T^n y)) = b - a$ *q.t.p.* $y \in [0,1)$.

Convenção- Dado $a \in [0,1)$, convencionamos que para qualquer seqüência (x_n) de números naturais,

$$\#([a,a);N;(x_n)) = 0.$$

Definição 61 *Seja (x_n) uma seqüência de números reais. Suponhamos que para cada $x \in [0,1]$ existe o*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#([0,x);N;(x_n)).$$

*Então dizemos que (x_n) possui a **função de distribuição assintótica mod 1** (abrev. f.d.a.) $z : [0,1] \to [0,1]$ definida por*

$$z(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#([0,x);N;(x_n)).$$

Observamos que uma seqüência (x_n) arbitrária não precisa possuir f.d.a. É claro que se z existir então é não decrescente, com $z(0) = 0$ (pela convenção anterior) e $z(1) = 1$.

Definição 62 *Seja (x_n) uma seqüência de números reais. Dizemos que uma função $z : [0,1] \to [0,1]$ é **uma função de distribuição mod 1** (abrev. f.d.) de (x_n) se existe uma seqüência crescente de naturais $N_1, N_2, ...$ tal que para cada $x \in [0,1]$*

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{1}{N_i}\#([0,x);N_i;(x_n)) = z(x).$$

Alternativamente diremos também que z é uma f.d. de (x_n) sobre $N_1, N_2, ...$, quando for útil destacar (N_i).

Lema 63 *Seja $(F_n) = F_1, F_2, ...$ uma seqüência de funções uniformemente limitadas em $[0,1]$ e C um conjunto enumerável de $[0,1]$. Então existe uma subseqüência (F_{n_j}) de (F_n) tal que*

$$\lim_{j\to\infty} F_{n_j}(x)$$

existe para todo x de C.

Prova. Basta usar o argumento da diagonal de Cantor e que toda seqüência limitada possui subseqüência convergente:

Suponhamos $C = \{x_1, x_2, ...\}$. Como $F_1, F_2, ...$ formam uma seqüência de funções uniformemente limitadas em $[0,1]$, concluímos que $(F_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e portanto possui uma subseqüência convergente que denotaremos por $(F_n^1(x_1))$. Analogamente $(F_n^1(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subseqüência convergente, digamos $(F_n^2(x_2))$. Continuando o processo sempre obtemos um novo refinamento da seqüência de funções inicial. Tomamos agora a seqüência (F_{n_j}) de funções, formada pela escolha da j-ésima função de (F_n^j), para $j = 1, 2, 3, ...$, ou seja, tomando-se a primeira função de (F_n^1), a segunda função de (F_n^2) e assim por diante. Então (F_{n_j}) satisfaz a condição desejada. ■

Teorema 64 *Toda seqüência (x_n) de números reais possui pelo menos uma f.d..*

Prova. Considere a seqüência de funções $F_N : [0,1] \to [0,1]$ dadas por

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\#([0,x); N; (x_n)),$$

que são uniformemente limitadas por 1. Usando o lema anterior, com $C = \mathbb{Q}$, obtemos uma subseqüência (N_j) tal que $(F_{N_j}(x))$ converge, para todo x racional em $[0,1]$. A função limite $z(x) = \lim_{j\to\infty} F_{N_j}(x)$ está portanto bem definida nos racionais. Considere agora $\overline{z}(x) = \overline{\lim}_{j\to\infty} F_{N_j}(x)$ e $\underline{z}(x) = \underline{\lim}_{j\to\infty} F_{N_j}(x)$. Observamos que

$$\overline{z}(x) = z(x) = \underline{z}(x)$$

para todo x racional. Seja $y \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$. Se $\underline{z}$ é contínua em y, seja (x_i) uma seqüência de racionais que converge a y pela direita. Então, como $\overline{z}$ é não decrescente, para todo $i \in \mathbb{N}^*$ temos

$$\overline{z}(y) \leq \overline{z}(x_i) = \underline{z}(x_i),$$

e portanto

$$\overline{z}(y) \leq \lim_{i\to\infty} \underline{z}(x_i) \overset{\underline{z} \text{ é contínua em } y}{=} \underline{z}(\lim_{i\to\infty} x_i) = \underline{z}(y).$$

Concluímos que $C = \{y \in [0,1]\backslash\mathbb{Q};\ \underline{z}$ é descontínua em $y\}$ é o maior conjunto onde $\overline{z}$ pode diferir de $\underline{z}$. Como $\underline{z}$ é não decrescente, o conjunto C é enumerável. Aplicando novamente o Lema anterior garantimos uma subseqüência (N_s) de (N_j) tal que existe $\lim_{s\to\infty} F_{N_s}(x)\ \forall\ x \in [0,1]$. A função $z : [0,1] \to [0,1]$ dada por $z(x) = \lim_{s\to\infty} F_{N_s}(x)$ é então uma f.d. de (x_n) sobre (N_s). ■

Corolário 65 *Seja* (x_n) *uma seqüência de números reais. Fixados* $x_0 \in (0,1)$ *e* $\alpha \in [0,1]$, *suponhamos que existe uma seqüência crescente de números naturais* $N_1, N_2, ...$ *tal que*

$$\lim_{N_j\to\infty} \frac{1}{N_j}\#([0,x_0);N_j;(x_n)) = \alpha.$$

Então (x_n) *possui uma f.d.* $z : [0,1] \to [0,1]$, *tal que* $z(x_0) = \alpha$.

Prova. É a mesma prova do teorema anterior, apenas partindo-se das funções $F_{N_j}(x)$ e não de $F_N(x)$. ■

Corolário 66 (x_n) *possui a f.d.a* z *se e somente se* z *é a única f.d. de* (x_n).

Prova. $(\Rightarrow)$: Basta lembrar que se a seqüência

$$\left(\frac{1}{N}\#([0,x);N;(x_n))\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$$

converge a $z(x)$, então qualquer subseqüência converge ao mesmo valor.

$(\Leftarrow)$: Se por absurdo existe x_0 tal que

$$\left(\frac{1}{N}\#([0,x_0);N;(x_n))\right) \nrightarrow z(x_0),$$

então existe $\alpha \neq z(x_0)$ e uma seqüência crescente de naturais $N_1, N_2, \ldots$ tal que

$$\lim_{N_j \to \infty} \frac{1}{N_j} \#([0, x_0); N_j; (x_n)) = \alpha.$$

Então, pelo corolário anterior, (x_n) possui uma f.d. $z' : [0,1] \to [0,1]$, tal que $z'(x_0) = \alpha \neq z(x_0)$. Isso contraria a hipótese de z ser única. ■

Lembramos que uma função $z : [0,1] \to [0,1]$ é de variação limitada, se existe $M > 0$ tal que para qualquer partição finita $P = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ de $[0,1]$

$$v(z, P) := \sum_{k=1}^{n} |z(t_k) - z(t_{k-1})| \leq M.$$

Dada uma seqüência de números reais (x_n), com uma função de distribuição assintótica z, sabemos que z é não decrescente e em particular z é de variação limitada. Assim, dada uma função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, podemos calcular a integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_0^1 f\ dz = \int_0^1 f(x)\ dz(x).$$

Lembramos que uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é dita Riemann-Stieltjes integrável com respeito a z se existe um número real $\int_0^1 f\ dz$ tal que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $P = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ é uma partição finita de $[0,1]$ com $\|P\| = \max\{t_k - t_{k-1} : 1 \leq k \leq n\} < \delta$ então

$$\left| \int_0^1 f\ dz - \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)(z(t_k) - z(t_{k-1})) \right| < \varepsilon, \tag{19}$$

para quaisquer $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1, 2, \ldots, n$.

Se f é contínua em $[0,1]$ e z é não decrescente em $[0,1]$ então f é Riemann-Stieltjes integrável com respeito a z. (veja [12] pag. 265).

Queremos agora trocar a condição de continuidade de f por uma um pouco mais fraca. Precisamente, queremos supor que f é contínua exceto em uma quantidade finita de pontos. Para isso lembramos que se f e z possuem algum ponto de descontinuidade em comum então em geral $\int_0^1 f\, dz$ não está definida. A prova da próxima proposição pode ser encontrada em [12], pag. 265.

Proposição 67 *Sejam* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *e* $z : [0,1] \to [0,1]$ *duas funções e* $\{x_1, ..., x_n\}$ *um conjunto finito. Se:*

i) f *é limitada em* $[0,1]$ *e contínua em* $[0,1] \backslash \{x_1, ..., x_n\}$

ii) z *é contínua nos pontos* $\{x_1, ..., x_n\}$ *e não decrescente em* $[0,1]$.

Então f *é Riemann-Stieltjes integrável com respeito a* z.

Se $f = \chi_{[a,b)}$ é a função característica do intervalo $[a,b)$ então

$$\lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \#([a,b); N_i; (x_n)) = \lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} \chi_{[a,b)}(\{x_n\}).$$

Daí, como para cada $x \in [0,1]$,

$$\lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \#([0,x); N_i; (x_n)) = z(x),$$

garantimos que se z é contínua em a e b,

$$\begin{aligned} \lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} \chi_{[a,b)}(\{x_n\}) &= \lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \#([a,b); N_i; (x_n)) \\ &= z(b) - z(a) \overset{(19)}{=} \int_0^1 \chi_{[a,b)}\, dz. \end{aligned} \tag{20}$$

Agora generalizamos a idéia acima:

Teorema 68 *Se uma função contínua* z *é uma f.d. de* (x_n) *sobre* $N_1, N_2, ...$ *então, para toda função* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *limitada e contínua exceto em um conjunto finito de pontos,*

$$\lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x) dz(x).$$

Prova. Inicialmente observe que, como z é contínua e não decrescente, $\int_0^1 f(x)dz(x)$ existe, pela proposição acima. Se f é uma função escada, digamos,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i \chi_{[r_i, r_{i+1})}(x), \ 0 = r_0 < r_1 < ... < r_k = 1,$$

então, como z é contínua,

$$\begin{aligned} \lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f\left(\{x_n\}\right) &= \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} \chi_{[r_i, r_{i+1})}(\{x_n\}) \overset{(20)}{=} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} c_i \int_0^1 \chi_{[r_i, r_{i+1})}\left(x\right) dz(x) \\ &= \int_0^1 f\left(x\right) dz(x). \end{aligned} \tag{21}$$

Vamos supor agora que f é uma função limitada e contínua, exceto em um conjunto finito de pontos. Dado $\varepsilon > 0$, decorre de (19), que tomando τ_i como mínimo e máximo de f em $[t_{i-1}, t_i]$, existem duas funções escada f_1 e f_2 tais que $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ para todo $x \in [0, 1]$ e

$$\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)] \ dz\,(x) \le \varepsilon.$$

Então nós temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dz\,(x) - \varepsilon \le \int_0^1 f_1(x)dz\,(x) &\overset{(21)}{=} \lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f_1(\{x_n\}) \\ &= \underline{\lim}_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f_1(\{x_n\}) \le \underline{\lim}_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(\{x_n\}) \\ &\le \overline{\lim}_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(\{x_n\}) \le \overline{\lim}_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f_2(\{x_n\}) \\ &= \lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f_2(\{x_n\}) \overset{(21)}{=} \int_0^1 f_2(x)dz\,(x) \\ &\le \int_0^1 f(x)dz\,(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε pode ser arbitrariamente pequeno, concluímos que obrigatoriamente

$$\underline{\lim}_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(\{x_n\}) = \overline{\lim}_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\, dz\,(x)\,.$$

■

Queremos nos livrar da hipótese de z ser contínua no teorema anterior. Como já observamos anteriormente, neste caso f não pode ter a liberdade de ser descontínua (nos mesmos pontos que z). Ainda, mesmo supondo f contínua, devemos ter mais cuidado na argumentação da prova, pois as funções escada são descontínuas. Podemos então tentar tomar funções escadas que sejam descontínuas apenas em pontos onde z é contínua.

Teorema 69 *Se z é uma f.d. de (x_n) sobre $N_1, N_2, ...$ então, para toda função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,*

$$\lim_{N_i \to \infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=1}^{N_i} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x) dz(x).$$

Prova. Se z é contínua, basta aplicarmos o teorema anterior. Suponhamos então que z não é contínua. Como $z : [0,1] \to [0,1]$ é não decrescente, temos que z é contínua exceto em um conjunto enumerável. Seja A o conjunto de pontos de descontinuidades de z e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua (portanto Riemann-Stieltjes integrável com respeito a z) . Por definição de $\int_0^1 f\, dz$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $P = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1\}$ é uma partição finita de $[0,1]$ com $\|P\| < \delta$ então

$$\left| \int_0^1 f\, dz - \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)(z(t_k) - z(t_{k-1})) \right| < \varepsilon.$$

Como A é enumerável podemos tomar uma partição $P = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1\}$ tal que $\|P\| < \delta$ e tal que $\{t_1, ..., t_{n-1}\} \cap A = \phi$. tomando τ_i como mínimo e máximo de f em $[t_{i-1}, t_i]$ construímos as funções escada f_1 e f_2. Observando que f_1 e f_2 são contínuas em $[0,1]\backslash\{t_1, ..., t_{n-1}\}$, concluímos que f_1 e f_2 são Riemann-Stieltjes integráveis com respeito a z. Portanto podemos repetir os argumentos da prova anterior. ■

4.3 Seqüências equidistribuídas módulo 1.

O estudo das seqüências equidistribuídas foi introduzido por Weyl [23]. Basicamente todos os Teoremas que apresentaremos nesta seção são devidos a ele. No entanto a referência para esta seção continua sendo [13].

