

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ÍNDICES DE DANO APLICÁVEIS A MATERIAIS QUASI-FRÁGEIS AVALIADOS
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS FORMADO POR BARRAS

por

Rodolfo da Silva Rodrigues

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, janeiro de 2015

ÍNDICES DE DANO APLICÁVEIS A MATERIAIS QUASI-FRÁGEIS AVALIADOS
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS FORMADO POR BARRAS

por

Rodolfo da Silva Rodrigues
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da
Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos
requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Aprovada por:

Prof. Dr. Luis Eduardo Kostaski.....PPENG / UNIPAMPA

Prof.^a Dr.^a Virgínia Maria Rosito D'Avila Bessa.....PPGEC / UFRGS

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler.....PROMECC / UFRGS

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 20 de janeiro de 2015

Partes do conteúdo desta Dissertação ou trabalhos do mesmo tema já foram publicadas em:

Rodrigues, R.S., Birck, G., Iturrioz, I., **Propostas de Índices de Dano Aplicáveis a Materiais Quasi-Frágeis Avaliados Utilizando o Método dos Elementos Discretos formado por Barras**. Asociación Argentina de Mecánica Computacional (ENIEF 2014), XXXIII:1363-1379, 2014.

Rodrigues, R.S., Birck, G., Iturrioz, I., **Damage Index Proposals Applied to Quasi-Fragile Materials Simulated Using the Lattice Discrete Element Method**. Enviado para o congresso: The Second International Conference on Damage Mechanics.

DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho aos meus pais, Joelci e Nadir,
e ao meu irmão, Álvaro.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Ignacio Iturrioz, pelos conselhos e pelos ensinamentos ao longo do meu mestrado.

Aos meus pais, Joelci e Nadir, e ao meu irmão, Álvaro, pelo apoio durante mais esta etapa.

A todos os meus amigos, por tornarem mais divertida toda esta jornada.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro que tornou possível este mestrado.

E a Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

RESUMO

O processo de dano em materiais quasi-frágeis pode ser caracterizado pela perda de isotropia para certos níveis de carga. A localização de deformações, o efeito cooperativo entre regiões danificadas e a avalanche de rupturas são características particulares na medição do dano neste tipo de material. As características mencionadas criam diferentes formas de dissipação de energia, que não são fáceis de representar utilizando métodos baseados na hipótese dos meios contínuos. No presente trabalho uma versão do Método dos Elementos Discretos Formado por Barras é empregado. Neste método a massa do contínuo é concentrada nos nós, os quais são interconectados por barras sem massa. Essas barras possuem uma lei constitutiva bilinear, que é usada para simular a ruptura da estrutura em estudo. A distribuição dos nós permite formar uma treliça tridimensional regular, e a partir dessa discretização espacial é possível chegar a um sistema de equações de movimento, que é resolvido com um esquema explícito de integração numérica (diferenças finitas centrais). Neste método a fratura e a fragmentação são levadas em conta de forma natural, já que as barras que rompem durante o processo são desativadas, respeitando o balanço energético. É possível introduzir heterogeneidade no modelo considerando as propriedades do material como campos espaciais aleatórios com distribuição de probabilidades de Weibull e comprimento de correlação conhecido. Nessa dissertação, é analisado o processo de dano que aparece em estruturas de geometria simples quando solicitadas até o colapso. Diferentes índices são apresentados para realizar a medição do dano. O desempenho desses índices, e a maneira com que eles ajudam na interpretação da evolução do dano, são discutidos nesse trabalho.

Palavras-chave: Materiais Quasi-frágeis, Fratura, Método dos Elementos Discretos.

ABSTRACT

The process of damage in quasi-fragile materials is characterized by loss of isotropy for certain load levels. The strain localization, the cooperative effect between damaged regions and the avalanche of ruptures are particular features in measuring the damage in this kind of material. The mentioned features create different forms of energy dissipation, which are not easy to represent with a continuous approach. In the present work a version of the Lattice Discrete Element Method is employed. In this method the mass of the solid is concentrated on node points, which are interconnected by uniaxial elements. These elements have a bilinear constitutive law, which is used to simulate the rupture of the structure under study. The node distribution allows the formation of a regular three-dimensional lattice, and from this spatial discretization it is possible to arrive at a system of equations of motion, which is solved by an explicit numerical integration scheme (central difference). In this method the fracture and fragmentation are taken into account in a natural manner, since the bars that reached their limit strength during the process are disabled of the system, respecting the energy balance. It is possible to introduce heterogeneity in the model considering the material properties as random fields with spatial Weibull probability distribution and known correlation length. In this dissertation, the damage process, which appears in structures of simple geometry, when they are loaded until collapse, is analysed. Different indexes are presented to perform the measurement of the damage. The performance of those indexes, and the way they help in the interpretation of the damage evolution, are discussed in this paper.

