

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORITMO PARA UM SISTEMA
DINÂMICO REPRESENTANTE DE UM MECANISMO DE PRÓTESE DE
JOELHO**

por

André Tura Markus

Engenheiro Mecânico

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Fevereiro de 2015.

**DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORITMO PARA UM SISTEMA
DINÂMICO REPRESENTANTE DE UM MECANISMO DE PRÓTESE DE
JOELHO**

por

André Tura Markus

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Processos de Fabricação

Orientador: Prof. Dr. Rafael Antônio Comparsi Laranja

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Mário Roland Sobczyk Sobrinho (DEMEC - UFRGS)

Prof. Dr. Rodrigo Rossi (PROMEC - UFRGS)

Prof. Dr. Tiago Becker (DEMEC - UFRGS)

Prof. Dr. Luis Alberto Oliveira Rocha
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 25 de Fevereiro de 2015.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a orientação do professor Rafael Laranja, que me permitiu a liberdade de livre escolha do tema e sua condução, além de participar com entusiasmo em todas as etapas deste trabalho. O auxílio dos demais professores da UFRGS, Mário Sobczyk, Rodrigo Rossi e Jun Ono Fonseca, por sanar dúvidas de diferentes áreas ao longo da realização do trabalho de dissertação. A todos os meus colegas de pós-graduação, principalmente a Leonel Echer e Juliano Fagundes, pelas instruções na linguagem Latex e sua aplicação.

Agradeço também a minha família e namorada, pela suporte emocional e financeiro ao longo dessa especialização, além do interesse em minha formação profissional, que me motivou até a conclusão dessa empreitada.

Por último, agradeço a todos os funcionários da UFRGS, a instituição e o incentivo financeiro da CAPES.

RESUMO

A falta de um membro, devido a doenças, más-formações ou traumas, impacta enormemente na vida de um indivíduo. Para que o mesmo possa realizar Atividades de Vida Diária (AVD), sem drásticas limitações, faz-se necessário o desenvolvimento de próteses eficientes. Para auxiliar no projeto de tais produtos, este trabalho visa criar e solucionar um modelo de sistema dinâmico capaz de simular o comportamento de joelhos protéticos.

A fim de alcançar tal objetivo, foi estudada a biomecânica da marcha humana, além dos tipos de amputações existentes e seus impactos na mesma. Buscou-se também estudar os principais componentes de próteses existentes atualmente no mercado, além de suas geometrias básicas.

Após definir-se um modelo simplificado que representasse os componentes protéticos e as partes remanescentes do corpo, foram buscadas métodos de solução disponíveis para tal sistema. Baseado nos estudos encontrados em uma revisão bibliográfica, foi definida uma metodologia de solução numérica de sistemas multi-corpos. Durante o trabalho, surgiu a necessidade de representar forças de contato entre corpos rígidos, e foram incluídas soluções de atuais teorias do assunto. Essas metodologias foram então empregadas para a construção de um algoritmo capaz de solucionar o sistema proposto.

Depois de resolvido o sistema, os valores encontrados para as variáveis cinéticas foram comparados com valores obtidos por uma simulação numérica utilizando dois programas computacionais comerciais, cujas fundamentações teóricas utilizam diferentes métodos de solução. A comparação das diferenças entre os resultados apontou similaridade entre o algoritmo e os programas utilizados, mas com a necessidade de validação do método através de ensaio mecânico. Ao final foram sugeridas ideias para trabalhos futuros.

Palavras-chave: Prótese, Dinâmica de Sistemas Multi-corpos, Contato Entre Corpos Rígidos, Marcha Humana.

ABSTRACT

The lack of a member due to diseases, malformations or trauma, greatly impacts the life of an individual. In order to perform Activities of Daily Living (ADL) without drastic limitations, it is necessary to develop efficient prosthetic devices. To assist the design of such products, this work aims to create and solve a dynamic system model to simulate the behavior of prosthetic knees.

In order to achieve this goal, the biomechanics of human gait was studied, as well as the existing types of amputation and their impact on human gait. The main components of existing prosthetic devices, currently on the market, were identified, as well as its basic geometries.

After defining a simplified model able to incorporate the prosthetic components and the individual remaining body parts, an available methodology for the solution of such a system was prospected. Based on the studies found in the currently literature of multibody-systems, a numerical solution methodology for has been set. During the work, the need to represent contact between parts occurred, leading to the implementation of currently theories of contact forces for rigid bodies. These methodologies were then used to construct an algorithm for solving the proposed system.

After the system has been solve, the values found for the kinetic variables were compared with those obtained by numerical simulations using two commercial softwares, whose theoretical foundation used different solution methodology. Comparing the differences in results of these simulations, it was revealed a similar behavior between the algorithm and the commercial programs, but with the need of an experimental test, for truly validation of the method. At the end of this work, ideas for future improvement were suggested.

Keywords: Prosthetic, Multi-Body System Dynamics, Contact Between Rigid Bodies, Human Gait.

ÍNDICE

ÍNDICE	vi
LISTA DE FIGURAS	xv
LISTA DE TABELAS	xviii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivo geral	4
1.2 Justificativa	4
1.3 Objetivos específicos	5
1.4 Limitações	5
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	7
2.1 Biomecânica da marcha humana	7
2.2 Fase de apoio	10
2.2.1 Duplo apoio inicial	10
2.2.2 Apoio simples	10
2.3 Fase de balanço	11
2.4 Movimentos responsáveis pela translação	11
2.5 Funções do joelho durante a marcha	12
2.5.1 Absorção de impacto	12
2.5.2 Suporte	13
2.5.3 Encurtamento do membro	14
2.6 Amputações de membro inferior	14
2.6.1 Desarticulação do joelho	16
2.7 Amputação transfemural (ATF).....	17
2.8 Partes de uma prótese	18
2.8.1 Joelho protético	19
2.8.1.1 Tipos de eixo	20

2.8.1.2	Tipos de fricção	21
2.8.1.3	Tipo de freio ou dispositivo de trava	22
2.8.2	Controlados por microprocessador	22
2.9	Modelos encontrados no mercado	23
2.10	Outros trabalhos	26
3	METODOLOGIA	27
3.1	Graus de liberdade do sistema	28
3.2	Transformação de coordenadas	30
3.3	Método computacional da análise cinemática	31
3.4	Cinemática restrita	32
3.4.1	Restrições motrizes	32
3.4.2	Restrições de juntas	32
3.5	Análise de posição	34
3.6	Análise de velocidade	36
3.7	Análise da aceleração	37
3.8	Elementos de força	47
3.8.1	Gravidade	47
3.8.2	Elemento mola-amortecedor-atuador	47
3.9	Contato	49
3.9.1	Equação de força de contato em software comercial	53
3.9.2	Análise da penetração	54
3.10	Algoritmo	57
4	APLICAÇÃO DO ALGORITMO	62
4.1	O mecanismo do joelho	63
4.2	Matriz de massa	65
4.3	Posição das coordenadas locais e das juntas	66
4.4	Elemento mola-amortecedor-atuador	68
4.5	Forças de contato	70
4.6	Vetor de forças externas	74
4.7	Vetor de restrições	75

4.8	Forças de reação	79
4.9	Análise no Working Model 2D	84
5	RESULTADOS	86
5.1	Primeira simulação	86
5.2	Segunda simulação	95
6	CONCLUSÕES	106
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	108
	APÊNDICE A	113

LISTA DE SÍMBOLOS

XYZ	Direções principais de um sistema cartesiano inercial	
$X'Y'Z'$	Direções principais de um sistema cartesiano local	
$\xi\eta$	Direções principais de um sistema cartesiano local para contato	
$ABCD$	Juntas rotacionais de fixação dos componentes do mecanismo	
EFO		
$\bar{\mathbf{u}}_P^i$	Posição local do ponto P em relação ao sistema local \mathbf{O}^i	$[m]$
\mathbf{R}^i	Posição da origem de um sistema local \mathbf{O}^i em relação a um sistema inercial	$[m]$
\mathbf{r}^i	Posição global de um ponto pertencente a um corpo i	$[m]$
$\dot{\mathbf{r}}^i$	Velocidade global de um ponto pertencente a um corpo i	$[m/s]$
$\ddot{\mathbf{r}}^i$	Aceleração global de um ponto pertencente a um corpo i	$[m/s^2]$
θ^i	Ângulo de orientação do sistema de coordenadas local de um corpo i	$[rad]$
\mathbf{A}^i	Matriz de rotação para transformação de coordenadas	adimensional
\mathbf{A}_θ^i	Derivada parcial da matriz de rotação em função de θ	adimensional
m^i	Massa do corpo i	$[kg]$
J^i	Momento de inércia do corpo 1 referente ao seu centro de massa	$[kgm^2]$
a_x^i	Componente x da aceleração resultante sobre um corpo i	$[m/s^2]$
a_y^i	Componente y da aceleração resultante sobre um corpo i	$[m/s^2]$
F_x^i	Componente x da força resultante sobre um corpo i	$[N]$
F_y^i	Componente y da força resultante sobre um corpo i	$[N]$

Mo^i	Momento de torção resultante sobre um corpo i	$[Nm]$
M^i	Matriz de massa do corpo i	$[kg]$
\mathbf{q}^i	Vetor de coordenadas generalizadas do corpo i	$[m]$
$\dot{\mathbf{q}}^i$	Vetor de velocidades generalizadas do corpo i	$[m/s]$
$\ddot{\mathbf{q}}^i$	Vetor de acelerações generalizadas do corpo i	$[m/s^2]$
$\delta\mathbf{q}^i$	Vetor de deslocamento virtual do corpo i	$[m]$
\mathbf{q}	Vetor de coordenadas generalizadas do sistema	$[m]$
$\dot{\mathbf{q}}^i$	Vetor de velocidades generalizadas de um corpo i	$[m/s]$
$\dot{\mathbf{q}}$	Vetor de velocidades generalizadas do sistema	$[m/s]$
δW	O trabalho virtual realizado por alguma força sobre um deslocamento virtual	$[J]$
\mathbf{C}^i	Vetor de equações de restrição do corpo i	
\mathbf{C}	Vetor de equações de restrição do sistema	
Λ	Vetor dos multiplicadores de Lagrange	$[N]e[Nm]$
T	Energia cinética de um sistema	$[J]$
ρ	Densidade volumétrica	$[kg/m^3]$
$\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$	Jacobiano do vetor de equações de restrição do sistema	
$\mathbf{C}_{\mathbf{t}}$	Derivada temporal do vetor de equações de restrição do sistema	
$\mathbf{C}_{\mathbf{tt}}$	Dupla derivação temporal do vetor de equações de restrição do sistema	
$\mathbf{C}_{\mathbf{qt}}$	Derivação temporal do jacobiano do vetor de equações de restrição do sistema	
n_c	Número de equações de restrição de um sistema	
n_b	Número de corpos de um sistema	
$\Delta\mathbf{q}$	Vetor de diferenças de Newton para o vetor de posição \mathbf{q} do sistema	$[m]$
\mathbf{Id}	Matriz booleana para garantir os valores de posição, velocidade e aceleração das variáveis independentes	adimensional
g	Aceleração gravitacional	$[9,806kgm/s^2]$

k	Coeficiente de rigidez de uma mola	$[N/m]$
c	Coeficiente de amortecimento de um amortecedor	$[Ns/m]$
f_a	Força aplicada por um atuador	$[N]$
f_s	Força aplicada por um elemento mola-amortecedor-atuador	$[N]$
l	Comprimento instantâneo do elemento mola-amortecedor-atuador	$[m]$
l_0	Comprimento sem compressão/alongamento do elemento mola-amortecedor-atuador	$[m]$
\mathbf{r}_P^{ij}	Vetor de comprimento do elemento mola-amortecedor-atuador fixado nos corpos i e j	$[m]$
\mathbf{q}^{ij}	Vetor de coordenadas generalizadas dos corpos i e j unidos por um elemento de força	$[m]e[rad]$
\mathbf{V}	Vetor unitário que aponta na direção do vetor \mathbf{r}_P^{ij}	$[m]$
δ^n	Penetração relativa entre dois corpos em contato. n é o coeficiente adimensional que define o padrão de distribuição de forças nos pontos de contato	$[m]$
F_N	Força normal de contato entre dois corpos	$[N]$
\mathbf{S}_i^P	Vetor de posição local do possível ponto de contato P_i no corpo i	$[m]$
\mathbf{S}_j^P	Vetor de posição local do possível ponto de contato P_j no corpo j	$[m]$
φ_i	Ângulo do vetor posição de contato \mathbf{S}_i^P , em relação à ξ_i	$[rad]$
n_i	Vetor unitário normal a superfície de contato no corpo i	$[m]$
n_j	Vetor unitário normal a superfície de contato no corpo j	$[m]$
\mathbf{d}	Vetor de menor distância entre os pontos de contato P_i e P_j	$[m]$
\mathbf{r}_i^P	Vetor de posição global do ponto de contato P_i no corpo i	$[m]$

$\dot{\delta}$	Velocidade de penetração durante impacto	$[m/s]$
$\dot{\delta}^{(-)}$	Velocidade inicial de penetração durante impacto	$[m/s]$
CA	Variável lógica para contato (Contato Anterior). 0 - Sem contato anterior, 1 - Há contato anterior	
\mathbf{r}_{ij}	Vetor de comprimento do elemento massa-mola-amortecedor, que conecta o corpo i ao j	$[m]$
L_{ij}	Valor de comprimento do vetor \mathbf{r}_{ij}	$[N]$
K	Rigidez de impacto entre dois corpos i e j	$[N/m]$
K_{CAE}	Rigidez de impacto entre dois corpos i e j utilizada no software de CAE	$[N/m]$
K_{cont}	Rigidez de impacto entre dois corpos i e j utilizada no algoritmo	$[N/m]$
C_r	Coefficiente de restituição entre dois corpos i e j	adimensional
b	Ponto onde uma reta corta o eixo Y em um sistema cartesiano para representação em coordenadas polares	$[m]$
v	Inclinação de uma reta que corta o eixo Y em um sistema cartesiano para representação em coordenadas polares	
θ_{pol}	Função polinomial que expressa a posição da coxa em função do tempo para a Fase de Balanço	$[rad]$
t	Variável de instante de tempo	$[s]$
Δt	Valor do passo de incremento de tempo	$[s]$
\mathbf{F}_c^i	Vetor de força de contato aplicado sobre o CG do corpo i	$[N]$
\mathbf{F}_{cx}^i	Componente \mathbf{X} do vetor de força de contato aplicado sobre o CG do corpo i	$[N]$
\mathbf{F}_{cy}^i	Componente \mathbf{Y} do vetor de força de contato aplicado sobre o CG do corpo i	$[N]$
\mathbf{M}_c^i	Momento causado do vetor de força de contato aplicado sobre o CG do corpo i	$[Nm]$

\mathbf{Q}^i	Vetor de força devido ao elemento massa-mola-amortecedor aplicada sobre o CG do corpo i	$F : [N] \quad M : [Nm]$
\mathbf{Q}_R^i	Vetor das componentes \mathbf{X} e \mathbf{Y} do vetor \mathbf{Q}^i	$[N]$
\mathbf{Q}_R^i	Vetor da componente de momento \mathbf{Z} do vetor \mathbf{Q}^i	$[Nm]$
Q_{ex}^i	Componente \mathbf{X} de força externa total aplicada sobre o CG do corpo i	$[N]$
Q_{ey}^i	Componente \mathbf{Y} de força externa total aplicada sobre o CG do corpo i	$[N]$
Q_{em}^i	Componente de momento resultante do força externa total aplicada sobre o CG do corpo i	$[Nm]$
F_X^i	Componente X da força resultante do somatório de forças externas atuando sobre o CG de um corpo i	$[N]$
F_Y^i	Componente Y da força resultante do somatório de forças externas atuando sobre o CG de um corpo i	$[N]$
M_{CG}^i	Momento resultante do somatório de momentos externos atuando sobre o CG de um corpo i	$[Nm]$

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AVD	Atividades da Vida Diária
NAS	Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos da América (<i>National Academy of Sciences</i>)
VA	Administração dos Veteranos dos Estados Unidos da América (<i>Veterans Administration</i>)
AACD	Associação de Assistência à Criança Deficiente
ACADEF	Associação Canoense de Deficientes Físicos
SUS	Sistema Único de Saúde brasileiro
CM	Centro de Massa
CI	Centro instantâneo de rotação
CAD	Desenho assistido por computador (Computer-Aided Design)
CAE	Engenharia assistida por computador (Computer-Aided Engineering)
CG	Centro de Gravidade
GdL	Grau(s) de Liberdade
TP	Toque do pé
DP	Desprendimento do pé

LISTA DE FIGURAS

2.1	Movimento de marcha humana. Fonte: Rose e Gamble, 1998	8
2.2	Terminologia dos movimentos do membro inferior. Fonte: Moore et al., 2013 .	9
2.3	Nomenclatura dos planos de corte anatômicos e definição das direções cartesianas. Adaptado de: Inman et al., 1981	9
2.4	Movimento de oscilação do centro de massa do corpo durante a marcha. Fonte: Rose e Gamble, 1998	10
2.5	Trajetória dos centros instantâneos de rotação do joelho e tornozelo no plano XY . Fonte: Inman et al., 1981	12
2.6	Métodos de controle do suporte por indivíduos com amputação acima do joelho. Fonte: Shurr et al., 2002	13
2.7	Métodos de controle do suporte por indivíduos com amputação acima do joelho. Fonte: Seymour, 2001	15
2.8	Partes que dividem uma prótese modular. Fonte: Seymour, 2001	18
2.9	Tipos de joelhos-protéticos. (A) Trava manual (ST&G), (B) Uni-axial (ST&G), (C) Policêntrico (Össur), (D) Uni-axial hidráulico (Össur), (E) Microprocessador (Otto bock), (F) Microprocessado (Össur). Fonte: Chitragari e Mahler, 2014	20
2.10	Método de freio de flexão por travamento mecânico. Fonte: Shurr et al., 2002	22
2.11	Joelho <i>Balance Knee</i> da empresa Össur (A) Protótipo. Fonte: Omarsson et al., 2012a, (B) Produto a venda Fonte:Össur, 2015	23
2.12	<i>Balance Knee</i> com visão de corte axial. Fonte: Omarsson et al., 2012b.....	24
2.13	Joelho <i>Total Knee</i> da empresa Össur (A) Protótipo. Fonte: Karlsson et al., 2013, (B) Produto a venda Fonte:Össur, 2015	25
2.14	Joelho <i>Total Knee</i> em visão de corte axial. Fonte: Karlsson et al., 2013	25
3.1	Modelo simplificado do quadril, coxa, joelho protético e pé em CAD	27
3.2	Representação de um corpo livre em um espaço 3D. Fonte: Shabana, 2010 ...	29

3.3	Relação entre coordenadas locais e globais do sistema Fonte: Shabana, 2010..	30
3.4	Relação de posição para uma junta de revolução. Fonte: Shabana, 2010.....	33
3.5	Princípio de D'Alembert Fonte: Shabana, 2010	38
3.6	Diagrama de corpo livre de dois corpos unidos por uma junta rígida	40
3.7	Elemento mola-amortecedor-atuador. Fonte: Shabana, 2010	48
3.8	Valores de força de contato F_N e velocidade de penetração $\dot{\delta}$ em função da penetração δ para diferentes fórmulas fonte: Machado et al., 2012	52
3.9	Valores de histerese de amortecimento χ em função do coeficiente de restituição C_r para diferentes fórmulas. Fonte: Machado et al. [2012]	53
3.10	Vetor distância \mathbf{d} do possível ponto de contato entre dois corpos i e j Adaptado de: Machado et al., 2010	55
3.11	Fluxograma do algoritmo do programa principal.....	58
3.12	Fluxograma do algoritmo da subrotina de contato	59
4.1	Mecanismo que simula as partes do corpo e da prótese.....	62
4.2	Joelho protético de quatro barras, hidráulico. Fonte: Kramer et al., 1998.....	63
4.3	Joelho protético de policêntrico, hidráulico 3R46 da empresa Otto Bock. Fonte: Bock, 2015	63
4.4	Projeto de prótese de joelho dos autores Kramer et al., 1998	64
4.5	Peças em contato segundo o projeto Kramer et al., 1998.....	70
4.6	Peças em contato modeladas em ambiente CAD	71
4.7	Marcadores reflexivos para uso em cinemetria. Fonte: Winter, 2009	76
4.8	Posição angular da coxa durante o cliço de marcha.....	76
4.9	Posição angular da coxa durante o cliço de marcha.....	77
4.10	Diagrama de corpo livre das forças de reação sobre o corpo 1	80
4.11	Diagrama de corpo livre das forças de reação sobre o corpo 2	81
4.12	Diagrama de corpo livre das forças de reação sobre o corpo 3	82
4.13	Diagrama de corpo livre das forças de reação sobre o corpo 4	83
4.14	Mecanismo completo no Working Model 2D	84
5.1	Posições angulares obtidas na primeira simulação	87
5.2	Velocidades angulares obtidas na primeira simulação	88

5.3	Acelerações angulares obtidas na primeira simulação	89
5.4	Forças de reação para os pontos A , B e C , obtidas na primeira simulação.....	90
5.5	Forças de reação para os pontos D e O , obtidas na primeira simulação	91
5.6	Forças de contato do algoritmo e do Solidworks para a primeira simulação ...	93
5.7	Penetração excessiva do corpo 4 no semicírculo	95
5.8	Sequência do movimento do sistema obtida na simulação em CAE.....	96
5.9	Posições angulares obtidas pelo algoritmo e pela simulação em CAE.....	97
5.10	Velocidades angulares obtidas pelo algoritmo e pela simulação em CAE.....	98
5.11	Acelerações angulares obtidas pelo algoritmo e pela simulação em CAE.....	99
5.12	Força de contato entre os corpos 1 e 4	100
5.13	Forças de reação obtidas para os pontos A , B e C	101
5.14	Forças de reação obtidas para os pontos D e O	102
5.15	Diferença entre o deslocamento angular da perna calculado pelo mecanismo e pela medição real	105

LISTA DE TABELAS

4.1	Comprimento e juntas de cada elo da prótese de Kramer et al., 1998	64
4.2	Valores das massas e momentos de inércia de cada corpo	65
4.3	Valores iniciais para o vetor de coordenadas global \mathbf{q}	67
5.1	Diferenças entre o Algoritmo e WM - Posição, Velocidade e Aceleração	92
5.2	Diferenças entre o Algoritmo e WM - Forças	92
5.3	Diferenças entre o Algoritmo e Solid. - Posição, Velocidade e Aceleração	94
5.4	Diferenças entre o Algoritmo e Solid. - Forças	94
5.5	Diferenças entre o Algoritmo e a Simulação em CAE - Posição, Velocidade e Aceleração	103
5.6	Diferenças entre o Algoritmo e a Simulação em CAE - Forças	104

1. INTRODUÇÃO

As Atividades da Vida Diária (AVD) como escovar os dentes, vestir-se, cozinhar, banhar-se, escrever, dentre outras, são tão cotidianas que a enorme complexidade de tais movimentos passa totalmente despercebida por indivíduos sem limitações físicas. Já para aqueles que são portadores de deficiência física, tais tarefas são difíceis de serem realizadas sem ajuda. A ausência de um membro, devido a doenças, acidentes ou más-formações, afeta a autoimagem de um indivíduo e ao mesmo tempo que o destaca no ambiente social, também o exclui deste. Para reintegrar esse indivíduo e o reabilitar em suas funções básicas de locomoção e interação, o dispositivo protético é essencial.

A deficiência física por falta de um membro sempre esteve presente na história do homem, como mostram indícios de sobrevivência à uma amputação por um homem Neanderthal [Datta, 1998]. Hippocrates, pai dos princípios morais e éticos da base da medicina, recomendava amputações nos casos de gangrena, para controle de dores e hemorragias [Shurr et al., 2002]. Entretanto, devido a técnicas precárias de cirurgia e procedimentos sem assepsia, as taxas de mortalidade eram muito elevadas. Com o advento da pólvora e do canhão de artilharia, cresceu a demanda por técnicas de amputação em campo de batalha. Barão Dominique Jean Larrey (1766–1842), cirurgião-chefe dos exércitos de Bonaparte, inovou na logística e operação dos hospitais de campanha, inclusive em técnicas de cirurgia. Devido à enorme dor por falta de analgésicos e grande perda de sangue, as amputações deviam ser realizadas o mais rápido possível, fato defendido pelo notável cirurgião Jacques Lisfranc (1790–1847), que realizava a amputação de pé (que levou o seu nome) em menos de um minuto. As taxa de sobrevivência de procedimentos de amputação se elevou após o início das técnicas de antissepsia a partir de 1865 [Gordon, 2002] e com o advento do antibiótico Penicilina, por Alexander Fleming em 1928 e sua larga aplicação durante a Segunda Guerra Mundial.

Não se sabe ao certo quando a primeira prótese foi concebida. Existem indícios em literatura indiana do período 1500 AC, que descrevem pernas artificiais, além dos relatos de Herodotus (485–425 AC), que descreve um prisioneiro de Esparta que amputou o próprio pé para se salvar do cárcere, e após sobreviver, passou a utilizar um pé de madeira [Fliegel e Feuer, 1966; Shurr et al., 2002]. Materiais protéticos comuns dessa época incluem fibras,

algodão, ossos e metais. Séculos depois, ao final do século XVI, Ambroise Paré (1510–1590) estabeleceu novas técnicas cirúrgicas, antes de Larrey e Lisfranc. Paré atuava na indústria francesa de armaduras e utilizava em suas criações, a separação de partes conceituais de próteses: soquetes, joelheira e articulações de joelho e tornozelo. A partir do início do século XIX, o protesista não era mais o habilidoso ferreiro ou carpinteiro, mas um profissional com enfoque na arte [Fliegel e Feuer, 1966] e os materiais mais utilizados na Europa e América do Norte passaram a ser de madeira, couro e metais variados.

Com a manutenção das guerras e suas consequências, a demanda por pesquisa e desenvolvimento no setor de próteses aumentou. No Reino Unido, após a Primeira Guerra Mundial, o centro *Limb Fitting* no hospital de Queen Mary se tornou referência no desenvolvimento e fornecimento de próteses a veteranos. Outro passo importante foi o início do programa de pesquisa de próteses, pela Academia Nacional de Ciências (NAS - *National Academy of Sciences*), gerida pelo governo norte-americano após a Segunda Guerra Mundial. Entidades como as Forças Armadas norte-americanas, a Administração dos Veteranos (VA - *Veterans Administration*), institutos de saúde, universidades e indústria de iniciativa privada também foram contratadas para realizar tais pesquisas dentro do programa, posteriormente administradas majoritariamente pela VA [Wilson, 1972]. No mesmo período, no Canadá, o hospital Sunnybrook iniciou seu próprio programa de pesquisa, posteriormente transferido para o centro *Ontario Crippled Children's* em Toronto. Nesse projeto foram criados as próteses "de desarticulação de quadril canadense" e a prótese Syme [Wilson, 1972].

Dentre algumas companhias de produtos ortopédicos atualmente no mercado, se destacam as americanas Willow Wood, RSLSteeper, Alps, a inglesa Endolite, a alemã Otto Bock, fundada em 1919 e sua mais recente competidora, a islandesa Össur. No Brasil ainda existem pouquíssimas empresas no ramo, das quais se destacam a Polior, Orthogen, e Prokinetics. Os produtos desenvolvidos por esses empreendimentos privados se tornaram mais leves e duráveis, com o emprego de materiais como o silicone, ligas de alumínio e aço, materiais compósitos como as fibras de carbono e polímeros variados. No Brasil a distribuição e manutenção desses equipamentos são realizadas por instituições sem fins lucrativos como a rede Sarah Kubischek de hospitais e centros de reabilitação como a Associação de Assistência à Criança Deficiente (AACD), Associação Canoense de Deficientes Físicos (ACADEF), além de centros privados.

Limitações econômicas são a principal barreira para que o setor de próteses se desenvolva, não só no exterior, mas também dentro do Brasil. Para ilustrar essa limitação, se buscou no sistema integrado de preços e serviços DATASUS (<http://www.datasus.gov.br>), do Sistema Único de Saúde brasileiro (SUS), a informação do pagamento de R\$ 3502,80 para a atendimento ambulatorial para uma prótese completa para amputação transfemural, incluindo soquete, liner, joelho, tubo e pé-protético [DATASUS, 2015]. Uma busca pela internet revelou um preço em torno de R\$ 5900,00 para somente um joelho policêntrico, modelo 3R106 da fabricante Otto Bock [Alves, 2015]. Consultando profissionais da área de próteses, foi informada a grande dificuldade de prover componentes protéticos de qualidade com o valor fornecido pelo SUS, que além de ser insuficiente, não pode ser usado como complemento para aquisição de próteses mais avançadas, utilizando o dinheiro do próprio paciente. Além disso, ainda não há no território nacional, empresas capazes de fornecer produtos e manutenções com a mesma qualidade e credibilidade das empresas estrangeiras.

Desta forma, o presente trabalho de dissertação visa contribuir para o projeto, desenvolvimento e validação de novas tecnologias do setor de próteses de membro inferior, dentro do território nacional, afim de proporcionar melhores produtos e preços mais baixos. Ao se desenvolver um algoritmo de uso público, capaz de simular o comportamento dinâmico de uma prótese de projeto, o custo de pesquisa desse componente pode ser reduzido, ao limitar o número de diferentes protótipos concebidos durante a fase de criação. O padrão de seu movimento, obtido através de cálculos, indica se o joelho têm as características de marcha desejada, como tempo da base de balanço, sustentação na fase de apoio, influência sobre o centro de gravidade do corpo, e finalmente, o peso e resistência mecânica da estrutura.

Os capítulos desse trabalho de organizam da seguinte forma: uma *fundamentação teórica*, onde são descritas as etapas da biomecânica da marcha humana, as funções de um joelho humano real e de um protético, os tipos de amputação de membro inferior que demandam o uso de uma prótese de joelho e suas consequências na mudança da marcha real, as partes que compõem uma prótese de membro inferior e os modelos encontrados no mercado; uma *metodologia*, onde são descritas as equações matemáticas do modelo e suas deduções, passando pela transformação de coordenadas em um ambiente 2D, análise de posição, análise de velocidade, análise de aceleração, elementos de força como molas, amortecedores e atuadores, a teoria de contato utilizada e o fluxograma do algoritmo propriamente dito; um

capítulo sobre a *aplicação do algoritmo*, onde as teorias matemáticas são aplicadas sobre um joelho do tipo "quatro-barras"; os *resultados*, onde os valores de posição, velocidade, aceleração e forças nas juntas calculados pelo algoritmo são comparados com os obtidos por softwares comerciais; por fim as *conclusões*, onde os resultados encontrados são analisados.

1.1 Objetivo geral

O objetivo deste trabalho é implementar um algoritmo computacional para o cálculo cinemático e cinético de um mecanismo que simule o comportamento de uma prótese externa de joelho. Este trabalho aborda somente próteses externas de joelho, que se diferenciam dos implantes de joelho utilizados em cirurgias de artroplastia total de joelho. O mecanismo deve ser capaz de realizar os principais movimentos de uma prótese de joelho externo e deve comportar diferentes geometrias de peças, assim como levar em consideração as propriedades mecânicas de seus materiais e características dos atuadores utilizados. Como o movimento final é definido pela restrição geométrica entre suas peças, a metodologia utilizada para solução deve ser capaz de simular contato entre peças, cujas forças geradas sejam equivalentes as reais. Dessa forma, o algoritmo deve ser capaz de:

- Fornecer as posições, velocidades e acelerações de cada elo do mecanismo;
- Calcular as forças de reação em todas as suas juntas;
- Calcular as forças realizadas por molas, amortecedores e atuadores;
- Ser capaz de aceitar diferentes geometrias e condições de contorno;
- Levar em conta forças geradas devido ao contato entre peças;
- Ter seus resultados comparados com outro software CAE voltado para soluções de problemas dinâmicos.

1.2 Justificativa

Ao desenvolver um projeto de um mecanismo protético, o comportamento resultante da interação de suas peças deve simular de modo mais natural (quanto é possível) o movimento real ao qual ele é destinado a substituir. Para testar diferentes configurações

e validar a configuração geométrica pretendida, antes da construção de um protótipo, uma análise dinâmica pode fornecer dados decisivos para a viabilidade do projeto, tais como: (I) o espaçamento máximo de altura livre entre a ponta dos dedos do pé e o solo antes da fase de balanço médio da perna, de modo a evitar a colisão do pé-protético, com risco de queda para o usuário; (II) o tempo necessário para que o mecanismo realize todo o movimento; (III) os ajustes de parâmetros de amortecimento e rigidez dos atuadores; (IV) as forças que atuam sobre cada uma das peças. Se um algoritmo for capaz de fornecer tais informações, o custo e tempo de projeto de novos componentes pode ser reduzido, melhorando sua qualidade e viabilizando produtos mais econômicos e competitivos no mercado nacional.

1.3 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos devem ser cumpridos:

- Pesquisar as atuais geometrias de joelhos protéticos encontrados no mercado;
- Propor um modelo que simule não só o joelho, mas parte do corpo humano envolvido no movimento de caminhada;
- Definir o número de graus de liberdade desse sistema resultante;
- Buscar um método de solução analítica ou numérica capaz de solucionar o sistema;
- Considerar um método para modelar o fenômeno de contato entre partes do mecanismo;
- Comparar os resultados com os de outra fonte que utilize uma metodologia de solução diferente da empregada no algoritmo proposto.

1.4 Limitações

Os equacionamentos empregados são desenvolvidos em um ambiente bidimensional, logo sua resolução só fornece dados em um plano, o que em si não é um grave problema, pois a maior parte do movimento realizado por um joelho humano se dá em um só plano, como é melhor descrito em seção posterior. Já o método de solução de contato entre partes, só é capaz de encontrar solução quando as superfícies em contato são convexas ou retas, e quando

há somente um ponto de contato. Essa simplificação é empregada em corpos rígidos, mas com "deformações locais", onde ocorre o armazenamento e dissipação de energia, contudo a deformação não é detalhadamente simulada, importando somente a natureza macroscópica do problema.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são descritos os principais fundamentos da biomecânica da marcha humana, os tipos de amputação de membro inferior, os principais componentes de uma prótese e alguns dos modelos de joelho protético encontrados no mercado.

A seção de biomecânica descreve o padrão médio do movimento de locomoção em indivíduos saudáveis e aqueles que possuem algum tipo de amputação, além das contribuições dos músculos e anatomias humanas no movimento de marcha. A seção de amputações cita as limitações impostas à um indivíduo amputado de acordo com o seu tipo de amputação. Por último, há uma revisão dos componentes de uma prótese de membro inferior, as geometrias dos joelhos protéticos encontrados no mercado e sua classificação, a fim de orientar que tipos de geometria o algoritmo deve englobar.

2.1 Biomecânica da marcha humana

O homem é o único animal na Terra que têm a marcha bípede como a padrão. Essa forma de locomoção, gerencia o equilíbrio corporal e o utiliza para traslado, ocupando somente dois membros e livrando os braços e mãos para a manipulação de ferramentas e ainda assim ser eficiente do ponto de vista de gasto energético corporal [Amato, 2004].

Ao analisar a marcha de diferentes indivíduos saudáveis, é notável um padrão no movimento. As etapas que seccionam o movimento podem ser descritas em função do tempo, mas devido a sua característica cíclica, essa dependência pode ser descrita em forma de porcentagem do movimento total, ao invés de função do tempo [Perry, 2004]. Os principais estágios de tal marcha estão ilustrados na Figura 2.1. A menos que especificado o contrário, as etapas da marcha humana descritas a seguir se referem à um indivíduo sem amputações.

O momento 0% inicia com o toque do pé (calcanhar) e finaliza em 100% com o segundo toque do mesmo pé. Observando somente um membro, o ciclo de marcha se divide em duas fases do ponto de vista de um membro: *Fase de Apoio* e *Fase de Balanço*. Na fase de apoio, o membro se encontra parcialmente ou totalmente em contato com o solo, e na fase de balanço, o mesmo está sem contato. Das subdivisões da fase de apoio tem-se: *Duplo Apoio* inicial, quando os dois pés estão em contato com o solo simultaneamente; o *Apoio Simples*, quando o pé oposto está em balanço e todo o peso do corpo se encontra em

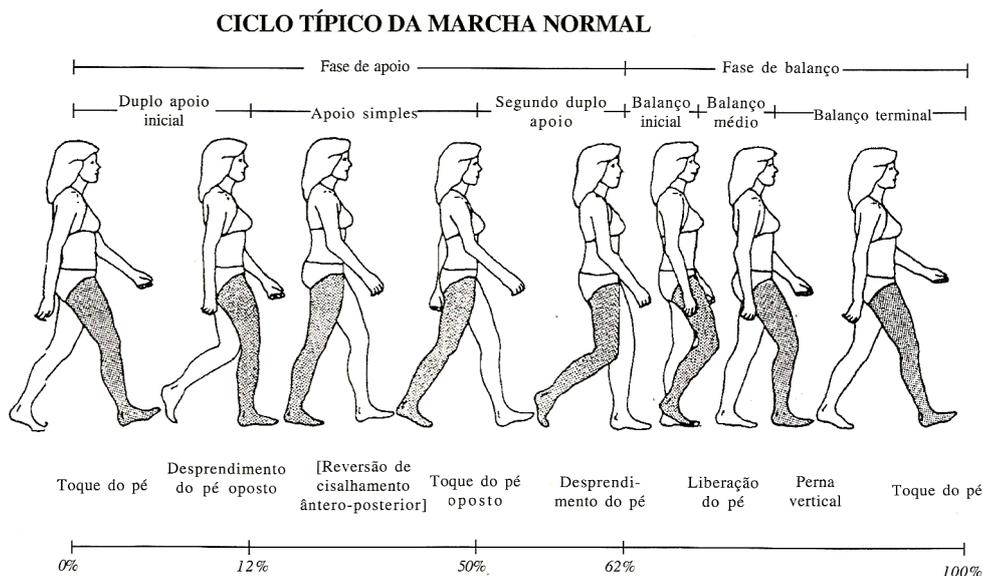


Figura 2.1 – Movimento de marcha humana. Fonte: Rose e Gamble, 1998

um membro; o segundo *Duplo Apoio*, quando os dois pés estão novamente em contato com o solo, antes do *Desprendimento do Pé*. Após, inicia-se a Fase de Balanço, subdividida em *Balanço Inicial*, *Balanço Médio* e *Balanço Terminal*. A fase de apoio compreende 62% de uma marcha normal, e a fase de balanço, 38%. Cada uma das duas fases de duplo apoio duram aproximadamente 12% cada [Rose e Gamble, 1998; Perry, 2004; Inman et al., 1981].

A partir dessa seção, os principais movimentos do membro inferior foram nomeados segundo sua nomenclatura anatômica (Figura 2.2) e os planos espaciais (Figura 2.3).

Para aplicação dos cálculos, o *plano sagital* foi nomeado **XY**, o *coronal* **YZ** e o *transversal* **XZ**. A posição *anterior* diz respeito às partes a frente do plano **YZ** e a posição *posterior*, atrás deste plano. A denominação *proximal* se refere a um ponto, pertencente a uma parte corporal, mais próxima do centro de massa do corpo humano (CM). O CM não permanece em uma posição fixa durante a marcha, mas tende a continuar dentro da pelve [Vaughan, 1992]. Já a terminologia *distal* se aplica ao ponto mais afastado do CM. Como mostra a Figura 2.4, durante a marcha o corpo oscila lateralmente no plano transversal (onda **a**) e verticalmente no plano sagital (onda **b**), de modo que seus movimentos combinados no centro de massa criam uma curva no plano coronal (onda **c**). Essa curva tende a estreitar à medida que o comprimento do passo aumenta.

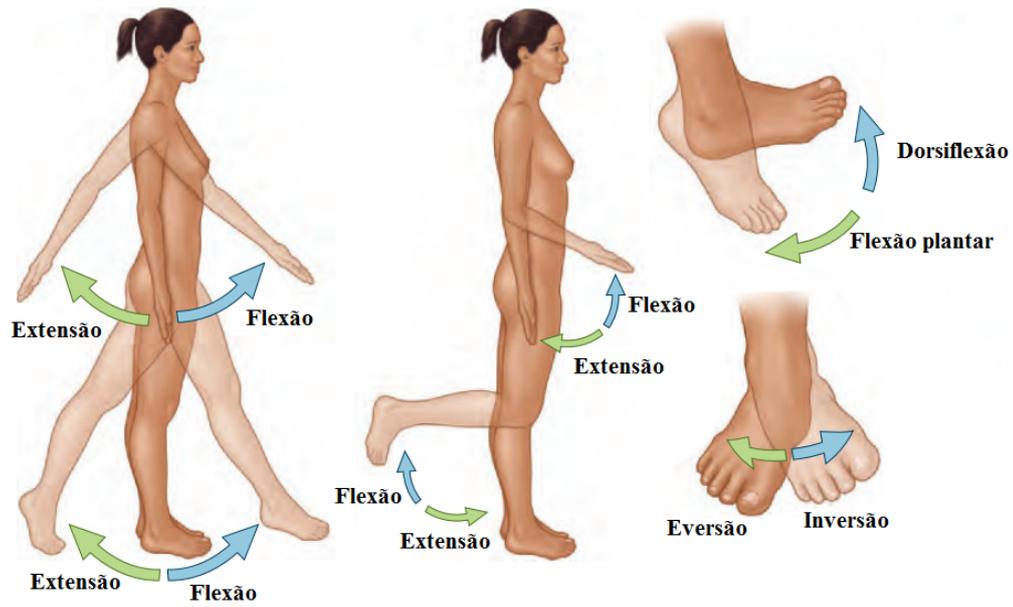


Figura 2.2 – Terminologia dos movimentos do membro inferior. Fonte: Moore et al., 2013

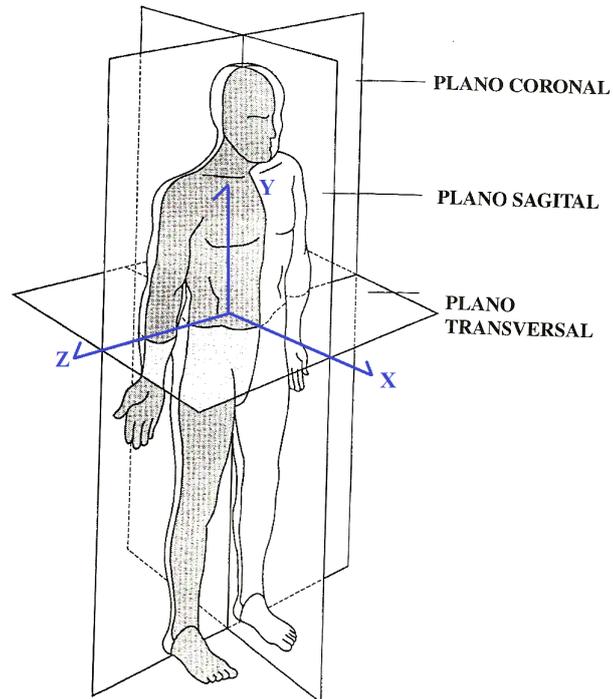


Figura 2.3 – Nomenclatura dos planos de corte anatômicos e definição das direções cartesianas. Adaptado de: Inman et al., 1981

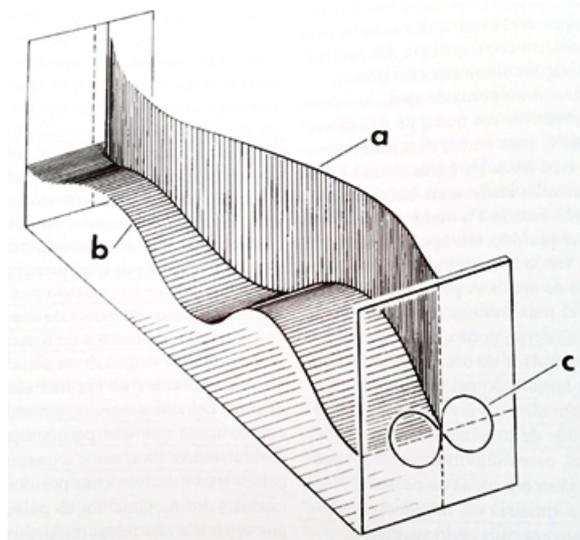


Figura 2.4 – Movimento de oscilação do centro de massa do corpo durante a marcha.

