

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM MECÂNICA E NUMÉRICA DE
ESCOAMENTOS DE MATERIAIS
ELASTO-VISCOPLÁSTICOS COM COMPORTAMENTO
TIXOTRÓPICO EM UMA EXPANSÃO 4:1

por

Fernanda Bichet Link

Tese para Obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Porto Alegre, dezembro de 2014

MODELAGEM MECÂNICA E NUMÉRICA DE
ESCOAMENTOS DE MATERIAIS
ELASTO-VISCOPLÁSTICOS COM COMPORTAMENTO
TIXOTRÓPICO EM UMA EXPANSÃO 4:1

por

Fernanda Bichet Link

Mestre em Modelagem Computacional

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey

Comissão de avaliação:

Prof^a. Dra. Adriane Prisco Petry – PROMEC/UFRGS

Prof^a. Dra. Maria Luiza Sperb Indrusiak – PPG/Unisinos

Prof. Dr. Roney Leon Thompson– PGMEC/UFF

Rogério Marczak
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 01 de dezembro de 2014

Inicialmente gostaria de agradecer aos meus Pais, Werno e Dalva (*in memoriam*), pela formação moral e amor incondicional.

Ao orientador de minha tese, Prof. Sérgio Luiz Frey, pela oportunidade de melhorar minha formação e pela confiança no meu trabalho.

Aos meus irmãos, Marcelo, Márcia, Olga e Graciela, bem como seus cônjuges pelo incentivo.

Aos meus estimados sobrinhos, Andressa, Camile, Leandro, Thiago, Marcela, Luisa e Sofia, por tornarem este período mais divertido.

Aos meus amigos Greice e Mário por estarem presentes, mesmo longe.

Ao meu grande amigo Candinho, por fortalecer minha fé e pelas palavras de carinho e incentivo nos momentos mais difíceis.

Aos meus amigos caninos Lola e Bernard pelo companherismo.

Aos tantos amigos que passaram em minha jornada de doutoramento.

Aos colegas de LAMAC, pela parceria nos trabalhos desenvolvidos.

Aos Professores Paulo Roberto de Souza Mendes e Mônica Nacache por confiarem no meu trabalho e pelas oportunidades de pesquisa.

Aos Professores e funcionários do Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da UFRGS, PROMEC.

A Capes pelo apoio financeiro, o qual sem ele tornaria este sonho inviável.

RESUMO

O estudo do comportamento reológico de fluidos não Newtonianos tem grande importância em diversas áreas da engenharia. O aumento na demanda destes fluidos – por exemplo, no uso doméstico, pessoal e em processos químicos – acarreta em dificuldades que vão desde o processo de sua mistura ao seu manuseio. Dentre os fluidos não Newtonianos estão os viscoelásticos, os quais exibem deformação aparente quando os níveis de tensões são inferiores ao limite de escoamento do material e, dentro desta classe, alguns ainda podem apresentar comportamento elástico quando submetidos à baixa taxa de cisalhamento. Juntamente com os efeitos elasto-viscoplásticos, os materiais podem apresentar comportamento tixotrópico, onde devido as tensões sua reestruturação não é instantânea. Na presente Tese, fez-se um estudo numérico a fim de analisar o problema específico de escoamentos de fluidos elasto-viscoplásticos com comportamento tixotrópico em uma expansão planar abrupta na razão de aspecto 4 : 1. O modelo mecânico aplicado consiste de uma equação viscoelástica para o campo de tensões, uma evolutiva para o parâmetro de estrutura do material, bem como as equações de conservação de massa e momento. O modelo mecânico aplicado mostrou-se capaz de prever o comportamento tixotrópico. A aproximação numérica do modelo aplicado foi feita através do método estabilizado de elementos finitos, especificamente o método Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS), o qual foi implementado no código de elementos finitos para fluidos não Newtonianos em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Os fenômenos reológicos presentes no problema foram analisados a partir da influência da cinemática do escoamento, da elasticidade e da tixotropia, no nível de estruturação do material, na posição e tamanho das regiões não escoadas e na deformação elástica do material. Os resultados mostraram-se satisfatórios, pois condizem com os apresentados na literatura, apontando a boa previsão do modelo mecânico aplicado bem como a robustez de sua implementação computacional.

Palavras-Chave: Materiais elasto-viscoplásticos, tixotropia, fluidos não-Newtonianos, método de Galerkin mínimos quadrados , escoamento através de expansão planar abrupta

ABSTRACT

The rheological behavior of non-Newtonian fluids study is of great then importance in many areas of engineering. The increase in demand of these fluids - for example, domestic use, personal and processes chemical - causes difficulties ranging from the process of mixing it to handling. Among the non-Newtonian fluids are viscoelastic, which exhibit apparent deformation when stress levels are lower than the yield limit of the material and, within this class, some still have elastic behavior when subjected to low shear rates. Together with the elastic-viscoplastic effects, materials may exhibit thixotropic behavior, ie, due the restructuring strain is not instantaneous. In this thesis was made a numerical study to simulate the specific problem of flow of elastic-viscoplastic fluids with thixotropic behavior in abrupt planar expansion – common geometry in industrial systems associated with elastic-viscoplastic fluids, whose ratio the aspect is 4:1. The mechanical behavior of most of these structured materials, are highly non-Newtonian, with this, there is need to make them more pseudoplastic, causing undesirable behaviors such as thixotropic which is a phenomenon somewhat characterized and modeled in the literature. The mechanical model applied is able to predict thixotropic behavior and is composed of a viscoelastic equation for the stress field and an evolutionary to the material structure parameter in addition to the mass and momentum conservation equations. This mechanical model is approximated by a stabilized finite element model, called the Galerkin method of least squares (GLS). In order to study the rheological phenomena present in the problem is analyzed the influence of the flow kinematics, elasticity and thixotropy in the level of structure of the material, in position and size of unyielded regions and the elastic deformation of the material. The results were satisfactory, since the the study of intensity the U the results agree with those reported in the literature pointing to good prediction of the mechanical model applied well as the hardness of their computational implementation. The results of the elasticity showed quite spectacular behavior of unyielded regions of the material

since for high values of relaxation time, the unyielded region of channel larger has the form of "fingers" because of the high flexibility of the material along the line of symmetry of the channel. The results of the analysis of the elastic deformation show, that model correctly dosing the elasticity in the unyielded regions. The thixotropic effects reported a slower structuring of the material with increasing characteristic time, in response to strain change caused by the expansion, results indicate that for high values of relaxation time, higher the distance between the unyielded regions of smaller channel and larger.

Keywords: Elasto-viscoplastic, thixotropic, non-Newtonian fluids, Galerkin least squares

SUMÁRIO

| | |
|---|------------|
| RESUMO | iii |
| ABSTRACT | v |
| LISTA DE FIGURAS | xi |
| 1 INTRODUÇÃO | 23 |
| 1.1 Estado da Arte | 24 |
| 1.2 Materiais estruturados tixotrópicos | 28 |
| 2 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS – COMPORTAMENTO MA- TERIAL | 35 |
| 2.1 Classificação do Comportamento de um Fluido | 42 |
| 2.1.1 Os Fluidos Puramente Viscosos | 42 |
| 2.1.1.1 <i>Fluido Newtoniano</i> | 44 |
| 2.1.1.2 <i>Fluido Newtoniano Generalizado</i> | 46 |
| 2.1.1.3 Fluido Não-Newtoniano | 48 |
| 2.2 Comportamento de Fluidos Não-Newtonianos Independentes da História da Cinemática do Material | 49 |
| 2.2.1 Fluidos Pseudoplásticos | 50 |
| 2.2.1.1 Os Modelos Matemáticos para Fluidos Pseudoplásticos | 51 |
| 2.2.2 Fluidos Viscoplasticos | 54 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 2.2.2.1 | Os Modelos Matemáticos para Fluidos Viscoplasticos | 55 |
| 2.3 | Comportamento de Fluidos Não Newtonianos Dependentes da História do Material | 62 |
| 2.3.1 | Materiais com comportamento tixotrópico | 63 |
| 2.3.2 | Materiais com comportamento reopético | 68 |
| 2.3.3 | Fluidos Viscoelásticos | 71 |
| 2.3.3.1 | Equação Constitutiva de Maxwell Convectado Superior (UCM) | 72 |
| 2.3.3.2 | Equação Constitutiva de Oldroyd-B | 75 |
| 3 | MODELAGEM MECÂNICA DE ESCOAMENTOS DE MATERIAIS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS COM COMPORTAMENTO TIXOTRÓPICO | 77 |
| 3.1 | Modelagem Mecânica | 77 |
| 3.1.1 | As Equações de Conservação | 77 |
| 3.1.2 | O Modelo Constitutivo Aplicado | 78 |
| 3.1.2.1 | Esquema <i>EVSS – Elastic Viscous Stress Split</i> | 86 |
| 4 | MODELAGEM NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE MATERIAIS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS COM COMPORTAMENTO TIXOTRÓPICO | 89 |
| 4.0.3 | O Método de Elementos Finitos | 89 |
| 4.0.3.1 | Método de Galerkin e os Métodos Estabilizados | 91 |
| 4.0.4 | Formulação Diferencial do Problema Elasto-Viscoplastico Tixotrópico | 93 |

| | | |
|-------------------|---|------------|
| 4.0.5 | Formulação Variacional do Problema Elasto-Viscoplástico Tixotrópico | 94 |
| 5 | RESULTADOS E DISCUSSÕES | 102 |
| 5.1 | Adimensionalização Cinemática | 105 |
| 5.1.1 | Adimensionalização das equações governantes | 106 |
| 5.2 | Resultados | 109 |
| 5.2.1 | Efeito da cinemática | 110 |
| 5.2.2 | Efeito da elasticidade | 132 |
| 5.2.3 | Efeito da tixotropia | 145 |
| 6 | CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS | 154 |
| 6.1 | Conclusões | 154 |
| 6.2 | Perspectivas Futuras | 158 |
| 7 | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 159 |
| 8 | ANEXO I | 169 |
| APÊNDICE A | CINEMÁTICA DOS FLUIDOS A PARTIR DA MECÂNICA DO CONTÍNUO | 169 |
| A.1 | Cinemática dos Fluidos | 169 |
| A.2 | As Leis de Conservação | 174 |
| A.2.1 | Conservação da Massa: Equação da Continuidade | 174 |

| | | |
|---------|--|-----|
| A.2.2 | Conservação de Momento: Equação de Movimento (Segunda Lei de Newton) | 176 |
| A.2.2.1 | Forças Mútuas | 176 |
| A.2.2.2 | Forças de Corpo | 177 |
| A.2.2.3 | Forças de Contato | 178 |
| A.2.2.4 | Princípio da Conservação do Momentum Linear | 179 |
| A.2.2.5 | Princípio das Potências Virtuais | 180 |
| A.2.3 | Conservação da Energia: Primeira Lei da Termodinâmica | 181 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Comparação entre materiais para tensão versus a taxa de cisalhamento. | 46 |
| 2.2 | Os tipos de escoamentos independentes da história da cinemática do escoamento. | 49 |
| 2.3 | Representação do comportamento <i>shear-thinning</i> [R. P. Chhabra, 2008]. | 50 |
| 2.4 | Representação do Modelo <i>Power-law</i> | 52 |
| 2.5 | Curva de escoamento do modelo SMD. | 58 |
| 2.6 | Curva de escoamento SMD para relações η_0/τ_0 | 60 |
| 2.7 | A função viscosidade SMD para relações η_0/τ_0 | 61 |
| 2.8 | Comportamento tixotrópico de uma pasta de cimento [R. P. Chhabra, 2008]. | 64 |
| 2.9 | Comportamento esquemático da taxa de cisalhamento de um material dependente do tempo – ciclo de histerese [Struble and Ji, 2001]. | 65 |
| 2.10 | Ciclo de histerese de uma pasta de cimento [R. P. Chhabra, 2008]. | 66 |
| 2.11 | Degradação e re-formação da estrutura em uma loção corporal patentada [Schramm, 1994] | 67 |
| 2.12 | Formação do comportamento reopético em um poliéster saturado [Steg e Katz, 1965] | 69 |
| 2.13 | Representação esquemática do modelo de Maxwell | 73 |

| | | |
|------|--|-----|
| 2.14 | Análogo mecânico para o modelo de Oldroyd-B | 75 |
| 3.1 | Análogo mecânico para o modelo de Jeffreys [de Souza Mendes, 2011] | 79 |
| 3.2 | Curva de escoamento do material. | 84 |
| 5.1 | A geometria e as condições de contorno (sem escala) | 102 |
| 5.2 | Teste de qualidade de malha para $x_2 = 5$ | 104 |
| 5.3 | A malha de elementos finitos $M4$ (sem escala) | 105 |
| 5.4 | Perfis longitudinais da velocidade axial para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$ (f) $U^* = 4,5$ | 111 |
| 5.5 | Perfis longitudinais da velocidade axial para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$ (f) $U^* = 4,5$ | 112 |
| 5.6 | Perfis longitudinais da velocidade axial para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$ (f) $U^* = 4,5$ | 113 |
| 5.7 | Efeito de U^* : isobandas do parâmetro de estruturação para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$ (f) $U^* = 4,5$ | 115 |
| 5.8 | Efeito de U^* : Regiões não escoadas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4$; (e) $U^* = 4,2$; (f) $U^* = 4,5$ | 117 |

- 5.9 Efeito de U^* : γ_e -isobandas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$; (f) $U^* = 4,5$ 119
- 5.10 Perfil transversal da deformação elástica: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$ 121
- 5.11 Perfil transversal da deformação elástica: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$ 122
- 5.12 Perfil transversal da deformação elástica: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$; (f) $U^* = 4,5$. 123
- 5.13 Perfil transversal do tempo de relaxação: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$ 125
- 5.14 Perfil transversal do tempo de relaxação: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$ 126
- 5.15 Perfil transversal do tempo de relaxação: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$ 127
- 5.16 Perfil transversal da intensidade da tensão: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$ 129

- 5.17 Perfil transversal da intensidade da tensão: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$ 130
- 5.18 Perfil transversal da intensidade da tensão: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$ 131
- 5.19 Perfil transversal da deformação elástica: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$ 133
- 5.20 Perfil transversal da deformação elástica: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$ 134
- 5.21 Perfil transversal da deformação elástica: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$ 135
- 5.22 Efeito da elasticidade: λ -isobandas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$ 137
- 5.23 Efeito da elasticidade: Regiões não escoadas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$ 138

| | | |
|------|---|-----|
| 5.24 | Efeito da elasticidade: γ_e -isobandas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$ | 140 |
| 5.25 | Perfil transversal do tempo de relaxação: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$ | 142 |
| 5.26 | Perfil transversal do tempo de relaxação: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$ | 143 |
| 5.27 | Perfil transversal do tempo de relaxação: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$ | 144 |
| 5.28 | Efeito da tixotropia: λ -isobandas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $\theta_0^* = 100$ e $m = 10$: (a) $t_{eq}^* = 0,05$; (b) $t_{eq}^* = 1$; (c) $t_{eq}^* = 4$; (d) $t_{eq}^* = 10$; (e) $t_{eq}^* = 15$; (f) $t_{eq}^* = 25$ | 146 |
| 5.29 | Efeito da tixotropia: regiões não escoadas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $\theta_0^* = 100$ e $m = 10$: (a) $t_{eq}^* = 0,05$; (b) $t_{eq}^* = 1$; (c) $t_{eq}^* = 4$; (d) $t_{eq}^* = 10$; (e) $t_{eq}^* = 15$; (f) $t_{eq}^* = 25$ | 148 |
| 5.30 | Comprimento tixotrópico a partir do número tixotrópico | 149 |
| 5.31 | Efeito da tixotropia: γ_e -isobandas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $\theta_0^* = 100$ e $m = 10$: (a) $t_{eq}^* = 0,05$; (b) $t_{eq}^* = 1$; (c) $t_{eq}^* = 4$; (d) $t_{eq}^* = 10$; (e) $t_{eq}^* = 15$; (f) $t_{eq}^* = 25$ | 151 |
| 5.32 | Efeito do tempo de relaxação (θ_0^*) na perda de carga (E_l^*) | 152 |
| A.1 | Descrição esquemática do movimento de um corpo mecânico. | 170 |

| | | |
|-----|---|-----|
| A.2 | Porção \mathcal{P} do corpo \mathcal{B} | 177 |
|-----|---|-----|

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|----------------------|---|
| \mathbf{a} | Campo de aceleração |
| \mathcal{B} | Corpo material |
| \mathcal{C}^3 | Espaço tridimensional |
| \mathbf{D} | Tensor de deformação |
| $\check{\mathbf{D}}$ | Derivada Convectada Superior de \mathbf{D} |
| \mathbf{F} | Tensor gradiente de deformação |
| \mathbf{F} | Vetor segundo membro |
| \mathbf{f}_m | Forças mútuas |
| \mathbf{f}_e | Forças externas |
| \mathbf{g} | Vetor força gravitacional |
| G | Módulo da elasticidade |
| G_s | Módulo da elasticidade estrutural |
| G_0 | Módulo da elasticidade do material estruturado |
| h_k | Comprimento da malha |
| \mathbf{I} | Tensor identidade |
| \mathcal{H} | Taxa de calor Trocado |
| H_u | Altura do canal menor |
| H_d | Altura do canal maior |
| H^1 | Espaço de Sobolev |
| \mathcal{K} | Energia cinética |
| \mathbf{K} | Matriz rigidez global |
| K_0 | Config. do corpo, $t = 0$ |
| K_t | Config. do corpo, $t = t$ |
| K | Índice de consistência |
| L_2 | Espaço de Hilbert |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|-------------------|------------------------------|
| m | nmm Parâmetro regularizador |
| \mathcal{M} | Massa de fluido |
| n | Índice <i>Power law</i> |
| \mathbf{n} | Vetor normal |
| \mathbf{o} | Ponto de origem |
| P | Subespaço de L_2 |
| \mathcal{P} | Ponto qualquer do fluido |
| p | Pressão |
| q | Campo da pressão virtual |
| \mathbf{Q} | Rotação rígida |
| \mathbf{r} | Vetor posição |
| \mathbf{S} | Campo tensorial |
| t | Tempo |
| t_{eq} | Tempo de equilíbrio |
| \mathbf{t}_h | Forças de superfícies |
| \mathbf{T} | Tensor tensão |
| \mathbf{T}^T | Transposto do tensor tensão |
| T | Temperatura |
| \mathbf{t} | Vetor tensão |
| U | Vazão |
| \mathcal{U} | Energia interna |
| \mathbf{u} | Vetor velocidade |
| \mathbf{v} | Vetor velocidade virtual |
| \mathbf{V} | Subespaço de $H^1(\Omega)^N$ |
| \mathbf{X} | Varriáveis espaciais |
| \mathbf{x} | Variáveis materiais |
| (\mathbf{x}, t) | Posição de referência |
| (\mathbf{X}, t) | Posição da partícula |

LISTA DE SÍMBOLOS GREGOS

| | |
|------------------|---|
| $\alpha(h_k)$ | Parâmetro estabilizador GLS da equação do movimento |
| β | Parâmetro estabilizador GLS da eq. constitutiva viscoelástica |
| χ | Transformação de classe |
| χ^{-1} | Inversa da transformação de classe |
| δ_{ij} | Delta de Kronecker |
| δ | Espaço das temp. Admissíveis |
| $\delta(h_k)$ | Parâmetro estabilizador GLS da Eq. da continuidade |
| \mathcal{E} | O espaço euclidiano |
| $\dot{\gamma}$ | Tensor taxa de deformação |
| $\dot{\gamma}$ | Magnitude do tensor taxa de deformação |
| $\dot{\gamma}_e$ | Taxa da deformação elástica |
| $\dot{\gamma}_v$ | Taxa da deformação viscosa |
| $\dot{\gamma}_0$ | Início da região estruturada na curva de escoamento |
| $\dot{\gamma}_1$ | Início da região Power-law na curva de escoamento |
| η_s | Viscosidade estrutural |
| η_0 | Viscosidade para o material estruturado |
| η_∞ | Viscosidade para o material desestruturado |
| φ | Função escalar |

LISTA DE SÍMBOLOS GREGOS

| | |
|---------------------|----------------------------------|
| λ | Parâmetro de estrutura |
| μ | Viscosidade do fluido |
| \mathcal{V} | Espaço das temperaturas virtuais |
| θ_1 | Tempo de relaxação |
| θ_2 | Tempo de retardo |
| ρ | Densidade |
| $\boldsymbol{\tau}$ | Tensor extra de tensão |
| τ | Nível de tensão |
| τ_y | Tensão limite de escoamento |
| Ω | Volume arbitrário de fluido |
| $\boldsymbol{\xi}$ | Transformação linear |
| ψ | Qualquer grandeza de um fluido |
| ∇ | Operador divergência espacial |
| Γ | Fronteira de Ω |

SUBESCRITOS

| | |
|-----|---|
| eq | Estado de equilíbrio da microestrutura |
| h | C. C. de Neumann |
| g | C. C. de Dirichlet |
| e | Elasticidade |
| ap | Aparente |
| ' | Deviatório |

SOBRESCRITOS

| | |
|---------|-------------------------------|
| * | Variáveis adimensionalizadas |
| h | Aproxim. de elementos finitos |
| T | Transposta de matriz |
| \cdot | Derivada material |
| \sim | Derivada convectada superior |

1 INTRODUÇÃO

Em processos industriais e naturais, o escoamento de fluidos com comportamento não-Newtoniano – a saber: Indústria Alimentícia, Indústria Farmacêutica, Indústria de Cosméticos, escoamentos de extrusão e escoamentos de óleos no interior de reservatórios [Barnes, 1997], são muito comuns . Nestes processos muitas vezes ocorrem mudanças abruptas em suas seções transversais e um agrande número de casos os efeitos da elasticidade são importantes. Neste sentido, nesta tese é feito um estudo do comportamento de materiais elasto-viscoplásticos tixotrópicos que escoam através de uma expansão planar abrupta na razão de 4 : 1.

Em escoamentos complexos, como é o caso do material em estudo – o comportamento mecânico é altamente não-newtoniano, onde para pequenos níveis de tensão, o seu comportamento é viscoelástico e, elevando além de um determinado limite desta tensão – chamado normalmente de limite de escoamento – tem-se uma grande degradação da microestrutura do material a qual provoca quedas dramáticas na viscosidade e elasticidade. No entanto, para que estes escoamentos de materiais estruturados tenham comportamento mais pseudoplástico, surgem comportamentos colaterais como o tixotrópico que é um fenômeno ainda pouco compreendido e modelado na literatura. Logo, como o fenômeno tixotrópico é de grande importância nas aplicações industriais e por ser de grande dificuldade sua modelagem e caracterização de seu comportamento mecânico, faz-se necessário o estudo deste fenômeno para que este possa ser melhor compreendido.

Na literatura tem-se diversos trabalhos dedicados ao estudo do fenômeno de tixotropia, os quais alguns serão apresentados e discutidos ao longo deste capítulo. Porém, antes disso será feita uma breve discussão sobre o estado da arte.

1.1 Estado da Arte

Os fenômenos em escoamentos oriundos de expansões abruptas têm sido discutidos em diversas pesquisas, a maioria das quais são experimentais, mas algumas numéricas. Alguns destes trabalhos são apresentados nesta seção a fim de motivar a escolha da geometria aplicada nesta tese no estudo de materiais elasto-viscoplásticos com comportamento tixotrópico que escoam através de uma expansão na razão de 4 : 1, em regime permanente e sem efeitos de inércia.

No trabalho desenvolvido por D. Drikakis, 1997, é apresentado um estudo numérico de escoamentos laminares incompressíveis em uma expansão abrupta. O estudo é feito para vários valores do número de Reynolds e para várias razões de aspecto da expansão. Os resultados apontam um número de Reynolds crítico o qual reduz a simetria quando a razão de aspecto da expansão aumenta. As soluções espúrias provocam a formação assimétrica das recirculações provocando instabilidades computacionais que não só dependem do regime do escoamento, mas também de dados iniciais e condições de contorno. As assimetrias do escoamento são verificadas comparando vários esquemas de discretização até quarta ordem de precisão, bem como vários solucionadores iterativos como o esquema de quarta ordem explícito de Runge-Kutta e o método *unfactored* implícito no intuito de diminuir as incertezas numéricas. Ambos os sistemas são utilizados para examinar os possíveis efeitos dos presentes agentes de resolução iterativos na solução numérica. Os algoritmos são desenvolvidos a partir do método de volumes finitos.

Em Pfister et al., 1988 é feito um estudo, cujos resultados apontaram instabilidades semelhantes as encontradas no estudo feito em D. Drikakis, 1997 em expansões sobre um escoamento de Taylor Couette. Em Iribarne et al., 1972, são obtidos resultados que mostram distúrbios ondulatórios na saída da expansão para uma ampla gama de números de Reynolds. É mostrado em H. Sato 1959 instabilidades do escoamento a jusante da expansão e as oscilações do escoamento ocorreram na

vizinhança das camadas limites, provocadas por flutuações de velocidade no plano de saída da expansão. Conclusões semelhantes também são obtidas em D. O. Rockwell e W. O. Niccols, 1972, bem como em G. S. Beavers e T. A. Wilson, 1970. Nestes trabalhos as questões sobre a fiabilidade dos métodos CFD ficaram em aberto para prever tais fenômenos do escoamento. Desta forma as equações diferenciais são representadas por equações de diferenças finitas e, assim, instabilidades numéricas, devido ao esquema numérico, passo de tempo, condições iniciais e de fronteira, e intervalo de tempo para as soluções, podem ser introduzidas. Aterior a este trabalho, os fenômenos de múltiplas soluções estáveis e instáveis são apresentados em Sobey e Mullin 1993. Em Yee et al., 1990 é feito um estudo em que as soluções numéricas espúrias em regime permanente ocorrem abaixo e acima do limite de estabilidade linear do esquema numérico.

Em P. Jay et al., 2001, é apresentado um estudo onde os resultados obtidos são para fluidos com *yield-stress* que escoam através de um expansão aximétrica de razão 4 : 1 utilizando os modelos de Herschel-Bulkley e Bingham. Fez-se um estudo das influências da viscosidade *shear-thinning*, da inércia e valores de *yield-stress* na estrutura do escoamento principal e nas perdas do canal. A estrutura pormenorizada do escoamento na expansão mostra um vórtice inicial. O grau de tensão gera duas regiões não estruturadas, uma localizada no canto da expansão e outra perto do ponto de estagnação que aparece entre o vórtice e o escoamento principal. A inércia e tensão do escoamento agem de maneiras opostas. Quando a inércia aumenta, o tamanho do vórtice aumenta e a zona morta diminui. Entretanto, quando a tensão aumenta o *yield-stress*, o vórtice diminui de tamanho e as zonas mortas aumentam. A pseudoplasticidade reduz as dimensões dos dois vórtices e zonas mortas. A perda de carga aumenta com a tensão de escoamento. Além disso, os resultados numéricos são constantemente comparados com os experimentais.

Em A. N. Alexandrou, 2001, é feito um estudo de um escoamento constante de fluidos de Herschel-Bulkley em uma expansão canônica tridimensional.

Uma relação constitutiva contínua regularizada é utilizada para modelar o escoamento o qual, numericamente, é obtido utilizando uma formulação mista de Galerkin com procedimento iterativo de Newton-Raphson acoplado a um solucionador. É apresentado os resultados para regiões não escoadas e zonas de recirculação, como uma função dos números de Reynolds e Bingham bem como do expoente *Power-law* para expansões com razões de aspecto, 2 : 1 e 4 : 1. Revela-se, a partir dos resultados, uma forte inter-relação entre os números de Bingham e Reynolds e suas influências sobre a forma das zonas não escoadas no canto da expansão e no tamanho e localização das regiões não escoadas na linha de centro do canal menor e maior. Os efeitos da geometria no escoamento são significativas. A característica do escoamento, e a resposta à mudanças nos números de Re e Bi , para a expansão 4 : 1 são mais acentuadas do que as da expansão 2 : 1. Tem-se, ainda, a forte inter-relação entre os números de Bingham e Reynolds e suas influência sobre a formação e dissolução das zonas não escoadas no canto da expansão e do tamanho e localização das regiões não escoadas na linha de centro do canal.

Em E. Mitsoulis e R.R. Huilgol, 2004, é feito um estudo de escoamentos de entrada que fluem através de uma expansão abrupta para plásticos Bingham que exibem limite de escoamento. A equação constitutiva de Bingham é modificada conforme proposto por Papanastasiou, e se aplica em todo o campo de escoamento. A ênfase do trabalho é em determinar a extensão e forma das regiões não escoadas junto a linha de centro do canal, bem como a forma, tamanho e intensidade dos vórtices formados nas zonas mortas da expansão para toda a gama de números de Bingham ($0 \leq Bn < \infty$) e para uma grande variedade de números de Reynolds ($0 \leq Re \leq 200$). Os resultados para a pressão forma utilizados para determinar as perdas de carga em excesso que dareram origem a correções de entrada a qual é expressa por uma equação facilmente aplicada em cálculos de engenharia.

O estudo numérico desenvolvido por R. Manica e A.L. De Bortoli, 2004, é de um fluido laminar incompressível que escoo através de uma expansão súbta cuja

razão de aspecto é 3 : 1 modelado pelo método *Power-law*. Para esses fluxos, acima do valor crítico Reynolds, três soluções podem aparecer: a simétrica e duas não-simétricas. As simulações são realizadas usando uma diferença finita explícita Runge-Kutta esquema de três fases para o tempo e aproximações de segunda ordem.

Conclui-se a partir dos resultados que ocorrem bifurcações para a gama de índice *Power-law*. Para a expansão ocorre um afinamento das regiões não escoadas para a situação Newtoniana, enquanto o inverso ocorre para fluidos dilatantes. Além disso, a solução torna-se dependente do tempo para elevados valores do número de Reynolds, dependendo do valor do expoente n do modelo *Power-law*. Este trabalho difere dos trabalhos até então apresentados na literatura para expansões súbitas porque aqui altos números de Reynolds e comportamento não-Newtoniano são considerados.

P. Ternik et al., 2006, estudou numericamente, aplicando CFX-4.4, o escoamento em uma expansão abrupta (3 : 1) simétrica, onde um fluido não-Newtoniano incompressível escoava de forma a obter o número crítico de Reynolds. O modelo quadrático é empregado para acomodar o comportamento dilatante de uma mistura de amido de milho e água. A técnica de extrapolação de Richardson é aplicada para quantificar os resultados numéricos para a queda de pressão em um canal no qual o número de Reynolds generalizado é estimado para o modelo quadrático. O Procedimento numérico é validado com resultados para o escoamento de fluido Newtoniano num intervalo do número de Reynolds $Re = 10, 20, \dots, 100$.

Os resultados para o fluido não-Newtoniano mostram que o comportamento dilatante reduz o limiar da transição da simetria do escoamento para sua assimetria (diminui o início da bifurcação e o valor do número crítico Reynolds) e aumenta o comprimento de religação do material. Comportamento dilatante provoca maiores gradientes de pressão ao longo da expansão abrupta e tem uma influência significativa sobre o rearranjo do escoamento para além do plano de expansão; ou

seja, o escoamento totalmente desenvolvido se forma mais a jusante da saída da expansão, em comparação com o escoamento de um fluido Newtoniano. Além disso, os resultados para o Modelo quadrático são comparados com os resultados obtidos com o modelo *Power-law*.

1.2 Materiais estruturados tixotrópicos

A microestrutura de um fluido estruturado possui configuração estável por um período de tempo suficientemente longo e sob tensão constante. Isto é resultado do equilíbrio entre as taxas de estruturação e de quebra da microestrutura. O fluido estruturado é dependente do tempo se as mudanças de sua microestrutura não ocorrem instantaneamente após uma mudança no nível de tensões.

Normalmente, estes materiais consistem em dispersões que possuem uma microestrutura que governa o seu comportamento macroscópico em resposta a tensões aplicadas. Estes materiais estruturados exibem um comportamento não-newtoniano complexo, geralmente incluindo viscoelasticidade, tensão de escoamento (*yield stress*) e tixotropia. A tixotropia é caracterizada por um atraso de tempo entre uma mudança na tensão aplicada e a resposta da microestrutura a esta tensão. Muitos modelos constitutivos tixotrópicos têm sido propostos ao longo das últimas décadas, mas o teste e a validação dos mesmos são bastante escassos.

O fluido estruturado dependente do tempo será tixotrópico se houver uma diminuição de sua viscosidade, ao longo do tempo a medida que sofrer aumento na taxa de cisalhamento ou ainda, se houver um aumento de sua viscosidade ao longo do tempo e uma diminuição na sua taxa de cisalhamento. Para ambas situações as mudanças estruturais devem ser reversíveis. A maioria dos fluidos que apresentam uma tensão limite de escoamento são dependentes do tempo, especialmente para tensões pouco acima da tensão limite de escoamento.

Na literatura tem-se diversos trabalhos dedicados ao estudo do fenômeno de tixotropia. O estudo sobre comportamento tixotrópico surgiu em 1923, por Schalek e Szegvari onde estes descobriram que géis tem a propriedade notável de tornarem-se completamente líquido através de agitação suave. Uma série de três artigos por McMillen em 1932, sobre um grande número de tintas floculadas, mostraram a fluidez dos materiais sendo que, para alguns casos, o tempo de repouso diminuiu. Em Scott-Blair, 1942, alguns exemplos de materiais tixotrópicos são analisados, tais como, argilas, suspensões, cremes, lamas de perfuração, massas de farinha, suspensões de fibra de graxas, geléias, tintas, suspensões de carbono e pasta de amido. O autor relata que, nos materiais tixotrópicos, as partículas podem formar uma associação fraca que é facilmente desfeita por agitação, mas se restabelece permanentemente. Em Pryce-Jones J., 1934 - 1941, as tintas em estado de floculação leve é estudada. Os resultados deste trabalho motram que a tixotropia é mais evidente em sistemas contendo partículas não esféricas.

Em 1967, Bauer e Collins relatam que a redução na magnitude das propriedades reológicas de um sistema, tais como o módulo de elasticidade, o limite de escoamento e a viscosidade, por exemplo, ocorrem de forma reversível e isotermicamente dependentes do tempo, indiferente da aplicação de tensão de cisalhamento. Cheng, 1986, Lapasin e Pricl, 1995 ilustram o comportamento tixotrópico pela resposta transitória da viscosidade e força normal das soluções de polímeros. Destes trabalhos, pode-se dizer que a tixotropia refere-se às mudanças reversíveis desde um fluido líquido até um gel elástico do tipo sólido.

Em Mujumdar et al., 2002, vários modelos estruturais cinéticos são apresentados. Neste trabalho fez-se uso de uma equação de evolução para o parâmetro de estrutura e uma equação constitutiva algébrica que relaciona a tensão (ou viscosidade) com o parâmetro de estrutura. Em Stokes e Telford, 2004 fez-se um estudo dos fluidos estruturados que apresentam um limite de escoamento e são dependentes

do tempo, especialmente em um intervalo pequeno de tensão e algumas medidas de irreversibilidades nas mudanças da microestrutura também são observadas.

Em Mewis e Wagner (2009b) foi discutida a diferença do comportamento tixotrópico e viscoelástico, bem como a falha dos modelos tixotrópicos viscoelásticos disponíveis na literatura que são derivados do modelo de Maxwell (por exemplo, Acierno et al. , 1976b, Coussot et al., 1993, Quemada, 1999, Derec et al., 2001) o qual não é capaz de prever o que distingue experimentalmente tixotropia da viscoelasticidade, ou seja, não prevê a queda instantânea na tensão de cisalhamento quando a taxa de deformação diminuiu subitamente. Apesar dos recentes avanços nos métodos de previsão e no entendimento geral, um tratamento unificado de tixotropia ainda não existe e como resultado, a capacidade de previsão destes modelos são geralmente bastante limitados. Em de Souza Mendes, 2009, é proposto um modelo viscoelástico de Maxwell com uma formulação diferente das encontradas, pois é constituído por duas equações diferenciais, uma para a tensão e outra para o parâmetro de estrutura.

O que difere este modelo dos demais é que a equação para o tensão é igual ao modelo de fluido viscoelástico de Maxwell porém, os parâmetros de cisalhamento e viscosidade estrutural dependem da microestrutura do material. Outra diferença, é que a formulação é mais simples pois, todas as premissas são justificadas por argumentos físicos, a configuração neutra muda com a microestrutura, o termo dissolução da equação de evolução para o parâmetro de estrutura é assumido dependente da tensão ao em vez da taxa de cisalhamento e, por fim, o modelo concorda com a curva de escoamento em estado permanente.

Em de Souza Mendes, 2011, algumas modificações são apresentadas com relação ao trabalho de 2009, tais como o surgimento de um tempo de retardo na equação de tensão, resultando em uma equação diferencial do tipo Jeffrey, em particular o modelo Oldroyd-B modificado, cujo tempos de retardo e relaxação, bem como a viscosidade viscoplástica são modificados de modo a acomodar a dependência das mudanças da microestrutura do material.

O modelo mecânico aplicado é o proposto em de Souza Mendes, 2011, cuja equação constitutiva é viscoelástica de tensão chamada de Oldroyd-B modificada, onde sua viscosidade é descrita por uma função viscosidade viscoplástica regularizada – a saber, a função viscosidade SMD proposta em de Souza Mendes e Dutra, 2004 – que contempla os tempos de retardo e relaxação, bem como a viscosidade viscoplástica modificadas adequadamente de tal modo a acomodar a dependência das mudanças da microestrutura do material – nível de estruturação do material. Prevendo, assim, de forma precisa mesmo as tendências mais complexas relacionadas com a viscoelasticidade.

Para os escoamentos permanentes Eulerianos investigados neste trabalho, a equação evolutiva do parâmetro de estrutura transforma-se numa equação puramente hiperbólica, a qual requer cuidados especiais quando da sua aproximação numérica. Esta equação descreve que a taxa de variação temporal do nível da microestrutura do material – ou seja, a derivada material do parâmetro de estrutura – seja igual à taxa líquida da construção e destruição da microestrutura.

A aproximação mecânica do modelo elasto-viscoplástico tixotrópico empregada nesta Tese, será realizada através de um método estabilizado de elementos finitos ou, mais especificamente, o método de multi-campo de Galerkin mínimos-quadrados em termos do parâmetro de estrutura, do tensor extra de tensão, do vetor velocidade e do campo de pressão. Os resultados numéricos são obtidos através do código computacional NNFEM, desenvolvido em linguagem FORTRAN 90 pelo Grupo LAMAC – Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional – do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

A metodologia de multi-campo de Galerkin mínimos-quadrados não necessita satisfazer as condições de compatibilidade entre os subespaços de elementos finitos das variáveis primais do problema estudado, isto é, entre os subespaços de

velocidade e tensão e os subespaços de velocidade e pressão – a condição conhecida como Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974].

Isto implica na atraente vantagem computacional de utilizar combinações de elementos finitos de igual-ordem, facilitando assim, a implementação das subrotinas GLS de elementos finitos. Destaca-se ainda como vantagem da utilização da metodologia GLS, a sua facilidade de obter aproximações estáveis para escoamentos advectivos-dominados a qual, no caso desta Tese, resulta na obtenção de soluções numéricas estáveis para escoamentos sujeitos a altos números de Débora.

Esta vantagem mostra-se de maior relevância no caso de escoamento de fluidos tixotrópicos, nos quais necessitam-se aproximar de maneira estável e precisa a equação evolutiva para o parâmetro de estrutura, equação esta que, para escoamentos permanentes assume característica puramente hiperbólica como acima mencionado – para maiores esclarecimentos da metodologia GLS ver Franca e Stenberg (1991), Franca e Frey (1992) e Zinani e Frey (2006) bem como as referências neles contidas.

Para um melhor entendimento e apreciação deste texto será apresentado, a seguir, um plano geral de seus capítulos subsequentes:

- Capítulo 1 – Neste Capítulo é apresentado o problema estudado nesta Tese, que consiste na análise numérica de materiais elasto-viscoplásticos que escoam em uma expansão planar abrupta cuja razão de aspecto é de $4 : 1$. É apresentado o estado da arte bem como uma breve revisão bibliográfica sobre materiais estruturados tixotrópicos a fim de motivar a escolha da geometria e a importância do estudo da tixotropia.
- Capítulo 2 – Equações constitutivas - comportamento material: As leis apresentadas no Capítulo 2 não são suficientes para caracterizar inteiramente o comportamento dos corpos materiais, pois são incapazes de diferenciar estes diversos comportamentos. Com isso, este Capítulo introduz

equações constitutivas que caracterizam diferentes comportamentos dos materiais os quais são descritos pela variação do tensor tensão \mathbf{T} acoplado ao movimento e deformação os quais o corpo material é submetido. Em outras palavras, o comportamento dos corpos materiais depende diretamente de como as tensões nele se distribuem.

- Capítulo 3 – Modelagem mecânica: Os efeitos da inércia são negligenciados e o comportamento elastoviscoplastico suposto tixotrópico. O fenômeno é modelado pelas equações de conservação de massa e momento, usuais para materiais incompressíveis (ver, por exemplo, Astarita e Marrucci, 1974), acopladas a uma função viscosidade viscoplastica SMD [de Souza Mendes e Dutra, 2004] e uma equação de Oldroyd-B [de Souza Mendes, 2011], modificada de modo a incorporar a dependência, tanto do tempo de relaxação do fluido quanto da viscosidade, nas alterações da microestrutura do material. Estas alterações são descritas por um campo a valor escalar, o qual é determinado pela integração de uma equação de evolução, segundo a qual a derivada material do parâmetro de estrutura relaciona às taxas de construção e destruição da microestrutura do material.
- Capítulo 4 – Modelagem numérica: O modelo mecânico é aproximado por uma formulação estabilizada de elementos finitos, a saber um método multi-campo de Galerkin mínimos quadrados em termos do parâmetro de estrutura, do tensor de tensão extra, do vetor velocidade e do campo de pressão.
- Capítulo 5: Resultados: Nas simulações numéricas são avaliados os efeitos da elasticidade, tixotropia e intensidade do escoamento para uma gama relevante dos parâmetros que regem o fenômeno de materiais elastoviscoplasticos tixotrópicos, através de canais planos que experimentam uma expansão abrupta na razão de 4 : 1. Uma vez que, de acordo

com o modelo tixotrópico empregado, a reologia do material influencia a determinação tanto do seu tempo de relaxação como de sua viscosidade viscoplástica, a distribuição do parâmetro de estrutura ao longo da expansão também é investigada focando-se especialmente na distribuição do nível de estruturação do material, bem como na identificação de suas regiões escoadas e não escoadas e na verificação da capacidade do modelo dosar elasticidade nas regiões não escoadas do material.

- Conclusões: A boa predição do modelo aplicado e a robustez da implementação computacional aplicada são verificadas a partir da análise dos resultados da cinemática do escoamento. Os efeitos da tixotropia são esperados, visto que o parâmetro que a governa ao ser aumentado causa um atraso na estruturação da microestrutura, logo influencia na forma e posição das regiões não escoadas; o mesmo ocorre para os efeitos da elasticidade. Os resultados da deformação elástica mostram-se que o modelo aplicado dosa elasticidade as regiões não escoadas conforme esperado.
- Referências bibliográficas utilizadas.

2 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS – COMPORTAMENTO MATERIAL

As leis de conservação de momento e massa não são suficientes para caracterizar inteiramente o comportamento dos corpos materiais, pois são incapazes de diferenciar seus diversos comportamentos. Isto é facilmente perceptível no cotidiano, como no caso de corpos cujos materiais são distintos, porém com mesma forma e tamanho, e submetidos a um mesmo movimento poderem apresentar distribuição de forças diferentes.

Com isso, introduz-se equações constitutivas que caracterizam estes diferentes comportamentos dos materiais os quais são descritos pela variação do tensor tensão \mathbf{T} acoplado ao movimento e deformação os quais o corpo material é submetido. Em outras palavras, o comportamento dos corpos materiais depende diretamente de como as tensões nele se distribuem.

Tratando-se de corpos fluidos, o seu escoamento vai depender de seu comportamento reológico que é descrito matematicamente por equações que descrevem forças de contato no interior do corpo em termos de uma equação constitutiva para o tensor de tensão, \mathbf{T} , que relaciona-se com as deformações experimentadas pelo corpo. Devido a isso, uma equação constitutiva deve atender certos postulados básicos [Slattery, 1999], tais como os princípios do determinismo, ação local e da indiferença ao referencial material (ou, objetividade material).

Essencialmente, o princípio do determinismo descarta os possíveis eventos futuros que possam influenciar o comportamento atual do fluido. A determinação da tensão sobre o ponto material \mathcal{P} no instante de tempo t é obtida pela história do movimento do corpo até o instante atual. Ou seja, o que acontecerá ao corpo no futuro não irá influenciar seu campo de tensão no presente, no entanto, conhecido o passado e o presente pode-se determinar o comportamento futuro do material.

Para o princípio da ação local tem-se que o movimento externo de um material com relação a uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto deste material (\mathcal{P}) poderá ser ignorado quando da determinação da tensão neste ponto, isto é, o movimento em uma parte de um corpo não afeta, o estado de tensão em outras partes do corpo. Fisicamente, as forças de contato sugerem que as condições na vizinhança imediata a um ponto material o determinam inteiramente [Slattery, 1999].