Uma seqüência equidistribuída módulo 1 é uma seqüência que possui a função identidade para f.d.a. No entanto a definição (equivalente) dada abaixo é mais comum:

Definição 70 *Uma seqüência (x_n) de números reais é dita* ***equidistribuída módulo 1*** *(ou simplesmente* ***equidistribuída mod 1****) se, dados quaisquer reais r e s com $0 \leq r < s \leq 1$, temos que*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#([r,s); N; (x_n)) = s - r.$$

Lema 71 *Uma seqüência (x_n) de números reais é equidistribuída mod 1 se e somente se para quaisquer $0 < r < s < 1$*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#([r,s); N; (x_n)) = s - r.$$

Prova. Basta mostrar que a igualdade acima vale para $r = 0$, pois daí a função identidade será f.d.a. de (x_n). Dado o intervalo $[0, x)$ com $x < 1$, temos que para quaisquer r, s com $0 < r < x < s < 1$ vale

$$
\begin{aligned}
1 - s + x = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{\#([x,s);N;(x_n))}{N} &\geq \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#([0,x);N;(x_n))}{N} \\
&\geq \underline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#([0,x);N;(x_n))}{N} \\
&\geq \underline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#([r,x);N;(x_n))}{N} \geq x - r.
\end{aligned}
$$

Fazendo $s \to 1$ e $r \to 0$ concluímos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#([0,x);N;(x_n))}{N} = x.$$

■

Teorema 72 *Uma seqüência (x_n) de números reais é equidistribuída mod 1 se e somente se, para toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de período um, tem-se*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Prova. ($\Longrightarrow$) Se (x_n) é equidistribuída mod 1 então (x_n) possui a função identidade para f.d.a.. Pelo Teorema 69 concluímos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \overset{f \text{ é de periodo } 1}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

($\Leftarrow$) Seja $[r, s)$ um intervalo arbitrário, onde $0 < r < s < 1$. Afirmamos que é suficiente mostrarmos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[r,s)}(\{x_n\}) = \int_0^1 \chi_{[r,s)}(x)\, dx. \tag{22}$$

De fato, se vale (22) então

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#([r,s);N;(x_n)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[r,s)}(\{x_n\}) \overset{(22)}{=} \\
&= \int_0^1 \chi_{[r,s)}(x)\, dx = s - r.
\end{aligned}
$$

Provemos então (22):

Dado $\varepsilon > 0$, como $0 < r < s < 1$, existem duas funções contínuas g_1 e g_2 de período um que satisfazem

$$g_1(x) \leq \chi_{[r,s)} \leq g_2(x) \; \forall \, x \in [0,1)$$

e

$$\int_0^1 g_2(x) - g_1(x) \; dx \leq \varepsilon.$$

Sobre g_1 e g_2 podemos aplicar a hipótese da recíproca do teorema e então:

$$\begin{aligned}
s - r - \varepsilon \leq \int_0^1 g_2(x)dx - \varepsilon \leq \int_0^1 g_1(x)dx &\overset{hipótese}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g_1(x_n) \\
= \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g_1(x_n) \leq \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[r,s)}(\{x_n\}) \\
\leq \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[r,s)}(\{x_n\}) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g_2(x_n) &\overset{hipótese}{=} \\
= \int_0^1 g_2(x)dx \leq \int_0^1 g_1(x)dx + \varepsilon \leq s - r + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como ε pode ser arbitrariamente pequeno nós concluímos a prova de (22).

■

Corolário 73 *Uma seqüência (x_n) de números reais é equidistribuída mod 1 se e somente se, para toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de período um, tem-se*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x) \; dx.$$

Prova. $(\Longrightarrow)$ Sejam h_1, $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = h_1(x) + ih_2(x)$. Por definição f contínua implica h_1 e h_2 contínuas e f periódica implica h_1 e h_2

periódicas. Assim, aplicando o teorema anterior para h_1 e h_2 temos

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h_1(x_n)+ih_2(x_n)\\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} h_1(x_n)+\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} ih_2(x_n)\\
&= \int_0^1 h_1(x)\,dx + i\int_0^1 h_2(x)\,dx\\
&= \int_0^1 f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Decorre direto do último teorema, lembrando que $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. ■

As funções do tipo $e^{2\pi ihx}$, onde $h\in\mathbb{Z}^*$, satisfazem as condições do último corolário, de modo que, se uma seqüência (x_n) é equidistribuída mod 1, então

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi ihx_n} = \int_0^1 e^{2\pi ihx}\,dx = 0.$$

Vamos trabalhar agora para mostrar que a recíproca também é verdadeira, resultado conhecido por Critério de Weyl.

Lema 74 *Se* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *é uma função contínua e de período 1 então, dado* $\varepsilon>0$, *existe uma combinação linear finita* $\psi(x)$ *de funções do tipo* $e^{2\pi ihx}$, *onde* $h\in\mathbb{Z}^*$, *tal que, para todo* $x\in[0,1]$,

$$|\,f(x)-\psi(x)|\le\varepsilon.$$

Prova. Seja $T=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}=\{e^{2\pi ix}:x\in\mathbb{R}\}$. Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, contínua e de período 1, definimos a função $T_f:T\to\mathbb{C}$ pela relação:

$$T_f(e^{2\pi ix})=f(x).$$

Como f é contínua e de período 1, temos que T_f é contínua.

Dado $\varepsilon > 0$, o Teorema de Aproximação de Weierstrass (ver [9], capítulo 10) garante que existe uma função polinomial complexa

$$p(z) = \sum_{h=-n}^{n} a_h z^h$$

tal que

$$|\, T_f(z) - p(z)| \leq \varepsilon$$

para todo $z \in T$. Assim, aplicando a relação $z = e^{2\pi i x}$ obtemos

$$\left|\, T_f(e^{2\pi i x}) - p(e^{2\pi i x})\right| \leq \varepsilon \Longrightarrow \left| f(x) - \sum_{h=-n}^{n} a_h e^{2\pi i h x}\right| \leq \varepsilon$$

para todo $x \in [0,1]$. ■

O próximo resultado é um dos mais importantes da teoria das seqüências equidistribuídas.

Teorema 75 (Critério de Weyl) *Uma seqüência de números reais* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *é equidistribuída módulo 1 se e somente se, para todo inteiro* $h \neq 0$,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0.$$

Prova. ($\Longrightarrow$) É conseqüência direta do Corolário 73.

($\Leftarrow$) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua e de período 1. Pelo lema anterior, fixado $\varepsilon > 0$, existe uma combinação linear finita $\psi(x)$ de funções do tipo $e^{2\pi i h x}$, tal que

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |\, f(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon.$$

Concluímos assim que

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 \psi(x)dx \right| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \psi(x_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \right| \leq \varepsilon.$$

Por outro lado, a hipótese $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0 = \int_0^1 e^{2\pi i h x}dx$ para todo $h \in \mathbb{Z}^*$, garante que $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n) = \int_0^1 \psi(x)dx$, pois ψ é combinação linear finita de funções do tipo $e^{2\pi i h x}$. Então, para N suficientemente grande,

$$\left| \int_0^1 \psi(x)dx - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n) \right| < \varepsilon.$$

Assim, para N suficientemente grande:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)dx - \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\right| &\leq \left|\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 \psi(x)dx\right| + \\ &+ \left|\int_0^1 \psi(x)dx - \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n)\right| + \\ &+ \left|\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{n=1}^{N} \psi(x_n) - \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\right| < 3\varepsilon,\end{aligned}$$

Ou seja

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \to \int_0^1 f(x)dx.$$

Aplicando o Corolário 73, completamos a prova. ■

Agora estamos em condições de apresentar o primeiro exemplo de seqüência equidistribuída mod 1.

Corolário 76 $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *é equidistribuída módulo 1 se e só se* α *é irracional.*

Prova. $(\Rightarrow)$ é claro.

$(\Leftarrow)$ Observamos inicialmente que, para α irracional e h inteiro não nulo, temos $e^{2\pi i h\alpha} - 1 \neq 0$; portanto:

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h n\alpha} = \sum_{n=1}^{N} \left(e^{2\pi i h\alpha}\right)^n \overset{\text{Soma PG}}{=} \frac{(e^{2\pi i h N\alpha} - 1)e^{2\pi i h\alpha}}{(e^{2\pi i h\alpha} - 1)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h n\alpha}\right| &= \frac{\left|e^{2\pi i h N\alpha} - 1\right| \left|e^{2\pi i h\alpha}\right|}{N\left|e^{2\pi i h\alpha} - 1\right|} = \frac{\left|e^{2\pi i h N\alpha} - 1\right|}{N\left|e^{2\pi i h\alpha} - 1\right|} \\ &\leq \frac{\left|e^{2\pi i h N\alpha}\right| + |1|}{N\left|e^{2\pi i h\alpha} - 1\right|} = \frac{2}{N\left|e^{2\pi i h\alpha} - 1\right|}.\end{aligned}$$

Como $\left|e^{2\pi i h\alpha}-1\right|$ não depende de N, concluímos que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ihn\alpha}=0,$$

para todo inteiro $h\neq 0$ e α irracional. Pelo Critério de Weyl,. $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é equidistribuída mod 1. $\blacksquare$

O próximo resultado pode ser provado diretamente a partir da definição de seqüência equidistribuída; no entanto, a prova que aqui apresentamos, decorrente do Critério de Weyl, é mais simples.

Corolário 77 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma seqüência de números reais equidistribuída módulo 1. Então, para todo inteiro $c\neq 0$, a seqüência $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é equidistribuída módulo 1.*

Prova. Pelo Critério de Weyl sabemos que, sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma seqüência de números reais equidistribuída módulo 1, então

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ihx_n}=0,$$

para todo inteiro $h\neq 0$. Em particular, esse resultado vale para todos inteiros ch', onde $h'\neq 0$ é inteiro. Mas daí:

$$0=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ich'x_n}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e^{2\pi ih'(cx_n)}$$

o que implica, pelo Critério de Weyl, que (cx_n) é equidistribuída mod 1. $\blacksquare$

O corolário acima não se generaliza para c racional. De fato se $(x_n)\subset[0,1)$ é equidistribuída mod 1, então $(\frac{x_n}{2})\subset[0,\frac{1}{2})$ não é equidistribuída mod 1.

No entanto para particulares classes de seqüências este resultado é válido. Por exemplo, se α é irracional, então $(n\alpha)$ é equidistribuída mod 1, e portanto $(cn\alpha)$ também o é, para todo racional c não nulo, já que α é irracional se e somente se $c\alpha$ é irracional. Da mesma forma, veremos futuramente que, se $(b^n\alpha)$ é equidistribuída, para b inteiro ≥ 2 e α real, então $(b^n c\alpha)$ também o é para todo racional c não nulo.

Weyl ainda caracterizou, em termos de medida, a equidistribuição de $(x_n\alpha)$ onde x_n é uma seqüência de inteiros positivos distintos. É claro que se α é racional, $(x_n\alpha)$ não é equidistribuída, pois está contida em um conjunto finito. Precisamente Weyl provou o seguinte

Teorema 78 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma seqüência de inteiros positivos distintos. Então o conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}_+ \mid \textit{a seqüência } (x_n x)_{n\in\mathbb{N}^*} \textit{ não é equidistribuída mod 1}\}$$

tem medida de Lebesgue zero.

Para a prova deste resultado, vamos precisar de um lema auxiliar:

Lema 79 *Seja (y_n) uma seqüência de números reais e h um inteiro não nulo. Então*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N^2} e^{2\pi i h y_n} = 0 \Longrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1.}^{N} e^{2\pi i h y_n} = 0.$$

Prova. As idéias são semelhantes às do Lema do Critério da Convergência. Dado $N \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $m^2 \leq N < (m+1)^2$;

daí $m^2 \leq N \leq m^2 + 2m$ e portanto

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h y_n} \right| &\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{m^2} e^{2\pi i h y_n} \right| + \frac{1}{N} \left| \sum_{n=m^2}^{N} e^{2\pi i h y_n} \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{m^2} e^{2\pi i h y_n} \right| + \frac{(m^2+2m) - m^2}{N} \\
&\leq \left| \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{m^2} e^{2\pi i h y_n} \right| + \frac{2m}{N} \\
&\leq \left| \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{m^2} e^{2\pi i h y_n} \right| + \frac{2}{\sqrt{N}},
\end{aligned}$$

o que mostra que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N^2} e^{2\pi i h y_n} = 0 \Longrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1.}^{N} e^{2\pi i h y_n} = 0.$$

■

Prova do Teorema:

Inicialmente, note que se k é um inteiro, então $\{x_n(k+x)\} = \{x_n x\}$. Isso implica que o conjunto

$$\{y \in [k, k+1) : (x_n y) \text{ não é equidistribuída mod } 1\},$$

é uma translação do conjunto

$$X' = \{x \in [0,1) : (x_n x) \text{ não é equidistribuída mod } 1\}.$$

Aplicando o Critério de Weyl temos que

$$\begin{aligned}
X' &= \left\{ x \in [0,1) : \exists\, h \in \mathbb{Z}^*, \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1.}^{N} e^{2\pi i h (x_n x)} \neq 0 \right\} \\
&= \bigcup_{h \in \mathbb{Z}^*} \left\{ x \in [0,1), \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1.}^{N} e^{2\pi i h (x_n x)} \neq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Como a união enumerável de conjuntos de medida zero é também um conjunto de medida zero, é suficiente provarmos que, para cada $h \in \mathbb{Z}^*$, o conjunto

$$X_h' = \left\{ x \in [0,1), \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1.}^{N} e^{2\pi i h (x_n x)} \neq 0 \right\},$$

possui medida de Lebesgue zero.