Fonte: Rose e Gamble, 1998

2.2 Fase de apoio

2.2.1 Duplo apoio inicial

O duplo apoio inicial ocorre durante o toque do pé até o desprendimento do pé oposto. Há a total transferência de peso do corpo para o membro em apoio. Neste momento há uma desaceleração de avanço anterior do corpo e preparação para o balanço do pé oposto (pré-balanço). O toque do calcanhar acontece com extensão quase total do joelho, que tende a flexionar sua articulação até que a sola do pé esteja totalmente apoiada no solo, sendo 15° a magnitude dessa flexão [Rose e Gamble, 1998; Perry, 2004]. Essa flexão é responsável pela absorção do choque inicial quando se inicia a queda do centro de massa do corpo.

2.2.2 Apoio simples

Durante o apoio simples, à medida que o corpo passa sobre o pé fixo, acontece a elevação máxima do centro de gravidade do corpo e uma desaceleração das velocidades de avanço anterior e vertical. Há a inversão do cisalhamento sobre o pé, de ântero-posterior para póstero-anterior, seguido da queda do centro de massa e aumento das velocidades de avanço e vertical. Essas mudanças na velocidade ocorrem, porque “o apoio proporcionado pelos membros inferiores não permanece diretamente sob o tronco o tempo todo” [Rose e Gamble,

1998]. Quando o pé de apoio está a frente do corpo, ele tende a desacelerá-lo, e quando o centro de massa passa sobre ele, há uma aceleração. Esse movimento pode ser observado ao carregar uma vasilha de água a medida que se caminha. Durante essa fase o tronco tende a inclinar-se lateralmente sobre o membro de apoio (eixo **Z**). Após a flexão inicial do joelho para amortecimento, o mesmo volta a extensão total antes da metade do período de apoio, para imediatamente depois, realizar uma nova flexão final, simultaneamente com a elevação do calcanhar na fase de pré-balanço [Rose e Gamble, 1998].

2.3 Fase de balanço

Na fase de balanço, o membro tem sua velocidade máxima até o momento do balanço terminal, quando a perna se encontra em estado de “perna vertical”, onde a tíbia está perpendicular ao solo, iniciando a desaceleração do membro antes do contato do pé [Shurr et al., 2002; Vaughan, 1992].

2.4 Movimentos responsáveis pela translação

As translações oscilatórias da Figura 2.4 são resultantes de uma sucessão de movimentos musculares coordenados do joelho, tornozelo e pé, cada qual contribuinte para a minimização da amplitude de movimento do CM, a fim de reduzir o gasto energético da locomoção. A rotação pélvica no eixo **Y** impacta na diminuição da altura mínima em **Y** do CM e um movimento de obliquidade pélvica (rotação em **X**) diminui a amplitude de movimento nessa direção, ao reduzir a elevação vertical do CM na passagem sobre o membro em apoio. O joelho começa com extensão quase máxima no momento do toque do pé, ocorrendo uma flexão de até 15° para absorver o impacto, seguido de uma extensão antes da metade do período de apoio e de uma flexão final para encurtar o membro e permitir sua passagem durante a fase de balanço, pois há uma diminuição do espaço livre para o movimento, devido a obliquidade pélvica [Perry, 2004; Rose e Gamble, 1998; Omarsson et al., 2012b].

O pé possibilita que a trajetória do *centro instantâneo de rotação* (CI) do joelho permaneça, durante toda a fase de apoio, aproximadamente horizontal no plano **XY** (Figura 2.5).

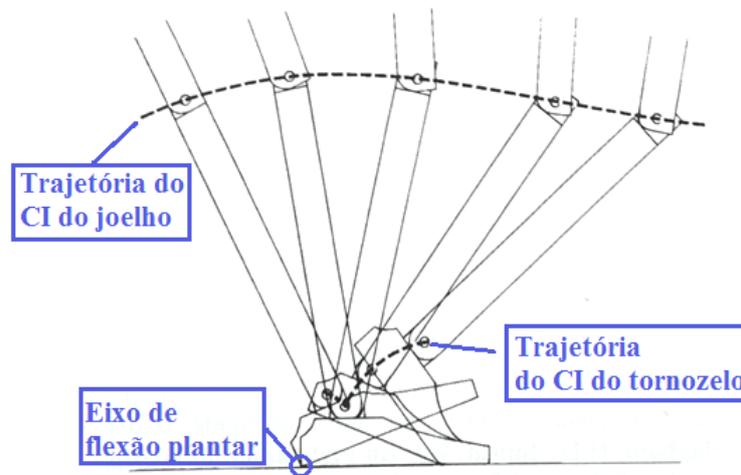


Figura 2.5 – Trajetória dos centros instantâneos de rotação do joelho e tornozelo no plano **XY**. Fonte: Inman et al., 1981

No momento do toque do calcanhar, o CM está descendo. Para desacelerá-lo, há uma flexão do joelho contra a resistência do músculo quadríceps, junto com a flexão do pé contra o músculo tibial anterior. O eixo da flexão plantar fica próximo ao ponto de contato do calcanhar, e à medida que o pé flexiona, o tornozelo desce e se desloca para frente. Os músculos anteriormente mencionados são responsáveis por um movimento mais suave e desacelerado. Após o apoio médio, a descida do CM também é retardada por um alongamento relativo da perna que apoia o peso, obtida com a extensão do joelho, a flexão plantar no tornozelo e a supinação do pé [Inman et al., 1981].

2.5 Funções do joelho durante a marcha

Ao analisar o joelho humano surgem três funções distintas do mesmo: I) absorção de impacto; II) Suporte; III) Encurtamento do membro [Rose e Gamble, 1998; Shurr et al., 2002; Seymour, 2001].

2.5.1 Absorção de impacto

Após o início do contato do pé com o solo, é permitido um movimento de flexão controlada do joelho, para absorção de choque durante o carregamento do peso. Como explicado anteriormente, essa flexão suaviza a queda abrupta do centro de massa no momento

de duplo apoio [Inman et al., 1981]. Na aplicação de próteses e órteses, a absorção de choque do joelho é de difícil reprodução. Além de absorver esse choque, o joelho deve prover estabilidade na fase de apoio. Controlar essa flexão inicial de absorção, sem que haja instabilidade, e ainda também ter um meio de controle da extensão durante a fase de balanço, é algo complexo e de difícil reprodução. [Seymour, 2001; Shurr et al., 2002; Omarsson et al., 2012b].

2.5.2 Suporte

A estabilidade do joelho é mantida pelos músculos de extensão e flexão, atuando em contrarreação do momento criado pela posição do centro de pressão, gerado pelas forças de reação do solo. Em indivíduos amputados, que não possuem mais o controle dessa musculatura, existem meios de fixação da prótese para facilitar a manutenção da estabilidade do joelho mecânico (Figura 2.6) [Shurr et al., 2002].

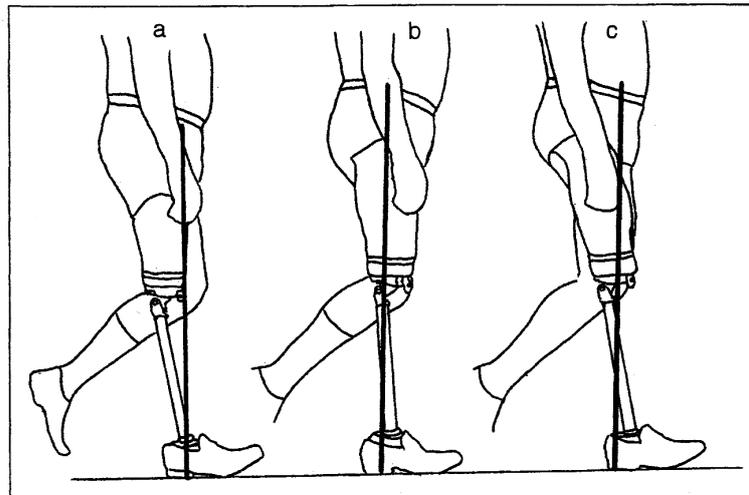


Figura 2.6 – Métodos de controle do suporte por indivíduos com amputação acima do joelho. Fonte: Shurr et al., 2002

Em indivíduos com amputação acima do joelho, esse controle pode ser feito por três métodos [Rose e Gamble, 1998; Shurr et al., 2002]: I) mudando o alinhamento do joelho para reposicionar a sua junta posterior ou anteriormente as forças de reação (a); II) posicionar o centro de massa do corpo mais a frente, inclinando o tronco durante a marcha, o que por si só não é uma solução ideal (b); III) forçar a atuação dos extensores do quadril, de modo a

aumentar a pressão no calcanhar no momento do contato com o solo, forçando o centro de pressão a se deslocar para um ponto posterior (c). O momento de pré-balanço é também crítico para o joelho, pois há flexão controlada enquanto ainda há carregamento pelo peso do corpo, pois ainda não ocorreu totalmente a transferência de peso para o membro oposto. Muitas vezes, usuários de próteses retardam o momento de flexão do joelho, até que essa transferência já tenha ocorrido [Shurr et al., 2002].

2.5.3 Encurtamento do membro

A ocorrência de uma flexão do joelho no momento de pré-balanço e sua importância para o encurtamento do membro já foram explicitadas anteriormente. É importante salientar, que essa flexão, que é de 60° a 65° [Rose e Gamble, 1998], deve ser atingida nesse instante, tendo o risco de não ser alcançável em momento posterior. Ao se utilizar uma prótese, um excesso de flexão resulta em uma elevação abusiva do calcanhar, enquanto uma extensão muito rápida resulta em um impacto do mecanismo em fim de curso do joelho. Quando há a utilização de próteses com joelho travado, para priorizar a estabilidade, outros movimentos compensatórios devem ser utilizados para dar passagem ao membro. O usuário pode realizar três tipos de compensação: I) executar um movimento de circundação com a perna, através da contração dos músculos abdutores do quadril durante a flexão do quadril, em uma trajetória circular por fora do corpo; II) movimento oblíquo do quadril (rotação em **X**) para uma abdução relativa da pélvis a fim de aumentar a distância entre o solo e a articulação do quadril; III) flexão plantar do membro de apoio durante a fase de médio-apoio, também para aumentar a distância entre o quadril e o solo. Todos os movimentos de correção mencionados elevam o gasto energético se comparados com uma marcha normal. O movimento III é o que possui o maior gasto, pois há deslocamento vertical de maior quantidade de massa, seguindo pelo movimento II, onde há o deslocamento vertical de metade do corpo [Rose e Gamble, 1998].

2.6 Amputações de membro inferior

A natureza das amputações pode ter diferentes origens, sendo as mais comuns: complicações por doenças vasculares periféricas, trauma, tumores, deformidade congênita e em menores números, dores crônicas e membros inutilizados por danos neurológicos [Marshall

e Stansby, 2010]. A definição do nível de amputação leva em conta a severidade da doença vascular, o grau de perda de tecido e a qualidade do tecido que compõem as abas para sutura. As amputações para o pé são divididas em *Desarticulação dos pododáctilos* (dedos do pé), *amputação Transmetatarsal*, *Tarsal-metatarsal ou amputação de Lisfranc* e *Desarticulação Mesotársica ou de Chopart*, *Desarticulação de tornozelo ou de Syme* e *Transtibial* para a amputação que secciona os ossos Tíbia e Fíbula. Como este trabalho é focado em próteses de joelho, foram estudadas somente as amputações que levam ao uso desse dispositivo, que são: *Desarticulação de joelho*, *Amputação Transfemural (ATF)* e de *Desarticulação do quadril*. Esta última não foi profundamente estudada neste trabalho, pois acarreta em condições muito mais difíceis de reabilitação e sua frequência é muito menos comum que as demais [Shurr et al., 2002]. Os posicionamentos destes níveis de amputação são ilustrados na Figura 2.7.

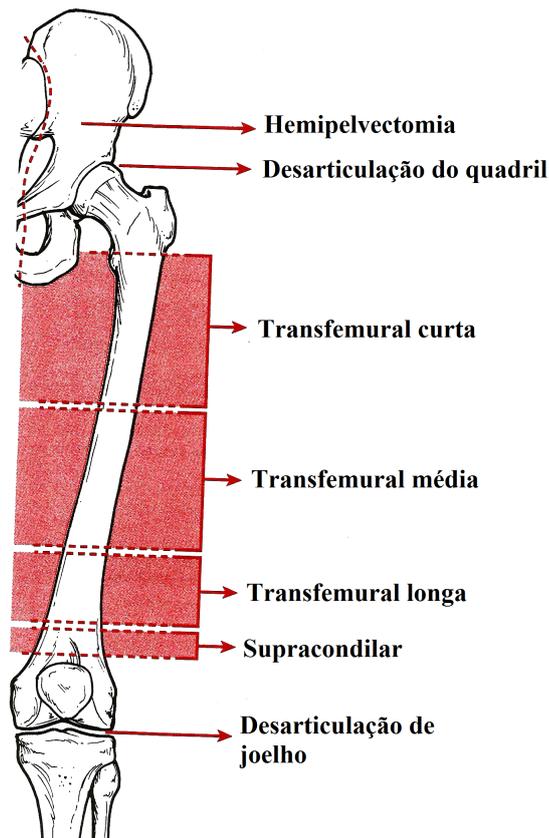


Figura 2.7 – Métodos de controle do suporte por indivíduos com amputação acima do joelho. Fonte: Seymour, 2001

2.6.1 Desarticulação do joelho

A desarticulação do joelho é normalmente aplicada quando a amputação transtibial não é viável, geralmente por falta de oxigenação suficiente ou gangrena nos tecidos necessários para a sutura, havendo uma preferência por este tipo de cirurgia na população idosa, pois há uma facilidade de recuperação pós-cirúrgica [Baumgartner, 1979]. O coto (membro remanescente) resultante desse procedimento permite uma maior capacidade de suporte de peso em sua extremidade, pois preserva sua epífise distal. No caso de crianças, isto é vantajoso, pois o fêmur continua a crescer junto com o desenvolvimento da criança, mantendo um braço de alavanca longo para o controle da prótese e evitando o supercrescimento ósseo [Anderson, 2005; Shurr et al., 2002]. A fixação da prótese no coto é feita através de uma peça plástica moldada chamada soquete. A sua sutura dessa cirurgia permite um bom encaixe de uma prótese, sem a necessidade que o soquete distribua o peso pelo resto do coto, como é o usual, mas concentrando o peso em sua extremidade distal. A cirurgia é considerada de baixo risco para o paciente e preserva a musculatura de flexão e extensão da perna, que pode ser utilizada normalmente, ao contrario de amputações acima do joelho como a transfemural, onde o movimento protético posterior é controlado pela musculatura de flexão e extensão da pélvis. Sua cirurgia secciona os músculos a nível de tendão, o que facilita a sua posterior fixação e mantém mais o tônus muscular em comparação com amputações através do osso. Esta amputação possui certas desvantagens, como a necessidade de uma boa condição de tecido da panturrilha, que irá cobrir a epífise do osso. O coto resultante, de forma volumosa, pode facilitar o encaixe de próteses como antes mencionado, mas possui um aspecto que muitas vezes desagrada os pacientes, principalmente do sexo feminino [Anderson, 2005]. Pacientes usuários de diálise podem encontrar dificuldade de fixação do coto, pois sua espessura varia conforme o inchaço, que muda seu volume constantemente antes e após o procedimento [Hunter, 1996]. Quando o paciente está sentado, a sua prótese de joelho permanece dobrada para que os dois pés encostem no chão. Como o seu coto mantém o tamanho total do fêmur original, a extremidade da coxa mais a prótese de joelho acaba por ser mais longa que a distância da pélvis até a extremidade do joelho da perna não amputada, desse modo, para que as pernas tenham o mesmo comprimento, o tubo que une o pé ao joelho da prótese tem de ser mais curta para compensar essa diferença. Assim, quando sentado, a perna protética sofre um encurtamento, o que obriga o paciente a estender a perna para encostar o pé no

chão. Esse movimento é desconfortável para o usuário, tanto fisicamente quanto psicologicamente. Para minimizar esse encolhimento, a prótese de joelho para esse nível de amputação deve ser projetada para ter sua altura total o mais curta possível.

2.7 Amputação transfemural (ATF)

A amputação transfemural (ATF), que é uma amputação acima do joelho, é realizada nos casos de: uma doença, trauma, isquemia da perna e do pé, ou tumor impossibilitar uma amputação abaixo do joelho, ou quando o tecido necessário para uma desarticulação do joelho é insuficiente ou inutilizável. Ela é feita de modo a seccionar o fêmur de maneira a preservar um coto mais longo possível, pois o comprimento maior permite um coto mais forte, com mais controle e com um maior braço de alavanca. Mesmo que o paciente esteja com alguma debilidade que impossibilite a sua locomoção, um coto maior facilita sua transferência entre a cama e a cadeira, além de mantê-lo sentado mais confortavelmente em uma cadeira de rodas [Anderson, 2005]. Também é indicada para evitar casos de contratura em flexão de joelho, quando o mesmo não consegue atingir sua extensão total, pois a musculatura de flexão é mais forte que de extensão. Nos séculos passados, devido as condições de operação e assepsia, as amputações a nível de desarticulações eram preferíveis, pelo tempo de operação, pela quantidade de sangue perdida e pelo risco de infecções. Atualmente, tanto a qualidade das condições cirúrgicas e técnicas pré e pós-cirúrgicas, além da utilização de antibióticos, diminuiu muito o risco de vida para amputações seccionando ossos. Deste modo, este tipo de amputação não é mais de grande risco. Para amputações transfemorais longas, o corte é feito ao nível supracondilar do fêmur, onde os músculos extensores e abdutores do quadril permanecem inalterados. Essas qualidades e a utilização de todos os componentes protéticos para esse nível de amputação servem tanto para um coto longo quanto um médio, com seção na metade do comprimento do fêmur. Em cotos curtos, com comprimentos entre 5 a 7 centímetros, a manutenção do equilíbrio na fase de apoio é muito difícil de ser realizada pelos músculos extensores. Como a fixação da prótese se dá pelo apoio na parte posterior da coxa, uma menor área de distribuição de peso acarreta em desconforto. Há uma perda no controle e estabilidade nas fases de apoio e balanço da marcha, o que limita os tipos de joelhos disponíveis. Amputações com cotos curtos também aumentam as chances de uma contração involuntária em flexão de quadril [Shurr et al., 2002].

2.8 Partes de uma prótese

Durante muitos anos, as próteses nada mais eram que partes rígidas com formato semelhante ao membro em reposição. Elas pouco auxiliavam em uma locomoção natural e tinham como principal função a estética, acobertando a anormalidade física do membro faltante com formas moldadas em plástico laminado e respondem pelo nome de *próteses exoesqueléticas*. Com o passar dos anos, foram sendo introduzidas juntas para recriar o movimento do tornozelo e joelho, além de algum amortecimento via buchas de borracha nos pés-protéticos. Sua evolução foi dada pelo crescimento gradual da “função” sobre a “estética” e as primeiras *próteses modulares ou endoesqueléticas* começaram a surgir (Figura 2.8) [Seymour, 2001].

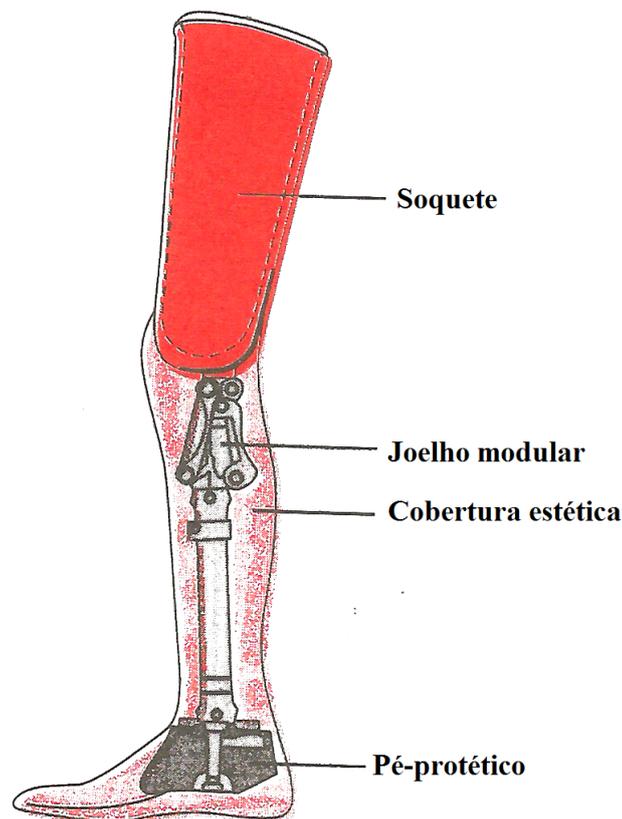


Figura 2.8 – Partes que dividem uma prótese modular. Fonte: Seymour, 2001

Suas partes principais são: *Copo ou soquete*; *joelho*; *tubo de conexão* entre o pé e o joelho; e o *pé*. O Soquete é onde o coto se encaixa e sua função é distribuir as forças exercidas pelo membro remanescente para a prótese e também prover sua fixação de modo

seguro, mas evitando lesões na pele via uma distribuição uniforme de forças de contato. Usualmente utiliza-se uma capa de silicone e tecido entre o coto e o soquete para melhor acomodar a forma e preservar as forças de cisalhamento de gerarem lesões. O joelho gerencia a estabilidade da prótese durante a fase de apoio e seu comportamento cinético na fase de balanço. O tubo de conexão une o joelho protético ao pé, ajustando seu comprimento para equiparar-se ao da perna sadia. O pé contribui para a estabilidade do joelho, absorve impacto no momento de toque do calcanhar e armazena energia potencial do movimento para impulsionar o indivíduo na marcha [Shurr et al., 2002; Rose e Gamble, 1998; Seymour, 2001; Tang et al., 2008; Kelly et al., 2007; Kistenberg, 2014; Chitragari e Mahler, 2014].

É importante salientar que “o sistema locomotor é completamente integrado, com tronco e membros contribuindo para o sistema harmônico do todo. A amputação não resulta apenas em perda física da parte amputada, mas também na remoção de sua contribuição específica para todo o mecanismo. Portanto, torna-se necessário compensar a perda funcional, por meio de alterações no comportamento das partes remanescentes do sistema” [Rose e Gamble, 1998], mas realisticamente, tratando-se de substituições por partes mecânicas, um comprometimento na função deve ser aceitável [Shurr et al., 2002]. Como o enfoque deste trabalho foram os joelhos, seus subtipos é que serão descritos em maiores detalhes.

2.8.1 Joelho protético

A estabilidade do joelho é a capacidade do mesmo se manter estendido e com total suporte durante a fase de apoio. Normalmente é a capacidade do paciente de se manter estável, via ação dos músculos extensores do quadril. Os tipos de joelhos podem ser classificados segundo: seu eixo; tipo de fricção; tipo de freio ou dispositivo de trava; e controlados por microprocessador [Seymour, 2001]. A Figura 2.9 ilustra os diversos tipos de joelho descritos, com exemplos de produtos encontrados atualmente no mercado:



Figura 2.9 – Tipos de joelhos-protéticos. (A) Trava manual (ST&G), (B) Uni-axial (ST&G), (C) Policêntrico (Össur), (D) Uni-axial hidráulico (Össur), (E) Microprocessador (Otto bock), (F) Microprocessado (Össur). Fonte: Chitragari e Mahler, 2014

2.8.1.1 Tipos de eixo

Os principais tipos de eixo de uma prótese de joelho são:

- **Uni-axial:** Joelho que possui somente uma junta de rotação fixa, onde não há controle sobre a fase de balanço (Figura 2.9 (B)). É um mecanismo simples, de alta confiabilidade, baixa manutenção e custo [Tang et al., 2008]. É recomendado para velocidades de marcha constantes [Seymour, 2001].
- **Poli-axial ou Policêntrico:** Mecanismo de quatro ou mais barras, cujo eixo instantâneo de rotação, translada segundo a configuração dos seus elos (Figura 2.9 (C)). Provê estabilidade durante fase de apoio e encurtamento do membro durante fase de balanço,

para criar um espaço livre entre o solo e o pé. Também é indicado para velocidades constantes de deslocamento. Possuem amortecimento de impacto por leve flexão da perna durante o apoio inicial [Chitragari e Mahler, 2014; Kistenberg, 2014].

2.8.1.2 Tipos de fricção

Quanto aos tipos de fricção essas podem ser:

- **Fricção mecânica:** Dispositivo mecânico de controle da cadência do movimento de balanço da perna, via fricção constante do eixo de rotação do joelho. A fricção é ajustada manualmente, mas permanece constante durante o ciclo de marcha. É durável e de baixo custo, mas não proporciona estabilidade confiável. Se o usuário realizar uma cadência mais elevada, pode resultar em elevação excessiva do calcanhar, pois a resistência à extensão não varia com a velocidade de marcha. Também é suscetível a interferência por sujeira e detritos em suas juntas. Devido a esses problemas, é raramente empregado [Michael, 1999].
- **Fricção Pneumática:** Tanto os dispositivos pneumáticos, quanto os hidráulicos oferecem uma resistência ao movimento de extensão variável com a velocidade de marcha [Bowker e Surgeons, 1992]. Isto se dá através de amortecedores, cujo fluido contido no seu interior é canalizado por passagens que restringem seu fluxo de acordo com a sua velocidade. Nos dispositivos pneumáticos, o ar comprimido serve como controle de fricção e não sofre efeitos por mudanças drásticas de temperatura, contudo sua resistência é menor que um dispositivo hidráulico, logo é recomendado para marchas mais moderadas [Kelly et al., 2007].
- **Fricção hidráulica:** Garante ambulação entre velocidades muito elevadas e muito baixas além de compensar sua resistência automaticamente com a mudança de velocidade (Figura 2.9 (D)). Assim como a pneumática, sua unidade de amortecimento é um sistema fechado, com pouca interferência de partículas de sujeira presentes no ambiente. Para evitar mudanças de resistência por diferença de temperatura, normalmente são utilizados óleos a base de silicone [Michael, 1999]. Maiores detalhes sobre o funcionamento destes mecanismos não foram encontrados na pesquisa realizada.

2.8.1.3 Tipo de freio ou dispositivo de trava

Quanto aos tipos de freios ou dispositivos de trava, as próteses de joelho podem ter um controle de apoio que é usado em pacientes com menor coordenação motora e estabilidade. Pode tanto conter uma trava manual, como o exemplo **A** da Figura 2.9, quando por *ativação por peso*, onde o peso do corpo trava totalmente a junta de rotação (Figura 2.10 [Kistenberg, 2014; Chitragari e Mahler, 2014; Michael, 1999]).

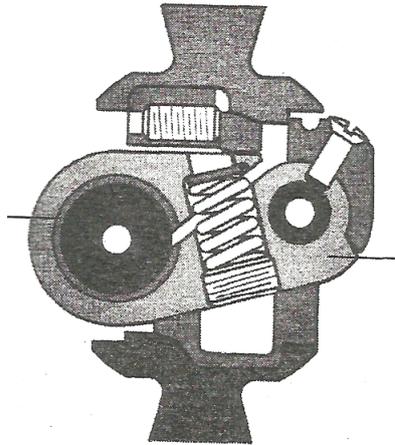


Figura 2.10 – Método de freio de flexão por travamento mecânico. Fonte: Shurr et al., 2002

2.8.2 Controlados por microprocessador

Estes joelhos podem ser uni-axiais ou poli-axiais. A posição angular do joelho é diretamente definida, de acordo com sensores, que detectam movimentos de flexão e extensão, além do tipo de terreno e velocidade de marcha. Um computador de bordo computa a velocidade de marcha e angulação do terreno, e adapta a resistência à flexão através do atuador, para auxiliar o indivíduo a transpor obstáculos, suportar o peso do corpo para subir/descer escadas e controlar a transição da velocidade de marcha entre caminhada e corrida (Figura 2.9 **(E)** e **(F)**). Como desvantagens possui custo elevado, maior peso, maior manutenção e dependência de baterias externas [Seymour, 2001; Bowker e Surgeons, 1992; Chitragari e Mahler, 2014].

2.9 Modelos encontrados no mercado

Nas literaturas consultadas não foram encontradas informações sobre descrições técnicas de próteses específicas, devido aos direitos autorais de suas fabricantes, tampouco os catálogos disponíveis nos sites dessas empresas, agrega informações adicionais, além dos tipos de modelo e suas aplicações. Para contornar essa dificuldade, foram pesquisadas algumas patentes de invenção nos repositórios virtuais de acesso públicos, existentes na Internet. Esta subseção evidencia alguns desses produtos, que podem diferenciar daqueles de fato vendidos no mercado.

A patente de Omarsson et al., 2012a desenvolve o protótipo do joelho “Balance Knee” da Össur. A Figura 2.11 mostra lado-a-lado o protótipo (a) e o produto de catálogo (b).

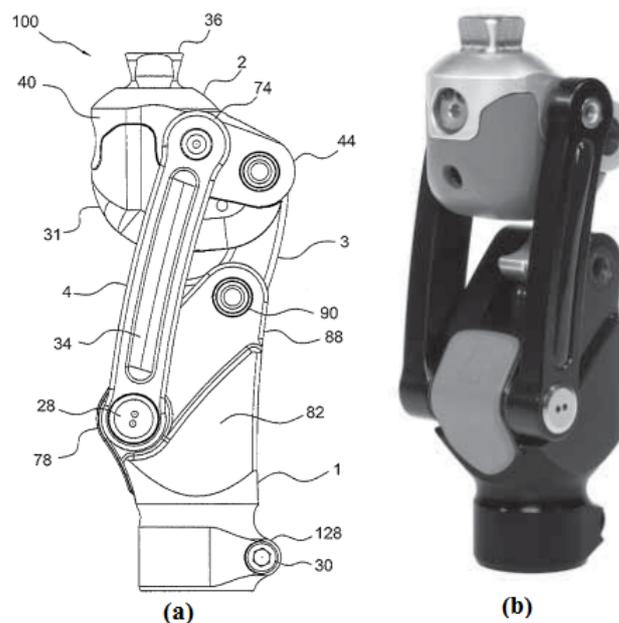


Figura 2.11 – Joelho *Balance Knee* da empresa Össur (A) Protótipo. Fonte: Omarsson et al., 2012a, (B) Produto a venda Fonte:Össur, 2015

Para uma melhor compreensão, a Figura 2.12 mostra uma vista de corte axial, no plano sagital.

Na Figura 2.12 os números seguem a enumeração da patente. Pode-se verificar que é um joelho policêntrico do tipo "quatro-barras", onde o elo posterior (3) tem sua orientação

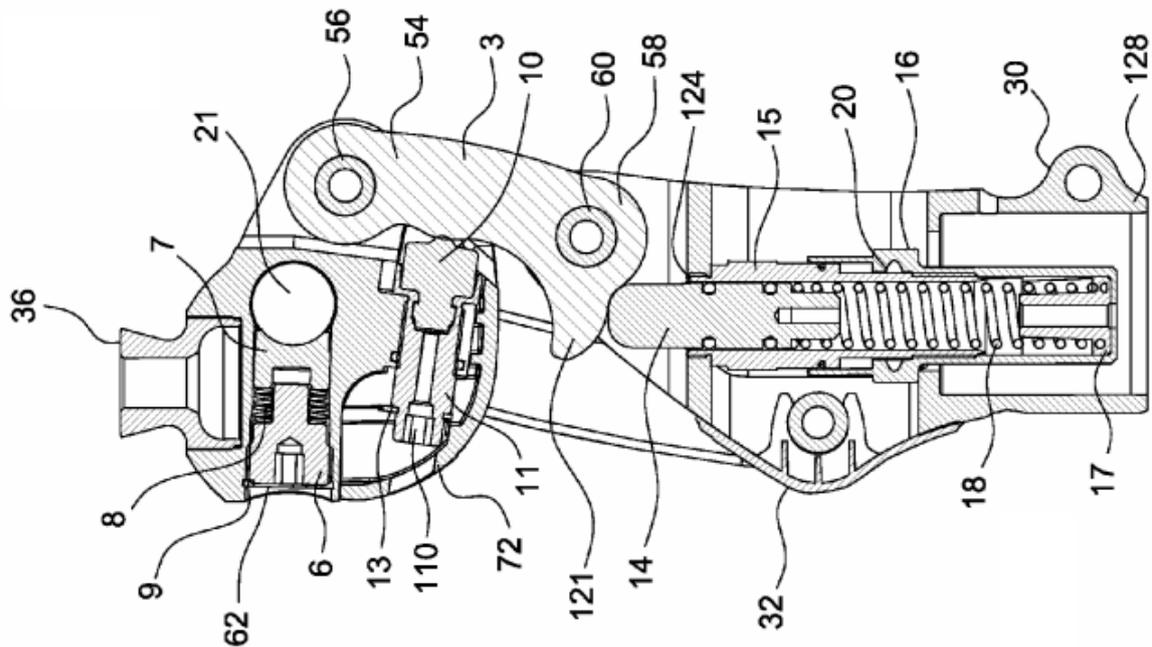


Figura 2.12 – *Balance Knee* com visão de corte axial. Fonte: Omarsson et al., 2012b

controlada por um amortecedor (16), através de um tino. Pode-se dizer que essas duas peças formam um conjunto "came-seguidor". O seguidor (14) está envelopado pela peça 15, aparafusada à peça 20, que por sua vez é fixada a estrutura (32), que abriga o tubo de conexão joelho-pé. Para controlar a velocidade de extensão da perna também existe um controle por fricção mecânica, o conjunto (62). Ao apertar o parafuso (6), se comprime a mola (9), que pressiona a borracha (7) contra o eixo (21), pertencente a junta do elo anterior. O dispositivo (13) controla a angulação máxima de extensão da perna, via parafuso (110), que aproxima e afasta a borracha (10) contra a lateral do elo posterior.

A Figura 2.13 mostra o joelho *Total Knee* da fabricante Össur (b) ao lado de um protótipo (a) adaptado para competições desportivas de corrida para atletas, da patente Karlsson et al., 2013.

Porém há uma grande diferença entre os dois modelos, pois o protótipo é um mecanismo quatro-barras e o *Total Knee* é um joelho policêntrico de cinco elos. Uma vista em corte axial do protótipo ilustra a Figura 2.14.

Exatamente como na Figura 2.12, o protótipo tem controle de fricção mecânica (52), um dispositivo para ajuste do ângulo de extensão máxima (51) e um came-seguidor

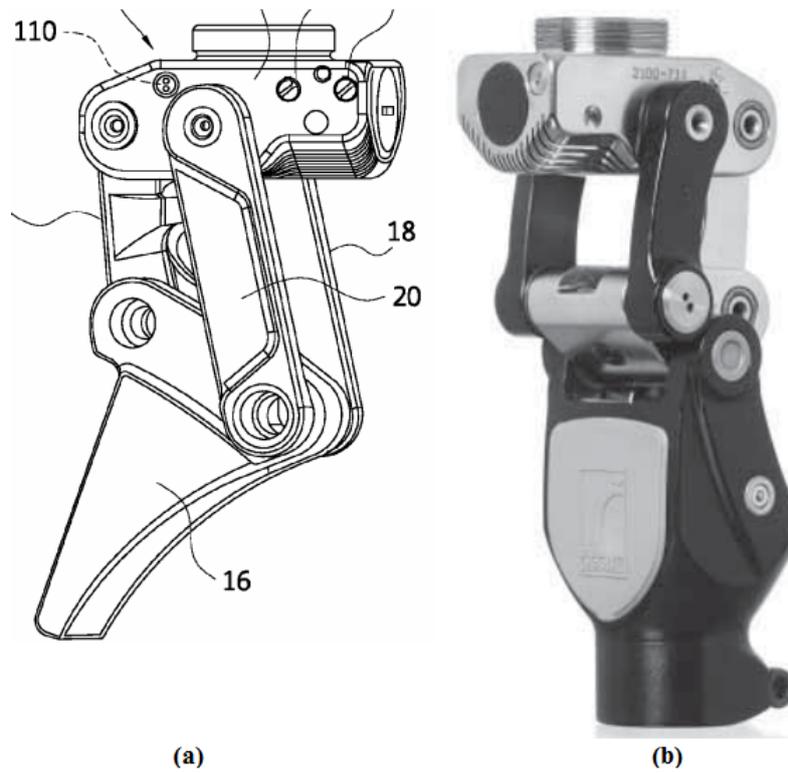


Figura 2.13 – Joelho *Total Knee* da empresa Össur (A) Protótipo. Fonte: Karlsson et al., 2013, (B) Produto a venda Fonte:Össur, 2015

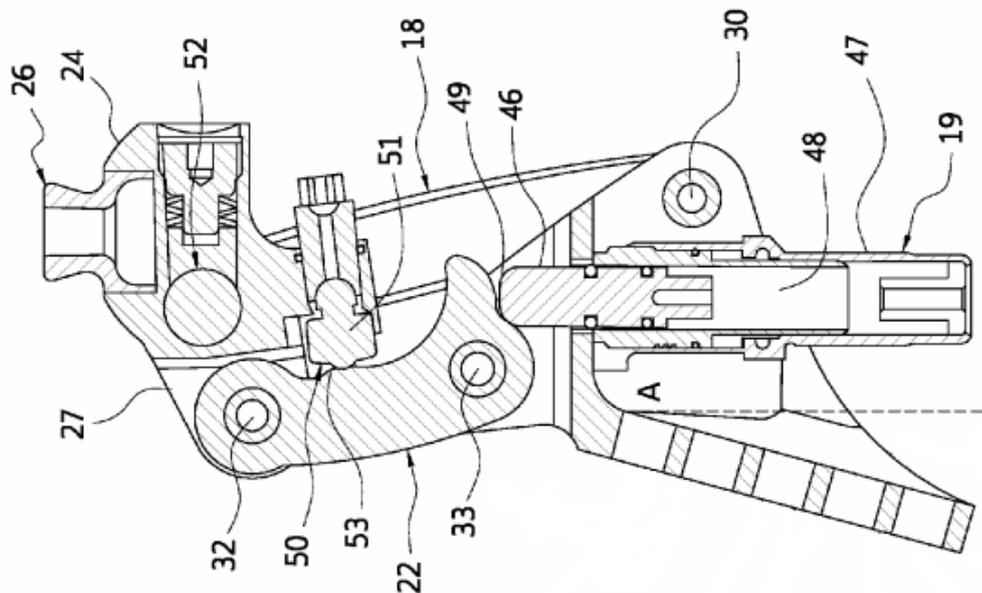


Figura 2.14 – Joelho *Total Knee* em visão de corte axial. Fonte: Karlsson et al., 2013

para amortecer sistema (47).

Além das patentes mencionadas, há outras disponíveis na Internet, mas em sua grande maioria, são iniciativas de inventores particulares, com pouco detalhamento técnico, ou propostas oriundas de universidades, também com pouquíssimo detalhamento do seu funcionamento. O modelo de prótese escolhido para validar o algoritmo deste trabalho está descrito na seção 4.1 com maiores detalhes. Foi escolhido um mecanismo quatro-barras, pois sua implementação foi mais simples para esta etapa do trabalho, por conter menos corpos, e ainda é muito empregado nas próteses modernas.

2.10 Outros trabalhos

Buscando nos bancos de dados de trabalhos científicos *ScienceDirect*, *Portal de Periódicos CAPES*, *IEEE Xplorer Digital* e *Google Acadêmico*, pelas palavras-chave: *prosthetic knee*, *prosthesis biomechanics*, *lower-limb prosthesis*, *mechanical gait* e *mechanical knee*, somente um trabalho com a mesma temática foi encontrado. Os autores Zarrugh e Radcliffe, 1976 propuseram um modelo de um sistema dinâmico para um joelho-protético do tipo “quatro-barras” e obtiveram uma solução para a fase de balanço da marcha humana. Sua resolução foi baseada em conservação da quantidade de movimento e os resultados obtidos foram muito próximos dos adquiridos em ensaios mecânicos. Seu modelo, contudo, não se aplica a mais tipos de configurações de sistemas e as forças de reação nas juntas do mecanismo são desconsideradas. Desse modo, foi buscada outra metodologia de solução de sistemas dinâmicos mais abrangente. A dificuldade em encontrar trabalhos de mesma premissa pode ser explicada pela realização de tais trabalhos dentro de ambiente privado das empresas fabricantes de prótese, e sua não divulgação garante uma hegemonia tecnológica.