Keywords: Quasi-fragile Materials; Fracture; Lattice Discrete Element Method.

ÍNDICE

DEDICATÓRIA.....	iii
AGRADECIMENTOS	iv
RESUMO	v
ABSTRACT	vi
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Objetivos.....	2
1.2 Estrutura do Trabalho	3
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4
2.1 Princípios de Micromecânica e Homogeneização	4
2.1.1 Autodeformação	6
2.1.1.1 Centro de dilatação.....	6
2.1.1.2 Inclusão	7
2.1.1.3 Resultado de Eshelby	8
2.1.2 Não homogeneidades.....	10
2.1.2.1 Conceito da autodeformação equivalente	10
2.1.2.2 Não homogeneidades elipsoidais	12
2.1.2.3 Trincas.....	14
2.1.3 Propriedades elásticas efetivas	15
2.1.3.1 Fundamentos: Elemento de volume representativo	15
2.1.3.2 Fundamentos: Médias	17
2.1.3.3 Fundamentos: Constantes elásticas efetivas.....	19
2.1.3.4 Aproximações analíticas: Relações gerais	23
2.1.3.5 Aproximações analíticas: Modelo de distribuição de defeitos “dilute”	25
2.2 Princípios da Mecânica do Dano	28
2.2.1 Dano frágil.....	32
2.3 Revisão do Estado da Arte.....	34
3 MODELOS NUMÉRICOS	37
3.1 Método dos Elementos Discretos Formado por Barras	37
3.1.1 Lei constitutiva bilinear para dano em materiais.....	39
3.1.2 A distribuição aleatória dos parâmetros do material	45
3.2 Análise Quasi-estática.....	46
4 IMPLEMENTAÇÕES.....	48
4.1 Índice de Dano Escalar	48
4.2 Índice de Dano Tensorial de Segunda Ordem	49

4.3	Tensores D e H: Metodologia de Análise	51
4.4	Índice de Dano Tensorial de Quarta Ordem	52
5	APLICAÇÕES	54
5.1	Compatibilidade	54
5.2	Verificação	59
5.3	Índices de dano	61
5.3.1	Índice de Dano Escalar	65
5.3.2	Índice de Dano Tensorial de Segunda Ordem	66
5.3.3	Índice de Dano Tensorial de Quarta Ordem	69
6	CONCLUSÕES	75
6.1	Recomendações	76
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77
	APÊNDICE A – <i>SCRIPT</i> DO AMBIENTE DO ANSYS	81