Fixado então $h \in \mathbb{Z}^*$, definimos, para cada $N \in \mathbb{N}^*$ e $0 \leq x < 1$,

$$S_h(N,x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1.}^{N} e^{2\pi i h (x_n x)}.$$

Então, como $\overline{e^{2\pi i h (x_n x)}} = e^{-2\pi i h (x_n x)}$, obtemos que

$$|S_h(N,x)|^2 = S_h(N,x)\overline{S_h(N,x)} = \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=1.}^{N} e^{2\pi i h (x_n - x_m) x}.$$

Agora, como

$$n \neq m \Longrightarrow x_n \neq x_m \Longrightarrow \int_0^1 e^{2\pi i h (x_n - x_m) x} dx = 0 \text{ e}$$
$$n = m \Longrightarrow x_n = x_m \Longrightarrow \int_0^1 e^{2\pi i h (x_n - x_m) x} dx = \int_0^1 dx = 1,$$

temos

$$\int_0^1 |S_h(N,x)|^2 \, dx = \frac{1}{N^2} \sum_{n,m=1.}^{N} \int_0^1 e^{2\pi i h (x_n - x_m) x} dx = \frac{1}{N},$$

o que implica

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \sum_{N=1}^{n} \left| S_h(N^2, x) \right|^2 dx = \sum_{N=1}^{\infty} \int_0^1 \left| S_h(N^2, x) \right|^2 dx = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty.$$

Repetindo estas igualdades para a integral de Lebesgue e usando o Lema de

Fatou[6], para a seqüência de funções $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ...$, dadas por

$$f_n(x) = \sum_{N=1}^{n} \left|S_h(N^2, x)\right|^2 = \sum_{N=1}^{n} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{n,m=1.}^{N} e^{2\pi i h(x_n - x_m)x}\right],$$

concluímos que

$$\int_{[0,1)} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_{[0,1)} \lim_{n\to\infty} \sum_{N=1}^{n} \left|S_h(N^2, x)\right|^2 dx < \infty.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{N=1}^{n} \left|S_h(N^2, x)\right|^2 < \infty,$$

exceto em um conjunto E de medida zero. Conseqüentemente

$$0 = \lim_{N\to\infty} \left|S_h(N^2, x)\right| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \left|\sum_{n=1.}^{N^2} e^{2\pi i h(x_n x)}\right|,$$

em $[0, 1]\backslash E$. Pelo lema anterior, pondo $(y_n) = (x_n x)$, concluímos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1.}^{N} e^{2\pi i h(x_n x)} = 0$$

em $[0, 1)\backslash E$ e, portanto X_h' possui medida de Lebesgue zero, o que conclui a prova.■

Encerramos esta seção com dois resultados que serão úteis futuramente.

Proposição 80 *Se $(x_n^1), (x_n^2), ..., (x_n^k)$ são k seqüências equidistribuídas módulo 1, então também é equidistribuída modulo 1 a seqüência*

$$(x_n) := \{x_1^1, ..., x_1^k, x_2^1, ..., x_2^k, ...\}.$$

[6]Seja $(f_n)_{n\in N}$, uma seqüência de funções Lebesgue-integráveis e suponha que $\liminf_{n\to\infty} \int f_n dm < \infty$. Então $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ é integrável e

$$\int f\, dm \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n dm$$

Prova. Inicialmente observamos que

$$\#([r,s);kN;(x_n)) = \sum_{j=1}^{k} \#([r,s);N;(x_n^j)),$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{kN}\#([r,s);kN;(x_n)) &= \frac{1}{k}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#([r,s);kN;(x_n)) \\
&= \frac{1}{k}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\#([r,s);N;(x_n^j)) \\
&= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#([r,s);N;(x_n^j)) = s-r.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 14, do Critério da Convergência, concluímos a prova. ■

A prova da próxima proposição decorre direto da definição de seqüência equidistribuída mod 1.

Proposição 81 *Se (x_n) é equidistribuída mod 1 e (y_n) é convergente, então $(x_n + y_n)$ é equidistribuída mod 1.*

4.4 Algumas aplicações no estudo dos Números Normais

Fixado b, na primeira seção deste capítulo já mencionamos as relações entre a distribuição dos dígitos da expansão de α na base b e a distribuição da seqüência $(\{b^n\alpha\})$ em $[0,1)$. Agora vamos provar que a seqüência $(\{b^n\alpha\})$ é equidistruída mod 1 se e somente se α é $b-$normal, que é um dos resultados mais conhecidos desta teoria.

Lema 82 *Fixado $b \geq 2$ inteiro, uma seqüência (x_n) de números reais é equidistribuída módulo 1 se e somente se, para quaisquer naturais r e k com*

$r < b^k$, *temos:*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{r}{b^k}, \frac{r+1}{b^k}\right); N; (x_n)\right) = \frac{1}{b^k}.$$

Prova. $(\Rightarrow)$ é trivial.

$(\Leftarrow)$ Denotaremos por $\mu(J)$ o comprimento de um intervalo $J = [u, v) \subset [0, 1)$, ou seja $\mu(J) = v - u$.

Se para quaisquer naturais r e k com $r < b^k$, temos que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{r}{b^k}, \frac{r+1}{b^k}\right); N; (x_n)\right) = \frac{1}{b^k},$$

então é claro que para quaisquer naturais r_1, r_2 e k satisfazendo $0 < r_1 < r_2 < b^k$ vale que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{r_1}{b^k}, \frac{r_2}{b^k}\right); N; (x_n)\right) = \frac{r_2 - r_1}{b^k} = \mu\left(\left[\frac{r_1}{b^k}, \frac{r_2}{b^k}\right)\right).$$

Seja $I \subset [0, 1)$ um intervalo de números reais. Dado $\varepsilon > 0$, existem inteiros r_1, r_2 e k com $0 < r_1 < r_2 < b^k$ tais que:

$$\left[\frac{r_1}{b^k}, \frac{r_2}{b^k}\right) \subset I \subset \left[\frac{r_1 - 1}{b^k}, \frac{r_2 + 1}{b^k}\right)$$

e

$$\mu(I) - \varepsilon < \mu\left(\left[\frac{r_1}{b^k}, \frac{r_2}{b^k}\right)\right) < \mu\left(\left[\frac{r_1 - 1}{b^k}, \frac{r_2 + 1}{b^k}\right)\right) < \mu(I) + \varepsilon.$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\mu(I) - \varepsilon < \mu\left(\left[\frac{r_1}{b^k}, \frac{r_2}{b^k}\right)\right) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{r_1}{b^k}, \frac{r_2}{b^k}\right); N; (x_n)\right) \\
&\leq \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(I; N; (x_n)\right) \leq \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(I; N; (x_n)\right) \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{r_1 - 1}{b^k}, \frac{r_2 + 1}{b^k}\right); N; (x_n)\right) \\
&= \mu\left(\left[\frac{r_1}{b^k}, \frac{r_2}{b^k}\right)\right) < \mu(I) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que completa a prova. ∎

Teorema 83 *Um número real α é $b-$normal se e somente se a seqüência $(b^n\alpha)_{n=0,1,2,...}$ é equidistribuída módulo 1.*

Prova. Aplicação direta do lema acima e do Corolário 59. ■

No final da seção 4.1 havíamos prometido uma outra prova de que quase todos os números reais são $b-$normais, o que apresentamos no próximo

Corolário 84 *Fixado $b \geq 2$ inteiro, o conjunto dos números reais que não são $b-$normais possui medida de Lebesgue zero.*

Prova. Decorre do teorema anterior e do Teorema 78. ■

Corolário 85 *O conjunto dos números que não são absolutamente normais possui medida de Lebesgue zero (quase todos os números reais são absolutamente normais).*

Prova. O conjunto dos números não absolutamente normais é dado pela união dos conjuntos dos números não normais nas bases $2, 3, 4, 5, ...,$ que pelo corolário anterior possuem medida zero. Como a união enumerável de conjuntos de medida zero é também um conjunto de medida zero, concluímos a prova. ■

Observação 86 *Este último resultado é devido a Borel [6].*

*Dizemos que α é **simplesmente normal** em base b se cada $b-$dígito ocorre em sua expansão com freqüência $\frac{1}{b}$.*

Segundo Borel, α é $b-$normal se e somente α é simplesmente normal em cada uma das bases $b, b^2, b^3, ...$(ver também a prova do Teorema 54). Decorre daí que, se para cada base b, quase todos os números são simplesmente normais, então quase todos os números são absolutamente normais.

Uma prova mais simples para o corolário 85 (e possivelmente a mais elementar) pode ser encontrada em [22].

Corolário 87 *Se α é $b-$normal e c é um inteiro não nulo, então $c\alpha$ é $b-$normal.*

Prova. Decorre do teorema anterior e do Corolário 77. ■

Na seção seguinte vamos mostrar que esse resultado também é válido supondo c racional não nulo.

4.5 O Critério de Normalidade e aplicações

Lema 88 *Seja $z : [0,1] \to [0,1]$ uma função não decrescente. Suponha que existe uma constante $C > 1$ tal que, para qualquer função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$,*

$$\int_0^1 f(x)dz(x) \leq C \int_0^1 f(x)dx.$$

Então z é contínua.

Prova. A prova é por contraposição. Suponhamos que z é descontínua em um ponto $p \in [0,1]$. Sejam

$$a = \lim_{x \to p^-} z(x) \text{ e } b = \lim_{x \to p^+} z(x).$$

Como z é não decrescente e descontínua em p, garantimos que $a < b$. Para cada $k > 4$, existe uma função contínua $f_k : [0,1] \to [0,k]$ tal que

$$\begin{cases} f_k(x) = k \text{ se } |x-p| < \frac{1}{k} \\ f_k(x) = 0 \text{ se } |x-p| > \frac{2}{k} \end{cases}.$$

Seja $C > 1$ uma constante qualquer. Daí, para k suficientemente grande

$$\int_0^1 f_k(x)dz(x) \geq k(b-a) > k(C\frac{4}{k}) \geq C \int_0^1 f_k(x)dx,$$

o que contraria a hipótese do Lema. ■

Observação 89 *Vimos na seção anterior (Corolário 73) que a propriedade de* (x_n) *ser equidistribuída mod 1 é equivalente à propriedade que, para toda função contínua de período um,*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)dx.$$

O próximo teorema afirma que, para seqüências do tipo $(b^n\alpha)$ *temos até um resultado mais forte, como vemos abaixo.*

Teorema 90 *Seja* α *um número real. Suponha que existe uma constante* $C > 1$ *tal que, para toda função contínua* $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\{b^n\alpha\}) \leq C \int_0^1 f(x)dx. \tag{23}$$

Então $(b^n\alpha)$ *é equidistriuída mod 1 e portanto* α *é* $b-$*normal.*

Prova. Supondo (23), afirmamos que a função identidade é a única f.d. da seqüência $(b^n\alpha)$. Daí, pelo Corolário 66 obtemos que $z(x) = x$ é a f.d.a da seqüência $(b^n\alpha)$, ou seja, $(b^n\alpha)$ é equidistribuída mod 1.

De fato, pelo Teorema 64 existe pelo menos uma f.d. para a seqüência $(b^n\alpha)_{n=0,1,2,...}$. Seja então $z(x)$ uma f.d. sobre $N_1, N_2, ...$, para a seqüência $(b^n\alpha)$. Queremos mostrar que $z(x) = x$.

Pelo Teorema 69,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=0}^{N_i-1} f(\{b^n\alpha\}) = \int_0^1 f(x)dz(x) \tag{24}$$

para toda função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, e portanto, da hipótese, obtemos que

$$\int_0^1 f(x)dz(x) \leq C \int_0^1 f(x)dx. \tag{25}$$

Como toda f.d. é não decrescente, aplicando o Lema anterior, concluímos que z é contínua. Então, pelo Teorema 68, temos que (24) é satisfeita também por funções que são contínuas, exceto em um conjunto finito de pontos e limitadas em [0,1].

Como a função $g : [0,1] \to [0,1]$, dada por

$$g(x) = f(\{bx\}),$$

é contínua exceto em um conjunto finito de pontos e limitada em [0,1], podemos aplicar (24) à função g e obter:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{N_i} \sum_{n=0}^{N_i-1} f(\{b^{n+1}\alpha\}) = \int_0^1 f(\{bx\})dz(x). \tag{26}$$

Seja

$$M = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|,$$

então

$$\left| \frac{1}{N_i} \sum_{n=0}^{N_i-1} f(\{b^{n+1}\alpha\}) - \frac{1}{N_i} \sum_{n=0}^{N_i-1} f(\{b^{n}\alpha\}) \right| = \frac{1}{N_i} \left| f(\{b^{N_i-1+1}\alpha\}) - f(\{\alpha\}) \right|$$
$$\leq \frac{2M}{N_i},$$

o que mostra que os dois limites em (24) e (26) são idênticos. Conseqüentemente

$$\int_0^1 f(\{bx\})dz(x) = \int_0^1 f(x)dz(x).$$

Repetindo estes argumentos, por indução obtemos, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^1 f(\{b^n x\})dz(x) = \int_0^1 f(x)dz(x). \tag{27}$$

Como f é contínua em $[0,1]$, de acordo com o Teorema 69 e o Corolário 84,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\{b^n t\}) = \int_0^1 f(x)d(x), \tag{28}$$

para todo $t \in [0,1] \backslash E$, onde $E \subset [0,1]$ possui medida de Lebesgue zero. Por (25),

$$\int_E dz(x) = \int_{[0,1]} \chi_E \, dz(x) \leq C \int_{[0,1]} \chi_E \, dx = C \int_E dx = 0, \tag{29}$$

onde $\int_E dz(x)$ é a integral de Lebesgue-Stieltjes e $\int_E dx$ é a integral de Lebesgue. Concluímos assim que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\{b^n t\}) \to \int_0^1 f(x) d(x)$$

para todo $t \in [0,1] \backslash E$, com

$$\int_E dz(x) = 0.$$

Como

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\{b^n x\}) \right| \leq M, \; x \in [0,1],$$

podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue[7] (TCD) para obter:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dz(x) &= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 (f(x)) \, dz(x) \overset{(27)}{=} \\
&= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^1 (f(\{b^n x\})) \, dz(x) \\
&= \lim_{N \to \infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\{b^n x\}) \right) dz(x) \overset{TCD}{=} \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x) \, dx \right) dz(t) \\
&= \left(\int_0^1 f(x) dx \right) (z(1) - z(0)) \\
&= \left(\int_0^1 f(x) dx \right).
\end{aligned}$$

[7] Dado $[0,1]$ com uma medida μ, seja (f_n) uma seqüência de funções integráveis convergindo em $q.t.p.$ para uma função mensurável f. Suponha existir uma função integrável g tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ $q.t.p.$ Então f é integrável e $\lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Como f é uma função contínua arbitrária, decorre que $z(x) = x$, para todo $x \in [0, 1]$. ■

Uma generalização deste resultado, pode ser encontrada em [16] pag. 41-47. Observamos que a prova acima pode ser vista como um resultado de Teoria Ergódica:

Dada uma transformação $T : [0, 1) \to [0, 1)$, se μ é absolutamente contínua com respeito a v, ambas probabilidades invariantes e v ergódica para T, então $\mu = \nu$.