3. METODOLOGIA

Ao se referir ao membro inferior, o mesmo é composto pelas partes anatômicas: quadril, coxa, perna e pé. Um indivíduo que necessita de uso de uma prótese de joelho, possui uma amputação do tipo: desarticulação de joelho, transfemural ou desarticulação de quadril. Em se tratando das duas primeiras, somente o quadril e a coxa devem ser incluídos no modelo. Desse modo, para este trabalho, o mecanismo foi subdividido entre: pé-protético (corpo 1), joelho-protético (corpos 1,2 e 4), coxa (corpo 3) e articulação do quadril (ponto O) e a Figura 3.1 ilustra essa simplificação.

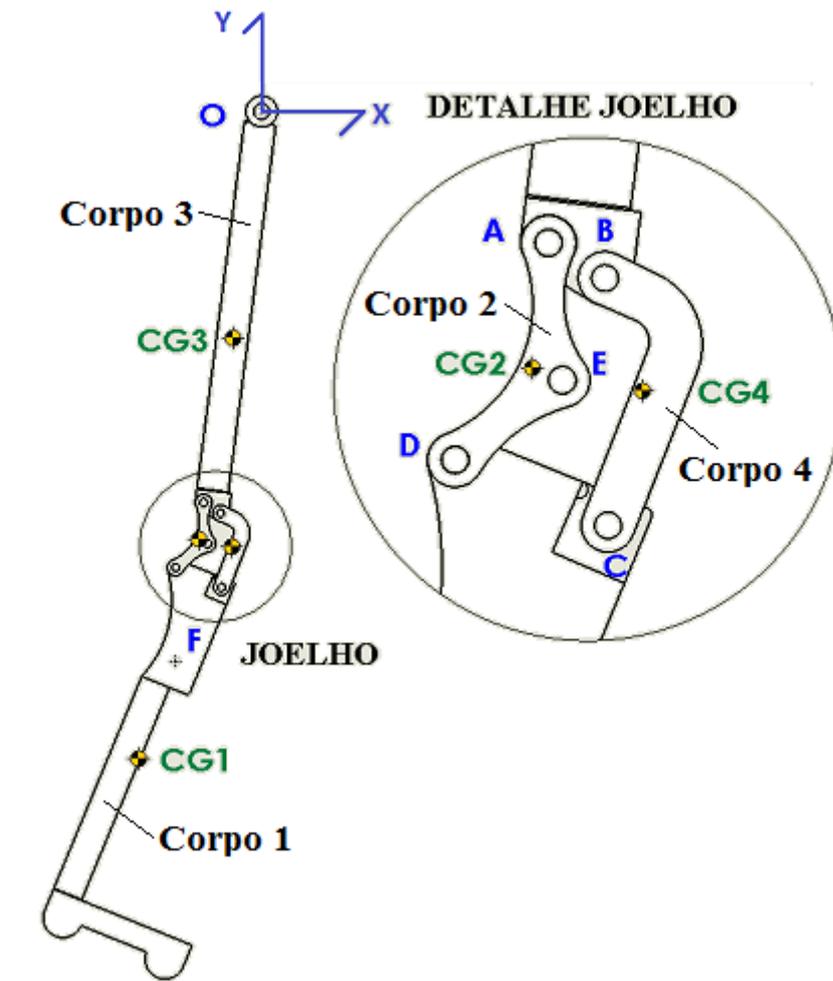


Figura 3.1 – Modelo simplificado do quadril, coxa, joelho protético e pé em CAD

Apesar da formulação que será descrita em seguida considerar qualquer geometria de joelho, foi selecionado para o desenvolvimento do algoritmo e sua validação um joelho do

tipo “quatro barras”, devido ao menor número de elos se comparado com um policêntrico e por ser um empregável tanto para amputados em nível de desarticulação quanto amputação tibial. Essa escolha, contudo, não invalida o uso do mecanismo para geometrias com mais corpos.

Como a complexidade das formulações e o tamanho das matrizes utilizadas nos cálculos dinâmicos aumentam rapidamente com o acréscimo de corpos, esse número foi limitado, agrupando-se algumas partes em um só corpo. No exemplo da Figura 3.1, o copo que sustenta a prótese, a coxa e o elo superior do mecanismo do joelho, foram agrupados em um só corpo (corpo 3), cuja junta nomeada **O** representa a articulação do quadril. Do mesmo modo, o pé-protético, o tubo extensor que conecta o pé ao joelho e o elo inferior do joelho todos fazem parte no corpo 1. A nomeação dos elos do joelho segue uma nomenclatura usual para mecanismos quatro-barras, onde: o corpo 1 agrupa o elo inferior e as demais partes mencionadas; corpo 2 os elos posteriores; corpo 3 o elo superior e coxa; corpo 4 os elos anteriores. Os pontos A,B,C,D são as juntas rotativas do mecanismo, o ponto E do corpo 2 conecta o elemento mola-amortecedor ao ponto F do corpo 1. O mecanismo foi desenhado em ambiente CAD como um objeto 3D e suas partes foram agrupadas em submontagens como as definidas anteriormente. As esferas pretas-amarelas indicam a localização do centro de gravidade (CG) de cada uma das submontagens, daqui em diante referidas como corpos. O sistema de referência **XY** localizado sobre o ponto **O** é o referencial global inercial, onde a direção positiva de **X** aponta para frente, no sentido da caminhada, e a direção positiva de **Y** aponta verticalmente para cima.

3.1 Graus de liberdade do sistema

Para localizar um corpo no espaço, são necessários os valores de suas coordenadas de posição. Formulações dinâmicas para um sistema de corpos rígidos em um ambiente cartesiano em três dimensões, possuem 6 Graus de liberdade (GdL) para cada corpo, aqui designado genericamente pela letra i . Assim são necessários 6 parâmetros de posições espaciais para que o mesmo possa ter sua localização exatamente descrita (ver Figura 3.2).

Em um sistema cartesiano euclidiano, são necessárias 3 coordenadas de translação (x,y,z) e três de posição angular $(\theta_X^i, \theta_Y^i, \theta_Z^i)$ para as rotações nesses eixos, respectivamente

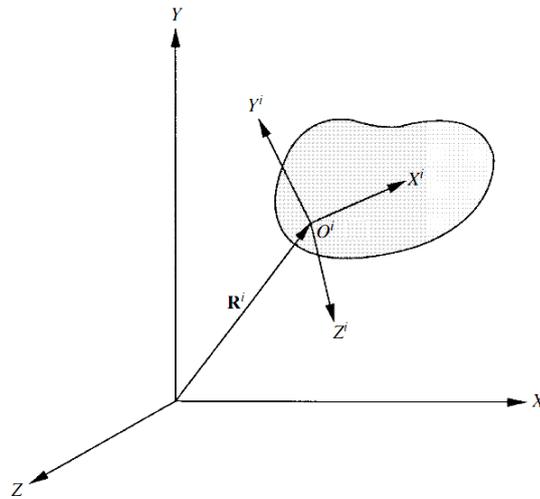


Figura 3.2 – Representação de um corpo livre em um espaço 3D. Fonte: Shabana, 2010

[Josephs e Huston, 2002]. Consta também na Figura 3.2 um sistema de coordenadas local $\mathbf{X}^i\mathbf{Y}^i\mathbf{Z}^i$, cuja origem O^i se encontra a uma distância do sistema global definida pelo vetor posição global \mathbf{R}^i . Durante o movimento de marcha, as articulações reais têm movimentos nos três planos de direções [Shurr et al., 2002; Inman et al., 1981], contudo as maiores amplitudes desses movimentos se encontram no plano sagital, aqui representado como \mathbf{XY} , além disso todos os joelhos-protéticos comerciais realizam movimentos somente neste plano, para que o usuário tenha maior controle e estabilidade durante todo o movimento. Desse modo, cada corpo contribui somente com 3 GdL (x, y, θ_Z^i) . Com isso consegue-se simplificar as formulações do equacionamento dinâmico, assim como diminuir muito o tamanho das matrizes envolvidas nos cálculos. Esse fato ficará mais claro com a explicação do método de formulação, esclarecido em seção seguinte.

Mecanismos cujas coordenadas são totalmente descritas em função dos graus de liberdade são considerados *cinematicamente determinados* e suas velocidades e acelerações podem ser obtidas pela derivação temporal da posição do GdL. Se essa posição de um ou mais GdL não for conhecida, então o sistema é *dinamicamente determinado*. Mecanismos clássicos como o “quatro-barras” tem facilmente o seu número de GdL determinado, assim como seu equacionamento dinâmico é formulável a partir de equações analíticas, por somatório de vetores [Norton, 1961]. Sistemas mais complexos, e principalmente mecanismos de cadeia aberta, se beneficiam de uma solução por abordagem computacional [Huston, 2008;

Josephs e Huston, 2002]. Para resolução cinemática e cinética desse problema, foi utilizada a metodologia apresentada por Shabana, 2010. Nessa metodologia são formulados sistemas de equações não-lineares, para obtenção das posições, velocidades e acelerações, respectivamente nessa ordem, de cada um dos corpos. Além das equações, são seguidas ordens de execução do algoritmo lógico de solução, também descritos no livro e aqui posteriormente reproduzidos. Para a sua resolução, foi empregado o software Matlab, onde todo o algoritmo é executado seguindo a nomenclatura nativa de comandos. Esse programa se encontra na íntegra no APÊNDICE A. Apesar da metodologia utilizada ser de autoria de Shabana, 2010, e a formulação para o fenômeno de contato ser proposta por Machado et al., 2010, a contribuição deste presente trabalho é sua aplicação em um sistema representante de próteses externas de joelho.

3.2 Transformação de coordenadas

Os valores de grandezas representadas por vetores dependem do sistema ao qual estão sendo medidas. A Figura 3.3 ilustra um sistema inercial \mathbf{XY} e um sistema local $\mathbf{X}^i\mathbf{Y}^i$, que possui uma rotação de valor θ^i em sentido anti-horário em relação ao eixo \mathbf{X} inercial.

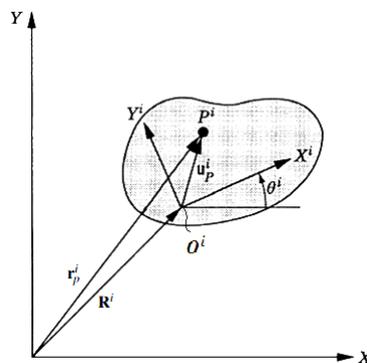


Figura 3.3 – Relação entre coordenadas locais e globais do sistema Fonte: Shabana, 2010

Dado um ponto P^i qualquer, pertencente ao corpo, cuja posição local é expressa pelo vetor (neste trabalho os vetores estão todos com fonte em negrito):

$$\bar{\mathbf{u}}_P^i = [\bar{x}_P^i \quad \bar{y}_P^i]^T \quad (3.1)$$

Onde \bar{x}_P^i e \bar{y}_P^i são as coordenadas locais do ponto. A barra sobre uma coordenada ou vetor indica que a entidade está representada em relação ao sistema local $\mathbf{X}^i\mathbf{Y}^i$. A ausência dessa

barra indica que a entidade está representada no sistema inercial \mathbf{XY} . Esse vetor pode ser decomposto no sistema inercial utilizando-se de uma matriz de rotação \mathbf{A}^i , que para um ambiente 2D é definida por:

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta^i & -\text{sen } \theta^i \\ \text{sen } \theta^i & \cos \theta^i \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

A função da matriz de rotação é rotacionar o sistema \mathbf{O}^i no sentido horário, até estar alinhado com \mathbf{O} . Desse modo, o vetor de posição local de P^i , no sistema inercial, é dado por:

$$\mathbf{u}_P^i = \mathbf{A}^i \times \bar{\mathbf{u}}_P^i \quad (3.3)$$

Lembrando que a posição global da origem \mathbf{O}^i é dada pelo vetor posição global \mathbf{R}^i , assim a posição do ponto P^i global é resultante do somatório vetorial:

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{u}_P^i \quad (3.4)$$

O que resulta em um conjunto de coordenadas chamadas absolutas.

Dessa forma, toda a formulação vetorial para obtenção das grandezas dinâmicas é dada em relação ao sistema inercial de observação. Neste trabalho se utilizou do artifício de coordenadas locais fixas sobre os CGs de cada um dos corpos, cuja orientação acompanhava a posição angular do corpo, pois assim as posições das juntas de rotação são, expressas por vetores locais constantes e tem sua posição relacionada à \mathbf{O} pela Equação 3.4

3.3 Método computacional da análise cinemática

Como mencionado anteriormente, cada corpo contribui para acrescentar 3 graus de liberdade ao sistema, logo a posição de um sistema pode ser descrita por um vetor contendo todas suas coordenadas. Se n for o número de coordenadas e o sistema possui n_b corpos, o número total de coordenadas é de $n = 3 \times n_b$, o que forma o vetor \mathbf{q} definido por:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{q}_{n_b}]^T \quad (3.5)$$

Para cada corpo n_b , os dois primeiros elementos indicam a posição linear no eixo \mathbf{X} e \mathbf{Y} , respectivamente. Já o terceiro elemento indica sua posição angular, assim pode ser representado

pela seguinte equação:

$$\mathbf{q} = [R_x^1 \quad R_y^1 \quad \theta^1 \quad R_x^2 \quad R_y^2 \quad \theta^2 \quad \dots \quad R_x^{n_b} \quad R_y^{n_b} \quad \theta^{n_b}]^T \quad (3.6)$$

Os valores em expoente foram usados para especificar a qual corpo a coordenada ou vetor pertencem.

3.4 Cinemática restrita

A cinemática restrita é uma metodologia de solução de sistemas através de equações de restrição. Para tanto existem duas categorias.

3.4.1 Restrições motrizes

Cada coordenada do sistema pode ter seu valor pré-definido, tanto constante, quanto dependente do tempo e quando isto ocorre, é reduzido um grau de liberdade, pois essa coordenada torna-se uma *coordenada dependente*. Por exemplo no caso de mecanismo quatro-barras, cujo uma das barras tem velocidade angular constante ω^i , a equação seria:

$$\dot{\theta}^i = \omega^i \quad (3.7)$$

Que integrando no tempo resulta na equação:

$$\theta^i = \omega^i t + \theta_o^i \quad (3.8)$$

Onde t é a variável de tempo e θ_o^i é a posição angular inicial da barra. A equação de restrição não precisa necessariamente vincular um valor à uma variável, mas apenas relacionar duas ou mais. No caso se dois corpos i e j têm um ângulo constante entre si, a equação de restrição para este caso seria:

$$\theta^i - \theta^j = c_1 \quad (3.9)$$

Onde c_1 é um valor constante. Equações de mesma natureza das do exemplo são chamadas de *restrições motrizes* e são úteis quando há trajetórias específicas de movimento para um ou mais pontos.

3.4.2 Restrições de juntas

As Restrições de junta são:

- **Solo:** O corpo n possui zero graus de liberdade e é então chamado de terra. Como ele não possui nem movimento de translação, nem de rotação, suas equações de restrição ficam:

$$R_x^i - c_1 = 0, \quad R_y^i - c_2 = 0, \quad \theta^i - c_3 = 0 \quad (3.10)$$

onde c_1, c_2, c_3 são valores constantes.

- **Junta de revolução:** quando dois corpos estão unidos de modo físico por um pino, seus movimentos de translação são restringidos, diminuindo dois GdL do sistema para cada junta deste tipo, representada na Figura 3.4.

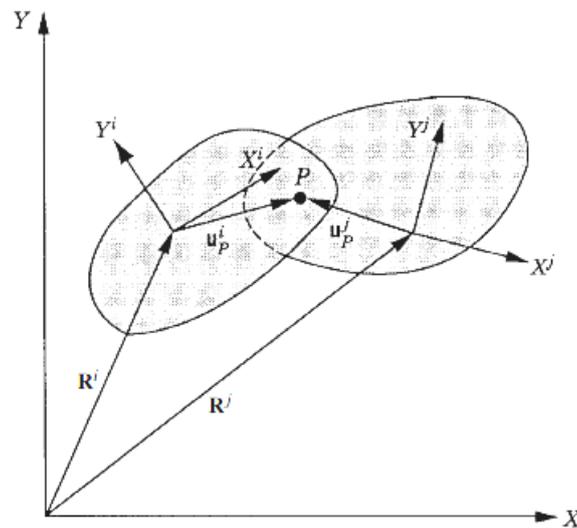


Figura 3.4 – Relação de posição para uma junta de revolução. Fonte: Shabana, 2010

Nela se define que a posição absoluta do ponto P no corpo i é a mesma que a posição relativa de P no ponto j . Matematicamente essa relação é representada pela equação:

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{r}_P^j \quad (3.11)$$

$$\mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i - \mathbf{R}^j - \mathbf{A}^j \bar{\mathbf{u}}_P^j = 0 \quad (3.12)$$

Se o corpo está conectado a uma junta fixa, a equação se torna:

$$\mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i - \mathbf{c} = 0 \quad (3.13)$$

Onde \mathbf{c} é um vetor de constantes. Outras restrições, como *juntas prismáticas*, *comes* e *engrenagens* também tem suas respectivas equações, mas como elas não foram utilizadas no presente trabalho, não são aprofundadas nesse texto. Chamando de \mathbf{C} um vetor contendo todas as equações de restrição em suas linhas, cujo número total de equações é igual a n_c , o mesmo é descrito como:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = [C_1(\mathbf{q}, t) \quad C_2(\mathbf{q}, t) \quad \dots \quad C_{n_c}(\mathbf{q}, t)]^T = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Onde $\mathbf{0}$ é um vetor nulo de tamanho n_c

O mecanismo descrito na Figura 3.1 possui quatro corpos no total, o que em um ambiente em 2D proporciona um sistema de 12 GdL. Ele possui 5 juntas rotativas, nomeadas **A**, **B**, **C**, **D**, **O**, que segundo a Equação 3.12, cada uma reduz o número de GdL em 2, resultando em um sistema de 2 GdL. Caso o corpo 3, que representa a coxa, possua uma restrição motriz, com sua posição angular definida no tempo, o sistema ainda possui 1GdL, para o qual todas as demais coordenadas absolutas do vetor \mathbf{q} , serão suas variáveis dependentes. Se o número de equações de restrição n_c for igual ao número de coordenadas absolutas n_b , então o sistema é *conduzido cinematicamente* e os valores das velocidades e acelerações podem ser obtidos derivando o vetor posição \mathbf{q} no tempo. Caso $n_c \neq n_b$, então o sistema é *conduzido dinamicamente* e seus valores de posição são dependentes de uma análise de força e não só de uma restrição geométrica.

3.5 Análise de posição

Para se encontrar o valor das posições do mecanismo em um dado instante de tempo, é necessário que a Equação 3.14 seja satisfeita. Essa equação é altamente não-linear, por possuir funções trigonométricas. Como foi utilizado uma metodologia de solução numérica, um meio de tornar a solução válida é utilizar de um *algoritmo Newton-Raphson*. Usando uma expansão em série de Taylor em torno de $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t)$, o vetor das equações de restrição pode ser descrito pelo somatório [Shabana, 2010]:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}, t) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) + \mathbf{C}_q \Delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}(\mathbf{C}_q \Delta\mathbf{q})_q \Delta\mathbf{q} + \dots \quad (3.15)$$

Onde o vetor $\Delta\mathbf{q}$ é o *Vetor de diferenças de Newton*, dado por:

$$\Delta\mathbf{q} = [\Delta q_1 \quad \Delta q_2 \quad \Delta q_3 \quad \dots \quad \Delta q_{n_b}]^T \quad (3.16)$$

Já \mathbf{C}_q é a *matriz jacobiana* do vetor de restrições \mathbf{C} :

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial q_1} & \frac{\partial C_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial C_1}{\partial q_{n_b}} \\ \frac{\partial C_2}{\partial q_1} & \frac{\partial C_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial C_2}{\partial q_{n_b}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial C_{n_b}}{\partial q_1} & \frac{\partial C_{n_b}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial C_{n_b}}{\partial q_{n_b}} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

As equações de restrições de juntas são linearmente independentes quando organizadas dentro do vetor \mathbf{C} . Assumindo que sua derivada em função das coordenadas generalizadas também seja linearmente dependente, a matriz \mathbf{C}_q é não-singular. Se o vetor $\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}$ é a solução desejada, então a seguinte solução é válida:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) + \mathbf{C}_q \Delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}(\mathbf{C}_q \Delta\mathbf{q})_q \Delta\mathbf{q} + \cdots = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

Se o vetor de diferenças de newton for bastante pequeno, os termos de maior ordem da Equação 3.15 são desprezíveis e podem ser cortados, se aproximando de zero:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) + \mathbf{C}_q \Delta\mathbf{q} \approx \mathbf{0} \quad (3.20)$$

O que leva a:

$$\mathbf{C}_q \Delta\mathbf{q} = -\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) \quad (3.21)$$

Quando o sistema é conduzido dinamicamente, há a presença de uma ou mais variáveis independentes, a qual as demais coordenadas dependentes estão vinculadas. Para garantir, de fato, sua(s) independência(s), força-se um valor de diferença de Newton nulo para essa(s) coordenada(s). Para tal, há a adição de linhas no vetor de restrições, e linhas e colunas no seu jacobiano, como mostra a Equação 3.22. A matriz \mathbf{Id} é uma matriz booleana, com valor 0 nas posições das coordenadas dependentes e valor 1 nas coordenadas independentes, com uma linha correspondente para cada variável livre. O vetor $\mathbf{0}$ é um vetor nulo com o número de linhas igual a \mathbf{Id} [Shabana, 2010].

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_q \\ \mathbf{Id} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Para ilustrar a matriz \mathbf{Id} , suponha um sistema com 3 corpos, cujas posições angulares dos corpos 2 e 3 fossem as variáveis livres, então o seu valor seria:

$$\mathbf{Id} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

A Equação 3.22 pode ser resolvida, assumindo que $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$ é não-singular, pois ele torna-se uma matriz quadrada com a adição de \mathbf{Id} em sistemas dinamicamente determinados. Para resolver essa igualdade, utiliza-se de um processo iterativo, onde se designa um valor inicial do vetor \mathbf{q} , que seja próximo ao valor real. O valor de $\Delta\mathbf{q}$ é, então, calculado e somado ao valor atualizado do vetor \mathbf{q} para um passo de iteração seguinte:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \Delta\mathbf{q}_k \quad (3.24)$$

Onde a letra k designa o número atual de iteração e $k + 1$ a iteração seguinte. Em outras palavras, partindo de uma aproximação das posições dos corpos do sistema, a minimização do vetor $\Delta\mathbf{q}$ reduz a diferença entre o valor aproximado calculado e o real. Esse processo é revisto com detalhes quando o fluxograma do algoritmo é explicado em seção posterior.

3.6 Análise de velocidade

Para obter a equação de solução das velocidades do sistema, basta derivar a Equação 3.14 no tempo, o que pela regra da cadeia para uma função de duas variáveis, tem-se:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t} \quad (3.25)$$

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{C}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_t = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

na qual \mathbf{C}_t é a é o vetor de derivadas parciais das equações de restrição \mathbf{C} :

$$\mathbf{C}_t = \left[\frac{\partial C_1}{\partial t} \quad \frac{\partial C_2}{\partial t} \quad \frac{\partial C_3}{\partial t} \quad \cdots \quad \frac{\partial C_{n_b}}{\partial t} \right]^T \quad (3.27)$$

Conhecendo-se os valores de posição, obtidos pela resolução numérica da Equação 3.22, pode-se calcular os valores de suas velocidades no mesmo instante. Do mesmo modo que a equação de posição, caso se trabalhe com variáveis livres, as velocidades dessas

variáveis independentes são definidas utilizando a mesma matriz booleana \mathbf{Id} , de tal modo que [Shabana, 2010]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_q \\ \mathbf{Id} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_t \\ \dot{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

onde $\dot{\mathbf{q}}_i$ é um vetor contendo as velocidades das variáveis independentes, que são presumidamente conhecidas e fornecidas. A ordem desse vetor segue a mesma ordem de variáveis designada pela matriz \mathbf{Id} . Seguindo o mesmo exemplo da Equação 3.23, o seu vetor $\dot{\mathbf{q}}_i$ seria [Josephs e Huston, 2002]:

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\theta}^3 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

3.7 Análise da aceleração

Os valores de aceleração do sistema podem ser obtidos da conhecida equação de movimento, onde as forças inerciais são iguais as forças externas aplicadas sobre o sistema. Para que a mesma fosse descrita de uma forma útil, utilizou-se dos conceitos de deslocamentos virtuais e o trabalho virtual gerado por forças generalizadas do sistema, representadas por multiplicadores de Lagrange. Desse modo, o deslocamento virtual de um vetor \mathbf{r} , que depende tanto das coordenadas generalizadas \mathbf{q} , quanto do tempo t , pode ser obtido ao derivá-lo no tempo [Shabana, 2013]:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (3.30)$$

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt \quad (3.31)$$

O deslocamento virtual do corpo se dá por uma variação do vetor de posição \mathbf{r} no sentido das suas coordenadas generalizadas \mathbf{q}^i que não estejam impedidas por alguma restrição. Essa variação virtual ocorre considerando o tempo constante e se utiliza o símbolo δ para descrevê-la. Desse modo a Equação 3.31 fica:

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (3.32)$$

Se o corpo possui um vetor posição, como o a Equação 3.4, seu deslocamento virtual é:

$$\delta \mathbf{r}^i = \delta \mathbf{R}^i + \delta(\mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i) \quad (3.33)$$

Como $\mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i$ depende somente de uma variável, a orientação angular θ^i , a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\delta \mathbf{r}^i = \delta \mathbf{R}^i + \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \delta \theta^i \quad (3.34)$$

onde \mathbf{A}_θ^i é a derivada parcial de \mathbf{A} em relação à θ^i :

$$\mathbf{A}_\theta^i = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta^i} = \begin{bmatrix} -\text{sen } \theta^i & -\text{cos } \theta^i \\ \text{cos } \theta^i & -\text{sen } \theta^i \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

A equação de movimento se baseia no princípio de D'Alembert (Figura 3.5).

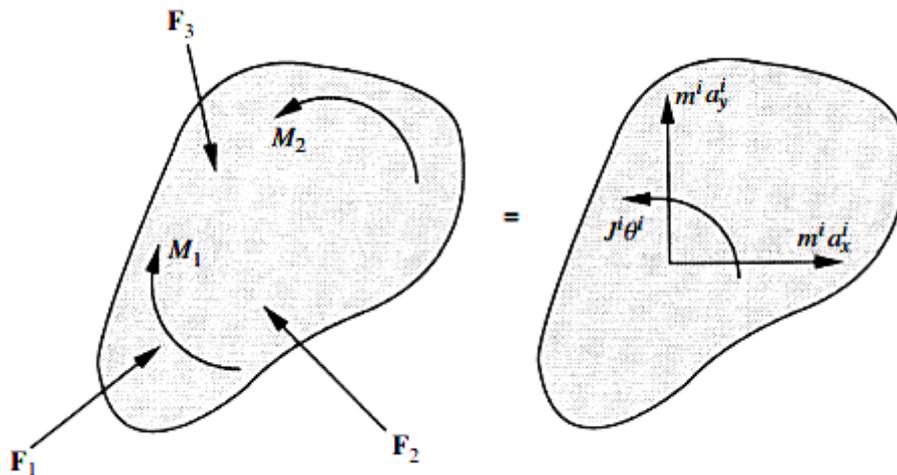


Figura 3.5 – Princípio de D'Alembert Fonte: Shabana, 2010

A figura indica que mesmo que um corpo i não esteja em equilíbrio estático, ele pode ser resolvido considerando um *equilíbrio dinâmico*. Dessa forma, as forças externas que atuam no corpo são iguais as forças de inércia do próprio corpo:

$$\begin{cases} m^i a_x^i = F_x^i \\ m^i a_y^i = F_y^i \\ J^i \ddot{\theta}^i = M o^i \end{cases} \quad (3.36)$$

A força F_x^i é a força resultante da soma de todas as componentes na direção X das forças F_1 , F_2 e F_3 , assim como F_y^i é a resultante do somatório de suas componentes na direção Y . O valor de $M o^i$ é a resultante de todos os momentos aplicados sobre o corpo, no caso M_1 e M_2 .

Tendo em mente que o *trabalho virtual* é uma grandeza gerada pela aplicação de uma força por um deslocamento virtual em um instante de tempo, o princípio de D'Alembert pode ser escrito em forma dessas grandezas (Equação 3.37). Nela δW_i^i é o trabalho virtual das forças de inércia, δW_e^i o trabalho das forças externas e δW_c^i o trabalho virtual gerado pelas forças de reação nas juntas de restrição.

$$\delta W_i^i = \delta W_e^i + \delta W_c^i \quad (3.37)$$

O trabalho virtual também pode ser descrito por forças generalizadas. Como exemplo, um corpo i é submetido a uma força \mathbf{F}^i sobre um ponto P pertencente ao corpo, e também um momento de valor M^i . O trabalho virtual gerado por essas forças seria [Josephs e Huston, 2002]:

$$\delta W^i = \mathbf{F}^{iT} \delta \mathbf{r}_P^i + M^i \delta \theta^i \quad (3.38)$$

Substituindo o valor de $\delta \mathbf{r}$ da Equação 3.34, resulta em:

$$\delta W^i = \mathbf{F}^{iT} (\delta \mathbf{R}^i + \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \delta \theta^i) + M^i \delta \theta^i = \mathbf{F}^{iT} \delta \mathbf{R}^i + (\mathbf{F}^{iT} \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_P^i + M^i) \delta \theta^i \quad (3.39)$$

$$\delta W^i = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{iT} & \mathbf{F}^{iT} \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_P^i + M^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^i \\ \delta \theta^i \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^i \\ \delta \theta^i \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

repare que:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{iT} & \mathbf{F}^{iT} \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_P^i + M^i \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

onde \mathbf{Q} é o vetor de forças generalizadas associadas aos coordenadas do ponto de referência e rotação do corpo. Essa relação nada mais é do que um sistema equipolente de forças, onde

uma força em um ponto qualquer do corpo pode ser representada por uma mesma força sobre sua coordenada referencial, mais um momento proporcional à distância entre a força e a coordenada [Fishwick, 2007].

Para descrever o trabalho virtual das forças de reação, pode-se usar o conceito de multiplicadores de Lagrange. Dado dois corpos, i e j ligados por uma junta rígida, o vetor de restrição \mathbf{C} pode ser rearranjado segundo as coordenadas do corpo i , \mathbf{q}^i , e as do corpo j , \mathbf{q}^j , logo, $\mathbf{C}(\mathbf{q}^i, \mathbf{q}^j)$. Este vetor é função das coordenadas generalizadas dos dois corpos e é expresso por [Shabana, 2010]:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i - \mathbf{R}^j - \mathbf{A}^j \bar{\mathbf{u}}_P^j \\ \theta^i - \theta^j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

Calculando-se o jacobiano do vetor de restrições, o mesmo pode ser particionado, de modo a isolar seu resultado das componentes do corpo i e do corpo j , de modo que:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{q}^i} & \mathbf{C}_{\mathbf{q}^j} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

onde:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}^i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_{\theta}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{q}^j} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_{\theta}^j \bar{\mathbf{u}}_P^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

na qual \mathbf{I} é uma matriz identidade 2x2. A Figura 3.6 mostra o diagrama de corpo livre dos dois corpos i e j , ilustrando as forças e momentos de reação da junta. Seus vetores tem sentidos opostos seguindo a Terceira Lei de Newton.

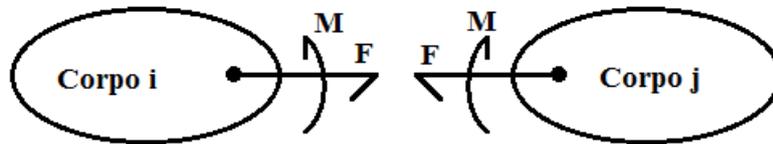


Figura 3.6 – Diagrama de corpo livre de dois corpos unidos por uma junta rígida

Sendo $\boldsymbol{\lambda}$ um vetor de forças dado por:

$$\boldsymbol{\lambda} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ M \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Chamando a força atuante sobre o corpo i de \mathbf{F}^i , seu valor é igual a $-\boldsymbol{\lambda}$, enquanto a força sobre o corpo j , \mathbf{F}^j , seria igual a $\boldsymbol{\lambda}$. Utilizando um sistema equipolente de forças em forma de forças generalizadas, como \mathbf{Q} da Equação 3.40 sobre o corpo i , tem-se [Shabana, 2013]:

$$\mathbf{Q}_c^{iT} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ M + \bar{\mathbf{u}}_P^i T \mathbf{A}_\theta^i T \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Pois:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_P^i = \bar{\mathbf{u}}_P^i T \mathbf{A}_\theta^i T \mathbf{F} \quad (3.47)$$

Já para o corpo j suas forças generalizadas são:

$$\mathbf{Q}_c^{jT} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ M + \bar{\mathbf{u}}_P^j T \mathbf{A}_\theta^j T \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Ambos os valores \mathbf{Q}_c^i e \mathbf{Q}_c^j , podem ser reescritas como:

$$\mathbf{Q}_c^i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \bar{\mathbf{u}}_P^i T \mathbf{A}_\theta^i T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_c^j = - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \bar{\mathbf{u}}_P^j T \mathbf{A}_\theta^j T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ M \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Comparando essas matrizes com as da Equação 3.44, as reações generalizadas são relacionadas com as reações reais por:

$$\mathbf{Q}_c^i = -\mathbf{C}_{\mathbf{q}^i} T \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{Q}_c^j = -\mathbf{C}_{\mathbf{q}^j} T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.50)$$

Para corpo i com n_i juntas de ligação à outros corpos, o vetor \mathbf{Q}_c^i de cada junta é dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_1^i = -(\mathbf{C}_1)_{\mathbf{q}^i}^T \boldsymbol{\lambda}_1 \\ \mathbf{Q}_2^i = -(\mathbf{C}_2)_{\mathbf{q}^i}^T \boldsymbol{\lambda}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{n_i}^i = -(\mathbf{C}_{n_i})_{\mathbf{q}^i}^T \boldsymbol{\lambda}_{n_i} \end{cases} \quad (3.51)$$

O vetor de força de restrição generalizada resultante sobre o corpo i é dado por:

$$\mathbf{Q}_c^i = \mathbf{Q}_1^i + \mathbf{Q}_2^i + \cdots + \mathbf{Q}_{n_i}^i \quad (3.52)$$

Um sistema com n^b corpos terá um vetor total de:

$$\mathbf{Q}_c = \left[\mathbf{Q}_c^{1T} \quad \mathbf{Q}_c^{2T} \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_c^{n_b T} \right]^T \quad (3.53)$$

Colocando em função das equações de restrição e dos multiplicadores de Lagrange:

$$\mathbf{Q}_c = -\mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.54)$$

As forças inerciais de um corpo podem ser descritas pela multiplicação da sua massa, pelas acelerações das coordenadas generalizadas. Em um sistema com n_b corpos, a matriz de massas pode ser deduzida pela equação de energia cinética do sistema. Para um corpo i sua energia cinética T é dada por [Josephs e Huston, 2002]:

$$T^i = \frac{1}{2} \int_V \rho^i (\dot{\mathbf{r}}^i)^T \dot{\mathbf{r}}^i dV^i \quad (3.55)$$

onde ρ^i é a densidade volumétrica do corpo i e V^i seu volume. Derivando o vetor posição \mathbf{r}^i do corpo no tempo (Equação 3.4), tem-se:

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \dot{\mathbf{R}}^i + \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}^i \dot{\theta}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\theta}^i \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

onde, novamente, \mathbf{I} é uma matriz identidade de tamanho 2x2. Ao substituir essa última expressão na Equação 3.55, obtém-se:

$$T^i = \frac{1}{2} \int_V \rho^i \begin{bmatrix} (\dot{\mathbf{R}}^i)^T & \dot{\theta}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{u}}^{iT} \mathbf{A}_\theta^{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\theta}^i \end{bmatrix} dV^i \quad (3.57)$$

Após realizar as multiplicações matriciais, tendo em vista que $\mathbf{A}_\theta^{iT} \mathbf{A}_\theta^i = \mathbf{I}$, o resultado é:

$$T^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\dot{\mathbf{R}}^i)^T & \dot{\theta}^i \end{bmatrix} \left\{ \int_{V^i} \rho^i \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}^i \\ \bar{\mathbf{u}}^{iT} \mathbf{A}_\theta^{iT} & \bar{\mathbf{u}}^{iT} \bar{\mathbf{u}}^i \end{bmatrix} dV^i \right\} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\theta}^i \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Que pode ser reescrita como:

$$T^i = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^i)^T \mathbf{M}^I \dot{\mathbf{q}}^i \quad (3.59)$$

onde [Shabana, 2010]:

$$\dot{\mathbf{q}}^i = \left[(\dot{\mathbf{R}}^i)^T \quad \dot{\theta}^i \right]^T \quad (3.60)$$

$$\mathbf{M}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{RR}^i & \mathbf{m}_{R\theta}^i \\ \mathbf{m}_{\theta R}^i & \mathbf{m}_{\theta\theta}^i \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{m}_{RR}^i = \int_{V^i} \rho_i \mathbf{I} dV^i = m^i \mathbf{I} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{m}_{R\theta}^i = \mathbf{m}_{\theta R}^{iT} = \mathbf{A}_\theta^i \int_{V^i} \rho^i \bar{\mathbf{u}}^i dV^i \quad (3.63)$$

$$\mathbf{m}_{\theta\theta}^i = \int_{V^i} \rho^i \bar{\mathbf{u}}^{iT} \bar{\mathbf{u}}^i dV^i \quad (3.64)$$

O valor de m^i é a massa do corpo, já $\mathbf{m}_{\theta\theta}^i$ é o seu *momento de inércia*. Quando o sistema de referência local é fixado sobre o CG do corpo, os componentes $\mathbf{m}_{R\theta}^i$ e $\mathbf{m}_{\theta R}^i$ são nulos. A Equação 3.59 pode ser utilizada para descrever as forças generalizadas de inercia do corpo. Dessa forma o trabalho virtual de inércia do corpo i pode ser definido por [Shabana, 2010]:

$$\delta W_i^i = \int_{V^i} \rho^i (\ddot{\mathbf{r}}^i)^T \delta \mathbf{r}^i dV^i \quad (3.65)$$

Reescrevendo a Equação 3.34 em forma matricial:

$$\delta \mathbf{r}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^i \\ \delta \theta^i \end{bmatrix} = \mathbf{L}^i \delta \mathbf{q}^i \quad (3.66)$$

Analogamente a Equação 3.56 pode ser reescrita como:

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{L}^i \dot{\mathbf{q}}^i \quad (3.67)$$

Substituindo a Equação 3.3 na Equação 3.4 e tomando a segunda derivada em relação ao tempo, tem-se:

$$\ddot{\mathbf{r}}^i = \ddot{\mathbf{R}}^i + \dot{\theta}^i \dot{\mathbf{A}}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_P^i + \ddot{\theta}^i \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \quad (3.68)$$

onde é possível escrever $\dot{\mathbf{A}}_\theta^i$ da seguinte forma [Shabana, 2010]:

$$\dot{\mathbf{A}}_\theta^i = -\mathbf{A}^i \dot{\theta}^i \quad (3.69)$$

de modo que:

$$\ddot{\mathbf{r}}^i = \ddot{\mathbf{R}}^i - (\dot{\theta}^i)^2 \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i + \ddot{\theta}^i \mathbf{A}_{\theta}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i \quad (3.70)$$

Se a *velocidade angular* de um corpo é representada pelo vetor $\boldsymbol{\omega}$ e a *aceleração angular* pelo vetor $\boldsymbol{\alpha}$, então tem-se:

$$\begin{cases} -(\dot{\theta}^i)^2 \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i = \boldsymbol{\omega}^i \times (\boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{u}_P^i) \\ \ddot{\theta}^i \mathbf{A}_{\theta}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i = \boldsymbol{\alpha}^i \times \mathbf{u}_P^i \end{cases} \quad (3.71)$$

na qual o primeiro termo designa a componente referente à *aceleração normal* e o segundo à *aceleração tangencial*, sendo $\ddot{\mathbf{r}}^i$ seu vetor aceleração resultante. Exatamente como foi feito na Equação 3.66, pode-se escrever o vetor aceleração resultante em termos de \mathbf{L}^i por:

$$\ddot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{L}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \dot{\mathbf{L}}^i \dot{\mathbf{q}}^i \quad (3.72)$$

$$\dot{\mathbf{L}}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dot{\theta}^i \mathbf{A}_{\theta\theta}^i \bar{\mathbf{u}}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\dot{\theta}^i \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^i \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Assim, pode-se substituir as equações 3.66, 3.67, 3.72 na Equação 3.65, resultando:

$$\delta W_i^i = \int_{V^i} \rho^i (\ddot{\mathbf{q}}^i)^T \mathbf{L}^{iT} \mathbf{L}^i \delta \mathbf{q}^i dV^i + \int_{V^i} \rho^i (\dot{\mathbf{q}}^i)^T (\dot{\mathbf{L}}^i)^T \mathbf{L}^i \delta \mathbf{q}^i dV^i \quad (3.74)$$

Assumindo um sistema de coordenadas locais sobre o centro de gravidade, a matriz de massa generalizada \mathbf{M}^i para um corpo i , da Equação 3.61 se torna simétrica e diagonal e também pode ser escrita em relação à \mathbf{L}^i [Shabana, 2013]:

$$\mathbf{M}^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{L}^{iT} \mathbf{L}^i dV^i \quad (3.75)$$

A equação do trabalho das forças de inércia fica:

$$\delta W_i^i = [\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i - \mathbf{Q}_v^i]^T \delta \mathbf{q}^i \quad (3.76)$$

onde \mathbf{Q}_v^i é o *vetor das forças centrífugas de inércia*:

$$\mathbf{Q}_v^i = - \int_{V^i} \rho^i (\dot{\mathbf{q}}^i)^T (\dot{\mathbf{L}}^i)^T \mathbf{L}^i \delta \mathbf{q}^i dV^i \quad (3.77)$$

No caso do sistema de coordenadas de referência estar sobre o CG do corpo, o vetor \mathbf{Q}_v^i tem valor *nulo*. Como já foram definidos nos passos anteriores os valores do trabalho virtual para as forças externas, de inércia e de reação, a Equação 3.37 pode ter seus valores

sistema e \mathbf{Q}_c o vetor de forças de reação generalizadas do sistema. Como o vetor \mathbf{Q}_c pode ser escrito em relação as equações de restrição e dos multiplicadores de Lagrange, como na Equação 3.54, tem-se [Shabana, 2013]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_e \quad (3.85)$$

Se as forças externas \mathbf{Q}_e são conhecidas, as grandezas desconhecidas da Equação 3.85 são: o vetor de acelerações $\ddot{\mathbf{q}}$ de tamanho $n_b \times 1$ e o vetor de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ [Harrison e Nettleton, 1997] de tamanho $n_c \times 1$. Como essa equação contém somente n_b equações, para resolver todas as incógnitas, são necessárias mais n_c equações. Elas são obtidas através das restrições das juntas e de seus deslocamentos prescritos. Diferenciando o vetor \mathbf{C} da Equação 3.14, tem-se:

$$\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{C}_t, \quad \mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_d \quad (3.86)$$

na qual o subíndice t simboliza diferenciação parcial com respeito ao tempo, e \mathbf{Q}_d é o vetor resultante:

$$\mathbf{Q}_d = -\mathbf{C}_{tt} - (\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})_{q\dot{\mathbf{q}}} - 2\mathbf{C}_{qt} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.87)$$

Que, finalmente, leva a equação de movimento para solução das acelerações das coordenadas generalizadas do sistema [Shabana, 2010]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e \\ \mathbf{Q}_d \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

A Equação 3.88 é utilizada para obter os valores das acelerações de todos os corpos que compõem o sistema. Para encontrar um formato útil a aplicação, partiu-se da definição de trabalho virtual de um corpo, sendo definido pelo somatório do trabalho das forças externas, forças de reação e forças inerciais. As forças foram representadas na forma generalizada, aplicadas sobre as coordenadas generalizadas de cada corpo, que neste trabalho foram definidas como a posição e orientação do seu CG. As forças de reação foram expressas por multiplicadores de Lagrange para agrupar os pares de reações. Já a matriz de massas surgiu com a aplicação da energia cinética do corpo em movimento. Ao fixar o referencial local no CG no corpo, a matriz de massas é simplificada, e há a eliminação das acelerações centrífugas. Obtém-se, assim, um sistema de equações não-lineares fracamente acoplados,

que quando resolvido, fornecem o valor das acelerações de todas as coordenadas, assim como os multiplicadores de Lagrange, utilizáveis na determinação das forças de reação das juntas.