Antes de ser apresentado o princípio da objetividade material, é importante comentar que uma equação constitutiva deve sempre ser invariante as mudanças do sistema de coordenadas visto que esta escolha é apenas uma convenção usada para atribuir componentes para vetores e tensores. Por exemplo, quando uma equação constitutiva é escrita na sua forma tensorial, e escolhido um referencial para observação, os tensores envolvidos devem permanecer inalterados sob uma mudança do sistema de coordenadas. Pode-se compreender melhor isso quando pensamos em tensores definidos como operadores lineares visto suas definições serem independentes do sistema de coordenadas escolhido.

Por fim, o princípio da indiferença ao referencial material postula que, uma equação constitutiva deve ser invariante a um referencial, mesmo que esta dependa do tempo. Observa-se que a indiferença de referencial não é condição requerida por todas as leis da física [Astarita e Marrucci, 1974]. A equação de movimento é um exemplo disto, visto ela não ser indiferente ao referencial a qual é usualmente definida para um referencial inercial, tornando-se inválida quando é considerado um referencial acelerado.

Além disso, o princípio da objetividade material não é premissa para se ter um material isotrópico, pois este princípio também contempla materiais anisotrópicos e, neste caso, a objetividade material vai implicar apenas na suposição de isotropia do espaço, ou seja, uma mudança de observador deve deixar o comportamento do material inalterado.

A objetividade material é um princípio recentemente postulado, desta forma suas aplicações podem acarretar em dificuldades. O que potencializa, em parte, estas dificuldades é o fato da exigência da indiferença ao referencial não se aplicar à equação de movimento, visto essa ser aplicada acoplada a uma equação constitutiva que estará por sua vez associada à solução do problema em estudo.

Com isso, deve-se ter cuidado com a escolha da equação constitutiva a qual será aplicada no estudo de um problema, pois algumas delas não obedecem o princípio da objetividade material, como o caso de algumas equações viscoelásticas lineares que, ao serem aplicadas à solução do problema, faz com que alguns dados obtidos experimentalmente venham a ser descartados.

Ainda neste contexto, deve-se levar em consideração a invariância dimensional, pois esta, apesar de não impor restrições à equação constitutiva empregada, concerne que uma equação constitutiva deve ter um número mínimo de parâmetros dimensionais que, geralmente, são dimensões de tensão, tempo e comprimento. Além disso, regras de escala são levadas em consideração em problemas de engenharia através de hipóteses constitutivas lineares aplicadas a estes problemas. Desta forma, regras de escala só podem ser empregadas quando o mesmo material é utilizado tanto no modelo como no protótipo.

De acordo com Astarira, G. e Marrucci, G., 1974, a descrição dada pela Eq.(A.4) pode ser verificada se a descrição do movimento $\chi(\mathbf{X}, t)$ for expressa a partir de um referencial, relacionado a este movimento, por uma deformação rígida – se e somente se por uma rotação seguida de uma translação.

$$\chi^*(\mathbf{X}, t) - \mathbf{p}(t) = \mathbf{Q}(t)[\chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{o}] \quad (2.1)$$

onde para toda posição de referência (\mathbf{X}) e tempo arbitrário (t), tem-se \mathbf{p} é uma posição no espaço para um dado instante de tempo, $\mathbf{Q}(t)$ é uma rotação rígida e \mathbf{o} é

um ponto de origem, todos relacionados à configuração antiga, e χ^* é a transformação de χ para a configuração atual.

A equação de transformação de vetores geométricos, tais como vetores obtidos como diferenças de pontos, é imediatamente obtida a partir da Eq.(2.1). Considerando X_1 e X_2 dois pontos na configuração atual e X_1^* e X_2^* suas respectivas transformações, tem-se:

$$X_1^* - X_2^* = \mathbf{Q}(t)[X_1 - X_2] \quad (2.2)$$

Um vetor geométrico \mathbf{a} é indiferente e definido como segue:

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{a} \quad (2.3)$$

Pode-se definir $\chi(\mathbf{X}, t)$ como sendo um tensor dado por:

$$\mathbf{b} = \chi(\mathbf{X}, t)\mathbf{a} \quad (2.4)$$

onde a Eq.(2.4) define $\chi(\mathbf{X}, t)$ como o operador linear dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . O vetor \mathbf{a} , que opera o tensor, e \mathbf{b} o vetor resultante desta operação são indiferentes e definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{a} \\ \mathbf{b}^* &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Os asteriscos são empregados para indicar os vetores e tensores no novo referencial. Multiplicando a Eq.(2.5) pelo transposto \mathbf{Q}^T , tem-se:

$$\mathbf{a}^*\mathbf{Q}(t)^T = \mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}(t)^T\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{b}^*\mathbf{Q}(t)^T = \mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}(t)^T\mathbf{b} = \mathbf{b} \quad (2.6)$$

Substituindo a Eq.(2.6) em Eq.(2.4) e multiplicando ao resultado o tensor \mathbf{Q} , chega-se em:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^* \mathbf{Q}^T(t) = \chi(\mathbf{X}, t) \mathbf{a}^* \mathbf{Q}^T(t)$$

$$\mathbf{b}^* \cdot (\mathbf{Q}^T(t) \mathbf{Q}(t)) = (\mathbf{Q}(t) \chi(\mathbf{X}, t) \mathbf{Q}^T(t)) \cdot \mathbf{a}^*$$

onde $\mathbf{Q}(t) \chi(\mathbf{X}, t) \mathbf{Q}^T(t) = \chi^*(\mathbf{X}, t)$. Logo, $\chi^*(\mathbf{X}, t)$ é a transformação de $\chi(\mathbf{X}, t)$ e com isso pode-se afirmar que tensores com transformação deste tipo serão indiferentes. A partir das Eqs. (2.3) e (2.4), se \mathbf{a} e \mathbf{b} forem indiferentes, então $\chi(\mathbf{X}, t)$ também o será.

Para melhor compreensão, será apresentada uma análise do tensor tensão \mathbf{T} a partir de sua definição:

$$d\mathbf{t} = \mathbf{T} d\mathbf{s} \quad (2.7)$$

$$d\mathbf{t}^* = \mathbf{T}^* d\mathbf{s}^* \quad (2.8)$$

Análogo a Eq.(2.5), tem-se o vetor $d\mathbf{s}$ é indiferente pois trata-se de um vetor geométrico e postulando-se o vetor força de tensão $d\mathbf{t}$ também indiferente, chega-se em:

$$d\mathbf{s}^* = \mathbf{Q} d\mathbf{s} \quad (2.9)$$

$$d\mathbf{t}^* = \mathbf{Q} d\mathbf{t} \quad (2.10)$$

sendo \mathbf{Q} um tensor ortogonal. Pela combinação das Eqs.(2.8 – 2.10), escreve-se:

$$(\mathbf{Q}\mathbf{T})d\mathbf{s} = (\mathbf{T}^*\mathbf{Q})d\mathbf{s} \quad (2.11)$$

para toda a superfície $d\mathbf{s}$. Desta forma, se multiplicarmos a Eq.(2.11) pelo tensor inverso do tensor ortogonal \mathbf{Q} , tem-se:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \quad (2.12)$$

Desta forma, pela Eq.(2.12) tem-se o tensor tensão é indiferente ao referencial.

Consideremos o caso particular do tensor unitário $\mathbf{1}$, o qual é definido por $\mathbf{a} = \mathbf{1}\mathbf{a}$ tem-se:

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}^* = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{I}\mathbf{Q}^T \quad (2.13)$$

A Eq.(2.13) mostra que o tensor unitário, bem como qualquer tensor isotrópico, é indiferente ao referencial. Combinando a Eq.(2.13) com a Eq.(2.12), o tensor de tensão extra também vai ser indiferente pois, a soma de dois tensores indiferentes também será um tensor indiferente[Astarita e Marrucci, 1974].

$$\boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{Q}\boldsymbol{\tau}\mathbf{Q}^T \quad (2.14)$$

Extendendo a análise para tensores cinemáticos tais como o tensor gradiente de velocidade $\nabla(\mathbf{u})$ e o tensor taxa de deformação \mathbf{D} . Da definição do tensor $\nabla(\mathbf{u})$, tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{u}) &= \nabla(\mathbf{u})d\mathbf{X} \\ \nabla(\mathbf{u})^* &= \nabla(\mathbf{u})^*d\mathbf{X}^* \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde o vetor $d\mathbf{X}$ é um vetor geométrico e, portanto, indiferente.

$$d\mathbf{X}^* = \mathbf{Q}d\mathbf{X} \quad (2.16)$$

A partir da diferenciação da Eq.(2.1), em relação ao tempo (t), equação essa que fornece a transformação de uma mudança de referencial:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}^*(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} = \mathbf{Q}(t) \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{Q}(t)}{\partial t} [\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{o}] \quad (2.17)$$

Da Eq.(A.10), interpreta-se que a Eq.(2.17) descreve a velocidade e que não satisfaz a Eq.(2.7), logo a velocidade não é indiferente ao referencial e pode ser descrita como segue,

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\chi}} + \dot{\mathbf{p}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(\dot{\boldsymbol{\chi}} - \mathbf{o}) \quad (2.18)$$

Aplicando à Eq.(2.18), a regra da transformação para uma velocidade infinitesimal $d\mathbf{u}$ dada por,

$$d\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}d\mathbf{u} + \dot{\mathbf{Q}}d\mathbf{X} \quad (2.19)$$

Considerando que \mathbf{Q} e $\dot{\mathbf{p}}$ não são campos, mas sim um tensor e um vetor fixo, respectivamente (a mudança de referencial dependente do tempo; é um movimento de corpo rígido do referencial).

A translação do novo referencial $\mathbf{p}(t)$, não dá nenhuma contribuição para a expressão de $d\mathbf{u}^*$, embora contribua para \mathbf{u}^* . Na verdade, as diferenças de velocidade (o conceito de velocidade relativa) são indiferentes a uma translação rígida sobreposta.

Combinando as Eqs.(2.15 - 2.19), tem-se:

$$\nabla\mathbf{u}^*\mathbf{Q}d\mathbf{X} = \mathbf{Q}\nabla\mathbf{u}d\mathbf{X} + \dot{\mathbf{Q}}d\mathbf{X} \quad (2.20)$$

Logo, pode-se escrever,

$$\nabla\mathbf{u}^* = \mathbf{Q}\nabla\mathbf{u}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \quad (2.21)$$

concluí-se que o tensor gradiente de velocidades não é indiferente ao referencial.

Análogo ao que é feito para o gradiente da velocidade na Eq.(2.21), tem-se, da transformação do tensor taxa de deformação \mathbf{D} a partir de sua definição:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* &= \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u}^* + \nabla\mathbf{u}^{T*}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q}\nabla\mathbf{u}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\nabla\mathbf{u}^T\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T) \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (2.22)$$

Sendo a derivada temporal do tensor unitário – último termo da equação – nulo, mostrando que o tensor \mathbf{D} é indiferente ao referencial. Grande parte das equações constitutivas são obtidas utilizando-se os tensores apresentados acima, desta forma são, portanto, indiferentes ao referencial.

Por fim, devese levar em consideração que, uma equação constitutiva, não deve violar a segunda lei da termodinâmica, onde para fluidos Newtonianos

basta atribuir um valor positivo para sua viscosidade para que a segunda lei seja respeitada. Porém, para hipóteses constitutivas mais complexas a segunda lei da termodinâmica impõe restrições tanto para equação de estado constitutiva quanto da energia – ver discussão em de Souza Mendes et. al, 2013.

2.1 Classificação do Comportamento de um Fluido

Os fluidos podem ser classificados de duas formas distintas que são ou através de sua resposta à pressão aplicada exteriormente ou através dos efeitos produzidos sob a ação de uma tensão de cisalhamento.

O regime cujo critério leva em conta a pressão aplicada exteriormente conduz aos chamados fluidos compressível e incompressíveis, podendo depender ou não do volume de um elemento de fluido [Chhabra, R. P., 1999]. Enquanto que a compressibilidade influencia as características de escoamento de gases, os líquidos podem normalmente ser considerados incompressíveis e sua resposta ao cisalhamento que o determina.

Considerando-se $\dot{\gamma}$ como a magnitude do tensor taxa de deformação [Slattery, 1999], bem como $\dot{\gamma} = (2II_{\mathbf{D}})^{1/2} = (2tr(\mathbf{D}^2))^{1/2}$, fez-se um estudo de modelos que descrevem escoamentos de fluidos de fase única, soluções e misturas pseudo-homogêneas (a citar, suspensões, emulsões, dispersões gás-líquido dentre outros) que podem ser tratados como um processo contínuo.

2.1.1 Os Fluidos Puramente Viscosos

As equações constitutivas particulares para o tensor tensão (\mathbf{T}) baseiam-se nos princípios descritos no início deste capítulo. As tensões são resultantes de movimentos oriundos dos componentes do tensor taxa de deformação (\mathbf{D}). Por não satisfazerem o princípio da indiferença ao referencial ao descrever o comportamento

do tensor tensão, o vetor velocidade e o tensor vorticidade não podem ser utilizados para descrever o comportamento do tensor tensão [Slattery, J. C., 1999].

Desta forma, a chamada equação constitutiva do material descreve o modo como o tensor taxa de deformação afeta o tensor tensão. Isto implica que, para um dado escoamento, os componentes do tensor tensão devem ser proporcionais aos componentes do tensor taxa de deformação. Um clássico exemplo dessa proporcionalidade é a chamada Lei de Hagen-Poiseuille [Landau et Lifchitz, 1971] decorrente da equação de Navier-Stokes, a qual relaciona a vazão volumétrica \mathcal{Q} à queda de pressão Δp ao longo do escoamento permanente em um tubo de raio r e comprimento l , da seguinte maneira:

$$\mathcal{Q} = \frac{\pi r^4 \Delta p}{16\mu l} \quad (2.23)$$

A Eq.(2.23) expressa a proporção direta entre a vazão volumétrica \mathcal{Q} e a queda de pressão Δp a qual é resultante de observação experimental, sob regime de escoamento laminar, para uma grande variedade de líquidos comuns com baixo peso molecular, tais como água e derivados leves de petróleo.

Em contra partida, diversos fluidos reais não seguem o comportamento predito pela Eq.(2.23), pois apresentam uma dependência não-linear de \mathcal{Q} em Δp sendo observada experimentalmente. Exemplos de materiais com este comportamento dito não-Newtoniano: suspensões espessas, tintas, soluções poliméricas e polímeros fundidos.

Experimentalmente, tem-se, dos fluidos incompressíveis, que modelos baseados na equação constitutiva obtida por Reiner (1942) e Prager (1945) são satisfatórias na predição do comportamento de fluidos reais.

$$\mathbf{T} = k_0 \mathbf{I} + k_1 \mathbf{D} + k_2 \mathbf{D}^2 \quad (2.24)$$

onde os coeficientes k_i , $i = 1, 2$ e 3 , são funções escalares do primeiro ($I_{\mathbf{D}}$), segundo ($II_{\mathbf{D}}$) e terceiro ($III_{\mathbf{D}}$) invariantes do tensor taxa de deformação \mathbf{D} , dados por:

$$I_{\mathbf{D}} = \text{tr}(\mathbf{D}) = \text{div}\mathbf{u} \quad (2.25)$$

$$II_{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} [I_{\mathbf{D}}^2 - \text{tr}(\mathbf{D}^2)] \quad (2.26)$$

$$III_{\mathbf{D}} = \det(\mathbf{D}) \quad (2.27)$$

Para os fluidos viscométricos, os quais baseiam-se na Eq.(2.24), a partícula material está sujeita a uma deformação cujo histórico é constante, não levando em consideração os efeitos de memória. Além disso, os escoamentos viscométricos são caracterizados por não possuírem tensões normais – considerando-se o termo linear em \mathbf{D} , pois são escoamentos puramente cisalhantes. Os escoamentos viscométricos são os escoamentos em dutos fechados, escoamentos de Couette e os escoamentos permanente em viscosímetro de cone e placa.

2.1.1.1 Fluido Newtoniano

Define-se a viscosidade dos fluidos Newtonianos como um meio da constante de proporcionalidade que relaciona o tensor tensão \mathbf{T} ao tensor taxa de deformação \mathbf{D} [Slattery, 1999]. Isto implica que, para um dado escoamento, os componentes do tensor tensão devem ser proporcionais aos componentes do tensor taxa de deformação.

O modelo de fluido Newtoniano [Bird et al., 1987], obtido por uma forma linear da relação entre o tensor tensão e o tensor taxa de deformação, pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = (-p - \frac{2}{3}\mu \text{div}\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.28)$$

onde p é a pressão mecânica, μ é chamada viscosidade do fluido, e o coeficiente $(2/3)\mu \text{div}\mathbf{u}$ é resultante da teoria dos gases monoatômicos rarefeitos [Bird et al.,

1987]. A constante de proporcionalidade, μ (ou a razão da tensão de cisalhamento para a taxa de cisalhamento), o que é chamado de viscosidade newtoniana é, por definição, apenas independente da taxa de cisalhamento ($\dot{\gamma}$) ou tensão de cisalhamento (τ) e depende do material e da sua temperatura e pressão.

O gráfico da tensão (τ) versus a taxa de cisalhamento ($\dot{\gamma}$) para um fluido newtoniano, é chamado de curva de escoamento ou reograma e é, portanto, uma linha reta com um declive, μ , e que passa pela origem; a constante μ , caracteriza completamente o comportamento de escoamento de um fluido newtoniano, para uma temperatura e uma pressão fixa.

Assumindo-se a hipótese de um material ser incompressível, não pode-se definir uma pressão termodinâmica do material [Astarita e Marrucci, 1974] e sim um conceito de uma pressão hidrodinâmica, onde esta origina-se a partir da pressão hidrostática desenvolvida quando o fluido encontra-se em repouso ou em movimento de corpo rígido, ou seja, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Logo, pode-se definir o campo de tensão como segue:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} \quad (2.29)$$

Entretanto, quando o fluido escoar, a tensão pode ser abordada como a soma da pressão hidrodinâmica com uma componente viscosa:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}' \quad (2.30)$$

onde $\boldsymbol{\tau}'$ é o chamado tensor deviatório, ou seja, $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}') = 0$ e a pressão isotrópica é definida como uma média dada por $p \equiv -\frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{T})$. Logo, a forma incompressível é dada como segue:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.31)$$

Alguns exemplos de fluido Newtonianos são os gases, líquidos orgânicos, soluções simples de sais inorgânicos de baixo peso molecular, e os sais de metais fundidos. A Fig.2.1 apresenta o comportamento de um material Newtoniano a partir de dados da taxa de cisalhamento versus a tensão de cisalhamento de um óleo de cozinha e um xarope de milho.

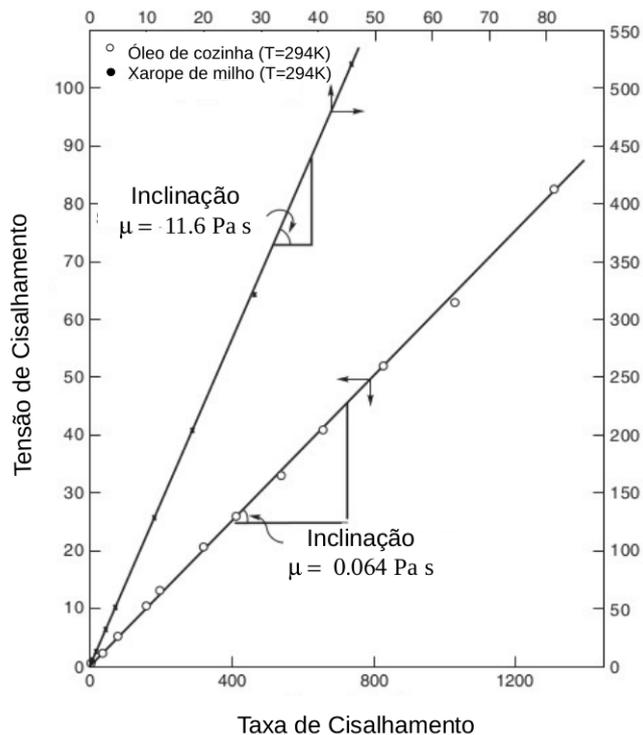


Figura 2.1: Comparação entre materiais para tensão versus a taxa de cisalhamento.

2.1.1.2 Fluido Newtoniano Generalizado

Para os escoamentos industriais de interesse, a mais importante propriedade dos fluidos macromoleculares é a viscosidade não-Newtoniana, ou seja, o fato da viscosidade do fluido variar com a taxa de cisalhamento. Para alguns fluidos, a viscosidade pode variar de um fator de 10, 100 ou até 1000, ficando evidente que estas enormes variações não podem ser ignoradas em projetos de escoamentos no

interior de dutos, problemas de lubrificação, projetos de viscosímetros, operação de extrusão e cálculos de processos poliméricos.

Consequentemente, o fato do primeiro empirismo introduzido é uma modificação na lei de Newton da viscosidade (Eq.2.31), a qual permite que a viscosidade varie com a taxa de cisalhamento, os chamados fluidos Newtonianos generalizados (GNL). Entretanto, estes modelos não descrevem os efeitos de tensões normais em cisalhamento ou a dependência no tempo dos efeitos elásticos.

Matematicamente, a partir da generalização anteriormente proposta pela equação constitutiva Newtoniana, (Eq.2.31), o modelo para um fluido Newtoniano generalizado [Bird et al., 1987] é dado pela seguinte equação constitutiva para o tensor \mathbf{T} ,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\eta_{ap}(\dot{\gamma})\mathbf{D} \quad (2.32)$$

onde a viscosidade aparente $\eta_{ap}(\dot{\gamma})$ é uma função de invariantes escalares do tensor taxa de deformação, \mathbf{D} .

Se a viscosidade não-Newtoniana $\eta_{ap}(\dot{\gamma})$ a qual é uma grandeza escalar depende do tensor \mathbf{D} , então, ela deve depender apenas de combinações particulares dos componentes deste tensor, os quais sejam independentes do sistema de coordenadas adotado (invariantes do tensor taxa de deformação):

$$\eta_{ap}(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (2.33)$$

sendo $\tau = (1/2\text{tr}(\boldsymbol{\tau}^2))^{1/2}$ conhecida como a magnitude do tensor das tensões deviatórias $\boldsymbol{\tau}'$. É conveniente, ainda, que se defina o tensor das tensões deviatórias $\boldsymbol{\tau}'$ [Panton, 1996]:

$$\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{T} + p\mathbf{I} = 2\eta_{ap}(\dot{\gamma})\mathbf{D} \quad (2.34)$$

2.1.1.3 Fluido Não-Newtoniano

Um fluido não newtoniano que apresenta viscosidade aparente (η_{ap}) não é constante a uma dada temperatura e pressão, mas é dependente de condições de escoamento tais como a geometria de fluxo ou taxa de deformação, por exemplo. Por vezes, estes fluidos dependem até do histórico da cinemática do elemento em consideração. Esses materiais são convenientemente agrupados em três classes gerais:

- Fluidos em que a taxa de deformação em qualquer ponto é determinada apenas pelo valor da tensão extra em um determinado ponto em um determinado instante; estes fluidos são conhecidos como independentes da história da cinemática do escoamento, puramente viscosos, não elásticos ou fluidos Newtonianos generalizados;
- Fluidos mais complexos para os quais a relação entre a tensão extra e a taxa de deformação depende, além disso, da duração do cisalhamento e da história de sua cinemática; eles são chamados de fluidos dependentes da história cinemática, e por fim,
- Substâncias que apresentam características de ambos os fluidos ideais e sólidos elásticos e que mostram recuperação elástica parcial, após a deformação; estes são classificados como fluidos visco-elásticos.

Esta classificação é arbitrária visto que a maioria dos materiais reais exibem frequentemente uma combinação de dois ou até das três características acima elencadas. Geralmente, é, no entanto, possível identificar a característica dominante do escoamento e tomar este como base para os cálculos subsequentes do processo. Além disso, é conveniente definir uma viscosidade aparente destes materiais como a razão entre tensão extra e a taxa de deformação, embora esta última razão seja uma

função da tensão extra ou da velocidade e/ou do tempo [R. P. Chhabra, 2008]. Na sequência fez-se um estudo detalhado dessas classes de fluidos Não-Newtonianos.

2.2 Comportamento de Fluidos Não-Newtonianos Independentes da História da Cinemática do Material

Fluidos independentes do tempo possuem uma taxa de deformação em função, exclusivamente, da tensão aplicada no ponto em estudo. Os principais fluidos Não-Newtonianos os quais classificam-se como independentes do tempo são os fluidos pseudoplásticos, viscoplásticos e dilatantes. Estes fluidos estão ilustrados qualitativamente na Fig. 2.2 que representa uma curva de escoamento mostrando inclusive os fluidos Newtonianos.

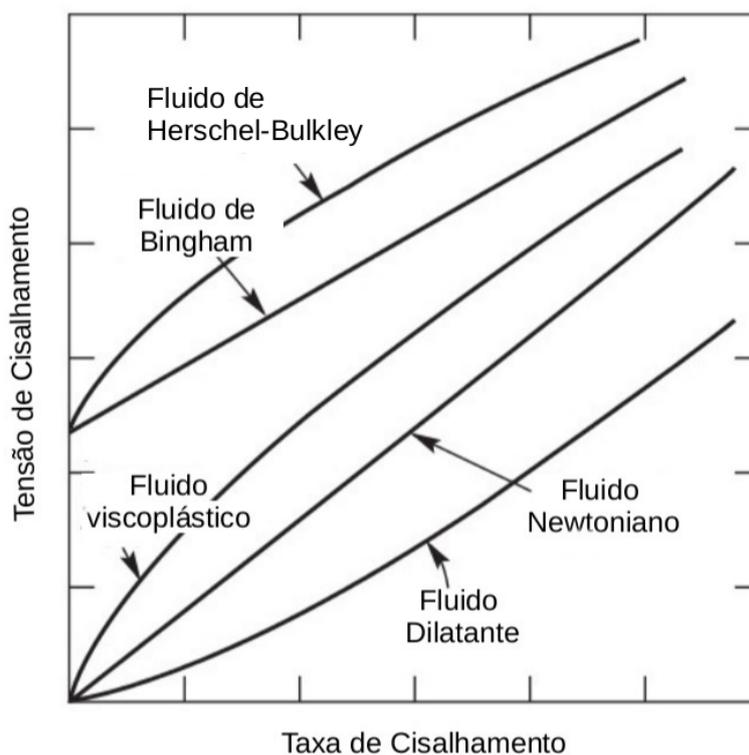


Figura 2.2: Os tipos de escoamentos independentes da história da cinemática do escoamento.

2.2.1 Fluidos Pseudoplásticos

O tipo mais comum de comportamento de fluido Não-Newtoniano, independente do tempo observado é o pseudoplástico (ou também chamado de *shear-thinning*), o qual é caracterizado por uma viscosidade aparente que diminui com o aumento da taxa de cisalhamento. Tanto para muito baixas como para altas taxas de cisalhamento, a maioria das soluções poliméricas afinam e exibem um comportamento Newtoniano, como mostrado na Fig.2.4.

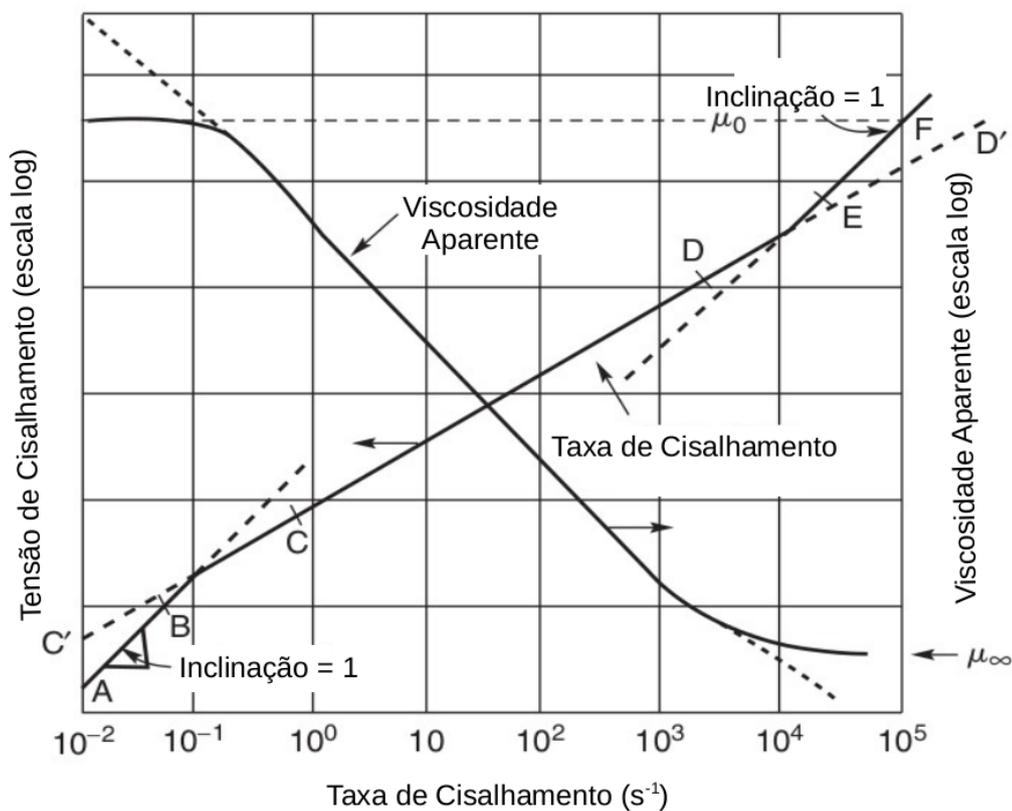


Figura 2.3: Representação do comportamento *shear-thinning* [R. P. Chhabra, 2008].

Desta forma, a partir deste gráfico a viscosidade *shear-thinning* diminui de μ_0 para μ_∞ a medida que a taxa de cisalhamento aumenta. Dados que englobam uma ampla gama de taxas de deformação suficiente para que se possa ilustrar este

espectro completo do comportamento pseudoplástico são escassos e difíceis de obter-se [R. P. Chhabra, 2008]. Isso deve-se ao fato de que um único instrumento não é capaz, ainda, de ter simultaneamente a sensibilidade suficiente para captar, regiões onde o cisalhamento é muito baixo e a robustez em altas taxas de cisalhamento de modo que são necessários vários instrumentos para chegar a uma curva que descreva tal comportamento.

2.2.1.1 Os Modelos Matemáticos para Fluidos Pseudoplásticos

Na literatura tem-se diversas formulações matemáticas para modelar as características da pseudoplasticidade, sendo algumas delas tentativas diretas no ajuste de curva, dando relações empíricas para a tensão de cisalhamento (ou viscosidade aparente) como uma extensão da aplicação da teoria cinética para estado líquido ou a teoria dos processos da taxa, etc. Na sequência desta seção serão apresentados alguns modelos mais utilizados de viscosidade *shear-thinning* [Bird et al, 1987 e 1976;. Carreau et al, 1997].

I - Modelo Power-law

A modelagem mais comum para fluidos Newtonianos generalizados é o modelo Ostwald-de-Waele, ou mais comumente conhecido como modelo *Power-law*. Neste modelo, a viscosidade aparente é dada por:

$$\eta(\dot{\gamma}) = m\dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.35)$$

sendo m o chamado índice de consistência e n o chamado índice Power-law onde ambos são determinados empiricamente. Analisando a Eq.(2.35), se $n = 1$ e $m = \mu$, este modelo reduz-se ao modelo Newtoniano para fluido incompressível. No entanto se, $n < 1$, o fluido é dito **pseudoplástico**, ou *shear-thinning*, e se $n > 1$ o fluido é chamado **dilatante** ou *shear-thickening*.

Diversos materiais utilizados em problemas de engenharia, tais como alimentos, tintas e polímeros, possuem índice de consistência menor que um, o que acarreta que a viscosidade pode assumir infinitos valores em pontos onde a taxa de cisalhamento é nula, ou seja, quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \infty$ e o mesmo acontece no caso de $n > 1$ quando $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ [Slattery, 1999].

Embora o modelo *Power-law* ofereça a representação mais simples de comportamento pseudoplástico, ele apresenta deficiências. Geralmente, aplica-se ao longo de apenas uma gama limitada de taxas de cisalhamento e, portanto, os valores ajustados de m e n dependem da gama de taxas de cisalhamento considerados. Além disso, o modelo não prevê as viscosidades de cisalhamento que tendem a zero e infinito, conforme mostra-se na Fig.(2.4).

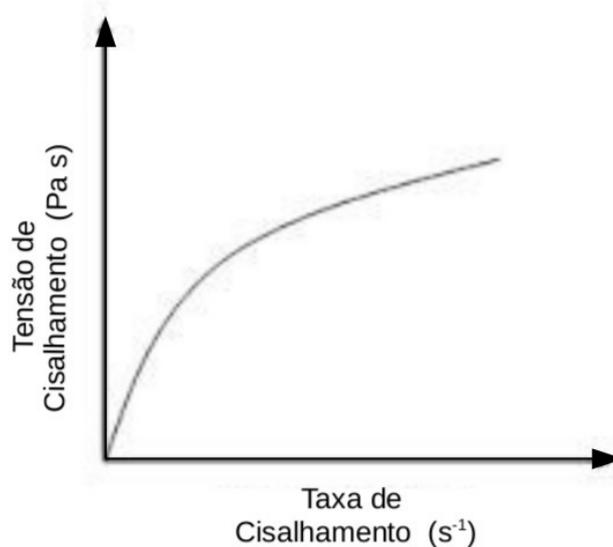


Figura 2.4: Representação do Modelo *Power-law*

Por fim, deve-se notar que as dimensões do coeficiente de consistência do escoamento, m , depende do valor numérico de n e, portanto, os valores de m não podem ser comparados quando os valores de n , pois estem diferem. Por outro lado, o valor de m pode ser visto como o valor da unidade da viscosidade aparente à taxa de

cisalhamento e, por conseguinte, irá depender da unidade de tempo (por exemplo, segundos, minutos ou horas) que será empregada. Apesar destas limitações, este modelo é um dos mais utilizados na literatura em aplicações em engenharia mesmo sabendo-se que cada fluido não Newtoniano é único e a sua reologia necessita ser avaliada diretamente.

II - Modelo de Carreau-Yasuda

O Modelo de Carreau-Yasuda [Bird et al., 1987], diferencia-se do modelo *Power-law*, pois este é capaz de prever viscosidades limites denotadas por η_0 e η_∞ e além disso é um modelo à cinco parâmetros que tem flexibilidade suficiente para ajustar uma grande variedade de curvas experimentais, e mostra-se útil para a solução numérica de escoamentos onde faz-se necessária uma expressão analítica para a curva de viscosidade não Newtoniana. O modelo Carreau-Yasuda é dado por:

$$\frac{\eta(\dot{\gamma}) - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\lambda\dot{\gamma})^a]^{\frac{n-1}{a}} \quad (2.36)$$

sendo η_0 a viscosidade Newtoniana quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ e a viscosidade Newtoniana η_∞ quando $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, λ é uma constante de tempo, n é o expoente *Power-law* e a é um parâmetro adimensional que descreve a região entre a zona de taxa de cisalhamento Newtoniana zero e a zona *Power-law*. Grande parte dos fluidos comuns (à citar, fluidos alimentícios, soluções poliméricas, etc) apresentam boas correlações para $a = 2$ e $\eta_\infty = 0$. Com isso, determinam-se experimentalmente os parâmetros η_0 , λ e n . A Eq.(2.36) com $a = 2$ representa o dito modelo de Carreau, desenvolvido por P. J. Carreau (1968), pois a variação deste parâmetro é acrescida por Yasuda, 1981.

Adimensionalizando-se o tensor de tensões deviatórias $\boldsymbol{\tau}'$, chega-se em:

$$\boldsymbol{\tau}' = 2(\eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}})\mathbf{D} \quad (2.37)$$

Os parâmetros adimensionais, bem como as constantes são adimensionalizadas da seguinte forma:

$$\eta^* = \frac{\eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} ; \dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}L}{\mathbf{u}_\infty} ; \boldsymbol{\tau}^* = \frac{\boldsymbol{\tau}L}{(\eta_0 - \eta_\infty)\mathbf{u}_\infty} ; \mathbf{D}^* = \frac{\mathbf{D}L}{\mathbf{u}_\infty} \quad (2.38)$$

Logo, o modelo de Carreau adimensional pode ser expresso como segue:

$$\boldsymbol{\tau}^* = 2(\eta^*[1 + (Wi\dot{\gamma}^*)^2]^{\frac{n-1}{2}})\mathbf{D}^* \quad (2.39)$$

onde Wi é o número adimensional de Weissenberg [Weissenberg, 1947], dado por:

$$Wi = \lambda \frac{\mathbf{u}_\infty}{L} \quad (2.40)$$

Com isso tem-se que um fluido que apresenta o comportamento da equação de Carreau pode ser caracterizado por três parâmetros adimensionais n e Wi , enquanto que $(\eta_0 - \eta_\infty)$ é utilizado na caracterização do número de Reynolds do escoamento.

2.2.2 Fluidos Viscopoplásticos

O fenômeno da viscoplasticidade é caracterizado pela presença de uma tensão inicial de escoamento (*yield stress*), denotada por τ_0 . A definição usual de um fluido viscoplástico é de um material que possui uma tensão limite de escoamento o qual abaixo desta tensão, embora exista uma faixa de tensões em torno desta tensão limite de escoamento aparente em que as propriedades mecânicas mudam drasticamente, o material apresenta pequena e continua deformação quando submetido à tensões.

De acordo com de Souza Mendes e Dutra, 2004, uma definição mais realista para este tipo de material seria a de um material que, quando submetido à baixas tensões de cisalhamento (valores abaixo de τ_0), apresenta comportamento de uma fluido extremamente viscoso, no entanto, para o valor da tensão limite de

escoamento, este fluido experimentaria uma queda brusca em sua viscosidade e passaria a se comportar como um fluido puramente viscoso sendo que, acima da tensão de limite de escoamento aparente, a maioria dos fluidos apresentam um comportamento *Power-law* dependente da taxa de cisalhamento [Barnes, 1999]. Exemplos comuns de comportamento fluido viscoplástico (ver Fig.(2.4)) incluem suspensões de partículas, emulsões, alimentos, sangue e lamas de perfuração, etc.

2.2.2.1 Os Modelos Matemáticos para Fluidos Viscoplásticos

I - Modelo de Herschel-Bulkley

O modelo mais comum no ajuste de dados experimentais de materiais viscoplástico é a equação de Herschel-Bulkley [Bird et al., 1987], que utiliza três parâmetros reológicos – a saber, a tensão limite do material τ_0 , o seu índice de consistência K e o seu índice de Power-law n . Sua expressão da tensão de cisalhamento τ é dada por,

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + K\dot{\gamma}^n & \text{se } \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{se } \tau < \tau_0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Pode-se observar na Eq.(2.41₁), que para $n = 1$, o modelo reduz-se ao fluido de Bingham:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} & \text{se } \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{se } \tau < \tau_0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde μ_p é a chamada viscosidade plástica. As Eqs. (2.41) – (2.42) predizem uma viscosidade infinita no limite quando a taxa de deformação tende a zero. Para índice *Power-law* menor que um, $n < 1$, o modelo de Herschel-Bulkley prediz um material viscoplástico onde sua viscosidade apresenta comportamento pseudoplástico (*shear-thinning*), isso implica em uma dependência não linear da viscosidade com a taxa

de deformação do material, na qual a viscosidade diminui com o aumento da taxa de deformação.

Porém, quando o índice *Power-law* for maior que um, $n > 1$, o material escoar como um fluido dilatante (*shear-thickening*), para o qual a viscosidade aumenta com o aumento da taxa de deformação. Para o modelo de Herschel-Bulkley a função viscosidade aparente é obtida a partir da Eq.(2.41₁),

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1} \quad \text{se } \tau \geq \tau_0 \quad (2.43)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{se } \tau < \tau_0 \quad (2.44)$$

O domínio do escoamento apresenta duas regiões distintas em função do material, pois precisa de uma tensão mínima para começar a escoar; são as regiões escoadas (*yielded regions*), nas quais a tensão é maior que a tensão limite de escoamento, $\tau \geq \tau_0$, e as regiões não-escoadas (*unyielded regions*), nas quais a tensão é menor que a tensão de escoamento, $\tau < \tau_0$, onde o material se comporta como um corpo rígido, ($\dot{\gamma} = 0$). Entre essas duas regiões existe uma superfície de transição onde $\tau = \tau_0$, a chamada superfície de escoamento (*yield surface*).

II - A regularização de Papanastasiou

A fim de utilizar simulações numéricas aplicando elementos finitos, é proposto em Papanastasiou, 1987, uma função de Bingham regularizada, cujo objetivo é de suavizar o termo da tensão limite de escoamento através de uma exponencial na qual em seu argumento possui um parâmetro regularizador m . Quando $m \rightarrow \infty$, a função de Papanastasiou aproxima-se do modelo de Bingham, porém com a grande vantagem de possuir derivada contínua para todo o domínio de $\dot{\gamma}$. É expressa como:

$$\tau = \tau_0[1 - \exp(-m|\dot{\gamma}|)] + K\dot{\gamma}^n \quad (2.45)$$

onde o parâmetro m tem dimensão de tempo.

Computacionalmente, o modelo regularizado de Papanastasiou é de simples implementação, visto tratar-se de uma equação contínua para tensão. No entanto, o modelo não prevê superfícies de escoamento bem definidas ($\tau = \tau_0$), uma vez que há escoamento nas regiões que não atingem τ_0 . Nelas, o material deixa de ser um corpo rígido, para se comportar como um fluido Newtoniano escoando à alta viscosidade. A partir da regularização da equação constitutiva da tensão, pode-se então, definir a equação da viscosidade regularizada:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}}[1 - \exp(-m\dot{\gamma})] + K\dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.46)$$

Porém, com relação a $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ a regularização de Papanastasiou tenderá ao modelo Power-law, caindo nos mesmos problemas deste modelo, ou seja, as suas assíntotas; já, para $n < 1$, quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ a sua viscosidade $\eta \rightarrow \infty$ bem como, quando $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$.

III - Fluido Viscoplastico SMD

Os modelos viscoplasticos clássicos até então discutidos, apresentam dificuldades. No intuito de saná-las de Souza Mendes e Dutra, 2004, propuseram uma nova função viscosidade viscoplastica cujo comportamento qualitativamente é igual às demais funções de viscosidade viscoplasticas, apresentando um platô de viscosidade alto, porém finito para baixas taxas de cisalhamento, seguido de uma queda abrupta da viscosidade em $\tau = \tau_0$, que na sequência apresenta uma região *Power-law* conforme mostra-se na Fig.(2.5). A função SMD, escrita em sua forma para tensão cisalhante, é dada pela seguinte equação,

$$\tau = [1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)](\tau_0 + K \dot{\gamma}^n) \quad (2.47)$$

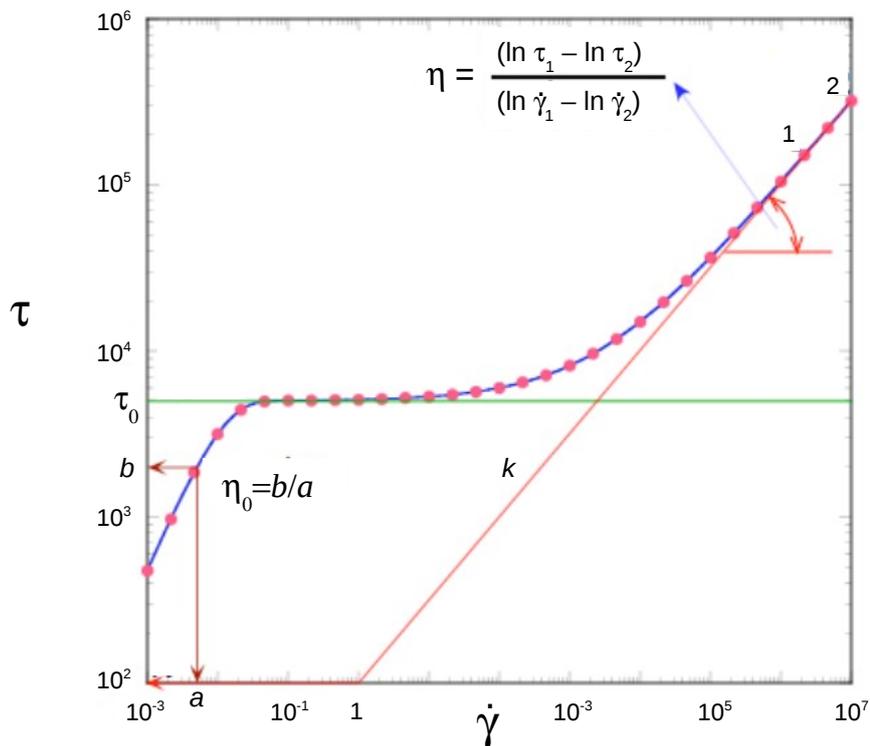


Figura 2.5: Curva de escoamento do modelo SMD.

A viscosidade η_0 é a viscosidade definida para baixas taxas de cisalhamento, e é definida como a relação entre a tensão e a taxa de cisalhamento, tomadas na região onde τ é menor que τ_0 . De acordo com a Fig.(2.5), a tensão limite de escoamento é representada pelo platô que ocorre em τ_0 . O índice n é a inclinação da região *Power-law* no gráfico log-log $\tau \times \dot{\gamma}$.