O Teorema anterior utilizou este fato:

- A medida de Lebesgue dx é ergódica para a transformação $T : [0, 1) \to [0, 1)$ dada por $x \to \{bx\}$.

- Fixado $\alpha \in [0, 1)$, satisfazendo (23), vemos por (27) que toda função de distribuição z para $(\{b^n\alpha\})$ pode ser associada a uma probabilidade invariante dz para T.

- Ainda, de (23) fica garantido, como concluímos em (25), que dz é absolutamente contínua com respeito a dx.

Poderíamos chamar o resultado acima de "critério de normalidade", mas vamos guardar este nome para o próximo teorema, que é uma decorrência deste, usando que toda função contínua pode ser aproximada por funções escada.

Teorema 91 (Critério de Normalidade) -

Seja α um número real

i) Se existe uma constante $c > 1$ tal que a seqüência $(b^n\alpha)$ satisfaz

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#([u, v); N; (b^n\alpha))}{N} \leq c(v - u)$$

para todo $[u, v) \subset [0, 1)$, então α é b-normal.

ii) Se existe uma constante $c > 1$ tal que para todo bloco B_k

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#_b(B_k; N; \alpha)}{N} \leq c\frac{1}{b^k},$$

então α é $b-$normal.

iii) Se existem constantes $c_1 > 1,\ c_2 > 1$ e uma seqüência crescente de naturais (N_j) tais que

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{N_{j+1}}{N_j} \leq c_2$$

e

$$\overline{\lim_{N_j\to\infty}} \frac{\#_b(B_k; N_j; \alpha)}{N_j} \leq c_1\frac{1}{b^k}, \tag{30}$$

então α é $b-$normal.

Prova. i) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ uma função escada, digamos

$$f = \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_{[a_{i-1},a_i)},$$

com $0 = a_0 < ... < a_k = 1$ e $d_i \geq 0$ para todo i. Então

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{b^n\alpha\}) &= \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{k} d_i \chi_{[a_{i-1},a_i)}(\{b^n\alpha\})\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} d_i \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{[a_{i-1},a_i)}(\{b^n\alpha\}) \overset{hip.}{\leq} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} d_i c \int_0^1 \chi_{[a_{i-1},a_i)}(x)dx = c\int_0^1 f(x)dx.
\end{aligned}$$

Seja agora $g : [0,1] \to R_+$ uma função contínua. Dado $\varepsilon > 0$ existe f escada, como definida acima, tal que $g(x) \leq f(x)\ \forall\ x \in [0,1)$ e $\int_0^1 f(x) - g(x)dx < \frac{\varepsilon}{c}$. Daí

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(\{b^n\alpha\}) &\leq \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\{b^n\alpha\}) \\
&\leq c\int_0^1 f(x)dx \\
&\leq \left(c\int_0^1 g(x)dx\right) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g(\{b^n\alpha\})\leq c\int_0^1 g(x)dx,$$

e aplicando o Teorema 90 concluímos a prova de i).

ii) Se existe uma constante $c>1$ tal que, para todo bloco B_k,

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{\#_b(B_k;N;\alpha)}{N}\leq c\frac{1}{b^k},$$

então pelo Teorema 58 (ver também a prova de seu corolário) concluímos que, para quaisquer naturais k e x com $\left[\frac{x}{b^k},\frac{x+1}{b^k}\right)\subset[0,1)$,

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{x}{b^k},\frac{x+1}{b^k}\right);N;(b^n\alpha)\right)\leq c\frac{1}{b^k}.$$

Decorre que, para quaisquer naturais r_1,r_2 e k satisfazendo $0<r_1<r_2<b^k$, vale

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{r_1}{b^k},\frac{r_2}{b^k}\right);N;(b^n\alpha)\right)\leq c\frac{r_2-r_1}{b^k}.$$

Seja agora $[u,v)\subset[0,1)$ um intervalo arbitrário. Dado $\varepsilon>0$, existem inteiros r_1, r_2 e k com $0<r_1<r_2<b^k$ tais que:

$$[u,v)\subset\left[\frac{r_1}{b^k},\frac{r_2}{b^k}\right)$$

e

$$\frac{r_2-r_1}{b^k}\leq(1+\varepsilon)(v-u).$$

Daí

$$\begin{aligned}\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left([u,v);N;(b^n\alpha)\right)&\leq\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left(\left[\frac{r_1}{b^k},\frac{r_2}{b^k}\right);N;(b^n\alpha)\right)\\&\leq c\frac{r_2-r_1}{b^k}\leq c(1+\varepsilon)(v-u).\end{aligned}$$

Logo

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left([u,v);N;(b^n\alpha)\right)\leq c(v-u).$$

Aplicando i), concluímos a prova de ii).

iii) A hipótese

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{N_{j+1}}{N_j} \leq c_2,$$

garante que para j suficientemente grande,

$$N_{j+1} \leq c_2 N_j.$$

Dado N, seja $j = j(N)$ o índice tal que $N_j \leq N < N_{j+1}$. Então

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#_b(B_k; N; \alpha)}{N} &\leq \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\#_b(B_k; N_{j+1}; \alpha)}{N_j} \leq \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\#_b(B_k; N_{j+1}; \alpha)}{N_j} \frac{c_2 N_j}{N_{j+1}} \\ &= c_2 \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\#_b(B_k; N_{j+1}; \alpha)}{N_{j+1}} \overset{30}{\leq} c_1 c_2 \frac{1}{b^k}.\end{aligned}$$

Aplicando ii) com $c = c_1 c_2 > 1$ concluímos a prova. ■

Agora vamos apresentar algumas aplicações do Critério de Normalidade visto acima.

Teorema 92 *Dados s e r naturais não nulos e α um número real, temos que α é b^s-normal se e somente se α é b^r-normal.*

Prova. É suficiente mostrarmos que α é $b-$normal se e somente se α é b^k-normal, $k \in \mathbb{N}^*$.

Suponhamos ser α normal na base b. Então $(b^n\alpha)$ é equidistribuída mod 1. Daí, para qualquer intervalo $[u, v) \subset [0, 1)$ temos

$$\frac{1}{N} \# \left([u, v); N; (b^{kn}\alpha)\right) \leq k \frac{1}{kN} \# \left([u, v); kN; (b^n\alpha)\right).$$

Assim, tomando o limite em ambos os lados:

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \# \left([u, v); N; (b^{kn}\alpha)\right) &\leq k \lim_{N\to\infty} \frac{1}{kN} \# \left([u, v); kN; (b^n\alpha)\right) \\ &= k(v - u).\end{aligned}$$

Pelo Critério de Normalidade dado no teorema anterior, concluímos que α é normal na base b^k.

Agora, se α é b^k-normal então $(b^{kn}\alpha)$ é equidistribuída mod 1. Pelo Corolário 77, as seqüências $(b^{kn+j}\alpha)$, $j = 0, 1, ..., k-1$ são também equidistribuídas mod 1. Aplicando agora a Proposição 80, obtemos que $(b^n\alpha)$ é equidistribuída mod 1, ou equivaletemente, α é $b-$normal. ■

Corolário 93 *Se α é $b-$normal e s é racional, então $\alpha + s$ é $b-$normal.*

Prova. Suponhamos que s possui uma expansão $b-$nária de período de tamanho k. Então, na base b^k, s possui expansão de período de tamanho 1. Com isso, evidentemente, a seqüência $(b^{kn}s)$ é convergente. Pelo teorema anterior, $(b^{kn}\alpha)$ é também equidistribuída mod 1, e aplicando a Proposição 81 garantimos que $(b^{kn}(\alpha + s))$ é equidistribuída mod 1, ou seja, $\alpha + s$ é b^k-normal. Agora, o teorema anterior nos garante que $\alpha + s$ é $b-$normal. ■

Teorema 94 *Se α é $b-$normal e r é um racional não-nulo, então $r\alpha$ é $b-$normal.*

Prova. Pelo Corolário 87, é suficiente estudarmos o caso $r = \frac{1}{q}$, onde $q \in \mathbb{N}^*$.

Dado $[u, v) \subset [0, 1)$, se $\left\{\frac{b^s\alpha}{q}\right\} \in [u, v)$ então existe k inteiro tal que

$$k + u \leq \frac{b^s\alpha}{q} < k + v,$$

o que implica

$$(k + u)q \leq b^s\alpha < q(k + v),$$

ou equivalentemente

$$uq \leq b^s\alpha - kq < qv.$$

Portanto

$$\{b^s\alpha\} \in \{\{y\} : y \in [uq, vq)\} =: E.$$

Obtemos então

$$\#\left([u,v); N; \left(\frac{b^n\alpha}{q}\right)\right) \leq \#(E; N; (b^n\alpha)).$$

Suponhamos $(v-u) < \frac{1}{q}$ ou, equivalentemente $q(v-u) < 1$; garantimos assim que

$$E = \begin{cases} [\{uq\}, \{vq\}), & \text{se } \{uq\} < \{vq\} \\ [0, \{vq\}) \cup [\{uq\}, 1), & \text{se } \{uq\} \geq \{vq\} \end{cases}$$

e que $\mu(E) = q(v-u)$, onde μ é a medida de Lebesgue de E.

Daí, como por hipótese α é $b-$normal,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N}\#\left([u,v); N; \left(\frac{b^n\alpha}{q}\right)\right) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#(E; N; (b^n\alpha)) = \mu(E) = q(v-u).$$

Se $[u,v)$ é um intervalo arbitrário, podemos tomar $[u,v) = [u_1, u_2) \cup ... \cup [u_{k-1}, u_k)$ com $(u_j - u_{j-1}) < \frac{1}{q}$ $\forall\, j \in \{2, ..., k\}$, daí

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N}\#([u,v); N; (\frac{b^n\alpha}{q})) &\leq \sum_{j=1}^{k-1} \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N}\#\left([u_j, u_{j+1}); N; \left(\frac{b^n\alpha}{q}\right)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k-1} q(u_j - u_{j-1}) \\ &= q(v-u). \end{aligned}$$

Aplicando o Critério de Normalidade (Teorema 91), concluímos a prova. ■

Aplicando o Teorema acima e o Corolário 93, obtemos o seguinte

Corolário 95 *Sejam r, s racionais, com $r \neq 0$, e α um real $b-$normal, então $r\alpha + s$ é $b-$normal.*

Como última aplicação do Critério de Normalidade, baseados nas idéias descritas em [21], vamos generalizar um resultado de Champernowne que provou que o número

$$(.(0)(1)...(9)(00)...(99)(000)...(999)...)_{10},$$

obtido pelo encadeamento em ordem crescente de todos os blocos de tamanho 1, seguidos de todos os blocos de tamanho 2, etc., é normal na base 10.

Lema 96 *Sejam a_n e b_n duas seqüências de números reais que convergem ao infinito. Se $\frac{a_n}{b_n} \to c$ então*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{\sum_{n=1}^{N} b_n} = c.$$

Prova. Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$, temos

$$(1-\varepsilon)c < \frac{a_n}{b_n} < (1+\varepsilon)c,$$

ou seja,

$$(1-\varepsilon)cb_n < a_n < (1+\varepsilon)cb_n.$$

Portanto

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)c = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=n_0}^{N}(1-\varepsilon)cb_n}{\sum_{n=n_0}^{N} b_n} &\leq \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=n_0}^{N} a_n}{\sum_{n=n_0}^{N} b_n} \\ \leq \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=n_0}^{N} a_n}{\sum_{n=n_0}^{N} b_n} \leq \lim_{N\to\infty} &\frac{\sum_{n=n_0}^{N}(1+\varepsilon)cb_n}{\sum_{n=n_0}^{N} b_n} = (1+\varepsilon)c.\end{aligned}$$

Como a_n e b_n convergem ao infinito, temos que

$$\overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{\sum_{n=1}^{N} b_n} = \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=n_0}^{N} a_n}{\sum_{n=n_0}^{N} b_n} \text{ e } \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{\sum_{n=1}^{N} b_n} = \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=n_0}^{N} a_n}{\sum_{n=n_0}^{N} b_n},$$

decorrendo que

$$(1-\varepsilon)c \leq \underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{\sum_{n=1}^{N} b_n} \leq \overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{\sum_{n=1}^{N} b_n} \leq (1+\varepsilon)c.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ concluímos a prova. ■

Teorema 97 *Seja S_n a listagem* ***em qualquer ordem*** *de todos os blocos de tamanho n na base 10. Então a constante*

$$(.S_1S_2S_3S_4...)_{10}$$

é normal na base 10.

Prova. Seja k um natural e B_k um bloco qualquer de k dígitos. Seja N_j o número de dígitos utilizados para listar $S_1S_2...S_j$. Como S_n possui $n10^n$ dígitos temos que

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{N_{j+1}}{N_j} = 1 + \overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{(j+1)10^{j+1}}{N_j} \leq 1 + \overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{(j+1)10^{j+1}}{j10^j} = 11,$$

logo, pelo ítem iii) do Critério de Normalidade (Teorema 91), é suficiente mostrarmos que existe uma constante $c > 1$ tal que

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\#_{10}(B_k; N_j; \alpha)}{N_j} \leq c\frac{1}{10^k}.$$

Se $n \geq k$ então B_k ocorre no máximo

$$(n-k+1)10^{n-k} + k10^n$$

vezes em S_n, onde $k10^n$ é uma cota superior para o número de ocorrências de B_k nas 10^n junções de blocos de S_n. Decorre daí que

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\#_{10}(B_k; N_j; \alpha)}{N_j} &\leq \overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\sum_{n=k}^{j}(n-k+1)10^{n-k} + k10^n}{\sum_{n=1}^{j} n10^n} \\
&= \overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\sum_{n=k}^{j}(n-k+1)10^{n-k}}{\sum_{n=1}^{j} n10^n} \\
&= \overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\sum_{n=k}^{j}(n-k+1)10^{n-k}}{\sum_{n=k}^{j} n10^n} \overset{Lema}{=} \\
&= \frac{1}{10^k} < \frac{2}{10^k}.
\end{aligned}$$

■

5 Números $b-$determinados

Considere o seguinte número real:

$$\alpha = (.101001000100001...)_{10}.$$

Não é difícil convencer-se que se β é um número normal em base 10, então as expansões de β e de $\beta + \alpha$ são muito parecidas. Portanto é de se esperar que $\beta + \alpha$ seja também normal em base 10. E, de fato, isso é possível de ser mostrado seguindo as idéias de Champernowne.