3.8 Elementos de força

As forças generalizadas mais comuns, que são aplicadas externamente sobre os corpos do sistema, também podem ser representadas com o uso do princípio do trabalho virtual. Dentre tantas, podem ser citadas: a força gravitacional, elemento mola-amortecedor-atuador, mola-amortecedor rotacional e força de fricção de Coulomb [Shabana, 2013]. Este trabalho utilizou somente as duas primeiras, adicionalmente é levado em conta a *força de contato* entre os corpos [Machado et al., 2012], mas essa não é formulada a partir do trabalho virtual.

3.8.1 Gravidade

Para força gravitacional aplicada sobre o CG de um corpo i , sua formulação não contém grandes dificuldades, e pode ser expressa por:

$$\delta W^i = -m^i g \delta y^i \quad (3.89)$$

onde g é a constante gravitacional, cujo valor nesse trabalho é de $9,806 \text{ kgm/s}^2$.

3.8.2 Elemento mola-amortecedor-atuador

A Figura 3.7 ilustra dois corpos i e j conectados nos pontos P^i e P^j , pertencentes aos seus respectivos corpos, por um elemento composto de uma mola, um amortecedor e um atuador, todos ligados em paralelo. O amortecedor possui um *coeficiente de amortecimento* $c[N/(m/s)]$, o *coeficiente de rigidez* da mola tem valor $k[N/m]$ e o atuador tem força de valor $f_a[N]$.

A força f_s resultante do elemento, é definida por [Meirovitch, 2010]:

$$f_s = k(l - l_0) + c\dot{l} + f_a \quad (3.90)$$

onde $l[m]$ é o comprimento atual da mola, $l_0[m]$ o comprimento original da mola e $\dot{l}[m/s]$ a taxa de variação do comprimento do elemento no tempo. Se δl for a mudança virtual na distância dos dois pontos, o trabalho virtual do elemento é:

$$\delta W = -f_s \delta l \quad (3.91)$$

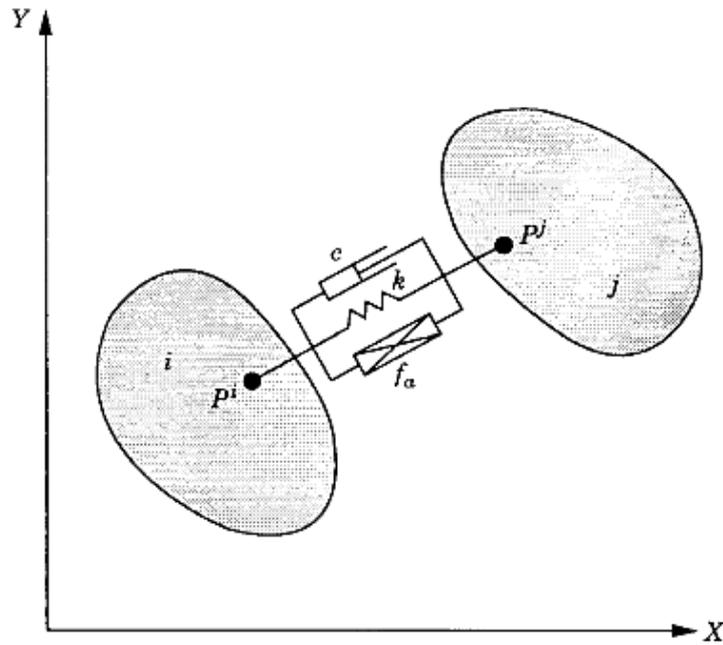


Figura 3.7 – Elemento mola-amortecedor-atuador. Fonte: Shabana, 2010

Para encontrar o valor de δl em relação a coordenada global dos pontos P^i e P^j , a posição de j relativa a i é dada por:

$$\mathbf{r}_P^{ij} = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}_P^i - \mathbf{R}^j - \mathbf{A}^j \bar{\mathbf{u}}_P^j \quad (3.92)$$

Se o comprimento do elemento for:

$$l = \left(\mathbf{r}_P^{ijT} \mathbf{r}_P^{ij} \right)^{1/2} \quad (3.93)$$

e uma mudança virtual no seu comprimento é:

$$\delta l = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{q}^{ij}} \delta \mathbf{q}^{ij} = \left(\mathbf{r}_P^{ijT} \mathbf{r}_P^{ij} \right)^{-1/2} \mathbf{r}_P^{ijT} \frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^{ij}} \delta \mathbf{q}^{ij} \quad (3.94)$$

onde \mathbf{q}^{ij} é o vetor de coordenadas generalizadas dos corpos i e j , definido por [Shabana, 2010]:

$$\mathbf{q}^{ij} = [\mathbf{q}^{iT} \quad \mathbf{q}^{jT}]^T = [\mathbf{R}^{iT} \quad \theta^i \quad \mathbf{R}^{jT} \quad \theta^j]^T \quad (3.95)$$

Ao substituir 3.93 na Equação 3.94, pode-se separar a derivada parcial nas direções i e j e deixar em evidência o vetor unitário \mathbf{V} que aponta da direção do vetor \mathbf{r}_P^{ij} , da seguinte

forma:

$$\delta l = \frac{\mathbf{r}_P^{ijT}}{l} \mathbf{r}_P^{ijT} \frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^{ij}} \delta \mathbf{q}^{ij} = \mathbf{V}^T \left[\frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^i} \delta \mathbf{q}^i + \frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^j} \delta \mathbf{q}^j \right] = \mathbf{V}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^i} & \frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}^i \\ \delta \mathbf{q}^j \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Aplicando o mesmo formato da Equação 3.66 na Equação 3.92, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^i} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{A}_\theta^i \bar{\mathbf{u}}_P^i] \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^j} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{A}_\theta^j \bar{\mathbf{u}}_P^j] \quad (3.97)$$

Voltando a eq. 3.91 e substituindo δl pela eq. 3.96:

$$\delta W = -f_s \mathbf{V}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^i} & \frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}^i \\ \delta \mathbf{q}^j \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{iT} \delta \mathbf{q}^i + \mathbf{Q}^{jT} \delta \mathbf{q}^j \quad (3.98)$$

na qual \mathbf{Q}^i e \mathbf{Q}^j são os vetor de forças generalizadas associadas as coordenadas dos corpos i e j . Expandindo essa equação utilizando as definições anteriores, chega-se em [Shabana, 2010]:

$$\mathbf{Q}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_R^i \\ \mathbf{Q}_\theta^i \end{bmatrix} = -f_s \left[\frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^i} \right]^T \mathbf{V} = -f_s \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{u}}_P^{iT} \mathbf{A}_\theta^{iT} \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (3.99)$$

$$\mathbf{Q}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_R^j \\ \mathbf{Q}_\theta^j \end{bmatrix} = f_s \left[\frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^j} \right]^T \mathbf{V} = f_s \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{u}}_P^{jT} \mathbf{A}_\theta^{jT} \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (3.100)$$

O valor de f_s é calculado pela Equação 3.90, onde \dot{l} é [Shabana, 2010]:

$$\dot{l} = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{q}^{ij}} \dot{\mathbf{q}}^{ij} = \mathbf{V}^T \frac{\partial \mathbf{r}_P^{ij}}{\partial \mathbf{q}^{ij}} \dot{\mathbf{q}}^{ij} \quad (3.101)$$

Assim, o vetor \mathbf{Q}_R^i contém as forças nas direções \mathbf{X} e \mathbf{Y} aplicadas sobre o CG do corpo i , mais um momento binário \mathbf{Q}_θ^i na direção \mathbf{Z} , todas decorrentes do elemento mola-amortecedor-atuador, fixado sobre o ponto P^i pertencente ao corpo. As forças sobre o corpo j tem a mesma magnitude e direção, mas sentidos opostos.

3.9 Contato

A modelagem do fenômeno de contato em sistemas multi-corpos é um tema ainda em desenvolvimento [Machado et al., 2012; Lankarani e Nikravesh, 1990; Zhiying e Qishao, 2006; Hunt e Crossley, 1975; Gonthier et al., 2004; Flores et al., 2011]. Um dos problemas é como selecionar as propriedades constitutivas apropriadas para melhor descrever o evento de contato, já que ele é influenciado pela geometria, cinemática e material dos corpos envolvidos

[Pham e Wang, 2011; Ignacio Gonzalez-Perez, 2011; Dopico et al., 2010]. Outra dificuldade crucial é associada a avaliação dos parâmetros de contato, como a *rigidez* e *amortecimento* de contato. Finalmente, a terceira dificuldade diz respeito ao fenômeno de dissipação de energia durante a modelagem do impacto.

Segundo Flores [2010], o comportamento de corpos em colisão pode ser basicamente dividido em dois grupos: (I) “formulação dinâmica não-suave” (*nonsmooth dynamics formulation*); (II) “abordagem regularizada” (*regularized approach*). A primeira é baseada em restrições geométricas, ou “abordagem rígida”, onde os corpos em colisão são rígidos o suficiente para não haver deformação. Uma técnica bastante utilizada para esse tipo de formulação é a chamada LCP (*Problema de Complementariedade Linear*), onde há a prevenção de penetração entre os corpos, devido ao impulso decorrente de restrições unilaterais. No momento do contato, sua cinemática relativa é nula e suas forças impulsivas nunca são negativas, para evitar atração entre os corpos. Essa técnica, apesar de eficiente do ponto de vista computacional, necessita de diferentes estratégias numéricas para solucionar variados eventos, como o contato permanente e o impacto intermitente [Flores, 2010].

O segundo grupo de abordagem regularizada, o corpo rígido é considerado localmente deformável, e a força de contato é proporcional à penetração de um corpo no outro no local de contato. Diferentemente da formulação dinâmica não-suave, usa somente uma abordagem para calcular tanto o contato com carga contínua, quanto o impacto intermitente, transitando naturalmente entre um e outro [Flores et al., 2004]. A força normal gerada durante o impacto depende de qual formulação é utilizada. Contatos puramente elásticos, como o definido pela lei de Hertz (Equação 3.102), a variável que vincula a penetração relativa δ^n com a força normal $F_N[N]$ é somente a *rigidez de contato* $K[N/m]$. O valor de K depende da geometria dos corpos envolvidos no fenômeno e as propriedades mecânicas do seus materiais, como Coeficiente de Poisson e Módulo de Young [Machado et al., 2012].

$$F_N = K\delta^n \quad (3.102)$$

Essa relação não-linear é limitada, pois não expressa as forças, cujo contato não se dê em um ponto, mas em uma linha ou superfície. O coeficiente n sobre a penetração δ^n ganha variados valores dependendo da forma de distribuição da força, geralmente parametrizados de forma empírica. Outro grande limitante se refere à conservação de energia. Todo impacto,

por mais elástico que seja, sempre há a dispersão de energia em forma elástica, térmica ou de deformação plástica permanente, principalmente quando o objeto de estudo é o momento das fases de *compressão* e *restituição*. Ao incorporar a dissipação à fórmula da Equação 3.102 os autores Kevin e Voigt [Goldsmith, 1960] incluíram um componente dissipativo:

$$F_N = K\delta + D\dot{\delta} \quad (3.103)$$

onde a letra D se refere ao *coeficiente de restituição de contato* e $\dot{\delta}$ [m/s] a *velocidade de penetração*.

A formulação da eq. 3.103 não representa, contudo, o fenômeno não-linear do impacto, mais aparente em altas velocidades. Dubowsky et al., 1987 sugerem que as forças de compressão e dissipação devem ter componentes não-lineares proporcionais à penetração δ e a velocidade de penetração $\dot{\delta}$. Outro problema relacionado a equação anterior, se deve a existência de amortecimento, mesmo quando no momento de início de contato, quando a mesma deveria ser nula. Além disso, ao final da fase de restituição a penetração é nula e sua velocidade negativa, o que torna a força atrativa e assim, improvável fisicamente. Para uma representação mais realista, os autores do trabalho Hunt e Crossley, 1975 adicionaram uma potência sobre a penetração, assim como um coeficiente de amortecimento proporcional à força da mola, substituindo D , por um fator de *histerese de amortecimento* χ :

$$F_N = K\delta^n + \chi\delta^n\dot{\delta} \quad (3.104)$$

$$\chi = \frac{3(1 - C_r)}{2} \frac{K}{\dot{\delta}^{(-)}} \quad (3.105)$$

onde $\dot{\delta}^{(-)}$ [m/s] é a velocidade inicial de penetração no primeiro instante de contato e C_r o *coeficiente de restituição*. O trabalho de Machado et al., 2012 revisa as principais formulações para diferentes abordagens das forças normais de contato. Além de Hunt e Crossley, 1975, outros autores propuseram expressões não lineares para o fator de histerese. Dentre eles a autora cita: Lee e Wang, 1983; Gonthier et al., 2004; Flores et al., 2011; Herbert e McWhannell, 1977; Lankarani e Nikraves, 1990; e Zhiying e Qishao, 2006.

Machado et al., 2012 realizou um trabalho comparativo entre as formulações anteriormente citadas. Para tal, definiu-se duas esferas idênticas em rota de colisão, ambas com raio de 20mm, massa de 0,092kg, velocidades de impacto opostas de 0,15m/s cada, valor da rigidez de $5,5 \times 10^9 N/m^{3/2}$, coeficiente n de 3/2, e coeficiente de restituição igual a 0,7.

A Figura 3.8 ilustra a comparação dos valores para cada metodologia. Os autores citam o fato do comportamento de Hunt e Crossley, 1975, Lankarani e Nikravesh, 1990 não diferirem muito nos seus padrões de força, devido as mesmas premissas de simplificação tomadas em suas formulações. Já Gonthier et al., 2004, Zhiying e Qishao, 2006 e Flores et al., 2011 tiveram também comportamento semelhante entre si, mas sua forma menos simétrica revela uma diferença de comportamento nas fases de compressão e restituição, devido a maior dissipação de energia [Machado et al., 2012].

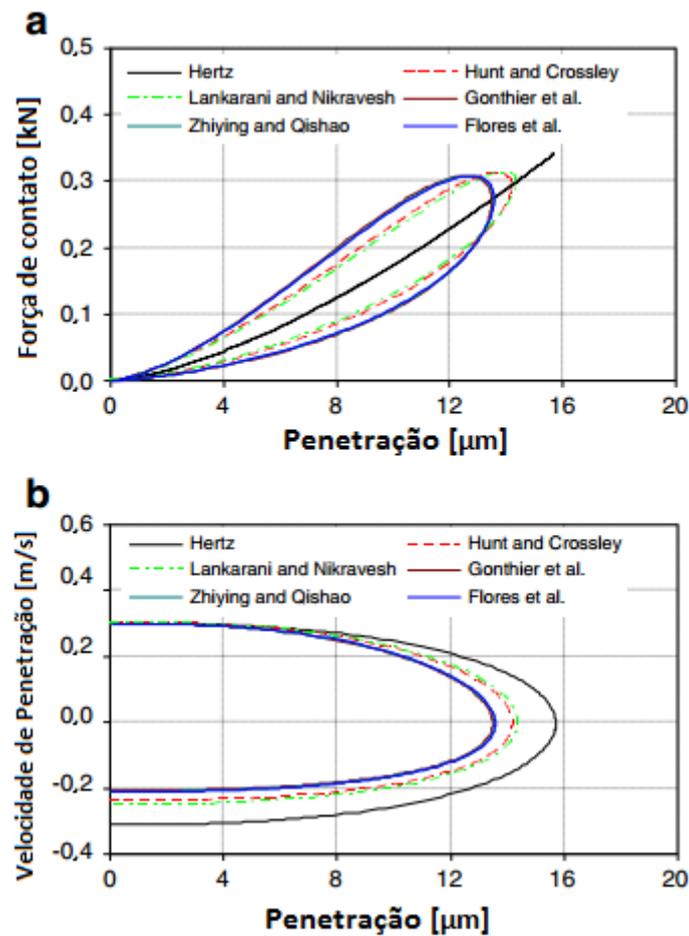


Figura 3.8 – Valores de força de contato F_N e velocidade de penetração $\dot{\delta}$ em função da penetração δ para diferentes fórmulas fonte: Machado et al., 2012

A Figura 3.9 mostra a variação da histerese de amortecimento χ em função de diferentes coeficientes de restituição C_r . Para esse teste, a rigidez K e a velocidade de impacto inicial $\dot{\delta}^{(-)}$ tiveram valor unitário, a fim de simplificar dos cálculos. Para grandes coeficientes de restituição, todos os modelos obtiveram comportamento semelhante. Já para valores menores que 0,4, os modelos de Gonthier et al., 2004 e Flores et al., 2011 são os únicos que tiveram crescimento assintótico, aumentando sua capacidade de dissipar energia, o que é esperado e desejado em simulações com impactos inelásticos.

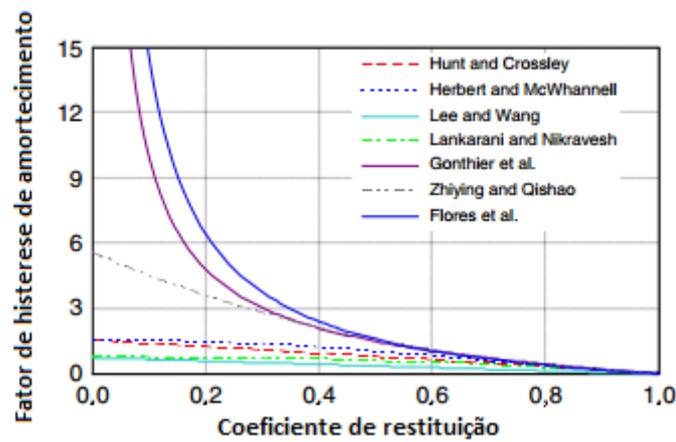


Figura 3.9 – Valores de histerese de amortecimento χ em função do coeficiente de restituição C_r para diferentes fórmulas. Fonte: Machado et al. [2012]

Como era esperado neste trabalho, a possibilidade de um impacto inelástico entre alguns dos corpos que compõem a prótese de joelho, o modelo de Flores et al., 2011 foi escolhido como fórmula para a força de contato, pois é capaz de simular forças com maior amplitude de valores de coeficientes de restituição. A equação do modelo é:

$$F_N = K\delta^n \left[1 + \frac{8(1 - C_r)}{5C_r} \frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}^{(-)}} \right] \quad (3.106)$$

3.9.1 Equação de força de contato em software comercial

Os resultados obtidos por esse trabalho foram comparados com os fornecidos pelo software comercial Solidworks Motion. No artigo de Machado et al., 2012 os autores afirmam que os métodos de abordagem regularizada tem ganhado muita importância em softwares comerciais, utilizando mais especificamente o *método de penalidade* para calcular a força de impacto F_N . Isso se deve a sua "simplicidade computacional e eficiência", além de uma

contribuição para uma rápida integração da equação de movimento em métodos numéricos de solução. Segundo o manual oficial do fabricante [Dassault, 2015a], a equação da força é dada por:

$$F_N = K\delta^n + STEP(\delta, 0, 0, d_{max}, c_{max})\dot{\delta} \quad (3.107)$$

na qual $STEP$ é uma função escada [Dassault, 2015b], descrita na Equação 3.108. Ela é governada por 5 parâmetros: (I) a é a variável independente (eixo horizontal); (II) x_1 é o valor do eixo horizontal onde a função começa a ascender. (III) y_1 o valor que a função têm antes de atingir o ponto x_1 ; (IV) x_2 ponto do eixo horizontal onde a função estabiliza; (V) y_2 valor que a função atinge após estabilizar. Como exemplo, a função $STEP(tempo, 1, 1, 2, 2)$ teria valor 1 antes de atingir 1 segundo, valor 2 após 2 segundos, e uma interpolação cúbica entre 1 e 2 segundos do intervalo de tempo.

$$STEP(a, x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{cases} y_1 & ; a \leq x_1 \\ y_1 + (x_2 - x_1)z^2(3 - 2z) & ; x_1 < a < x_2 \\ y_2 & ; a \geq x_2 \end{cases} \quad (3.108)$$

$$z = \frac{a - x_1}{x_2 - x_1} \quad (3.109)$$

Desse modo, quando a função $STEP$ é aplicada para o contato da eq. 3.107, a parcela dissipativa depende da penetração δ e parte de um valor nulo até um valor c_{max} quando uma penetração máxima d_{max} é atingida. As superfícies, cujas penetrações são monitoradas, são definidas dentro do ambiente do software, durante a análise dinâmica.

3.9.2 Análise da penetração

Os autores do trabalho Machado et al., 2010 propuseram uma formulação para identificar o ponto de máxima penetração entre dois corpos em colisão para perfis convexos. Esta seção está baseada no seu trabalho. Como ilustrado na Figura 3.10, o vetor \mathbf{R}^i define a posição da origem O_i do sistema de coordenadas locais do corpo i , cujos eixos são $\xi_i\eta_i$ e θ_i é o ângulo em relação ao sistema inercial. Seja o ponto P_i o ponto onde ocorra o contato com maior penetração, sua posição local é definida pelo vetor \mathbf{S}_i^P , que se encontra a um ângulo

φ_i do eixo ξ_i . Os vetores \mathbf{n}_i e \mathbf{t}_i são os vetores unitários normal e tangencial da superfície, respectivamente, no ponto P_i

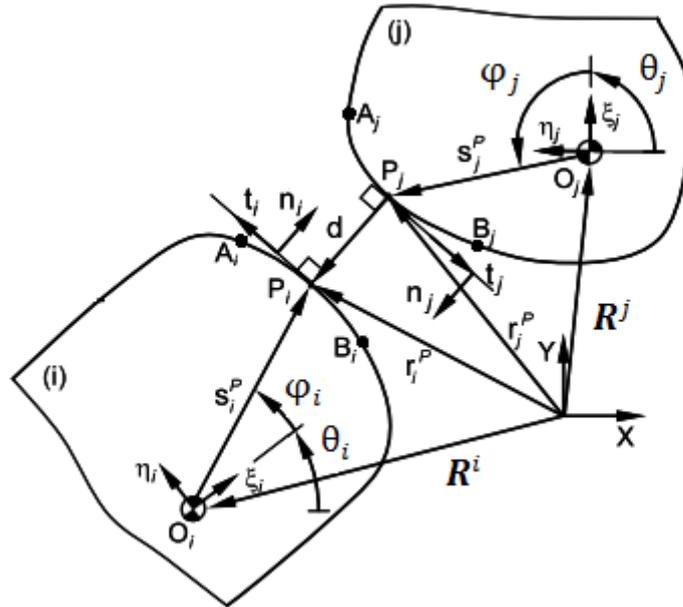


Figura 3.10 – Vetor distância \mathbf{d} do possível ponto de contato entre dois corpos i e j

Adaptado de: Machado et al., 2010

Se a superfície que contém P_i , pertencer a um polinômio S_i , definido entre os pontos A_i e B_i , que por sua vez é definido em coordenadas polares como uma função de φ_i , como:

$$S_i = a_3\varphi_i^3 + a_2\varphi_i^2 + a_1\varphi_i^1 + a_0 \quad (3.110)$$

onde a_0, a_1, a_2, a_3 , são os coeficientes de uma interpolação cúbica. De forma análoga se define a posição local de um ponto P_j sobre a superfície de contato do corpo j , entre os pontos A_j e B_j , com uma superfície S_j definida, também por um polinômio de terceiro grau:

$$S_j = b_3\varphi_j^3 + b_2\varphi_j^2 + b_1\varphi_j^1 + b_0 \quad (3.111)$$

onde b_0, b_1, b_2, b_3 , são os coeficientes de uma interpolação cúbica. A distância global entre os pontos P_i e P_j é dada pelo vetor \mathbf{d} . Para encontrar o valor da menor distância \mathbf{d} , deve-se resolver o seguinte sistema de equações [Machado et al., 2010; Flores, 2010]:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \\ \mathbf{d} \times \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \\ \mathbf{d} = \mathbf{r}_i^P - \mathbf{r}_j^P = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{S}_i^P - \mathbf{R}^j - \mathbf{A}^j \mathbf{S}_j^P \end{cases} \quad (3.112)$$

Os valores de \mathbf{A}^i e \mathbf{A}^j são os mesmos da Equação 3.2, utilizando θ_i e θ_j . Os vetores \mathbf{S}_i^P e \mathbf{S}_j^P são definidos pelas expressões S_i e S_j . No sistema da Equação 3.112, a primeira equação estipula que os vetores normais a ambas superfícies são colineares. A segunda afirma que o vetor \mathbf{d} é colinear a \mathbf{n}_i e a última assegura a menor distância global entre os pontos P_i e P_j . Em um plano 2D, esse sistema resulta em apenas 3 expressões. Para encontrar uma solução para \mathbf{d} , todas as expressões devem ser funções de φ_i e φ_j . Os vetores \mathbf{n}_i e \mathbf{n}_j podem ser expressos em coordenadas globais como:

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{A}^i \begin{bmatrix} \frac{d\eta_i^P}{d\varphi_i} & -\frac{d\xi_i^P}{d\varphi_i} \end{bmatrix}^T \quad (3.113)$$

$$\mathbf{n}_j = \mathbf{A}^j \begin{bmatrix} \frac{d\eta_j^P}{d\varphi_j} & -\frac{d\xi_j^P}{d\varphi_j} \end{bmatrix}^T \quad (3.114)$$

Passando a posição de P de coordenadas polares para cartesianas, tem-se:

$$\xi_k^P = S_k \cos \varphi_k \quad (k = i, j) \quad (3.115)$$

$$\eta_k^P = S_k \sin \varphi_k \quad (k = i, j) \quad (3.116)$$

Para resolver o sistema da Equação 3.112, que é altamente não-linear, foi utilizado o *método Newton-Raphson*, sugerido pelos autores Shabana, 2010; Machado et al., 2012; Atkinson, 1978, pois é um método computacionalmente eficiente e confiável. A penetração de um corpo no outro ocorre quando $\mathbf{d}^T \mathbf{n}_j < 0$. Após encontrados os valores de \mathbf{d} , φ_i e φ_j , a penetração no momento analisado é de:

$$\delta = \sqrt{\mathbf{d}^T \mathbf{d}} \quad (3.117)$$

Já a velocidade de penetração é calculada por:

$$\dot{\delta} = (\dot{\mathbf{r}}_i^P - \dot{\mathbf{r}}_j^P)^T \mathbf{n}_j \quad (3.118)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_k^P = \dot{\mathbf{r}}_k + \dot{\mathbf{A}}^k \mathbf{S}_k^P \quad (k = i, j) \quad (3.119)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_k^P = \dot{\mathbf{r}}_k + \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{A}_\theta^k \mathbf{S}_k^P \quad (k = i, j) \quad (3.120)$$

onde \mathbf{A}_θ^k é a mesma da Equação 3.35 e $\boldsymbol{\omega}^k$ é a velocidade angular do corpo.

Outra forma de resolver o sistema da eq. 3.112 é por um produto escalar entre os vetores normais, tangenciais e a distância \mathbf{d} , da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{n}^{jT} \mathbf{t}_i = 0 \\ \mathbf{d}^T \mathbf{t}_i = 0 \end{cases} \quad (3.121)$$

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{A}^i \left[\frac{d\xi_i^P}{d\varphi_i} \quad \frac{d\eta_i^P}{d\varphi_i} \right]^T \quad (3.122)$$

A Equação 3.121 é não-linear, e também foi utilizado o método Newton-Raphson para sua solução, que é:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{jT} \mathbf{t}_i \\ \mathbf{d}^T \mathbf{t}_i \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

$$\mathbf{U}_{\varphi_i \varphi_j} \Delta \boldsymbol{\varphi} = -\mathbf{U} \quad (3.124)$$

na qual $\mathbf{U}_{\varphi_i \varphi_j}$ é o Jacobiano de \mathbf{U} em função de φ_i e φ_j , $\Delta \boldsymbol{\varphi}$ é o vetor de diferenças de Newton para o vetor $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_i \quad \varphi_j]^T$. Assim como a Equação 3.22, o valor de $\boldsymbol{\varphi}$ é atualizado a cada iteração k , até que $\Delta \boldsymbol{\varphi}$ seja suficientemente pequeno:

$$\boldsymbol{\varphi}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}_k + \Delta \boldsymbol{\varphi}_k \quad (3.125)$$

3.10 Algoritmo

Para melhor entender os passos realizados para a solução desejada, as Figuras 3.11 e 3.12, descrevem em forma de fluxograma, a ordem dos passos tomados. Primeiramente, ao iniciar o programa, são fornecidos os valores das constantes utilizadas pelo programa.

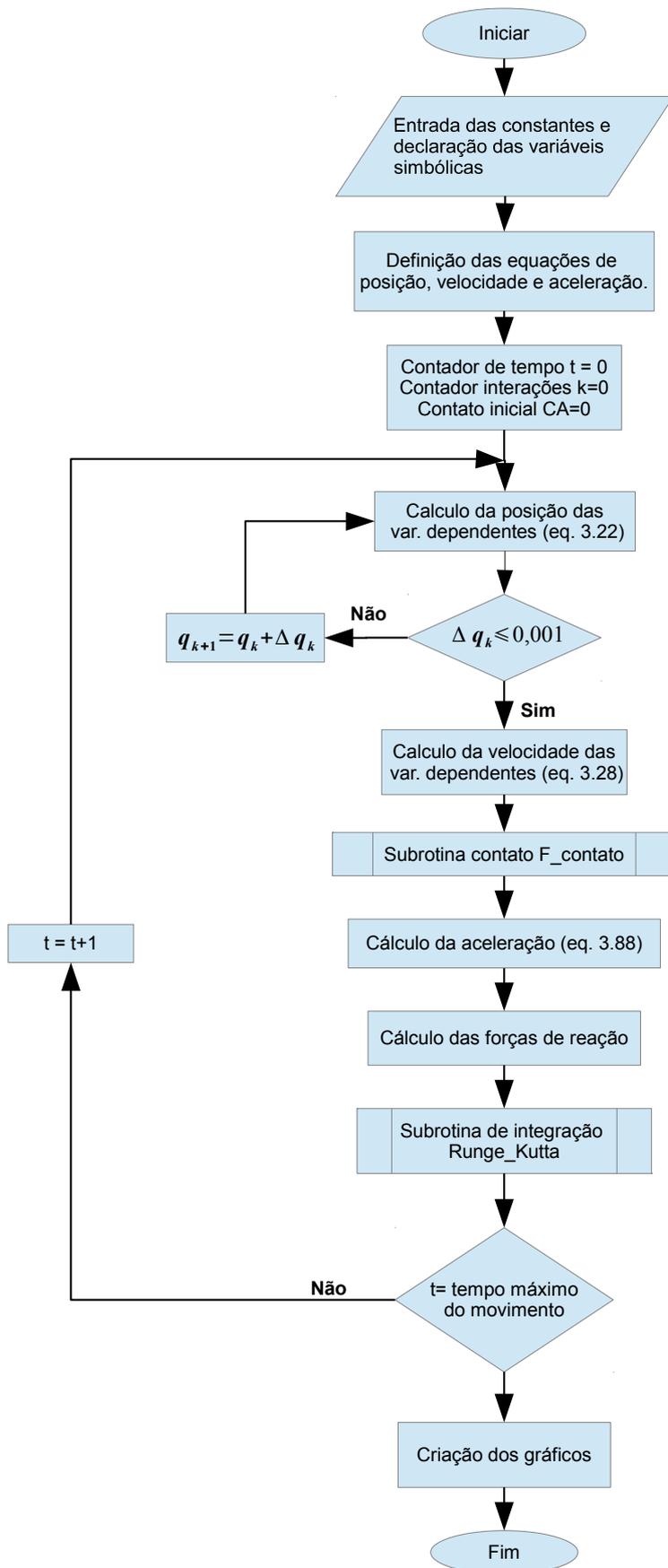


Figura 3.11 – Fluxograma do algoritmo do programa principal

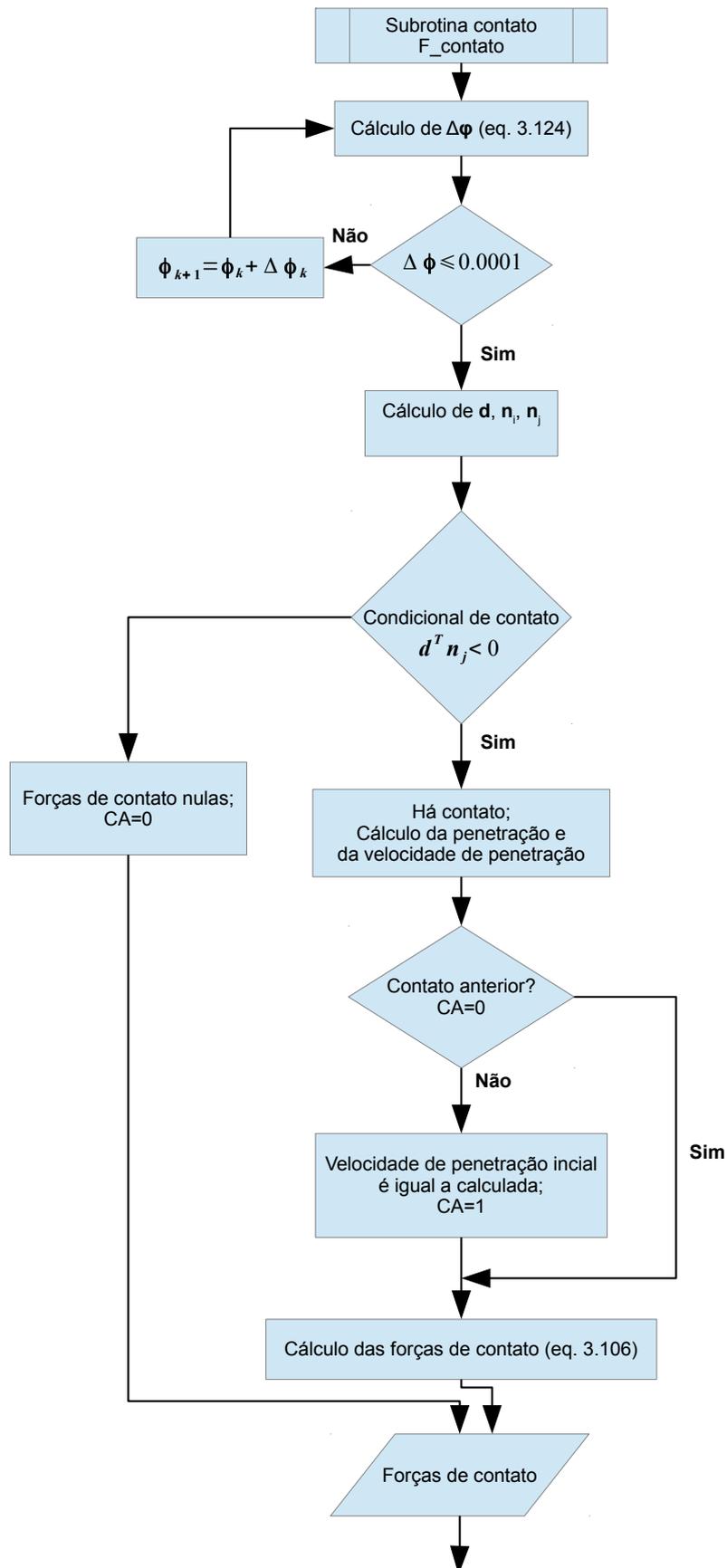


Figura 3.12 – Fluxograma do algoritmo da subrotina de contato

Essas declarações iniciais são:

- declaração das variáveis simbólicas utilizadas pelo Matlab,
- tempo total e passo de tempo,
- massa e momento de inércia de cada corpo,
- posições e orientações iniciais de cada corpo,
- polinômios que representam as superfícies de contato,
- rigidez, coef. de restituição e constante exponencial de contato,
- posições das origens dos sistemas locais,
- montagem da matriz de massa do sistema \mathbf{M} ,
- rigidez, amortecimento, tamanho inicial e posição das juntas do elemento mola-amortecedor-atuador,
- montagem das matrizes vetores \mathbf{Q}_e , \mathbf{C} , \mathbf{I}_d , \mathbf{Q}_d , \mathbf{C}_q ,
- declaração das equações 3.22, 3.28 e 3.88

Após essas definições, o programa entra em um fluxo, partindo de um instante de tempo nulo até um valor máximo. São calculadas as posições das variáveis dependentes através da Equação 3.22, que é resolvida por Newton-Raphson, realimentando o vetor de coordenadas \mathbf{q} até que a norma do vetor de diferenças de Newton seja abaixo do limite estipulado (no caso 0,001). Descobertas as coordenadas nesse instante de tempo, as velocidades das variáveis dependentes são calculadas pela Equação 3.28. O equacionamento das acelerações depende das forças externas e para isso é necessário saber se há contato entre os corpos, como demonstrado na Figura 3.12. Essa Figura inicia com o cálculo do vetor de diferenças de Newton para os valores dos ângulos dos vetores unitários normais às superfícies de contato no ponto P, pertencentes aos corpos i e j , que satisfazem o sistema da Equação 3.121. Definido o valor do vetor φ , o vetor distância \mathbf{d} entre o possível ponto de contato pode ser calculado, assim como os vetores normais \mathbf{n}_i e \mathbf{n}_j .

É definido, então, um condicional de contato. Só há contato, quando o vetor de distância tiver um sentido oposto ao vetor normal da superfície do corpo j . Se de fato há o contato, então é calculada a penetração e sua velocidade, utilizando as equações 3.117 e 3.118. Outro condicional que aparece é para definir a velocidade de contato inicial. Se esse é o primeiro instante onde há o contato, uma variável lógica CA (contato inicial) possui valor nulo, logo o valor calculado nesse instante é o inicial, e CA muda para valor unitário. O valor das forças de contato é então calculado pela Equação 3.106. Caso o condicional de contato não seja satisfeito, as forças são definidas como valores nulos.

Tendo concluído o cálculo das forças de contato, elas são incorporadas ao vetor de forças externas \mathbf{Q}_e , junto com a força e momento gerados pelo elemento mola-amortecedor-atuador. A Equação 3.88 determina o valor de aceleração das variáveis dependentes para esse instante de tempo, assim como o vetor de multiplicadores de Lagrange. O próximo passo é definir o valor das posições e velocidades das variáveis *independentes* no próximo instante de tempo futuro calculado. O método utilizado nesse trabalho é o *Runge-Kutta*, pois é um dos métodos mais utilizados para a solução de equações explícitas na simulação de sistemas multi-corpos [Josephs e Huston, 2002; Shabana, 2010, 2013; Fishwick, 2007]. A formulação simbólica do pacote computacional utilizado permite uma expressão *explícita* das variáveis independentes, necessária para a metodologia de integração. Uma expressão pode ser obtida analiticamente por método do trabalho virtual, aplicado a cada um dos corpos, mas o número de variáveis e equações é exponencialmente proporcional ao número de corpos do sistema. Como é necessária uma expressão explícita dessas variáveis, se optou pelo cálculo simbólico, a fim de evitar erro humano na substituição de um número grande de variáveis dependentes. Por fim, após atingido o tempo máximo, o programa dispõe para o usuário os valores das posições, velocidades e acelerações para cada instante de tempo calculado, assim como a reação em cada uma das juntas que compõem todo o mecanismo.

4. APLICAÇÃO DO ALGORITMO

No capítulo METODOLOGIA, foram deduzidas as equações necessárias para a solução do algoritmo da seção 3.10. Neste capítulo essas equações são aplicadas ao mecanismo da Figura 3.1. A Figura 4.1 mostra novamente o mesmo mecanismo, mas em outra posição, para facilitar a visualização dos vetores de posição das coordenadas locais sobre os centros de gravidade de cada corpo.