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Níveis macroscópico e microscópico [Seelig, 2006].....	5
Figura 2.2 - Centro de dilatação [Seelig, 2006].....	6
Figura 2.3 - Inclusão na matriz [adaptado de Seelig, 2006].....	7
Figura 2.4 - Inclusão elipsoidal em um domínio infinito [Seelig, 2006].....	8
Figura 2.5 - Cilindro elíptico infinitamente longo [Seelig, 2006].....	10
Figura 2.6 - (a) material heterogêneo; (b) material homogêneo de comparação; (c) autodeformação equivalente; (d) problema original homogeneizado [Seelig, 2006].....	11
Figura 2.7 - (a) não homogeneidade elipsoidal; (b) material homogêneo com autodeformações [Seelig, 2006]	13
Figura 2.8 - Trinca reta [Seelig, 2006]	14
Figura 2.9 - Homogeneização e comprimentos característicos [adaptada de Seelig, 2006]	15
Figura 2.10 - Domínio com: (a) cavidade; (b) trinca [adaptado de Seelig, 2006].....	18
Figura 2.11 - EVR com campos microscópicos variantes e médias equivalentes [adaptada de Seelig, 2006].....	21
Figura 2.12 - Modelo de distribuição de defeitos <i>dilute</i> [adaptado de Seelig, 2006].....	26
Figura 2.13 - Trincas: (a) paralelas; (b) com orientação distribuída de maneira estatisticamente igual [Seelig, 2006]	28
Figura 2.14 - Avaliação geométrica do dano [adaptado de Seelig, 2006].....	29
Figura 2.15 - Evolução do dano elástico [Seelig, 2006].....	31
Figura 2.16 - Dano frágil sob carregamento de tração [Seelig, 2006].....	33
Figura 2.17 - Dano frágil sob carregamento compressível [Seelig, 2006].....	33
Figura 3.1 - Estratégia de discretização do LDEM: (a) módulo cúbico básico, (b) geração de um corpo prismático	37
Figura 3.2 - Lei constitutiva bilinear	40
Figura 3.3 - Curvas força-deformação para vários valores de R_f [Kosteski, 2012c]	43
Figura 3.4 - Esquema de simulação com os dois ambientes	46
Figura 4.1 - Curva tensão-deformação em uma estrutura genérica.....	48
Figura 4.2 - Lei constitutiva bilinear	50
Figura 5.1 - Placa usada no teste de compatibilidade e na simulação dos índices	54
Figura 5.2 - Curva tensão-deformação da placa B na simulação com o LDEM	57
Figura 5.3 - Estado de danificação da placa B, depois da primeira parte da simulação (LDEM)	58
Figura 5.4 - Evolução das energias durante a simulação (LDEM), na placa B.....	58
Figura 5.5 - Placa usada na simulação de verificação	60
Figura 5.6 - Forma da lei constitutiva	62
Figura 5.7 - Comportamento tensão-deformação da estrutura	63
Figura 5.8 - Curva das energias em função da porcentagem da deformação global de falha ..	64
Figura 5.9 - Padrão de fratura: (a) da placa analisada nesta seção, (b) e (c) de placas com distribuição de propriedades diferente.....	64
Figura 5.10 - Evolução do índice escalar	65
Figura 5.11 - Mapa do dano nos níveis de deformação global de referência: (a) ε_1 , (b) ε_2 , (c) ε_3 , (d) ε_4 , (e) ε_5 , (f) ε_6	66
Figura 5.12 - Componentes analisadas	67
Figura 5.13 - (a) posição do módulo cúbico analisado (ponto amarelo), (b) comparação entre ε_{22} e w_{22} no módulo indicado	67

Figura 5.14 - (a) posição do módulo cúbico analisado (ponto amarelo), (b) comparação entre ε_{22} e w_{22} no módulo indicado	68
Figura 5.15 - Curva força-deformação para uma das barras do módulo cúbico analisado	69
Figura 5.16 - Evolução da componente D_{1111} desse índice.	72
Figura 5.17 - Evolução da componente D_{2222} desse índice.	73
Figura 5.18 - Evolução do valor normalizado das componentes D_{1111} e D_{2222} desse índice....	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Dados da simulação.....	55
Tabela 5.2 - Resultados do teste de compatibilidade, em termos do módulo de elasticidade..	56
Tabela 5.3 - Componentes do tensor H_{ijkl}	61
Tabela 5.4 - Propriedades do material e dados da simulação.....	62
Tabela 5.5 - Componentes do tensor D_{ijkl} para os níveis de deformação ε_1 e ε_2	70

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

EVR	Elemento de volume representativo
LDEM	<i>Lattice Discrete Element Method</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

ε_{ij}^t	Autodeformação, adimensional
ε_{ij}^e	Deformação elástica, adimensional
ε_{ij}	Deformação total, adimensional
σ_{ij}	Tensão, Pa
C_{ijkl}	Tensor constitutivo, Pa
a_i	Eixos da elipse, m
S_{ijkl}	Tensor de Eshelby, adimensional
I_{ijkl}	Tensor unitário de quarta ordem, adimensional
u_i	Deslocamento, m
ε_{ij}^*	Autodeformação equivalente, adimensional
A_{ijkl}^I	Tensor de influência, adimensional
I_{ijkl}	Tensor unitário de quarta ordem escrito em notação simbólica, adimensional
Δu_i	Salto de deslocamento, m
$2a$	Comprimento de uma trinca, m
E	Módulo de elasticidade, Pa
l	Comprimento característico da microestrutura, m
d	Dimensão do elemento de volume representativo, m
D	Comprimento característico da macroestrutura, m
$\langle \sigma_{ij} \rangle$	Tensão média volumétrica, Pa
$\langle \varepsilon_{ij} \rangle$	Deformação média volumétrica, adimensional
$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_c$	Média das deformações da fase danificada, adimensional
C_{ijkl}^*	Tensor constitutivo efetivo, Pa
D_{ijkl}^*	Tensor de dano de quarta ordem, adimensional
H_{ijkl}^*	Tensor de flexibilidade adicional, adimensional
$w(n_j)$	Medida do dano (avaliação geométrica), adimensional
$\tilde{\sigma}_{ij}$	Tensão efetiva, Pa
E^*	Módulo de elasticidade efetivo, Pa