A principal e mais importante característica deste modelo é que a função viscosidade tende a um valor finito, η_0 , quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ao contrário da a função modificada de Papanastasiou, a qual prevê uma função viscosidade infinita quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. Desta forma, pode-se escrever:

$$\eta(0) = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{((\eta_0/\tau_0) \exp(-\eta_0 \dot{\gamma}/\tau_0))}{1} (\tau_0 + K \dot{\gamma}^n) = \eta_0 \quad (2.48)$$

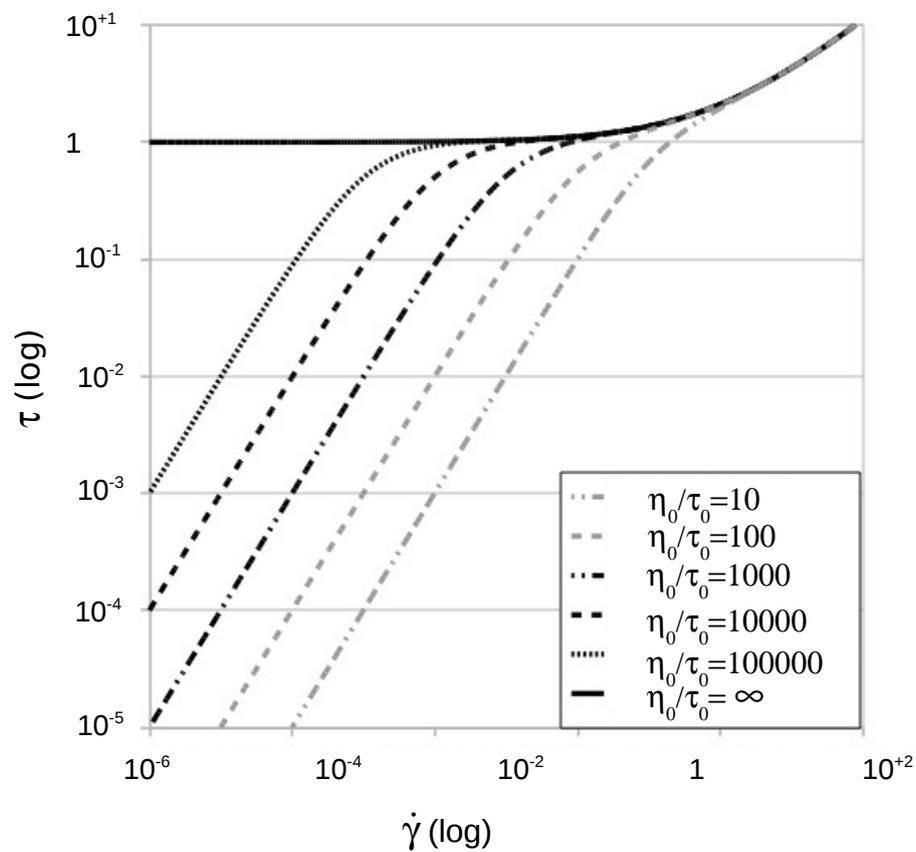


Figura 2.6: Curva de escoamento SMD para relações η_0/τ_0 .

Na Fig.(2.6) apresenta-se as curvas de escoamento SMD para diferentes valores da relação η_0/τ_0 a qual é responsável pela regularização do modelo. Na Fig.(2.7) apresenta-se a função viscosidade SMD análoga à função de Papanastasiou-modificada, quando a relação $\eta_0/\tau_0 \rightarrow \infty$, o modelo de Herschel-Buckley clássico é recuperado.

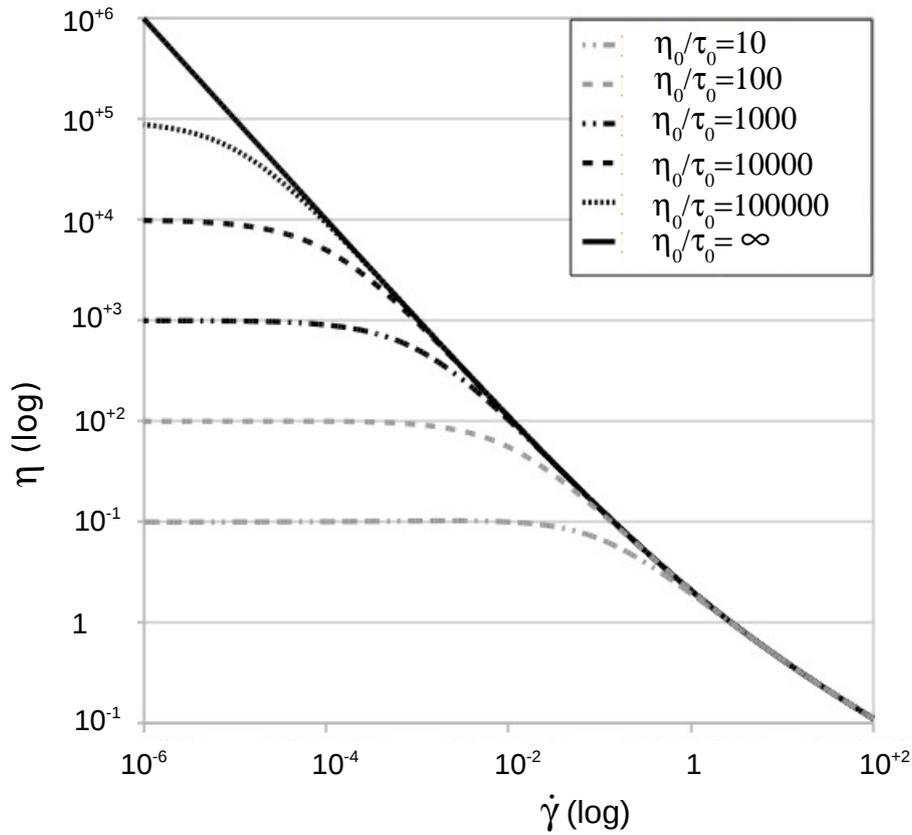


Figura 2.7: A função viscosidade SMD para relações η_0/τ_0 .

Baseando-se no comportamento da função viscosidade SMD, de Souza Mendes et al., 2007, introduz-se uma propriedade reológica adimensional ao modelo. Quando $\tau = \tau_0$, há ocorrência de um salto abrupto de diversas ordens de grandeza na taxa de cisalhamento entre dois valores definidos, pelas Eqs. (2.49) e (2.50), a taxa de cisalhamento limite de escoamento e a taxa de cisalhamento no início da região Power-law, respectivamente.

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_0}{\eta_0} \quad (2.49)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \left(\frac{\tau_0}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.50)$$

Com isso, o número de salto adimensional J fornece uma medida relativa do salto na taxa de cisalhamento que ocorre quando $\tau = \tau_0$, dado como:

$$J = \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \frac{\eta_0 \tau_0^{(n-1)/n}}{K^{1/n}} - 1 \quad (2.51)$$

onde, para $n = 1$, o parâmetro J torna-se independente de τ_0 , ficando reduzido a $J = \eta_0/K - 1$, ou seja, a relação entre η_0 e o índice de consistência K dada apenas por $J + 1$.

2.3 Comportamento de Fluidos Não Newtonianos Dependentes da História do Material

Muitos materiais de interesse industrial apresentam comportamentos os quais não podem ser descritos por uma equação reológica simples, como na Eq.(2.35). Na prática, as viscosidades aparentes podem depender não somente da taxa de cisalhamento, mas também do tempo no qual o fluido é submetido ao cisalhamento.

Quando determinados materiais, como por exemplo, suspensões de bentonita em água, suspensões de lama vermelha (fluxo de resíduos provenientes da indústria de alumínio), pasta de cimento, óleos brutos e determinados produtos alimentares são cisalhados a uma taxa constante, após um longo período de descanso, as suas viscosidades aparentes tornam-se gradualmente menores quando a estrutura interna do material é progressivamente quebrada.

À medida que o número estrutural de ligações capaz de ser discriminado diminui, a taxa de variação da viscosidade aparente com o tempo cai progressivamente até zero. Por outro lado, com a quebra da microestrutura do material, a taxa estrutural de ligações aumentam, de modo que, eventualmente, um estado de equilíbrio dinâmico é alcançado quando as taxas de acumulação e de desagregação são equilibradas. O comportamento fluido dependente da história da cinemática do material divide-se em duas categorias: tixotrópica e reopética, se for reversível.

2.3.1 Materiais com comportamento tixotrópico

Pode-se dizer que um material apresenta tixotropia quando sofrer cisalhamento, sob taxa constante, e a sua viscosidade aparente (ou a correspondente tensão) diminuir com o tempo de cisalhamento, devido à ocorrência de mudanças reversíveis na microestrutura do fluido – como pode-se observar na Fig.(2.8) para uma suspensão de lama vermelha [Nguyen e Uhlherr, 1983]. Normalmente, na ausência do cisalhamento, a estrutura se reconstrói e o sistema volta a adquirir sua viscosidade inicial [Cussot et al , 2002a]. Conforme Correia (2006), a curva de tixotropia é similar à da pseudoplasticidade visto que a viscosidade aparente diminui com o aumento da taxa de deformação. A curva da tixotropia vai diferir da curva da pseudoplasticidade quando a viscosidade aparente não depender apenas da taxa de cisalhamento, mas também do tempo.

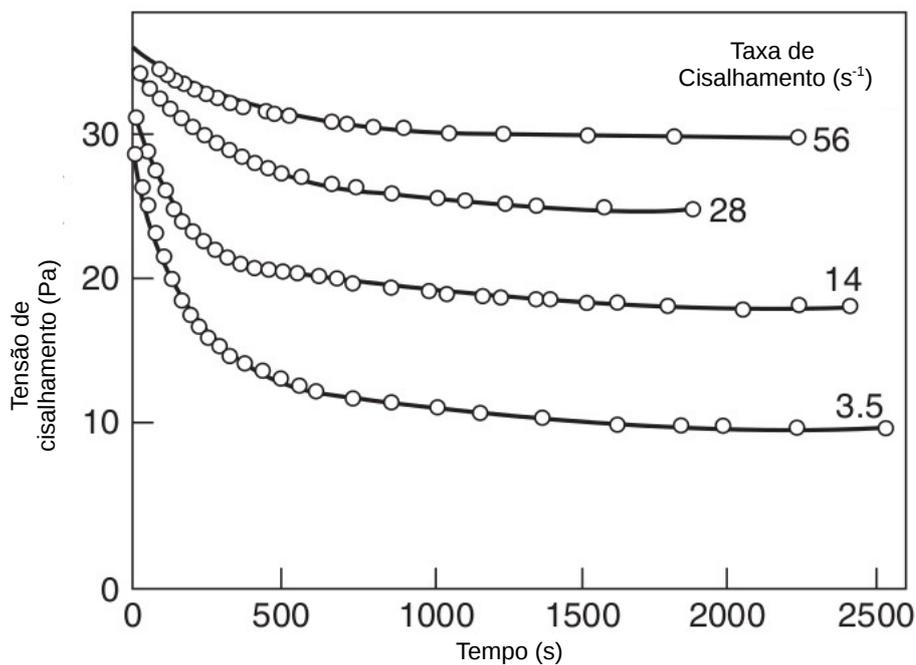


Figura 2.8: Comportamento tixotrópico de uma pasta de cimento [R. P. Chhabra, 2008].

Se a curva de fluxo é medida num ensaio em que a taxa de cisalhamento é progressivamente aumentada a uma taxa constante a partir de zero até um valor máximo e, em seguida, diminui com a mesma velocidade para zero de novo, um ciclo de histerese da forma mostrada na Fig.(2.9) é obtido; a altura, forma e área fechada do laço de histerese dependem da duração do cisalhamento, a taxa de aumento/diminuição da velocidade de cisalhamento e a história passada da cinemática da amostra.

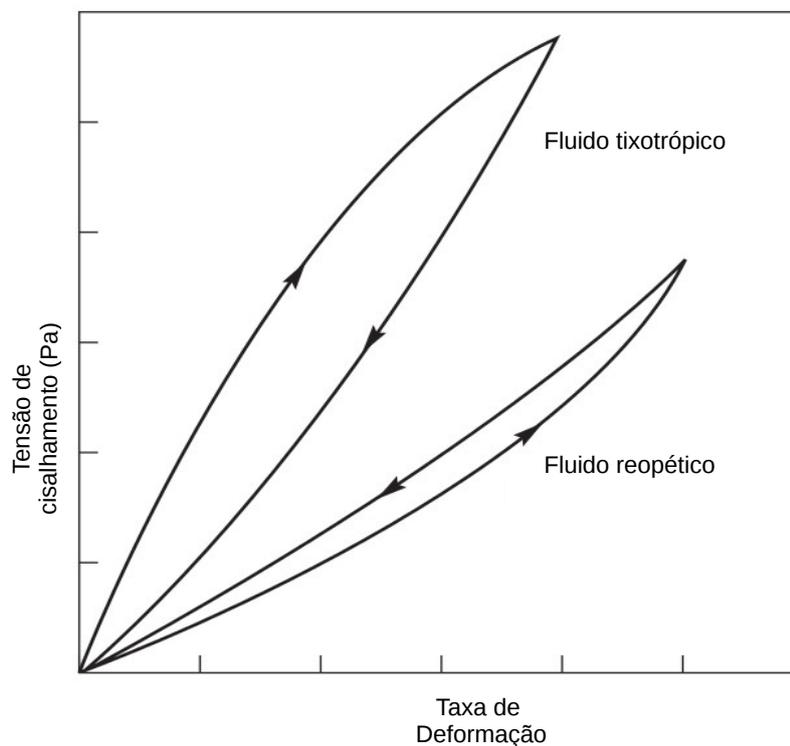


Figura 2.9: Comportamento esquemático da taxa de cisalhamento de um material dependente do tempo – ciclo de histerese [Struble and Ji, 2001].

De um modo geral, quanto maior for a área fechada, mais forte é o comportamento dependente do tempo dos materiais. Assim, nenhum ciclo de histerese é observado para fluidos independentes do tempo, isto é, a área fechada do laço, neste caso, seria zero. A Fig.(2.10) apresenta o ciclo de histerese para uma pasta de cimento a qual demonstra o comportamento tixotrópico.

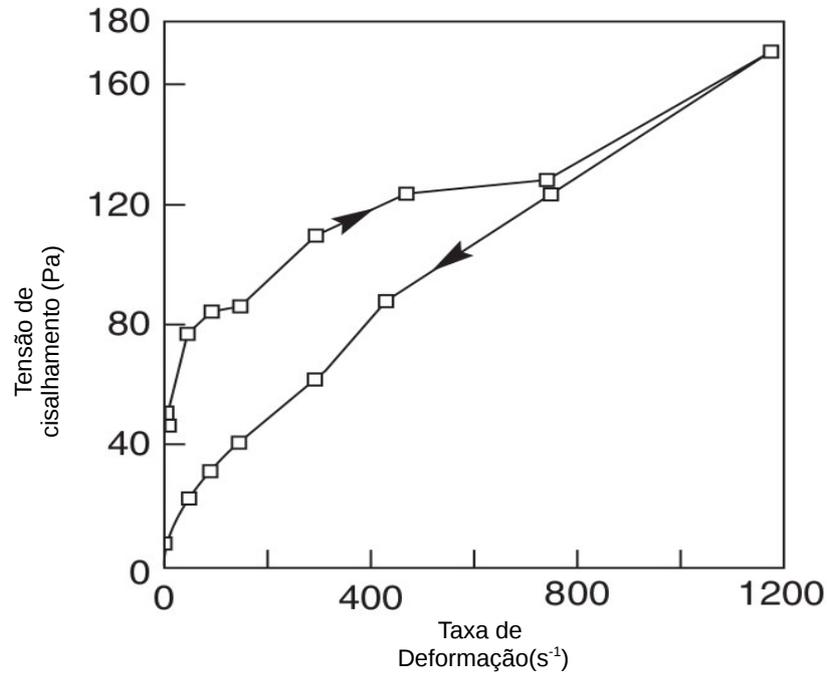


Figura 2.10: Ciclo de histerese de uma pasta de cimento [R. P. Chhabra, 2008].

Além disso, em alguns casos, o colapso da estrutura por cisalhamento é reversível no sentido que, após o cisalhamento ser interrompido, e aguardando-se um período de repouso do material, é possível que o fluido recupere (acumulação de estrutura) o valor inicial de viscosidade, como pode ser visto na Fig.(2.11) para uma loção patenteada. Neste caso, a queda da viscosidade é vista de aproximadamente 80 para 10 Pa s em cerca de 5 a 10 s quando é cisalhado em $\dot{\gamma} = 100\text{s}^{-1}$ e após cessar o cisalhamento, a viscosidade se acumula para quase o valor inicial em cerca de 50 – 60 s.

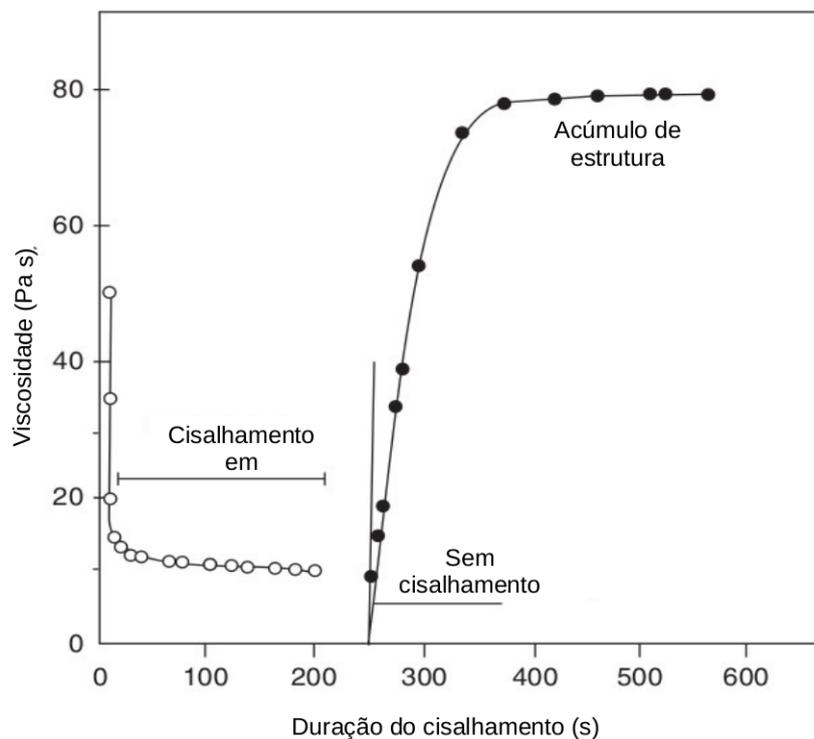


Figura 2.11: Degradação e re-formação da estrutura em uma loção corporal patentada [Schramm, 1994]

O fluido pseudoplástico o qual não possui limite para escoar é fruto do comportamento de um material tixotrópico imediatamente concluído – isto é o material apresenta intervalo de tempo infinitamente rápido para o valor da viscosidade inicial para um valor limite final desta viscosidade, ao passo que o escoamento dilatante resulta do comportamento chamado de reopético o qual também imediatamente concluído.

Os fluidos viscoplásticos poderiam ser tomados com comportamento tixotrópico, uma vez que possuem 'viscosidade infinita' até que a tensão de escoamento seja superada, que é quando essa viscosidade diminui e o material começa a escoar [Cussot et al, 2002b]. Na literatura o comportamento tixotrópico e reopético é discutido em Tanner, 1988, onde é feita a distinção destes comportamentos através

da introdução do termo 'corpo falso'. Este termo refere-se ao verdadeiro material tixotrópico, sob a influência de altas tensões de deformação, romper-se completamente e comportar-se como um líquido, mesmo após cessar a tensão aplicada, até que se atinja o tempo necessário para que o material se reestruture. Os materiais de 'corpo falso' não perdem suas propriedades sólidas completamente e podem exibir uma tensão de escoamento, embora esta possa ser reduzida.

Outros exemplos de materiais que apresentam um comportamento tixotrópico incluem suspensões concentradas, laponite e argila bentonítica, emulsões, fluidos de perfuração, óleos brutos de cera, soluções de proteína e alimentos, etc [Barnes, 1997].

2.3.2 Materiais com comportamento reopético

Os poucos fluidos em que a viscosidade aparente (ou a correspondente tensão de cisalhamento) aumenta com o tempo de cisalhamento são chamados de reopéticos. Mais uma vez, os efeitos de histerese são observados na curva de escoamento, porém para este caso de forma invertida, quando comparado com um material tixotrópico – ver Fig.(2.9).

Num fluido reopético, a estrutura acumula-se por cisalhamento e quebra quando o material encontra-se em repouso. Por exemplo, em Freundlich Juliusburger, 1935, onde estes utilizaram uma pasta de gesso aquoso a 2% em que após a agitação, o material se re-solidificou em 40 min quando colocado em repouso, mas apenas em 20s, se o recipiente é rolado suavemente nas palmas das mãos. Isso indica que o movimento de cisalhamento suave (laminação por exemplo) facilita a acumulação da estrutura mas o movimento mais intenso a destrói.

Desta forma existe um ponto crítico de cisalhamento para além do qual a re-formação da estrutura não é induzida, porém o colapso ocorre. Não é raro a

mesma dispersão mostrar tanto a tixotropia como a reopetia, dependendo da taxa de cisalhamento e/ou da concentração dos sólidos.

Na Fig.(2.12) apresenta-se o surgimento gradual do comportamento reopético em um poliéster saturado a 60°C [Steg e Katz, 1965]. Comportamento semelhante também é relatado com suspensões de oleato de amônio, suspensões coloidais de pentóxido de vanádio, com taxas de cisalhamento moderada [Tanner, 2000], lamas de águas de carvão [Keller e Keller Jr, 1990] e soluções de proteína [Pradipasena e Rha, 1977].

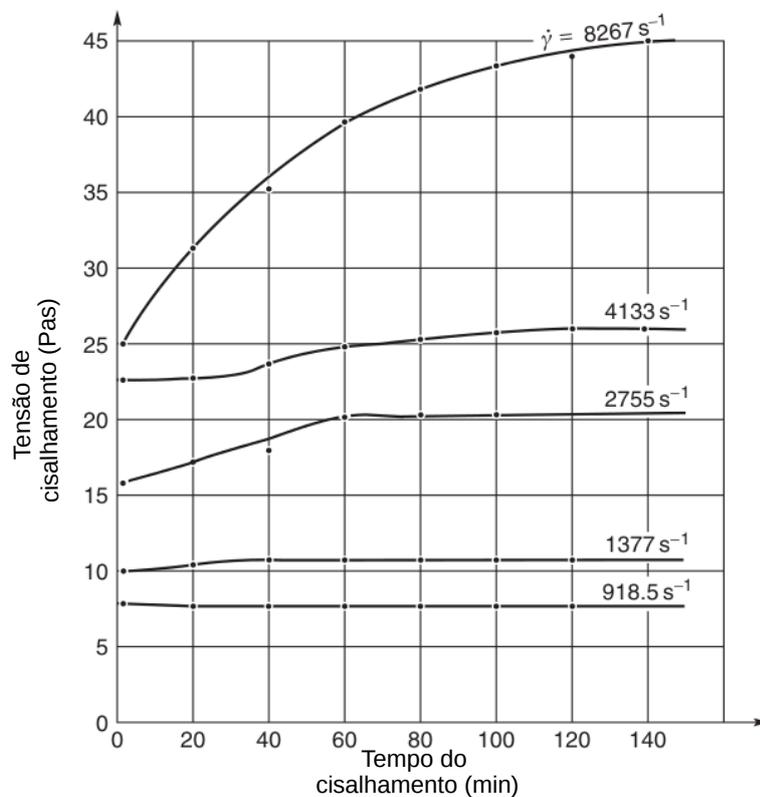


Figura 2.12: Formação do comportamento reopético em um poliéster saturado [Steg e Katz, 1965]

A grande incidência de materiais com o comportamento tixotrópico em vários ambientes industriais [Mewis, 1979; Barnes, 1997;. Mujumdar et al, 2002]

aumentaram significativamente os esforços em estudá-los no intuito de desenvolver relações constitutivas para o comportamento tixotrópico [Mujumdar et al, 2002].

Em termos gerais, a maioria dos modelos disponíveis atualmente são baseados em três abordagens distintas, que são o contínuo, o micro-estrutural e a cinética estrutural. Dentro da abordagem do contínuo, equações constitutivas existentes (como os modelos de Bingham, Herschel-Bulkley e Reiner-Rivlin) são modificadas nas funções de viscosidade, elasticidade, etc, onde estas são reescritas dependentes do tempo.

Porém, não é simplista a relação entre os modelos físicos subjacentes os quais são responsáveis pelas modificações na estrutura do material quando este é cisalhado e também para a posterior formação da estrutura do material quando este é colocado em repouso, esse último trata-se do caso reopético reversível.

Os modelos baseados na análise da micro-estrutura necessitam de um conhecimento detalhado das forças inter-partículas raramente disponíveis para sistemas reais encontrados em aplicações de engenharia, limitando seriamente a utilidade dessa classe de modelos. Os modelos baseados em considerações cinéticas estruturais contam com o valor de um parâmetro escalar, λ , que varia de zero (o que corresponde a estrutura completamente colapsada) para a unidade (denotando o outro extremo de uma completa formação da estrutura).

Esta família de modelos consiste em duas equações: a primeira equação conecta a tensão de cisalhamento à taxa de deformação para valores fixos de λ . A segunda equação descreve a variação com o tempo de λ , semelhante a uma reação química reversível. Discussões mais detalhadas sobre os méritos e deméritos de tais abordagens estão disponíveis na literatura [Mujumdar et al, 2002; Dullaert e Mewis, 2005, 2006; de Souza Mendes e Thompson, 2012].

Apesar dos recentes avanços dos métodos de previsão e na compreensão geral, um tratamento unificado para a tixotropia ainda não está formulada. Na

verdade, devido à complexidade do assunto, as suposições feitas apenas por questões de simplicidade, em vez de baseadas em argumentos físicos, abundam nos modelos atualmente disponíveis na literatura.

Como resultado, a capacidade preditiva desses modelos é bastante restrita. Em de Souza Mendes, 2011, é proposta uma nova abordagem para a modelagem mecânica de materiais viscoplásticos que possuem comportamento tixotrópico. O modelo mecânico emprega uma equação viscoelástica para o campo de tensão e uma equação evolutiva para o parâmetro de estrutura.

Além da curva de escoamento do material, ele é capaz de prever escoamentos reométricos transientes, como mudanças súbitas da taxa de cisalhamento, devido à construção e/ou destruição da estrutura do material, alterações abruptas no campo de tensão, dado as bifurcações da viscosidade, e testes oscilatórios. No mais, o modelo é indiferente ao referencial e aplicável a escoamentos complexos.

Visto o modelo elasto-viscoplástico tixotrópico empregado neste trabalho basear-se em uma equação viscoelástica de tensão - uma versão modificada da equação de Oldroyd-B - cuja viscosidade é descrita por uma função viscosidade viscoplástica regularizada - a saber, a função viscosidade SMD proposta em de Souza Mendes e Dutra, 2004 - faz-se por bem introduzir uma breve revisão, além do comportamento puramente viscoplástico o qual já fora apresentado, do comportamento viscoelástico.

2.3.3 Fluidos Viscoelásticos

Os materiais viscoelásticos apresentam comportamento reológico de sofrerem, simultaneamente, deformações elásticas e viscosas. As deformações elásticas são reversíveis sofridas por um corpo sob tensão. Porém, ao cessar essa tensão o corpo retorna a sua configuração de forma e volume inicial. A energia de deformação

é recuperada quando a tensão aplicada ao material cessa e este é o comportamento típico de muitos sólidos.

Considerando-se a deformação proporcional à tensão aplicada – A chamada Lei de Hooke, a razão entre tensão e deformação é dada pelo módulo de elasticidade ou módulo de Young. As deformações viscosas são deformações contínuas e irreversíveis sofridas pelo material enquanto submetido a uma tensão de cisalhamento. A propriedade que relaciona à taxa de deformação do corpo ao cisalhamento chama-se viscosidade. Um material viscoso ideal não é capaz de sustentar uma tensão cisalhante, dissipando a energia de deformação sob a forma de calor, como é o caso de muitos fluidos. A descrição do comportamento viscoelástico dos materiais é feita através de equações diferenciais que combinam três termos, a saber, a deformação elástica, a taxa de deformação viscosa e um termo inercial de aceleração.

A tensão total é dada pela soma das tensões parciais de cada termo e o desenvolvimento teórico da viscoelasticidade é feito apartir da combinação em série ou em paralelo dos modelos idealizados.

Fluidos viscoelásticos:

Os polímeros são materiais que apresentam comportamento viscoelástico com ampla aplicação: plásticos, tinta e fluido de perfuração na indústria do petróleo.

Sólidos viscoelásticos:

Algumas borrachas, silicone e argilas apresentam este comportamento.

2.3.3.1 Equação Constitutiva de Maxwell Convectado Superior (UCM)

Para fluidos do tipo viscoelástico, o modelo diferencial mais simples para ser usado em sua modelagem é o chamado modelo constitutivo de Maxwell Convectado Superior (UCM), usado amplamente por sua facilidade de implementação

numérica. Basicamente o modelo consiste na combinação em série de elementos que representam um comportamento reológico ideal que são uma deformação elástica Hookeana e um escoamento viscoso Newtoniano, conforme a Fig. (2.13),

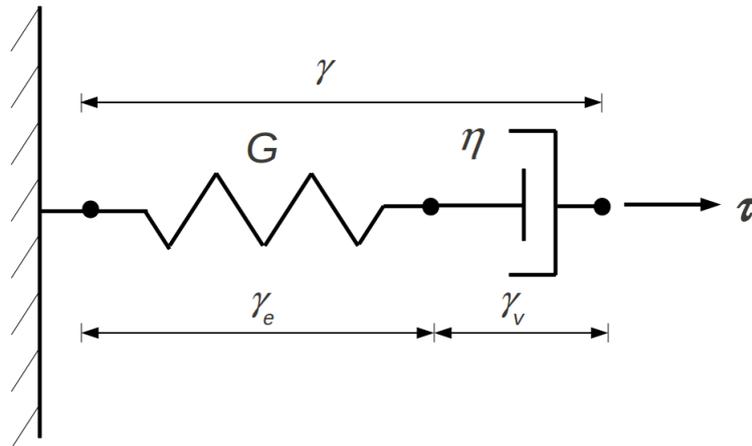


Figura 2.13: Representação esquemática do modelo de Maxwell

Segundo a Fig.(2.13) o elemento Hookeano pode ser representado fisicamente por uma mola e matematicamente pela seguinte expressão:

$$\tau_H = G\gamma_H \quad (2.52)$$

onde τ_H é a magnitude da tensão Hookiana, G é o módulo de elasticidade e γ_H é a deformação elástica. A representação do elemento Newtoniano é dada fisicamente por um amortecedor e matematicamente por,

$$\tau_N = \eta\dot{\gamma}_N \quad (2.53)$$

Na Eq. (2.53), a viscosidade do fluido é constante e $\dot{\gamma}_N$ é a taxa de deformação viscosa. Para o modelo de Maxwell, a tensão é igual em ambos os elementos, e a

deformação total é dada pela soma das deformações de ambos elementos,

$$\tau = \tau_H = \tau_N \quad (2.54)$$

$$\gamma = \gamma_H + \gamma_N \quad (2.55)$$

Diferenciando a Eq.(2.55) com relação ao tempo, obtém-se,

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}_H}{G} + \frac{\tau_N}{\eta} \quad (2.56)$$

Da Eq.(2.55), tem-se que a tensão é igual em ambos os elementos, daí pode-se concluir que,

$$\tau + \frac{\eta}{G} \dot{\tau} = \eta \dot{\gamma} \quad (2.57)$$

A razão entre a viscosidade e o módulo de elasticidade $\frac{\eta}{G}$ que emerge da Eq.(2.57) é chamada de tempo de relaxação do material, θ_1 , e tem dimensão de tempo. Desta forma a Eq.(2.57) é indiferente ao referencial e o modelo de Maxwell convectado superior para regime permanente é expresso por:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1 \check{\boldsymbol{\tau}} = \eta \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (2.58)$$

com a derivada $\check{\boldsymbol{\tau}}$ dada por

$$\check{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + (\nabla \boldsymbol{\tau}) \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} (\nabla \mathbf{u})^T \quad (2.59)$$

A tensão $\boldsymbol{\tau}$, conforme a Eq.(2.58), vai depender da taxa de deformação $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ e de uma variação no tempo e devido a isso o modelo de Maxwell ilustra o comportamento reológico de um fluido viscoelástico. Em geral, para uma história de tensões constantes, ou seja, quando $\check{\boldsymbol{\tau}} = 0$, a Eq.(2.58) reduz-se ao modelo Newtoniano,

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (2.60)$$

2.3.3.2 Equação Constitutiva de Oldroyd-B

Se combinado em paralelo o modelo de Maxwell convectado superior com o modelo Newtoniano, tem-se como resultado uma equação diferencial do tipo Jeffreys, mais particularmente no modelo Oldroyd-B. O mesmo abrange os casos em que um fluido viscoelástico, obedecendo a relação de Maxwell, é misturado com um fluido regulado pela lei de Newton, correspondendo à situação em que um polímero viscoelástico com viscosidade η_e é diluído em um solvente Newtoniano viscoso com viscosidade η_s . A equação constitutiva de Oldroyd-B é definida como:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} + \theta_1 \ddot{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta(\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \theta_2 \check{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) \quad (2.61)$$

onde θ_2 é o tempo de retardo do fluido, maior ou igual a zero e menor que o tempo de relaxação θ_1 , e $\check{\mathbf{D}}$ a derivada convectada superior do tensor taxa de deformação,

$$\check{\mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{D})\mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})\mathbf{D} - \mathbf{D}(\nabla \mathbf{u})^T \quad (2.62)$$

O análogo mecânico para o modelo de Oldroyd-B é equivalente a um sistema com um amortecedor e uma mola ligados em série, onde este sistema em série é conectado em paralelo com um amortecedor, conforme ilustrado na Fig.(2.14).

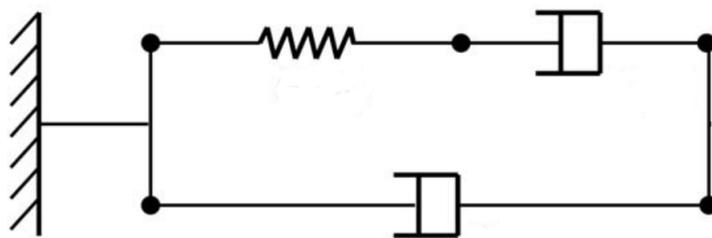


Figura 2.14: Análogo mecânico para o modelo de Oldroyd-B

A viscosidade η é dada pela soma da viscosidade do solvente Newtoniano η_s com a viscosidade do polímero elástico η_e ;

$$\eta = \eta_s + \eta_e \quad (2.63)$$

Além disso, as relações para θ_1 e θ_2 são dadas como:

$$\theta_1 = \frac{\eta_e}{G} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_e} \theta_1 \quad (2.64)$$

Por fim, o tensor extra de tensão total $\boldsymbol{\tau}$ pode ser expresso como a soma da contribuição do solvente Newtoniano, $\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D}(\mathbf{u})$, com a parcela viscoelástica, $\boldsymbol{\tau}_e$, ou seja, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_e$, onde $\boldsymbol{\tau}_e$ satisfaz a equação constitutiva de Maxwell convectado superior,

$$\boldsymbol{\tau}_e + \theta_1 \check{\boldsymbol{\tau}}_e = 2\eta_e \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (2.65)$$

3 MODELAGEM MECÂNICA DE ESCOAMENTOS DE MATERIAIS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS COM COMPORTAMENTO TIXOTRÓPICO

3.1 Modelagem Mecânica

3.1.1 As Equações de Conservação

As equações de conservação utilizadas são as equações da continuidade (A) e do movimento (A), respectivamente. As grandezas e operadores diferenciais nestas equações são descritos espacialmente, ou seja, são funções da posição espacial \mathbf{x} que uma partícula fluida ocupa ao longo de sua trajetória, para um dado instante de tempo arbitrário t . Por simplicidade e clareza, porém sem perda de generalidade, esta descrição é omitida nas equações apresentadas ao longo deste Capítulo. Desta forma, considera-se um domínio aberto $\Omega \in \mathcal{R}^2$, delimitado por um limite poligonal Γ em que um fluido incompressível escoar sem efeitos de inércia e em regime permanente:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.1)$$

$$\mathbf{0} = \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Omega \quad (3.2)$$

onde \mathbf{T} é o tensor total de tensões e \mathbf{F} é o tensor das forças que atuam no corpo. O campo total de tensões, para um fluido incompressível, pode ser escrito como um tensor isotrópico arbitrário decomposto da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} \quad (3.3)$$

onde p é uma pressão média definida como $p = -\frac{1}{3}\operatorname{tr}\tau$ e \mathbf{I} é o tensor unitário. Considera-se o fluido escoando, pode-se dizer que a tensão total definida pela Eq.(3.3) é dada pela soma da pressão média (p) com uma componente viscosa:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.4)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor extra de tensão.

Substitui-se a Eq.(3.4) na equação do movimento Eq.(3.2) e considera-se que as forças que atuam no corpo é o produto entre a densidade ρ e o vetor gravitacional \mathbf{g} , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \text{div}(-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) + \rho\mathbf{g} && \text{em } \Omega \\ \mathbf{0} &= \text{div}(-p\mathbf{I}) + \text{div}(\boldsymbol{\tau}) + \rho\mathbf{g} && \text{em } \Omega \\ \mathbf{0} &= -\nabla p + \text{div}\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{g} && \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1.2 O Modelo Constitutivo Aplicado

O modelo constitutivo aplicado nesta tese é o modelo recentemente proposto em de Souza Mendes, 2011, para materiais estruturados, o qual é capaz de prever o comportamento tixotrópico, viscoelástico e de cedência dos materiais (*yield*). Este modelo é composto por duas equações diferenciais, sendo uma equação viscoelástica para o campo de tensão e outra evolutiva para o parâmetro de estrutura do material.

No caso de um modelo que se aplique a materiais tixotrópicos, além do uso do análogo mecânico, Fig.(3.1), na construção do modelo, faz-se necessária a premissa da existência de uma microestrutura a qual o fenômeno possa ser descrito por um único parâmetro escalar [de Souza Mendes, 2011].

Desta forma, na literatura o parâmetro escalar chama-se λ [de Souza Mendes e Dutra, 2004; de Souza Mendes 2007, 2009 e 2011 e Fonseca et al. 2013] e, por definição, varia de 0 a 1, sendo que quando este parâmetro assume valor igual a 0 tem-se que o material está em um estado completamente desestruturado e quando igual a 1, completamente estruturado. Desta forma, este análogo mecânico anteri-

ormente apresentado corresponde ao modelo constitutivo viscoelástico de Oldroyd-B exceto que neste modelo tanto o módulo de elasticidade quanto a viscosidade estrutural são tomados como funções do parâmetro de estrutura λ .

Assim, a formulação para a equação que determina o campo de tensão é dada por uma equação diferencial para a tensão τ a partir da Fig.3.1 onde, $G_s(\lambda)$ é o módulo de elasticidade da microestrutura, $\eta_s(\lambda)$ é a viscosidade estrutural – cuja função descreve a parcela puramente viscosa da microestrutura do material – e η_∞ é a viscosidade para o estado totalmente desestruturado do material. Ainda estão relacionandas a este análogo a deformação elástica γ_e , quando a microestrutura é submetida a uma tensão τ , a deformação viscosa γ_v e a deformação total γ que é a soma de γ_e e γ_v .

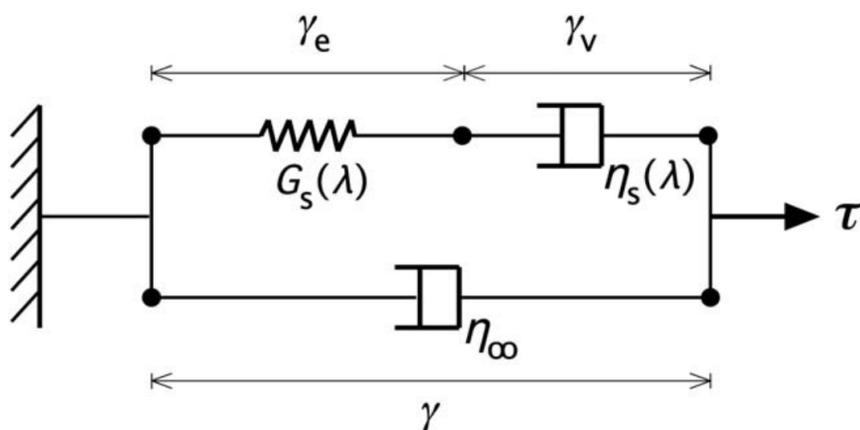


Figura 3.1: Análogo mecânico para o modelo de Jeffreys [de Souza Mendes, 2011]

Acrescenta-se que, além da curva de escoamento do material – conforme apresentado em de Souza Mendes 2009, este modelo é capaz de prever escoamentos reométricos transientes, como mudanças súbitas da taxa de cisalhamento, devido à construção e/ou destruição da estrutura do material, alterações abruptas no campo de tensão devido as bifurcações da viscosidade e testes oscilatórios. No mais, o modelo é indiferente ao referencial e aplicável a escoamentos complexos.

O tensor extra de tensão ($\boldsymbol{\tau}$) que emerge na Eq.(2.61) é governado pela equação Oldroyd-B modificada de modo que os tempos de relaxação $\theta_1(\lambda)$ e retardo $\theta_2(\lambda)$ do material e a viscosidade estrutural $\eta_s(\lambda)$ são funções do nível de estruturação da microestrutura do material (λ) [de Souza Mendes, 2011] dada como segue,

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1(\lambda)\dot{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta_s(\lambda)(\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \theta_2(\lambda)\check{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) \quad \text{em } \Omega \quad (3.6)$$

onde, $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ é o tensor de deformação, e a derivada convectada superior do tensor extra de tensão viscoelástico ($\dot{\boldsymbol{\tau}}$), bem como a derivada convectada do tensor de deformação ($\check{\mathbf{D}}$), são regidos pelas Eqs. (2.59)-(2.62), respectivamente.

O tempo de relaxação do material θ_1 e o tempo de retardo θ_2 , são descritos, respectivamente, pelas funções do parâmetro de estrutura (λ),

$$\theta_1(\lambda) = \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_s(\lambda)}\right) \frac{\eta_s(\lambda)}{G_s(\lambda)} \quad (3.7)$$

$$\theta_2(\lambda) = \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_s(\lambda)}\right) \frac{\eta_\infty}{G_s(\lambda)} \quad (3.8)$$

onde, a viscosidade estrutural $\eta_s(\lambda)$ e o módulo elástico estrutural $G_s(\lambda)$ são expressos, respectivamente por

$$\eta_s(\lambda) = \left(\frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right)^\lambda \eta_\infty \quad (3.9)$$

$$G_s(\lambda) = G_0 \exp\left[m\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\right] \quad (3.10)$$

nas quais G_0 e η_0 são, respectivamente, o módulo de elasticidade e a viscosidade para o material totalmente estruturado ($\lambda = 1$) e η_∞ a viscosidade para um material totalmente colapsado ($\lambda = 0$); m é uma constante adimensional positiva que regula a sensibilidade do nível de estruturação, G_s .

O modelo vale-se de duas equações diferenciais, uma viscoelástica para o campo de tensão e outra evolutiva para o parâmetro de estrutura do material. A equação de evolutiva é expressa pela derivada material Lagrangeana do parâmetro de estrutura do material, a qual, para os escoamentos permanentes Eulerianos considerados nesta Tese, assume a seguinte expressão:

$$\dot{\lambda} = \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda = \frac{1}{t_{eq}} \left[(1 - \lambda) - (1 - \lambda_{eq}(T')) \left(\frac{\lambda}{\lambda_{eq}(T')} \right) \right] \quad \text{em } \Omega \quad (3.11)$$

na qual $\dot{\lambda}$ é a derivada material de λ em relação ao tempo, λ_{eq} é o parâmetro de estrutura para a microestrutura em equilíbrio e T' é a intensidade do tensor total deviatório definido por $\mathbf{T}' \equiv \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{T})\mathbf{I} = \mathbf{T} + p\mathbf{I}$, onde a parcela deviatória do tensor total é dado por:

$$T' \equiv \left[\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{T}'^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} \text{tr} \left(\boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{I} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

Do ponto de vista Euleriano, o lado esquerdo da Eq.(3.11) representa o transporte convectivo do nível de estrutura do material e o seu lado direito a taxa líquida de construção e colapso de sua microestrutura.

O parâmetro t_{eq} que surge na Eq.(3.11) é o tempo (característico) que a microestrutura leva para passar de um estado de equilíbrio ao outro. Note que da Eq.(3.11), se o tempo de equilíbrio (t_{eq}) é uma escala de tempo para o processo de construção da microestrutura, não o é para seu processo de colapso. Em outras palavras, o que aciona a quebra da microestrutura é o nível de tensão τ , a qual uma vez destruída levará t_{eq} segundos para se reconstruir caso o novo nível de tensão alcançado permaneça invariante.

Comentários :

I. Da Eq.(3.11), tem-se importantes implicações na física do fenômeno tixotrópico.

Quando t_{eq} tende a zero, tem-se que da Eq.(3.11) que $\dot{\lambda} \rightarrow \infty$. Este valor assintótico representa o comportamento de um material elasto-viscoplástico sem efeito tixotrópico, visto sua microestrutura mudar instantaneamente de um estado de equilíbrio a outro quando o nível de tensão não é alterado.