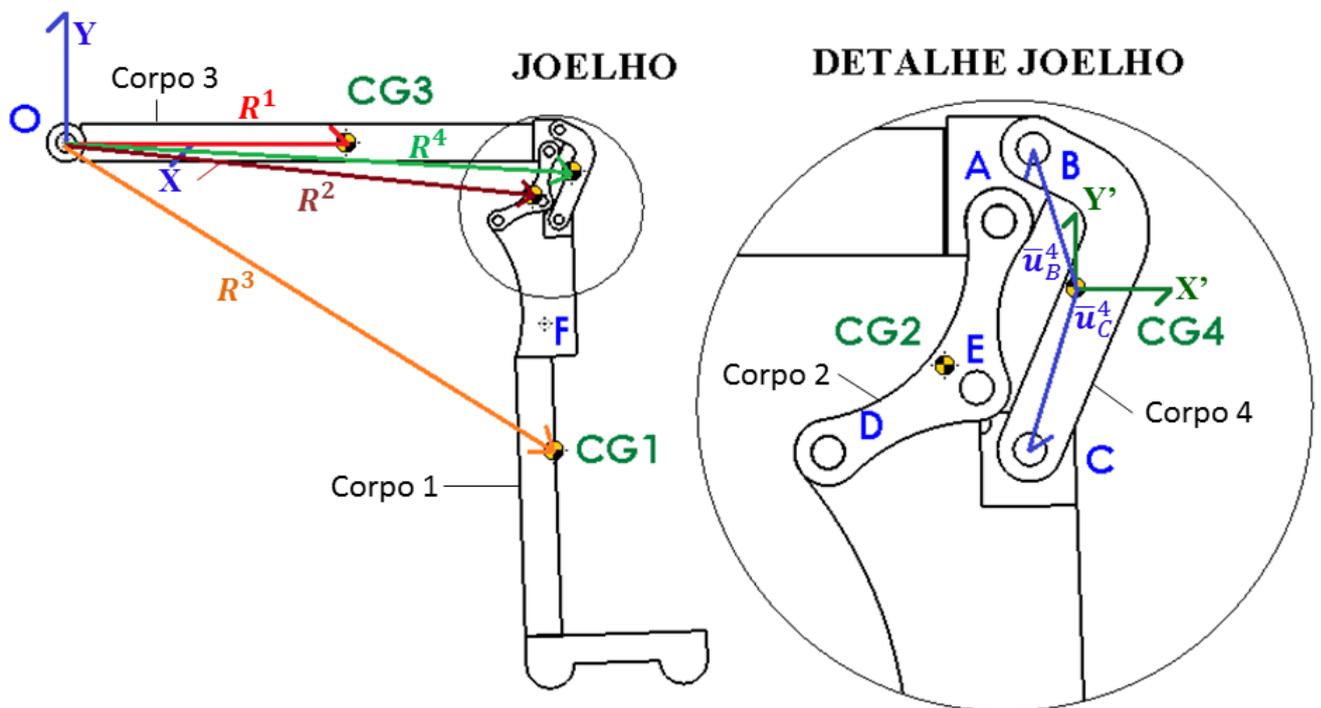


Figura 4.1 – Mecanismo que simula as partes do corpo e da prótese.

Na figura, os vetores \mathbf{R}^i indicam a posição das coordenadas locais dos corpos e no “Detalhe Joelho” encontra-se um exemplo de localização das posições das juntas, em relação à coordenada local de cada corpo. No caso, o vetor $\bar{\mathbf{u}}_B^4$ posiciona a junta rotativa B em relação ao sistema $\mathbf{X}'\mathbf{Y}'$, e o vetor $\bar{\mathbf{u}}_C^4$, a junta C. Essa definição foi seguida para todos os corpos e juntas.

4.1 O mecanismo do joelho

Na patente de Kramer et al. [1998], os autores otimizaram o tamanho e orientação dos elos de um joelho protético de quatro barras da empresa Otto Bock. O mecanismo original, mostrado na Figura 4.2, é um joelho do tipo quatro barras com um amortecedor hidráulico para auxiliar na extensão da perna, durante o movimento de balanço.

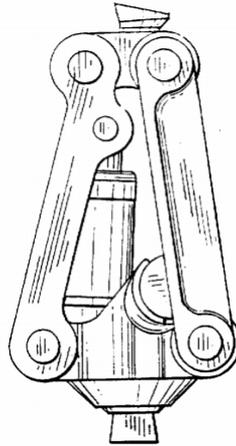


Figura 4.2 – Joelho protético de quatro barras, hidráulico. Fonte: Kramer et al., 1998

Este mecanismo é um precursor do atual joelho policêntrico modelo 3R46, da própria companhia (Figura 4.3).



Figura 4.3 – Joelho protético de policêntrico, hidráulico **3R46** da empresa Otto Bock.

Fonte: Bock, 2015

O alvo de otimização visado pelos autores era que a trajetória do Centro Instantâneo de Rotação (CI), durante a flexão do seu mecanismo, fosse a mais próxima possível de um joelho humano real, principalmente em seu ponto final em flexão total. Após algumas interações de projeto, a forma final foi a da Figura 4.4, que segue a mesma nomenclatura tomada na Figura 4.1.

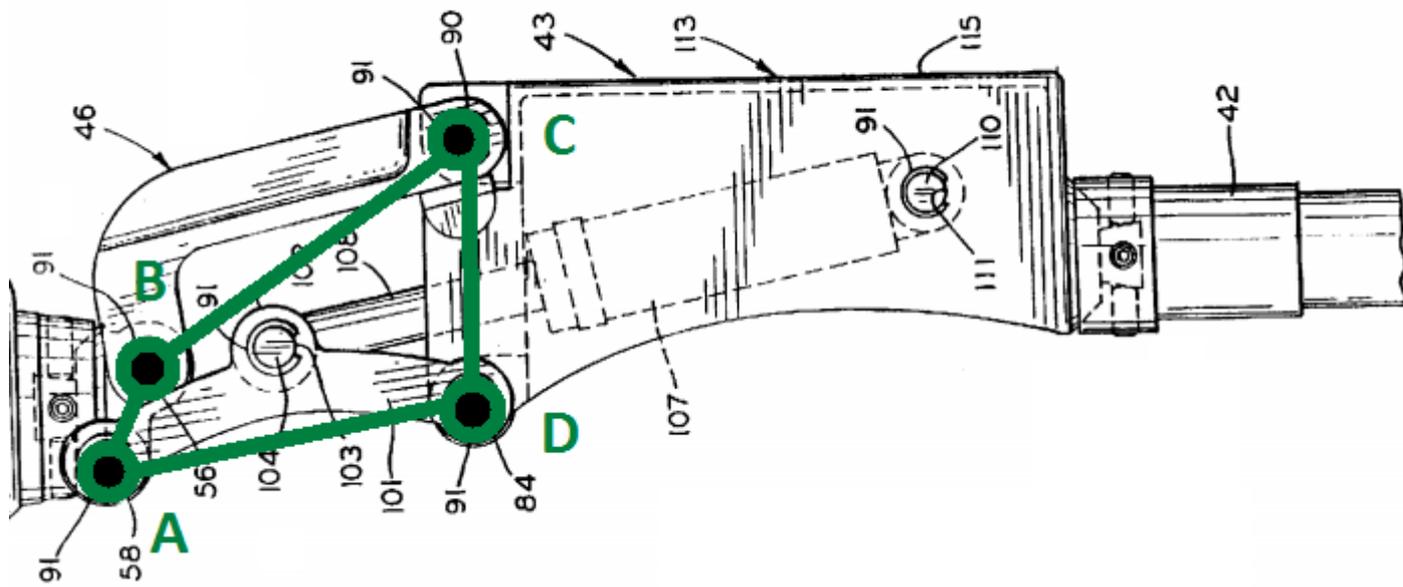


Figura 4.4 – Projeto de prótese de joelho dos autores Kramer et al., 1998

Sobre o desenho técnico da Figura 4.4, está evidenciado, em verde, o mecanismo quatro barras “efetivo”. Após a otimização sugerida, os autores encontraram valores ideais para o comprimento de cada elo e a orientação fixa do elo que liga os pontos A e B. Esses valores estão dispostos na tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Comprimento e juntas de cada elo da prótese de Kramer et al., 1998

Elo	Juntas	Comprimento
L_1	DC	63,5 mm
L_2	AD	90,81 mm
L_3	AB	25,40 mm
L_4	BC	95,25 mm

Para facilitar a nomenclatura, a letra L_i representa o comprimento, e seu subíndice i indica qual o corpo. Ao lado estão indicadas quais as juntas que pertencem aos elos. Para este trabalho, o joelho protético utilizado foi desenhado em ambiente CAD, baseado no projeto de Kramer et al., 1998. Foram respeitados os comprimentos efetivos de cada elo e a forma geral da peça, para maior semelhança visual. O elo 1 pertence ao corpo 1, o elo 2 ao corpo 2 e assim sucessivamente, como mostra o mecanismo da Figura 4.1.

4.2 Matriz de massa

O projeto da patente não discrimina a massa de cada parte, dessa forma, foram estipulados materiais para cada parte e sua massa foi calculada utilizando dados de densidade volumétrica da biblioteca interna do software Solidworks. Este trabalho estipulou material de alumínio, liga 1060, para as partes com maior tamanho e aço AISI 1010 para peças de menor espessura. Os valores de massa específica para esses materiais (retirados da biblioteca do próprio CAD) são de 2700 kg/m^3 e 7870 kg/m^3 , respectivamente para o alumínio e aço. As subpartes foram agrupadas em uma montagem de conjunto para compor os corpos 1, 2, 3 e 4. As posições de CG e massas resultantes desse agrupamento foram carregados para o cálculo aqui descrito. Os valores resultantes para as massas e momentos de inércia dos conjuntos são especificados na tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Valores das massas e momentos de inércia de cada corpo

Corpo b	1	2	3	4
m_b [kg]	1,774	0,225	2,144	0,196
J_b [MPa]	46702,61	210,69	61264,44	219,56

Seguindo a metodologia de cálculo do algoritmo, algumas matrizes e vetores devem ser especificados inicialmente. As seções subsequentes tratam da adequação destas grandezas ao mecanismo do projeto. Iniciou-se as especificações com a matriz de massa \mathbf{M} do sistema, que tem tamanho $3n_b \times 3n_b = 12 \times 12$, pois o sistema possui 4 corpos, logo ela resultou em:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

4.3 Posição das coordenadas locais e das juntas

O sistema completo possui quatro corpos, como já definido no início do capítulo METODOLOGIA, assim o número de coordenadas totais é de $n_b = 4 \times 3$ e o vetor de coordenadas \mathbf{q} global do sistema é expresso por:

$$\mathbf{q} = \left[R_x^1 \quad R_y^1 \quad \theta^1 \quad R_x^2 \quad R_y^2 \quad \theta^2 \quad R_x^3 \quad R_y^3 \quad \theta^3 \quad R_x^4 \quad R_y^4 \quad \theta^4 \right]^T \quad (4.2)$$

onde as componentes R_x^i e R_y^i são as posições lineares do centro de gravidade de um corpo i , e θ^i a sua orientação em relação ao sistema inercial XY , considerando uma rotação no sentido horário. Para o cálculo das posições do mecanismo (Equação 3.22), é necessário que a tentativa inicial seja próxima da real, para garantir a convergência da equação dentro dos limites de iteração máximos estipulados (evidenciados no fluxograma da Figura 3.11). Neste trabalho, os valores iniciais do vetor \mathbf{q} no instante de tempo zero, estão ordenados na tabela 4.3:

Tabela 4.3 – Valores iniciais para o vetor de coordenadas global \mathbf{q}

R_x^1	R_y^1	θ^1
$-156,118 \times 10^{-3} \text{ m}$	$-830,897 \times 10^{-3} \text{ m}$	5,87 rad
R_x^2	R_y^2	θ^2
$-79,779 \times 10^{-3} \text{ m}$	$-549,955 \times 10^{-3} \text{ m}$	5,72 rad
R_x^3	R_y^3	θ^3
$-36,798 \times 10^{-3} \text{ m}$	$-291,284 \times 10^{-3} \text{ m}$	6,16 rad
R_x^4	R_y^4	θ^4
$-37,928 \times 10^{-3} \text{ m}$	$-559,137 \times 10^{-3} \text{ m}$	5,67 rad

O próximo passo é localizar as juntas **A**, **B**, **C**, **D**, relativamente ao CG de cada corpo, para o cálculo das posições e equações de restrição. Assim, os vetores de posição local das juntas, expressos em metros são:

$$\text{Corpo 1} \begin{cases} \bar{\mathbf{u}}_D^1 = \begin{bmatrix} -54,685 & 243,71 \end{bmatrix}^T 10^{-3} \text{ m} \\ \bar{\mathbf{u}}_C^1 = \begin{bmatrix} 8,815 & 243,759 \end{bmatrix}^T 10^{-3} \text{ m} \\ \bar{\mathbf{u}}_F^1 = \begin{bmatrix} -7,035 & -225,831 \end{bmatrix}^T 10^{-3} \text{ m} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{Corpo 2} \begin{cases} \bar{\mathbf{u}}_A^2 = \begin{bmatrix} -20,538 & 43,792 \end{bmatrix}^T 10^{-3} \text{ m} \\ \bar{\mathbf{u}}_D^2 = \begin{bmatrix} -5,854 & -45,818 \end{bmatrix}^T 10^{-3} \text{ m} \\ \bar{\mathbf{u}}_E^2 = \begin{bmatrix} 12,205 & 1,99 \end{bmatrix}^T 10^{-3} \text{ m} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\text{Corpo 3} \begin{cases} \bar{\mathbf{u}}_A^3 = \begin{bmatrix} -9,804 & -213,667 \end{bmatrix}^T 10^{-3} \text{ m} \\ \bar{\mathbf{u}}_B^3 = \begin{bmatrix} 13,217 & -224,401 \end{bmatrix}^T 10^{-3} \text{ m} \\ \bar{\mathbf{u}}_E^3 = \begin{bmatrix} -0,521 & 293,599 \end{bmatrix}^T 10^{-3} \text{ m} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\text{Corpo 4} \begin{cases} \bar{\mathbf{u}}_B^4 = \begin{bmatrix} -36,809 & 27,369 \end{bmatrix}^T 10^{-3} \text{ m} \\ \bar{\mathbf{u}}_C^4 = \begin{bmatrix} 19,118 & -49,733 \end{bmatrix}^T 10^{-3} \text{ m} \end{cases} \quad (4.6)$$

onde a junta localizada é definida pelo subíndice e o expoente expressa qual coordenada local considerada. Esses valores são constantes, pois os sistemas locais rotacionam na mesma proporção que a posição angular global dos corpos. Vale apontar que junto ao corpo 1 está definido o ponto F, que se conecta ao ponto E do corpo 2 através de um elemento massa-mola-amortecedor (Figura 4.1).

4.4 Elemento mola-amortecedor-atuador

O elemento mola-amortecedor-atuador tem como função principal regular o tempo de extensão da pena durante o movimento de balanço e a velocidade final antes do fim de curso. Velocidades muito elevadas, estendem o joelho muito cedo, diminuindo o espaço livre para a passagem dos dedos durante o balanço médio, o que pode trancar a passagem do pé protético e resultar em quedas. Por outro lado, se a velocidade for muito lenta, a duração de um ciclo de passada ficará muito diferente da outra perna, aumentando a energia gasta do próprio usuário para executar seu movimento.

Para aplicar um elemento mola-amortecedor, foi seguido a formulação desenvolvida na seção 3.8, aplicada na configuração desse mecanismo. Assim, o vetor de comprimento do amortecedor é:

$$\mathbf{r}_P^{1,2} = \left[\mathbf{R1} + \mathbf{A}^1 \mathbf{u}_F^1 - \mathbf{R2} + \mathbf{A}^2 \mathbf{u}_E^2 \right]^T \quad (4.7)$$

Cujo módulo $L_{1,2}$ é:

$$l_{1,2} = \sqrt{\mathbf{r}_P^{1,2T} \mathbf{r}_P^{1,2}} \quad (4.8)$$

O vetor unitário \mathbf{V} que aponta da direção do vetor $\mathbf{r}_{1,2}$ é dado por:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{r}_P^{1,2}}{L_{1,2}} \quad (4.9)$$

Já as coordenadas generalizadas dos pontos inicial e final do elemento, e suas velo-

idades são:

$$\mathbf{q}_{1,2} = \begin{bmatrix} R_x^1 & R_y^1 & \theta^1 & R_x^2 & R_y^2 & \theta^2 \end{bmatrix}^T \quad (4.10)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{1,2} = \begin{bmatrix} \dot{R}_x^1 & \dot{R}_y^1 & \dot{\theta}^1 & \dot{R}_x^2 & \dot{R}_y^2 & \dot{\theta}^2 \end{bmatrix}^T \quad (4.11)$$

A derivada temporal do vetor de comprimento do elemento é um escalar de valor:

$$\dot{l}_{1,2} = \mathbf{V}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{1,2}}{\partial \mathbf{q}_{1,2}} \dot{\mathbf{q}}_{1,2} \quad (4.12)$$

Os valores da constante de rigidez e coeficiente de amortecimento não foram especificados no projeto. Para fim de testes comparativos, estas grandezas foram definidas ao acaso, desse modo, na Equação 3.90, foram utilizados os valores de 250 kN/m para a constante de rigidez k e 50 kN.s/m para o coeficiente de amortecimento c , além de uma força de atuação f_a nula e um comprimento inicial l_0 do elemento de $159,70 \times 10^{-3} \text{ m}$. O comprimento inicial se refere ao comprimento do elemento quando os corpos 1 e 3 estão alinhados em extensão máxima. Dessa forma a expressão para a força resultante f_s sobre o elemento toma a forma:

$$f_s = 250 \times 10^3 (l_{1,2} - l_0) + 50 \times 10^3 (\dot{l}_{1,2}) \quad (4.13)$$

O valor f_s diz respeito a força que o elemento mola-amortecedor aplica sobre os pontos de fixação do elemento nos corpos, cuja direção é a mesma do vetor \mathbf{V} . Utilizando o sistema de forças equipolentes, essas forças de reação são transportadas para os CGs dos corpos os quais o elemento está engastado, assim como o momento equivalente dessa transformação. Esse sistema de forças equipolentes é resultado da aplicação das equações 3.99 3.100:

$$\mathbf{Q}_1 = -f_s \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{u}}_F^1{}^T \mathbf{A}_\theta^1{}^T \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{Q}_2 = -f_s \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{u}}_E^2{}^T \mathbf{A}_\theta^2{}^T \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (4.15)$$

onde:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Como a cada instante as coordenadas generalizadas e suas velocidades mudam, suas funções dependentes Q_1 e Q_2 também mudam, e devem ter seu valor atualizado no vetor de forças externas Q_e .

4.5 Forças de contato

Usualmente, próteses de joelho possuem um dispositivo de parada da extensão da perna, no fim de curso de movimento de extensão, momentos antes do toque do pé que está em balanço. Esse dispositivo pode assumir diversas formas, como fora mencionado em seção anterior. O projeto de [Kramer et al., 1998] da Figura 4.4 utiliza uma peça de borracha, destacada em azul na Figura 4.5, instalada no corpo 1 para realizar essa função.

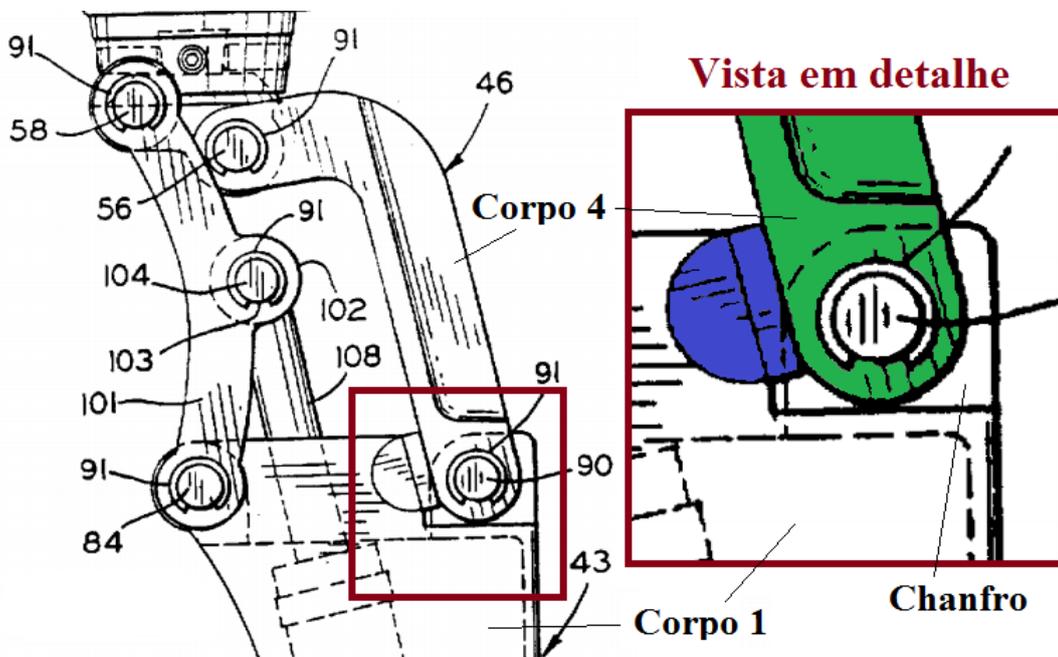


Figura 4.5 – Peças em contato segundo o projeto Kramer et al., 1998

A Figura 4.5 destaca a peça de borracha, que está presente em tamanho reduzido próximo do ponto C na imagem da Figura 4.4. Sua posição é fixa no corpo e se estende em toda a profundidade do chanfro que acomoda o corpo 4 (em verde) na junta C. A peça é projetada para que impacte na lateral do elo 4, quando a perna atinge extensão total. Em próteses comerciais, esse fim de curso é regulável pelo protesista, para definir o ângulo final de extensão.

Na construção do joelho em ambiente CAD, o dispositivo de parada foi modelado como um pequeno semicírculo, que pode ser vista na Figura 3.1 no "Detalhe Joelho", próxima a junta C. A Figura 4.6 ilustra essa peça, utilizando as mesmas cores para destacar as partes.

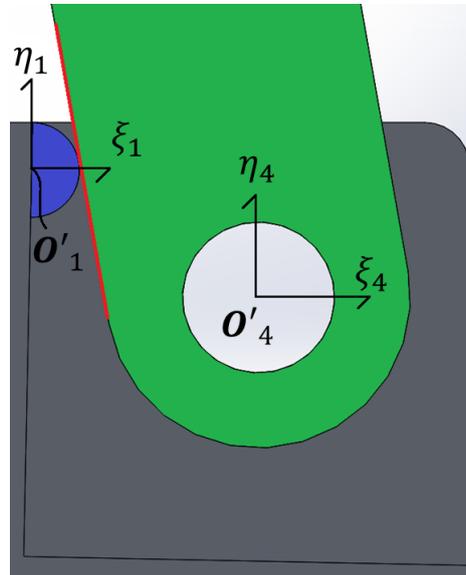


Figura 4.6 – Peças em contato modeladas em ambiente CAD

No ambiente 3D, o componente é na verdade um semicilindro, fixo à parede do chanfro do corpo 1, mas em um ambiente 2D, ele é representado por um semicírculo e tem sua forma incorporada a este corpo. Do mesmo modo, a forma do contato tridimensional entre a superfície cilíndrica e o plano lateral do corpo 4 é um retângulo, mas em um ambiente bidimensional, se transforma em um ponto, pertencente a lateral do corpo 4, representado por uma linha vermelha destacada na figura. Isso é importante, pois influencia diretamente o expoente n da equação da força de contato 3.106, que neste trabalho assumiu o valor 1,5, segundo a orientação do trabalho de Machado et al., 2012.

Nas configurações das propriedades de contato do Solidworks, esse valor também pode ser diretamente inserido, assim como a rigidez de contato K e o coeficiente de restituição C_r . Foram feitas duas simulações, utilizando-se valores diferentes para estes parâmetros. Apesar do semicírculo ter sido concebido como feito de borracha, sua estrutura diminuta e as dificuldades adicionais de se modelar a natureza desse tipo de material, levou a decisão de considerar o semicírculo feito de aço. O próprio software CAE sugere os valores que estes parâmetros devem assumir, baseado nos dois materiais que estão interagindo. No caso de

duas partes de aço "seco" em contato, o coeficiente de rigidez K_{CAE} indicado foi de $99,99 \times 10^6$ N/m . Como explicado na seção 3.9.1, o software comercial utiliza o método de penalidade para sua força de contato F_N (Equação 3.107). Nessa equação, ao invés de fornecer C_r , foram utilizadas uma penetração máxima d_{max} de $0,0001$ m e um amortecimento máximo c_{max} de $49915,668$ $N/(m/s)$, além de um coeficiente de amortecimento $C_r = 0,15$ para o algoritmo. Como está ilustrado na seção seguinte, essa configuração resultou em uma extensão excessiva da perna da prótese, devido a uma grande penetração do corpo 4 no semicírculo. Como o ajuste desse ângulo de extensão é feito pelo protesista, para que a perna não ultrapasse o alinhamento com a coxa, os valores foram alterados, por tentativa e erro, de modo visual, a fim de obter-se uma extensão final aceitável. A parametrização das variáveis deverá ser conduzida em trabalho futuro, com o uso de dados de ensaios mecânicos. Como o trabalho dessa dissertação busca primeiro validar o algoritmo de forma comparativa, os valores não foram escolhidos com tanto preciosismo, desde que as forças geradas não fossem irreais. Dessa forma, o valor encontrado nessa segunda simulação, para o coeficiente de rigidez foi de $K_{CAE} = 1 \times 10^9$ N/m ; coeficiente de amortecimento de $c_{max} = 1 \times 10^9$ $N/(m/s)$ e a penetração máxima foi mantida. Para a segunda simulação, após obtido o padrão de força de reação da simulação em CAE, foi alterado o valor de coeficiente de restituição C_r para calibrar a força de contato entre as partes, sendo obtido o valor de $C_r = 0,16$ $N/(m/s)$. Os seus gráficos estão dispostos no capítulo 5.

Como está descrito nas Equações 3.115 e 3.116, as componentes do vetor posição local das superfícies em contato, são funções dos ângulos φ_K . Essas equações são as equivalências cartesianas dos polinômios S_k que descrevem a geometria das superfícies em coordenadas polares. Contudo, representar o semicírculo do corpo 1, a partir do seu CG como um polinômio mostrou-se impraticável, pois inicialmente foi aplicado o método de interpolação cúbica, utilizando posições adquiridas no próprio CAD como dados de entrada em um sistema de coordenadas polares. Medido o comprimento do vetor posição de uma série de pontos do perímetro do semicírculo, e seu respectivo ângulo (φ_1) em relação a coordenada local (O_1) o resultado da interpolação era insatisfatório, pois havia pouca precisão devido a grande variação do comprimento com uma pequena mudança no ângulo φ_1 . Como solução, foram adicionados dois sistemas locais, um ($\xi_1\eta_1$) bem no centro do semicírculo (O'_1), e outro ($\xi_4\eta_4$) no centro da junta C (O'_4), como ilustrado na Figura 4.6. Dessa forma, o semicírculo

pôde ser escrita utilizando-se da conhecida fórmula de representação de esferas em coordenadas polares Assim, sua fórmula para um sistema centrado em esfera de raio $3,225 \times 10^{-3}m$ é:

$$S_1^P = 3,225 \times 10^{-3} \quad (4.17)$$

Já a superfície do corpo 4, se torna uma linha em um plano 2D e se pôde utilizar a conhecida equação de uma reta em coordenadas polares:

$$S_4^P = \frac{b}{(\text{sen } \varphi_4 - v \cos \varphi_4)} \quad (4.18)$$

onde b é o suposto ponto onde a reta corta o eixo Y em um sistema cartesiano e v a inclinação dessa reta. Logo, em relação ao sistema $(\xi_4\eta_4)$, esses valores são de $b = -41,905 \times 10^{-3} m$ e $v = 3,9743$. A distância do \mathbf{rl}_1 CG do corpo 1 O_1 até o sistema O'_1 é de :

$$\mathbf{rl}_1 = \left[-6,631 \times 10^{-3} \quad 252,058 \times 10^{-3} \right]^T m \quad (4.19)$$

que em representação global fica:

$$\mathbf{rl}_1^P = \mathbf{rl}_1 + \mathbf{A}^1 \mathbf{S}_1^P \quad (4.20)$$

Já para o ponto 4, a distância entre O_4 e O_{14} é de:

$$\mathbf{rl}_4 = \left[19,118 \times 10^{-3} \quad -49,733 \times 10^{-3} \right]^T m \quad (4.21)$$

Que em representação global fica:

$$\mathbf{rl}_4^P = \mathbf{rl}_4 + \mathbf{A}^4 \mathbf{S}_4^P \quad (4.22)$$

Logo a distância \mathbf{d} entre as superfícies no possível ponto de contato P é de:

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}_1^P - \mathbf{r}_4^P \quad (4.23)$$

A representação cartesiana global do vetor de posição local do ponto de contato para os corpos 1 e 4 é de:

$$S_k = \mathbf{A}^k S_k^P \quad (k = 1; 4) \quad (4.24)$$

$$\xi_k^P = S_k \cos \varphi_k \quad (k = 1; 4) \quad (4.25)$$

$$\eta_k^P = S_k \text{sen } \varphi_k \quad (k = 1; 4) \quad (4.26)$$

Para o cálculo da velocidade de penetração, são necessárias as velocidades do ponto P, vistas pelo corpo 1 e 4. Dessa forma, pela Equação 3.120:

$$\dot{\mathbf{r}}_k^P = \dot{\mathbf{r}}_k + \boldsymbol{\omega}^k \times \mathbf{A}_\theta^k \mathbf{S}_k^P \quad (k = 1; 4) \quad (4.27)$$

Assim, todas as constantes necessárias para a descrição de um evento de contato puderam ser aplicadas entre os corpos para criar um dispositivo de parada como o sugerido por Kramer et al., 1998. O resultado final da força de contato é dividido em \mathbf{F}_c^1 aplicada sobre o CG do corpo 1 e \mathbf{F}_c^4 no CG do corpo 4, onde:

$$\mathbf{F}_c^1 = \begin{bmatrix} F_{cx}^1 & F_{cy}^1 & M_c^1 \end{bmatrix}^T \quad (4.28)$$

$$\mathbf{F}_c^4 = \begin{bmatrix} F_{cx}^4 & F_{cy}^4 & M_c^4 \end{bmatrix}^T \quad (4.29)$$

4.6 Vetor de forças externas

Descritas as forças exercidas pelo elemento massa-mola-amortecedor e pelo contato dos corpos 1 e 4, a força peso pode ser acrescida ao conjunto e o vetor \mathbf{Q}_e de forças externas ficou definido como:

$$\mathbf{Q}_e = [Q_{ex}^1 \quad Q_{ey}^1 \quad Q_{em}^1 \quad Q_{ex}^2 \quad Q_{ey}^2 \quad Q_{em}^2 \quad Q_{ex}^3 \quad Q_{ey}^3 \quad Q_{em}^3 \quad Q_{ex}^4 \quad Q_{ey}^4 \quad Q_{em}^4]^T \quad (4.30)$$

onde:

$$\text{Corpo 1} \begin{cases} Q_{ex}^1 = \mathbf{Q}^1(1, 1) + F_{cx}^1 \\ Q_{ey}^1 = \mathbf{Q}^1(2, 1) + F_{cy}^1 - m^1 g \\ Q_{em}^1 = \mathbf{Q}^1(3, 1) + M_c^1 \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\text{Corpo 2} \begin{cases} Q_{ex}^2 = \mathbf{Q}^2(1, 1) \\ Q_{ey}^2 = \mathbf{Q}^2(2, 1) - m^2 g \\ Q_{em}^2 = \mathbf{Q}^2(3, 1) \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\text{Corpo 3} \begin{cases} Q_{ex}^3 = 0 \\ Q_{ey}^3 = -m^3 g \\ Q_{em}^3 = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

$$\text{Corpo 4} \begin{cases} Q_{ex}^4 = 0 + F_{cx}^4 \\ Q_{ey}^4 = -m^3 g + F_{cy}^4 \\ Q_{em}^4 = 0 + M_c^4 \end{cases} \quad (4.34)$$

4.7 Vetor de restrições

O mecanismo deste trabalho utiliza somente três tipos de restrições: (I) Solo; (II) Juntas de revolução; (III) Restrições motrizes. As juntas **A**, **B**, **C**, **D** e **O** são juntas de revolução e seguem as restrições da Equação 3.12. Além dos quatro corpos já mencionados, há um adicional: o corpo "Solo". Suas coordenadas possuem as restrições da Equação 3.10, e por esse corpo ser estático, as derivadas temporais das suas coordenadas generalizadas são consideradas nulas e em nada colaboram com o equacionamento e resolução do algoritmo. Dessa forma, não há necessidade de sua inclusão na matriz de massas **M**, vetor de coordenadas **q** ou qualquer outra variável, pois sua exclusão só adiciona vantagens em termos de simplificação do tamanho das matrizes e vetores.

O corpo 3, representante da coxa, adota um deslocamento prescrito em sua restrição motriz. Em Winter [2009], o autor e sua equipe dispuseram dados de movimento de um grupo de indivíduos saudáveis durante um ciclo de marcha. Para obter tais dados, o autor utilizou da técnica de cinemetria [Amadio et al., 1999], que consiste da utilização de duas ou mais câmeras de vídeo, com altas taxas de aquisição de imagens, para calcular as variáveis cinemáticas. Para tal, usualmente utilizam-se esferas de material reflexivo fixadas em pontos pré-determinados. As imagens das câmeras são processadas por um software, que localiza o centroide de tais esferas nas imagens e referencia sua posição em relação à um referencial inercial padrão, estipulado na sua calibração. O software calcula dessa forma, os valores de posição, velocidade e aceleração das esferas. A Figura 4.7 localiza tais marcadores utilizados pelo autor.

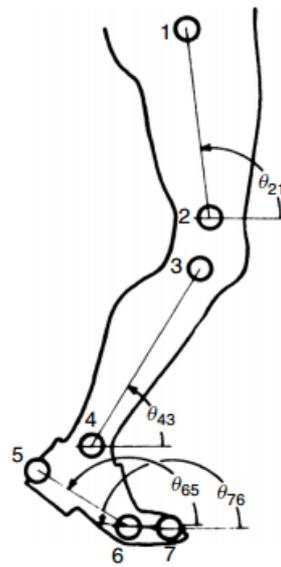


Figura 4.7 – Marcadores reflexivos para uso em cinemetria. Fonte: Winter, 2009

Na imagem, os marcadores 1 e 2 estão fixados ao longo do fêmur, sendo 1 o seu ponto de pivotamento na bacia. Todos os dados adquiridos foram colocados pelo autor a disposição no público no site (<http://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=index&bcsId=5453&itemId=0470398183>). A Figura 4.8 mostra a posição angular θ_{21} em função do tempo durante mais de um ciclo de passada.

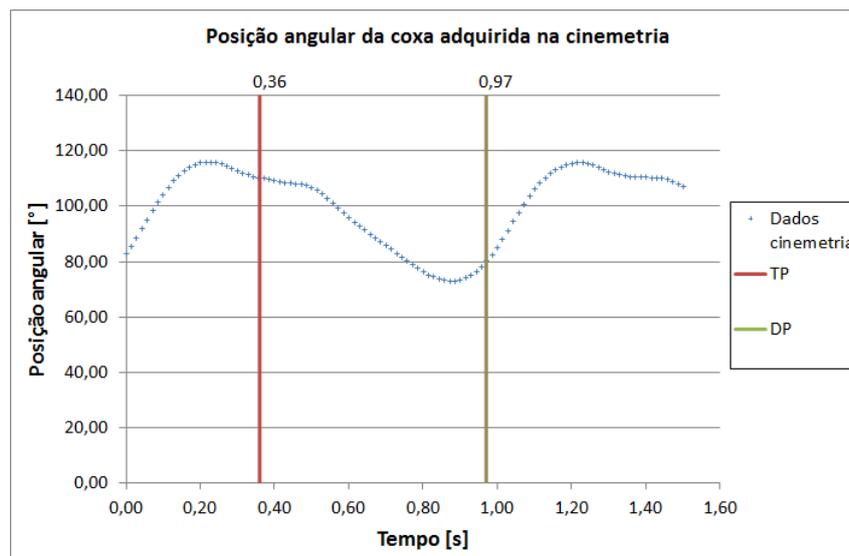


Figura 4.8 – Posição angular da coxa durante o cliço de marcha

Os pontos com símbolos em cruz de cor azul são os dados das posições adquiridas na cinemetria. O intervalo 0–0,36 segundos corresponde à Fase de balanço da perna, que finaliza com o toque do pé (TP) no solo, mais precisamente o calcanhar. Desse ponto até o instante 0,97 segundos ocorre a Fase de apoio, que finaliza com o mesmo padrão de posição angular para um novo balanço, quando há o impulso do Hálux e posterior desprendimento dos dedos do pé (DP). Desse modo o período completo de um ciclo de passada é de 0,97 segundos.

O trabalho desta dissertação foi focado, inicialmente, somente na solução da fase de balanço. Assim, foi utilizada a posição angular da coxa como deslocamento prescrito até o momento 0,36 s. Como os softwares comerciais utilizados calculam os ângulos na unidade de radianos, os dados de cinemetria foram convertidos para esta unidade e seus valores foram descontados para que iniciassem na posição nula. Essa adaptação está ilustrada na Figura 4.9.

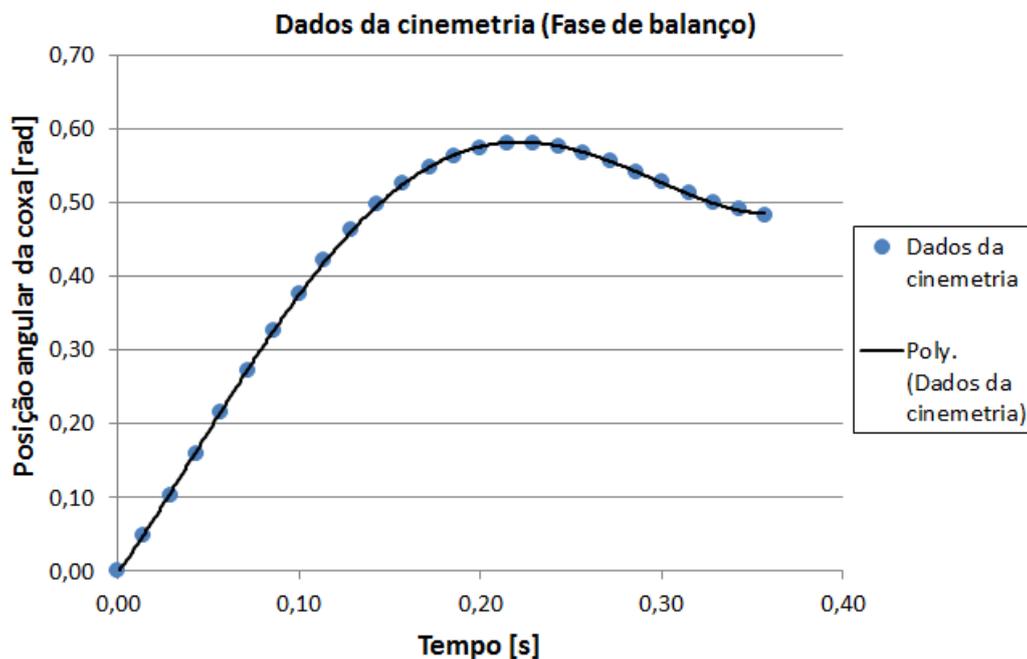


Figura 4.9 – Posição angular da coxa durante o cliço de marcha

Usualmente no cálculo numérico a função da posição poderia ser fornecida com um vetor contendo os valores dos dados de cinemetria e suas derivadas temporais podem ser calculadas e unidas por uma interpolação cúbica ou de Akima, mas normalmente as funções

resultantes são "suja", com muitos picos e vales agudos. Para contornar isso, foi aplicada a *matriz inversa de Vandermonde* [Williams, 2012; Turner, 1966] via subrotina do software Matlab [MathWorks, 2015a,b], para um polinômio de quarto grau que melhor representasse o comportamento dos dados (linha preta do gráfico). O polinômio $\theta_{pol}(t)$ encontrado e os valores de seus coeficientes são:

$$\theta_{pol}(t) = 144,6166t^4 - 98,5942t^3 + 10,5845t^2 + 3,5631t - 0,0034 \quad (4.35)$$

Esse vetor representa o *deslocamento angular* em relação ao valor θ^3 inicial. Assim, sua restrição motriz é dada por:

$$\theta^3 - (\theta_{pol} + (\theta^3)_{inicial}) = 0 \quad (4.36)$$

Definidas as equações de restrições motoras e de junta, finalmente o vetor \mathbf{C} pode ser montado, onde:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^1 + \mathbf{A}^1 \bar{\mathbf{u}}_D^1 - \mathbf{R}^2 - \mathbf{A}^2 \bar{\mathbf{u}}_D^2 \\ \mathbf{R}^2 + \mathbf{A}^2 \bar{\mathbf{u}}_A^2 - \mathbf{R}^3 - \mathbf{A}^3 \bar{\mathbf{u}}_A^3 \\ \mathbf{R}^3 + \mathbf{A}^3 \bar{\mathbf{u}}_O^3 \\ \mathbf{R}^3 + \mathbf{A}^3 \bar{\mathbf{u}}_B^3 - \mathbf{R}^4 - \mathbf{A}^4 \bar{\mathbf{u}}_B^4 \\ \mathbf{R}^4 + \mathbf{A}^4 \bar{\mathbf{u}}_C^4 - \mathbf{R}^1 - \mathbf{A}^1 \bar{\mathbf{u}}_C^1 \\ \theta^3 - (\theta_{pol} + (\theta_3)_{inicial}) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Pelo fato do vetor \mathbf{C} só possuir 11 equações, é necessária a matriz \mathbf{Id} para que as equações 3.22 e 3.28 possam ser resolvidas. Como só resta uma equação para definir o sistema, a posição angular do corpo 4 foi definida como a variável independente do problema, logo \mathbf{Id} assume a forma:

$$\mathbf{Id} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Além disso, como θ^4 foi assumida a variável independente, sua velocidade angular é:

$$\dot{\mathbf{q}}^i = \dot{\theta}^4 = \dot{\mathbf{q}}(12,1) \quad (4.39)$$

4.8 Forças de reação

A resolução da equação de movimento 3.88 fornece além das acelerações, o vetor de multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$, útil para se obterem as forças generalizadas nos corpos. A força generalizada é a força resultante do somatório de todas as forças de reação e externas que atuam sobre um determinado corpo, aplicada sobre o seu CG. É possível desacoplar os valores de reações individualmente e obtê-las em função de $\boldsymbol{\lambda}$, contudo, como os corpos 1 e 3 possuem mais de duas juntas cada, essa expressão das reações é um tanto trabalhosa. Uma metodologia mais simples foi utilizada para este cálculo: o *Princípio de D'Alembert* aplicado a um *somatório de forças* quase-estático [Meirovitch, 2010]. Esse conhecido princípio afirma que ao subtrair do somatório de força externa sobre um corpo a força inercial, sua resultante é nula. Assim para um corpo i , que está sobre ação de n_f forças, tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n_f} F^k - m^i a^i = 0 \quad (4.40)$$

Os somatórios foram feitos em relação ao CG de cada corpo. Como nomenclatura, F_X^i é a componente X' da força resultante do somatório de todas as forças externas atuando sobre o CG do corpo i , e F_Y^i a componente Y' dessa força, já o momento externo resultante aplicado sobre o CG é nomeado M_{CG}^i . As forças de reação seguem a mesma nomenclatura, mas a letra ao lado da variável de direção define de que junta a força é resultante. Como o sistema possui 5 juntas rotativas, e cada um gera duas forças de reação, são esperadas 10 no total. O somatório de forças em cada um dos corpos disponibiliza 3 equações, duas de translação e uma de momento. Os 4 corpos gerariam 12 equações, mas para evitar um sistema sobredeterminado, o somatório de momentos dos corpos 1 e 3 foram desconsiderados.