w_{ij}	Tensor de dano (tensor w_{ij}), adimensional
$m_{\text{módulo}}$	Massa do módulo cúbico, kg
ρ	Densidade, kg/m ³
L	Comprimento do módulo cúbico, m
A_l	Área equivalente (barras longitudinais), m ²
ν	Coefficiente de Poisson, adimensional
A_d	Área equivalente (barras diagonais), m ²
x_j	Vetor de deslocamentos nodais, m
\dot{x}_j	Vetor de velocidades nodais, m/s
\ddot{x}_j	Vetor de acelerações nodais, m/s ²
M_{ij}	Matriz de massas, kg
C_{ij}	Matriz de amortecimentos, Ns/m
$F_i(t)$	Forças nodais internas, N
$P_i(t)$	Forças nodais externas, N
Δt	Passo de tempo, s
C_p	Velocidade de propagação da onda P, m/s
G_f	Energia específica de fratura, J/m ²
A_l^f	Área de fratura (barras longitudinais), m ²
A_d^f	Área de fratura (barras diagonais), m ²
U_d	Energia dissipada pela fratura, J
c_A	Parâmetro de escala, adimensional
ε_p	Deformação de falha crítica, adimensional
R_f	Fator de falha, adimensional
s	Número de fragilidade, adimensional
σ_p	Tensão de falha crítica, Pa
ε_r	Deformação limite, adimensional

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Krajcinovic (1996), os métodos propostos para prever o processo de dano em materiais quasi-frágeis podem ser classificados em dois grandes grupos, aqueles baseados na Mecânica dos Meios Contínuos, ou seja, a chamada abordagem clássica, e a abordagem por Modelos Estatísticos. No primeiro caso, Teorias de Plasticidade são estendidas para estudar o processo de dano, levando a procedimentos que encontram sérias dificuldades ao lidar com materiais quasi-frágeis, onde efeitos de escala, localização de defeitos e comportamentos associativos entre nuvens (*clusters*) de defeitos são susceptíveis de ocorrer.

Exemplos da abordagem da mecânica do contínuo são o modelo clássico de Ottosen (1975) e a recente contribuição de Crawford *et al.* (2012), que propôs um procedimento implementado no pacote comercial de elementos finitos LS-Dyna [Hallquist, 2007], para modelar dano em materiais quasi-frágeis.

Por outro lado, no segundo grupo (Modelos estatísticos), a versatilidade da abordagem de elementos finitos é perdida, mas em compensação, problemas tais como localização, evolução do dano anisotrópico e efeitos associativos entre as diferentes partes da amostra, podem ser contabilizados com relativa facilidade. Exemplos da segunda abordagem são fornecidos por Li e Liu (2002) e Liu e Liu (2007), onde foi revisado o uso de modelos discretos formados por partículas em uma distribuição sem malha. Este método foi incorporado à versão 2012 do programa comercial de elementos finitos ABAQUS (2012), mostrando uma tendência perceptível da comunidade científica a recorrer aos métodos estatísticos, como uma alternativa atraente para resolver os problemas em que descontinuidades aparecem durante o processo de dano. Modelos treliçados, dos quais a formulação do Método dos Elementos Discretos formado por barras (ou, em inglês, *Lattice Discrete Element Method*, aqui referido como LDEM) é um caso especial, pertencem a este grupo. Basicamente, o sólido é modelado por meio de uma matriz de elementos uniaxiais, que interligam massas nodais com dois ou três graus de liberdade. A rigidez destes elementos pode ser determinada a partir das propriedades mecânicas do sólido anisotrópico a ser representado pelo LDEM. Abordagem semelhante, usando outra versão do modelo de elementos discretos por barras, pode ser consultada em Krajcinovic e Vujosevic (1998), Sagar e Prasad (2009), Nagy *et al.* (2010), Schlangen (1995), e Rinaldi (2011).