O exemplo acima nos sugere que o Corolário 93 pode ser melhorado. Em [17], Rauzy caracterizou o conjunto

$$B_b = \{\alpha \in \mathbb{R} : \beta \text{ é } b - \text{normal } \Leftrightarrow \beta + \alpha \text{ é } b - \text{normal}\}.$$

Desconhecendo inicialmente este trabalho, estudamos independentemente a caracterização do conjunto B_b, obtendo um resultado mais fraco que o de Rauzy.

Neste capítulo, apresentando o que desenvolvemos, vamos introduzir o conceito de número $b-$determinado, estudar algumas de suas propriedades e provar que se α é $b-$determinado e β é $b-$normal então $\alpha + \beta$ é $b-$normal. Após isso vamos apresentar a definição de número $b-$determinístico dada por Rauzy, que é mais geral que a de número $b-$determinado e que caracteriza o conjunto B_b. Vamos também apresentar um exemplo de número b-determinístico que não é $b-$determinado, comprovando que o resultado que Rauzi obteve é mais completo que o nosso.

5.1 Definição de número $b-$determinado e primeiras propriedades

Definição 98 *Dados $k,\ s \in \mathbb{N}^*$ com $s \leq k$, dizemos que um bloco B_k* ***é gerado pelo bloco*** *$B_s = b_1...b_s$ (ou* ***que*** *B_s* ***gera*** *B_k) se*

$$B_k = \underbrace{b_1 b_2 ... b_s b_1 ... b_s ...}_{k\ d\acute{\imath}gitos}.$$

Mais precisamente, se $B_k = d_1 d_2 ... d_k$ e $B_s = b_1..b_s$ então B_k é gerado pelo bloco B_s se $d_i = b_j$ toda vez que $i \equiv j\ (mods)$.

Por exemplo: o bloco 356952356 é gerado pelo bloco 356952.

Definição 99 *Fixado $s \in \mathbb{N}^*$, dizemos que α é $b-$**determinado acima de*** **s** *se, para todo $k \geq s$ e para todo B_k que não é gerado por bloco algum B_s, temos*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\#_b(B_k; N; \alpha)}{N} = 0.$$

Todo número racional de período de tamanho s é $b-$determinado acima de s.

Convenção: Quando mencionarmos apenas que um real α é $b-$determinado estará implicito que existe algum s tal que α é $b-$determinado acima de s.

Observação 100 *Note que nossa definição não faz nenhuma restrição sobre os blocos de tamanho $\leq s$ e outros blocos gerados, de modo que suas freqüências de ocorrência podem ser zero, não existir, etc.*

O resultado que segue esclarece a nomeclatura adotada para esta classe de números.

Proposição 101 *Seja α um real $b-$determinado acima de s. Se B_s gera B_k, então:*

$$i)\ \overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\#_b(B_s;N;\alpha)}{N}=\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\#_b(B_k;N;\alpha)}{N}\quad e$$
$$ii)\ \underline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\#_b(B_s;N;\alpha)}{N}=\underline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\#_b(B_k;N;\alpha)}{N}.$$

Prova. Sejam $B_{s,1},...,B_{s,b^s}$ os blocos de tamanho s na base b. Cada um deles gera apenas um bloco de tamanho $k>s$. Digamos que os blocos $B_{k,1},...,B_{k,b^s}$ são os blocos gerados por $B_{s,1},...,B_{s,b^s}$, respectivamente. É suficiente estudarmos a relação entre $B_{s,1}$ e $B_{k,1}$. Vamos mostrar que para todo $\varepsilon>0$ existe n_0 tal que para todo $N>n_0$

$$\frac{\#_b(B_{s,1};N;\alpha)}{N}-\varepsilon\overset{(*)}{\leq}\frac{\#_b(B_{k,1};N;\alpha)}{N}\overset{(**)}{\leq}\frac{\#_b(B_{s,1};N;\alpha)}{N}+\varepsilon.$$

É óbvio que $(**)$ decorre da definição de $\#_b$. Mais geralmente é verdade que:

$$\frac{\#_b(B_{k,i};N;\alpha)}{N}\leq\frac{\#_b(B_{s,i};N;\alpha)}{N},\ i=1,2,...,b^s. \tag{31}$$

Para mostrarmos $(*)$ observamos inicialmente que

$$\sum_{i=1}^{b^s}\frac{\#_b(B_{s,i};N;\alpha)}{N}=\frac{N-s+1}{N}\Longrightarrow$$
$$\frac{\#_b(B_{s,1};N;\alpha)}{N}=\frac{N-s+1}{N}-\sum_{i=2}^{b^s}\frac{\#_b(B_{s,i};N;\alpha)}{N}. \tag{32}$$

Seja E o conjunto dos blocos de tamanho k que não são gerados por blocos de tamanho s. Fixado $\varepsilon>0$, sabemos, pela definição de número determinado, que para N suficientemente grande

$$\sum_{B_k\in E}\frac{\#_b(B_k;N;\alpha)}{N}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Com isso, para N suficientemente grande:

$$\sum_{i=1}^{b^s}\frac{\#_b(B_{k,i};N;\alpha)}{N}+\frac{\varepsilon}{2}>\sum_{B_k}\frac{\#_b(B_k;N;\alpha)}{N}=\frac{N-k+1}{N}.$$

Daí:

$$\frac{\#_b(B_{k,1};N;\alpha)}{N} > \frac{N-k+1}{N} - \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{i=2}^{b^s} \frac{\#_b(B_{k,i};N;\alpha)}{N} \overset{(31)}{>}$$

$$> \frac{N-k+1}{N} - \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{i=2}^{b^s} \frac{\#_b(B_{s,i};N;\alpha)}{N}.$$

Supondo também que $N > (k-s)\frac{2}{\varepsilon}$ (equivalentemente $\frac{\varepsilon}{2} > \frac{k-s}{N}$), obtemos

$$\frac{\#_b(B_{k,1};N;\alpha)}{N} > \frac{N-s+1}{N} - \frac{k-s}{N} - \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{i=2}^{b^s} \frac{\#_b(B_{s,i};N;\alpha)}{N}$$

$$> \frac{N-s+1}{N} - \varepsilon - \sum_{i=2}^{b^s} \frac{\#_b(B_{s,i};N;\alpha)}{N} \overset{(32)}{=}$$

$$= \frac{\#_b(B_{s,1};N;\alpha)}{N} - \varepsilon,$$

e a prova de $(*)$ está completa. ■

O teorema acima esclarece um pouco mais a nomeclatura adotada. Precisamente: se α é $b-$determinado acima de s, então não precisamos nos preocupar em calcular a freqüência com que os blocos de tamanho $> s$ ocorrem na expansão de α.

No entanto não estamos ainda em condições muito boas: enquanto o último resultado nos garante que se α é $b-$determinado a análise dos blocos de tamanho grande é desnecessária, para sabermos se α é $b-$determinado acima de s, precisamos (pela definição) analisar todos os blocos de qualquer tamanho maior que s. Mostramos agora que, na verdade, nossa definição pode ser simplificada.

Proposição 102 *Fixado $s \in \mathbb{N}^*$, α é $b-$determinado acima de s se e somente se para todo bloco $B_{(s+1)}$ de $s+1$ dígitos $b-$nários que não é gerado por bloco algum B_s, temos*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(B_{(s+1)};N;\alpha)}{N} = 0.$$

Prova. É claro que se α é $b-$determinado então a condição acima é satisfeita.

Para provarmos a recíproca, suponhamos que $k > s+1$ e que $B_k = b_1...b_k$ é um bloco de tamanho k que não é gerado por bloco algum B_s. Então existe $j \in \{s+1, ..., k\}$ tal que $b_j \neq b_{j-s}$. Em particular o bloco $b_{j-s}b_{j-s+1}...b_j$ de $s+1$ dígitos, não é gerado por bloco algum B_s. Então por hipótese

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(b_{j-s}b_{j-s+1}...b_j; N; \alpha)}{N} = 0,$$

e, pela definição de $\#_b$, temos

$$\#_b(b_{j-s}b_{j-s+1}...b_j; N; \alpha) \geq \#_b(B_k; N; \alpha),$$

o que implica

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(B_k; N; \alpha)}{N} = 0.$$

Isso completa a prova. ■

5.2 Seqüências freqüentemente atraídas

Definição 103 *Dizemos que uma seqüência de números reais* (a_n) *é* ***freqüentemente atraída*** *(SFA) se existe um conjunto finito* $\{\alpha_1; ...; \alpha_k\} \subset [0,1]$, *tal que para todo* $\varepsilon > 0$, *o conjunto* $E_\varepsilon = \cup_{i=1}^{k} \left((\alpha_i - \varepsilon, \alpha_i + \varepsilon) \cap [0,1)\right)$ *satisfaz*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#(E_\varepsilon; N; (a_n))}{N} = 1.$$

Abreviadamente escreveremos (a_n) *é* $SFA\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$, *quando este for o conjunto mais econômico possível.*

Nosso objetivo é mostrar que um real α é $b-$determinado se e somente se a seqüência $(b^n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ é freqüentemente atraída.

Definição 104 *Dizemos que um racional é $b-$**simples** quando o período de sua expansão em base b inicia no primeiro dígito. Por exemplo $(.\overline{3})_{10} = (.3333...)_{10}$ e $(.\overline{152})_{10} = (.152152152...)_{10}$ são $10-$simples, mas $(.10\overline{2})_{10} = (.102222...)_{10}$ não é $10-$simples.*

Lema 105 *Seja α um número real. Se $(b^n\alpha)$ é $SFA\{\alpha_1;...;\alpha_k\}$, então $\alpha_1,...,\alpha_k$ são racionais $b-$simples.*

Prova. Seja $\beta \in \{\alpha_1;...;\alpha_k\}$, digamos de expansão $\beta = (.a_1a_2a_3...)_b$. Suponhamos por absurdo que β não é um racional $b-$simples. Vamos mostrar que:

$i)$ para cada $t \in \mathbb{N}$, existe um número $\beta_t = (.d_t...d_1a_1a_2a_3...)_b$, para $d_1,...,d_t$ dígitos, que pertence também ao conjunto $\{\alpha_1;...;\alpha_k\}$.

$ii)$ β não simples implica que $\beta_t \neq \beta_{t'}$ para $t \neq t'$.

De $i)$ e $ii)$ obtemos números distintos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, ...$ todos pertencentes a $\{\alpha_1;...;\alpha_k\}$, o que é uma contradição, pois este conjunto é finito.

Para mostrarmos $i)$, fixamos $t \in \mathbb{N}$. Como por hipótese β não é $b-$simples, temos em particular que $\beta \in (0,1)$, pois zero e um são $b-$simples. Portanto, para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$(\beta - \frac{1}{b^m}, \beta + \frac{1}{b^m}) \subset (0,1).$$

Seja $T : [0,1) \to [0,1)$ dada por $T(x) = \{b^t x\}$. Como

$$T^{-1}\left((\beta - \frac{1}{b^m}, \beta + \frac{1}{b^m})\right) = \bigcup_{k=0}^{b^t-1}\left(\frac{\beta+k}{b^t} - \frac{1}{b^{m+t}}, \frac{\beta+k}{b^t} + \frac{1}{b^{m+t}}\right),$$

garantimos que se

$$\left\{b^{n+t}\alpha\right\} \in (\beta - \frac{1}{b^m}, \beta + \frac{1}{b^m})$$

então, como $\{b^n\alpha\} \in T^{-1}\left(\{b^{n+t}\alpha\}\right)$,

$$\{b^n\alpha\} \in \bigcup_{k=0}^{b^t-1}\left(\frac{\beta+k}{b^t} - \frac{1}{b^{m+t}}, \frac{\beta+k}{b^t} + \frac{1}{b^{m+t}}\right),$$

ou seja

$$\{b^n\alpha\} \in \bigcup_{\beta_t \in X_t} (\beta_t - \frac{1}{b^{m+t}}, \beta_t + \frac{1}{b^{m+t}}),$$

onde

$$X_t = \left\{ \frac{\beta}{b^t}, \frac{\beta+1}{b^t}, ..., \frac{\beta+b^t-1}{b^t} \right\},$$

é o conjunto dos números da forma $(.d_t...d_1a_1a_2a_3...)_b$, para $d_1, ..., d_t$ dígitos.

Concluímos assim que

$$\#((\beta - \frac{1}{b^m}, \beta + \frac{1}{b^m}); N+t; (b^n\alpha)) \leq \sum_{\beta_t \in X_t} \#((\beta_t - \frac{1}{b^{m+t}}, \beta_t + \frac{1}{b^{m+t}}); N; (b^n\alpha)).$$

Como X_t possui b^t elementos e por hipótese $\beta \in \{\alpha_1; ...; \alpha_k\}$, ou seja

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#((\beta - \frac{1}{b^m}, \beta + \frac{1}{b^m}); N; (b^n\alpha))}{N} > 0,$$

temos que, para pelo menos algum dos números $\beta_t \in X_t$,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#((\beta_t - \frac{1}{b^{m+t}}, \beta_t + \frac{1}{b^{m+t}}); N; (b^n\alpha))}{N} > 0.$$

Seja $X_{t,m}$ o conjunto dos $\beta_t \in X_t$ tal que a desigualdade acima é satisfeita. Se $m' > m$ temos que $X_{t,m'} \subseteq X_{t,m}$, pois

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#((\beta_t - \frac{1}{b^{m+t}}, \beta_t + \frac{1}{b^{m+t}}); N; (b^n\alpha)}{N} = 0 \Longrightarrow$$
$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#((\beta_t - \frac{1}{b^{m'+t}}, \beta_t + \frac{1}{b^{m'+t}}); N; (b^n\alpha)}{N} = 0.$$

Como $X_{t,m} \supseteq X_{t,m+1} \supseteq ...$ e cada $X_{t,n}$, $n = m, m+1, m+2, ...$ é não vazio e finito, obtemos algum $\beta_t \in \cap_{n=m}^{\infty} X_{t,n}$. Mas então para todo $\varepsilon > 0$ este β_t satisfaz

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#((\beta_t - \varepsilon, \beta_t + \varepsilon); N; (b^n\alpha)}{N} > 0,$$

o que implica $\beta_t \in \{\alpha_1; ...; \alpha_k\}$.