- **Corpo 1**

A Figura 4.10 ilustra o diagrama de corpo livre do corpo 1 para as forças de reação.

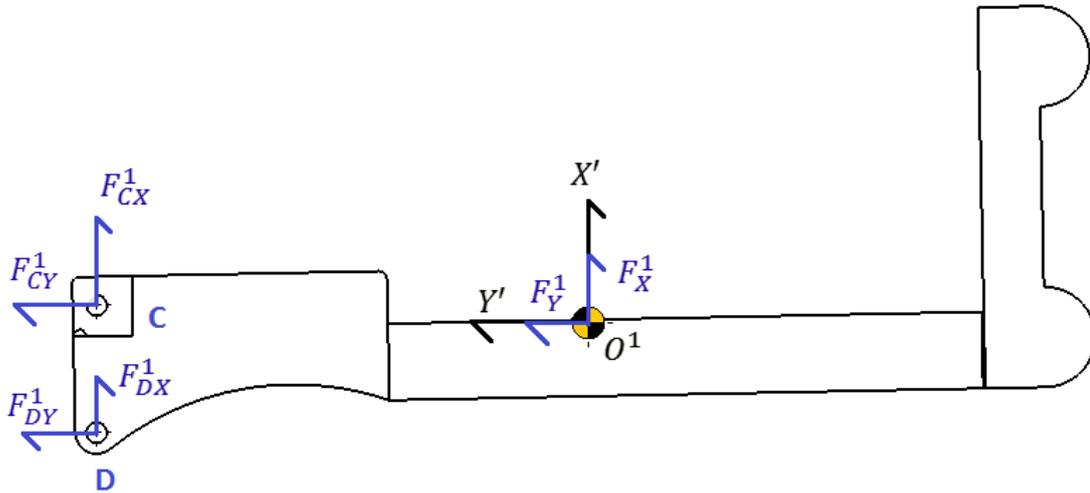


Figura 4.10 – Diagrama de corpo livre das forças de reação sobre o corpo 1

O sentido das forças de reação foi definido aleatoriamente e seu somatório de forças na direção do eixo X' sobre o corpo 1 resulta em:

$$\Sigma F_{X'} = m^1 a_x^1 \Leftrightarrow F_{DX}^1 + F_{CX}^1 + F_X^1 = m^1 \ddot{R}_x^1 \quad (4.41)$$

A qual m^1 é a massa do corpo 1 em $[kg]$ e \ddot{R}_x^1 é a componente X da aceleração do CG do corpo 1 em $[m/s^2]$. Para a direção Y' :

$$\Sigma F_{Y'} = m^1 a_y^1 \Leftrightarrow F_{DY}^1 + F_{CY}^1 + F_Y^1 = m^1 \ddot{R}_y^1 \quad (4.42)$$

Lembrando que:

$$\begin{bmatrix} F_X^1 \\ F_Y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e(1, 1) \\ Q_e(2, 1) \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

- **Corpo 2**

A Figura 4.11 ilustra o diagrama de corpo livre do corpo 2 para as forças de reação.

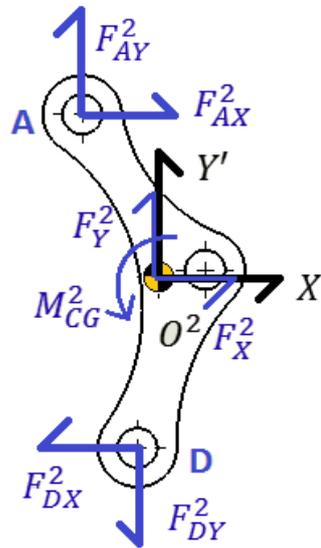


Figura 4.11 – Diagrama de corpo livre das forças de reação sobre o corpo 2

O somatório de forças na direção do eixo X' sobre o corpo 2 resulta em:

$$\Sigma F_{X'} = m^2 a_x^2 \Leftrightarrow F_{AX}^2 - F_{DX}^2 + F_X^2 = m^2 \ddot{R}_x^2 \quad (4.44)$$

Para a direção Y' :

$$\Sigma F_{Y'} = m^2 a_y^2 \Leftrightarrow F_{AY}^2 - F_{DY}^2 + F_Y^2 = m^2 \ddot{R}_y^2 \quad (4.45)$$

O somatório de momento em torno do CG do corpo 2 é:

$$\Sigma M^2 = J_2 \ddot{\theta}^2 = -F_{DX}^2 u_{Dy}^2 + F_{DY}^2 u_{Dx}^2 + F_{AX}^2 u_{Ay}^2 - F_{AY}^2 u_{Ax}^2 + M_{CG}^2 \quad (4.46)$$

onde:

$$\mathbf{u}_A^2 = \begin{bmatrix} u_{Ax}^2 \\ u_{Ay}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^2 \bar{\mathbf{u}}_A^2 \quad (4.47)$$

$$\mathbf{u}_D^2 = \begin{bmatrix} u_{Dx}^2 \\ u_{Dy}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}^2 \bar{\mathbf{u}}_D^2 \quad (4.48)$$

$$\begin{bmatrix} F_{DX}^2 \\ F_{DY}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{DX}^1 \\ F_{DY}^1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\begin{bmatrix} F_X^2 \\ F_Y^2 \\ M_{CG}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e(4,1) \\ Q_e(5,1) \\ Q_e(6,1) \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

• **Corpo 3**

A Figura 4.12 ilustra o diagrama de corpo livre do corpo 3 para as forças de reação.

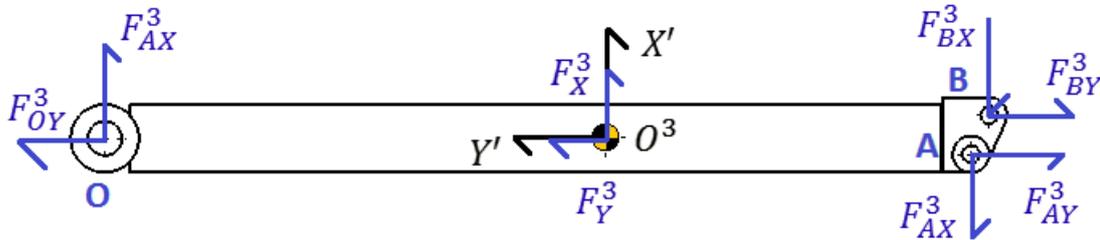


Figura 4.12 – Diagrama de corpo livre das forças de reação sobre o corpo 3

O somatório de forças na direção do eixo X' sobre o corpo 2 resulta em:

$$\Sigma F_{X'} = m^3 a_x^3 \Leftrightarrow F_{OX}^3 - F_{AX}^3 - F_{BX}^3 + F_X^3 = m^3 \ddot{R}_x^3 \quad (4.51)$$

Para a direção Y' :

$$\Sigma F_{Y'} = m^3 a_y^3 \Leftrightarrow F_{OY}^3 - F_{AY}^3 - F_{BY}^3 + F_Y^3 = m^3 \ddot{R}_y^3 \quad (4.52)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} F_{AX}^3 \\ F_{AY}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{AX}^2 \\ F_{AY}^2 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\begin{bmatrix} F_{BX}^3 \\ F_{BY}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{BX}^4 \\ F_{BY}^4 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\begin{bmatrix} F_X^3 \\ F_Y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e(7,1) \\ Q_e(8,1) \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

- **Corpo 4**

A Figura 4.13 ilustra o diagrama de corpo livre do corpo 4 para as forças de reação.

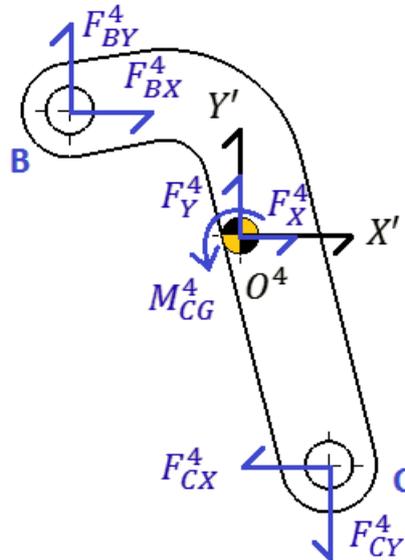


Figura 4.13 – Diagrama de corpo livre das forças de reação sobre o corpo 4

O somatório de forças na direção do eixo X' sobre o corpo 4 resulta em:

$$\Sigma F_{X'} = m^4 a_x^4 \Leftrightarrow F_{BX}^4 - F_{CX}^4 + F_X^4 = m^4 \ddot{R}_x^4 \quad (4.56)$$

Para a direção Y' :

$$\Sigma F_{Y'} = m^4 a_y^4 \Leftrightarrow F_{BY}^4 - F_{CY}^4 + F_Y^4 = m^4 \ddot{R}_y^4 \quad (4.57)$$

O somatório de momento em torno do CG do corpo 4 é:

$$\Sigma M^4 = J_4 \ddot{\theta}^4 = -F_{CX}^4 u_{Cy}^4 + F_{CY}^4 u_{Cx}^4 + F_{BX}^4 u_{By}^4 - F_{BY}^4 u_{Bx}^4 + M_{CG}^4 \quad (4.58)$$

a qual:

$$\mathbf{u}_B^4 = \begin{bmatrix} u_{Bx}^4 \\ u_{By}^4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^4 \bar{\mathbf{u}}_B^4 \quad (4.59)$$

$$\mathbf{u}_C^4 = \begin{bmatrix} u_{Cx}^4 \\ u_{Cy}^4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^4 \bar{\mathbf{u}}_C^4 \quad (4.60)$$

$$\begin{bmatrix} F_{CX}^4 \\ F_{CY}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{CX}^1 \\ F_{CY}^1 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\begin{bmatrix} F_X^4 \\ F_Y^4 \\ M_{CG}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e(10, 1) \\ Q_e(11, 1) \\ Q_e(12, 1) \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

A resolução desse sistema de equações foi calculada de maneira simbólica pelo algoritmo mostrado na Seção 3.10, mais especificamente nos fluxogramas das Figuras 3.11 e 3.12. Foi utilizado de formatação simbólica para resolver computacionalmente o isolamento das variáveis. Os seus resultados estão expostos no próximo capítulo.

4.9 Análise no Working Model 2D

O mesmo mecanismo foi desenhado e simulado no ambiente do pacote computacional Working Model 2D. Este é um programa de simulação de corpos rígidos em ambiente bidimensional, e seu enfoque em CAE dificulta a modelagem de objetos com geometrias complexas. Para representar as partes do mecanismo, um desenho técnico foi importado para o programa, e o contorno de cada um dos corpos foi feito, utilizando-se diversos pontos do seu contorno. O resultado por ser visto na Figura 4.14.

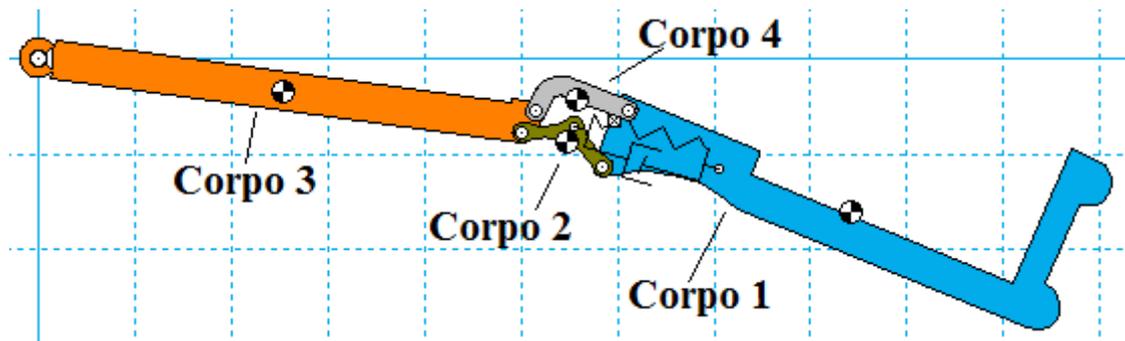


Figura 4.14 – Mecanismo completo no Working Model 2D

Todos os parâmetros geométricos, massas, posições, velocidades, acelerações iniciais e propriedades do elemento massa-amortecedor, foram os mesmos especificados anteriormente. Os seus centros de gravidade são calculados automaticamente baseados em sua geometria. Todavia, este programa utiliza a teoria simples de impacto de corpos rígidos, cujo

enfoque se fixa somente nas velocidades iniciais e finais dos corpos, imediatamente antes e após o impacto, e não modela o evento durante o contato. A relação entre as velocidades iniciais e finais é dado pelo coeficiente de restituição, que nesse caso foi assumido o valor de 0,15, pois foi o valor sugerido na biblioteca do programa Solidworks para o contato de duas peças de aço. A sua simplificação do fenômeno de impacto é aparente nos gráficos apresentados em capítulo seguinte. Além disso, apesar de ser possível a obtenção de forças de reação nas juntas, o programa não fornece a força de impacto entre as peças, devido a essa mesma simplificação.

5. RESULTADOS

Nesta seção estão dispostos os resultados encontrados nas simulações com o uso do algoritmo e dos programas Solidworks Motion e Working Model 2D. Como mencionado em seção anterior, foram feitas duas simulações. A primeira foi performada com o uso dos parâmetros sugeridos na biblioteca do Solidworks para os materiais utilizados nos corpos 1 e 4. A segunda simulação, utilizou parâmetros modificados pelo autor, a fim de atingir um resultado que, aparentemente, seria mais realista. São apresentados os valores encontrados para as posições, velocidades e acelerações angulares de cada um dos corpos, além da força de impacto e as forças de reação durante toda a simulação. Após, são apresentadas tabelas comparativas das diferenças encontradas entre o algoritmo e os pacotes computacionais de CAE.

5.1 Primeira simulação

São ilustradas a seguir os valores encontrados para as posições (Figura 5.1), velocidades (Figura 5.2) e acelerações angulares (Figura 5.3), de cada corpo, encontradas. Cada cor se refere a um ambiente de simulação, dessa forma, os valores encontrados pelo algoritmo estão em vermelho, pelo Solidworks em linha preta contínua e pelo Working Model 2D em linha preta tracejada. Nas legendas, quando se mencionar “Simulação CAE”, se refere ao Solidworks, já “Simulação WM” diz respeito ao Working Model. A linha pontilhada em azul indica o momento de início do contato, do ponto de vista da algoritmo, já a linha contínua azul marca o término do contato. Foram destacadas somente as grandezas angulares, pois as coordenadas lineares dos centros de gravidade dos corpos são dependentes dessa grandeza, uma vez que as distâncias entre seus centros e suas juntas são constantes.

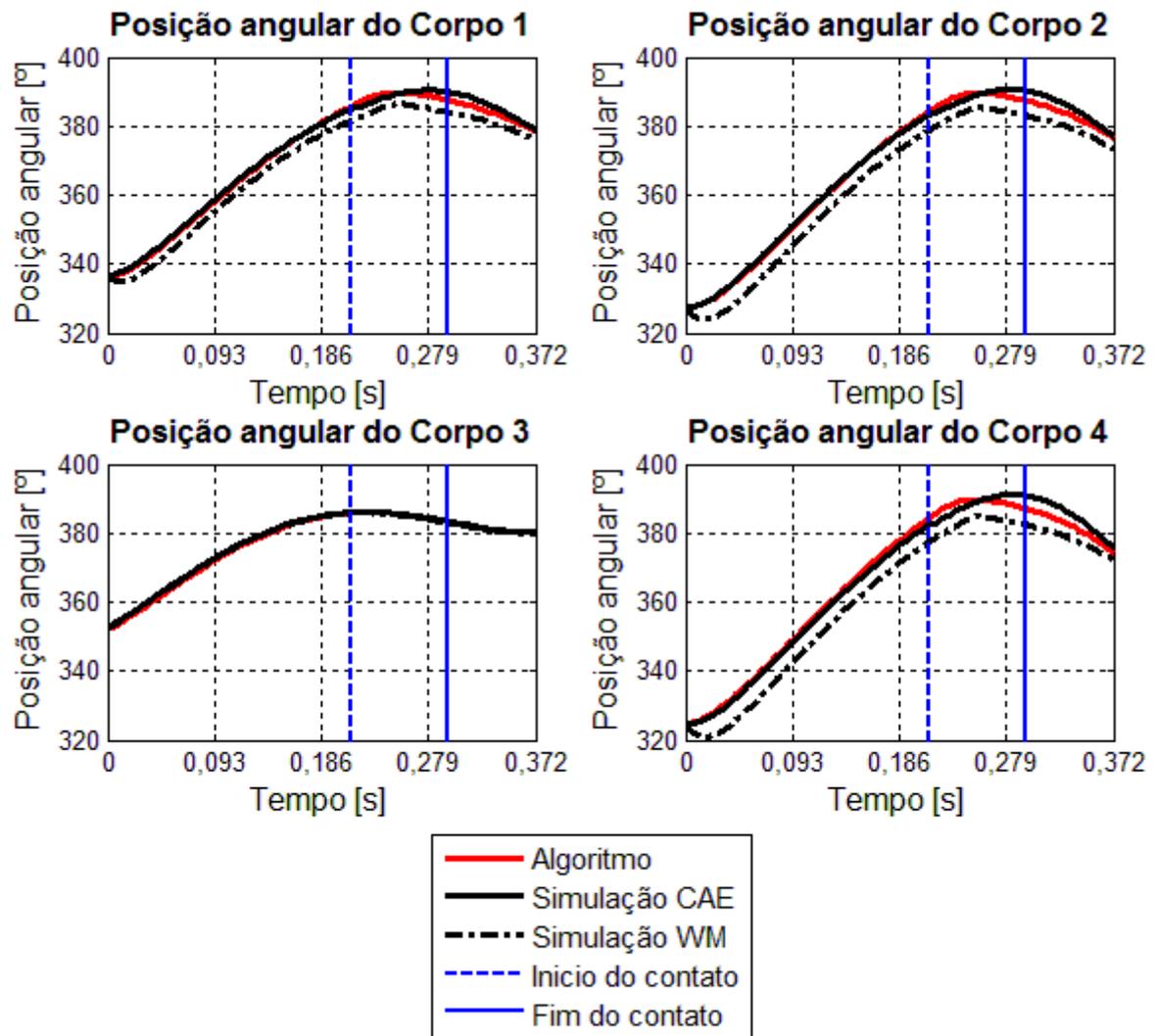


Figura 5.1 – Posições angulares obtidas na primeira simulação

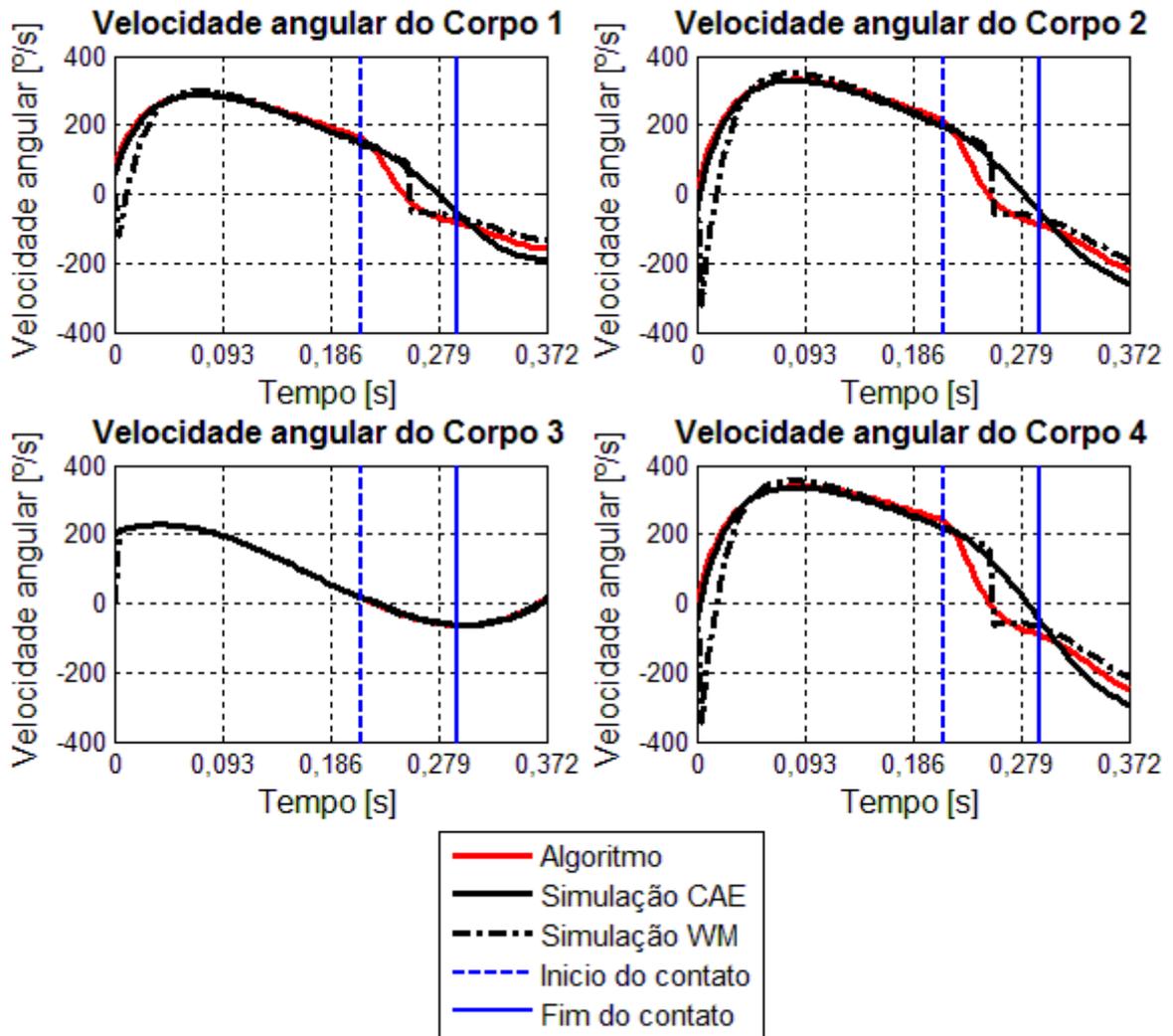


Figura 5.2 – Velocidades angulares obtidas na primeira simulação

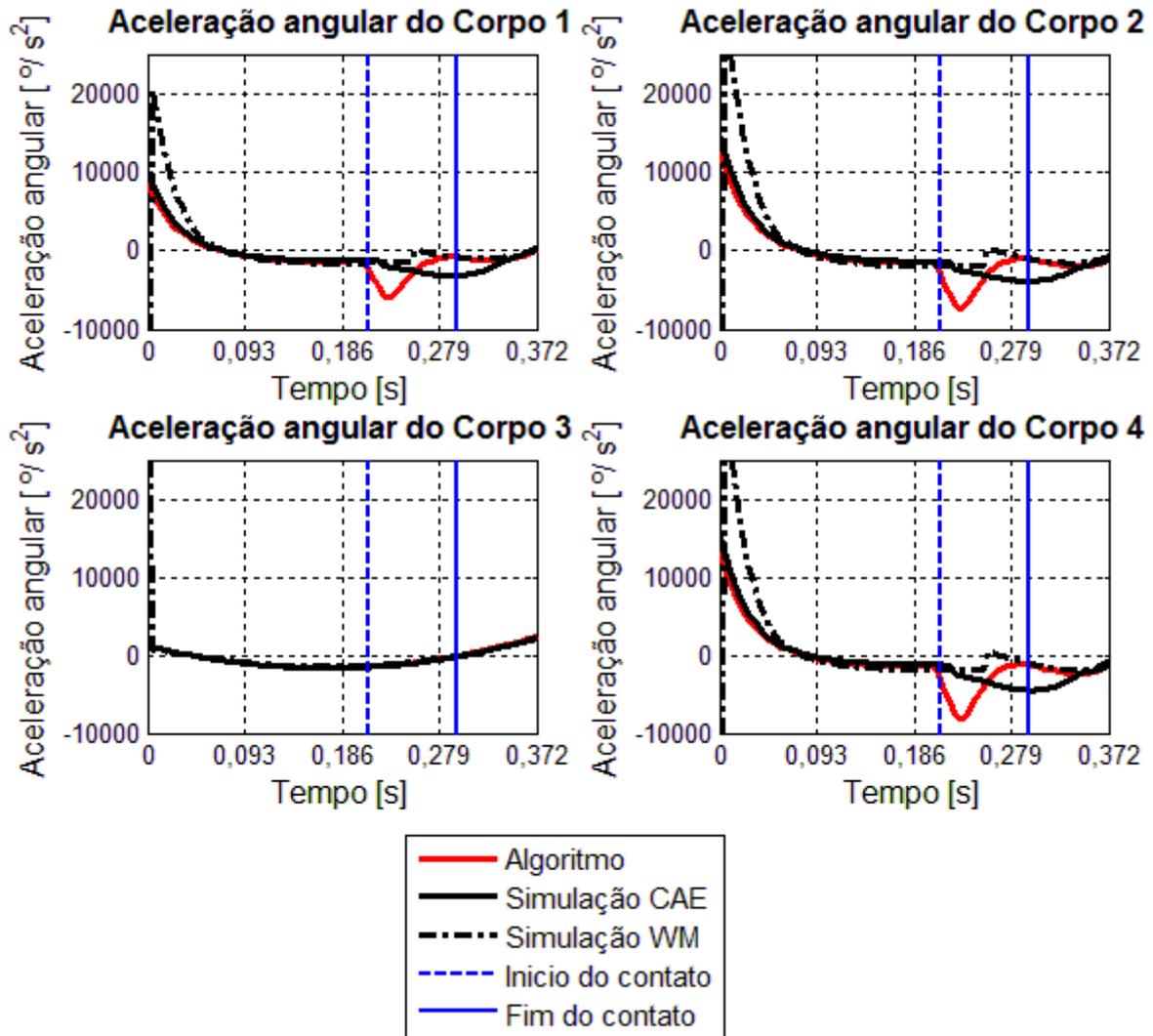


Figura 5.3 – Acelerações angulares obtidas na primeira simulação

Visualmente, as diferenças iniciais de posição são pequenas para todos os corpos, mas se acentuam, após o contato. Essa piora, ocorre da mesma forma para as velocidades e acelerações, principalmente para o Working Model, que já partiu de valores bem aumentados no primeiro instante de tempo. Essa grande diferença ocorre também no corpo 3, cuja posição angular é definida pelo polinômio da Equação 4.35. As Figuras 5.4 e 5.5 ilustram o comportamento das forças de reação das juntas.

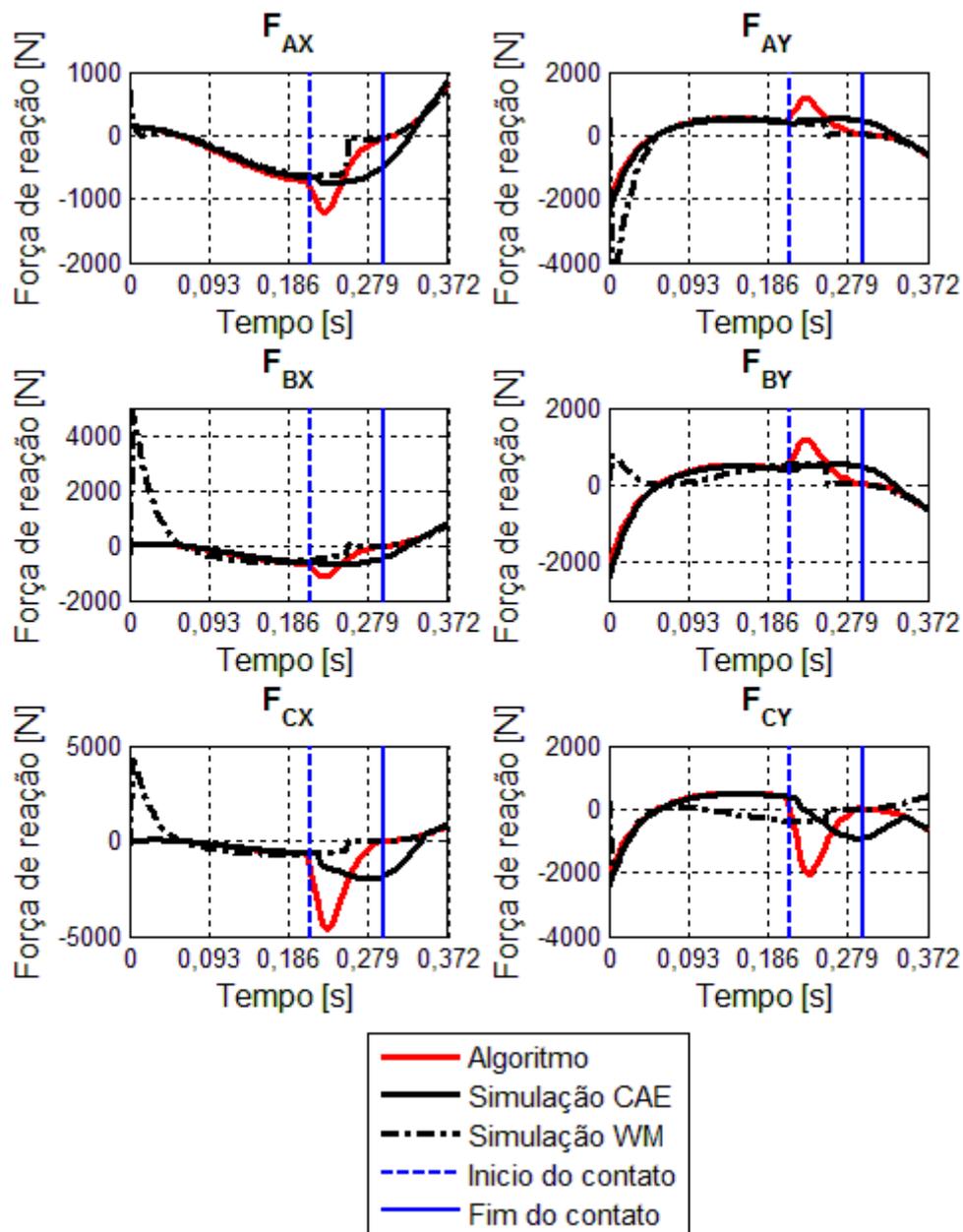


Figura 5.4 – Forças de reação para os pontos A, B e C, obtidas na primeira simulação

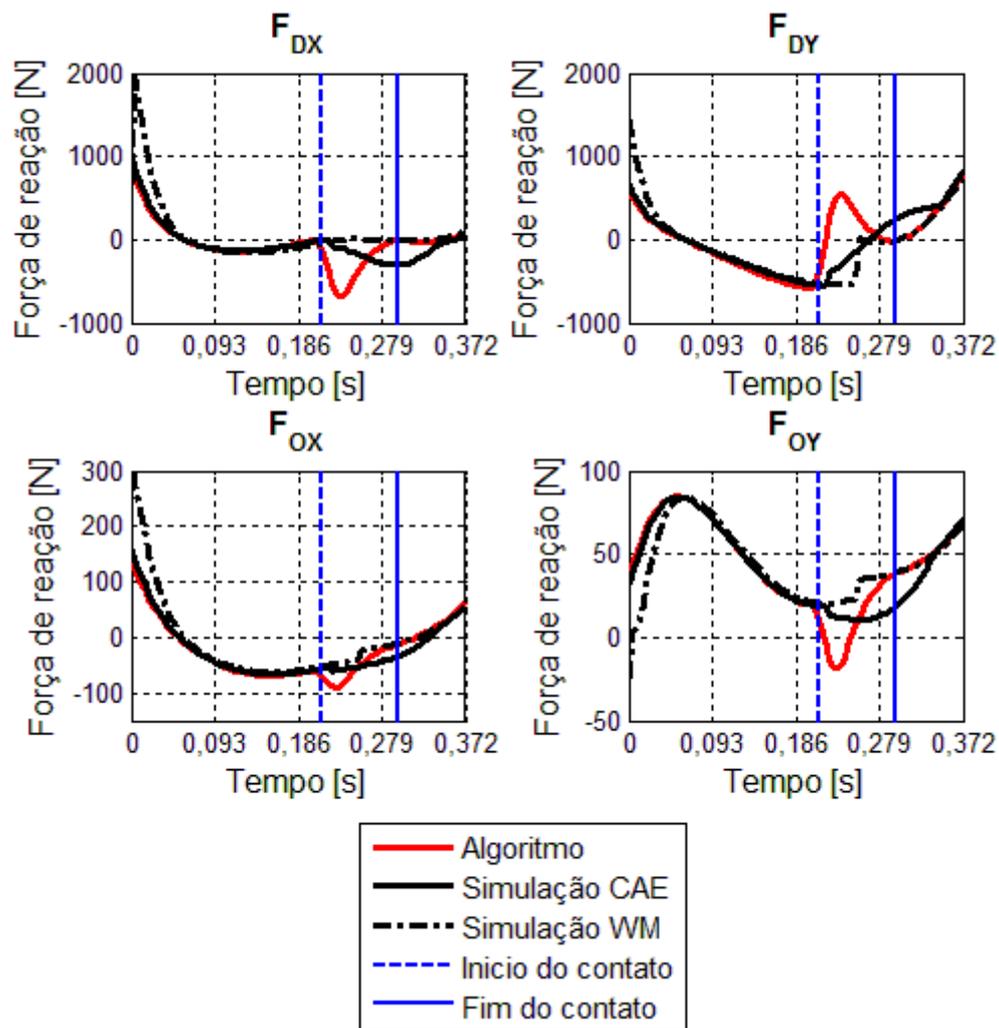


Figura 5.5 – Forças de reação para os pontos **D** e **O**, obtidas na primeira simulação

Da mesma forma, as forças nos instantes iniciais são muito elevadas para o Working Model (WM), e seus valores no momento do contato não se aproximam nem do algoritmo, nem do Solidworks. A fim de obter uma comparação quantitativa, a Tabela 5.1, mostra os valores máximos, mínimos e médios, das diferenças entre o algoritmo e o WM para as grandezas cinemáticas. Já a Tabela 5.2 indica as mesmas diferenças, mas dessa vez para as forças de reação, onde divididas entre suas componentes **X** e **Y**, e da mesma forma comparadas.

Tabela 5.1 – Diferenças entre o Algoritmo e WM - Posição, Velocidade e Aceleração

Corpo	Diferença	Posição [°]	Velocidade [°/s]	Aceleração [°/s²]
1	Min	0,2821	0,4068	3,5351
	Max	4,2247	237,4280	166046,7214
	Med	3,1692	25,1589	3079,5035
2	Min	0,2213	0,0344	18,8790
	Max	6,0462	381,4925	354553,9613
	Med	4,6679	35,0932	5720,9940
3	Min	0.0020	0.0000	1.7550
	Max	0,7442	204,1506	159381,3314
	Med	0,4004	2,2187	1842,6981
4	Min	0,2261	0,0000	11,1326
	Max	7,3902	395,1896	378095,9376
	Med	5,6312	37,8003	6134,6901

Tabela 5.2 – Diferenças entre o Algoritmo e WM - Forças

Forças	Min	Max	Med
F_{AX}[N]	0,0890	583,7030	105,1375
F_{AY}[N]	0,0890	583,7030	105,1375
F_{BX}[N]	0,8520	4846,6900	405,3215
F_{BY}[N]	0,8520	4846,6900	405,3215
F_{CX}[N]	0,2060	4442,6230	728,3553
F_{CY}[N]	0,2060	4442,6230	728,3553
F_{DX}[N]	0,4713	1261,9770	147,3461
F_{DY}[N]	0,4713	1261,9770	147,3461
F_{OX}[N]	0,1364	2247,4050	40,8636
F_{OY}[N]	0,1364	2247,4050	40,8636

É notável, que os maiores valores das diferenças máximas, para o caso das forças,

sejam dos pontos **B** e **C**, pertencentes ao corpo 4, cujas diferenças máximas nas acelerações, também são as mais elevadas. Novamente, as maiores divergências ocorrem logo no início da simulação, e durante o evento de contato. Como o WM não calcula a força de contato, essa não podem ser comparadas com a encontrada pelo algoritmo. Essa comparação é feita somente com a calculada pelo Solidworks, ilustrada na Figura 5.6.

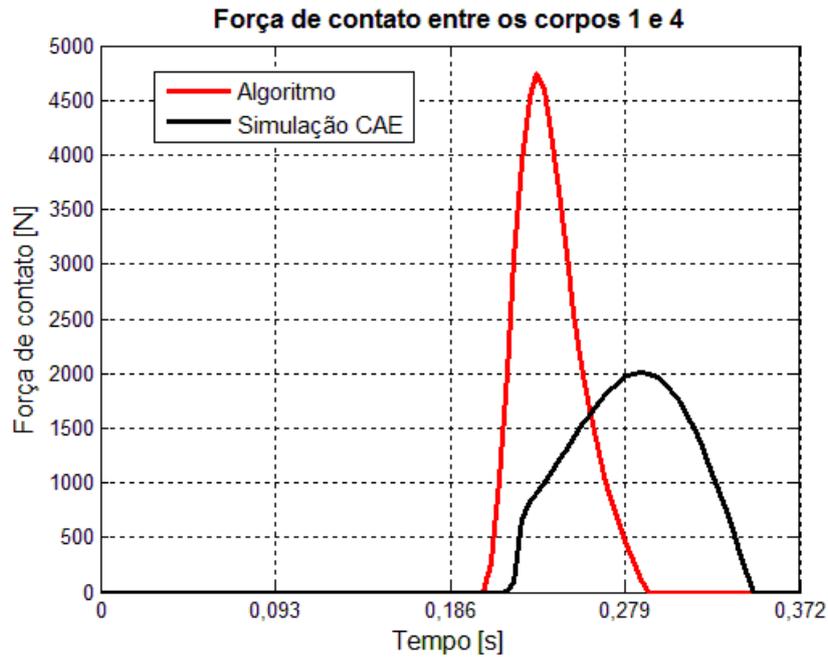


Figura 5.6 – Forças de contato do algoritmo e do Solidworks para a primeira simulação

Verifica-se na figura, que o momento de contato calculado pelo algoritmo, ocorre antes da simulação do CAE, sendo de $t = 0,2120$ s o início da penetração no algoritmo e $t = 0,2144$ s no CAE. Também nota-se a maior magnitude da força em vermelho, mas com uma menor duração, o que sugere um contato mais inelástico por conta do algoritmo. As Tabelas 5.3 e 5.4 mostram as mesmas diferenças das tabelas anteriores, mas desta vez com a comparação do algoritmo com o programa Solidworks.

Tabela 5.3 – Diferenças entre o Algoritmo e Solid. - Posição, Velocidade e Aceleração

Corpo	Diferença	Posição [°]	Velocidade [°/s]	Aceleração [°/s²]
1	Min	0,0092	0,3711	44,0031
	Max	2,4995	90,3728	3818,2716
	Med	0,8929	21,6994	809,2369
2	Min	0,0154	0,2512	70,3092
	Max	3,0689	113,3018	4774,5439
	Med	1,0134	27,1301	1058,6186
3	Min	0,0001	0,0000	0,0000
	Max	0,9118	9,1369	158,1084
	Med	0,3599	1,6275	41,3293
4	Min	0,0413	0,4134	98,6071
	Max	4,0062	130,7706	5571,9965
	Med	1,6727	31,1372	1204,6082

Tabela 5.4 – Diferenças entre o Algoritmo e Solid. - Forças

Forças	Min	Max	Med
F_{AX}[N]	4,5582	492,9030	128,2644
F_{AY}[N]	4,5582	492,9030	128,2644
F_{BX}[N]	0,1992	471,9692	121,3115
F_{BY}[N]	0,1992	471,9692	121,3115
F_{CX}[N]	0,0334	3215,6602	547,8136
F_{CY}[N]	0,0334	3215,6602	547,8136
F_{DX}[N]	0,0480	582,4127	102,7700
F_{DY}[N]	0,0480	582,4127	102,7700
F_{OX}[N]	1,1019	30,7748	8,4179
F_{OY}[N]	1,1019	30,7748	8,4179
Contato [N]	0,0000	3834,7295	599,9914

Baseado nessa tabela de diferenças entre forças, novamente o ponto **C** teve os valores mais elevados, assim como os resultados cinemáticos do corpo 4. Como já mencionado, essa simulação resultou em uma penetração considerada excessiva do corpo 4 no semicírculo do corpo 1. A Figura 5.7 ilustra em detalhe esse acontecimento (valores em milímetros).