Finalmente, é importante notar que os chamados elementos de barra simplesmente servem para visualizar a direção das forças entre as duas massas nodais, e são, assim, úteis principalmente para os engenheiros, mas não existem fisicamente (os elementos de barra não tem massa). A "falha" completa de um elemento simplesmente significa que não há nenhuma força atuando entre os nós correspondentes e isso não significa que há "fratura", a menos que todas as barras que atravessam uma superfície mensurável estejam quebradas.

A versão do modelo de barras utilizada no presente trabalho foi proposta por Riera (1984) para determinar a resposta dinâmica de placas e cascas, sob cargas de impacto, quando a falha ocorre principalmente por cisalhamento ou tração, que é geralmente o caso em estruturas de concreto. O LDEM tem sido usado com sucesso para resolver problemas de dinâmica estrutural, tais como cascas submetidas a carregamento impulsivo [Riera e Iturrioz, 1995, 1998], a recriação da geração e posterior propagação de um sismo [Dalguer *et al.*, 2001, 2003], o estudo do efeito de escala em concreto [Rios e Riera, 2004], e em apoios de rocha [Miguel *et al.*, 2008; Iturrioz *et al.*, 2009]. O cálculo dos parâmetros de fratura em problemas estáticos e dinâmicos [Kosteski *et al.*, 2011, 2012a], e no estudo da resistência dos materiais frágeis sob altas taxas de deformação [Riera *et al.*, 2011].

Na determinação das respostas estruturais com fissura inicial ou alto gradientes de tensão, que resultam em clara localização da fratura, procedimentos bem estabelecidos levam a resultados que não dependem da malha. No entanto, em corpos de prova submetidos a campos de tensão aproximadamente uniformes um problema surge na análise de materiais não homogêneos: a necessidade de conhecer a priori o grau de "faturamento" da estrutura. Isto também afeta a análise de elementos finitos, em casos em que não há localização clara da fratura, requerendo uma avaliação cuidadosa da energia dissipada por fratura, ou outros mecanismos, durante o processo de carregamento. Critérios experimentais para contabilizar o efeito na análise de fratura dinâmica não-linear de grandes sistemas estruturais foram propostos por Riera *et al.* (2007).

1.1 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é implementar ferramentas para a avaliação e o acompanhamento do processo de dano em materiais quasi-frágeis. As características dessas ferramentas serão avaliadas através de simulações no ambiente de LDEM, usando estruturas simples, formadas por um material quasi-frágil genérico.

No contexto do LDEM, os objetivos específicos desse trabalho são:

- Aplicar a metodologia do LDEM na avaliação do processo de dano de um material quasi-frágil;
- Verificar a compatibilidade entre os resultados obtidos com o LDEM e com uma análise quasi-estática (através do software ANSYS), visando usar esse tipo de análise como ferramenta na avaliação dos índices de dano.

No contexto da avaliação do dano, os objetivos específicos desse trabalho são:

- Avaliar o índice escalar de dano proposto por Rinaldi (2011);
- Propor e avaliar a implementação, no LDEM, do tensor de dano de segunda ordem, w_{ij} , descrito em Seelig (2006) e chamado aqui de índice tensorial de dano de segunda ordem;
- Propor e avaliar a implementação, no LDEM, do tensor de dano de quarta ordem, D_{ijkl} , descrito em Seelig (2006) e chamado aqui de índice tensorial de dano de quarta ordem;

1.2 Estrutura do Trabalho

Essa dissertação está estruturada da seguinte maneira:

- Este primeiro capítulo faz a introdução do assunto tratado no trabalho, além de descrever os objetivos desse estudo;
- No segundo capítulo (Revisão Bibliográfica), é feita uma revisão das referências, sobre os conceitos básicos necessários para o entendimento do trabalho;
- No terceiro capítulo (Métodos Numéricos), é feita uma descrição sobre os métodos numéricos usados no trabalho;
- No quarto capítulo (Implementações), é feita uma explicação sobre os índices de dano implementados no trabalho;
- No quinto capítulo (Aplicações), é feita uma descrição sobre as simulações realizadas, e sobre os resultados encontrados, ao longo do trabalho;
- No sexto capítulo (Conclusões), são apresentadas as conclusões obtidas com esse estudo, assim como recomendações para trabalhos futuros;

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Princípios de Micromecânica e Homogeneização

O texto apresentado nesta seção foi baseado na obra de Seelig (2006), porém, ao longo do texto, outros autores também serão citados.