II. Quando tem-se que as taxas de construção e colapso da microestrutura são idênticas – ou seja, quando esta atinge um estado de equilíbrio para um dado nível de tensão – obtém-se, da Eq.(3.11), que $\dot{\lambda} \rightarrow 0$. Em outras palavras, a microestrutura não mais altera seu equilíbrio a menos que o nível τ seja alterado novamente.

III. Para os valores assintóticos do parâmetro de estrutura – a saber, $\lambda \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow 1$ – têm-se influência direta nos valores tanto da viscosidade e módulo de elasticidade estruturais, como nas próprias definições dos tempos de relaxação e retardo, θ_1 e θ_2 . Para o caso de um material totalmente estruturado ($\lambda \rightarrow 1$) as Eqs.(3.9) e (3.10) assumem os valores

$$\eta_s(\lambda \rightarrow 1) \rightarrow \eta_0 \quad (3.13)$$

$$G_s(\lambda \rightarrow 1) \rightarrow G_0 \quad (3.14)$$

IV. De forma análoga, pode-se dizer que quando o material está totalmente desestruturado, ($\lambda \rightarrow 0$), sua viscosidade (Eq.(3.9)) e módulo de elasticidade (Eq.3.10)) valem

$$\eta_s(\lambda \rightarrow 0) \rightarrow \eta_\infty \quad (3.15)$$

$$G_s(\lambda \rightarrow 0) \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

Substitui-se, agora, os valores assintóticos nas definições dos tempos de relaxação e retardo (Eqs (3.7)–(3.8)) e obtém-se os respectivos valores assintóticos para o material totalmente estruturado.

$$\begin{aligned}\theta_1(\lambda \rightarrow 1) &= \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_s(\lambda \rightarrow 1)}\right) \frac{\eta_s(\lambda \rightarrow 1)}{G_s(\lambda \rightarrow 1)} = \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_0}\right) \frac{\eta_0}{G_0} \\ &= \left(\frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\eta_0}\right) \frac{\eta_0}{G_0} = \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{G_0} \quad (3.17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_2(\lambda \rightarrow 1) &= \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_s(\lambda \rightarrow 1)}\right) \frac{\eta_\infty}{G_s(\lambda \rightarrow 1)} \\ &= \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_0}\right) \frac{\eta_\infty}{G_0} = \theta_1 \frac{\eta_\infty}{\eta_0} \quad (3.18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1(\lambda \rightarrow 0) &= \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_s(\lambda \rightarrow 0)}\right) \frac{\eta_s(\lambda \rightarrow 0)}{G_s(\lambda \rightarrow 0)} \\ &= \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_\infty}\right) \frac{\eta_\infty}{\infty} = 0 \quad (3.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_2(\lambda \rightarrow 0) &= \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_s(\lambda \rightarrow 0)}\right) \frac{\eta_\infty}{G_s(\lambda \rightarrow 0)} \\ &= \left(1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_\infty}\right) \frac{\eta_\infty}{\infty} = 0 \quad (3.20)\end{aligned}$$

Apartir das Eqs.(3.19) e (3.20) a equação viscoelástica de Oldroyd-B (Eq.(3.6)) reduz-se ao modelo puramente viscoso viscoplástico regularizado, pois seus termos elásticos associados as derivadas convectadas superiores dos tensores $\check{\boldsymbol{\tau}}$ e $\check{\mathbf{D}}$ tornam-se nulos.

Do comentário (II), quando $\dot{\lambda} = 0$, as taxas de construção e destruição tornam-se iguais e o parâmetro de estrutura assume um valor de equilíbrio $\lambda = \lambda_{eq}$. Assim, o parâmetro de estrutura em equilíbrio (λ_{eq}) é uma função do nível da tensão τ e pode-se obtê-lo a partir da aplicação do logaritmo em ambos lados da Eq.(3.9),

$$\ln\left(\frac{\eta_s}{\eta_\infty}\right) = \ln\left(\frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right)^\lambda$$

$$\ln \eta_s - \ln \eta_\infty = \lambda(\ln \eta_0 - \ln \eta_\infty)$$

$$\lambda_{eq}(\tau) = \frac{\ln \eta_{eq}(\tau) - \ln \eta_\infty}{\ln \eta_0 - \ln \eta_\infty} \quad (3.21)$$

Na Eq.(3.21), $\eta_{eq}(\tau)$ é a função viscosidade viscoplástica em equilíbrio dada pela curva de escoamento do material, apresentada na Fig.3.2, avaliada no nível de tensão (τ).

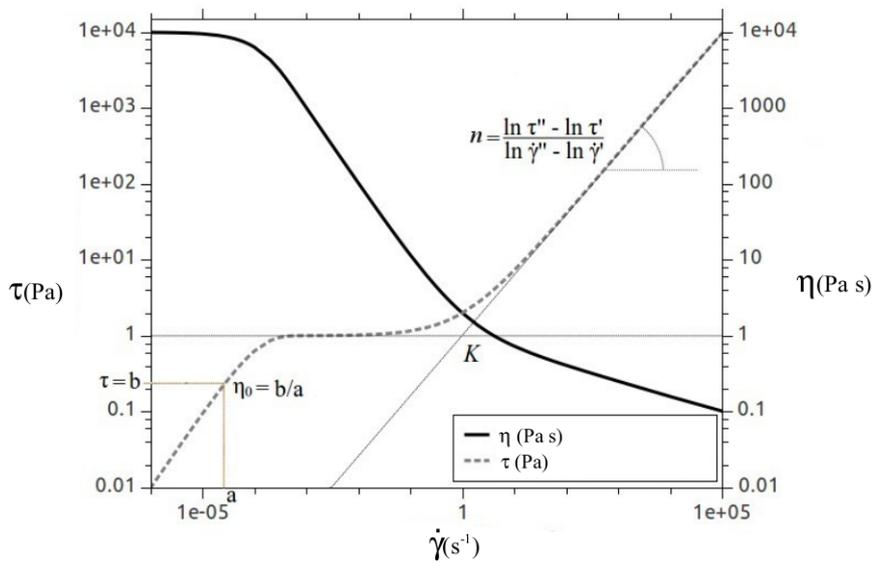


Figura 3.2: Curva de escoamento do material.

Entretanto, em escoamentos complexos como os *entry flows* de expansões abruptas investigados numericamente neste Tese, as partículas mecânicas não mais percorrem trajetórias com $\dot{\lambda} = 0$, ou seja, elas cruzam regiões nas quais, para um dado nível de tensão, suas taxas de construção e colapso deixam de ser iguais, isto é $\dot{\lambda} \neq 0$. Portanto, como $\lambda \neq \lambda_{eq}$ bem como $\dot{\gamma} \neq \dot{\gamma}_{eq}$, não pode-se mais utilizar a curva de escoamento para obtê-los. Da curva de escoamento tem-se, apenas, o valor de $\dot{\gamma}_{eq}$ associado ao nível de tensão τ – ver Fig.3.2.

Entretanto, as curvas de escoamento não são usualmente função de τ , mas sim de $\dot{\gamma}$ o que implica em uma solução iterativa – utilizou-se nas simulações numéricas desta Tese o Método de Newton:

$$\tau = \eta_{eq}(\dot{\gamma}_{eq})\dot{\gamma}_{eq} \quad (3.22)$$

Resolve-se, então para $\dot{\gamma}_{eq}$,

$$\dot{\gamma}_{eq} = \frac{\tau}{\eta_{eq}(\dot{\gamma}_{eq})} \quad (3.23)$$

Obten-se a raiz $\dot{\gamma}_{eq}$ da Eq.(3.23) e determina-se η_{eq} aplicando a lei de viscosidade a baixo,

$$\eta_{eq}(\tau) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}_{eq}} \quad (3.24)$$

De posse do valor de $\eta_{eq}(\tau)$ monta-se, para escoamentos complexos, o termo da taxa de destruição da Eq.(3.11), a partir do valor atrator de $\lambda_{eq}(\tau)$ da Eq.(3.21).

A função viscoplástica aplicada na Eq.(3.23) é a equação regularizada para materiais viscoplásticos proposta em de Souza Mendes, 2009.

$$\eta_{eq}(\dot{\gamma}_{eq}) = \left[1 - \exp\left(\frac{-\eta_0\dot{\gamma}_{eq}}{\tau_y}\right) \right] \left[\frac{\tau_y}{\dot{\gamma}_{eq}} + K\dot{\gamma}_{eq}^{n-1} \right] + \eta_\infty \quad (3.25)$$

Esta equação, inicialmente proposta em de Souza Mendes e Dutra, 2004, sem a suposição que, para altas taxas de deformação, a viscosidade viscoplástica assume um valor constante η_∞ , é adequada para descrever materiais com limite de escoamento aparente τ_y , ou seja, abaixo de τ_y o material escoava muito lentamente com viscosidade η_0 elevada, porém finita. Na curva de escoamento ilustrada na Fig.3.2, $\dot{\gamma}_0$ e $\dot{\gamma}_1$ marcam, respectivamente, o início do colapso da microestrutura do material e o início de sua região *power law*,

$$\dot{\gamma}_0 \equiv \frac{\tau_y}{\eta_0} \quad \dot{\gamma}_1 \equiv \left(\frac{\tau_y}{K} \right)^{\frac{1}{n}}$$

nas quais K representa o índice de consistência do material e n o seu coeficiente *Power law*.

3.1.2.1 Esquema EVSS – Elastic Viscous Stress Split

No código de elementos finitos aplicado nesta Tese, fez-se usono esquema EVSS, a fim de obter melhor convergência nas simulações numéricas. Com base na Fig.(3.1)– o tensor de tensão extra ($\boldsymbol{\tau}$)é dividido em uma parcela puramente viscosa newtoniana, denominada $\boldsymbol{\tau}_2$ e uma parcela viscoelástica denominada $\boldsymbol{\tau}_1$ onde, esta última é descrita pelo modelo de Maxwell convectado superior (UCM), este é o chamado esquema EVSS.

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2$$

A parcela viscosa newtoniana, definida por $\boldsymbol{\tau}_2 = 2\eta_\infty \mathbf{D}(\mathbf{u})$, é introduzida na equação do movimento de forma a deixá-la coerciva, visto que, da forma como é definida na Eq.(3.6), ela contém apenas operadores diferenciais de primeira ordem. Já sua parcela viscoelástica, que passa a ser tratada apenas por ($\boldsymbol{\tau}$), segue , portanto, a equação de UCM.

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_1 \check{\boldsymbol{\tau}}_1 = 2\eta_s \mathbf{D} \tag{3.26}$$

De acordo com o análogo mecânico, elevados valores de η_s combinados com um valores finitos de G_s implicam o comportamento de um sólido viscoelástico, com um tempo de retardo igual a η_s/G_s ; por outro lado, elevados valores de G_s combinados com valores finitos de η_s implica o comportamento de um fluido puramente viscoso ($\eta_v \equiv \eta_s + \eta_\infty$).

Também da Fig.(3.1) conclui-se que:

$$\gamma_e + \gamma_s = \gamma \quad (3.27)$$

ou ainda as suas derivadas materiais,

$$\dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_s = \dot{\gamma} \quad (3.28)$$

Enfatiza-se que a deformação elástica é relacionada a τ – que é a magnitude do tensor extra de tensão $\boldsymbol{\tau}$, dada por:

$$\tau = G_s(\gamma_e - \gamma_{e,n}) \quad (3.29)$$

onde, $\gamma_{e,n}$ é o estado de configuração natural do material. Porém, por hipótese $\gamma_{e,n}$ é devido exclusivamente a mudanças na microestrutura do material, ou seja, $\dot{\lambda} = 0$ implicando em $G_s = 0$ e $\gamma_{e,n} = 0$. Logo, as mudanças de γ_e são unicamente devido as mudanças de τ e desta forma tem-se:

$$\gamma_e = \frac{\tau}{G_s} \quad (3.30)$$

e aplicando, portanto, o esquema *EVSS* ao tensor de tensão extra, reescreve-se as equações de conservação (Eq. 3.5) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{0} &= -\nabla p + \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2) + \rho \mathbf{g} & \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (3.31)$$

Substitui-se o valor de $\boldsymbol{\tau}_2 = 2\eta_\infty \mathbf{D}(\mathbf{u})$ e denotando a parcela viscoelástica do tensor $\boldsymbol{\tau}$ apenas por $\boldsymbol{\tau}$, reescreve-se o conjunto de equações que governam o problema, ou

seja, as equações de conservação, equação viscoelástica de Oldroyd-B e a equação de evolução do parâmetro de estrutura do material:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.32)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + 2\eta_\infty \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \quad \text{em } \Omega \quad (3.33)$$

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_s(\lambda) \dot{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta_s(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad \text{em } \Omega \quad (3.34)$$

$$\dot{\lambda} = \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda = t_{eq}^{-1} [(1 - \lambda) - f(\tau)\lambda] \quad \text{em } \Omega \quad (3.35)$$

onde, o tempo de relaxação estrutural $\theta_s(\lambda)$ é definido por:

$$\theta_s(\lambda) \equiv \frac{\eta_s(\lambda)}{G_S(\lambda)} = \theta_0 \left(\frac{\eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} \right) \frac{\left(\frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right)^\lambda - 1}{\exp \left[m \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right]} \quad (3.36)$$

A maneira clássica apresentada no início deste capítulo em que $\boldsymbol{\tau}$ é dado pela Eq.(3.6) tem a desvantagem de não segregar a parcela puramente viscosa da tensão extra ($\boldsymbol{\tau}$), porém apresenta a grande vantagem de informar o tempo de retardo do material (θ_2) – o qual aplicado ao esquema *EVSS* teria que ser obtido através do processo de pós processamento na Eq.(3.18),

$$\theta_2 = \frac{\eta_\infty}{\eta_s(\lambda)} \theta_1 \quad (3.37)$$

4 MODELAGEM NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE MATERIAIS ELASTO-VISCOPLÁSTICOS COM COMPORTAMENTO TIXOTRÓPICO

Nesta tese fez-se aproximações de elementos finitos para escoamento de fluidos elasto-viscoplásticos com comportamento tixotrópico através de uma expansão abrupta a fim de investigar o papel dos efeitos elásticos e tixotrópicos na dinâmica do escoamento. O modelo mecânico é aproximado por um método multi-campos de Galerkin mínimos quadrados (GLS), em termos do parâmetro de estrutura, tensão viscoelástica, pressão e velocidade .

4.0.3 O Método de Elementos Finitos

O Método de Elementos Finitos (MEF) origina-se dos métodos variacionais clássicos e de resíduos ponderados, onde estes últimos são baseados na ideia de que a solução de uma equação diferencial representa-se por uma combinação linear de parâmetros e de funções selecionadas apropriadamente em todo o domínio do problema [Reddy e Gartling, 1994].

O MEF é uma generalização dos métodos, variacional clássico (Rayleigh-Ritz) e de resíduos (mínimos quadrados entre outros). Entretanto, para aplicar o MEF, bem como as condições de contorno satisfeitas, deve-se representar o domínio através de uma coleção de sub-domínios de geometrias simples para permitir a geração sistemática de funções aproximadas necessárias para a solução do problema por um variacional ou resíduos ponderados. Este método, aproxima a solução de problemas de valor de contorno descritos tanto por equações diferenciais ordinárias quanto por equações diferenciais parciais através da subdivisão da geometria do problema em elementos menores, chamados elementos finitos, nos quais a aproximação da solução exata é obtida por interpolação de uma solução aproximada.

Diversos problemas físicos que são encontrados nas ciências e nas engenharias e que são descritos matematicamente na forma de equações diferenciais ordinárias e parciais, valem-se do MEF. Algumas aplicações são na análise de tensões e deformações, transferência de calor, mecânica dos fluidos e reologia, eletromagnetismo, etc. A solução exata usualmente é fruto de um método de solução analítica encontrada através de métodos algébricos e diferenciais aplicados a geometrias e condições de contorno particulares. A aplicação generalizada dos métodos analíticos para diferentes geometrias e condições de contorno torna-se impraticável ou até mesmo impossível à obtenção de soluções analíticas exatas.

Com o advento do método de elementos finitos a determinação de funções de interpolação para atender as condições de contorno, em nível de elemento discretizado, torna-se mais simples e mais sistemática [Reddy e Gartling, 1994].

Arbitra-se cada elemento de forma aproximada, com a condição do conjunto ou malha de elementos comportarem-se de forma semelhante ao contínuo original. O modelo de deslocamento do MEF arbitra o campo de deslocamentos nodais, então a interação de componentes de tensão entre elementos adjacentes é substituída pela interação de forças nodais entre elementos.

Desta forma, o equilíbrio infinitesimal que considera-se no modelo matemático de meio contínuo é substituído pelo equilíbrio de cada elemento finito isoladamente, trocando-se as equações diferenciais de equilíbrio por equações algébricas de equilíbrio do elemento como um todo. Destas equações algébricas escritas para cada elemento, obtém-se o sistema de equações de equilíbrio da malha de elemento. Esse sistema global após a introdução das condições de vinculação ao meio exterior permite a determinação da solução em termos dos deslocamentos nodais [Assan, 2003 Soriano, 2003].

4.0.3.1 *Método de Galerkin e os Métodos Estabilizados*

O método de Galerkin é o método de elementos finitos mais utilizado em uma vasta classe de problemas. Entretanto, para problemas de escoamentos este método apresenta problemas os quais geram patologias numéricas em diversas situações de interesse em engenharia.

Alguns destes problemas são oscilações espúrias, sobre todo o domínio computacional, em problemas envolvendo operadores assimétricos, o que acarreta em divergência nas aproximações de escoamentos advectivo-dominados.

Algumas propostas na literatura neste sentido como o refinamento da malha - mesmo acarretando no aumento do custo computacional - ou ainda o desenvolvimento de novos elementos finitos e a aplicação de regras de integração não convencionais [ver, por exemplo, Malkus e Hughes, 1978; Crouzeix e Raviart, 1973], manutenção da formulação de Galerkin clássica com uso de elementos não conformes, formulação com funções de interpolação usuais isoparamétricas para visar adicionar ao problema a requerida estabilidade. Esta última opção trata-se dos chamados métodos estabilizados. A aplicação do método de Galerkin na aproximação das equações de Navier-Stokes incompressível apresenta duas grandes dificuldades. A primeira delas é a necessidade de compatibilizar os sub-espacos de velocidade e pressão, para satisfazer, dessa maneira, a chamada condição de Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. A segunda é a instabilidade inerente a esquemas de discretizações centrais, que são decorrentes da própria formulação de Galerkin ou de esquemas de diferenças finitas na aproximação de escoamentos advectivos dominantes [Brooks and Hughes, 1982; Patankar e Spalding, 1972; Patankar, 1980].

Para os termos simétricos de advecção, tem-se que o seu tratamento a partir da formulação de Galerkin, para o qual as funções teste e peso pertencem ao mesmo espaço, é uma fonte de instabilidade numérica para altos valores de Reynolds.

Em Brooks e Hughes, 1982, fez-se um estudo dos métodos estabilizados como o método *streamline-upwind*/Petrov-Galerkin, ou, simplesmente, SUPG, o qual consiste em uma formulação de Petrov-Galerkin com funções peso descontínuas, construídas através da adição de uma perturbação (*streamline upwind*) - onde esta atua apenas na direção das linhas de corrente - às funções clássicas do método de Galerkin. O método SUPG possui elevada precisão, estabilidade e estimativas de erro satisfatórias [Johnson et al., 1984] quando a solução exata é suficientemente regular.

A partir do método SUPG tem-se outros métodos, como o método Galerkin mínimos-quadrados (GLS), apresentado na literatura por Hughes et al., 1986 na abordagem do problema de Stokes. O método GLS consiste na adição de termos dependentes da malha, ao método clássico de Galerkin. Analogamente ao SUPG, os termos de perturbação são construídos de forma a aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin clássica sem, contudo, prejudicar sua consistência, visto que a solução exata do problema satisfaz os resíduos de Euler-Lagrange.

Por ser flexível, a metodologia GLS vem sendo amplamente aplicada em problemas de fluidos, como apresentado nos trabalhos de Hughes e Shakib, 1988; Franca e Hughes, 1988; Gresho, 1991; Franca et al., 1992; Franca e Frey, 1992; Franceschini e Frey, 2003a; Franca e Hughes, 1993; Harari e Hughes, 1994.

Visto que nesta tese aplica-se a metodologia GLS, inicialmente faz-se necessário apresentar os espaços funcionais para as variáveis primais do problema, a fim que se tenha a regularidade pretendida:

$$\begin{aligned}
L_2(\Omega) &= \{q \mid \int_{\Omega} q^2 d\Omega < \infty\} \\
L_2^0(\Omega) &= \{q \in L_2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\Omega = 0\} \\
H^1(\Omega) &= \{v_i \in L_2(\Omega), \forall i \mid \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), \forall i, j\} \\
H_0^1(\Omega) &= \{v_i \in H^1(\Omega), \forall i \mid v_i = 0, \forall i \text{ em } \Gamma_g\}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $L_2(\Omega)$ define o espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis sobre o domínio Ω , $L_2^0(\Omega)$ define o espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre o domínio Ω , $H^1(\Omega)$ define o espaço de Sobolev das funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω e $H_0^1(\Omega)$ define o espaço de Sobolev das funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω que se anulam sobre o contorno Γ_g .

4.0.4 Formulação Diferencial do Problema Elasto-Viscoplástico Tixotrópico

Partindo das equações da continuidade e do movimento – Eqs. (4.2) e (4.3) – para um fluido estruturado tixotrópico juntamente com a equação constitutiva viscoelástica para $\boldsymbol{\tau}$ (Eq.(4.4)) e a equação de evolução (Eq. (4.5)) pode-se contruir a formulação forte. Aplica-se o esquema *EVSS*, cujo objetivo é reforçar a elipsidade da equação de movimento pela adição de um termo viscoso de segunda ordem o que acarreta vantagens numéricas como melhor convergência, tem-se que o problema de valor de contorno pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.2)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + 2\eta_\infty \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \quad \text{em } \Omega \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\tau} + \theta_s(\lambda) \check{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta_s(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad \text{em } \Omega \quad (4.4)$$

$$\dot{\lambda} = \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda = t_{eq}^{-1} [(1 - \lambda) - f(\tau)\lambda] \quad \text{em } \Omega \quad (4.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g \quad \text{sobre } \Gamma_g^{\mathbf{u}} \quad (4.6)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_g \quad \text{sobre } \Gamma_g^{\boldsymbol{\tau}} \quad (4.7)$$

$$(-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})\mathbf{n} = \mathbf{t}_h \quad \text{sobre } \Gamma_h \quad (4.8)$$

onde as quatro primeiras equações, bem como suas variáveis, já foram anteriormente definidas como sendo, respectivamente, as equações da continuidade (4.2), do movimento (4.3), a equação constitutiva viscoelástica (Eq.(4.4)) e a equação de evolução do parâmetro de estrutura do material (Eq.(4.5)). Ainda, Γ_g é a parte do domínio no qual serão impostas as condições de contorno de Dirichlet e Γ_h as condições de Neumann, \mathbf{I} é o tensor identidade, \mathbf{u} é o campo das velocidades admissíveis, \mathbf{n} é o vetor normal exterior unitário e \mathbf{t}_h são as forças de superfície.

4.0.5 Formulação Variacional do Problema Elasto-Viscoplástico Tixotrópico

A formulação variacional para escoamento permanente de um material elasto-viscoplástico com comportamento tixotrópico é obtido tomando-se o produto interno das equações de governo do escoamento (Eqs.(4.2)-(4.3)), sua equação constitutiva viscoelástica (Eq.(4.4)) e sua equação de evolução (Eq. (4.5)), com suas respectivas funções testes e integrando-as por partes no domínio Ω . A função teste da equação da continuidade (Eq.(4.2)) é um campo de pressão virtual $q \in L_2^0(\Omega)$, a da equação do movimento (Eq.(4.3)) é uma velocidade virtual $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N$, a da equação viscoelástica (Eq.(4.4)) é um campo tensorial $\mathbf{S} \in L_2(\Omega)^{N \times N}$ e a da equação de evolução (Eq. (4.5)) é uma função escalar $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Dado $\mathbf{g} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}^N$, $t_{eq} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\lambda_g : \Gamma_g^\lambda \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathbf{u}_g : \Gamma_g^{\mathbf{u}} \rightarrow \mathfrak{R}^N$, $\boldsymbol{\tau}_g : \Gamma_g^\boldsymbol{\tau} \rightarrow \mathfrak{R}^{N \times N}$ e $\mathbf{t} : \Gamma_h^{\mathbf{u}} \rightarrow \mathfrak{R}^N$, achar a quádrupla $(\lambda, \boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u}) \in H^1(\Omega) \times L_2(\Omega)^{N \times N} \times L_2^0(\Omega) \times H^1(\Omega)^N$ tal que, $\forall (\varphi, \mathbf{S}, q, \mathbf{v}) \in H^1(\Omega) \times L_2(\Omega)^{N \times N} \times L_2^0(\Omega) \times H^1(\Omega)^N$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) d\Omega + 2\eta_{\infty} \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q d\Omega \\ & \quad + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{S} d\Omega + \int_{\Omega} \theta_s(\lambda) \check{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{S} d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta_s(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{S} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda \varphi d\Omega + t_{eq}^{-1} \int_{\Omega} [1 + f(\tau)] \lambda \varphi d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} t_{eq}^{-1} \varphi d\Omega \quad (4.9) \end{aligned}$$

Dada a complexidade da formulação variacional, fez-se a verificação dos espaços funcionais equação à equação, com os termos da equação de movimento recebendo especial atenção. Inicialmente é apresentada a forma variacional da equação da continuidade:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q d\Omega &= \int_{\Omega} 0 q d\Omega, \quad \forall q \in L_2^0(\Omega) \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q d\Omega &= 0, \quad \forall q \in L_2^0(\Omega) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Pode-se notar que este termo não necessita ser integrado por partes pois, tanto a variável \mathbf{u} como q estão de acordo com a regularidade da formulação variacional.

A equação viscoelástica (Eq.(4.4)) fornecerá os termos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} + \theta_s(\lambda) \check{\boldsymbol{\tau}} - 2\eta_s(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{S} d\Omega &= \int_{\Omega} \mathbf{0} \cdot \mathbf{S} d\Omega, \quad \forall \mathbf{S} \in L_2(\Omega)^{N \times N} \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{S} d\Omega + \int_{\Omega} \theta_s(\lambda) \check{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{S} d\Omega + \int_{\Omega} 2\eta_s(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{S} d\Omega = \mathbf{0}, \\ & \quad \forall \mathbf{S} \in L_2(\Omega)^{N \times N} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Estes termos também não necessitam ter suas integrais manipuladas visto, $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{S} e \mathbf{u} estarem com a regularidade correta. É importante observar que a derivada corrotacional $\check{\boldsymbol{\tau}}$ está em desacordo com a regularidade do espaço funcional das tensões mas, entretanto, não é variável primal da formulação variacional.

A equação de evolução (Eq. (4.5)) gera os seguintes termos variacionais,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \lambda + t_{eq}^{-1}(1 + f(\tau))\lambda - t_{eq}^{-1}) \varphi d\Omega &= \int_{\Omega} 0 \varphi d\Omega, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda \varphi d\Omega + \int_{\Omega} t_{eq}^{-1}(1 + f(\tau))\lambda \varphi d\Omega - \int_{\Omega} t_{eq}^{-1} \varphi d\Omega = 0, \\ &\quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde seus termos também não violam a regularidade da formulação variacional.

Finalmente, tem-se os termos da equação de movimento (4.3),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla p - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - 2\eta_{\infty} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \\ \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta_{\infty} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\Omega, \\ &\quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \end{aligned} \quad (4.13)$$

Na Eq.(4.13) observa-se que o termo bórico e ambos termos difusivos estão em desacordo com a regularidade da formulação variacional e, portanto, serão manipulados separadamente. A forma variacional do termo bórico é dada por:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\Omega = \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(p\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\Omega &= \quad (\text{de } \operatorname{div}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{a} + \nabla \alpha \cdot \mathbf{a},) \\ \int_{\Gamma} (p\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\Omega &= \quad (\text{do Teorema de Stokes (Eq.(??)),}) \\ - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N &\quad (\text{de } \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N) \end{aligned} \quad (4.14)$$

O termo difusivo da tensão viscoelástica é dado por:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} d\Omega = \\
& \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} \mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega = \quad (\text{de } \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau} \mathbf{v}) = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v},) \\
& \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\tau} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega = \quad (\text{do teorema de Stokes, (Eq.(??))}) \\
& \qquad \qquad \qquad \text{e do teorema da divergência (Eq.(8.2),)} \\
& \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega = \quad (\text{de } \mathbf{A} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{b},) \\
& \qquad \qquad \qquad - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega = \quad (\text{de } \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N,) \\
& - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{w} d\Omega = \quad (\text{de } \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)) \\
& - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (\text{de } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0, \mathbf{A} \in \text{Sym e } \mathbf{B} \in \text{Antsym}), \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

O termo de difusivo da tensão newtoniana é dado por:

$$\begin{aligned}
2\eta_\infty \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\Omega &= 2\eta_\infty \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{v}) d\Omega - 2\eta_\infty \int_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega = \\
&= 2\eta_\infty \int_\Gamma [\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} d\Gamma - 2\eta_\infty \int_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega \\
&\quad (\text{de } \operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{u})\mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} \text{ e } (\text{Eq.}(8.2),)) \\
&= 2\eta_\infty \int_\Gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) \mathbf{n} d\Gamma - 2\eta_\infty \int_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega \quad (\text{de } \mathbf{A} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{b},) \\
&= -2\eta_\infty \int_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega \quad (\text{de } \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N,) \\
&= -2\eta_\infty \int_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega - 2\eta_\infty \int_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} d\Omega \quad (\text{de } \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)) \\
&= -2\eta_\infty \int_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}) d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \quad (\text{de } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0, \mathbf{A} \in \text{Sym} \text{ e } \mathbf{B} \in \text{Antsym},)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

A aproximação de Galerkin para a formulação variacional é uma aproximação interna, ou seja, introduzimos espaços aproximados (de dimensão finita) para as suas variáveis primais, que são sub-espaços dos espaços funcionais da formulação,

- Seja $\Lambda^h \subset H^1(\Omega) \implies$ Se $\lambda^h \in \Lambda^h \rightarrow \lambda^h \in H^1(\Omega)$
- Seja $\Sigma^h \subset L_2(\Omega)^{N \times N} \implies$ Se $\boldsymbol{\tau}^h \in \Sigma^h \rightarrow \boldsymbol{\tau}^h \in L_2(\Omega)^{N \times N}$
- Seja $P^h \subset L_2^0(\Omega) \implies$ Se $p^h \in P^h \rightarrow p^h \in L_2^0(\Omega)$
- Seja $\mathbf{V}^h \subset H^1(\Omega)^N \implies$ Se $\mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h \rightarrow \mathbf{u}^h \in H^1(\Omega)^N$

Essa importante característica faz com que a aproximação de Galerkin possa ser imprecisa, porém nunca matematicamente mal posta, ou seja, as aproximações obtidas terão sempre a regularidade correta. Do conceito de aproximação interna, tem-se que as funções aproximadas também satisfazem a equação variacional. Desta forma pode-se enunciar a formulação de Galerkin da seguinte forma:

Dado $\mathbf{g} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}^N$, $t_{eq} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\lambda_g : \Gamma_g^\lambda \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathbf{u}_g : \Gamma_g^{\mathbf{u}} \rightarrow \mathfrak{R}^N$, $\boldsymbol{\tau}_g : \Gamma_g^\tau \rightarrow \mathfrak{R}^{N \times N}$ e $\mathbf{t} : \Gamma_h^{\mathbf{u}} \rightarrow \mathfrak{R}^N$, achar a quádrupla $(\lambda^h, \boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \Lambda^h \times \Sigma^h \times P^h \times \mathbf{V}^h$ tal que, $\forall (\varphi^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \in \Lambda^h \times \Sigma^h \times P^h \times \mathbf{V}^h$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) d\Omega + 2\eta_{\infty} \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega \\ & \quad + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \mathbf{S}^h d\Omega + \int_{\Omega} \theta_s(\lambda) \check{\boldsymbol{\tau}}^h \cdot \mathbf{S}^h d\Omega - \int_{\Omega} 2\eta_s(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{S}^h d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{u}^h \cdot \nabla \lambda^h \varphi^h d\Omega + t_{eq}^{-1} \int_{\Omega} [1 + f(\tau)] \lambda^h \varphi^h d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} t_{eq}^{-1} \varphi^h d\Omega \end{aligned} \quad (4.17)$$

Os sub-espacos de elementos finitos são definidos por interpolantes polinomiais por partes de suporte compacto. O sucesso do método de elementos finitos vem da estrutura dos seus sub-espacos polinomiais, o qual faz com que o problema matricial associado tenha uma matriz esparsa em estrutura de banda e de dimensões reduzidas.

- $\Lambda^h = \{\lambda^h \in H^1(\Omega) \mid \lambda^h|_K \in \mathcal{P}_l(k), \forall K \in \Omega^h\}$
- $\Sigma^h = \{\boldsymbol{\tau}^h \in H^1(\Omega)^{N \times N} \mid \boldsymbol{\tau}^h|_K \in \mathcal{P}_m(k)^{N \times N}, \forall K \in \Omega^h\}$
- $P^h = \{p^h \in L_2^0(\Omega) \mid p^h|_K \in \mathcal{P}_n(k), \forall K \in \Omega^h\}$
- $\mathbf{V}^h = \{\mathbf{v}^h \in H^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}^h|_K \in \mathcal{P}_o(k)^N, \forall K \in \Omega^h\}$

A fim de contornar as dificuldades oriundas do método de Galerkin para fluidos incompressíveis, tem-se os chamados métodos estabilizados dentre eles o que é aplicado nesta tese que é a formulação multi-campo Galerkin mínimos-quadrados. Pode-se enunciá-lo da seguinte forma:

Dado $\mathbf{g} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}^N$, $t_{eq} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}$, $\lambda_g : \Gamma_g^\lambda \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathbf{u}_g : \Gamma_g^{\mathbf{u}} \rightarrow \mathfrak{R}^N$, $\boldsymbol{\tau}_g : \Gamma_g^\tau \rightarrow \mathfrak{R}^{N \times N}$ e $\mathbf{t} : \Gamma_h^{\mathbf{u}} \rightarrow \mathfrak{R}^N$, achar a quádrupla $(\lambda^h, \boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h) \in \Lambda^h \times \Sigma^h \times P^h \times \mathbf{V}^h$ tal que, $B(\lambda^h, \boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \varphi^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = F(\varphi^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h)$:

onde $B(\lambda^h, \boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \varphi^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\lambda^h, \boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \varphi^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h \mathbf{S}^h d\Omega + \int_{\Omega} \theta(\lambda) \check{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{S}^h d\Omega \\
&- \int_{\Omega} 2\eta_s(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u})^h \mathbf{S}^h d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h \mathbf{D}^h(\mathbf{v})^h d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} 2\eta_{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{u})^h \mathbf{S}^h d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^h \operatorname{div} \lambda^h \varphi^h d\Omega \\
&\quad + t_{eq}^{-1} \int_{\Omega} (1 - f(\tau)) \lambda^h \varphi^h d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h \delta(h_k) \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega \\
+ \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} &(\operatorname{div} p^h - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - 2\eta_{\infty} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u})^h) \alpha(h_k) (\operatorname{div} q^h - \operatorname{div} \mathbf{S}^h - 2\eta_{\infty} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v})^h) d\Omega \\
&+ \beta \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau}^h + \theta(\lambda) \check{\boldsymbol{\tau}} - 2\eta_s(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u})^h) (\mathbf{S}^h + \theta(\lambda) \check{\mathbf{S}} - 2\eta_s(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{v})^h) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} (\mathbf{u} \operatorname{div} \lambda^h + t_{eq}^{-1} (1 - f(\tau)) \lambda^h) \psi(h_k) (\mathbf{u}^h \operatorname{div} \varphi^h + t_{eq}^{-1} (1 - f(\tau)) \varphi^h) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde, $\mathcal{F}(\varphi^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h)$ é definido por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\varphi^h, \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t} \mathbf{v}^h d\Gamma \\
+ \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} &\rho \mathbf{g} (\alpha(Re) (\operatorname{div} q^h - \operatorname{div} \mathbf{S} - 2\eta_{\infty} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v})^h) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} (t_{eq}^{-1} \psi(\mathbf{u} \operatorname{div} \varphi^h + t_{eq}^{-1} (1 - f(\tau)) \varphi^h) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.19}$$

A função de colapso é definida por $f(\tau)$, dada por:

$$f(\tau) = \left(\frac{1}{\lambda_{eq}(\tau) - 1} \right)$$

A estabilidade da formulação da Eq.(4.18) é baseada no estudo feito em Franca e Stenberg, 1991, e Franca et al., 1992, extendida em Zinani e Frey, 2008.

O parâmetro de estabilização aplicado na formulação mínimos quadrados é dada como em Franca e Frey, 1992:

$$\alpha(h_k) = \frac{h_k}{2|\mathbf{u}|_p} \xi(h_k) \quad (4.20)$$

Pelo fato do problema ter o termo advectivo negligenciado, este parâmetro é exclusivamente função do tamanho do elemento. A constante $\xi(h_k)$ é uma constante positiva e h_k é o tamanho da malha. A constante $\xi(h_k)$ é definida da seguinte forma:

$$\xi(h_k) = \begin{cases} h_k & , \text{ se } 0 \leq h_k < 1 \\ 1 & , \text{ se } h_k \geq 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

onde h_k é definido por:

$$h_k = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_k}{4\eta(\dot{\gamma})/\rho} \quad (4.22)$$

A norma $|\mathbf{u}|_p$ é definida como:

$$|\mathbf{u}|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{nsd} |u_i|^p \right)^{1/p} & , \text{ se } 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1,nsd} |u_i| & , \text{ se } p \geq 1 \end{cases} \quad (4.23)$$

$m|\mathbf{u}|_p$ é definido como segue:

$$m|\mathbf{u}|_p = \min\{1/3, 2C\} \quad (4.24)$$

Na sequência apresenta-se a estimativa inversa de elementos finitos [Ciarlet, 1978], como colocado em Franca et al., 1992, sendo que seus valores correspondem a $C_k = \infty$ para um elemento bilinear e $C_k = 1/24$ para um elemento biquadrático.

$$C_k \sum_{K \in \Omega^h} h_k \|\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_{0,k} \leq \|\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_0^2 \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}^h \quad (4.25)$$

O parâmetro estabilizador δ controla a adição do mínimo quadrado da equação da conservação de massa. A definição de δ é dada por:

$$\delta = \chi |\mathbf{u}|_p h_k \xi(h_k) \quad (4.26)$$

Por fim, O parâmetro de estabilização da equação evolutiva para o parâmetro de estabilização, $\psi(Pe_k)$, o qual é adaptado a equação de advecção-reação-difusão (Franca, 1999):

$$\psi(Pe_k) = \frac{h_k}{2|\mathbf{u}|_p} \xi(Pe_k)$$

Os termos estabilizadores são propostos por Franca e Frey (1992) para fluidos de viscosidade constante, no intuito de controlar os termos de mínimos quadrados para as equações de conservação de massa e momento Eqs. (4.2) e (4.3), respectivamente.

O parâmetro β estabiliza a equação constitutiva (Eq.(4.4)) e é definido igual a 1, de acordo com estimativas de erro GLS estabelecidos [Behr et al., 1993]. ψ é o parâmetro introduzido por Franca et al., 1992, no contexto da equação advecção-difusão, para controlar a expressão dos mínimos quadrados para a equação de evolução do parâmetro de estrutura (Eq. 3.11).

O sistema não-linear de equações obtidos a partir da discretização da formulação GLS é resolvido por um método Newton na Eq.(3.22). Este algoritmo faz uso de uma estratégia de gradiente Jacobiano congelado, atualizando a matriz Jacobiana a cada duas ou três iterações apenas [Zinani e Frey, 2008].

5 RESULTADOS E DISCUÇÕES

A equação constitutiva viscoelástica de Oldroyd-B (Eq.3.6) dada em função do parâmetro de estrutura do material é empregada na simulação de um escoamento com comportamento tixotrópico onde o domínio deste bem como suas condições de contorno são ilustrados na Fig.5.1. O domínio é composto por dois canais paralelos de placas montadas sequencialmente para formar uma expansão planar abrupta.

As condições de contorno são de não deslizamento nas paredes do canal, ou seja, $u_1 = u_2 = 0$; simetria ao longo do eixo do canal, $\tau_{12} = 0$, $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$, $u_2 = 0$; os perfis de entrada tanto da velocidade ($u_1 = U_{td}$) quanto do parâmetro de estrutura (λ_{td}) são totalmente desenvolvidos, e a tensão extra ($\boldsymbol{\tau}$) na entrada do canal é nula e, por fim, tração livre na saída do canal maior ($\mathbf{n} \cdot [-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}] = \mathbf{0}$).

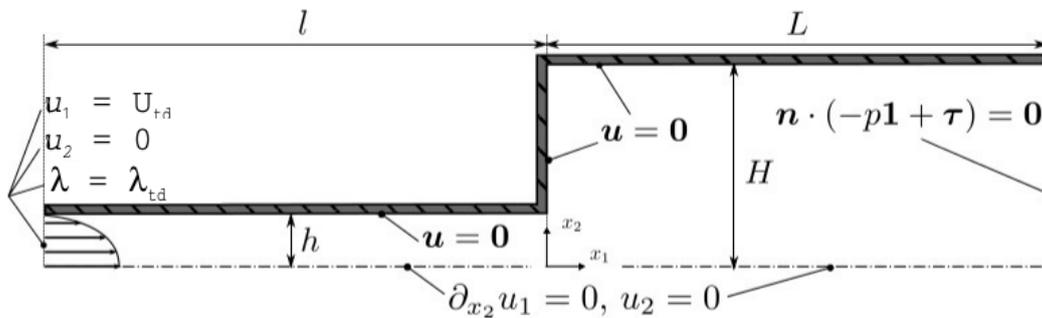


Figura 5.1: A geometria e as condições de contorno (sem escala)

Na ausência de uma solução analítica, aplica-se o seguinte procedimento para obter os perfis totalmente desenvolvidos os quais são impostos na entrada do canal menor: uma vez que o código de elementos finitos é gerido e convergido, são selecionados perfis totalmente desenvolvidos para serem impostos como condições de entrada e, desta forma, o código novamente executado.

O comprimento característico adotado para o escoamento é H_u , onde a razão de aspecto geométrica é dada pela razão $H_u/H_d = 4$ a qual é mantida fixa. O comprimento do canal a montante da expansão bem como o comprimento a jusante são iguais a $50H_u$. Por economia computacional é explorada a simetria do domínio. Como o objetivo desta tese é de analisar a influência dos parâmetros dinâmicos e reológicos no comportamento do escoamento, a geometria é mantida fixa.

O domínio computacional é dividido em elementos finitos não sobrepostos, discretizados para quatro malhas diferentes $M1$, $M2$, $M3$ e $M4$ com número de elementos lagrangeanos bilineares iguais a 2500, 5000, 6500 e 7979, respectivamente. Fez-se um estudo da qualidade de malha para uma combinação dos parâmetros que regem o fenômeno. Os resultados deste estudo são apresentados na Fig. 5.2 em termos da distribuição transversal do parâmetro de estrutura do material, (λ) , no plano de simetria, $(0, x_2^*)$.

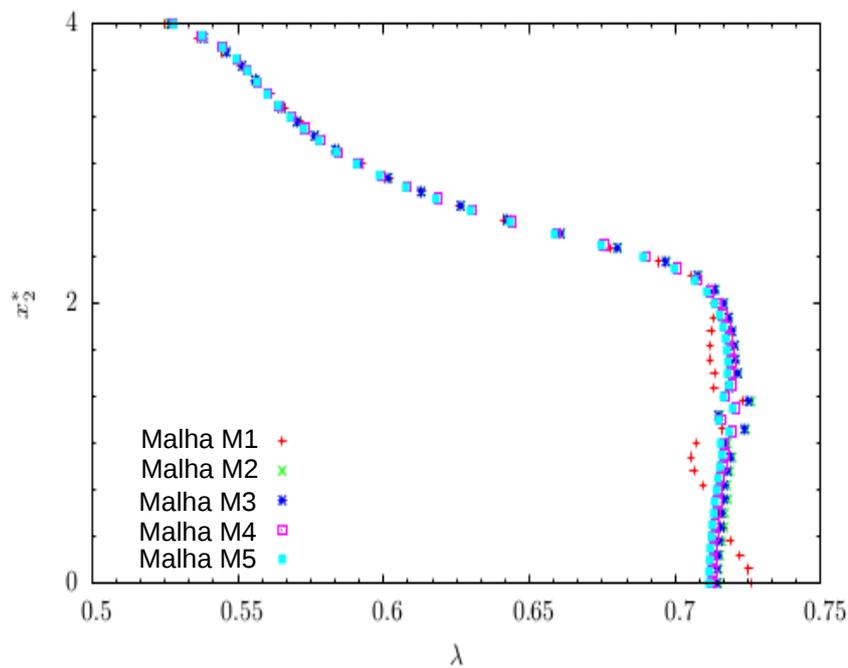


Figura 5.2: Teste de qualidade de malha para $x_2 = 5$

Os valores dos parâmetros e detalhes das malhas também são dadas nas etiquetas desta figura que ilustra que as malhas M_3 e M_4 apresentam comportamento semelhantes. Logo, a malha M_4 (ilustrado na. Fig. (5.3)) é selecionada e utilizada em todos os casos investigados. Ainda, o comprimento de malha mínimo adimensional da malha M_4 utilizada nas simulações é igual a $H_{u(min)} = 0,393539181$, o qual ocorre no canal maior, pois este é mais refinado no intuito de melhor apreciação do fenômeno de *entry flow*.