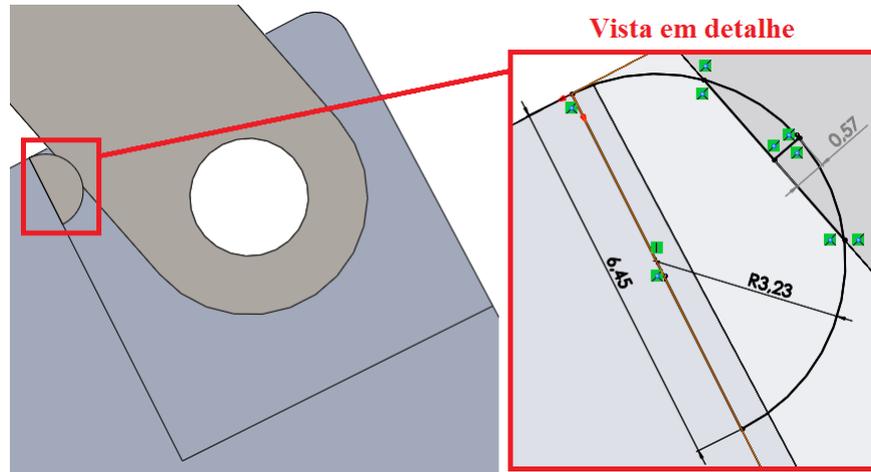


Figura 5.7 – Penetração excessiva do corpo 4 no semicírculo

Já que as duas peças em contato foram concebidas como feitas em aço, uma penetração de $0,57 \text{ mm}$ parece irreal para a carga aplicada, possivelmente já causando uma deformação plástica local no material. Para contornar esse fato, as variáveis de contato foram alteradas, como descritas na Seção 4.5, e uma segunda simulação foi realizada.

5.2 Segunda simulação

As propriedades de contato foram ajustadas de modo visual, até que a extensão final da perna (corpo 1) fosse quase paralela à coxa (corpo 3). Os valores dessas propriedades foram carregados para o algoritmo, onde seu coeficiente de restituição C_r foi alterado, até que o comportamento das forças de contato fosses próximas entre as simulações. Devido as discrepâncias apresentadas pelo programa WM no teste anterior, e sua incapacidade de calcular a força de contato, uma segunda simulação neste ambiente computacional foi descartada. O resultado dessa pode ser visualizado na Figura 5.8, para um tempo total de $0,3720 \text{ s}$.

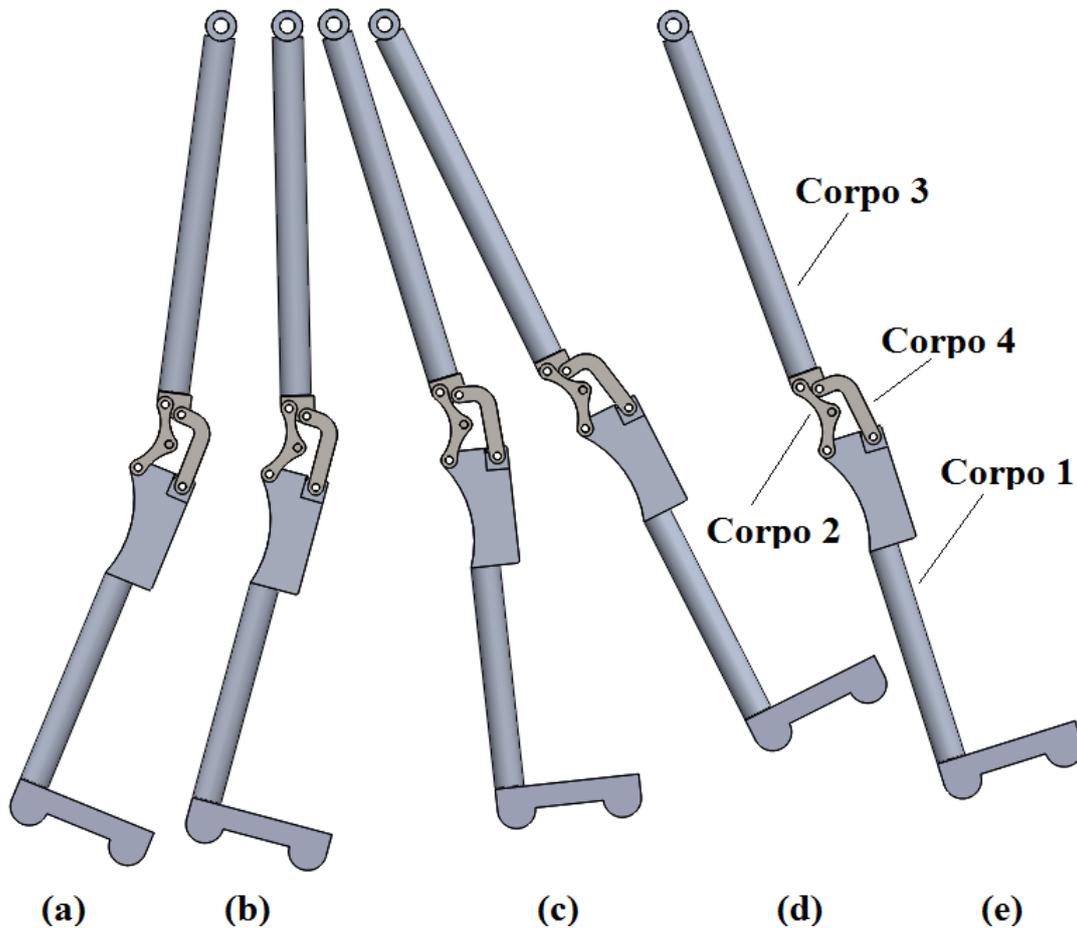


Figura 5.8 – Sequência do movimento do sistema obtida na simulação em CAE

Os tempos da Figura 5.1 (a)–(e) são respectivamente: 0,0000 s; 0,04278 s; 0,1171 s; 0,2195 s e 0,3720 s. Nos primeiros instantes o corpo 3 impulsiona a perna para frente ((a)–(d)), mas seu movimento de extensão é freado pelo elemento mola-amortecedor, até o momento onde cessa o deslocamento do corpo 3 ((d)), mas os demais seguem pela influência da inércia, até o instante onde ocorre o impacto entre os corpos 1 e 4. Para a simulação do Solidworks, o impacto ocorre no tempo $t = 0,2144$ s, já o algoritmo detecta penetração um pouco antes, no instante $t = 0,2120$ s. Essa diferença influenciou os resultados de posição angular e suas derivadas, além da resposta das forças de reação. As Figuras 5.9, 5.10 e 5.11 comparam os valores calculados pelo algoritmo (valores em vermelho) e o software CAE (valores em preto).

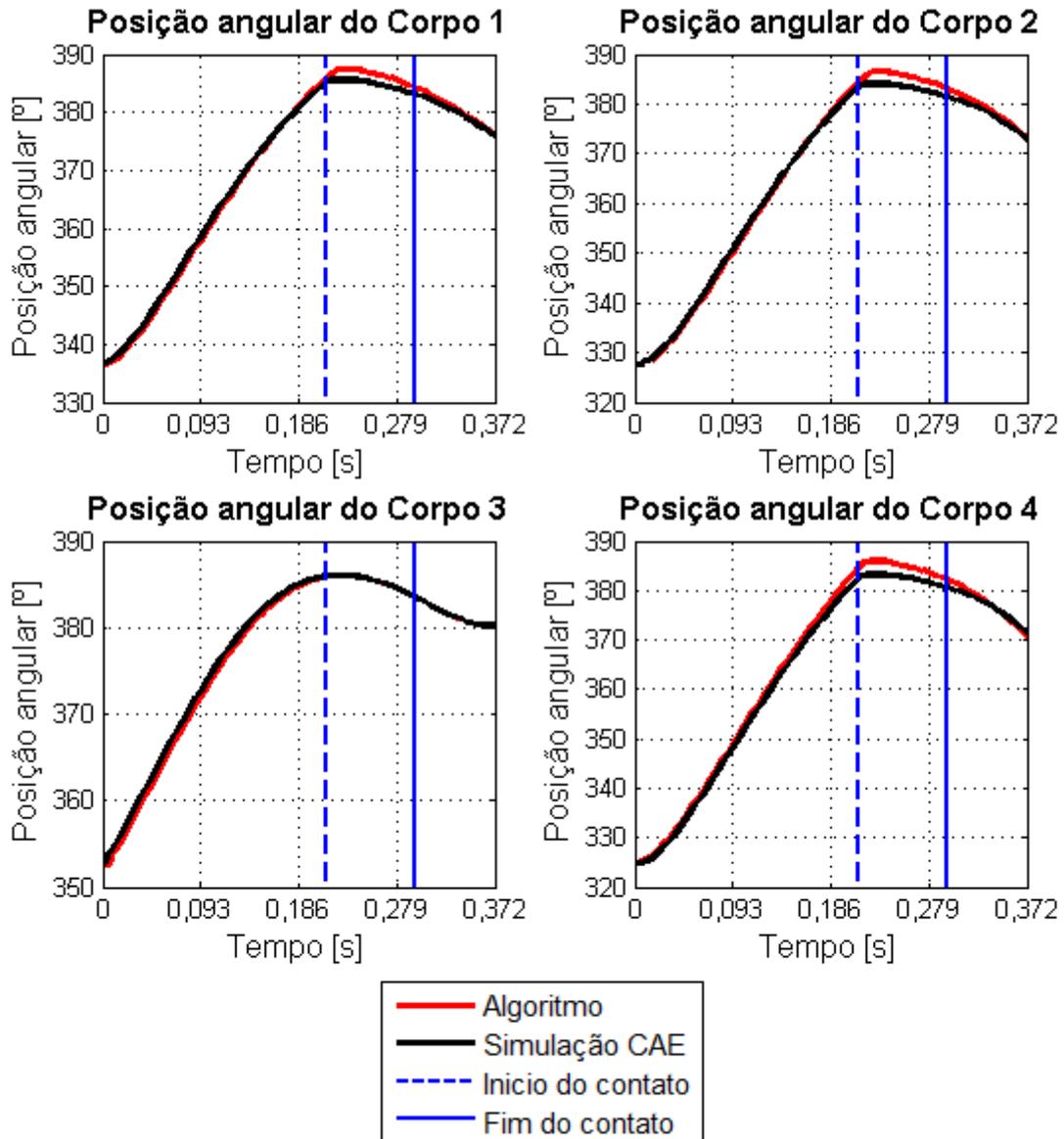


Figura 5.9 – Posições angulares obtidas pelo algoritmo e pela simulação em CAE

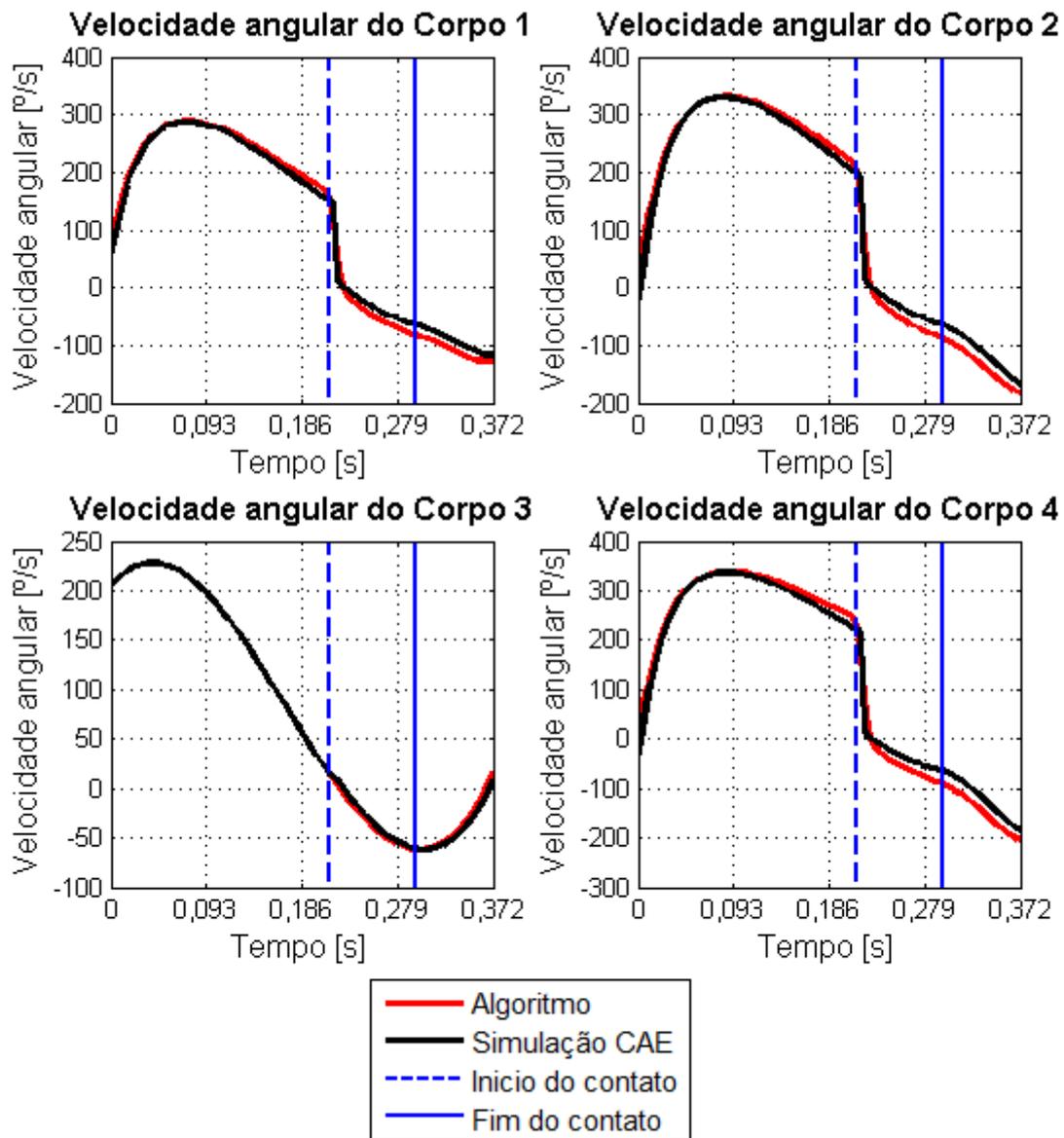


Figura 5.10 – Velocidades angulares obtidas pelo algoritmo e pela simulação em CAE

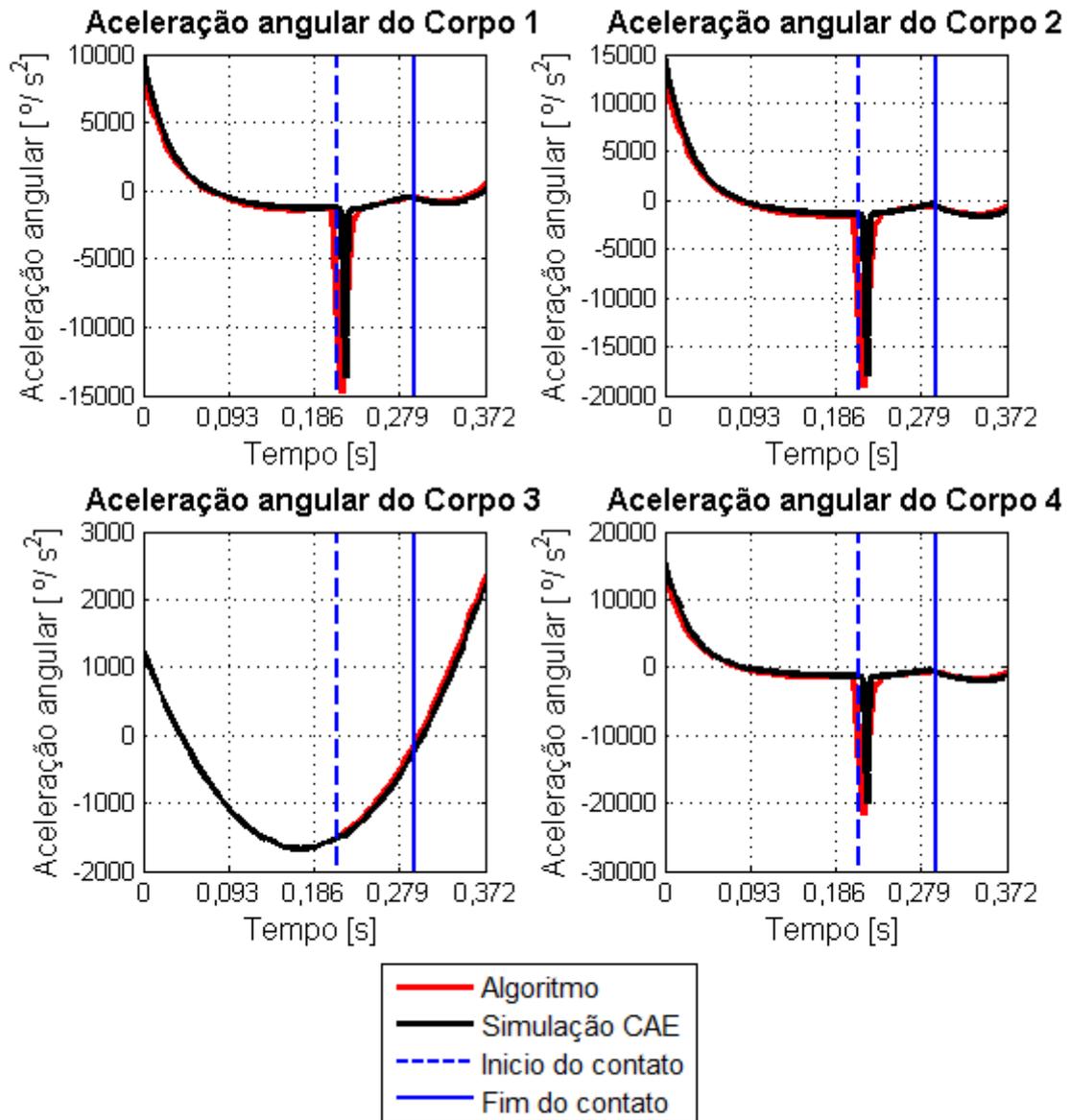


Figura 5.11 – Acelerações angulares obtidas pelo algoritmo e pela simulação em CAE

Tanto o comportamento das posições, quanto o das velocidades e acelerações foram muito próximas para as duas simulações, até o momento do contato. Após esse instante houve, evidentemente, maior diferença. Isso é esperado, pois as acelerações dos corpos são dependentes das forças externas, como a força de contato. A Figura 5.12 compara as forças de contato entre as simulações.

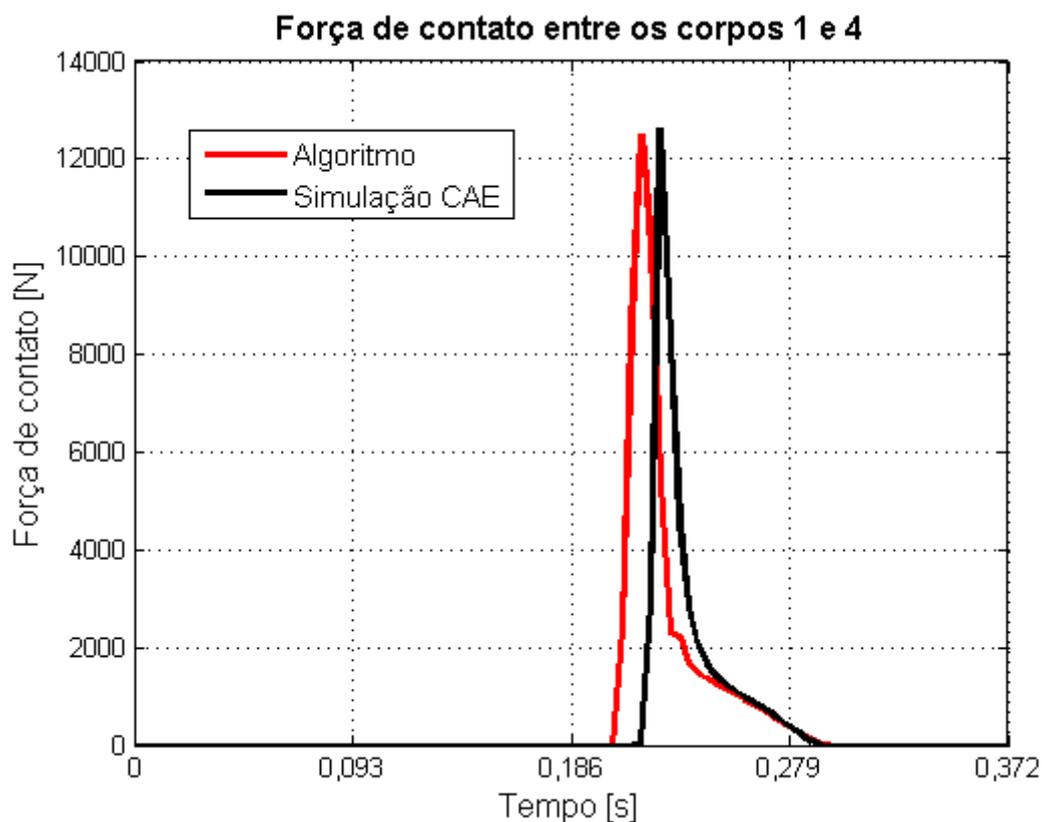


Figura 5.12 – Força de contato entre os corpos 1 e 4

Na Figura 5.12, fica evidente a diferença entre os momentos de início de contato. Ambas atingiram praticamente o mesmo valor de pico, sendo de $1,2497 \times 10^4 N$ para o algoritmo e $1,2610 \times 10^4 N$ para o CAE, mas para este a duração foi menor, já que o contato cessa praticamente no mesmo instante que o algoritmo.

Além da força de contato, as forças de reação também são extremamente importantes para o dimensionamento das partes do mecanismo. A Figura 5.13 ilustra as reações nos pontos **A**, **B** e **C** e os pontos **D** e **O** se encontram na Figura 5.14.

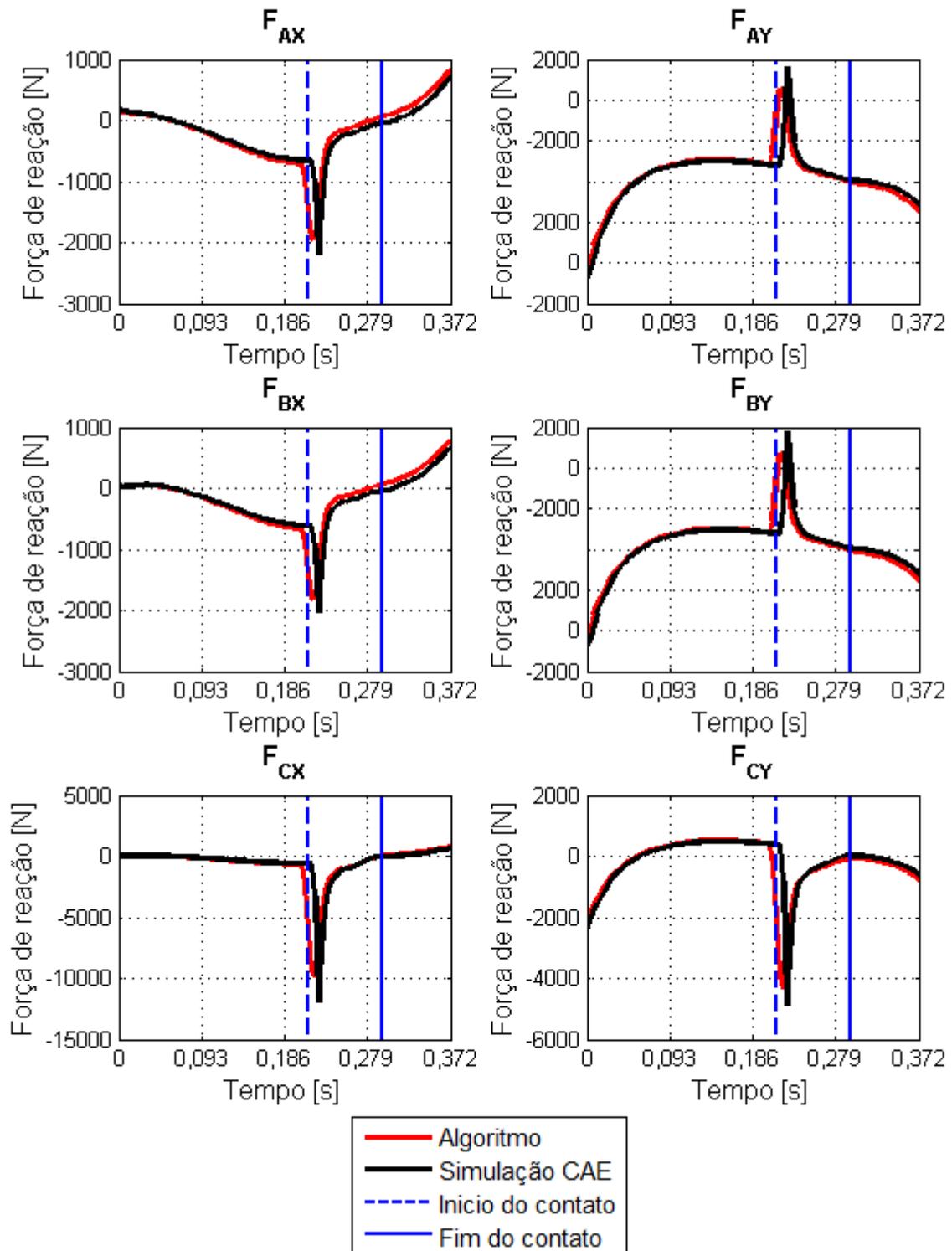


Figura 5.13 – Forças de reação obtidas para os pontos A, B e C

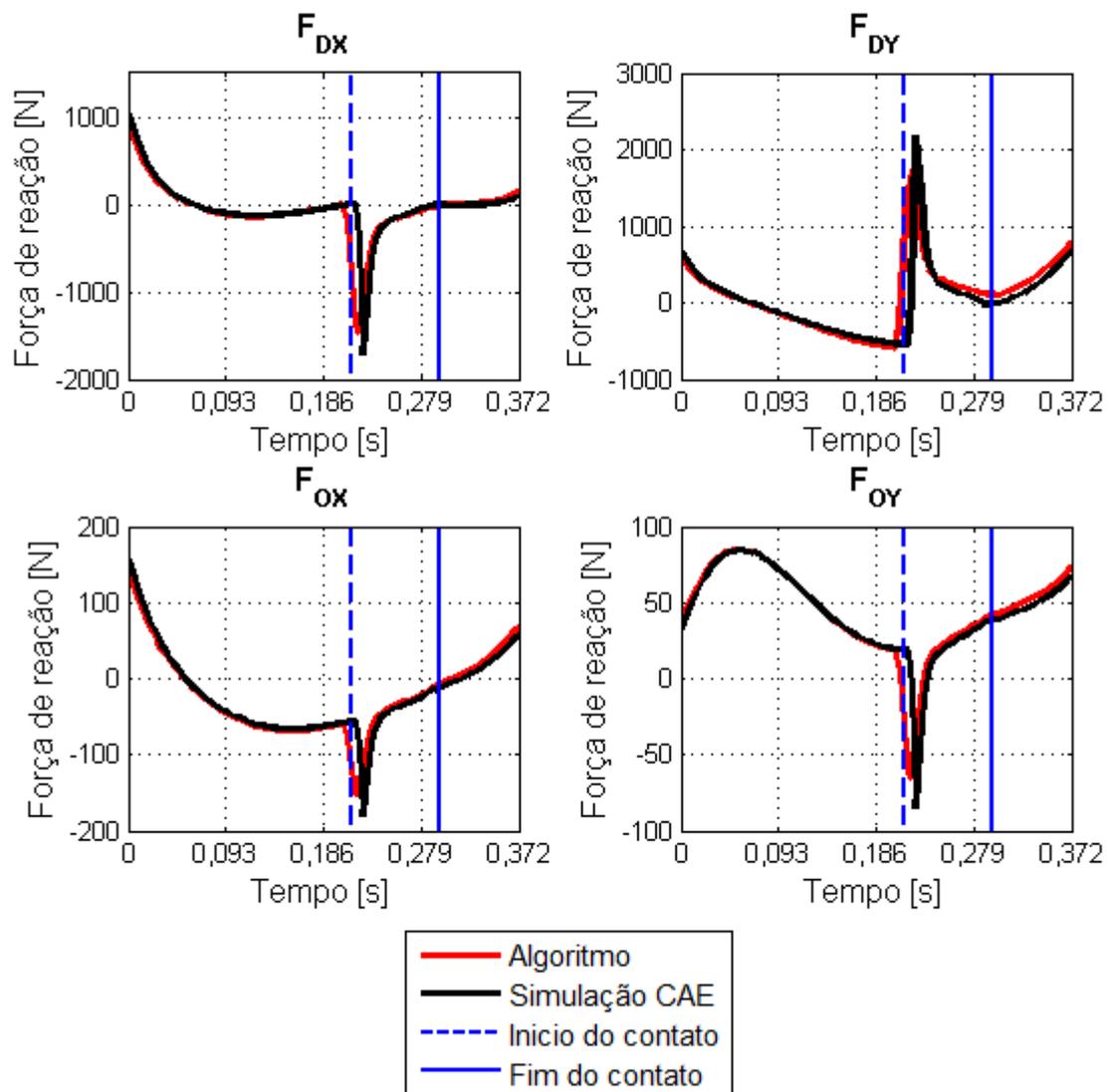


Figura 5.14 – Forças de reação obtidas para os pontos **D** e **O**

A Tabela 5.5 lista as diferenças entre posições, velocidades e acelerações para os quatro corpos.

Tabela 5.5 – Diferenças entre o Algoritmo e a Simulação em CAE - Posição, Velocidade e Aceleração

Corpo	Diferença	Posição [°]	Velocidade [°/s]	Aceleração [°/s²]
1	Min	0,0090	0,0572	44,6528
	Max	1,2599	84,2349	13555,5238
	Med	0,5232	12,7310	826,3714
2	Min	0,0154	0,2512	98,1482
	Max	1,7155	111,8836	17735,5057
	Med	0,5659	17,2546	1112,7911
3	Min	0,0001	0,0000	0,0000
	Max	0,9118	9,1370	158,7261
	Med	0,3600	1,6274	40,9176
4	Min	0,0383	0,4134	101,5413
	Max	2,4656	125,3776	20299,5158
	Med	1,0631	19,4013	1244,0379

As diferenças mínimas foram muito pequenas para todas as variáveis dinâmicas, principalmente levando em conta a magnitude de tais valores. Como exemplo, o corpo 4 é o que possui as maiores diferenças máximas de acelerações ($20299,5158 \text{ } ^\circ/\text{s}^2$). Inícios distintos de tempos de contato entre as simulações influenciam diretamente os valores das diferenças máximas, pois como para o algoritmo as forças de contato foram adiantadas, suas acelerações foram inicialmente maiores para o mesmo instante de tempo. Contudo, a prolongada ação de contato do algoritmo sugere uma desaceleração menos brusca entre os corpos, com uma menor taxa de variação em um maior tempo, mas este fato também contribuiu para uma maior transferência de energia total. Aumentando o tempo de ação de altas acelerações, os corpos tomaram mais velocidade ao final do contato e por fim as posições angulares do algoritmo alcançaram as do CAE ao final do tempo de simulação. Em outras palavras, o maior tempo de contato das forças do algoritmo indicam um impacto mais elástico, onde há

maior armazenamento de energia. Integrando as forças de contato no tempo, encontrou-se valores de trabalho de 222,58 J para o algoritmo e 171,96 J para o CAE, ou seja, o algoritmo gerou 29,44 % a mais de trabalho que o programa comercial.

Da mesma forma que as variáveis cinemáticas, a Tabela 5.6 lista as diferenças entre as forças de reação.

Tabela 5.6 – Diferenças entre o Algoritmo e a Simulação em CAE - Forças

Forças	Min	Max	Med
F_{AX} [N]	5,6142	1297,5495	112,7109
F_{AY} [N]	5,6142	1297,5495	112,7109
F_{BX} [N]	0,1992	1200,8757	105,3713
F_{BY} [N]	0,1992	1200,8757	105,3713
F_{CX} [N]	0,0334	8.747,41	399,1598
F_{CY} [N]	0,0334	8.747,41	399,1598
F_{DX} [N]	0,048	1.361,7396	67,3071
F_{DY} [N]	0,048	1.361,7396	67,3071
F_{OX} [N]	1,1019	96,5455	8,0627
F_{OY} [N]	1,1019	96,5455	8,0627
Contato [N]	0,0000	1249,6049	519,919

Assim como na tabela anterior, as diferenças mínimas foram muito pequenas, com 4,98 % sobre a média de F_{AX} , por exemplo. Já os valores máximos também foram influenciados pelo tempo de início de contato. Como o impacto da simulação do CAE teve comportamento mais inelástico, suas forças de reação tiveram picos maiores que o algoritmo no momento de penetração máxima, como por exemplo para F_{DY} , os valores de 1738 N para o algoritmo e 2172 N para o software. Depois desse instante, os valores das diferenças diminuíram, devido a acelerações de magnitudes inferiores, com média de 114,56 N após os 0,32 s para a mesma componente.

Por último, a título de curiosidade, os valores de deslocamento angular do corpo 1 da prótese foram comparados com o deslocamento angular de uma perna real, cujas grandezas foram retiradas do mesmo banco de dados público, de onde a posição angular da coxa foi

obtida (vide Seção 4.7). Os dois deslocamentos estão ilustrados na Figura 5.15

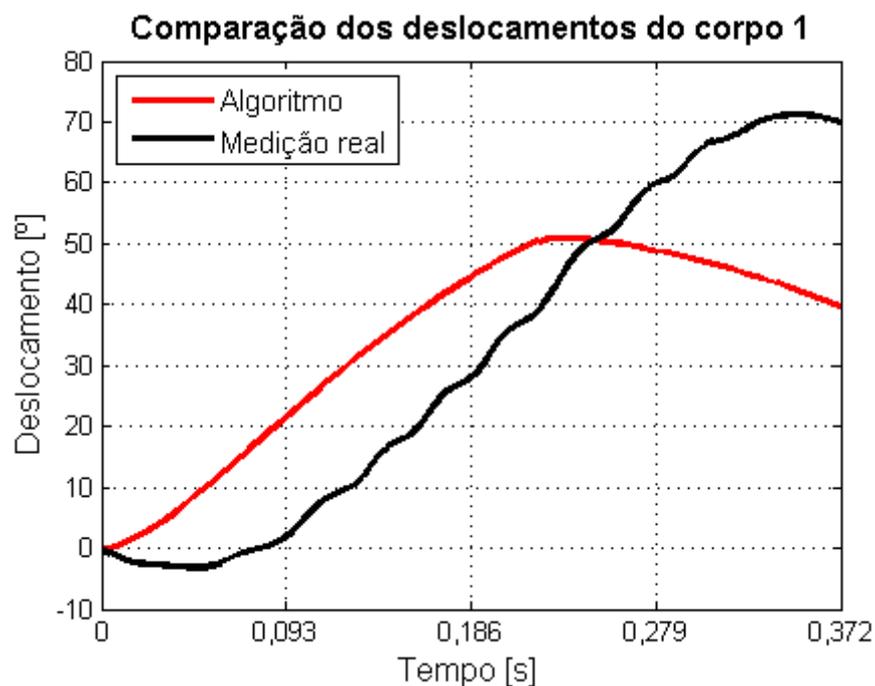


Figura 5.15 – Diferença entre o deslocamento angular da perna calculado pelo mecanismo e pela medição real

Utilizou-se o deslocamento em detrimento da posição angular, pois o ângulo inicial da perna protética difere da real. Usualmente o joelho protético, quando inicia a Fase de Apoio, flexiona até 15° , a fim de absorver o impacto da transferência de peso. Foi assumido para o algoritmo esse valor inicial para o corpo 1, já que o primeiro instante da simulação a perna está iniciando a Fase de Balanço. Já a perna real, não mantém essa angulação a todo o momento, variando-a para manter a trajetória do centro de rotação do joelho o mais plana possível, como já foi comentado. Uma semelhança entre as duas curvas aproximaria o movimento da perna protética, de uma real, o que traria mais naturalidade ao movimento, podendo inclusive ser um parâmetro de otimização. O atual movimento mostra, evidentemente, um comportamento significativamente diferente do real.

6. CONCLUSÕES

No presente trabalho foram analisadas as principais geometrias utilizadas em próteses de joelho comercializadas atualmente. Para simular o movimento da Fase de Balanço durante uma passada, foi proposto um sistema com quatro corpos rígidos que englobam a coxa do usuário de prótese, a perna e pé-protético, além dos componentes do próprio joelho em projeto. Baseado em uma patente de melhoria de um projeto ainda existente no mercado, foi escolhido para fins de teste, um joelho do tipo mecanismo de “quatro-barras”, que incorporado aos quatro corpos propostos no modelo, totalizou em 12 graus de liberdade para representação em um sistema cartesiano. Pela característica de um *sistema dinamicamente determinado*, foi empregada uma metodologia de formulação numérica de *sistemas multi-corpos*. Tal formulação, acrescida de um método para detecção de colisão e um modelo para representação de força de contato entre corpos "rígidos"localmente deformáveis, foi empregada no mecanismo eleito para testes.

Os valores de posição, velocidade e aceleração angulares de cada um dos corpos foram, então, comparados com os encontrados utilizando dois programas comerciais de CAE. Em uma primeira simulação utilizou-se os parâmetros de contatos sugeridos pela biblioteca de um dos programas, o que resultou em uma extensão da perna considerada excessiva, com 0,57 mm de aço sendo penetrado entre as partes em contato. Em decorrência deste fato, as diferenças de resultados entre as simulações foram grandes (7,39° para posições na ordem de três casas decimais). Essas diferenças foram mais acentuadas durante o evento de contato. Como um dos pacotes computacionais não modelava com detalhes o fenômeno de impacto, ele foi descartado de uma segunda simulação. Nesta simulação, os parâmetros de contato foram ajustados para um resultado mais próximo do real entre o impacto das partes.

O comportamento do algoritmo nesta simulação foi muito mais próximo do programa comercial, havendo uma pequena diferença, justificada pelo momento diferenciado de detecção de colisão entre dois corpos. Excluindo o corpo 3, por ter deslocamento prescrito, a diferença mínima de posição foi de 0,009°, que também teve a menor diferença de velocidade (0,0572°/s) e aceleração (44,6528°/s²). Já a maior das mínimas pertence ao corpo 4, com valores de 0,0383° para posição, 0,4134°/s para velocidade e 101,5413°/s² para a aceleração, mas apesar disso, seu o valor médio das diferenças para esse corpo ficou cem vezes menor

do que a grandeza obtida nas variáveis cinéticas. Além disso, apesar dos valores máximos das forças de contato nos dois ambientes serem próximos, o algoritmo resultou em uma força com maior elasticidade que a simulação em CAE, devido ao tempo de duração dessas forças (0,084 s para algoritmo e 0,072 s para o software). Uma das possíveis causas dessa diferença em comportamento pode advir da diferente abordagem no equacionamento para a força de contato, além de variação de um dos parâmetros da componente de amortecimento. Assim, o algoritmo proposto teve resultados para as variáveis cinéticas com comportamento muito semelhante ao do software, tanto qualitativamente quanto quantitativamente. Além disso sua formulação permite a empregabilidade em sistemas com diferentes geometrias, mas se restringe a superfícies de contato convexas e a atual modelagem da força não leva em conta forças de atrito.

Quantitativamente, o movimento de suas partes foi muito próximo do esperado, contudo, após o evento de contato, seu resultado é muito dependente das variáveis dos materiais em impacto. Desse modo, sugere-se para trabalhos futuros, a realização de um ensaio mecânico com um protótipo de mesmas características do sistema, a fim de calibrar as variáveis do fenômeno de contato, imprescindíveis para uma completa validação do método. Além disso, se sugere a adição de um grau de liberdade, para verificar a influência da geometria do mecanismo no movimento vertical do centro de gravidade do corpo humano, durante a Fase de Apoio da marcha. Para que isso seja viável, deve ser considerado, além das forças de contato, forças de atrito sobre a sola do pé-protético, geradas com a sua interação com o solo. Ademais, é necessária a criação de um método para garantir mudanças no vetor de restrições, sem que haja a separação do programa em dois equacionamentos distintos, e ainda mantendo sua formulação simbólica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alves. **Joelho Otto Bock 3R106 Preço.** Website. http://www.ortopediaecirurgicaalves.com.br/produto.php?cod_produto=3027044, 27/01/2015.

Amadio, A.; Costa, P. L. d.; Sacco, I. C.; Serrão, J. Introdução à análise do movimento humano - Descrição e aplicação dos métodos biomecânicos de medição, **Brazilian Journal of Physical Therapy**, vol. 03, p. 41-54, 1999.

Amato, J. A. **On Foot: A History of Walking.** NYU Press, 2004.

Anderson, K. M. Knee Disarticulation and Above-Knee Amputation, **Operative Techniques in General Surgery**, vol. 7(2), 2005.

Atkinson, K. E. **An introduction to numerical analysis.** Wiley, 1978.

Baumgartner, R. F. Knee disarticulation versus above-knee amputation, **Prosthetics and Orthotics International**, vol. 3(1), 1979.

Bock, O. Website. http://www.ottobock.com/cps/rde/xbcr/ob_us_en/3R46_IFU.pdf, 06/01/2015.

Bowker, J. H.; Surgeons, A. A. o. O. **Atlas of limb prosthetics: surgical, prosthetic, and rehabilitation principles.** Mosby Year Book, 1992.

Chitragari, G.; Mahler, D. B. Prosthetic options available for the diabetic lower limb amputee, **Clinics in podiatric medicine and surgery**, vol. 31(1), 2014.