Quando observados através de um microscópio, todos os materiais apresentam uma variedade de heterogeneidades, mesmo que eles, em nível macroscópico, aparentem ser homogêneos. Esses desvios da homogeneidade podem existir na forma de trincas, vazios, partículas ou regiões de material diferente, etc.. Aqui eles serão chamados genericamente de *defeitos*. Investigações micromecânicas estudam o comportamento dessas heterogeneidades ou desses defeitos assim como o efeito deles nas propriedades globais do material. Por exemplo, heterogeneidades de qualquer tipo podem agir localmente como concentradores de tensão e, em função disso, conduzir à formação e à coalescência de microfissuras ou vazios.

Defeitos existem em diferentes escalas, as quais são características para um determinado material e para o respectivo defeito. Uma importante tarefa da micromecânica é ligar relações mecânicas em diferentes escalas. Começando do nível macroscópico, defeitos e suas distribuições espaciais que aparecem em uma pequena escala (a microescala) são considerados como microestrutura do material. O que se entende por nível macroscópico e nível microscópico, em um determinado caso, depende do problema analisado e é uma questão de modelagem. Como ilustrado na Figura 2.1, uma microestrutura na forma de muitas trincas na escala milimétrica pode, por exemplo, ser identificada em um componente. O material, aparentemente homogêneo, entre as trincas, entretanto, pode ser considerado como o nível macroscópico com respeito a uma microestrutura ainda mais fina, com comprimento de escala característico (tamanho de grão) na ordem de micrometros. E um único grão, por outro lado, pode representar o nível macroscópico quando o foco é a microestrutura da rede cristalina com vários deslocamentos discretos. Esta abordagem traz a vantagem de que um material com comportamento complexo, que seria difícil de descrever de uma maneira puramente fenomenológica, pode ser descrito por processos elementares na microescala. Problemas de micromecânica podem ser resolvidos pela da mecânica do contínuo. Através da consideração adicional de uma escala mais fina (o nível microscópico), uma distribuição espacial de defeitos (a microestrutura) pode ser relacionada a um ponto no nível macroscópico.

A investigação de defeitos pode ser subdividida de acordo com dois pontos de vista essenciais: o microscópico e o macroscópico. No primeiro o ponto de interesse é o comportamento do defeito na sua própria escala, o que também compreende a interação com outros defeitos.

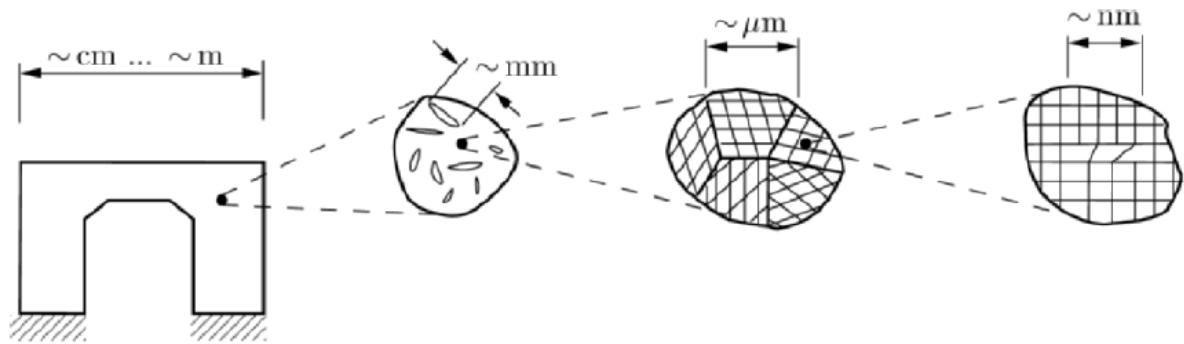


Figura 2.1 - Níveis macroscópico e microscópico [Seelig, 2006]

Por outro lado, no segundo ponto de vista, pode-se examinar a influência de muitos defeitos no comportamento macroscópico do material, em grandes escalas. Nesse último caso, todo o comportamento da microestrutura é interpretado como o estado mecânico de um ponto do material no nível macroscópico, ao qual é atribuída uma propriedade *efetiva* do material. Esse tipo de transição, do nível microscópico para o macroscópico, é feita por um processo chamado homogeneização. Mudanças microestruturais levam a mudanças nas propriedades efetivas globais do material. Por exemplo, o crescimento de microfissuras ou microvazios causa redução na rigidez macroscópica do material.