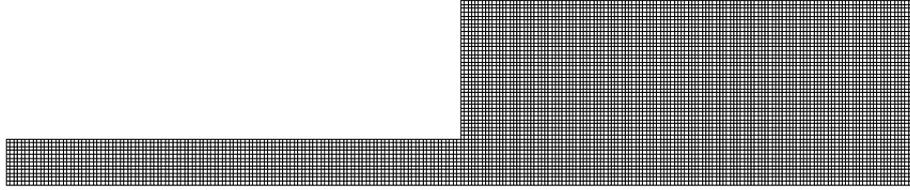


Figura 5.3: A malha de elementos finitos $M4$ (sem escala)

5.1 Adimensionalização Cinemática

Os parâmetros adimensionais governantes e as equações adimensionais são obtidos a partir da adimensionalização reológica apresentada em de Souza Mendes, 2007. Esta escala da mecânica dos fluidos não-newtonianos tem a virtude de desacoplar os efeitos cinemáticos e reológicos nos parâmetros adimensionais que governam o problema. Para este fim, a escala de velocidade é escolhida igual a $\dot{\gamma}_1 H_u$, enquanto que a escala para a pressão e tensões são escolhidas para ser a *yilded stress* τ_y . Desta maneira, as duas escalas envolvem quantidades reológicas e geométricas em vez de apenas quantidades cinemáticas.

Observa-se que $\dot{\gamma}_1$ é a taxa de deformação característica definida como $\dot{\gamma}_1 \equiv \left(\frac{\tau_y}{K}\right)^{1/n}$, onde $\dot{\gamma}_1$ é uma quantidade puramente reológica, que marca o início da região *power-law* na curva de escoamento (Fig. 3.2). As variáveis do problema são dadas por,

$$\begin{aligned} t^* &= t\dot{\gamma}_1 ; \mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{H_u} ; \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{\dot{\gamma}_1 H_u} ; p^* = \frac{p}{\tau_y} ; \boldsymbol{\tau}^* = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\tau_y} ; \\ \eta^* &= \frac{\eta\dot{\gamma}_1}{\tau_y} ; \dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1} ; \theta^* \equiv \dot{\gamma}_1 \theta ; G^* \equiv \frac{G}{\tau_y} \end{aligned} \quad (5.1)$$

5.1.1 Adimensionalização das equações governantes

Como trata-se de um material incompressível ($\rho = cte$), a equação da continuidade não fornece nenhum parâmetro governante.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\
 (\text{de } \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \dot{\gamma}_1 H_u \text{ e } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* H_u) \\
 \frac{\dot{\gamma} H_u}{H_u} \operatorname{div}^* \mathbf{u}^* &= 0 \\
 \operatorname{div}^* \mathbf{u}^* &= 0
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Da equação do movimento, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} &= -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + 2\eta_\infty \operatorname{div}(\mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \\
 (\text{de } \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \dot{\gamma}_1 H_u, \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^* \tau_y, \eta_\infty = \frac{\eta_\infty^* \tau_y}{\dot{\gamma}_1}, p = p^* \tau_y \text{ e } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* H_u) \\
 \mathbf{0} &= -\frac{\tau_y}{H_u} \nabla^* p^* + \frac{\tau_y}{H_u} \operatorname{div}^* \boldsymbol{\tau}^* + 2\frac{\tau_y}{H_u} \eta_\infty^* \operatorname{div}^*(\mathbf{u}^*) + \rho \mathbf{g} \\
 \mathbf{0} &= -\nabla^* p^* + \operatorname{div}^* \boldsymbol{\tau}^* + 2\eta_\infty^* \operatorname{div}^*(\mathbf{u}^*) + \mathbf{g}^*
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

sendo a aceleração adimensional dada por $\mathbf{g}^* = \frac{H_u}{\tau_y} \rho \mathbf{g}$. O termo \mathbf{g}^* controla os efeitos gravitacionais, analogamente ao número de Froude segundo a normalização clássica usada em mecânica dos fluidos.

A equação de evolução adimensional para o parâmetro de estrutura, é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \nabla \lambda &= t_{eq}^{-1} [(1 - \lambda) - \lambda_{eq}^{-1}(\tau)(1 - \lambda_{eq}(\tau))\lambda] \\
&\quad (\text{ de } \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \dot{\gamma}_1 H_u, t_{eq} = t_{eq}^* \dot{\gamma}^{-1} \text{ e } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* H_u) \\
\frac{\dot{\gamma}_1 H_u}{H_u} \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \lambda &= \dot{\gamma}_1 t_{eq}^{*-1} [(1 - \lambda) - \lambda_{eq}^{-1}(\tau)(1 - \lambda_{eq}(\tau))\lambda] \\
\mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \lambda &= t_{eq}^{*-1} [(1 - \lambda) - \lambda_{eq}^{-1}(\tau)(1 - \lambda_{eq}(\tau))\lambda] \tag{5.4}
\end{aligned}$$

O número tixotrópico t_{eq}^* governa o nível de tixotropia do material, para t_{eq}^* mais elevados, a microestrutura do material demora mais tempo para reestabelecer seu equilíbrio, se o nível de tensão permanecer inalterável.

Da equação viscoelástica para tensão, tem-se:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} + \theta_s(\lambda) \check{\boldsymbol{\tau}} - 2\eta_s \mathbf{D}(\mathbf{u}) &= 0 \\
(\text{ de } \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \dot{\gamma}_1 H_u, \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^* \tau_y, \eta_s(\lambda) = \frac{\eta_s^*(\lambda) \tau_y}{\dot{\gamma}_1} \text{ e } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* H_u,) \\
\boldsymbol{\tau}^* \tau_y + \theta_s(\lambda) \frac{\dot{\gamma}_1 H_u \tau_y}{H_u} \check{\boldsymbol{\tau}} - 2 \left(\frac{\tau_y \dot{\gamma}_1 H_u}{\dot{\gamma}_1 H_u} \right) 2\eta_s^*(\lambda) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) &= 0 \\
\boldsymbol{\tau}^* + \theta^*(\lambda) \check{\boldsymbol{\tau}} &= 2\eta_s^*(\lambda) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Desta forma, as equações adimensionais que governam o fenômeno são escritas como:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{em } \Omega^* \tag{5.6}$$

$$\mathbf{0} = -\nabla^* p^* + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^* + 2\eta_\infty \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{u})^* + \rho \mathbf{g}^* \quad \text{em } \Omega^* \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{\tau}^* + \theta^*(\lambda) \check{\boldsymbol{\tau}}^* = 2\eta_s^*(\lambda) \mathbf{D}(\mathbf{u})^* \quad \text{em } \Omega^* \tag{5.8}$$

$$\dot{\lambda}^* = \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \lambda = \frac{1}{t_{eq}^*} \left[(1 - \lambda) - (1 - \lambda_{eq}) \left(\frac{\lambda}{\lambda_{eq}} \right) \right] \quad \text{em } \Omega^* \tag{5.9}$$

O tempo de relaxação θ^* é dado por:

$$\theta_0^*(\lambda) = \frac{\eta_v^*(\lambda)}{G^*(\lambda)} \quad (5.10)$$

com módulo de elasticidade adimensional expresso por:

$$G(\lambda)^* = G_0^* \quad (5.11)$$

A viscosidade estrutural adimensional é definida como segue,

$$\eta^*(\lambda) = \left(\frac{\eta_0^*}{\eta_\infty^*} \right)^\lambda \eta_\infty^* \quad (5.12)$$

e a viscosidade viscoplástica SMD adimensional em equilíbrio é definida por,

$$\eta_{eq}^*(\dot{\gamma}_{eq}^*) = [1 - \exp(-(J+1)\dot{\gamma}_{eq}^*)] \left[\frac{1}{\dot{\gamma}_{eq}^*} + \dot{\gamma}_{eq}^{*n-1} \right] + \eta_\infty^* \quad (5.13)$$

na qual o parâmetro adimensional J é um salto na viscosidade [de Souza Mendes, 2007], dado por:

$$J \equiv \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \eta_0^* - 1 \quad (5.14)$$

Na curva de escoamento Fig. (3.2), o salto representa um platô formado quando a taxa de cisalhamento salta de $\dot{\gamma}_0$ para $\dot{\gamma}_1$ quando o material escoar, sendo $\dot{\gamma}_0$ o início do colapso da microestrutura do material até $\dot{\gamma}_1$, que corresponde o início da região *power law*.

A tixotropia é controlada pelo tempo de equilíbrio adimensional t_{eq}^*

$$t_{eq}^* = t_{eq} \dot{\gamma}_1 = \frac{t_{eq} K^n}{\tau_y^n}$$

O tempo de relaxação adimensional, que determina o nível de elasticidade do material, é controlado pelo valor de θ_0^* para materiais totalmente estruturados ($\lambda = 1$), e é dado por:

$$\theta_0^* \equiv \theta^*(\lambda \rightarrow 1) = \frac{\eta_0}{G_0 \dot{\gamma}_1} = \frac{\eta_0 K^n}{G_0 \tau_y^n} \quad (5.15)$$

Para a intensidade do escoamento, o efeito *Yield stress* aumenta com U^* ($U^* \propto HB^{-1}$). Desta forma, pode-se relacionar a intensidade do escoamento com o número de Herschel-Bulkley. Para $n = 1$, $U^* = HB^{1/n}$, pode-se escrever:

$$U^* = \frac{U}{\dot{\gamma}_1 H_u} = \frac{K^{1/n} U}{\tau_y^{1/n} H_u} = \left(\frac{KU^n}{\tau_y H_u^n} \right)^{1/n} = \frac{1}{HB^{1/n}} \quad (5.16)$$

O parâmetro adimensional que leva em conta a cinemática do escoamento - a intensidade do fluxo U^* - surge a partir da condição de contorno adimensional de Dirichlet para a velocidade.

A equação de evolução adimensional dada pela Eq.(5.9) para $\dot{\lambda}$ contribui para a análise adimensional do escoamento através do tempo de equilíbrio, t_{eq}^* , que representa uma escala de tempo para mudanças no nível de estruturação. O tempo de equilíbrio também é adimensionalizado de maneira reológica, pois ao contrário das adimensionalizações comumente apresentadas na literatura, as quais são apresentadas em função de uma velocidade, aqui a velocidade característica utilizada será $\dot{\gamma}_1$, pois este parâmetro representa o início da região *power law* que é quando o material já reestruturou sua microestrutura.

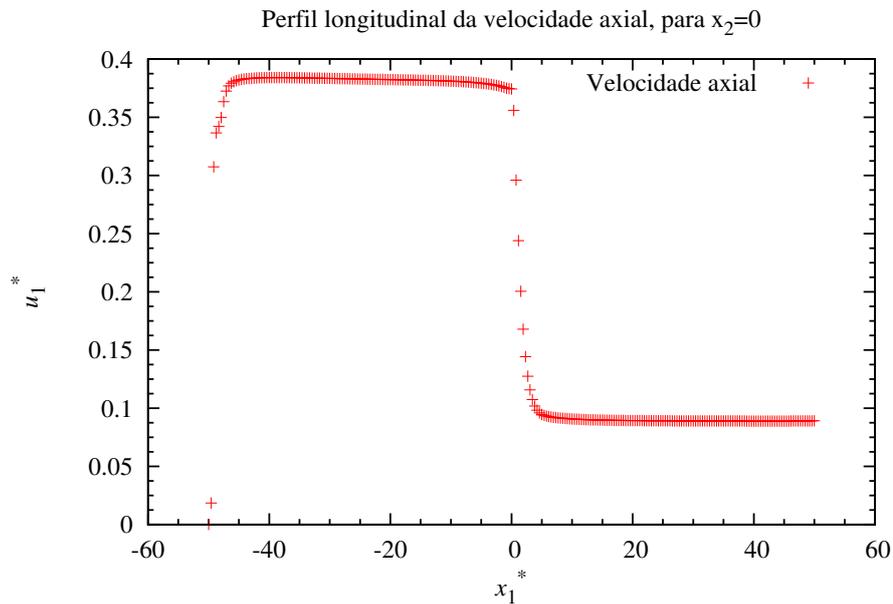
5.2 Resultados

O esquema numérico apresentado no Capítulo anterior é usado para aproximar materiais estruturados que escoam através da geometria representada na Fig.(5.1). As características do escoamento são apresentadas e discutidas para faixas relevantes dos parâmetros de governo reológicos e cinemáticos. Os resultados são focados essencialmente na determinação da distribuição do nível de estruturação do material, bem como na identificação da posição e dimensões das regiões escoadas e não escoadas.

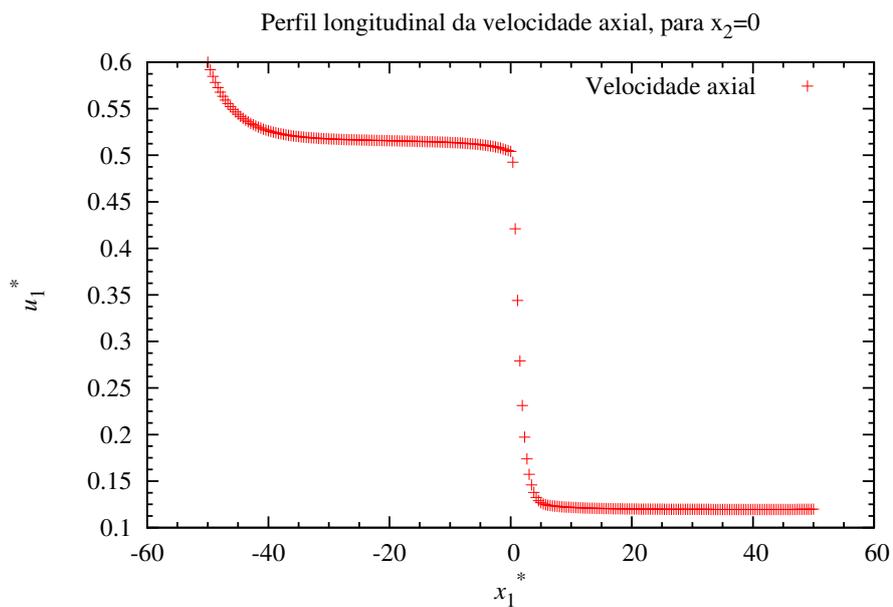
Nesta tese as superfícies de escoamento são determinadas de maneira não usual, a saber, são definidas como o lugar geométrico dos pontos o qual $0.9 \leq \lambda \leq 1$ [Fonseca C. et al., 2012]. Esta escolha deve-se ao fato de que a transição entre o plato de viscosidade η_0 e o início do colapso da micro estrutura não é acentuada na vizinhança de $\dot{\gamma}_0$, ou seja, entre o platô newtoniano (região onde o material é altamente estruturado) e a queda da viscosidade. Sendo que para regiões em equilíbrio tal valor corresponde ao par $(\dot{\gamma}_0, \tau_y)$ da curva de escoamento dada pela Fig(3.2).

5.2.1 Efeito da cinemática

Os efeitos da intensidade do escoamento (U^*) sobre a distribuição do parâmetro de estrutura λ são representados primeiramente nas Figs. (5.4) – (5.6), nas quais são analisados os perfis longitudinais da velocidade axial na expansão, ou seja, em $x_2 = 0$. Estes resultados apontam que, para baixas vazões, há um pico na velocidade axial na entrada do canal menor, onde à medida que o material afasta-se da entrada do canal a velocidade torna-se constante e sofre alterações novamente devido aos efeitos da expansão. Observa-se este comportamento para pequenas vazões, pois para vazões maiores a velocidade axial diminui abruptamente na região próxima a entrada do canal menor, tornando-se constante até passar pela expansão, onde passa a ter o mesmo comportamento da entrada do canal menor.

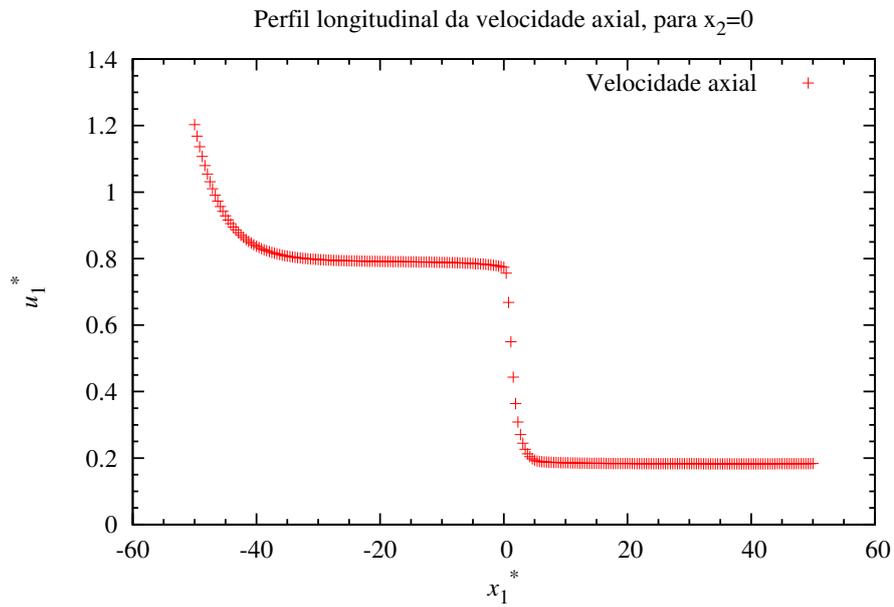


(a)

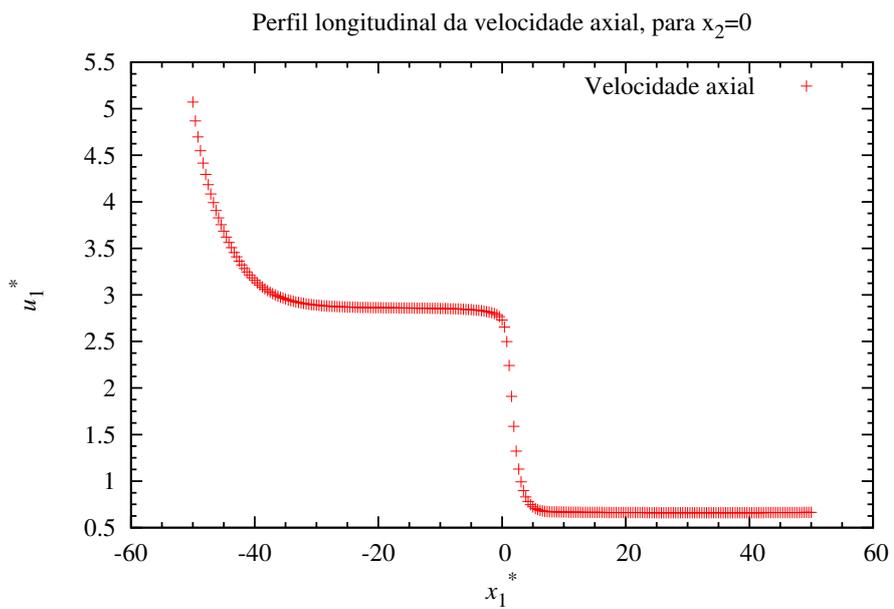


(b)

Figura 5.4: Perfis longitudinais da velocidade axial para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$ (f) $U^* = 4,5$.

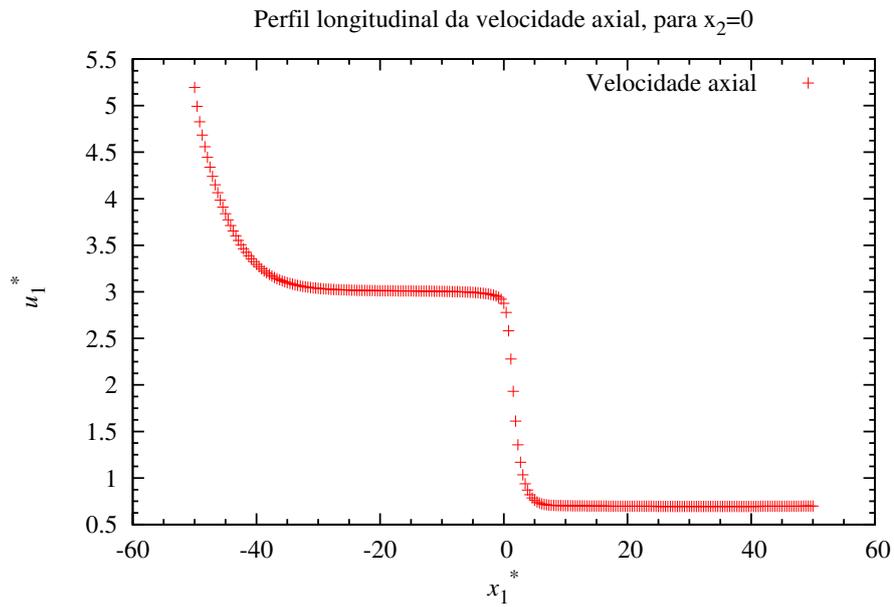


(c)

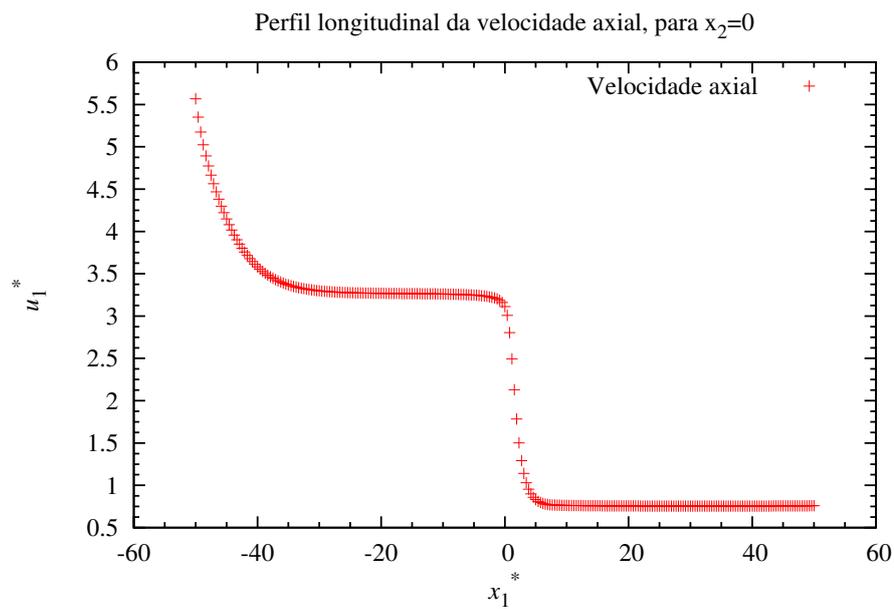


(d)

Figura 5.5: Perfis longitudinais da velocidade axial para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$ (f) $U^* = 4,5$.



(e)



(f)

Figura 5.6: Perfis longitudinais da velocidade axial para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$ (f) $U^* = 4,5$.

Para a análise das isobandas de U^* , apresentadas nas Figs. (5.7) e (5.8) para valores crescentes da intensidade do escoamento tem-se que, enquanto no primeiro quadro de figuras (5.7) são apresentadas toda a gama da variação do parâmetro de estrutura ($0 \leq \lambda \leq 1$), na Fig.(5.8) o limite inferior destas isobandas é cortado em 0,9 de modo a separar as regiões escoadas das regiões não escoadas do material.

Na Fig. (5.7), para valores maiores de U^* , tem-se que a estruturação do material ocorre cada vez mais a jusante da expansão e na quina a desestruturação do material ocorre devido ao aumento das tensões oriundas da expansão.

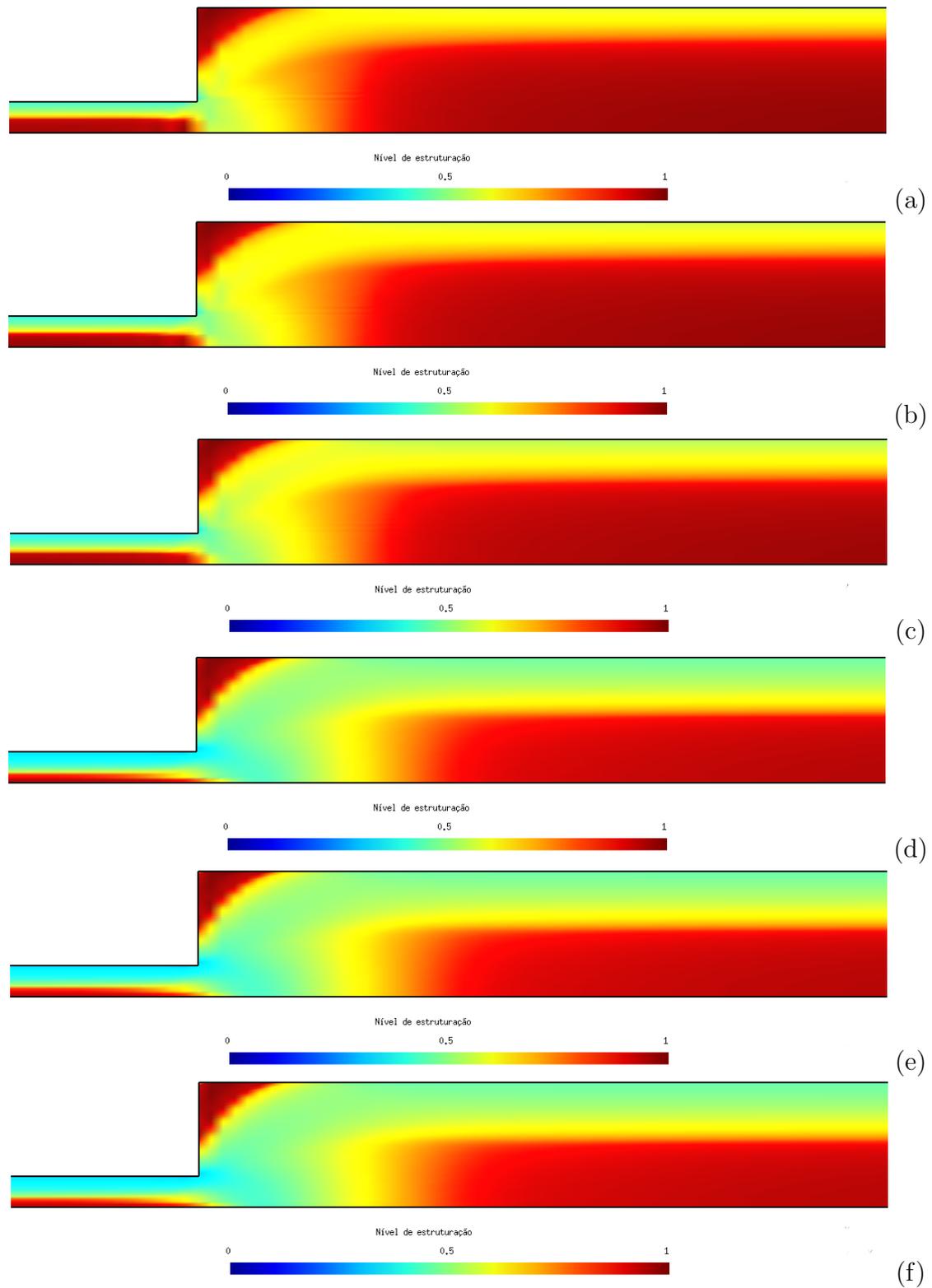


Figura 5.7: Efeito de U^* : isobandas do parâmetro de estratificação para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$ (f) $U^* = 4,5$.

Na Fig.(5.8), as regiões as quais não alcançaram o limite de escoamento do material (denominadas de regiões não escoadas, $0.9 \leq \lambda \leq 1$) são representadas em preto, enquanto que as que alcançaram este limite ($\lambda \leq 0.9$) são representadas em branco.

Pode-se observar na Fig.(5.8) que o tamanho das regiões do escoamento tampão a montante bem como a jusante da expansão diminuem com o aumento da vazão e se afastam uma da outra. Ambos os efeitos estão relacionados ao aumento do nível de tensão imposto pelos valores crescentes de U^* . Como nas regiões não escoadas o nível de tensão do material não excede o limite de escoamento, estas regiões naturalmente diminuem de tamanho.

A extremidade a montante da região que não escoa do canal maior adquire um formato de cunha para valores mais elevados de U^* , isto indica que a estruturação é mais rápida para as partículas materiais que deslocam-se na vizinhança do plano de simetria, ou ainda que as partículas fora dessa vizinhança necessitam percorrer maiores distâncias para estruturar-se.

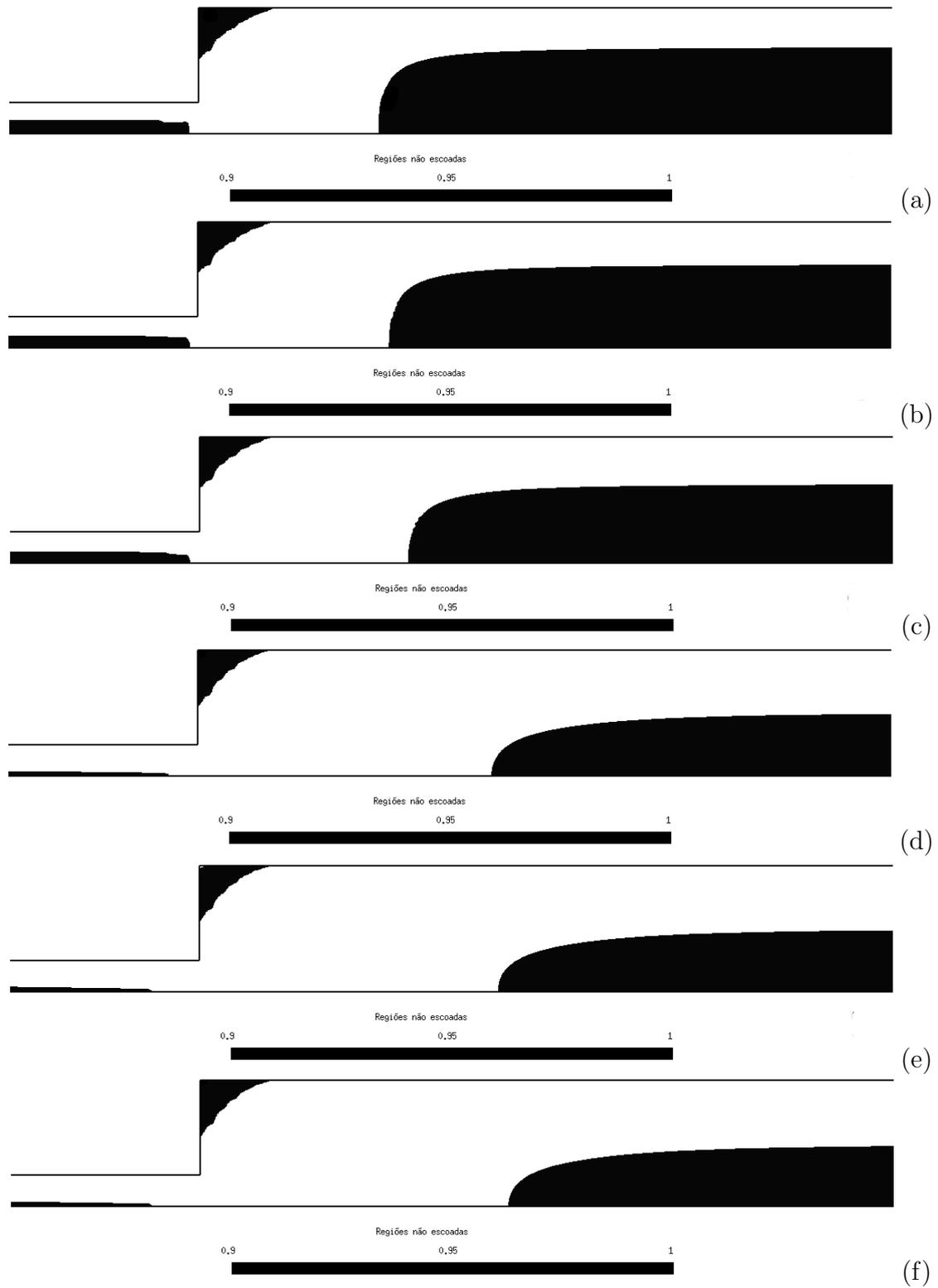


Figura 5.8: Efeito de U^* : Regiões não escoadas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4$; (e) $U^* = 4,2$; (f) $U^* = 4,5$.

Os resultados apresentados nas Figs. (5.7) e (5.8) não diferem dos resultados obtidos nas simulações dos modelos viscoplásticos e são realizados visando confirmar a boa capacidade de predição do modelo aplicado nesta tese, bem como a robustez de sua implementação computacional.

Finalmente são apresentadas as isobandas da deformação elástica ($\dot{\gamma}_e$) para valores crescente da intensidade do escoamento na Fig.(5.9) – conforme definido pela Eq.(3.30). Os resultados obtidos confirmam que o modelo elasto-viscoplástico aplicado nesta tese acrescenta elasticidade somente às regiões não escoadas do escoamento, ou seja, nas regiões em que o material escoava como um fluido *Power law* ou mesmo com uma viscosidade Newtoniana η_∞ , nenhum efeito elástico é, a ele, acrescentado – contrariamente aos modelos clássicos de viscoelasticidade.

A Fig.(5.9) ilustra que o campo de deformação elástica demora mais tempo para se desenvolver, em comparação com o campo do parâmetro de estrutura (λ) e que, o comprimento de desenvolvimento aumenta para maiores valores da intensidade do escoamento (U^*).

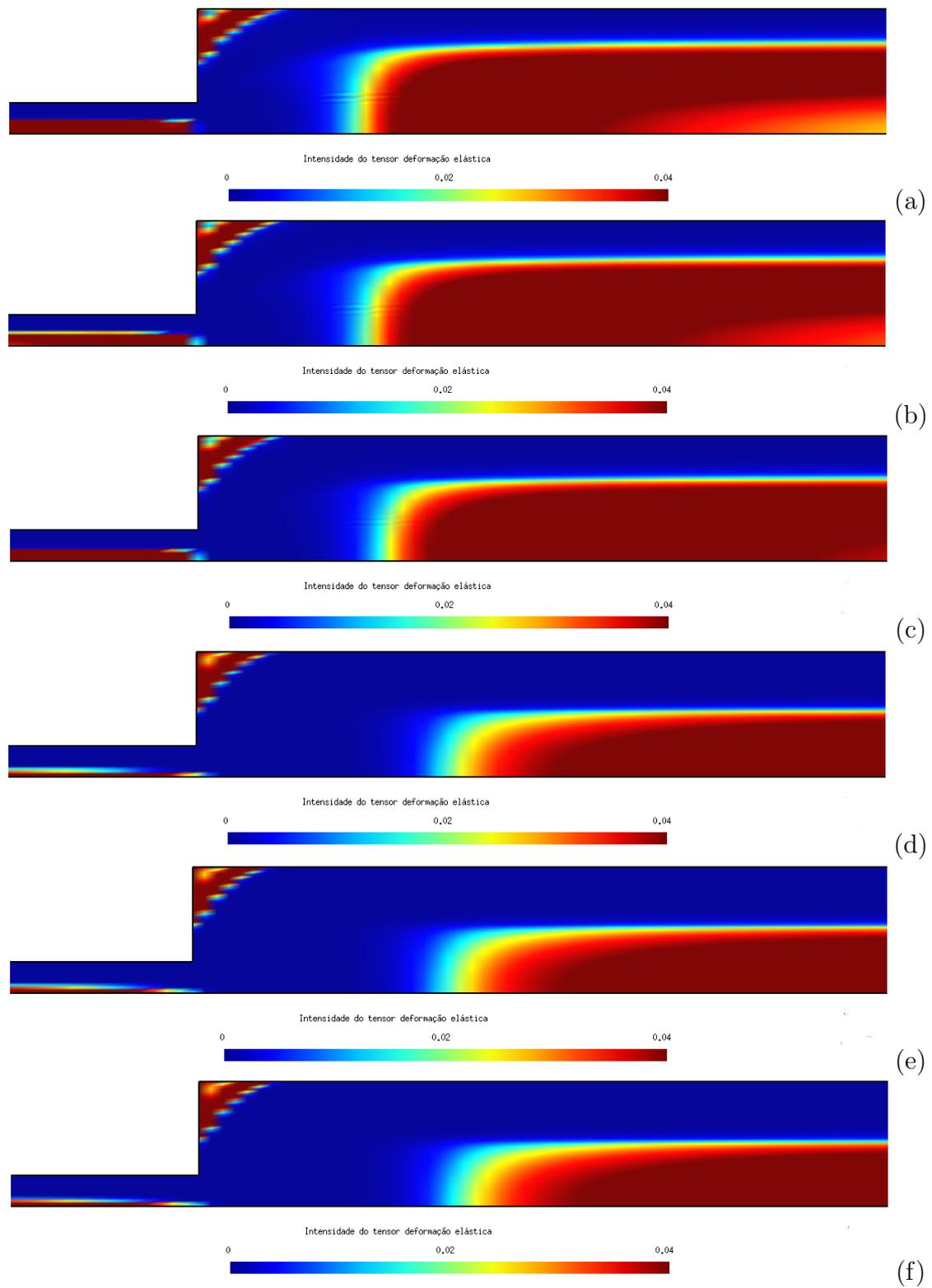


Figura 5.9: Efeito de U^* : γ_e -isobandas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$; (f) $U^* = 4,5$.

Os perfis transversais apresentados nas Figs(5.10) – (5.12), os quais são tomados em $x_2 = 25$, mostram juntamente com a Eq.(3.30) que o material possui seu nível máximo de elasticidade nas suas superfícies de escoamento – (*yield surface*) da deformação elástica, devido ao aumento crescente do seu nível de tensão a medida que se afasta da linha de centro do canal. Os perfis confirmam a posição das regiões não escoadas no canal maior visto que a deformação elástica aumenta próximo a linha de centro do canal.

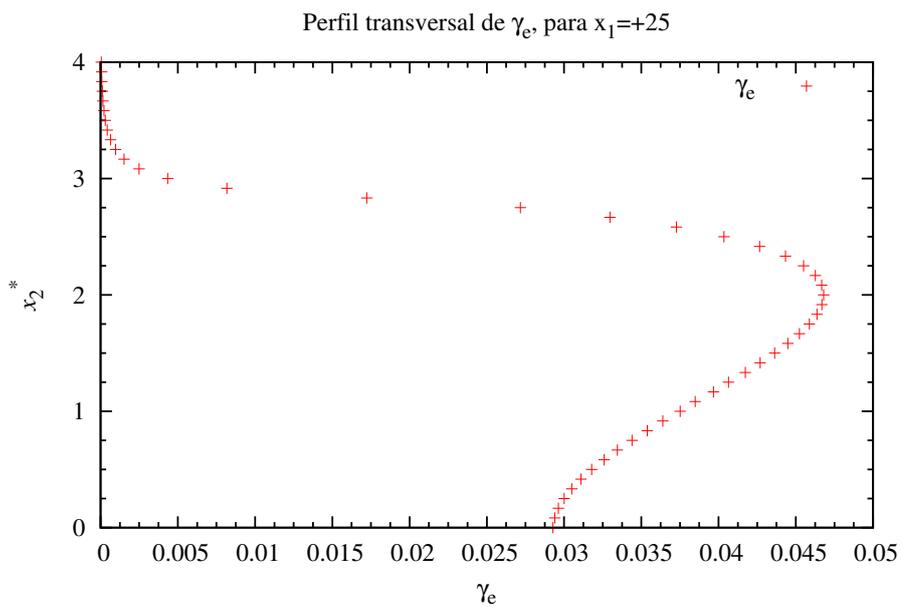
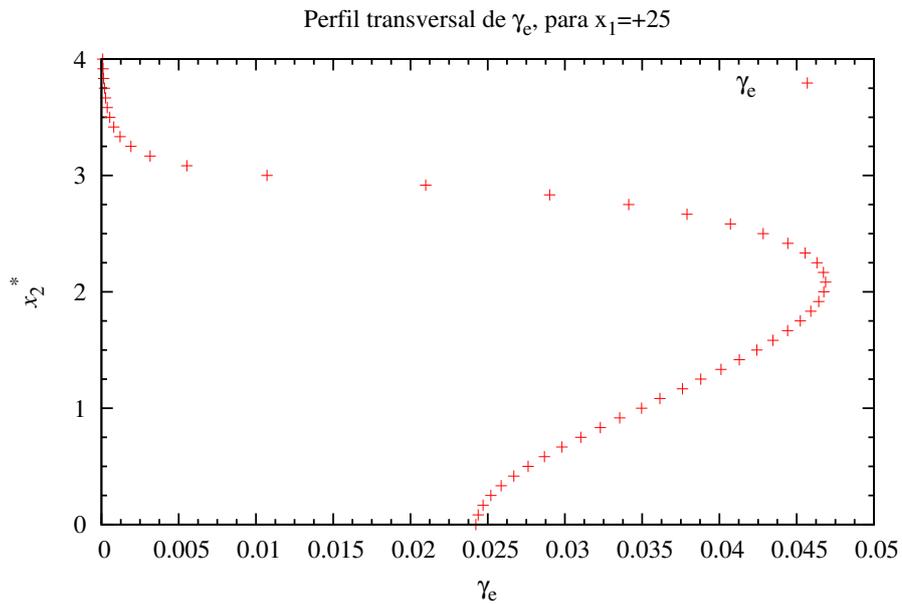
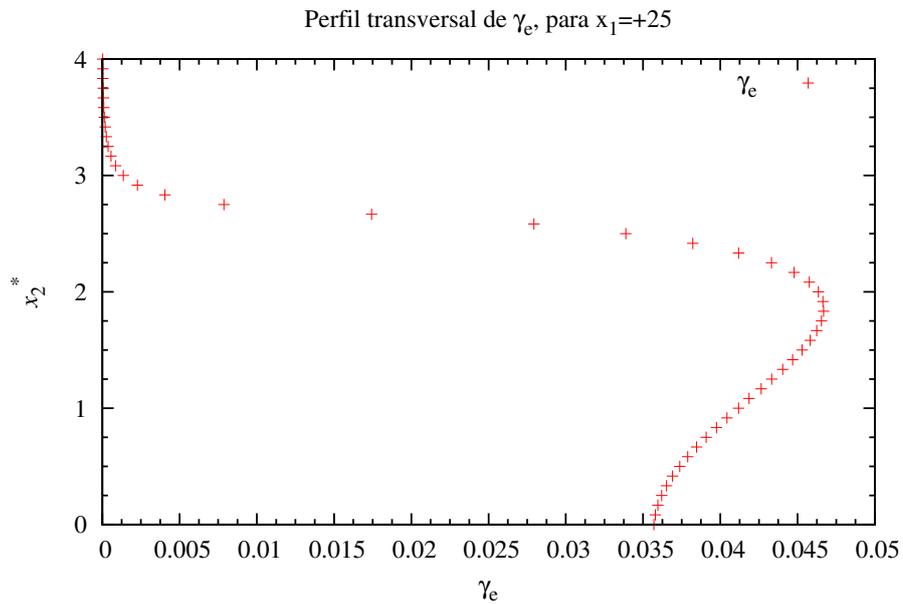
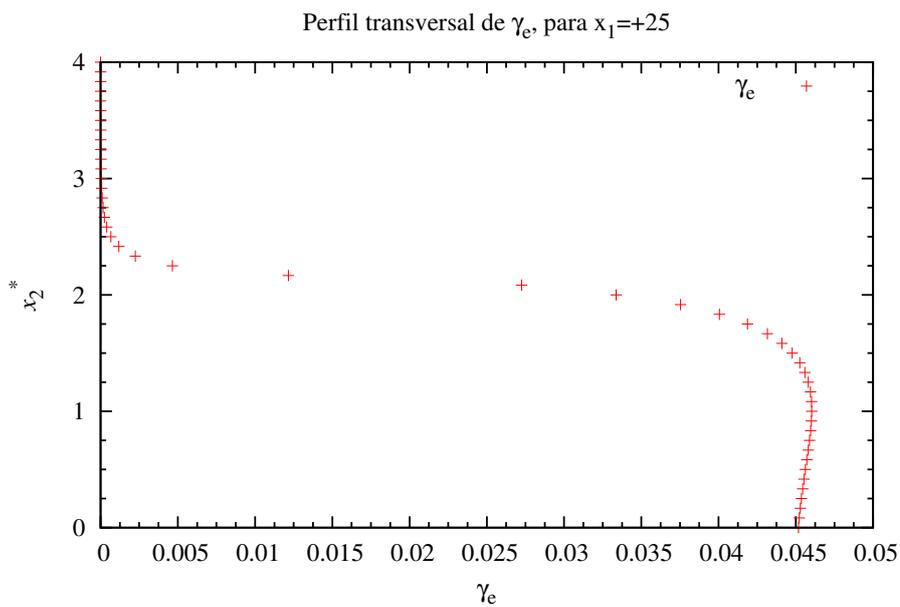


Figura 5.10: Perfil transversal da deformação elástica: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$.