Dassault, S. **Função contato.** Website. http://help.solidworks.com/2012/English/SolidWorks/motionstudies/HIDD_DVE_SIM_3DCONTACT.htm, 02/01/2015a.

Dassault, S. **Função STEP.** Website. http://help.solidworks.com/2013/English/SolidWorks/motionstudies/r_func_step.htm, 02/01/2015b.

DATASUS. **07.01.02.036-9 - PRÓTESE ENDOESQUELÉTICA TRANSFERENCIAL EM ALUMÍNIO OU AÇO.** Website. <http://sigtap.datasus.gov.br/tabela-unificada/app/sec/procedimento/exibir/0701020369/01/2015,27/01/2015>.

Datta, D. Rehabilitation of Amputees: Clinical Management in the Brave New World, vol. 8(3), 1998.

Dopico, D.; Luaces, A.; Gonzalez, M.; Cuadrado, J. Dealing with multiple contacts in a human-in-the-loop application, **Multibody System Dynamics**, vol. 25(2), p. 167–183, 2010.

Dubowsky, S.; Deck, J.; Costello, H. The dynamic modeling of flexible spatial machine systems with clearance connections, **Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design**, vol. 109, p. 87–94, 1987.

Fishwick, P. A. **Handbook of Dynamic System Modeling.** CRC Press, 2007.

Fliegel, O.; Feuer, S. G. Historical development of lower-extremity prostheses, vol. 47(5), p. 275–285, 1966.

Flores, P. A parametric study on the dynamic response of planar multibody systems with multiple clearance joints, **Nonlinear Dynamics**, vol. 61, p. 633–653, 2010.

Flores, P.; Ambrósio, J.; Claro, J. Dynamic analysis for planar multibody mechanical systems with lubricated joints, **Multibody System Dynamics**, vol. 12, p. 47–74, 2004.

Flores, P.; Machado, M.; Silva, M.; Martins, J. On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics, **Multibody System Dynamics**, vol. 25, p. 357–375, 2011.

Goldsmith, W. **Impact—The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids.** Edward Arnold Ltd., London, England, 1960.

Gonthier, Y.; McPhee, J.; Lange, C.; Piedboeuf, J. A regularized contact model with asymmetric damping and dwell-time dependent friction, **Multibody System Dynamics**, vol. 11, p. 209–233, 2004.

- Gordon, R. **Literary Companion to Medicine**. St. Martin's Press, 2002.
- Harrison, H.; Nettleton, T. **Advanced Engineering Dynamics**. Butterworth-Heinemann, 1997.
- Herbert, R.; McWhannell, D. Shape and frequency composition of pulses from an impact pair, **Journal of Engineering for Industry**, vol. 99, p. 513–518, 1977.
- Hunt, K.; Crossley, F. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact, **Journal of Applied Mechanics**, vol. 7, p. 440–445, 1975.
- Hunter, G. A. Selection of level for lower limb amputation, **Current Orthopaedics**, vol. 10(4), 1996.
- Huston, R. **Principles of Biomechanics**. CRC Press, Boca Raton, 1 edition edition, 2008.
- Ignacio Gonzalez-Perez, J. L. I. Implementation of Hertz theory and validation of a finite element model for stress analysis of gear drives with localized bearing contact, **Mechanism and Machine Theory**, vol. 46(6), 2011.
- Inman, V. T. V. T.; Ralston, H. J. H. J.; Todd, F.; Lieberman, J. C. **Human walking / Verne T. Inman, Henry J. Ralston, Frank Todd ; edited and with a preface by Jean C. Lieberman**. Williams & Wilkins, Baltimore, 1981.
- Josephs, H.; Huston, R. **Dynamics of Mechanical Systems**. CRC Press, Boca Raton, 1 edition edition, 2002.
- Karlsson, S. G.; Hannesson, S.; Olafsson, S. **Prosthetic Knee**. U.S. Classification 623/43; International Classification A61F2/64; Cooperative Classification A61F2/644, A61F2002/5079, A61F2002/5018, A61F2/80, A61F2002/5009, A61F2002/5006, A61F2002/6818, A61F2002/503, A61F2/68, A61F2002/6809, A61F2/60, A61F2002/6854, A61F2002/6678, 2013.
- Kelly, B. M.; Spires, M. C.; Restrepo, J. A. Orthotic and Prosthetic Prescriptions for Today and Tomorrow, **Physical Medicine and Rehabilitation Clinics**, vol. 18(4), 2007.
- Kistenberg, R. S. Prosthetic Choices for People with Leg and Arm Amputations, **Physical Medicine and Rehabilitation Clinics**, vol. 25(1), 2014.

Kramer, S.; Srinivasan, S.; Swanson, V. **Knee joint mechanism for knee disarticulation prosthesis**. U.S. Classification 623/39, 623/44; International Classification A61F2/64, A61F2/76, A61F2/74, A61F2/80, A61F2/50, A61F2/00; Cooperative Classification A61F2002/30507, A61F2/76, A61F2002/5016, A61F2/644, A61F2220/0025, A61F2002/745, A61F2/80; European Classification A61F2/76, A61F2/64P2, 1998.

Lankarani, H.; Nikravesh, P. A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems, **Journal of Mechanical Design**, vol. 112, p. 369–376, 1990.

Lee, T.; Wang, A. On the dynamics of intermittent-motion mechanisms, Part 1: dynamic model and response, **Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design**, vol. 105, p. 534–540, 1983.

Machado, M.; Flores, P.; Claro, J.; Ambrósio, J.; Silva, M.; Completo, A.; Lankarani, H. Development of a planar multibody model of the human knee joint, **Nonlinear Dynamics**, vol. 60(3), p. 459–478, 2010.

Machado, M.; Moreira, P.; Flores, P.; Lankarani, H. L. Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory, **Mechanism and Machine Theory**, vol. 53, p. 99–121, 2012.

Marshall, C.; Stansby, G. Amputation and rehabilitation, **Surgery - Oxford International Edition**, vol. 28(6), 2010.

MathWorks. Website. <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/polyfit.html>, 17/01/2015a.

MathWorks. Website. http://www.mathworks.com/help/matlab/data_analysis/programmatic-fitting.html, 17/01/2015b.

Meirovitch, L. **Methods of Analytical Dynamics**. Courier Corporation, 2010.

Michael, J. W. Modern prosthetic knee mechanisms, **Clinical Orthopaedics and Related Research**, (361), 1999.

Moore, K. L.; Agur, A. M. R.; Dalley, A. F. **Clinically Oriented Anatomy**. LWW, Philadelphia, 7th edition edition, 2013.

Norton, R. **Kinematics & Dynamics Of Machinery**. McGraw-Hill Companies, 1961.

Omarsson, B.; Karlsson, S.; Olafsson, S.; Olafsson, G.; Landry, D. **Prosthetic knee**. International Classification A61F2/64; Cooperative Classification A61F2002/5033, A61F2002/5016, A61F2002/5087, A61F2002/6818, A61F2002/5003, A61F2/644, A61F2002/5073, A61F2002/6854, 2012a.

Omarsson, B.; Karlsson, S. G.; Olafsson, S.; Olafsson, G.; Landry, D. **Prosthetic knee**, 2012b.

Perry, J. **Análise de Marcha - Marcha Normal**. Editora Manole, 2004.

Pham, H.-T.; Wang, D.-A. A constant-force bistable mechanism for force regulation and overload protection, **Mechanism and Machine Theory**, vol. 46(7), 2011.

Rose, J.; Gamble, J. G. **Marcha Humana**. Premier, segunda edition, 1998.

Seymour, R. **Prosthetics and Orthotics: Lower Limb and Spinal**. Lippincott Williams Wilkins, 1 edition edition, 2001.

Shabana, A. A. **Computational Dynamics, 3rd Edition**. Wiley, Chichester, West Sussex ; Hoboken, 3 edition edition, 2010.

Shabana, A. A. **Dynamics of Multibody Systems**. Cambridge University Press, 2013.

Shurr, D. G.; Michael, J. W.; Cook, T. M. **Prosthetics and Orthotics**. Prentice Hall, 2002.

Össur. Website. <http://www.ossur.com.br/lisalib/getfile.aspx?itemid=16332>, 27/01/2015.

Tang, P. C. Y.; Ravji, K.; Key, J. J.; Mahler, D. B.; Blume, P. A.; Sumpio, B. Let Them Walk! Current Prosthesis Options for Leg and Foot Amputees, **Journal of the American College of Surgeons**, vol. 206(3), 2008.

Turner, L. **Inverse of Vandermonde Matriz with Applications**. NASA - National Aeronautics and Space Administration. <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19660023042.pdf>, 1966.

Vaughan, C. L. **Dynamics of Human Gait**. Human Kinetics Pub, Champaign, Ill, 1992.

Williams, G. **Linear Algebra With Applications**. Jones & Bartlett Learning, Burlington, Mass., 8 edition edition, 2012.

Wilson, A. B. The modern history of amputation surgery and artificial limbs, **The Orthopedic Clinics of North America**, vol. 3(2), 1972.

Winter, D. A. **Biomechanics and Motor Control of Human Movement**. Wiley, Hoboken, N.J, 4 edition edition, 2009.

Zarrugh, M. Y.; Radcliffe, C. W. Simulation of swing phase dynamics in above-knee prostheses, **Journal of Biomechanics**, vol. 9(5), 1976.

Zhiying, Q.; Qishao, L. Analysis of impact process based on restitution coefficient, **Journal of Dynamics and Control**, vol. 4, p. 294–298, 2006.

APÊNDICE A

```
%
clear;
clc;
% Autor: André Markus
% Programa: Calcula as posições, velocidades e acelerações dos
elos de uma
% prótese, além das forças de reação. Leva em conta a presença
de
% mola/amortecedor e forças de contato entre as partes.

syms q1 q2 q3 q4 q5 q6 q7 q8 q9 q10 q11 q12 qp1 qp2 qp3 qp4 qp5
qp6 qp7 qp8 qp9 qp10 qp11 qp12 tempo y2 yponto1 yponto2 yponto
syms Fc1x Fc1y Mc1 Fc4x Fc4y Mc4 phi_i phi_j
syms FxD1 FyD1 FxC1 FyC1 FxD2 FyD2 FxA2 FyA2 FxA3 FyA3 FxB3
FyB3 FxO3 FyO3 FxB4 FyB4 FxC4 FyC4 theta_ponto3 theta_ponto4

%deslc_coxa=load('desc_and_coxa_bal_spline.txt'); %arquivo com
o vetor [tempo;deslocamento angular coxa] em [s e graus]
%deslc_coxa=deslc_coxa(1:end,2)*pi/180; %passa os valores de
deslocamento angular para radianos
tfinal=0.372; %tempo total de integração [s]
deltat=0.004; %incremento de tempo
g=9.806; %gravidade

%massas
m1=1.774; %[Kg]
m2=0.255;
m3=2.144;
m4=0.196;

J1=46702611.89*1e-9; %[Kg.m^2=Pa]
J2=210685.24*1e-9;
J3=61264444.47*1e-9;
J4=219559.67*1e-9;

%posições iniciais qsubs[Rx1 Ry1 theta1 ... ]
q1i=-156.118e-3; %[m]
q2i=-830.897e-3;
q3i=2*pi-23.455*pi/180;
q4i=-79.779e-3;
q5i=-549.955e-3;
q6i=2*pi-32.381*pi/180;
q7i=-36.798e-3;
```

```

q8i=-291.284e-3;
q9i=2*pi-7.3*pi/180;
q10i=-37.928e-3;
q11i=-559.137e-3;
q12i=2*pi-35.238*pi/180;
qsubs=[q1i;q2i;q3i;q4i;q5i;q6i;q7i;q8i;q9i;q10i;q11i;q12i];
q=[q1;q2;q3;q4;q5;q6;q7;q8;q9;q10;q11;q12];
[m,n]=size(q);
qp=[qp1;qp2;qp3;qp4;qp5;qp6;qp7;qp8;qp9;qp10;qp11;qp12];
qpsubs=[0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];

%dados para a rotina de contato
si=3.225e-3; %eq. de supericie de contato do corpo i em relação
a uma coordenada local
yj=-41.905e-3; %ponto que a reta da superfície do corpo j corta
o eixo y do CGj.
mj=3.9743; %inclinação da reta de superfície do corpo j.
sj=yj/(sin(phi_j)+mj*cos(phi_j)); %equação da reta em coord.
polar para superfície de contato do corpo j
rli=[-6.631e-3;252.058e-3];%distância do CG do corpo i até
coord local polar para o contato
rlj=[19.118e-3;-49.733e-3];%distância do CG do corpo j até
coord local polar para o contato
CA=0; %contato anterior para subrotina de contato
Kcont=1e9; %rigides de contato
Cr=0.16; %Coeficiente de restituição contato
ncont=1.5;%Coeficiente exponencial que define o formato de
distribuição das forças de contato
delta_p_inicial=0; %velocidade inicial de penetração. Usada na
subrotina de contato e depois substituida

%posições das coordenadas locais de cada barra
%elo 1
u1D=[-54.685;243.71]*1e-3; %[m]
u1C=[8.815;243.759]*1e-3;
u1F=[-7.035;-225.831]*1e-3;
u1G=[132.937;-223.009]*1e-3;
%elo 2
u2A=[-20.538;43.792]*1e-3;
u2E=[12.205;1.99]*1e-3;
u2D=[-5.854;-45.818]*1e-3;
%elo 3
u3O=[-0.521;293.599]*1e-3;

```

```

u3A=[-9.804;-213.667]*1e-3;
u3B=[13.217;-224.401]*1e-3;
%elo 4
u4B=[-36.809;27.369]*1e-3;
u4C=[19.118;-49.733]*1e-3;

R1=[q1;q2];
R2=[q4;q5];
R3=[q7;q8];
R4=[q10;q11];

%matriz de massa e momento de inercia
M=zeros(12,12);
M(1,1)=m1;
M(2,2)=m1;
M(3,3)=J1;
M(4,4)=m2;
M(5,5)=m2;
M(6,6)=J2;
M(7,7)=m3;
M(8,8)=m3;
M(9,9)=J3;
M(10,10)=m4;
M(11,11)=m4;
M(12,12)=J4;

%%%%%%%%%%

% cálculo da força realizada pela mola/amortecedor. Seguindo
equações do
% capítulo 5 do livro do Shabana. Corpoi=2 corpoj=1
upi=[-7.075;133.739]*1e-3; % coord local do amortecedor em
relação ao corpo i [m]
upj=u2E; % coord local do amortecedor em relação ao corpo j
rpij=[R1+A_sym(q3)*upi-R2-A_sym(q6)*upj]; %vetor de comprimento
do amortecedor;
Lij=sqrt((rpij(1,1))^2+(rpij(2,1))^2); %comprimento do
amortecedor (escalar);
Iij=rpij/Lij; % vetor unitário na direção do comprimento do
amortecedor
qij=[q1;q2;q3;q4;q5;q6]; % vetor posição dos links aos quais o
amortecedor se conecta

```

```

qijp=[qp1;qp2;qp3;qp4;qp5;qp6]; % vetor velocidade dos links
aos quais o amortecedor se conecta
Lijponto=Iij.*jacobian(rpij,qij)*qijp; % derivada temporal do
comprimento do amortecedor

%força sobre o amortecedor
K=250*1000; % Rigidez da mola [N/m]
Camo=50*1000; % Coef. de amortecimento [N.s/m]
lo=159.70e-3; %comprimento inicial do amortecedor [m]
fs=K*(Lij-lo)+Camo*Lijponto; %força sobre o amortecedor
%forças generalizadas do amortecedor sobre as barras
%barra inicial
I=[1 0;0 1];
Qi=simplify(-fs*[I;(upi).]*(diff(A_sym(q3),q3)).']*Iij);
%Atenção: mudar esses valores quando mudar os pontos de conexão
Qj=simplify(fs*[I;(upj).]*(diff(A_sym(q6),q6)).']*Iij);
%Atenção: mudar esses valores quando mudar os pontos de conexão
%Forças externas
Qe=[Qi(1,1)+Fc1x;-m1*g+Qi(2,1)+Fc1y;Qi(3,1)+Mc1;Qj(1,1);-
m2*g+Qj(2,1);Qj(3,1);0;-m3*g;0;0+Fc4x;-m4*g+Fc4y;0+Mc4];
%Atenção: mudar os carregamentos após trocar o amortecedor de
lugar.

%Matriz das restrições
%Atenção. Mudar as restrições de acordo com a geometria
pretendida.
C=[
    R1+A_sym(q3)*u1D-(R2+A_sym(q6)*u2D);...
    R2+A_sym(q6)*u2A-(R3+A_sym(q9)*u3A);...
    R3+A_sym(q9)*u3O;...
    R3+A_sym(q9)*u3B-(R4+A_sym(q12)*u4B);...
    R4+A_sym(q12)*u4C-(R1+A_sym(q3)*u1C);
    q9-(144.6166*tempo^4-
98.5942*tempo^3+10.5845*tempo^2+3.5631*tempo-0.0034+q9i)];

Cq=jacobian(C,q);
%matriz para cálculo posterior. Uma linha por variável
independente e o
%valor =1 na coordenada independente daquela linha. Nesse caso
thetal,
%theta 2, theta3 e theta4 são as coordenadas independentes.
Id=sym(zeros(1,12));
Id(1,12)=1;

```

```

%Id(1,9)=1;

ozerol=sym(zeros(1,1)); % atenção: tem que mudar esse termo
quando mudar as coordenadas independentes.
deltaq=[Cq;Id]\[-C;ozerol];
Ct=jacobian(C,tempo);
qponto=( [Cq;Id] ) \ ( [-Ct;qp12] );
Qd=-jacobian(Cq*qp,q)*qp-2*diff(Cq,tempo)*qp-
diff(diff(C,tempo),tempo);

%vetores para gráficos

cont=1; %contador de passos
qttotal=zeros(m,tfinal/deltat);
qpttotal=zeros(m,tfinal/deltat);
qppttotal=zeros(m,tfinal/deltat);
Mttotal=zeros(m/2,tfinal/deltat);
Ftotal=zeros(10,tfinal/deltat);
Fcontato=zeros(3,tfinal/deltat);

vetor_tempo=zeros(tfinal/deltat,1);
phi_ij=[0;0];
Fc1=[0;0];
Fc4=[0;0];
Mc1subs=0;
Mc4subs=0;
for t=0:deltat:tfinal
    t
    qttotal(:,cont)=qsubs(:,1);

        vetor_tempo(cont,1)=t;

        % [PASSO 3] DO ALGORITMO DINÂMICO
        % método Newton-Rhapson para minimizar o vetor delta q
que define as
        % coordenadas dependentes, baseado na coordenada
independente fornecida
        for inter=1:30

f=subs_val(deltaq,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,phi_ij
);

```

```

        if norm(f)<0.001 %tolerancia de 0.005
            break;
        else
            qsubs=qsubs+f;
        end

    end

    % [PASSO 4] CÁLCULO DO VETOR DE VELOCIDADES

    qpsubs=subs_val(qponto,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,p
    hi_ij);
    qptotal(:,cont)=qpsubs;

    %[PASSO 5] - Cálculo das acelerações de multiplicadores
    e Lagrange

    %substintuindo variáveis na aceleração e
    multiplicadores de
    %Lagrange
    %Substituo as duas partes do cálculo da aceleração
    qpplam=[M
    %Cq.';Cq sym(zeros(4,4))]\([Qe;Qd]) com valores
    numéricos, para que
    %a solução do sistema Ax=B seja rápida.

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %Força de contato
    %O contato ocorre entre os corpos i e j em um ponto
    chamado de C. C1 é o
    %ponto de contato no corpo 1 e C4 no ponto 4.

    [Fc1,Mc1subs,Fc4,Mc4subs,CA,delta_p_inicial,phi_ij]=F_contato([
    1;4],...

    Kcont,Cr,CA,ncont,qsubs,qpsubs,delta_p_inicial,t,q,qp,rli,rlj,s
    i,sj,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,[0.043;2.356]);

    Fcontato(1,cont)=Fc1(1,1);

```

```

Fcontato(2,cont)=Fc1(2,1);
Fcontato(3,cont)=norm(Fc1);

%%%%%%%%%%

qpplambda=F_qpplambda(M,Cq,Qe,Qd,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Mc1subs,Fc4
,Mc4subs,phi_ij);
lambda=qpplambda(m+1:end,1);

%Cálculo das forças de reação

syms FxA2 FyA2 FxB4 FyB4 FxC1 FyC1 FxD1 FyD1 FxO3 FyO3
clear
    %transformando as posições locais dos pontos em
posições globais
    %em relação ao CG de cada corpo:
    U1D=A_sym(qsubs(3,1))*u1D;
    U1C=A_sym(qsubs(3,1))*u1C;
    U2D=A_sym(qsubs(6,1))*u2D;
    U2A=A_sym(qsubs(6,1))*u2A;
    U3A=A_sym(qsubs(9,1))*u3A;
    U3B=A_sym(qsubs(9,1))*u3B;
    U3O=A_sym(qsubs(9,1))*u3O;
    U4C=A_sym(qsubs(12,1))*u4C;
    U4B=A_sym(qsubs(12,1))*u4B;

    Som_m1=cross([U1C;0],[-FxC1;-
FyC1;0])+cross([U1D;0],[FxD1;FyD1;0]);
    Som_m2=cross([U2D;0],[-FxD1;-
FyD1;0])+cross([U2A;0],[FxA2;FyA2;0]);
    Som_m3=cross([U3A;0],[-FxA2;-
FyA2;0])+cross([U3B;0],[FxB4;FyB4;0])+cross([U3O;0],[FxO3;FyO3;
0]);
    Som_m4=cross([U4C;0],[FxC1;FyC1;0])+cross([U4B;0],[-
FxB4;-FyB4;0]);

Qe_subs=subs_val(Qe,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,phi_
ij);

    %Sistema de equações obtidas pelo método do somatório
de forças:

```

```

[FxA2, FyA2, FxB4, FyB4, FxC1, FyC1, FxD1, FyD1, FxO3, FyO3]=solve(...
    FxD1-FxC1+Qe_subs(1,1)==m1*qpplambda(1,1), FyD1-
FyC1+Qe_subs(2,1)==m1*qpplambda(2,1), ...
    -FxD1+FxA2+Qe_subs(4,1)==m2*qpplambda(4,1), -
FyD1+FyA2+Qe_subs(5,1)==m2*qpplambda(5,1), ...
    Som_m2(3,1)+Qe_subs(6,1)==J2*qpplambda(6,1), ...
    FxC1-FxB4+Qe_subs(10,1)==m4*qpplambda(10,1), FyC1-
FyB4+Qe_subs(11,1)==m4*qpplambda(11,1), ...
    Som_m4(3,1)+Qe_subs(12,1)==J4*qpplambda(12,1), ...
    -FxA2+FxB4+FxO3+Qe_subs(7,1)==m3*qpplambda(7,1), -
FyA2+FyB4+FyO3+Qe_subs(8,1)==m3*qpplambda(8,1), ...
    FxA2, FyA2, FxB4, FyB4, FxC1, FyC1, FxD1, FyD1, FxO3, FyO3);

FA=double([FxA2;FyA2]);
FB=double([FxB4;FyB4]);
FC=double([FxC1;FyC1]);
FD=double([FxD1;FyD1]);
FO=double([FxO3;FyO3]);
Ftotal(:,cont)=[FA;FB;FC;FD;FO];

qpptotal(1:m,cont)=qpplambda(1:m,1);

    %[PASSO 6] - APLICAÇÃO DO MÉTODO RUNGE-KUTTA para obter
a velocidade e
    %posição da coordenada independente em um passo
posterior de tempo.

    %equação para ser resolvida no Runge-Kutta
    %y0=[posições independentes; velocidades
independentes]
    %
y0=[qsubs(9,1);qsubs(12,1);qpsubs(9,1);qpsubs(12,1)];
    y0=[qsubs(12,1);qpsubs(12,1)];

    %inserir na Rotina Runge-Kutta, entre [], o número
dos links com
    %as posições angulares independentes EM ORDEM
CRESCENTE.

[qsubs, qpsubs]=Runge_Kutta(M, Cq, Qe, Qd, qsubs, qpsubs, t, deltat, y0,
[4], Fc1, Mc1subs, Fc4, Mc4subs, phi_ij);

```

```

        cont=cont+1;
end

qtotal(3,:)=qtotal(3,)*180/pi;
qtotal(6,:)=qtotal(6,)*180/pi;
qtotal(9,:)=qtotal(9,)*180/pi;
qtotal(12,:)=qtotal(12,)*180/pi;

%Plotagem
figure(1) %theta1
plot(vetor_tempo(:,1),qtotal(3,:));
title('posição angular 1');
grid on;
figure(2)
plot(vetor_tempo(:,1),qtotal(6,:));
title('posição angular 2');
grid on;
figure(3)
plot(vetor_tempo(:,1),qtotal(9,:));
title('Posição angular 3');
grid on;
figure(4)
plot(vetor_tempo(:,1),qtotal(12,:));
title('Posição angular 4');
grid on;
figure(5)
plot(vetor_tempo(:,1),Fcontato(1,:), 'r',vetor_tempo(:,1),Fcontato(2,:), 'b',vetor_tempo(:,1),Fcontato(3,:), 'g');
title('Força contato');
grid on;
figure(6)
plot(vetor_tempo(:,1),qppttotal(9,:));
title('Aceleração corpo 3');
grid on;
figure(7)
plot(vetor_tempo(:,1),qppttotal(12,:));
title('Aceleração corpo 4');
grid on;

```

```

figure(8)
subplot(2,3,1),plot(vetor_tempo(:,1),Ftotal(1,:), 'b',vetor_temp
o(:,1),Ftotal(2,:), 'r');
title('Força de reação na Junta A');
subplot(2,3,2),plot(vetor_tempo(:,1),Ftotal(3,:), 'b',vetor_temp
o(:,1),Ftotal(4,:), 'r');
title('Força de reação na Junta B');
subplot(2,3,3),plot(vetor_tempo(:,1),Ftotal(5,:), 'b',vetor_temp
o(:,1),Ftotal(6,:), 'r');
title('Força de reação na Junta C');
subplot(2,3,4),plot(vetor_tempo(:,1),Ftotal(7,:), 'b',vetor_temp
o(:,1),Ftotal(8,:), 'r');
title('Força de reação na Junta D');
subplot(2,3,5),plot(vetor_tempo(:,1),Ftotal(9,:), 'b',vetor_temp
o(:,1),Ftotal(10,:), 'r');
title('Força de reação na Junta O');

%Saida de dados
%vetor Tempo
dlmwrite('tempo.txt',vetor_tempo,'newline','pc');
%vetor de Posições
dlmwrite('pos.txt',qttotal,'newline','pc');
%vetor de Velocidades
dlmwrite('vel.txt',qpttotal,'newline','pc');
%vetor de Acelerações
dlmwrite('acel.txt',qppttotal,'newline','pc');
%vetor de Forças de reação
dlmwrite('F_reacao.txt',Ftotal,'newline','pc');
%vetor de Forças de contato
dlmwrite('F_cont.txt',Fcontato,'newline','pc');

function [ A ] = A_sym( theta )
%Matriz de rotação para variáveis simbólicas. Todos os
argumentos são
%simbólicos.

A=[cos(theta) -sin(theta);sin(theta) cos(theta)];

end

function [ A ] = Atheta_sym( theta )
%Derivada parcial em função de theta da Matriz de rotação para
variáveis simbólicas. Todos os argumentos são

```

```

%simbólicos.

A=[-sin(theta) -cos(theta);cos(theta) -sin(theta)];

end

function [ Fci,Mci,Fcj,Mcj,CA,delta_p_inicial,phi_ij] =
F_contato(
corpos_ij,K,Cr,CA,n,qsubs,qpsubs,delta_p_inicial,t,q,qp,rli,rlj
,si,sj,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,phi_ij)
% Subrotina para o cálculo das forças de contato.
%Primeiro são calculados os vetores normais às superfícies de
contato e
%depois a força resultante, em função da posição e velocidade
de penetração
%dos corpos.
%Subrotina construída a partir das teorias de contato do artigo
"Compliant contact force models in multibody dynamics:
Evolution of the
%Hertz contact theory" por Margarida Machado et. al.. e
"Development of
%planar multibody model of the human knee joint" por Margarida
Machado
%et.al 2.

%variáveis:
%uci_i posição local de C1 em relação à O1
%ucj_j posição local de C4 em relação à O4
%K:Rigidez material
%Cr:coeficiente de restituição [entre 0 e 1 0-totalmente
inelástico.
%1-totalmente elástico]

syms q1 q2 q3 q4 q5 q6 q7 q8 q9 q10 q11 q12 qp1 qp2 qp3 qp4 qp5
qp6 qp7 qp8 qp9 qp10 qp11 qp12 tempo y2 yponto1 yponto2 yponto
syms Fc1x Fc1y Mc1 Fc4x Fc4y Mc4 phi_i phi_j
syms FxD1 FyD1 FxC1 FyC1 FxD2 FyD2 FxA2 FyA2 FxA3 FyA3 FxB3
FyB3 FxO3 FyO3 FxB4 FyB4 FxC4 FyC4 theta_ponto3 theta_ponto4

i=corpos_ij(1,1);
j=corpos_ij(2,1);
Ri=[q(i*3-2,1);q(i*3-1,1)];
Rj=[q(j*3-2,1);q(j*3-1,1)];

```

```

Ri_ponto=[qp(i*3-2,1);qp(i*3-1,1)];
Rj_ponto=[qp(j*3-2,1);qp(j*3-1,1)];
qi=q(3*i,1);
qj=q(3*j,1);
qpi=qp(3*i,1);
qpj=qp(3*j,1);

%posição local de contato
uci_i=[si*cos(phi_i); si*sin(phi_i)];
ucj_j=[sj*cos(phi_j); sj*sin(phi_j)];

%distância entre o possível ponto de contato C
rc_i=Ri+A_sym(qi)*(rli+uci_i);
rc_j=Rj+A_sym(qj)*(rlj+ucj_j);
d=rc_i-rc_j; %vetor distância de contato

%velocidades
rci_o_ponto=[Ri_ponto;0]+cross([0;0;qpi],[A_sym(qi)*(rli+uci_i)
;0]);
rci_o_ponto(3,:)=[]; %deleta a última linha
rcj_o_ponto=[Rj_ponto;0]+cross([0;0;qpj],[A_sym(qj)*(rlj+ucj_j)
;0]);
rcj_o_ponto(3,:)=[];

%vetores normais às superfícies:
%calculados pela equação 16 e 17 do artigo de Margarida Machado
2009

ni_i=[diff(uci_i(2,1),phi_i);-diff(uci_i(1,1),phi_i)]; %coord
local
nj_j=[diff(ucj_j(2,1),phi_j);-diff(ucj_j(1,1),phi_j)]; %coord
local
ni=A_sym(qi)*ni_i; %coord global
nj=A_sym(qj)*nj_j; %coord global
ti_i=[diff(uci_i(1,1),phi_i);diff(uci_i(2,1),phi_i)];
tj_j=[diff(ucj_j(1,1),phi_j);diff(ucj_j(2,1),phi_j)];
ti=A_sym(qi)*ti_i;
tj=A_sym(qj)*tj_j;

%Cálculo dos pontos de contato

%matriz de restrições:

```

```

%1ª linha: nj e ni colineares - produto vetorial nulo
%2ª linha: d e ni colineares - produto vetorial nulo
U=[nj.'*ti;d.'*tj];
%matriz jacobiana das restrições para cálculo do método Newton-
Rhapson
%Uij=jacobian(U,[phi_i;phi_j]);
Uij=jacobian(U,[phi_i;phi_j]);

%Valor inicial dos vetores normais:
%atenção: esses números devem estar dentro do domínio possível
das superfícies de contato
%interações
for p=1:50

U_subs=subs_val(U,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,phi_ij
);

Uij_subs=subs_val(Uij,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,ph
i_ij);
    deltaninj=Uij_subs\(-U_subs);

    if norm(deltaninj)<0.0001
        break;
    else
        phi_ij=phi_ij+deltaninj;
    end

end

%substitui os valores anteriores para encontrar d:
df=subs_val(d,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,phi_ij);
ni_f=subs_val(ni,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,phi_ij)
;
nj_f=subs_val(nj,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,phi_ij)
;

%Tornando os vetores ni e nj unitários:
ni_f=ni_f/norm(ni_f);
nj_f=nj_f/norm(nj_f);

eq1=df.'*nj_f;

```

```

%condicional de contato:

if (eq1<=0) %então há contato.

    %cálculo do valor da penetração. delta=(transposta d .
d)^1/2
    delta=sqrt(df.'*df);

    %cálculo da velocidade de penetração
    delta_p=ni_f.'*(rci_o_ponto-rcj_o_ponto);

    %Força de contato Fn, pela metodologia de Flores do
artigo mencionado
    %acima.

    %CA=Contato Anterior (0=Não, 1=Sim)

    if (CA==0) %se é o primeiro instante de contato

        delta_p_inicial=delta_p; %velocidade inicial de
penetração
        CA=1; %deixa de ser o primeiro contato

    end

    %obtenho um valor numérico para poder exportar da
subrotina

    delta_p_inicial=subs_val(delta_p_inicial,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4
,Mc1subs,Mc4subs,phi_ij);

    delta_f=subs_val(delta,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,p
hi_ij);

    delta_p_f=subs_val(delta_p,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4su
bs,phi_ij);

    %Força de contato
    %Equação n°47 do artigo de Margarida Machado
    Fn=K*(delta^n)*(1+(8*((1-
Cr)/(5*Cr))*(delta_p/delta_p_inicial)))));

```

```

Fn_f=subs_val (Fn, qsubs, qpsubs, t, Fc1, Fc4, Mc1subs, Mc4subs, phi_ij)
;

    if Fn_f<0
        Fn=0;
    end

    %Força entre cada uma das direções.
    Fci=nj_f*Fn;
    Fcj=ni_f*Fn;
    Mci=norm(cross([A_sym(qi)* (rli+uci_i);0], [Fci;0]));
%torque criado pela força Fci em Oi
    Mcj=norm(cross([A_sym(qj)* (rlj+ucj_j);0], [Fcj;0]));
%torque criado pela força Fcj em Oj

Fci=subs_val (Fci, qsubs, qpsubs, t, Fc1, Fc4, Mc1subs, Mc4subs, phi_ij)
;

Fcj=subs_val (Fcj, qsubs, qpsubs, t, Fc1, Fc4, Mc1subs, Mc4subs, phi_ij)
;

Mci=subs_val (Mci, qsubs, qpsubs, t, Fc1, Fc4, Mc1subs, Mc4subs, phi_ij)
;

Mcj=subs_val (Mcj, qsubs, qpsubs, t, Fc1, Fc4, Mc1subs, Mc4subs, phi_ij)
;

else %se não há contato, não há forças de contato

    CA=0; %não há contato anterior
    Fci=[0;0];
    Fcj=[0;0];
    Mci=0;
    Mcj=0;

end
end

function [ qpplambda ] = F_qpplambda(
M, Cq, Qe, Qd, qsubs, qpsubs, t, Fc1, Mc1subs, Fc4, Mc4subs, phi_ij)

```

```

%Substituo as duas partes do cálculo da aceleração qpplam=[M
    %Cq.';Cq sym(zeros(4,4))]\([Qe;Qd]) com valores
numéricos, para que
    %a solução do sistema Ax=B seja rápida.

    % essa linha tem que ser a mesma da principal:
syms q1 q2 q3 q4 q5 q6 q7 q8 q9 q10 q11 q12 qp1 qp2 qp3 qp4 qp5
qp6 qp7 qp8 qp9 qp10 qp11 qp12 tempo y2 yponto1 yponto2 yponto
syms Fc1x Fc1y Mc1 Fc4x Fc4y Mc4 phi_i phi_j
syms FxD1 FyD1 FxC1 FyC1 FxD2 FyD2 FxA2 FyA2 FxA3 FyA3 FxB3
FyB3 FxO3 FyO3 FxB4 FyB4 FxC4 FyC4 theta_ponto3 theta_ponto4

    [m,n]=size(M);
    [o,p]=size(Cq);
    U=[M Cq.';Cq sym(zeros(m+o-p,m+o-p))];

Uu=subs_val(U,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,phi_ij);
H=([Qe;Qd]);

Hh=subs_val(H,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,phi_ij);
qpplambda=Uu\Hh;

end

function [ qsubs,qpsubs ] = Runge_Kutta(
M,Cq,Qe,Qd,qsubs,qpsubs,t,
deltat,y0,I,Fc1,Mc1subs,Fc4,Mc4subs,phi_ij )
%UNTITLED Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here

syms q1 q2 q3 q4 q5 q6 q7 q8 q9 q10 q11 q12 qp1 qp2 qp3 qp4 qp5
qp6 qp7 qp8 qp9 qp10 qp11 qp12 tempo y2 yponto1 yponto2 yponto
syms Fc1x Fc1y Mc1 Fc4x Fc4y Mc4 phi_i phi_j
syms FxD1 FyD1 FxC1 FyC1 FxD2 FyD2 FxA2 FyA2 FxA3 FyA3 FxB3
FyB3 FxO3 FyO3 FxB4 FyB4 FxC4 FyC4 theta_ponto3 theta_ponto4

t_RK=t;
h=deltat;
[o,p]=size(I);
f1=zeros(2*o,1);
f2=f1;
f3=f1;

```

```

f4=f1;

%Função F1
a1=F_qpplambda(M,Cq,Qe,Qd,qsubs,qpsubs,t_RK,Fc1,Mc1subs,Fc4,Mc4
subs,phi_ij); %Atenção: substituir em todos os "a" os valores
das forças de contato
for i=1:o
f1(i,1)=(qpsubs(3*I(i,1),1));
f1(i+o,1)=(a1(3*I(i,1),1));
end
f1=h*f1;

%Função F2
qsubs2=qsubs;
qpsubs2=qpsubs;

for i=1:o
qsubs2(3*I(i,1),1)=qsubs(3*I(i,1),1)+(1/2)*f1(i,1);
qpsubs2(3*I(i,1),1)=qpsubs(3*I(i,1),1)+(1/2)*f1(i+o,1);
end
a2=F_qpplambda(M,Cq,Qe,Qd,qsubs2,qpsubs2,t_RK+h/2,Fc1,Mc1subs,F
c4,Mc4subs,phi_ij);
for i=1:o
f2(i,1)=(qpsubs2(3*I(i,1),1));
f2(i+o,1)=(a2(3*I(i,1),1));
end
f2=h*f2;

%Função F3
qsubs3=qsubs;
qpsubs3=qpsubs;

for i=1:o
qsubs3(3*I(i,1),1)=qsubs(3*I(i,1),1)+(1/2)*f2(i,1);
qpsubs3(3*I(i,1),1)=qpsubs(3*I(i,1),1)+(1/2)*f2(i+o,1);
end
a3=F_qpplambda(M,Cq,Qe,Qd,qsubs3,qpsubs3,t_RK+h/2,Fc1,Mc1subs,F
c4,Mc4subs,phi_ij);
for i=1:o
f3(i,1)=(qpsubs3(3*I(i,1),1));
f3(i+o,1)=(a3(3*I(i,1),1));
end
f3=h*f3;

```

```

%Função F4
qsubs4=qsubs;
qpsubs4=qpsubs;

for i=1:o
    qsubs4(3*I(i,1),1)=qsubs(3*I(i,1),1)+f3(i,1);
    qpsubs4(3*I(i,1),1)=qpsubs(3*I(i,1),1)+f3(i+o,1);
end
a4=F_qpplambda(M,Cq,Qe,Qd,qsubs4,qpsubs4,t_RK+h,Fc1,Mc1subs,Fc4
,Mc4subs,phi_ij);
for i=1:o
f4(i,1)=(qpsubs4(3*I(i,1),1));
f4(i+o,1)=(a4(3*I(i,1),1));
end
f4=h*f4;

y=double(y0+1/6*(f1+2*f2+2*f3+f4));
%substitui os novos valores das posições independentes
for i=1:o
    qsubs(3*I(i,1),1)=y(i,1);
    qpsubs(3*I(i,1),1)=y(i+o,1);
end

end

function [ var_subs ] = subs_val(
var_sym,qsubs,qpsubs,t,Fc1,Fc4,Mc1subs,Mc4subs,phi_ij)
%Subrotina para substituição de valores numéricos no lugar de
variáveis
%simbólicas.
%Criado por: André Markus
syms q1 q2 q3 q4 q5 q6 q7 q8 q9 q10 q11 q12 qp1 qp2 qp3 qp4 qp5
qp6 qp7 qp8 qp9 qp10 qp11 qp12 tempo y2 yponto1 yponto2 yponto
syms Fc1x Fc1y Mc1 Fc4x Fc4y Mc4 phi_i phi_j
syms FxD1 FyD1 FxC1 FyC1 FxD2 FyD2 FxA2 FyA2 FxA3 FyA3 FxB3
FyB3 FxO3 FyO3 FxB4 FyB4 FxC4 FyC4 theta_ponto3 theta_ponto4

var_subs=double(subs(var_sym,{q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7,q8,q9,q10,q1
1,q12,...

qp1,qp2,qp3,qp4,qp5,qp6,qp7,qp8,qp9,qp10,qp11,qp12,tempo,...
Fc1x,Fc1y,Mc1,Fc4x,Fc4y,Mc4,phi_i,phi_j},{qsubs(1,1),...

```

qsubs (2,1) , qsubs (3,1) , qsubs (4,1) , qsubs (5,1) , qsubs (6,1) , qsubs (7,
1) , ...

qsubs (8,1) , qsubs (9,1) , qsubs (10,1) , qsubs (11,1) , qsubs (12,1) , ...

qpsubs (1,1) , qpsubs (2,1) , qpsubs (3,1) , qpsubs (4,1) , qpsubs (5,1) , qps
ubs (6,1) , qpsubs (7,1) , ...

qpsubs (8,1) , qpsubs (9,1) , qpsubs (10,1) , qpsubs (11,1) , qpsubs (12,1) ,
t, ...

Fc1 (1,1) , Fc1 (2,1) , Mc1subs , Fc4 (1,1) , Fc4 (2,1) , Mc4subs , phi_ij (1,1)
, phi_ij (2,1) }));

end