Para mostrarmos $ii)$ observamos que, se para $t > t'$ temos

$$(.d_t...d_1a_1a_2a_3...)_b = (.c_{t'}...c_1a_1a_2a_3...)_b,$$

então

$$d_t = c_{t'}\ ,\ d_{t-1} = c_{t'-1}, ...,\ a_1 = a_{t-t'+1},\ a_2 = a_{t-t'+2}, ...,$$

decorrendo que

$$a_k = a_{k+(t-t')}\ \forall k$$

logo

$$\beta = (.\overline{a_1...a_{t-t'}})_b,$$

seria $b-$simples. ■

O Teorema 58 que já aplicamos nos estudos de normalidade pode agora ser aplicado no estudo dos $b-$determinados:

Teorema 106 *$\alpha \in \mathbb{R}$ é $b-$determinado $\Leftrightarrow$ $(b^n\alpha)$ é SFA.*

Prova. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que α é $b-$determinado acima de s.

Seja X_s o conjunto de todos os blocos de s dígitos. Cada bloco $D_s = d_1...d_s \in X_s$ gera de forma natural um bloco D_k de tamanho k e um racional $(.\overline{D_s})_b = (.d_1...d_sd_1...d_s...)_b$ (um desses racionais será zero e outro será um). Seja Z_k o conjunto formado por estes blocos D_k e seja Q_s o conjunto formado por estes racionais $(.\overline{D_s})_b$. Vamos mostrar que $(b^n\alpha)$ é SFA e que seus pontos atratores estão em Q_s, que é finito.

Como α é $b-$determinado acima de s, sabemos que para todo $k \geq s$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{D_k \in Z_k} \frac{\#_b(D_k; N; \alpha)}{N} = 1. \tag{33}$$

Para cada $k > s$, vamos denotar por $B(D_s; k)$, o intervalo

$$\left[(.\overline{D_s})_b - \frac{1}{b^k}, (.\overline{D_s})_b + \frac{1}{b^k}\right) \cap [0, 1).$$

Como

$$\left[(.D_k)_b, (.D_k)_b + \frac{1}{b^k}\right) \subseteq B(D_s; k),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\#_b(D_k; N; \alpha) &\overset{(Teo.\ 58)}{\leq} \\
&\leq \#\left(\left[(.D_k)_b, (.D_k)_b + \frac{1}{b^k}\right); N; (b^n\alpha)\right) \\
&\leq \#(B(D_s; k); N; (b^n\alpha)). \qquad (34)
\end{aligned}$$

Além disso, para $k > s$, $E_k := \bigcup_{D_s \in X_s} B(D_s; k)$ é uma união disjunta, daí:

$$\begin{aligned}
1 &\geq \lim_{N\to\infty} \frac{\#(E_k; N; (b^n\alpha))}{N} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{D_s \in X_s} \frac{\#(B(D_s; k); N; (b^n\alpha))}{N} \overset{(34)}{\geq} \\
&\geq \lim_{N\to\infty} \sum_{D_k \in Z_k} \frac{\#_b(D_k; N; \alpha)}{N} \overset{(33)}{=} 1,
\end{aligned}$$

o que mostra ser $(b^n\alpha)$ SFA Y, onde $Y \subseteq Q_s$.

($\Leftarrow$) Suponhamos $(b^n\alpha)$ $SFA\{\alpha_1, ..., \alpha_t\}$. Pelo lema anterior $\alpha_1, ..., \alpha_t$ são racionais $b-$simples, digamos α_i de período T_i. Garantimos assim que $\alpha_1, ..., \alpha_t$ possuem período de tamanho $s = mmc\{T_1, ..., T_t\}$. Denotamos por $B_{s,i}$ o bloco que forma o período (de tamanho s) de α_i. Seja $k > s$ e B_k um bloco não gerado por um bloco de tamanho s. Vamos mostrar que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(B_k; N; \alpha)}{N} = 0,$$

o que nos garante que α é $b-$ determinado acima de s.

Para tal observamos que, dado $\varepsilon > 0$, por hipótese temos

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#(E_\varepsilon; N; (b^n\alpha))}{N} = 1,$$

onde

$$E_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{t} (\alpha_i - \varepsilon, \alpha_i + \varepsilon) \cap [0, 1).$$

Como B_k não é gerado por $B_{s,i},\ i \in \{1, ...,\ t\}$, temos

$$\left[(.B_k)_b, (.B_k)_b + \frac{1}{b^k}\right) \cap E_\varepsilon = \phi,\ se\ \varepsilon < \frac{1}{b^{k+s}}.$$

Isso implica

$$0 \leq \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#\left(\left[(.B_k)_b, (.B_k)_b + \frac{1}{b^k}\right); N; (b^n\alpha)\right)}{N} \leq 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{\#(E_\varepsilon; N; (b^n\alpha))}{N} = 0,$$

decorrendo, do Teorema 58, que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(B_k; N; \alpha)}{N} = 0.$$

■

Corolário 107 *Se α e β são $b-$determinados então $\alpha+\beta$ é $b-$determinado.*

Prova. É decorrência direta do Teorema 106 uma vez que a soma de seqüências SFA é também SFA. ■

Agora vamos mostrar que o conceito de seqüência freqüentemente atraída está relacionado com o de função de distribuição escada (combinação linear finita de funções características).

Lema 108 *Sejam $I \subset [0,1)$ um intervalo fechado em $[0,1)$ (isto é $I = [a,b]$ ou $I = [a,1)$), $\overline{I}$ seu fecho em $\mathbb{R}$ e (x_n) uma seqüência de números reais tal que*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#(I; N; (x_n))}{N} > 0.$$

Então existe $\alpha \in \overline{I}$ e uma seqüência crescente de números naturais (N_i) tal que, para todo $\delta > 0$,

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{\#((\alpha-\delta, \alpha+\delta) \cap [0,1); N_i; (x_n))}{N_i} > 0.$$

Prova. A hipótese

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#(I; N; (x_n))}{N} > 0,$$

nos garante que existe uma seqüência crescente de números naturais (N_i) tal que

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{\#(\overline{I}; N_i; (x_n))}{N_i} > 0.$$

Fazemos $\overline{I} = I_1^1 \cup I_2^1$, onde $\mu(I_1^1) = \mu(I_2^1) = \frac{1}{2}\mu(\overline{I})$ e $I_1^1,\ I_2^1$ são intervalos fechados em $\mathbb{R}$. Temos então que

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{\#(I_1^1; N_i; (x_n))}{N_i} > 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{N_i\to\infty} \frac{\#(I_2^1; N_i; (x_n))}{N_i} > 0.$$

Agora repetimos o argumento para aquele que satisfaz a desigualdade acima. Assim obtemos uma seqüência encaixada de intervalos fechados

$$\overline{I} \supset I_1 \supset I_2 \supset ...$$

com $\mu(I_n) \to 0$, satisfazendo

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{\#(I_n; N_i; (x_n))}{N_i} > 0 \ \forall n.$$

logo existe um único ponto $\alpha \in \overline{I}$ tal que $\alpha \in I_n\ \forall n$. Decorre daí que, dado $\delta > 0$ existe n_0 tal que $I_{n_0} \cap [0,1) \subset (\alpha-\delta, \alpha+\delta) \cap [0,1)$, e como

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{\#(I_{n_0}; N_i; (x_n))}{N_i} > 0,$$

obtemos

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{\#((\alpha-\delta, \alpha+\delta) \cap [0,1); N_i; (x_n))}{N_i} > 0.$$

■

Teorema 109 *Uma seqüência (x_n) é $SFA\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ se e somente se $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ é o menor conjunto que contém as descontinuidades de qualquer f. d. de (x_n) e toda f.d. de (x_n) é do tipo escada (combinação linear finita de funções características).*

Prova. Fixado o conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ e dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno definimos a união disjunta

$$E_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^{k} (\alpha_n - \varepsilon, \alpha_n + \varepsilon) \cap [0, 1). \tag{35}$$

($\Leftarrow$) Por hipótese $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ é o menor conjunto que contém as descontinuidades de qualquer f.d. de (x_n). Isto significa que, para cada α_j, existe uma seqüência crescente $(N_i^j)_{i\in\mathbb{N}}$ de naturais e uma f.d. z_j sobre (N_i^j) tal que α_j é ponto de descontinuidade de z_j. Decorre que para cada $j \in \{1, ..., k\}$ e $\delta > 0$

$$\lim_{N_i^j \to \infty} \frac{\#([\alpha_j - \delta, \alpha_j + \delta) \cap [0, 1); N_i^j; (x_n))}{N_i^j} = z_j(\alpha_j + \delta) - z_j(\alpha_j - \delta) > 0.$$

O limite acima garante que (x_n) é SFA$\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ se e somente se para todo $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#([0, 1) - E_\varepsilon; N; (x_n))}{N} = 0,$$

onde E_ε é dado em (35).

Suponhamos então por absurdo que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#([0, 1) - E_\varepsilon; N; (x_n))}{N} > 0.$$

Decorre que existe alguma componente conexa I de $[0, 1) - E_\varepsilon$ tal que

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#(I; N; (x_n))}{N} > 0.$$

Como E_ε é aberto em $[0, 1)$, concluímos que I é fechado em $[0, 1)$ e, pelo Lema anterior, existe α_{k+1} no fecho de I em $\mathbb{R}$ e uma seqüência N_i tal que para todo $\delta > 0$

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{\#((\alpha_{k+1} - \delta, \alpha_{k+1} + \delta) \cap [0, 1); N_i; (x_n))}{N_i} > 0.$$

Como α_{k+1} está no fecho de I em $\mathbb{R}$ concluímos que $\alpha_{k+1} \notin \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$. Com os mesmos argumentos da prova do Teorema 64, vemos que existe uma subseqüência $(N_i^{k+1})_{i\in\mathbb{N}}$ de (N_i) e uma função de distribuição z_{k+1} de (x_n) sobre (N_i^{k+1}). Em particular como $(N_i^{k+1})_{i\in\mathbb{N}}$ é subseqüência de (N_i) temos que para todo $\delta > 0$

$$\lim_{N_i^{k+1}\to\infty} \frac{\#((\alpha_{k+1} - \delta, \alpha_{k+1} + \delta) \cap [0,1); N_i^{k+1}; (x_n))}{N_i^{k+1}} > 0,$$

e como obrigatoriamente z_{k+1} é escada (por hipótese) concluímos que α_{k+1} é uma descontinuidade de z_{k+1}, o que é contradição com a hipótese pois $\alpha_{k+1} \notin \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$.

($\Rightarrow$) Suponha (x_n) $SFA\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$.

Afirmação 1: Se z é uma f.d. sobre N_i, então z é do tipo escada e os pontos de descontinuidade de z estão contidos em $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$.

Afirmação 2: $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ é o menor conjunto que contém as descontinuidades de qualquer f. d. de (x_n).

Para provar a Afirmação 1, observamos que aplicando a definição de SFA obtemos que

$$\lim_{N_i\to\infty} \frac{\#([0,1) - E_\varepsilon; N_i; (x_n))}{N_i} = 0,$$

onde E_ε é dado em (35). Assim, os únicos intervalos onde z é não constante são os da forma $(\alpha_n - \varepsilon, \alpha_n + \varepsilon) \cap [0,1)$. Como ε pode ser tomado arbitrariamente pequeno concluímos que z é do tipo escada e os pontos de descontinuidade de z estão contidos em $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$.

Para provar a Afirmação 2 é suficiente mostrar que existe uma f.d. z que é descontínua em α_k.

Como (x_n) é $SFA\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ temos que para todo $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#([\alpha_k - \varepsilon, \alpha_k + \varepsilon] \cap [0,1); N; (x_n))}{N} > 0.$$

Em particular, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (tal que a união disjunta em (35) seja satisfeita) e aplicando o lema anterior ao intervalo $[\alpha_k - \varepsilon, \alpha_k - \varepsilon]$ obtemos algum $\alpha \notin \{\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}\}$ e seqüência N_i tal que para todo $\delta > 0$

$$\lim_{N_i \to \infty} \frac{\#((\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap [0,1); N_i; (x_n))}{N_i} > 0.$$

Usando os mesmos argumentos da prova de ($\Leftarrow$) podemos construir uma f.d. z a partir de N_i que será escada (como já provamos na Afirmação 1) e descontínua em $\alpha \notin \{\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}\}$. Como provamos, na Afirmação 1, todas as funções escadas são descontínuas apenas nos pontos de $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$. concluímos assim que $\alpha = \alpha_k$. ■

5.3 Translações que preservam a normalidade

Nessa seção vamos provar que se somarmos um número $b-$determinado a um número $b-$normal obtemos como resultado um número $b-$normal. Após isso, vamos apresentar a caracterização de Rauzy (sem provar) para o conjunto

$$B_b = \{\alpha \in \mathbb{R} : \beta \text{ é } b - \text{normal } \Leftrightarrow \beta + \alpha \text{ é } b - \text{normal}\},$$

que contém os números $b-$determinados.

Lema 110 *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $(b^n\beta)$ é equidistribuída $mod 1$ e $(b^n\alpha)$ é $SFA\{\alpha_1; ...; \alpha_k\}$ então $(b^n(\alpha + \beta))$ é equidistribuída $mod 1$.*

Prova. Pelo Lema 105, sabemos que $\alpha_1, ..., \alpha_k$ são racionais $b-$simples. Seja d um inteiro positivo tal que $d\alpha_1, ..., d\alpha_k$ são inteiros. Se

$$b^n \alpha mod 1 \in E_\varepsilon := \cup_{i=1}^k ((\alpha_i - \varepsilon, \alpha_i + \varepsilon) \cap [0,1))$$

então

$$b^n d\alpha mod 1 \in I_\varepsilon := [0, d\varepsilon) \cup (1 - d\varepsilon, 1).$$

Assim, concluímos que $(b^n d\alpha)$ é $SFA\{0;1\}$ (ou $SFA\{0\}$ ou $SFA\{1\}$).