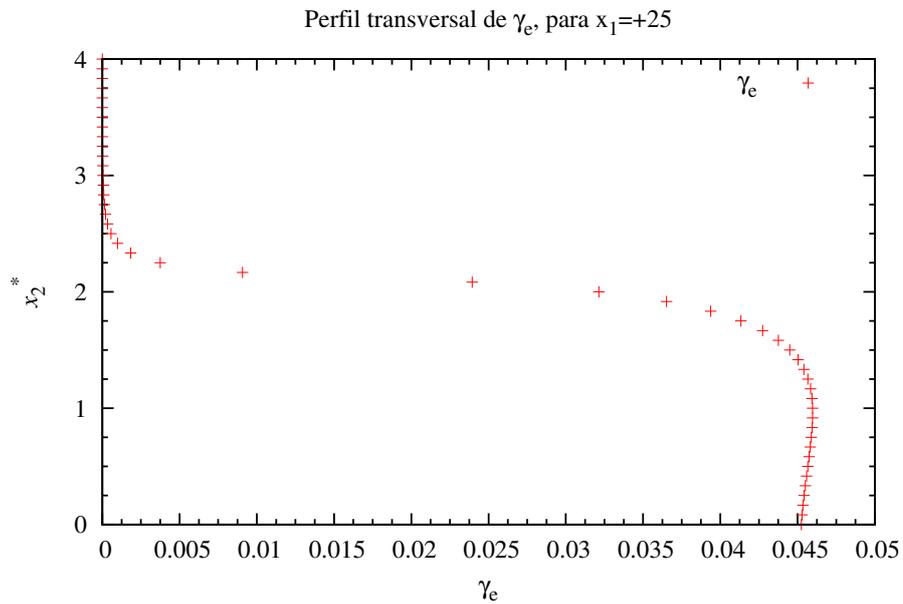


(c)

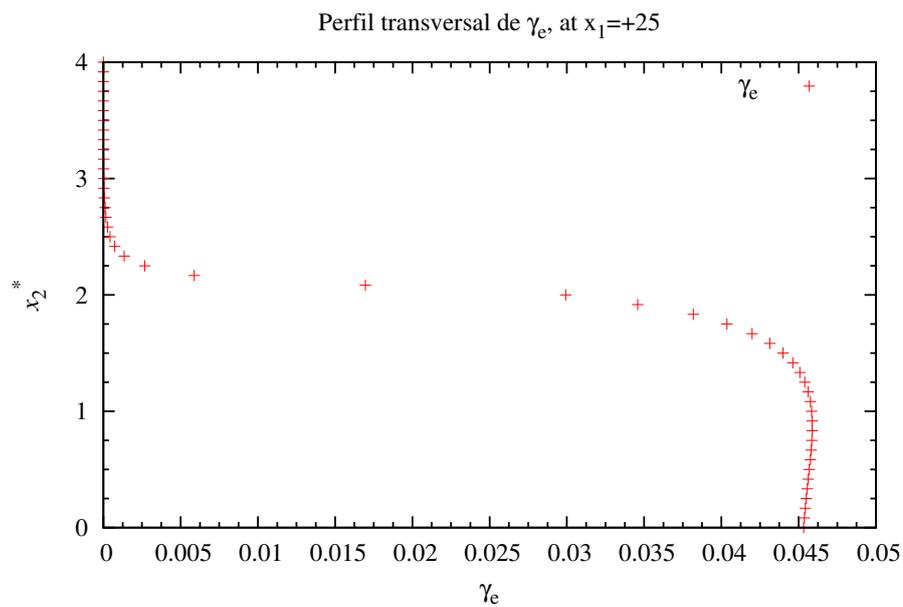


(d)

Figura 5.11: Perfil transversal da deformação elástica: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$.



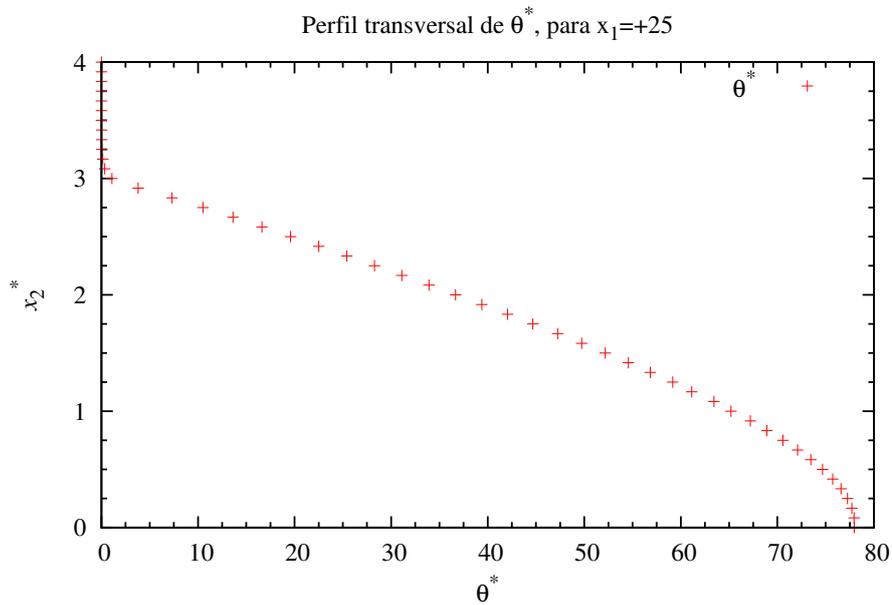
(e)



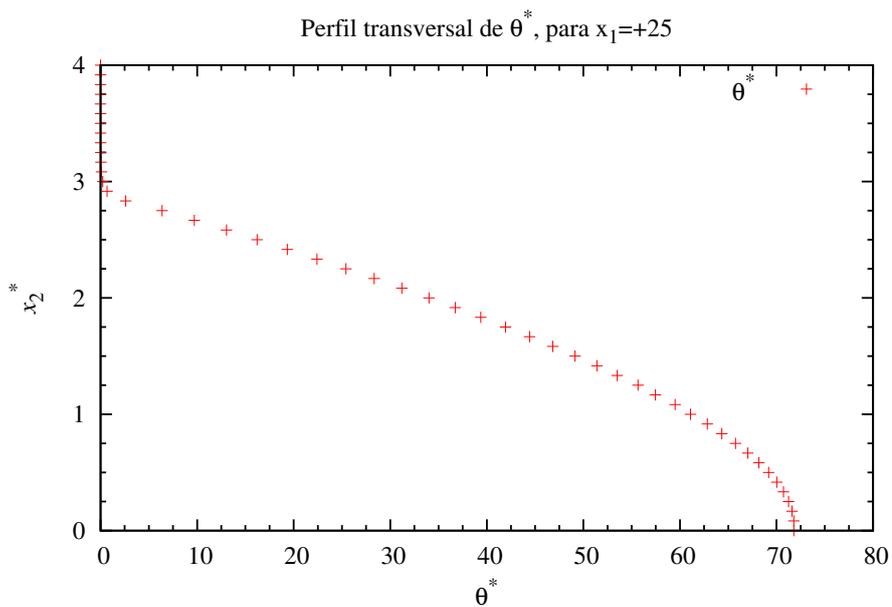
(f)

Figura 5.12: Perfil transversal da deformação elástica: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,2$; (f) $U^* = 4,5$.

Os perfis transversais da deformação elástica apresentados nas Figs.(5.13) – (5.15), complementam a discussão das Figs.(5.10) – (5.12), pois confirmam a posição e tamanho das regiões não escoadas. Estes perfis da deformação elástica mostram que a medida que os valores de x_2 se aproximam da linha de centro do canal o tempo de relaxação é maior e que para maiores valores de U^* mais próximo da linha de centro inicia-se a formação da região não escoada confirmando, desta forma, o estreitamento destas regiões.

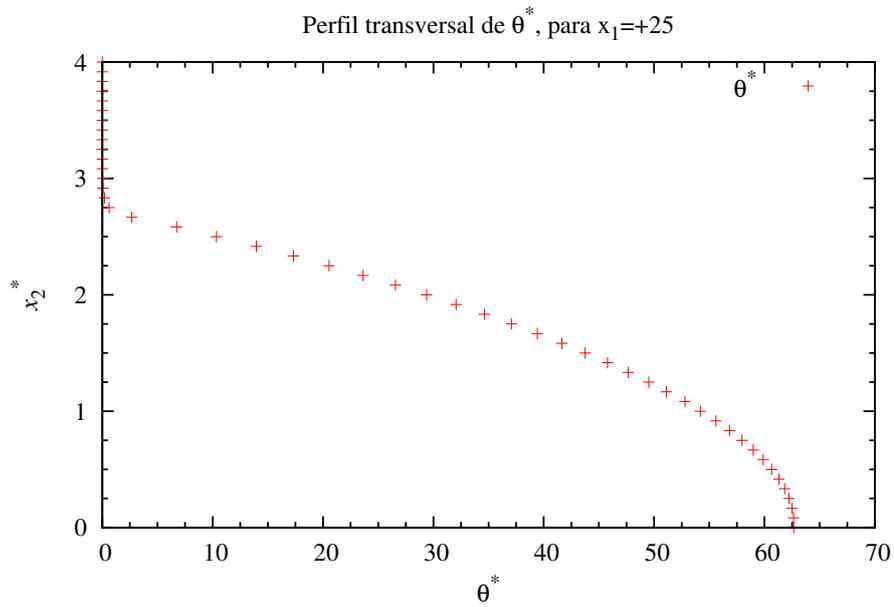


(a)

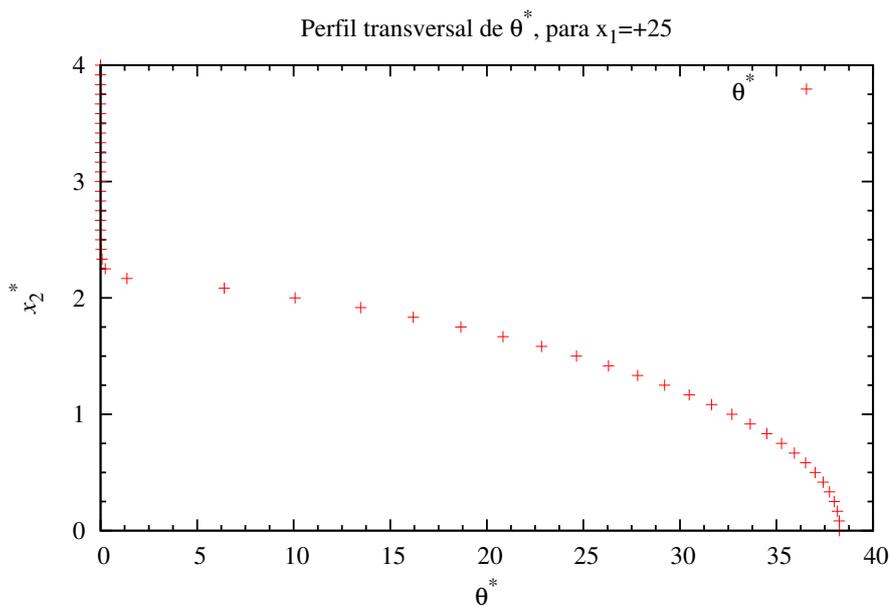


(b)

Figura 5.13: Perfil transversal do tempo de relaxação: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$.

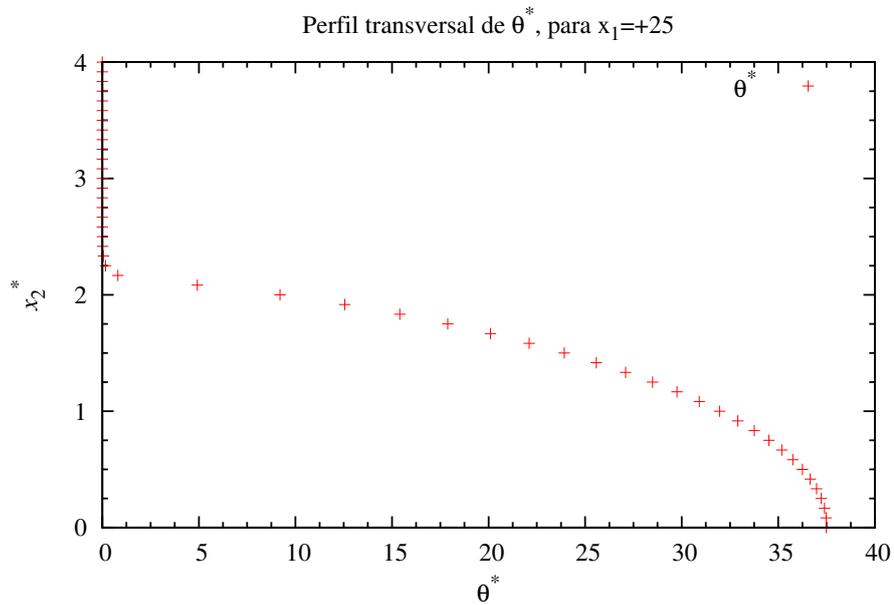


(c)

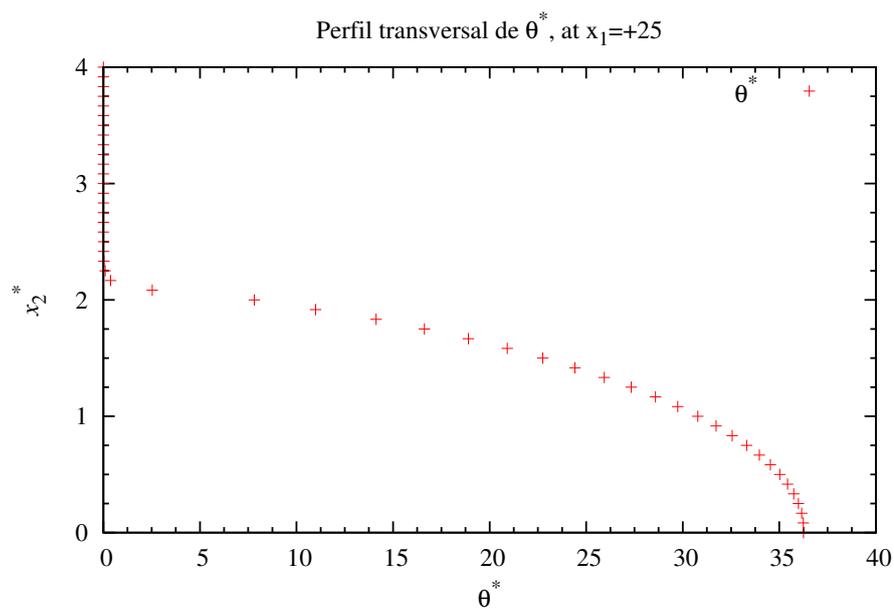


(d)

Figura 5.14: Perfil transversal do tempo de relaxação: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$.



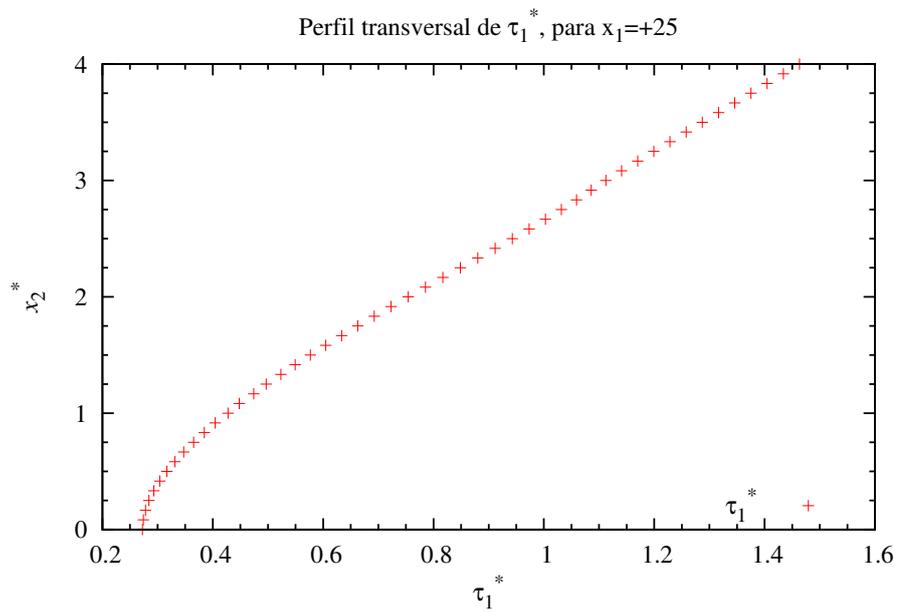
(e)



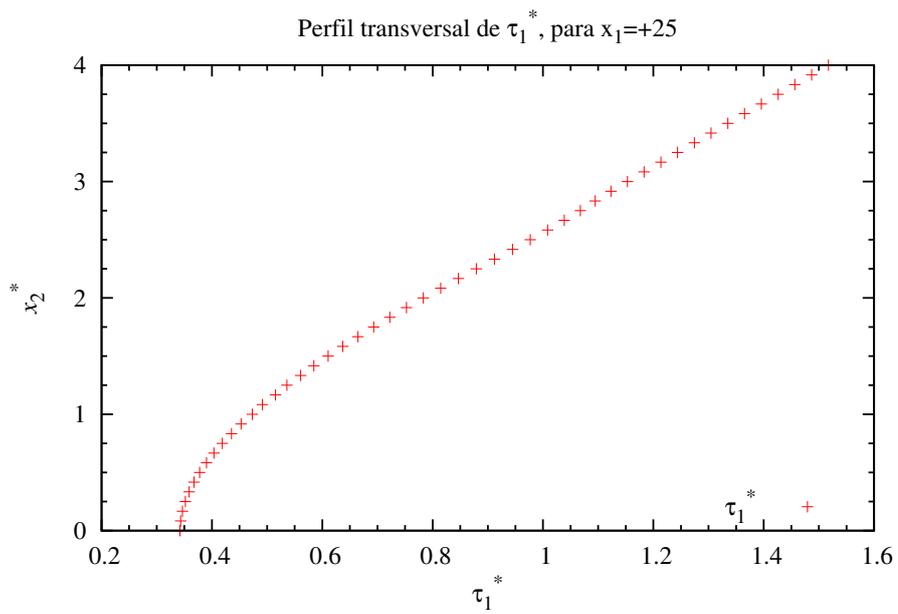
(f)

Figura 5.15: Perfil transversal do tempo de relaxação: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$.

Nas Figs.(5.16) – (5.18), são apresentados os perfis da intensidade da tensão. Os resultados mostram que para maiores valores de U^* a intensidade da tensão fora das regiões não escoadas cresce linearmente enquanto que nesta região a tensão varia pouco, isto porque nas regiões em que o material não escoou os níveis de tensões são menores, pois o material já está num estado estruturado ($\lambda \cong 1$).

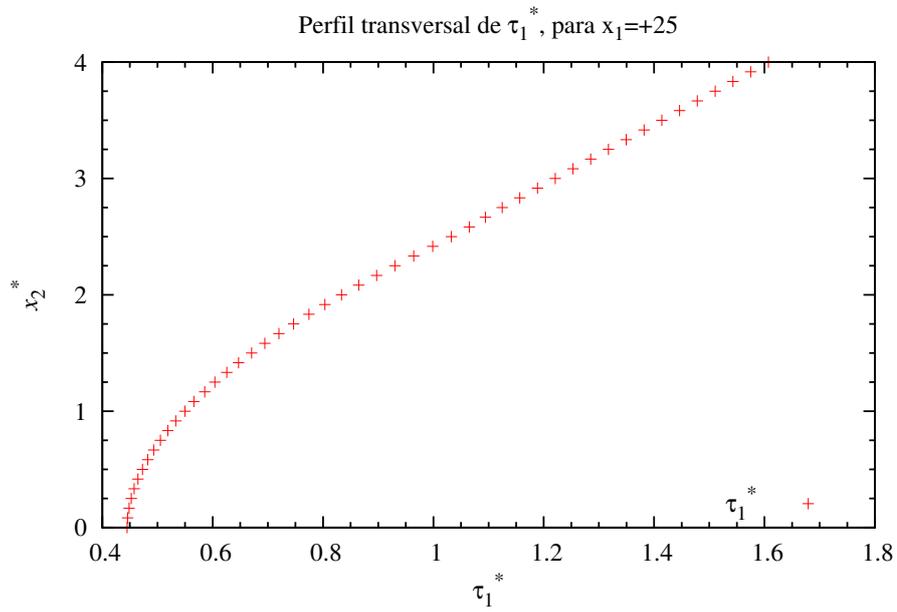


(a)

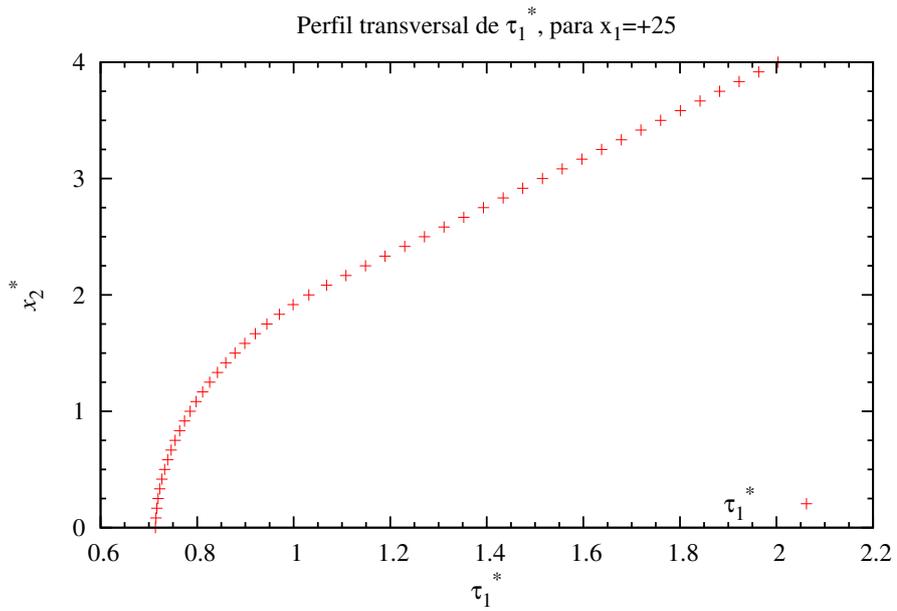


(b)

Figura 5.16: Perfil transversal da intensidade da tensão: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$.

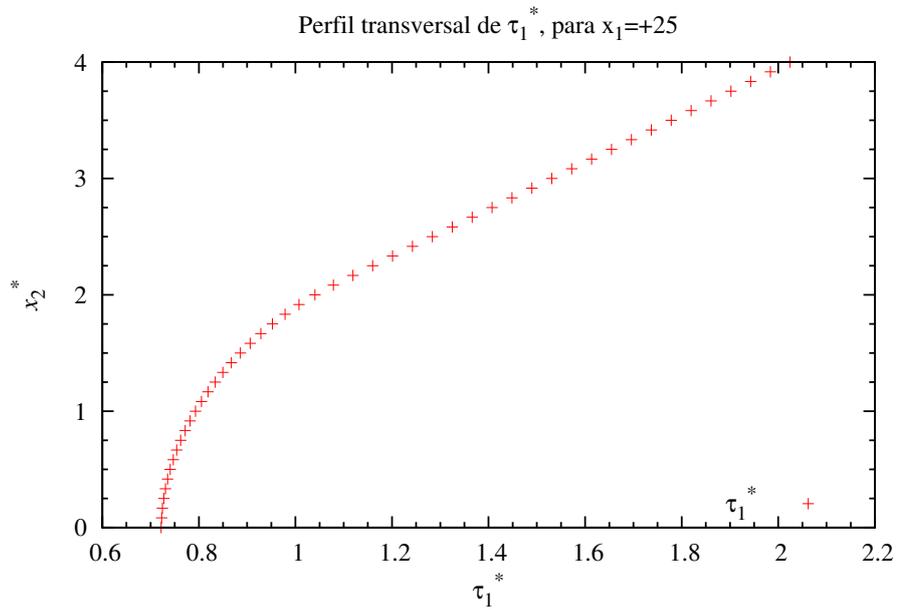


(c)

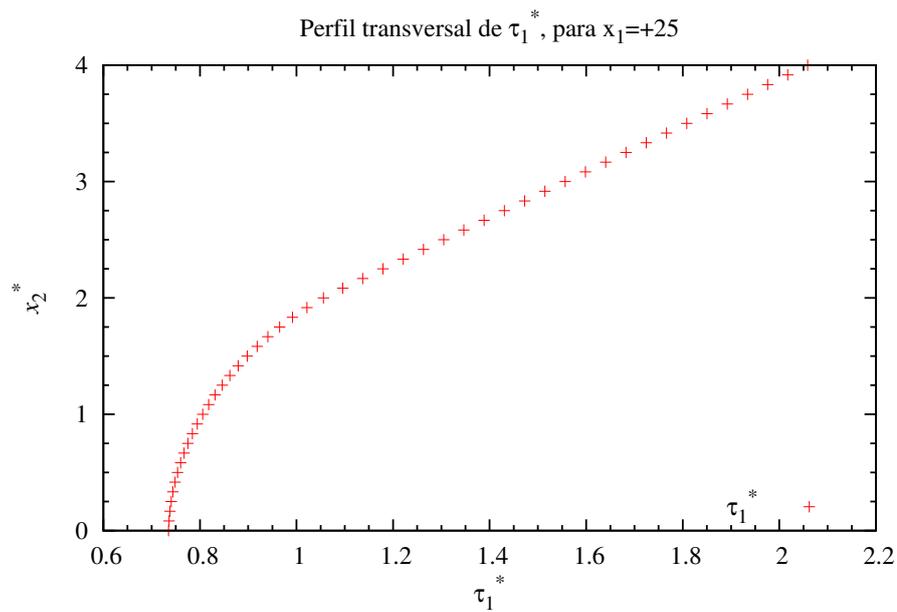


(d)

Figura 5.17: Perfil transversal da intensidade da tensão: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$.



(e)



(f)

Figura 5.18: Perfil transversal da intensidade da tensão: para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $U^* = 0,0001$ (b) $U^* = 0,5$; (c) $U^* = 1$; (d) $U^* = 4,1$; (e) $U^* = 4,5$.

5.2.2 Efeito da elasticidade

As Figs.(5.22) e (5.23) apresentam a influência da elasticidade no nível de estruturação do material bem como na morfologia das regiões não escoadas, respectivamente. Se comparado aos resultados preditos na literatura clássica de viscoplasticidade, este conjunto de resultados apresenta comportamento singular, pois quando o material se torna muito flexível, a zona não escoada do canal menor não só invade o canal maior como também, para valores mais elevados de θ_0^* , chega a se unir a zona não escoada do canal maior – formando uma estrutura em forma de "dedo" nesta região.

Este efeito não usual pode ser creditado ao alto nível de flexibilidade do material¹ (para altos valores de θ_0^*) o qual, junto a linha de simetria (região que o escoamento experimenta as menores intensidades de tensões), faz com que o material se deforme elasticamente, conforme os resultados obtidos para os perfis transversais da deformação elástica nas Figs.(5.19) – (5.21), relaxando localmente seu nível de tensão e impedindo desta maneira, que ele alcance seu limite de ruptura e venha a partir a região não escoada do canal menor.

¹Dizer que o material é mais flexível, significa que ele suporta tensões sem romper. Exemplo desse tipo de material é o alumínio, borracha, saliva humana, dentre outros

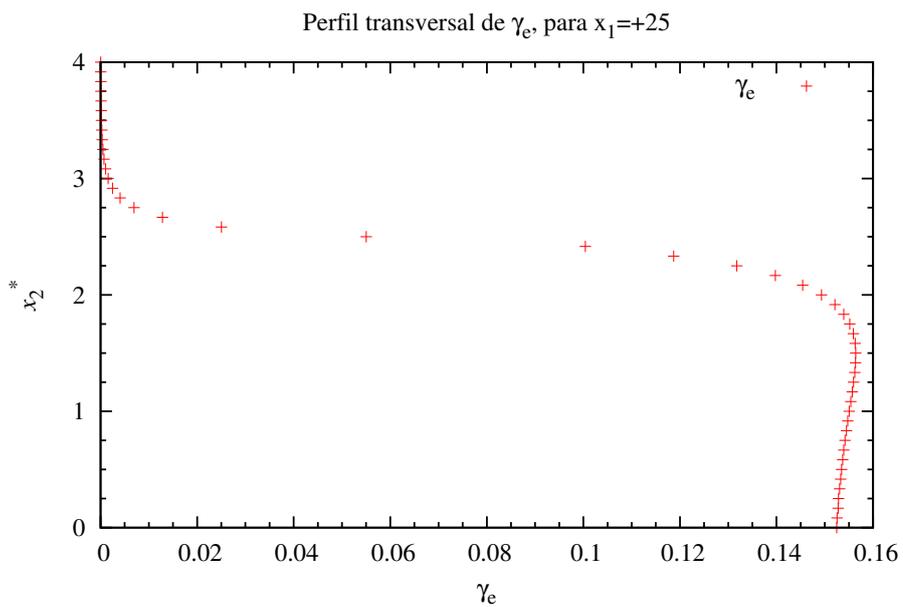
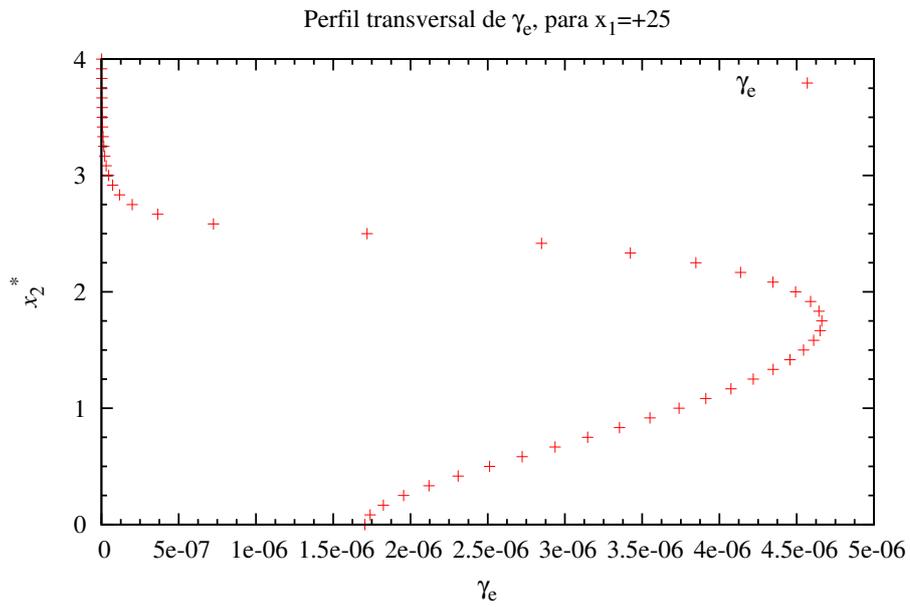


Figura 5.19: Perfil transversal da deformação elástica: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$.

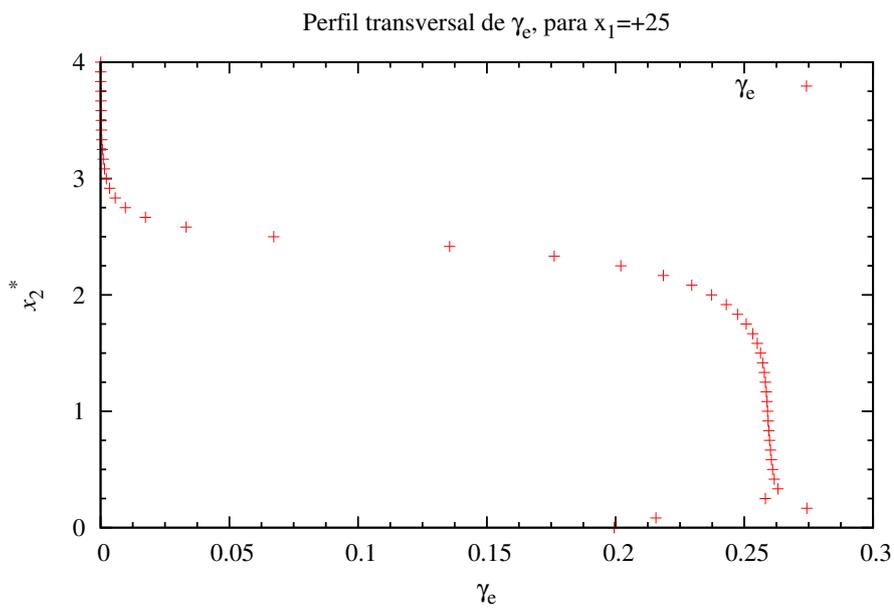
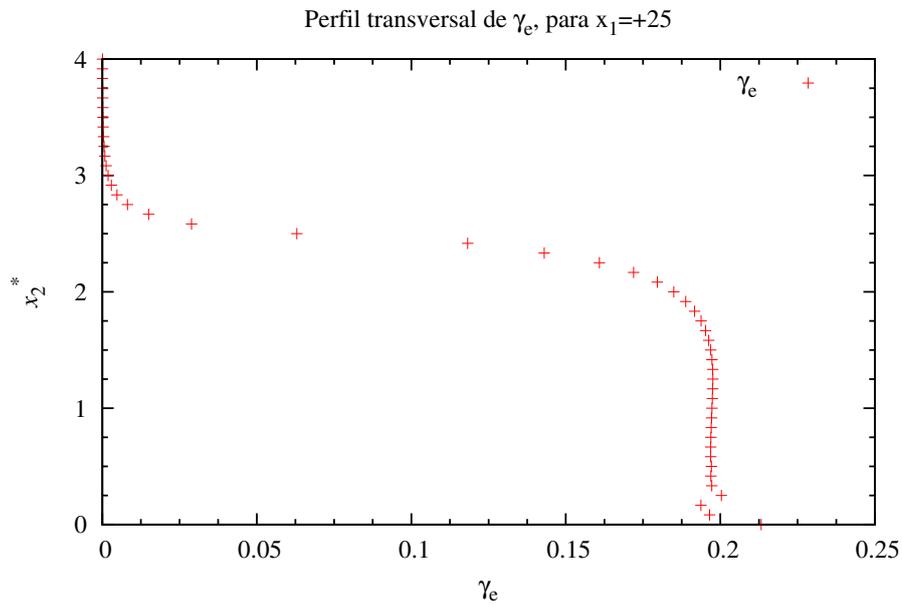


Figura 5.20: Perfil transversal da deformação elástica: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$.

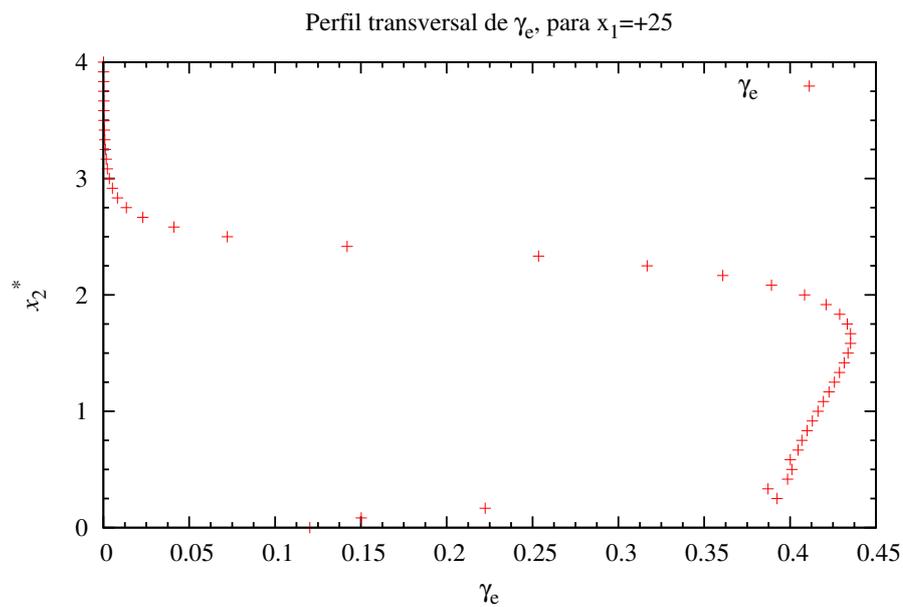
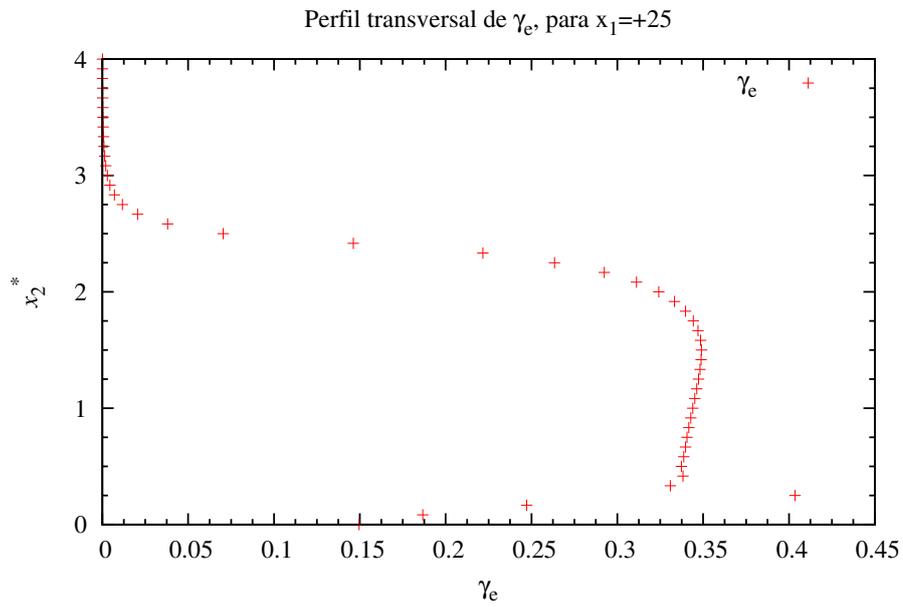


Figura 5.21: Perfil transversal da deformação elástica: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$.

É importante ressaltar da análise das Figs.(5.19) – (5.21), que outro parâmetro governante de fundamental importância neste processo é o tempo característico t_{eq} . Se o material atingindo o limite de escoamento (τ_y) faz, necessariamente, a zona não escoada do canal menor na vizinhança do plano de expansão escoar, o mesmo poderia ocorrer caso este material apresentasse pouca tixotropia, ou seja, valores suficientemente baixos de t_{eq}^* também fariam com que o material se reestruturasse mais rapidamente impedindo desta maneira que ele viesse a se deformar elasticamente junto a linha de simetria.

Portanto, os efeitos apreciados nas Figs.(5.22) e (5.23) mostram que se θ_0^* é suficientemente elevado para permitir a deformação elástica da zona não escoada junto a linha de centro, o t_{eq}^* imposto aos casos aplicados a elas (no caso, $t_{eq}^* = 1$) é suficientemente longo para permitir que esta deformação elástica observada viesse a ocorrer, caso contrário, ou seja, se t_{eq} experimentasse valores baixos nos casos mais elásticos, o material após a quebra provocada pela alteração de tensão provocada pela sua passagem pela expansão, iria logo se reestruturar, impedindo assim, que houvesse comprimento para que a deformação elástica ocorresse. A resposta do material a tensão não é instantânea e este é um comportamento típico de materiais que apresentam comportamento tixotrópico.

Um outro efeito observado, porém de magnitude bem inferior aos anteriormente discutidos nas Figs.(5.22) e (5.23), é um ligeiro alongamento das zonas mortas na direção das linhas de corrente do escoamento principal. Outra observação importante que emerge da análise das Figs.(5.22) e (5.23) é o efeito da memória elástica, que faz com que a presença da expansão seja sentida mais distante no canal maior, isto é, as regiões não escoadas do canal maior se formam cada vez mais a jusante do plano de expansão.

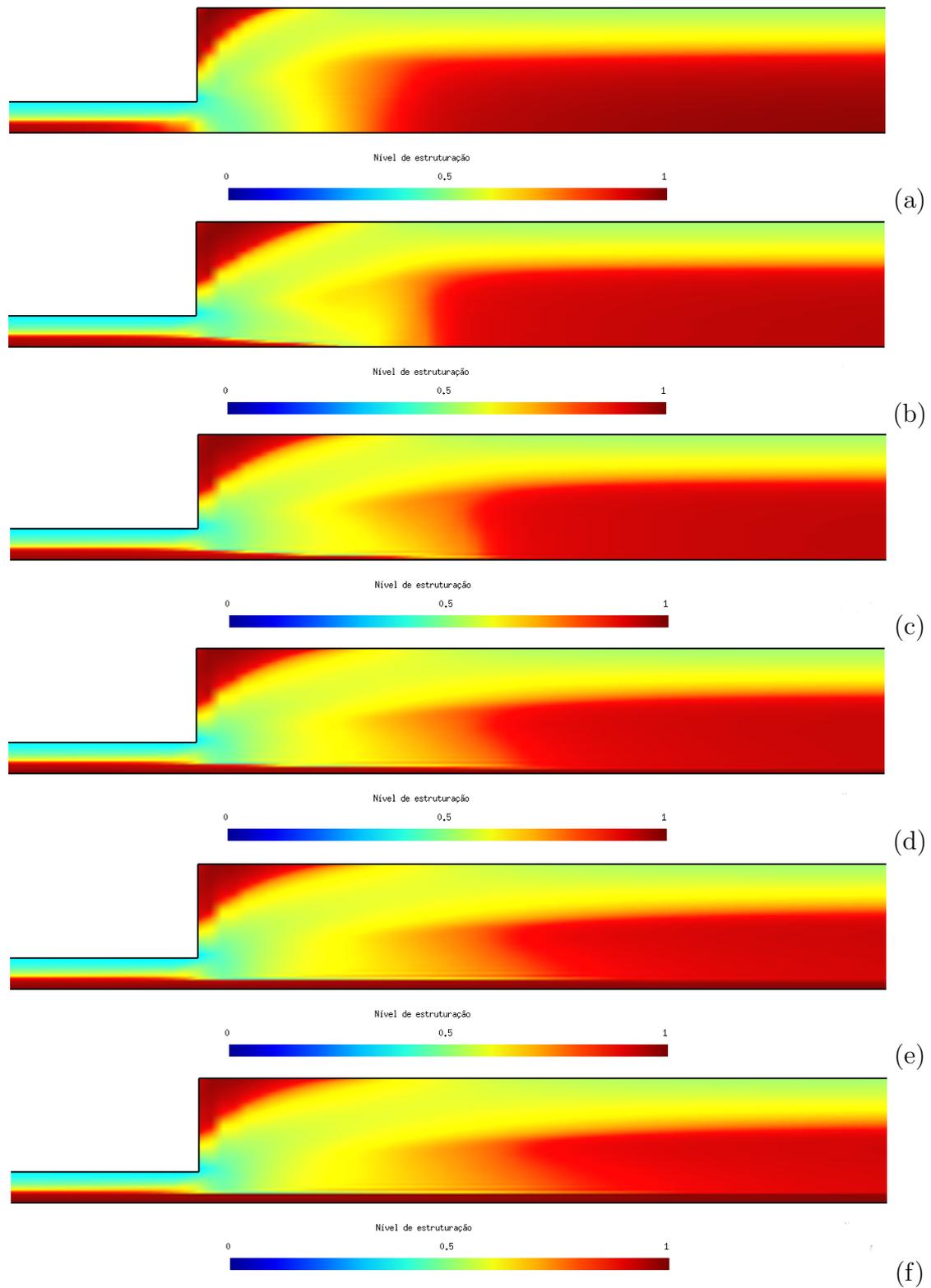


Figura 5.22: Efeito da elasticidade: λ -isobandas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$.

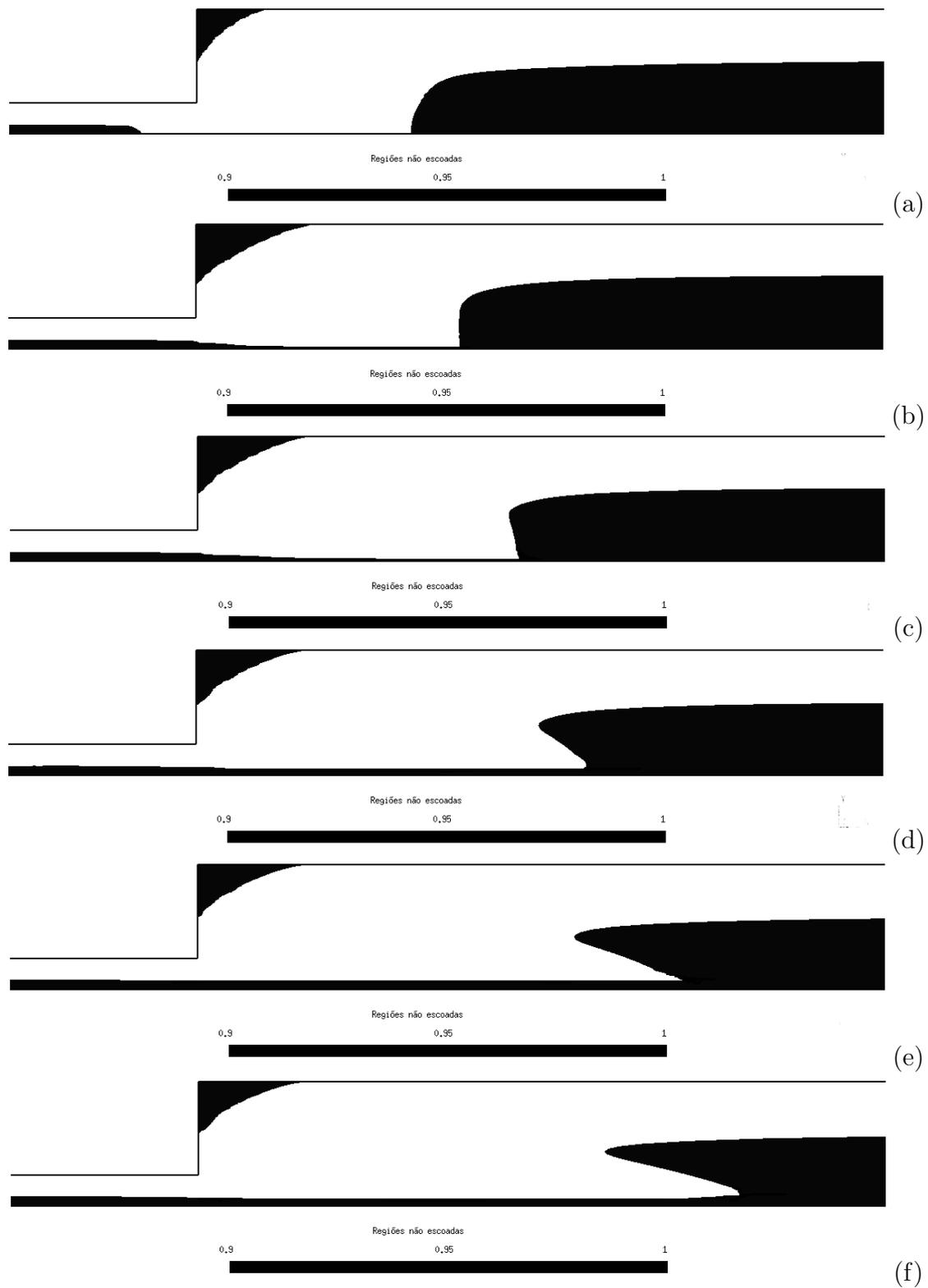


Figura 5.23: Efeito da elasticidade: Regiões não escoadas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$.

As isobandas da deformação elástica apresentadas na Fig (5.24), complementam a discussão das Figs.(5.22) e (5.23), visto que nelas são apresentados resultados que mostram que somente é adicionada elasticidade no interior das regiões não escoadas, para elevados valores de θ_0^* , ou seja, observa-se que não há deformação elástica nas regiões escoadas, pois nestas o tempo de relaxação θ_0^* torna-se muito pequeno. Nas regiões não escoadas a deformação elástica (γ_e) é nula quando o tempo de relaxação θ_0^* é igual ou próximo a zero (limite viscoplástico) e aumenta conforme θ_0^* também aumenta.

Desta forma, o aumento do tempo de relaxação concede ao material não escoado a capacidade de sofrer deformação elástica, suavizando o campo de tensões. Isto é, as mudanças de tensões se tornam menos acentuadas, o que tende a fazer com que o nível de estruturação do material mude mais lentamente à medida que se deslocam ao longo do domínio do escoamento.

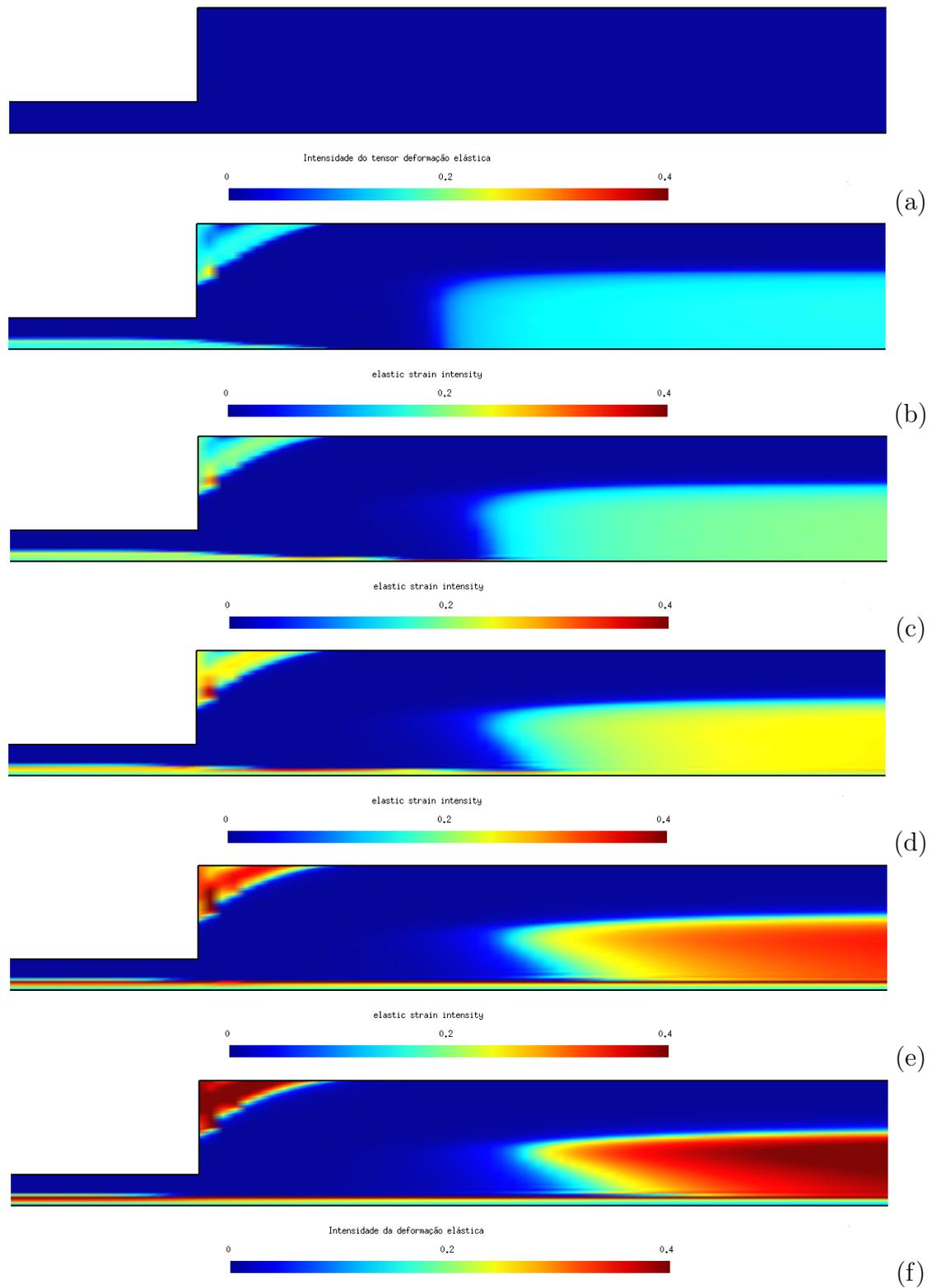


Figura 5.24: Efeito da elasticidade: γ_e -isobandas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $t_{eq}^* = 1.0$ e $m = 10$: (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$.

Os perfis transversais do tempo de relaxação nas Figs.(5.25) – (5.27), mostram a formação da estrutura em forma de 'dedo' da região não escoada do canal maior que surge com o aumento de θ_0^* . Estes resultados dos perfis do tempo de relaxação confirmam, portanto, os resultados das Figs.(5.22) – (5.24) onde, o tempo de relaxação, nas regiões que escoam, é nulo pois nelas o material está totalmente desestruturado $\lambda \cong 0$.

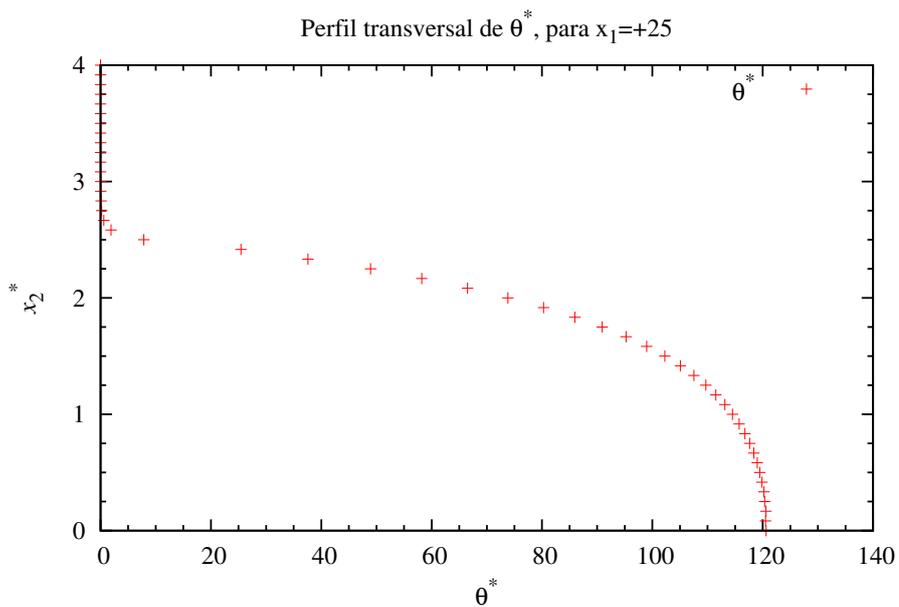
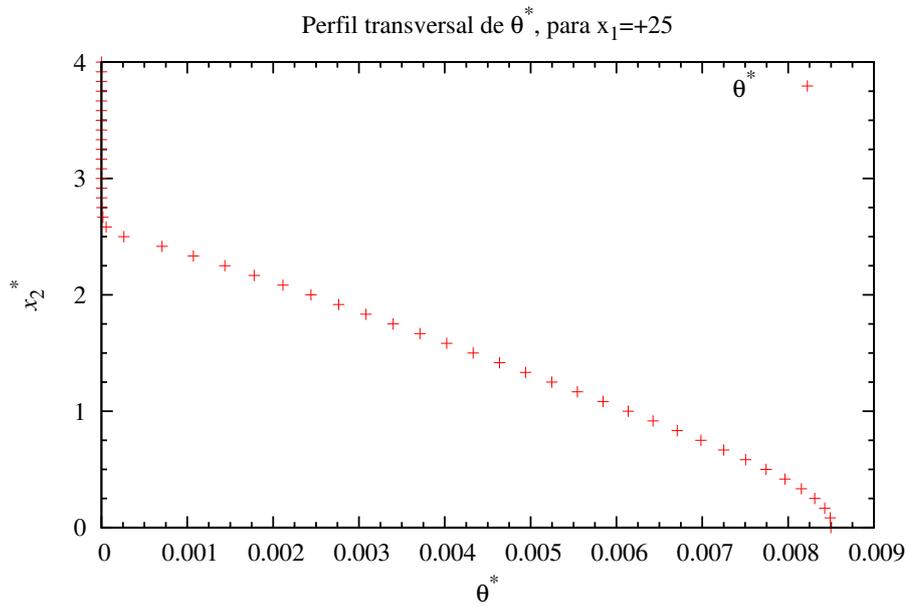
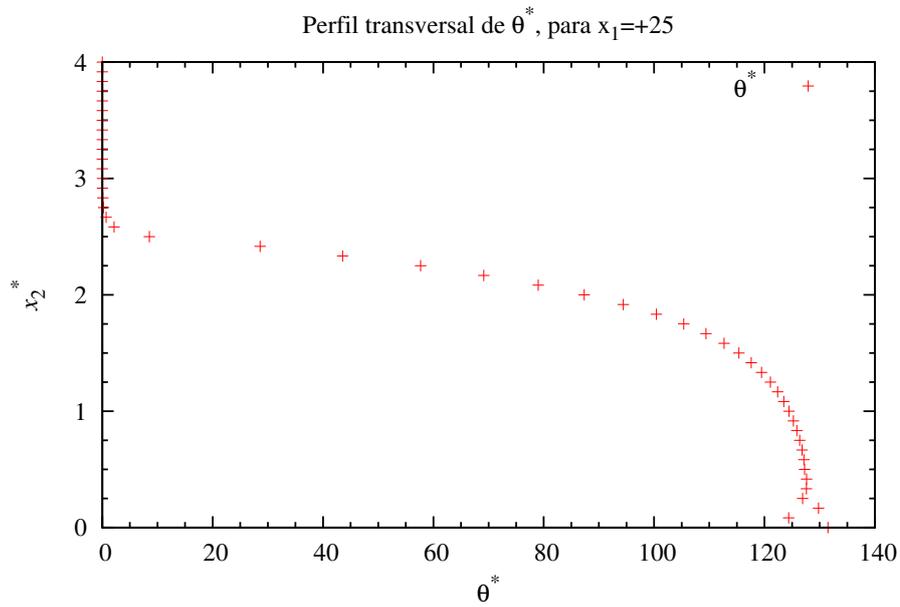
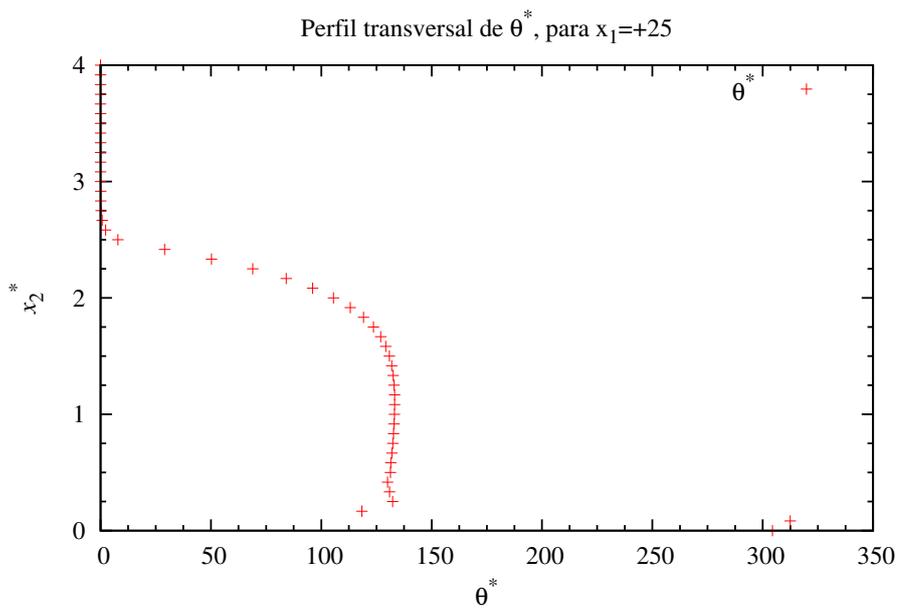


Figura 5.25: Perfil transversal do tempo de relaxação: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$.



(c)



(d)

Figura 5.26: Perfil transversal do tempo de relaxação: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$.

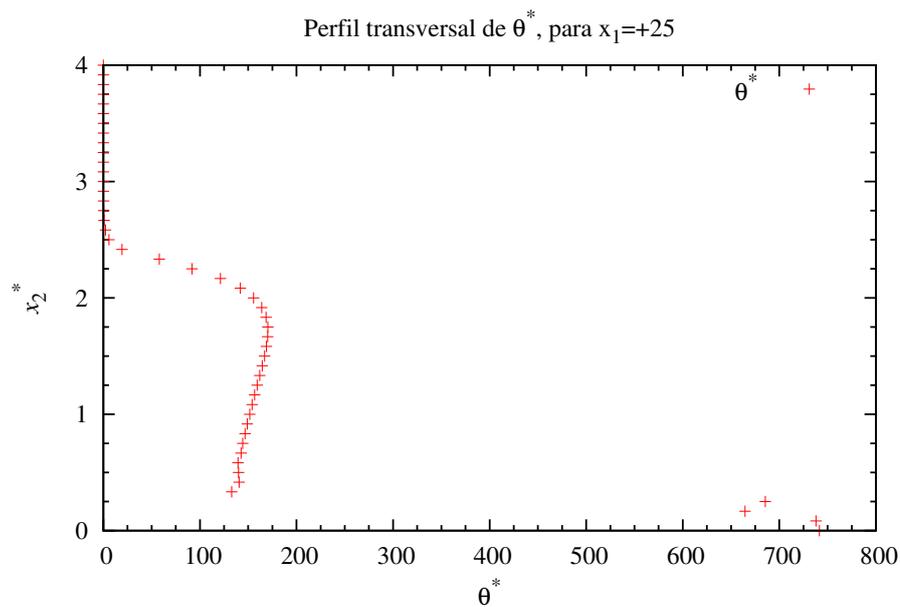
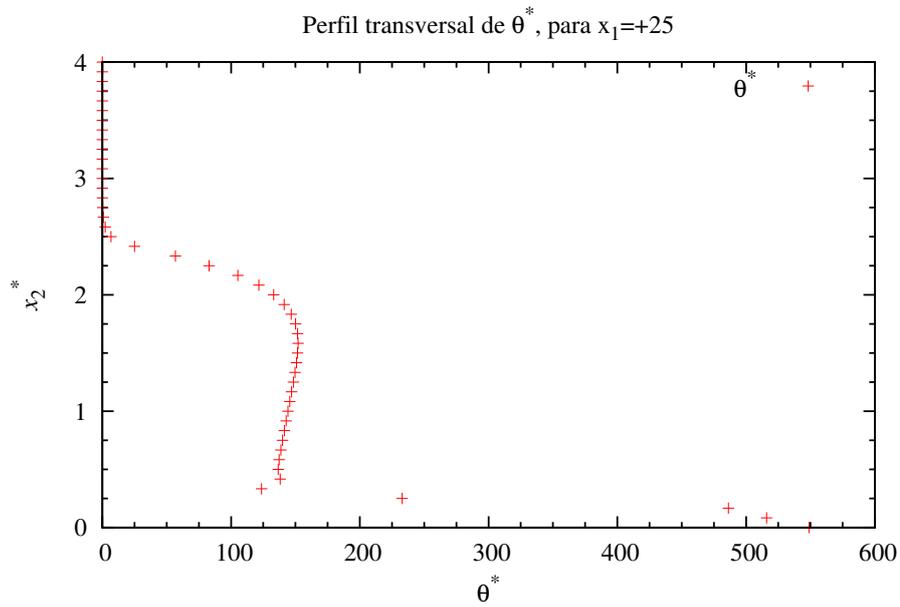


Figura 5.27: Perfil transversal do tempo de relaxação: para (a) $\theta_0^* = 1 \times 10^{-2}$; (b) $\theta_0^* = 3.3 \times 10^2$; (c) $\theta_0^* = 4 \times 10^2$; (d) $\theta_0^* = 5 \times 10^2$, (e) $\theta_0^* = 6.7 \times 10^2$, (f) $\theta_0^* = 8.3 \times 10^2$.

5.2.3 Efeito da tixotropia

Nas Figs.(5.28) e (5.29) são apresentados os efeitos da tixotropia através das isobandas do parâmetro de estrutura (λ) parametrizado pelo tempo caracteístico, t_{eq} – a saber, é uma escala de tempo para o processo de construção da microestrutura, porém não o é para seu processo de colapso. Neste quadro de figuras são estudados os efeitos do aumento do comportamento tixotrópico em um material elasto-viscoplástico.

Pode-se observar neste quadro de figuras que o efeito mais relevante é o fato do escoamento tampão se formar cada vez mais distante do plano de expansão. Este comportamento era esperado, pois o crescimento do tempo de equilíbrio provoca uma reestrutuação mais lenta da microestrutura do material após a alteração de tensão na vizinhança da expansão – Isto porque t_{eq} é uma escala de tempo para o processo de reconstrução da microestrutura do material.

Logo, as partículas materiais no estado totalmente estruturado ao deixarem o canal menor permanecem mais tempo no seu estado não escoado quando da exposição aos níveis elevados de tensão encontrados na vizinhança do plano de expansão devido ao atraso na resposta ao aumento desta tensão.

Da mesma forma, as partículas materiais com baixo nível de estruturação que deixam a vizinhança do plano de expansão e que avançam para a região de baixas tensões do canal a jusante demoram cada vez mais tempo para aumentar o seu nível de estruturação. Isso se deve a resposta lenta nas modificações da microestrutura do material tixotrópico, porém esta resposta lenta torna-se progressivamente maior à diminuição da tensão com o aumento de t_{eq} .

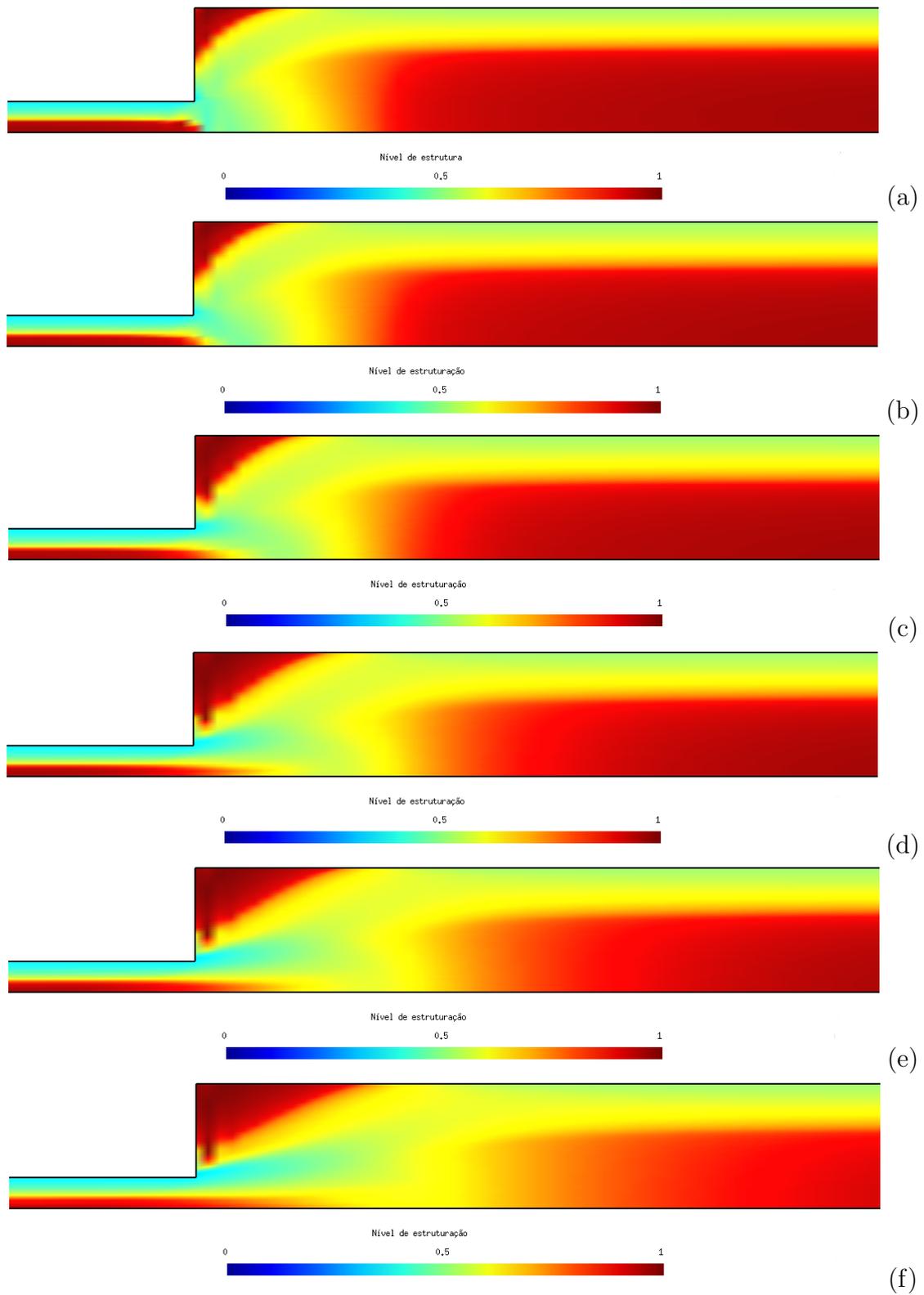


Figura 5.28: Efeito da tixotropia: λ -isobandas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $\theta_0^* = 100$ e $m = 10$: (a) $t_{eq}^* = 0,05$; (b) $t_{eq}^* = 1$; (c) $t_{eq}^* = 4$; (d) $t_{eq}^* = 10$; (e) $t_{eq}^* = 15$; (f) $t_{eq}^* = 25$.

Da Fig.(5.29), observa-se que as regiões não escoadas do canal menor e do canal maior não se fundem para elevados valores de t_{eq} , ao contrário do que se observa para elevados valores do tempo de relaxação θ_0^* . Outra comparação relevante a ser feita entre os efeitos tixotrópicos e o tempo de relaxação, é que a extremidade a montante da região de escoamento tampão do canal maior permanece praticamente plana com o aumento do valor de t_{eq} ao passo que ao aumentarmos θ_0^* , este apresenta uma forma de "dedo".

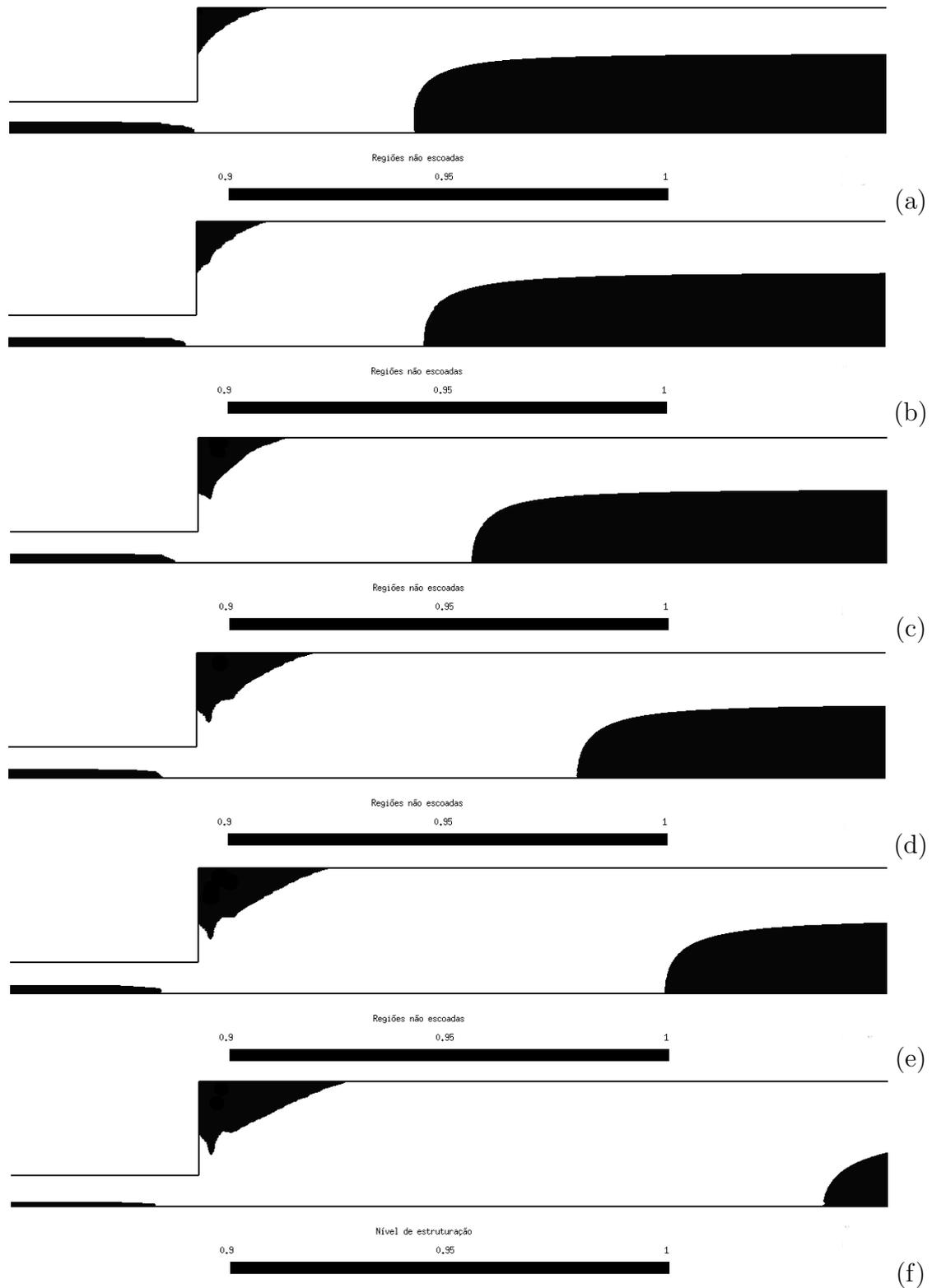


Figura 5.29: Efeito da tixotropia: regiões não escoadas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $\theta_0^* = 100$ e $m = 10$: (a) $t_{eq}^* = 0,05$; (b) $t_{eq}^* = 1$; (c) $t_{eq}^* = 4$; (d) $t_{eq}^* = 10$; (e) $t_{eq}^* = 15$; (f) $t_{eq}^* = 25$.

A Fig.(5.30) apresenta a distância em que as regiões não escoadas se formam a jusante da expansão. De acordo com a Eq.(3.11), tem-se que sem o termo de destruição, ou seja, $\tau < \tau_y$ e integrando esta equação tem-se que, conforme o modelo aplicado nesta tese, o tempo que a microestrutura do material leva para se reestruturar é da mesma ordem de grandeza de t_{eq}^* . Desta forma, uma porção do material que esta na expansão, em um estado desestruturado, viaja no canal maior durante t_{eq} segundos para ficar estruturado novamente. O gráfico mostra que, durante este tempo, a porção do material vai percorrer uma distância de ordem de grandeza igual a $U^*t_{eq}^*$. Desta forma, como para os resultados apresentados na Fig.(5.30) $t_{eq}^* = 1$, $L_{desenv}^*/U^*t_{eq}^* = L_{desenv}/U.t_{eq}$ (que é o número tixotrópico) também será de ordem 1.

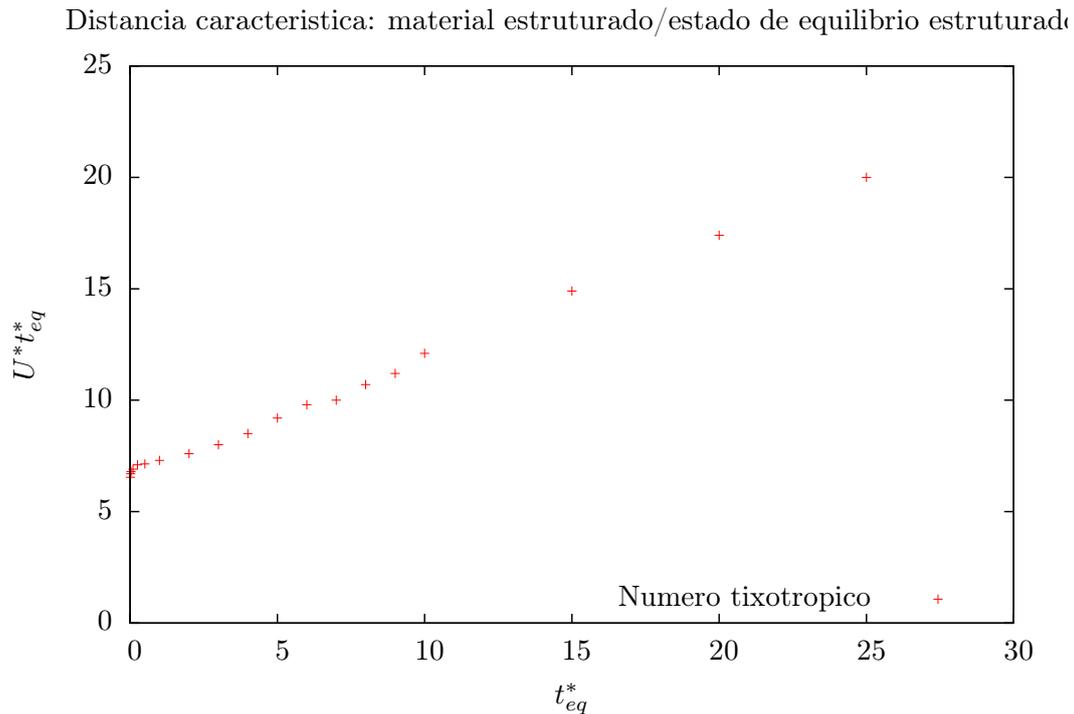


Figura 5.30: Comprimento tixotrópico a partir do número tixotrópico

Os efeitos da deformação elástica são apresentados na Fig.(5.31), onde observa-se que mantendo-se o tempo de relaxação fixo bem como a intensidade da vazão (U^*), $\dot{\gamma}_e$ diminui significativamente com o aumento do t_{eq} . Também com o aumento do tempo característico, a região a jusante da expansão, onde não observa-se deformação elástica, fica cada vez maior, empurrando, desta forma, a região do escoamento tampão na direção da saída do canal maior.

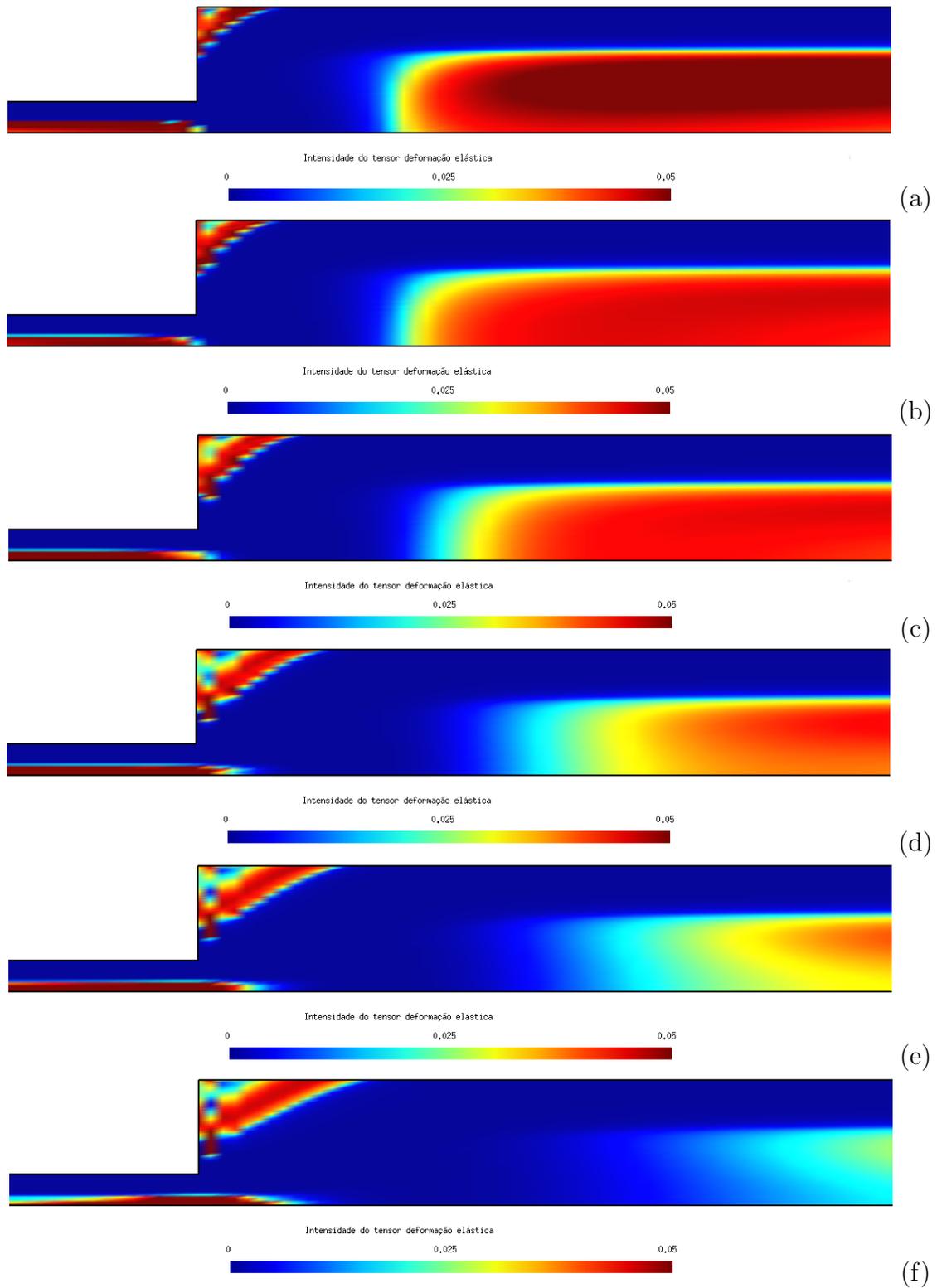


Figura 5.31: Efeito da tixotropia: γ_e -isobandas para $\eta_0^* = 10^3$, $\eta_\infty^* = 10^{-2}$, $n = 0.5$, $U^* = 1$, $\theta_0^* = 100$ e $m = 10$: (a) $t_{eq}^* = 0,05$; (b) $t_{eq}^* = 1$; (c) $t_{eq}^* = 4$; (d) $t_{eq}^* = 10$; (e) $t_{eq}^* = 15$; (f) $t_{eq}^* = 25$.

Na Fig.(5.32) são apresentados os resultados para a perda de carga E_l^* como uma função do tempo de relaxação θ_0^* . Com exceção de uma faixa muito pequena para valores próximos de $\theta_0^* = 0$, E_l^* aumenta a medida que o tempo de relaxação, θ_0^* , também aumenta, pode-se observar que a perda de carga é uma função monotônica crescente de θ_0^* .

O aumento é suave para baixo valores de θ_0^* e, porém, tornando-se bastante acentuados na faixa intermediária, e tendendo a se estabilizar para valores altos de θ_0^* . A tendência observada, é em geral, de acordo com o comportamento observado em diferentes escoamentos extensionais viscoelásticos (por exemplo, Alves et al., 2003).

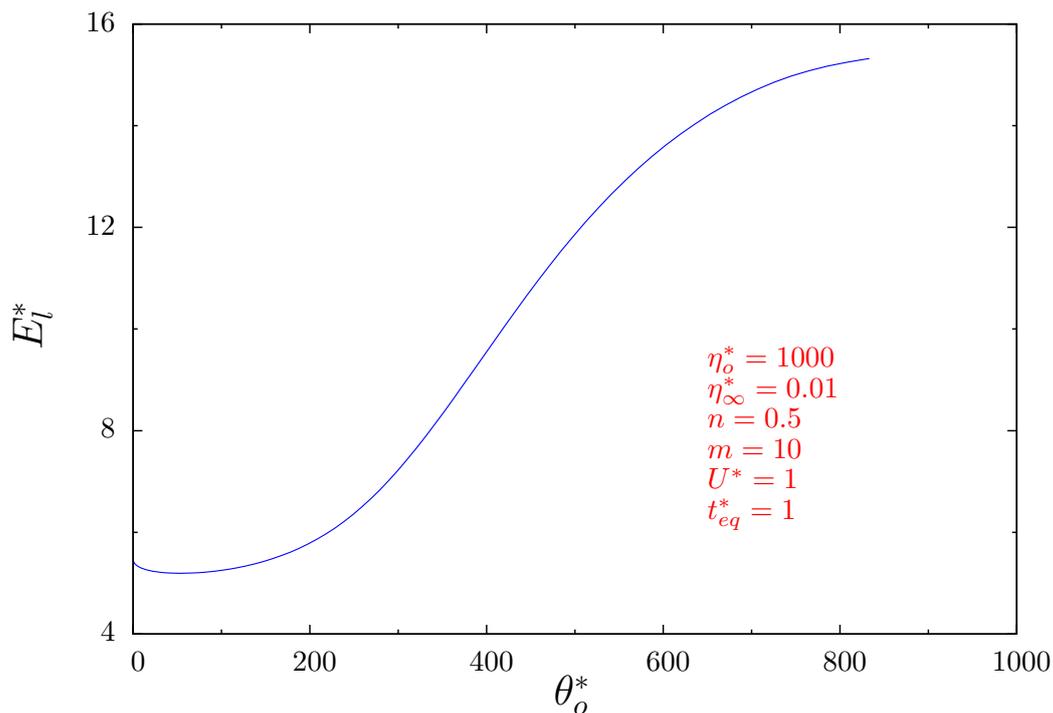


Figura 5.32: Efeito do tempo de relaxação (θ_0^*) na perda de carga (E_l^*)

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

6.1 Conclusões

Nesta tese foi feita uma investigação numérica de um escoamento sem inércia de material elasto-viscoplástico incompressível com comportamento tixotrópico, que escoar em um canal que experimenta uma expansão planar abrupta. A formulação foi baseada no modelo constitutivo recentemente proposto em de Souza Mendes, 2011, para materiais elasto-viscoplásticos tixotrópicos. Os efeitos da elasticidade, tixotropia e intensidade do escoamento foram investigados para uma gama relevante dos parâmetros que regem o fenômeno.

O modelo elasto-viscoplástico utilizado é composto por duas equações diferenciais, sendo uma equação viscoelástica para o campo de tensão e outra evolutiva para o parâmetro de estrutura do material – além das equações usuais de conservação de massa e momento para materiais incompressíveis escoando em regime permanente.

O modelo incorpora a dependência dos tempos de relaxação e retardo, bem como uma função de viscosidade viscoplástica, com a taxa de construção e colapso da microestrutura do material. Devido a esta característica, este modelo permite dosar elasticidade somente nas regiões não escoadas dos materiais viscoplásticos – visto que a função do módulo de elasticidade, da forma como foi apresentada nesta tese, faz com que esta tenda a infinito fora das regiões não escoadas e, conseqüentemente o tempo de relaxação do material tende a zero anulando os efeitos da elasticidade dentro delas. A equação de evolução proposta apresenta valores assintóticos para o parâmetro de estrutura, a saber, $\lambda \rightarrow 0$ significa que o material encontra-se em um estado totalmente colapsado e $\lambda \rightarrow 1$ totalmente estruturado.

O esquema *EVSS* foi aplicado no intuito de aumentar a V-elipsidade da equação do movimento. Segundo este esquema o tensor de tensão extra é decomposto em uma parcela puramente viscosa newtoniana e numa parcela viscoelástica (UCM). A solução numérica foi obtida utilizando-se uma formulação à quatro campos de Galerkin mínimos quadrados (GLS) em termos do parâmetro de estrutura, tensão extra, pressão e velocidade.

O parâmetro adimensional que levou em conta a cinemática do escoamento, U^* , surge a partir da condição de contorno adimensional de Dirichlet para a velocidade. A equação de evolução adimensional para $\dot{\lambda}$ contribui para a análise adimensional do escoamento através do tempo de equilíbrio, t_{eq}^* , que representa uma escala de tempo para mudanças no nível de estruturação. O tempo de equilíbrio também foi adimensionalizado de maneira reológica, visto a frequência utilizada ser $\dot{\gamma}_1$, pois este parâmetro representa o início da região *power law* que é quando o material já reestruturou sua microestrutura.

O domínio computacional foi discretizado por diferentes malhas de elementos finitos não sobrepostos. Segundo o teste de independência de malha empregado foi selecionado uma malha com número de elementos lagrangeanos bilineares possuindo comprimento de malha mínimo adimensional $H_{u(min)} = 0,393539181$.

Dos resultados obtidos na análise da influência da cinemática do escoamento sobre a distribuição do seu nível de estruturação e sobre a posição e forma de suas zonas não escoadas, podemos concluir que o tamanho das regiões do escoamento tampão a montante bem como a jusante da expansão diminuem com o aumento da vazão, se afastando uma da outra. Este efeito está relacionado ao aumento do nível de tensão imposto pelos valores crescentes de U^* . Como nas regiões não escoadas o nível de tensão do material não excede o limite de escoamento, estas regiões naturalmente diminuiram de tamanho. Estes resultados confirmaram a boa capacidade de predição do modelo aplicado nesta tese, bem como a robustez de sua implementação computacional.

Por fim, da análise da influência da elasticidade, vale observar que a extremidade a montante da região não escoada do canal maior adquire um formato de cunha para valores mais elevados de U^* , indicando que a estruturação é mais rápida para as partículas materiais que se deslocam na vizinhança do plano de simetria, ou ainda que as partículas fora dessa vizinhança necessitam percorrer maiores distâncias para se estruturar. Finalmente, da análise das isobandas de $\dot{\gamma}_e$, pode-se concluir que os resultados confirmam que o modelo aplicado só acrescenta elasticidade às regiões não escoadas do escoamento, contrariamente aos modelos clássicos de viscoelasticidade.

Quanto aos efeitos da elasticidade, os resultados numéricos mostraram um comportamento singular, pois quando o material se torna muito flexível, a zona não escoada do canal menor invade o canal maior e, para valores elevados de θ_0^* , se une a zona não escoada do canal maior – formando uma estrutura em forma de "dedo" nesta região. Este efeito para altos níveis de θ_0^* é devido ao alto nível de flexibilidade do material o qual, junto a linha de simetria, faz com que ele deforme-se elasticamente, relaxando localmente seu nível de tensão, impedindo que ele venha a romper.