Por outro lado, pelo teorema 94, obtemos que $(b^n d\beta)$ é equidistribuída mod.1.

Note que, se mostrarmos que $(b^n d(\alpha+\beta))$ é equidistribuída mod 1, então aplicando novamente o teorema 94 obtemos $(b^n(\alpha+\beta))$ equidistribuída mod 1, completando a prova.

Mostremos então que $(b^n d(\alpha+\beta)) = (b^n d\alpha + b^n d\beta)$ é equidistribuída mod 1.

Dado $X \subset R$, vamos denotar por X_{mod1} o conjunto

$$X_{mod1} := \{\{x\} : x \in X\}$$

Dado um intervalo $[r,s) \subset [0,1)$,e $\varepsilon > 0$ tais que $s - r + 2\varepsilon \leq 1$ temos

$$b^n d(\alpha+\beta) \in [r,s) \text{ e } b^n d\alpha \in (-\varepsilon,\varepsilon)_{mod1} \Rightarrow b^n d\beta \in [r-\varepsilon, s+\varepsilon)_{mod1}$$

Daí

$$b^n d(\alpha+\beta) \in [r,s) \ \Rightarrow b^n d\beta \in [r-\varepsilon, s+\varepsilon)_{mod1} \text{ ou } b^n d\alpha \notin (-\varepsilon,\varepsilon)_{mod1}$$

Logo

$$\begin{aligned} & \#([r,s);N;(b^n d(\alpha+\beta))) \\ \leq \quad & \#([r-\varepsilon,s+\varepsilon)_{mod1};N;(b^n d\beta)) + (N - \#((-\varepsilon,\varepsilon)_{mod1};N;(b^n d\alpha)) \end{aligned}$$

daí, como $b^n d\beta$ é equidistribuída mod 1 e $b^n d\alpha$ é $SFA\{0,1\}$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \#([r,s);N;(b^n d(\alpha+\beta))) \leq s - r + 2\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e aplicando o critério de normalidade concluímos a prova. ■

Teorema 111 *Se α é $b-$determinado e β é $b-$normal então $\alpha+\beta$ é $b-$normal.*

Prova. Basta aplicar os teoremas 83 e 106 e o Lema acima. ∎

Observação 112 *Note que o Lema 110 não pode ser generalizado para seqüências quaisquer que sejam SFA e equidistribuídas mod 1, devido à utilização do Lema 105 e do Teorema 94, ambos não válidos em geral. Lembramos ainda que o Teorema 94 é uma aplicação do Critério de Normalidade dado no Teorema 91, portanto o Critério de Normalidade foi também fundamental para a prova do teorema que acabamos de apresentar.*

Agora vamos apresentar a caracterização de Rauzy (sem provar) para o conjunto

$$B_b = \{\alpha \in R : \beta \text{ é } b-\text{normal } \Leftrightarrow \beta + \alpha \text{ é } b-\text{normal}\},$$

que contém os números $b-$determinados.

Até o final desta seção ainda a base $b \geq 2$ está fixada.

Fixado um natural s, seja E_s o conjunto das funções

$$\phi : \{0, ..., b-1\}^s \to \{0, ..., b-1\}.$$

Dado $\beta = (.a_1a_2...)_b$, e $\phi \in E_s$, para cada $n > s$ podemos definir o valor

$$\begin{aligned} D_\phi(a_n, s) &:= \begin{cases} 1 \text{ se } \phi(a_{n-s}, ..., a_{n-1}) \neq a_n \\ 0 \text{ se } \phi(a_{n-s}, ..., a_{n-1}) = a_n \end{cases} \\ &= \min(1, |a_n - \phi(a_{n-s}, ..., a_{n-1}|), \end{aligned}$$

cujos valores um e zero indicam se a função ϕ errou ou acertou o $n-$ ésimo dígito de β a partir dos s dígitos anteriores.

Dessa forma

$$\sum_{s<n<N} \min(1, |a_n - \phi(a_{n-s}, ..., a_{n-1})|) = \sum_{s<n<N} D_\phi(a_n, s)$$

mede quantas vezes de $s+1$ até $N-1$ a função ϕ errou o valor de a_n a partir dos s dígitos anteriores. Então a expressão

$$\inf_{\phi \in E_s} \sum_{s<n<N} D_\phi(a_n, s)$$

representa o menor número de erros que obtemos se tentarmos determinar os valores de a_n conhecendo os s dígitos anteriores.

Com isso a expressão

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \inf_{\phi \in E_s} \sum_{s<n<N} \min(1, |a_n - \phi(a_{n-s}, ..., a_{n-1})|) \tag{36}$$

representa a freqüência de erros ao tentarmos determinar o valor de um dígito de β pelo conhecimento dos s dígitos anteriores.

Observamos que se β é $b-$ determinado acima de s então tomando a função $\phi \in E_s$ definida por $\phi(b_1, ..., b_s) = b_1$, concluímos que

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \inf_{\phi \in E_s} \sum_{s<n<N} \min(1, |a_n - \phi(a_{n-s}, ..., a_{n-1})|) = 0.$$

No entanto o número

$$\beta = (.(122)(122)(122)(122)...)_2$$

não é determinado acima de 2, mas a função $\phi \in E_2$ dada por $\phi(1,2) = 2, \phi(2,2) = 1, \phi(2,1) = 2$, garante que

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \inf_{\phi \in E_2} \sum_{n<N} \min(1, |a_n - \phi(a_{n-2}, a_{n-1})|) = 0.$$

O valor dado na expressão (36) pertence sempre a $[0,1]$ e é decrescente em s, pois temos maior chance de acertarmos o valor de um dado dígito de um número se conhecemos seus $s+1$ dígitos anteriores do que conhecendo apenas seus s dígitos anteriores. Logo o valor

$$\lim_{s\to\infty} \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \inf_{\phi \in E_s} \sum_{n<N} \min(1, |a_n - \phi(a_{n-s}, ..., a_{n-1})|)$$

está sempre bem definido.

Definição 113 (Rauzy) *Dizemos que um número real $\beta = (.a_1a_2a_3...)_b$ é $b-$**determinístico** se*

$$\lim_{s\to\infty} \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \inf_{\phi\in E_s} \sum_{n<N} \min(1, |a_n - \phi(a_{n-s}, ..., a_{n-1})|) = 0.$$

Essa foi a caracterização que Rauzy deu para o conjunto

$$B_b = \{\alpha \in R : \beta \text{ é } b-\text{normal } \Leftrightarrow \beta + \alpha \text{ é } b-\text{normal}\}.$$

Mais precisamente Rauzy provou em [17] o seguinte

Teorema 114 *B_b é o conjunto dos números $b-$determinísticos.*

5.4 Um exemplo de número determinístico que não é determinado

Nosso objetivo aqui é apresentar um exemplo de número determinístico que não é determinado.

Vamos fixar nesta seção a base $b = 2$.

Notação 115 - *Dado um bloco $b_1...b_k$, denotamos por $(b_1...b_k)_s$ a repetição do bloco $b_1...b_k$ s vezes.*

- Dado um natural n, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, denotamos por n_j o número natural

$$n_j := \frac{n!}{j} 2^{n-j}.$$

- Dado um natural n denotamos por T_n o bloco

$$(0)_{n_1}(01)_{n_2}(001)_{n_3}...(00...1)_{n_n}.$$

- Por simplicidade de notação sempre que escrevermos $(00...1)_{n_j}$ estamos nos referindo ao bloco $(\underbrace{0....0}_{j-1 \text{ zeros}}\ 1)_{n_j}$ se $j > 1$ e ao bloco $(0)_{n_1}$ se $j = 1$.

Vamos provar que $(.T_1T_2T_3...)_2$ é o número desejado.

Lema 116 *Fixado um natural n e dado $j \in \{1, ..., n\}$ vale que:*

i) usamos $n!2^{n-j}$ dígitos para escrever $(0....01)_{n_j}$

ii) o número de dígitos de $(0...01)_{n_j}$ é o dobro do número de dígitos de $(0....01)_{n_{j+1}}$.

iii) T_n possui $n!(2^n - 1)$ dígitos.

Prova. $i)$ Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ temos que o número de dígitos de $(0...01)_{n_j}$ é dado por $jn_j = j\frac{n!}{j}2^{n-j} = n!2^{n-j}$.

$ii)$ e $iii)$ são decorrência direta de $i)$. ■

Lema 117 *Sejam $\alpha = (.T_1T_2T_3...)_2$ e $B_k = (\underbrace{0...01}_{k \text{ dígitos}})$. Então*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \#_2(B_k; N; \alpha) \geq \frac{1}{k2^k}.$$

Prova. Podemos considerar $\alpha' = (.T_kT_{k+1}T_{k+2}...)_2$, pois as freqüências não mudam se desconsiderarmos uma parte finita da expansão de α.

Pelo Lema anterior, quando escrevemos T_n utilizamos $n!(2^n - 1)$ dígitos. Ao mesmo tempo, se $n \geq k$, B_k ocorre em T_n pelo menos $n_k = \frac{n!}{k}2^{n-k}$ vezes. Logo, tomando $N_n = \sum_{i=k}^{n} i!\,(2^i - 1)$ obtemos que

$$\frac{1}{N_n}\#_2(B_k; N_n; \alpha') \geq \frac{1}{\sum_{i=k}^{n} i!\,(2^i - 1)} \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{k}2^{i-k} \geq \frac{1}{\sum_{i=k}^{n} i!2^i} \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{k}2^{i-k}$$
$$= \frac{1}{k2^k} \frac{1}{\sum_{i=k}^{n} i!2^i} \sum_{i=k}^{n} i!2^i = \frac{1}{k2^k}.$$

■

Teorema 118 *O número $\alpha = (.T_1T_2T_3...)_2$ não é $2-$determinado.*

Prova. Supondo α 2-determinado acima de s, a freqüência do bloco $(\underbrace{0...01}_{s+1})$ teria de ser zero, pois este bloco não é gerado por bloco algum de tamanho s, o que contraria o Lema acima. ■

Nosso objetivo agora é provar que este número é 2-determinístico.

Lema 119 *O número* $\alpha = (.T_1T_2...)_2 = (.a_1a_2...)_2$ *satisfaz*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\inf_{\phi\in E_1}\sum_{n<N}\min(1,|a_n-\phi(a_{n-1})|)\leq\frac{1}{2}.$$

Prova. Considere qualquer função $\phi_0 : \{0,1\} \to \{0,1\}$ que satisfaça $\phi_0(0) = 0$. Seja a_n um dígito de α, suponhamos que a_n está em $T_m = (0)_{m_1}(01)_{m_2}...(0...1)_{m_m}$. Temos então que se a_n está em $(0)_{m_1}$(exceto no primeiro dígito) então $a_n = 0$ e $a_{n-1} = 0$.

Decorre daí que se a_n está em $(0)_{m_1}$(exceto no primeiro dígito) então $\min(1,|a_n-\phi_0(a_{n-1})|) = \min(1,0) = 0$. Como um dígito é desprezível em termos de freqüência vamos considerar que:

"se a_n está em $(0)_{m_1}$ então $\min(1,|a_n-\phi_0(a_{n-1})|) = 0$".

Usando este fato, e também que em cada T_m iniciamos escrevendo $(0)_{m_1}$ e que

$$\frac{\text{número de dígitos de } (0)_{m_1}}{\text{número de dígitos de } T_m} = \frac{m!2^{m-1}}{m!(2^m-1)} \geq \frac{m!2^{m-1}}{m!2^m} = \frac{1}{2},$$

obtemos que

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\inf_{\phi\in E_1}\sum_{n<N}\min(1,|a_n-\phi(a_{n-1})|)$$
$$\leq\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{n<N}\min(1,|a_n-\phi_0(a_{n-1})|)\leq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

■

Lema 120 *O número* $\alpha = (.T_1T_2...)_2 = (.a_1a_2...)_2$ *satisfaz*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\inf_{\phi\in E_2}\sum_{n<N}\min(1,|a_n-\phi(a_{n-2},a_{n-1})|)\leq\frac{1}{4}.$$

Prova. A prova segue o mesmo argumento da anterior. Consideramos agora qualquer função $\phi_0 : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ que satisfaça $\phi_0(0,0) = 0$, $\phi_0(0,1) = 0$, $\phi_0(1,0) = 1$. Análogo ao que escrevemos antes, dado a_n em T_m se a_n está em $(0)_{m_1}$ (exceto nos dois primeiros dígitos) ou ainda se a_n está em $(01)_{m_2}$ (exceto nos dois primeiros dígitos) então

$$\min(1, |a_n - \phi_0(a_{n-2}, a_{n-1})|) = 0.$$

Com isso escrevemos

"se a_n está em $(0)_{m_1}$ ou $(01)_{m_2}$ então $\min(1, |a_n - \phi_0(a_{n-2}, a_{n-1})|) = 0$"

Usando este fato, e também que em cada T_m iniciamos escrevendo $(0)_{m_1}(01)_{m_2}$ e que

$$\frac{\text{número de dígitos de } (0)_{m_1}(01)_{m_2}}{\text{número de dígitos de } T_m} = \frac{m!2^{m-1} + m!2^{m-2}}{m!(2^m - 1)} \geq \frac{3}{4},$$

obtemos que

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \inf_{\phi \in E_2} \sum_{n<N} \min(1, |a_n - \phi(a_{n-2}, a_{n-1})|) \\ &\leq \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n<N} \min(1, |a_n - \phi_0(a_{n-2}, a_{n-1})|) \leq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

■

Antes de generalizar o resultado acima, precisamos observar que o argumento de construção de $\phi \in E_3$ para $(0)_{m_1}(01)_{m_2}(001)_{m_3}$ não é possível. Se desejamos que ϕ acerte o valor dos dígitos de $(0)_{m_1}(01)_{m_2}(001)_{m_3}$ é natural, olhando $(0)_{m_1}$, definir

$$\phi(0,0,0) = 0.$$

Da mesma forma, olhando $(01)_{m_2}$, definimos

$$\phi(0,1,0) = 1 \text{ e } \phi(1,0,1) = 0.$$

Olhando agora $(001)_{m_3}$, definimos

$$\phi(0,0,1) = 0, \ \phi(0,1,0) = 0, \ \text{e } \phi(1,0,0) = 1.$$

Assim ϕ não está bem definida em $(0,1,0)$.