Portanto, os efeitos apreciados no estudo da elasticidade do material, mostraram que se θ_0^* foi suficientemente elevado para permitir a deformação elástica da zona não escoada junto a linha de centro, o t_{eq}^* imposto aos casos aplicados a elas (no caso, $t_{eq}^* = 1$) também foi suficientemente longo para permitir que esta deformação elástica ocorresse, caso contrário, iria logo se reestruturar, impedindo assim, que houvesse comprimento para que a deformação elástica ocorresse. Assim, a resposta do material a tensão não é instantânea e este é um comportamento típico de materiais que apresentam comportamento tixotrópico. Um outro efeito observado é um ligeiro alongamento das zonas mortas na direção das linhas de corrente. Vale ainda ressaltar o efeito da memória elástica, que faz com que a presença da expansão

seja sentida mais distante no canal maior a medida que o grau de elasticidade do material aumenta, resultando assim numa reestruturação mais tardia do mesmo.

Quanto aos efeitos da tixotropia, pode-se concluir que ambas regiões não escoadas se formam cada vez mais distante do plano de expansão, comportamento este que confirma o predito pela equação de evolução, pois o crescimento de t_{eq} provoca uma reestruturação mais lenta da microestrutura do material em resposta a alteração de tensão imposta pela expansão do canal. Os resultados mostram que as regiões não escoadas do canal menor e do canal maior não se fundem para elevados valores de t_{eq} , ao contrário do que se observa para elevados valores do tempo de relaxação θ_0^* .

Outra comparação relevante a ser feita entre os efeitos tixotrópicos e o tempo de relaxação, é que a extremidade a montante da região de escoamento tampão do canal maior permanece praticamente plana com o aumento do valor de t_{eq} ao passo que ao aumentarmos θ_0^* , este apresenta uma forma de "dedo". Dos efeitos tixotrópicos, ainda podemos concluir que a porção do material percorre uma distância de ordem de grandeza igual a $U^*t_{eq}^*$ e para, por exemplo, $t_{eq}^* = 1$, $L_{desenv}^*/U^*t_{eq}^* = L_{desenv}/U.t_{eq}$ (que é o número tixotrópico) também será de ordem 1, ou seja, a distância que uma porção de material percorre no canal maior é da mesma ordem de grandeza de t_{eq} .

Por fim, a análise da perda de carga E_l^* como uma função do tempo de relaxação θ_0^* , aponta que, com exceção de uma faixa muito pequena para valores próximos de $\theta_0^* = 0$, E_l^* é uma função monotônica crescente de θ_0^* . A tendência observada, é em geral, concordante com o comportamento observado em diferentes escoamentos extensionais viscoelásticos – por exemplo, Alves et al., 2003.

6.2 Perspectivas Futuras

Uma vez expostos estes comentários finais, podemos, ainda, listar como futuras extensões de trabalho os seguintes tópicos:

- I - Estender para o caso axissimétrico no intuito de estudar a influência da geometria no comportamento do escoamento;
- II - Melhorar a qualidade do pós processamento da rotina tixotrópica, ou seja, inclusão de gráficos locais ou integrais e perfis;
- III - Podemos pensar na expansão do modelo atual para 3D de modo a avaliar os efeitos de extremidades desconsiderados na modelagem bidimensional;
- IV - Empregar elementos finitos biquadráticos para melhorar a interpolação das variáveis primais;
- V - Aplicar a técnica de conformação logarítmica para o campo de tensão extra a fim de conseguir aproximar de maneira estável escoamento que apresentam número de Débora mais elevados;
- VI - Poderíamos, finalmente pensar na substituição da equação visco-elástica da tensão extra, visando, também obter resultados mais estáveis para problemas sujeitos a altos níveis de elasticidade. Por exemplo, modelos como PTT, PTTS e FENE-P, os quais são capazes de alcançar maiores níveis de elasticidade ainda gerando soluções fisicamente realistas;
- VII - Incluir os termos de inércia na equação do movimento a fim de investigar a influência da inércia nos escoamentos tixotrópicos.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acierno, D., La Mantia, F.P., Marrucci, G., Titomanlio, G.. A non-linear viscoelastic model with structure-dependent relaxation times: I. Basic formulation, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 1, p. 125-146, 1976.

Alves, M.A., Pinho, F.T., Oliveira, P.J. The flow of viscoelastic fluids past a cylinder: finite-volume high-resolution methods, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 97, pg. 207-232, 2001.

Alves, M.A., Oliveira, P.J, Pinho, F.T. Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 110, pg. 45-75, 2003.

Astarita, G., Marrucci, G. **Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, McGraw- Hill, London, 1974.

Babuska, I. The finite element method with lagrangean multipliers, **Numer. Math.**, vol. 20, p.179- 192, 1973.

Barnes, H.A. Thixotropy – a review, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 70, pp. 1-33, 1997.

Barnes, H.A. A brief history of the yield stress, **Appl. Rheol.** vol.9 pp. 262–266, 1999.

Bauer W.H., Collins E.A. Rheology: Theory and Applications, **in F.R. Eirich**, Vol. 4, Academic Press, New York pp.8, 1967.

Behr, A. M., Franca, L. P., Tezduyar, T. E. Stabilized finite element methods for the velocity – pressure – stress formulation of incompressible flows, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 104, p. 31-48, 1993.

Bercovier, M., Engelman M. A finite element method for incompressible non-Newtonian flows, **J. Comput. Phys.** vol.36 pp. 313–326, 1980.

Beverly, C.R., Tanner, R.I. Numerical analysis of extrudate swell in viscoelastic materials with yield stress, **J. Rheol.** vol. 33/6, pp. 989–1009, 1989.

Billington, E. W., Tate, A. The physics of deformation and flow. **McGraw-Hill Inc, U.S.A.**, 1981.

Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O. Dynamics of polymeric liquids, **John Wiley and Sons**, U.S.A, vol. 1, 1987.

Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers, **RAIRO Anal. Numér.**, vol. 8, pp. 129-151, 1974.

Brooks, A. N., Hughes, T.J.R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, **Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 32, p. 199-259, 1982.

Burgos, G.R., Alexandrou, A.N., Entov, V. On the determination of yield surfaces in Herschel–Bulkley fluids, **J. Rheol.** vol. 43/3, pp. 463–483, 1999.

Carreau, P. J. Ph.D. Thesis, **University of Wisconsin**, Madison, 1968.

Cheng, D.C.H., Evans, F. Phenomenological characterization of the rheological behaviour of inelastic reversible thixotropic and antithixotropic fluids, **Brit. J. Appl Phys.**, vol. 16, p. 1599-1617, 1965.

Chhabra, R.P. e Richardson, J.F. Nonnewtonian Flow and Applied Rheology, **Engineering applications**, vol. 2, 1998.

Ciarlet, P. G. **The finite element method for elliptic problems**, North Holland, Amsterdam, 1978.

Correia, D.Z. Estudo de Misturas Poliméricas para Recuperação de Petróleo. **Tese (Doutorado em Ciências) – Escola de Química, Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro. Orientação: Profa. Cheila Gonçalves Mothé, 2006.

Coussot P., Leonov AI, Piau JM. **J Non-Newton Fluid Mech**; vol. 46, pp.179, 1993.

Coussot P, Nguyen QD, Huynh HT, Bonn D. Viscosity bifurcation in thixotropic, **yielding fluids. J. Rheol.** 46:573–589, 2002a.

Crouzeix, M. e Raviart, P.A. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations, **RAIRO**, pp.33-76, 1973.

de Souza Mendes P.R. E.S.S. Dutra, Viscosity function for yield-stress liquids, **ppl. Rheol.** vol.14 pp.296–302, 2004.

de Souza Mendes P.R. Dimensionless non-Newtonian fluid mechanics, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol.147 pp.(1-2) pp.109–116, 2007.

de Souza Mendes et al. Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions-contractions, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol. 142 (1-3) pp.207–217, 2007.

de Souza Mendes P.R. Modeling the thixotropic behavior of structured fluids, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol.164 pp.66–75, 2009.

de Souza Mendes P.R. Thixotropic elasto-viscoplastic model for structured fluids, **The Royal Society of Chemistry.** vol.7 pp. 2471–2483, 2011.

Denn M.M. Dynamics of complex fluids, **in: M. Adams, R. Mashelkar, J. Pearson, A. Rennie (Eds.), Dynamics of Complex Fluids**, Imperial College Press, London, pp. 372 – 378, 1998.

Derec C, Adjari A, Ducouret G, **Lequeux F. C R Acad. Sci.;**1–IV:1115, 2001.

Dullaert K., Mewis J. Thixotropy: Build-up and breakdown curves during flow, **by The Society of Rheology, Inc. J. Rheol.** 496, 1213-1230, 2005.

Dullaert K. , Mewis J. A structural kinetics model for thixotropy, **J. Non- Newtonian Fluid Mech.** vol.139 pp.21–30, 2006.

Fonseca C. et al. Flow of elasto–viscoplastic thixotropic liquids past a confined cylinder, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** vol. 193 pp.80–88, 2013.

Franca, L. P., Stenberg, R. Error analysis of some Galerkin least squares methods for the elasticity equations, **SIAM J. Numer. Anal.**, 28(6), pp. 1680-1697, 1991.

Franca, L. P., Frey, S. Stabilized Finite Element Methods: II The Incompressible Navier-Stokes Equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 99, pp. 209–233, 1992.

Franca L. P., Hughes T. J. R. Convergence analyses of Galerkin least-squares methods for symmetrical advective diffusive forms of the Stokes and incompressible Navier-Stokes equations, **Comput Method Appl.**, vol. 2 pp. 285-298, 1993.

Franca, L. P., Frey, S., Hughes, T. J. R. Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 95, pp. 253-276, 1992.

Franca, L. P., Hughes, T. J. R. Two classes of mixed finite element methods, **Computater Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 69, pp. 89-129, 1998.

Franceschini, F.S. e Frey, S. Finite element approximation for single-phase multicomponent flows, **Mechanics Research Communications**, vol. 32, p. 53-64, 2003.

Freundlich, H. e Juliusburger, F. **Trans. Faraday Soc.** Vol. 31, pg. 920, 1935.

Gurtin, M. E. An introduction to continuum mechanics, **Academic Press**, New York, U.S.A, 1981.

Gresho, P. M. Some current CFD issues relevant to the incompressible Navier-Stokes equations, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 87 (2-3), pp. 201-252, 1991.

Harari I., Hughes T.J.R. Stabilized finite-element methods for steady advection-diffusion with production, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 115, pp. 165-191, 1994.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balusters, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V Circumventing the Babūška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol.59, pp. 85–99, 1986.

Hughes. T. J. R., Shakib, F. Computational aerodynamics and the finite element method in Proc. **AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting**, Reno, Nevada, U.S.A., 1988.

Jay P., Magnin A., Piau J.M. Viscoplastic fluid flow through a sudden axisymmetric expansion, **AICHE J.** vol. 47 (10) pp.155–2166, 2001.

Landau, L., **Lifchitz, E. Mécanique des fluides.** Edições Mir, Moscou, 1971.

Lapasin R. and Priel S. Rheology of Industrial Polysaccharides, **Blackie**, London, pp. 196, 1995.

Lipscomb G.G. , Denn M.M. Flow of Bingham fluids in complex geometries, **J.Non-Newtonian Fluid Mech.** vol.14 337–346, 1984.

Liu B.T., Muller S.J., Denn M.M. Convergence of a regularization method for creeping flow of a Bingham material about a rigid sphere, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol.102 pp.179–191, 2002.

Malkus, D. S., Hughes, T. J. R. Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 15, pp. 63-81, 1978.

Matsoukas A., Mitsoulis E. Geometry effects in squeeze flow of Bingham plastics, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol. 109 pp. 231–240, 2003.

Mewis, J. Thixotropy – a general review, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 6, p. 1 – 20, 1979.

Mewis, J. J. Non-Newtonian, **Fluid Mechanics**, Vol. 6, pg.1, 1979.

Mewis, J., Wagner, N. J. Thixotropy, **Advances in Colloid and Interface Science**, vol. 147-148, p. 214–227, 2009.

McMillen E.L. **J. Rheol.** vol.3, pp. 164–179, 1932.

Mitsoulis E., Huilgol R.R. Entry flows of Bingham plastics in expansions, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol.122 pp.45–54, 2004.

Mitsoulis E., Matsoukas A. Free surface effects in squeeze flow of Bingham plastics, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol.129 pp.182–187, 2005.

Mitsoulis E., Abdali S.S., Markatos N.C. Flow simulation of Herschel–Bulkley fluids through extrusion dies, **Can. J. Chem. Eng.** vol.71 pp.147–160, 1993.

Mujumdar A., Beris A.N., Metzner A.B. Transient phenomena in thixotropic systems, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol.102 pp.157–178, 2002.

Nassar, B., de Souza Mendes, M.F. Naccache Flow of elasto-viscoplastic liquids through an axisymmetric expansion–contraction, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol. 166, pp. 386–394, 2011.

Nguyen , Q.D. e Uhlherr, P.H.T. **Proc. 3rd Nat. Conf. on Rheol.** , Melbourne , Australia (1983) 63 .

Panton Ronald L. Incompressible Flow, **Mechanical Engineering Department University of Texas Austin.** A Wiley Interscience Publication, 1996.

Papanastasiou T.C. Flows of materials with yield stress, **J. Rheol.** vol.31 pp.385–404, 1987.

Peterfi T., Arch. Entwicklungsmech. Organ., **Verhanitlungen 3rd. Intern. Zellforschung-Kongr., Arch. Exp. Zellf**, vol.112 pp.680, 1927.

Phillips T.N., Williams A.J. Comparison of creeping and inertial flow of an Oldroyd-B fluid through planar and axisymmetric contractions, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol.108 pp.25–47, 2002.

Prager, W. Strain hardening under combined stresses. **J. App. Physics.** vol. 16, pp. 837–843, 1945.

Pryce-Jones J., **JOCCA**, vol.17 pp.305; vol.19 (1936) pp.395; vol. 26 (1943) pp.3, 1934.

Pryce-Jones J. **J. Sci. Instr.**, vol.18 pp.39, 1941.

Quemada D. **Europ Phys J – Appl Phys**; 5:191, 1999.

Reddy, J.N. An Introduction to Continuum Mechanics, **Cambridge University Press**, USA, 2008.

Reddy, J. N., Gartling, D. K. The finite element method in heat transfer and fluid dynamics. **CRC Press**, Inc., U.S.A, 1994.

Reiner, R. A mathematical theory of dilatancy, **A. J. Math**, 67, 350-362, 1945.

Santos, D. D. et al. Numerical approximations for flow of Viscoplastic fluids in a lid-driven cavity, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, pp. 667–679, 2011.

Saramito P. A new constitutive equation for elasto-viscoplastic fluid flows, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol.145 pp.1–14, 2007.

Schramm , G. **A Practical Approach to Rheology and Rheometry** , Haake , Karlsruhe, Germany, 1994.

Scott-Blair G.W. A Survey of General and Applied Rheology, **Pitman**, London, 1943.

Slattery, J. C. Advanced transport phenomena, **Cambridge University Press**, U.S.A, 1999.

Stokes J.R. , Telford J.H. Measuring the yield behaviour of structured fluids, **J. Non–Newtonian Fluid Mech.** vol.124 pp.137–146, 2004.

Struble , L.J. and Ji , X. , Handbook of Analytical Techniques in Concrete Science and Technology Chapter 9 (edited by Ramachandran , V.S. and Beaudoin , J.J.), **William Andrew Inc**, New York, 2001.

Sikorski D. , Tabuteau H. ,Bruyn J.R. Motion and shape of bubbles rising through a yield-stress fluid, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.**, vol.159 pp.10–16, 2009.

Slattery, J. C.,1999. Advanced transport phenomena. Cambridge University Press, U.S.A.

Sofou S., Muliawan E.B., Hatzikiriakos S.G., Mitsoulis E. Rheological characterization and constitutive modeling of bread dough, **Rheol. Acta** vol.47 pp.369–381, 2008.

Steg, I. e Katz, D. **J. Appl. Polym. Sci.**, Vol. 9, pg.3177, 1965.

Szabo P., et al. Start-up of flow of a FENE-fluid through a 4:1:4 constriction in a tube, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.** vol.72 pp. 73–86, 1997.

Tanner , R.I. e Walters , K. Rheology: An Historical Perspective, **Elsevier**, Amsterdam, 1998.

Truesdell, C., Toupin, R. A. The classical field theories, **In: S. Flugge, Handbuch Der Physic**, vol. 3/1, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

Vradis G.C. , Otugen M.V. The axisymmetric sudden expansion flow of a non- Newtonian viscoplastic fluid, **J. Fluids Eng.** vol.110 pp.193–200, 1997.

Zinani F. S., Frey F. Galerkin Least-Squares Finite Element Approximations for Isochoric Flows of Viscoplastic Liquids, **Journal of Fluids Engineering – Transactions of the ASME** , vol. 128, Issue 4, pp. 856-863, 2006.

Zinani, F., Frey, S. Galerkin Least-Squares Multi-Field Approximations for Flows of Inelastic Non-Newtonian Fluids, **J. Fluids Engineering**, Vol. 130, p. 1-14, 2008.

Yasuda, K., Armstrong, R. C., Cohen R. E. **Rheol. Acta.** vol. 20, pp.163–178, 1981.

8 ANEXO I

Teorema 8.0.1 (Teorema de Transporte de Reynolds). *Seja $\Omega = \Omega(t)$ um volume arbitrário de fluido e $\psi(\mathbf{x}, t)$ uma função - a valor escalar ou vetorial - da posição \mathbf{x} . Sua integral*

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad \text{em } \Omega$$

é portanto uma função bem definida no tempo. Sua derivada material é determinada pelo Teorema de Reynolds, o qual enunciaremos a seguir para funções vetoriais.

Seja ψ um campo vetorial espacial suficientemente regular. Então, para qualquer volume Ω e tempo t ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \text{em } \Omega$$

onde Γ denota a fronteira de Ω .

Prova: Para provar o Teorema de Transporte é necessário trocar as variáveis de integração através da aplicação de referência $\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$, de modo a podermos trabalhar com o domínio de referência Ω_r independente do tempo ($\Omega(0) \equiv \Omega_r$), como segue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}, t) d\Omega &= \int_{\Omega_r} \frac{\partial}{\partial t} (\psi(\chi(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) |_{\mathbf{x}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)} d\Omega_r \quad \text{em } \Omega \\ &= \int_{\Omega_r} (\dot{\psi}(\chi(\mathbf{X}, t), t) \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \psi(\chi(\mathbf{X}, t), t) \overline{\det \dot{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, t)) d\Omega_r \\ &= \int_{\Omega_r} (\dot{\psi}(\chi(\mathbf{x}, t), t) + \psi(\chi(\mathbf{x}, t), t) \text{tr}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t)) \det \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\Omega_r \\ &= \int_{\Omega} (\dot{\psi}(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega \quad \text{em } \Omega \end{aligned}$$

onde \mathbf{F} é o tensor gradiente de deformação no movimento χ do fluido e $\nabla \cdot (\cdot)$ denota o operador divergência espacial. Empregando agora a relação (A.9) à acima,

finalizamos a prova do Teorema:

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + [\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)] + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \right) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Teorema 8.0.2 (Teorema da Divergência). *Seja Ω uma região regular e limitada, e ϕ , \mathbf{v} e \mathbf{S} campos suaváveis a valor escalar, vetorial e tensorial, respectivamente, segue que:*

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \phi \mathbf{n} dA &= \int_{\Omega} \nabla \phi dv \\
 \int_{\Gamma} \mathbf{v} \mathbf{n} dA &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} dv \\
 \int_{\Gamma} \mathbf{S} \mathbf{n} dA &= \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{S} dv
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

onde \mathbf{n} é o campo externo normal unitário.

Teorema 8.0.3 (Teorema da Localização). *Seja Φ um campo contínuo a valor escalar ou vetorial definido em um conjunto aberto Ω pertencente ao espaço euclidiano \mathcal{E} . Então, para qualquer ponto $x_0 \in \Omega$,*

$$\Phi(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{v(\Omega_\delta)} \int_{\Omega_\delta} \Phi(x) dV \quad \text{em } \Omega \tag{8.3}$$

onde, Ω_δ ($\delta > 0$), é uma bola fechada de raio δ centrada em x_0 . Portanto, se

$$\int_{\Omega} \Phi dV = 0 \quad \text{em } \Omega$$

para qualquer bola fechada em Ω , então:

$$\Phi = 0$$

Prova em Gurtin (1981).

Teorema 8.0.4 (Teorema de Stokes). *Seja \mathbf{v} um campo vetorial suave em um conjunto aberto $\mathcal{R} \in \mathcal{E}$. Além disso, Ω é um disco aberto em \mathcal{R} . Seja \mathbf{n} um vetor normal à Ω , o círculo delimitador $c(\sigma)$, $0 < \sigma < 1$, ser orientada de tal forma que:*

$$[\dot{c}(0) \times \dot{c}(\sigma)] \cdot \mathbf{n} > 0 \quad 0 < \sigma < 1$$

$$\int_{\Omega} (\text{curl } v) \cdot \mathbf{n} dA = \int_c v \cdot dx$$

onde, $\int_c v \cdot dx$ representa o contorno de v em torno de c .

APÊNDICE A CINEMÁTICA DOS FLUIDOS A PARTIR DA MECÂNICA DO CONTÍNUO

A fim de descrever corpos materiais, sua cinemática e dinâmica é que esta tese se vale do modelo contínuo onde, o corpo material bem como o domínio de todas as quantidades físicas são abordados. O modelo contínuo tem como premissa que a massa é distribuída de forma contínua no espaço, exceto em superfícies de descontinuidade – a saber, ondas de choque e interfaces de fase, não levando em consideração os fenômenos moleculares.

Desta forma, um corpo material $B\{\chi\}$ é um conjunto compacto mensurável de número finito de elementos materiais de um χ , chamado de partículas materiais ou pontos materiais, que podem ser colocados em uma correspondência de um-para-um com trincas de números reais. Essas trincas são chamadas de coordenadas intrínsecas das partículas.

É interessante notar que, enquanto uma "partícula" na mecânica clássica tem uma massa atribuída, uma "partícula *continuum*" é essencialmente um ponto de material para o qual é definido na densidade. Um corpo material B está disponível apenas por sua configuração que é a especificação da posição de todas as partículas de B no espaço físico C^3 (geralmente o espaço euclidiano).

A.1 Cinemática dos Fluidos

Para facilitar o entendimento dos fenômenos físicos agregados ao estudo da cinemática e da dinâmica dos fluidos valendo-se da mecânica do contínuo é interessante estar de posse da ideia de partícula material.

A partícula material é uma abstração capaz de representar as propriedades físicas e a condição cinemática de uma dada posição em um corpo. Daí pode-se dizer que um corpo é formado por um conjunto de partículas materiais.

Através do modelo contínuo é possível representar o movimento de um corpo através de uma transformação contínua do espaço euclidiano nele próprio, parametrizado pelo tempo $t \in [0, \infty)$ [Gurtin, 1981].

$$\chi : \mathcal{B} \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathcal{E} \quad (\text{A.1})$$

onde \mathcal{B} refere-se a um corpo material qualquer, χ uma transformação de classe das funções contínuas C^3 (referida como seu movimento), \mathcal{E} o espaço euclidiano e $t = 0$ um instante inicial arbitrário.

Uma configuração particular muitas vezes é conveniente. A configuração com a referência $K_0(\mathcal{B})$ refere-se a tudo que diz respeito à configuração do corpo num instante inicial $t = 0$, já $K_t(\mathcal{B})$ refere-se ao corpo na configuração deformada para um instante $t = t$, conforme ilustrado na Fig.A.1.

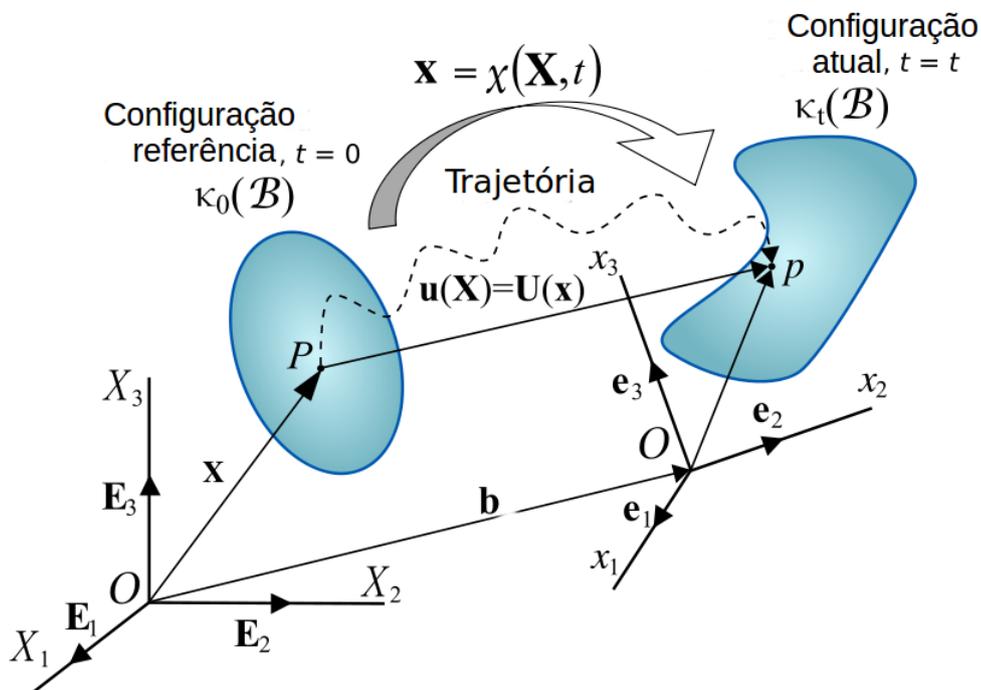


Figura A.1: Descrição esquemática do movimento de um corpo mecânico.

Para que a transformação dada pela Eq.(A.1) seja descrita analiticamente é necessário introduzir-se um sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) denotada por \mathbf{x} . Este é o lugar, no espaço euclidiano, em que é mapeada a partícula material no instante de tempo t , ou seja, esta tripla está relacionada com a posição.

Considerando um ponto \mathcal{P} do fluido, ou seja, uma partícula movendo-se com o escoamento em um instante $t = 0$, tem-se que esta ocupa a posição $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ e no instante qualquer $t = t$ terá se movido para a posição $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – vide Fig.A.1 – desta forma, a posição da partícula pode ser representada pela transformação expressa por :

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathcal{P}, t) \quad (\text{A.2})$$

O mapeamento inverso existe e é dado por:

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.3})$$

Considerando a posição de referência \mathbf{X} , a Eq.(A.2) e a Eq.(A.3) podem ser descritas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{X} &= \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Fixando a posição \mathbf{X} da partícula e variando o tempo t , isto é, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, \cdot)$, obtém-se a trajetória da partícula \mathcal{P} , enquanto que para um tempo fixo t , $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\cdot, t)$, a transformação $\boldsymbol{\chi}$ define uma família de deformações a partir da configuração de referência do corpo material \mathcal{B} . Com isso, pode-se escrever o mapeamento da partícula material no espaço euclidiano bem como o mapeamento inverso em relação à posição de referência \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i \quad (\text{A.5})$$

Considerando a notação de somatório de Einstein [Billington e Tate, 1981], Eq.(A.5), onde X_i , $i = 1, 2, 3$ são as coordenadas materiais da partícula material \mathcal{P} onde obtém-se a posição desta quando o corpo está na configuração de referência. Os vetores e_i representam a base ortogonal cartesiana para os campos vetoriais no espaço euclidiano [Slattery, 1999].

A análise do estado de movimento numa dada posição ao longo do escoamento é importante (mesmo que o movimento do escoamento possa ser completamente determinado por seu movimento χ), pois desta forma é mais viável fazer-se, experimentalmente, a medição das propriedades mecânicas do escoamento de um fluido.

Essa análise pode ser feita utilizando-se campos espaciais, como por exemplo, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ e $u = u(\mathbf{x}, t)$, os quais fornecem, respectivamente, a massa específica e a velocidade da partícula que ocupa a posição \mathbf{x} no instante de tempo t . Onde as variáveis (\mathbf{x}, t) , empregadas nas descrições destes campos são conhecidas como variáveis espaciais, e as variáveis (\mathbf{X}, t) , as quais identificam as partículas do corpo, são denominadas variáveis materiais.

Do advento das transformações definidas pela Eq. (A.4), qualquer grandeza ψ de um fluido, função de suas variáveis espaciais (\mathbf{x}, t) , também o será de suas variáveis materiais (\mathbf{X}, t) ; e vice-versa. Se, por exemplo, a grandeza for um campo espacial do fluido ($\psi(\mathbf{x}, t)$) então sua *descrição material* o relacionará com suas variáveis materiais:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\chi(\mathbf{X}, t), t) \quad (\text{A.6})$$

Ao passo que, se ψ for um campo material ($\psi(\mathbf{X}, t)$), sua *descrição espacial*, segundo a transformação inversa χ^{-1} definida pela eq. (A.4), fornecerá

$$\psi(\mathbf{X}, t) = \psi(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (\text{A.7})$$

Do ponto de vista geométrico, $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ representa o valor do campo ψ para um instante t , experimentado pela partícula que inicialmente ocupava a posição \mathbf{X} . Ao passo que $\psi(\mathbf{X}, t)$ fornece o valor de ψ sentido pela partícula que instantaneamente ocupa a posição \mathbf{x} .

Para as derivadas temporais, são usualmente empregadas a seguinte notação:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \equiv \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \quad e \quad \dot{\psi} \left(= \frac{d\psi}{dt} \right) \equiv \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \quad (\text{A.8})$$

onde $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ e $\dot{\psi}$ são denominadas, respectivamente, *derivada espacial* e *derivada material* de ψ . A derivada material mede a variação de ψ seguindo uma partícula, enquanto a derivada espacial, mede a taxa de variação de ψ segundo um observador fixo na posição \mathbf{x} .

Pode-se pensar ainda na derivada material de um campo espacial – a valor vetorial – ou seja, $\dot{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}, t)$. Seu desenvolvimento é detalhado abaixo.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\psi}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} \Big|_{\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)} \Big|_t \right] \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} \Big|_{\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)} \Big|_t \right] \dot{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{X}, t) \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + [\nabla \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) \Big|_t] \dot{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde $\nabla(\cdot)$ representa o operador gradiente espacial.

A *velocidade* \mathbf{u} de uma partícula de fluido é definida por

$$\mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \quad (\text{A.10})$$

Assim definida, \mathbf{u} é uma função das variáveis materiais do fluido. Na prática, entretanto, é mais vantajoso trabalhar com sua descrição espacial,

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (\text{A.11})$$

É interessante observar ainda que na maioria dos escoamentos dos fluidos é suficiente conhecer o campo de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ao invés do movimento do fluido χ descrito pela Eq. (A.4).

A *aceleração* de uma partícula é definida como a taxa de variação da velocidade; ou seja,

$$\mathbf{a} \equiv \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.12})$$

Novamente, é conveniente expressar o campo de aceleração como função da descrição espacial do campo de velocidade $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Empregando a relação cinemática definida pela Eq. (A.9), obtém-se:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + [\nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \Big|_t] \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.13})$$

A.2 As Leis de Conservação

A.2.1 Conservação da Massa: Equação da Continuidade

Suponha agora que o fluido possua uma função densidade $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ através da relação

$$\mathcal{M} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (\text{A.14})$$

Esta relação é utilizada para determinar a massa \mathcal{M} de fluido que ocupa a região Ω , onde a função densidade é estritamente positiva e sua dimensão física é massa por unidade de volume.

Postula-se o chamado **Princípio da Conservação de Massa**, a partir do significado físico do conceito de massa: *A massa de um volume arbitrário de*

fluido Ω não varia ao longo de seu escoamento. Este princípio pode ser expresso matematicamente como,

$$\dot{\mathcal{M}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = 0 \quad (\text{A.15})$$

Aplicando o teorema de transporte de Reynolds (Anexo - Eq.8.1) e o teorema da divergência (Anexo I - Eq.8.2) [Truesdell e Toupin, 1960; Billington e Tate, 1981]:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} (\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega \quad (\text{A.16})$$

Por ser Ω um volume arbitrário de fluido que estabelece um balanço de massa para todos os pontos do material contínuo, o teorema de localização (Anexo I - Eq.8.3)[Gurtin, 1891] fornece,

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{A.17})$$

Esta é a forma espacial ou euleriana da equação da conservação de massa, ou, como é mais conhecida, da *equação da continuidade*. Esta equação é condição necessária e suficiente para um escoamento preservar sua massa. Utilizando a relação cinemática da Eq. (A.9), Uma forma alternativa para a Eq.(A.17):

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (\text{A.18})$$

Quando a massa específica ρ , seguindo uma partícula material \mathcal{P} , não varia com o tempo, o escoamento é dito isocórico (condição suficiente para um fluido ser incompressível), ou seja, sem variação de volume, e a equação da continuidade reduz-se a

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{A.19})$$

A.2.2 Conservação de Momento: Equação de Movimento (Segunda Lei de Newton)

A equação do movimento refere-se a dinâmica do fluido e esta não é indiferente a um referencial (conforme análise que será abordada no Capítulo 3 desta tese). Desta forma é importante o estudo da dinâmica do movimento dos fluidos objetivando derivar as equações que governam a ação das forças internas e externas atuantes neles.

Durante movimento de um corpo, ou mais especificamente de um fluido, tem-se que as interações de suas partículas com o meio exterior são descritas pelas forças que atuam sobre ele. O conceito de força é um conceito primitivo e que forma a base para introduzir o segundo e o terceiro postulados da mecânica: *a primeira e a segunda Leis de Euler*. Através da introdução do tensor de tensão são derivadas equações que descrevem, para cada ponto material, os balanços locais de *momentum* linear e angular: *a primeira e segunda Leis de Cauchy*.

Tem-se, na mecânica dos meios contínuos, três tipos de forças clássicas que são as forças mútuas entre partes disjuntas do corpo, forças de volume exercidas pelo exterior nos pontos interiores do corpo, as chamadas forças volumétricas ou de corpo e as forças de contato entre seu contorno e o meio exterior.

A.2.2.1 Forças Mútuas

Estas forças tem origem no interior de um corpo onde estas agem sobre suas partículas materiais, por exemplo, forças intermoleculares de longo alcance ¹ que agem entre uma fina película de líquido e o sólido sobre o qual repousam. Pode-se enunciá-la da seguinte forma:

¹Estas são do tipo elétrica que atuam a grandes distâncias intermoleculares e são oriundas do contato não reativo entre duas moléculas, porém o comportamento de uma tem influência no comportamento da outra molécula em suas proximidades. John C. Slattery (Advanced Transport Phenomena, Cambridge University Press 1999)

Seja \mathbf{f}_m a força mútua, por unidade de massa, que \mathcal{B} - \mathcal{P} exerce sobre \mathcal{P} , onde \mathcal{P} é uma porção de um corpo \mathcal{B} conforme a Fig. A.2. A força mútua total que age em \mathcal{P} será dada por uma integral volumétrica de \mathcal{P} .

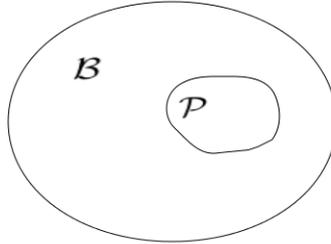


Figura A.2: Porção \mathcal{P} do corpo \mathcal{B}

$$\int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{f}_m(\mathbf{x}, t) d\Omega_{\mathcal{P}} \quad (\text{A.20})$$

As forças mútuas de maneira geral é um campo vetorial que depende da posição bem como do tempo e o somatório destas forças exercidas entre duas partes quaisquer é nulo.

A.2.2.2 Forças de Corpo

A origem das forças de corpo está no seu exterior e atuam na trajetória de suas partículas materiais ². Pode-se enunciá-la da seguinte forma:

Seja \mathbf{f}_e uma força externa, por unidade de massa, a qual a vizinhança exerce sobre \mathcal{B} e a força externa total exercida em \mathcal{P} expressa por uma integral de volume ao longo da região ocupada por \mathcal{P} , pode-se escrever,

$$\int_{\Omega_{\mathcal{P}}} \rho \mathbf{f}_e(\mathbf{x}, t) d\Omega_{\mathcal{P}} \quad (\text{A.21})$$

Análogo as forças mútuas, as forças de corpo também são função da posição e do tempo, sendo um campo vetorial espacial.

²Um exemplo é a força uniforme da gravidade.

A.2.2.3 Forças de Contato

Ao contrário das forças mútuas e de corpo, as forças de contato não são funções da posição, mas sim forças que atuam sobre a superfície de uma porção do material e que são representadas pelo vetor tensão \mathbf{t} .

Este vetor \mathbf{t} descreve a força exercida de uma porção de material sobre outra, além das forças mútuas que possam vir a existir. Usualmente, esta força – por unidade de área – é tratada como uma tensão. *A força de contato total que \mathcal{B} - \mathcal{P} exerce sobre \mathcal{P} , pode ser escrita como uma integral sobre a superfície de \mathcal{P} ,*

$$\int_{S_{\mathcal{P}}} \mathbf{t} dA \quad (\text{A.22})$$

A partir de um dos mais relevantes axiomas da mecânica dos meios contínuos, é que serão avaliadas as forças de contato. Este axioma é chamado de **hipótese de Cauchy** [Billington e Tate, 1981] e postula que, *em uma superfície S fechada e arbitrária existe uma distribuição de vetores tensão \mathbf{t} , cuja a resultante de força equivale à resultante das forças materiais exercidas pelo lado exterior de S no seu lado interior.*

Ainda é relevante supor que a distribuição do tensor tensão \mathbf{T} depende, em um dado instante de tempo, somente da posição e da orientação do elemento de superfície dS . Matematicamente, denota-se \mathbf{n} a normal exterior à superfície S , $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t)$.

Desta forma, a origem do carregamento de contato que é dado pelo princípio da tensão - *que afirma a existência de uma função vetorial $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathcal{P})$, definida para todos os pontos \mathbf{x} de um corpo \mathcal{B} e para todo vetor \mathbf{n} normal exterior unitário à porção \mathcal{P} , tal que $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathcal{P}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ [Truesdell e Toupin, 1960] - e por um balanço de momentum aplicado para duas porções vizinhas de um corpo contínuo, levando em consideração cada uma das porções e suas superfícies comuns, pode-se concluir que $\mathbf{t} = (\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{b}\mathbf{f} - \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n})$, o que implica que os vetores de*

tensão, agindo sobre lados opostos da mesma superfície em um dado ponto, têm magnitudes iguais e sentidos opostos [Truesdell e Toupin, 1960].

A.2.2.4 Princípio da Conservação do Momentum Linear

O Princípio da Conservação do Momentum Linear postula que *a taxa de variação do momentum linear em um volume de fluido Ω será igual à força total nele aplicada*. Matematicamente este princípio pode ser expresso como segue,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) d\Gamma \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.23})$$

Onde Γ representa a superfície do volume Ω e \mathbf{f} o campo das forças externas, por unidade de massa.

Considerando a definição usual aplicada ao tensor tensão $T = T_{ij} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$, para a base tensorial $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$, onde o componente do vetor tensão que atua no lado positivo do plano $x_i x_j$ é constante [Slattery, 1999], pode-se então enunciar o teorema de Cauchy [Truesdell and Toupin, 1960] - cuja principal asserção é a linearidade de $\mathbf{t}(n)$ - seja $(\mathbf{t}(\mathbf{x}, t), \mathbf{f}(\mathbf{x}, t))$ um sistema de forças de um corpo em movimento, então, a condição necessária e suficiente para que as leis de conservação de momentum sejam satisfeitas é a existência de um campo tensorial espacial $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ - chamado *tensor de Cauchy* - tal que:

– para todo vetor unitário $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$;

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)(\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t); \quad (\text{A.24})$$

– o tensor $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ simétrico;

– o tensor $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ satisfaz à equação.

$$\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \text{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.25})$$

Prova: ver, por exemplo, Gurtin, 1981.

Aplicando o teorema de transporte de Reynolds (Anexo - Eq.8.1), para um fluido incompressível, no balanço de momentum definido pela Eq.(A.23) e o teorema da divergência (Anexo - Eq.8.2), o integrando resultante pode ser igualado a zero pela aplicação do teorema de localização (Anexo - Eq.8.3) [Gurtin, 1981], o que resulta na *primeira lei de Cauchy* [Slattery, 1999]:

$$\rho(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \text{div}\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.26})$$

A Eq.(A.26) é a equação de movimento proposta por Cauchy. Esta equação descreve o movimento dos fluidos bem como o movimento de qualquer meio contínuo.

A.2.2.5 Princípio das Potências Virtuais

Alternativamente aos enunciados dos axiomas de *momentum* tem-se o Teorema do Trabalho Virtual, ou, num contexto de energia, do **Princípio das Potências Virtuais**, o qual afirma que *a potência despendida sobre um volume de fluido Ω pelas forças de corpo e superfície é igual à taxa de variação da energia cinética mais a potência dos esforços internos (stress power)*.

Este importante princípio, regulador da conservação da energia mecânica de um fluido, pode ser descrito matematicamente da seguinte forma: *para todo volume fluido Ω e qualquer instante de tempo t , tem-se que a conservação de energia mecânica no fluido é dada por:*

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} d\Omega + \int_{d\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}) d\Gamma \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.27})$$

onde \mathbf{D} é o tensor de deformação dado por,

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \quad (\text{A.28})$$

Prova. Tomando o produto interno da equação de movimento com uma velocidade virtual \mathbf{u} do fluido, integrando por partes e explorando que o tensor de Cauchy é

simétrico, tem-se:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} (\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\overline{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}}{2} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{T}^T(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{2} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (\text{A.29})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (\text{A.30})
\end{aligned}$$

Aplicando a asserção do teorema de Cauchy $\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}$, finaliza-se a prova do teorema.

A maneira alternativa do Princípio das Potências Virtuais enunciar os axiomas da dinâmica trás a virtude de não dissociar os conceitos de cinemática e dinâmica do movimento. No PPV, o conceito de força surge naturalmente associado ao conceito da potência despendida pelas velocidades virtuais. Matematicamente, pode-se pensar no espaço das forças atuantes no fluido como o espaço de todos os funcionais lineares atuantes no espaço das velocidades virtuais do fluido, ou seja, o espaço dual das velocidades virtuais.

Do ponto-de-vista numérico, tem ainda o PPV a grande vantagem de formular problemas mecânicos de maneira variacional, deixando assim bastante natural a introdução de métodos variacionais na Mecânica, em particular o Método dos Elementos Finitos.

A.2.3 Conservação da Energia: Primeira Lei da Termodinâmica

Sabe-se da Teoria Termodinâmica que a energia envolvida no escoamento de um fluido pode assumir diferentes formas, tais como energia térmica, eletromagnética, química, nuclear, etc. Além disso, no decorrer do escoamento, to-

das estas formas podem se transformar uma nas outras, sendo portanto imperativo enunciar uma lei de conservação que governe essa transferência de energia. Esta lei é conhecida como 1ª Lei da Termodinâmica, a qual pode ser expressa matematicamente como,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}(\Omega) + \frac{d}{dt}\mathcal{U}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) + \mathcal{P}(\Omega) \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.31})$$

onde $\mathcal{K}(\Omega)$ é a energia cinética de um volume Ω do fluido, $\mathcal{U}(\Omega)$ sua energia interna, $\mathcal{H}(\Omega)$ a taxa pela qual o calor é por ele trocado e,

$$\mathcal{P}(\Omega) = \int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{n}; \mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.32})$$

é a potência mecânica nele despendida.

Utilizando a notação acima introduzida ao PPV, Eq.(A.27), tem-se que a equação de conservação de energia mecânica de um fluido é dada por

$$\frac{d}{dt}\mathcal{K}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega) - \int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.33})$$

Subtraindo a eq. (A.33) da eq. (A.31), obtém-se a equação de conservação da energia térmica,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) + \int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.34})$$

Supondo ser a energia interna de um fluido uma propriedade aditiva tal qual sua massa o é, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) d\Omega &= \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) q'''(\mathbf{x}, t) d\Omega + \int_{\Gamma} q_h(\mathbf{x}, t) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\Omega \quad \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

onde q''' denota uma fonte de calor por unidade de massa e q_h o fluxo de calor na fronteira Γ . Aplicando o Teorema de transporte de Reynolds (ANEXO - 8.1), e supondo a existência de um vetor fluxo de calor, $q_h = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ ³ de maneira análoga à existência do tensor de Cauchy $\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{n}$, tem-se

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} (\rho(\mathbf{x}, t) q'''(\mathbf{x}, t) + \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Gamma \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.36})$$

Aplicando o teorema da divergência (ANEXO - 8.2) e o teorema da localização (ANEXO - 8.3), chega-se a forma forte da equação de conservação da energia térmica ,

$$\rho(\mathbf{x}, t) \dot{u}(\mathbf{x}, t) = -\text{div} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) q'''(\mathbf{x}, t) + \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad \text{em } \Omega \quad (\text{A.37})$$

No intuito de finalizar a derivação das equações de conservação da mecânica dos fluidos, é necessário adicionar hipóteses constitutivas que relacionem o tensor de Cauchy com o campo de velocidade e o vetor fluxo de calor com o campo de temperatura do fluido. Para tal, na equação de movimento a relação clássicamente empregada é a hipótese constitutiva dos fluidos newtonianos, ao passo que para a equação da energia emprega-se a Lei de Fourier Generalizada. Porém, por serem os escoamentos estudados nesta tese supostos isotérmicos, não será derivada a equação da conservação da energia térmica.

³O sinal negativo faz com que a equação respeite a convenção termodinâmica de troca de calor, ou em outras palavras, a 2ª Lei da Termodinâmica.