Para resolver este problema, quando queremos definir uma função ϕ que acerte os valores dos dígitos de $(0)_{m_1}(01)_{m_2}...(0...1)_{m_s}$, tomamos $\phi \in E_{2s}$. Assim, se um bloco $b_1...b_{2s}$ está contido em algum dos blocos $(0)_{m_1}$, $(01)_{m_2}$, ..., $(0...1)_{m_s}$ então $b_1...b_{2s} = 0...0$ ou $b_1...b_{2s}$ contém pelo menos duas vezes o dígito 1. A distância entre as ocorrências do dígito 1 indicam em qual bloco, $(0)_{m_1}$, $(01)_{m_2}, ...$ ou $(0...1)_{m_s}$, aparece $b_1...b_{2s}$.

Teorema 121 *Seja $\alpha = (.T_1T_2...)_2 = (.a_1a_2...)_2$. Então para cada s fixo*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \inf_{\phi \in E_{2s}} \sum_{n<N} \min(1, |a_n - \phi(a_{n-2s}, ..., a_{n-1})|) \leq \frac{1}{2^s}.$$

Em particular, α é $2-$determinístico.

Prova. Fixado s tomamos qualquer função $\phi_0 : \{0,1\}^{2s} \to \{0,1\}$ que satisfaça $\phi_0(b_1, ..., b_{2s}) = d$ tal que $b_1...b_{2s}d$ é gerado pelo bloco de menor tamanho que gera $b_1...b_{2s}$ (convencionamos que $b_1...b_{2s}$ gera $b_1...b_{2s}$).

Dado a_n em T_m se a_n está em $(0)_{m_1}$, $(01)_{m_2}, ..., (0...1)_{m_s}$ (exceto nos $2s$ primeiros dígitos de cada um destes blocos) então

$$\min(1, |a_n - \phi_0(a_{n-2s}, ..., a_{n-2}, a_{n-1})|) = 0.$$

Então, como para cada m iniciamos escrevendo T_m com $(0)_{m_1}(01)_{m_2}...(0...1)_{m_s}$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\text{n}^o \text{ de dígitos de } (0)_{m_1}(01)_{m_2}...(0...1)_{m_s}}{\text{n}^o \text{ de dígitos de } T_m} &= \frac{m!2^{m-1} + m!2^{m-2} + ... + m!2^{m-s}}{m!(2^m - 1)} \\
&\geq \frac{m!2^{m-1} + m!2^{m-2} + ... + m!2^{m-s}}{m!2^m} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^s} = \frac{2^s - 1}{2^s},
\end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\inf_{\phi\in E_{2s}}\sum_{n<N}\min(1,|a_n-\phi(a_{n-2s},...,a_{n-2},a_{n-1})|)\\&\leq\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{n<N}\min(1,|a_n-\phi_0(a_{n-2s},...,a_{n-2},a_{n-1})|)\leq 1-\frac{2^s-1}{2^s}=\frac{1}{2^s}.\end{aligned}$$

Em particular

$$\lim_{s\to\infty}\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{n<N}\min(1,|a_n-\phi_0(a_{n-2s},...,a_{n-2},a_{n-1})|)=0,$$

portanto α é 2-determinístico. ■

6 Comentários finais

1 - Davenport e Erdös em [10] mostraram que se $p(x)$ é um polinômio que leva naturais em naturais então o número $(.p(1)p(2)...)_{10}$ (onde $p(i)$ está escrito em base 10) é $10-$normal. Na introdução de [20] há um comentário de que Mahler com a mesma hipótese mostrou que $(.p(1)p(2)...)_{10}$ é transcendente.

2 - Bailey e Crandall, conjecturaram em [2] que se α é algébrico e irracional então α é absolutamente normal. É claro que mostrar que esta conjectura é verdadeira é um trabalho extremamente difícil: não sabemos ainda se existe alguma base onde $\sqrt{2}$ seja normal.

Estes autores também construíram alguns exemplos de números normais e apresentaram avanços no estudo da normalidade de algumas constantes clássicas como π e $\ln 2$, conectando os estudos de normalidade com o conceito de pseudo-random number generator (ver [3] e [2]) .

Definição 122 *Um **PRNG** (pseudo-random number generator) é uma iteração*

$$x_n = (bx_{n-1} + r_n) mod 1, \tag{37}$$

onde x_0 é um número real, $b \geq 2$ é um inteiro e (r_n) é uma seqüência de números reais.

Nos comentários que seguem estamos assumindo que $x_0 = 0$.

A relação entre números normais e PRNGs é dada no seguinte

Teorema 123 *Seja $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais convergente. Então $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{b^n}$ é $b-$normal se e somente se a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada em (37) é equidistribuída módulo 1.*

Bailey e Crandall conjecturam a $b-$normalidade de todo irracional que pode ser escrito na forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} \frac{p(n)}{q(n)}$, onde p e q são polinômios satisfazendo $grau(q) > grau(p) \geq 0$, e $q(\mathbb{N}) \neq 0$. Dois desses são $\ln 2$ e π nas bases 2 e 16, respectivamente. De fato:

- Partindo da Série de Taylor, aplicada à função $\ln x$, obtemos

$$\ln(x) = \ln(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x - x_0)^n}{n(x_0)^n},$$

e tomando $x = 1$ e $x_0 = 2$ obtemos

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{n}.$$

- Bailey e colegas, em [1], mostraram que

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

3 - Em [19] há um bom estudo sobre números normais em uma base b e não normais em outra base c. Precisamente, Schmidt provou o seguinte

Teorema 124 *Se não existem naturais m e n tais que $b^m = c^n$ então o conjunto dos números α normais na base b que não são simplesmente normais na base c possui a potência do contínuo.*

4 - O conceito de normalidade admite generalizações:

- Dada uma seqüência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ podemos dizer que $X \subset R$ *é o conjunto normal com respeito a* (x_n) quando $(x_n x)$ é equidistribuída mod 1 se e somente se $x \in X$. Da mesma forma dizemos que X é um conjunto normal quando existe alguma seqüência (x_n) tal que X é normal com respeito a (x_n). Em [13] - pag. 76 - há comentários e referências sobre este assunto, em particular que $\mathbb{Q} \backslash \{0\}$ e o conjunto dos números transcendentes são conhecidos exemplos de conjuntos normais.

Se β é um real maior que um, existem dois conceitos de normalidade usuais. O primeiro consiste em estudar o conjunto normal com respeito a seqüência (β^n), ou seja entender o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (\beta^n x) \textit{ é equidistribuida mod } 1\}.$$

O segundo conceito de normalidade é dado pela Teoria Ergódica:

Dado $\beta > 1$, podemos considerar a transformação $T_\beta : [0,1) \to [0,1)$ dada por $T_\beta(x) = \{\beta x\}$. Fixado $x \in [0,1)$, definimos a seqüência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $a_i = \lfloor \beta T^{i-1}(x) \rfloor$. Em [18], Renyi provou que

$$x = \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \frac{a_3}{\beta^3} + \dots ,$$

chamada *Renyi $\beta-$expansão de x.*

Os elementos a_i pertencem ao conjunto $\{0, 1, ..., \lceil \beta \rceil - 1\}$, mas dado um bloco $b_1...b_k$ de elementos deste conjunto, não é garantida a existência de algum número $x \in [0,1)$, cuja Renyi $\beta-$expansão contenha este bloco. Caso exista, dizemos que o bloco $b_1...b_k$ é dito *admissível.*

Renyi provou também o seguinte

Teorema 125 *Para cada real $\beta > 1$, existe uma medida μ, equivalente à medida de Lebesgue, ergódica para T_β.*

Em particular, dado um bloco admissível $b_1...b_k$, o intervalo

$$C(b_1, ..., b_k) = \{x \in [0,1) : \text{ a } \beta-\text{expansão de } x \text{ inicia com } b_1...b_k\},$$

é visitado por $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ com freqüência $\mu(C(b_1, ..., b_k))$, para $\mu-$quase todos os pontos x de $[0,1)$. Isso define um novo conceito de normalidade:

Definição 126 *$\alpha \in [0,1)$ é dito $\beta-$normal se em sua $\beta-$expansão todo bloco admissível $b_1...b_k$ ocorre com freqüência igual a $\mu(C(b_1, ..., b_k)$.*

Shunji e Shiokawa, em [21], usando uma versão do Critério de normalidade para $\beta-$expansões (ver [16]), generalizaram uma das construções de Champernowne, provando que a listagem de todos os blocos admissíveis em base β gera um número[8] $\beta-$normal.

5 - O conjunto dos números não normais é pequeno, no sentido de ter medida de Lebesgue zero, e grande, no sentido de ser não enumerável. Esse fato deu origem a estudos de caracterizações deste conjunto, usando dimensão de Hausdorff. Abaixo citamos os Teoremas de Besicovitch e Eggleston, cujas provas podem ser encontradas em [4] e [11], respectivamente:

Teorema 127 (Besicovitch) *Fixado $p \in [0, \frac{1}{2})$, o conjunto $X_p \subset [0,1]$ formado pelos reais x tais que*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#_2(0;N;x)}{N} \leq p < \frac{1}{2},$$

possui dimensão α dada pela equação

$$2^\alpha = \frac{1}{p^p(1-p)^{(1-p)}}.$$

Teorema 128 (Eggleston) *O conjunto $X \subset [0,1]$ formado pelos reais x tais que*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#_b(d;N;x)}{N} = p_d,\ d = 0,1,...,b-1$$

onde $0 \leq p_d \leq 1$ e $\sum_{d=0}^{b-1} p_d = 1$, possui dimensão fracionária α dado pela equação

$$b^{-\alpha} = \prod_{d=1}^{b-1} (p_d)^{(p_d)}.$$

[8] Listar os blocos admissíveis pode não gerar uma Renyi $\beta-$expansão, pois a concatenação de dois blocos admissíveis pode não ser um bloco admissível. No entanto, o cálculo de freqüências pode ser feito sem problemas.

Referências

[1] Bailey, D. - Borwein, P. - Plou, S. "*On the rapid computation of various polylogarithmic constants*", Math. Comp. 66:218, 903-913, 1997. (disponível em http://crd.lbl.gov/˜dhbailey/dhbpapers/index.html)

[2] Bailey, D. H. - Crandall, R. E. "*On the Random Character of Fundamental Constant Expansions.*" Exper. Math. 10, 175-190, 2001. (disponível em http://crd.lbl.gov/˜dhbailey/dhbpapers/index.html)

[3] Bailey, D. H. - Crandall, R. E. *"Random Generators and Normal Numbers."* To appear in Exper. Math. Preprint dated Feb. 22, 2003. (disponível em http://crd.lbl.gov/˜dhbailey/dhbpapers/index.html)

[4] Besicovitch, A. S. *"On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system"*. Math. Ann. 110, 321-330, 1934.

[5] Besicovitch, A. S. "*The asymptotic distribution of the numerals in the decimal representation of the squares of the natural numbers*". Math. Z. 39, 146-156 (1935).

[6] Borel, E. "*Les probabilités dénombrables et leurs aplications arithmétiques"*. Rend. Circ. Mat. Palermo 26, 247-271, 1909.

[7] Champernowne, D. G. *"The Construction of Decimals Normal in the Scale of Ten."* J. London Math. Soc. 8, 254-260, 1933.

[8] Copeland, A. H. - Erdös, P. *"Note on Normal Numbers."* Bull. Amer. Math. Soc. 52, 857-860, 1946.

[9] Conway, John B. *Functions of one complex variable I.* New york: Springer, 1978.

[10] Davenport - Erdös. *"Note on normal decimals"*. Canad. J. Math. 4, 58-63, 1952

[11] Eggleston, H. G. *"The fractional dimension of a set defined by decimal properties"*. Quart. j. math. oxford. 20, 31-36, 1949.

[12] Haaser, N. - Sullivan J. *Real Analysis*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1971.

[13] Kuipers, L. - Niederreiter, H. *Uniform Distribution of Sequences*. New York: Wiley, 1974.

[14] Mengue, J. *"A normalidade da Constante de Champernowne"*. Anais das Jornadas de Iniciação Científica do IMPA, 18-42, 2004.

[15] Mengue, J. - Ripoll, C. "*A normalidade da Constante de Champernowne b-nária"*. RMU. 38/39, 79-92, 2005

[16] Postnikov, A. G. "*Ergodic problems in the theory of congruences and of diophantine approximations*" (Russo), Trudy Mat. Inst. Steklov. 82 (1966); Engl. trad., Proc. Steklov Inst. Math. 82, Americ. Math. Society, Province, R.I., 1967.

[17] Rauzy, G. "*Nombres normaux et processus deterministes*". Acta Arithmetica. 29, 211-225, 1976.

[18] Renyi, A. "*Representations for real numbers and their ergodic properties*". Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8, 477-493, 1957.

[19] Schmidt, W. M. *"On normal numbers"*. Pacifc J. Math. 10, 661-672, 1960.

[20] Shidlovskii, A. B. *Transcendental numbers.* Berlin: Walter de Gruyter, 1989.

[21] Shunji, I. - Shiokawa I. "A construction of $\beta-$normal sequences". J. Math. Soc. Japan. 27, 20-23, 1975.

[22] Sierpinski, W. *"Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sue les nombres absolutment normaux et détermination effective d'un tel nombre."* Bull. Soc. Math. France 45, 125-144, 1917.

[23] Weyl, H. "*Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*". Math. Ann. 77, 313-352, 1916.