Defeitos em materiais elásticos inevitavelmente dão origem a campos de tensões e deformação não homogêneos, pelos quais os defeitos podem ser caracterizados. Pode-se distinguir entre aqueles defeitos que são, eles próprios, a fonte de um chamado campo de autodeformações ou autotensões (por exemplo, as inclusões) e aqueles que, somente sobre a ação de algum carregamento externo, induzem uma perturbação no campo uniforme (por exemplo, partículas de material diferente, vazios ou trincas). Nesse último caso de não homogeneidades do material, é possível, e prático, decompor os campos de tensões e deformações totais em duas partes: (1) um campo uniforme, como apareceria em um material sem defeitos, e (2) o desvio induzido pelo defeito. Essa segunda parte é, então, referida como a autodeformação ou a autotensão equivalente. Essa decomposição permite estabelecer uma equivalência formal entre um material não homogêneo e algum material homogêneo com uma

determinada distribuição de autodeformações ou autotensões, independentemente da sua origem física.

2.1.1 Autodeformação

2.1.1.1 Centro de dilatação

Um centro de dilatação é a idealização de uma região “infinitamente” pequena (como um ponto), que sofre uma expansão radial “infinitamente” forte (autodeformação). Isso dá origem a um campo de deformações e tensões singulares, que, em um meio isotrópico, é esféricamente simétrico, com tensão na direção circunferencial e pressão na direção radial. Um centro de dilatação também pode ser interpretado como uma região esférica de raio a , dentro da qual uma pressão, p , está agindo.

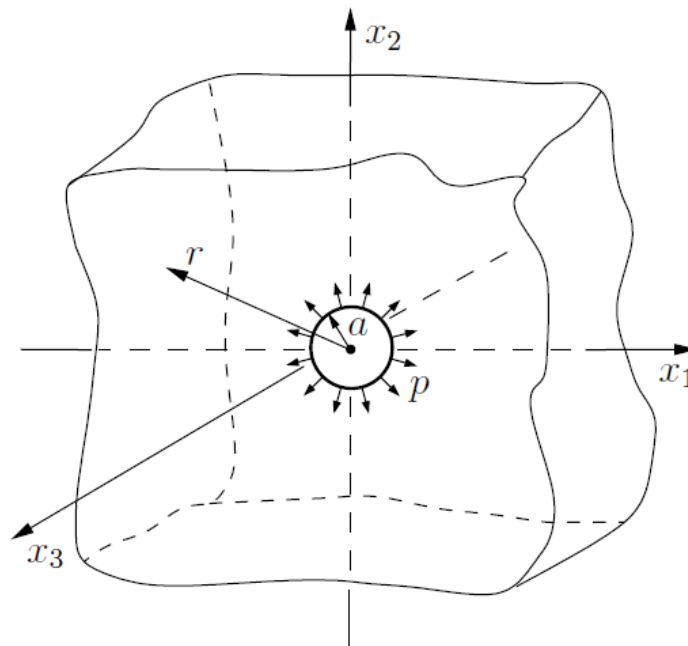


Figura 2.2 - Centro de dilatação [Seelig, 2006]

Um centro de dilatação pode, por exemplo, ser considerado como um modelo simples para o efeito de um átomo intersticial (defeito pontual) na rede cristalina elástica a sua volta.

2.1.1.2 Inclusão

Em contraste com o exemplo de defeito pontual, agora será considerado a situação de uma distribuição espacial de autodeformações, $\varepsilon_{ij}^t(x_m)$. Essas deformações podem resultar, por exemplo, de transformações de fase, nas quais reordenação atômica muda a geometria da rede cristalina. Como elas não são causadas por tensões, autodeformações são, também, chamadas de deformações de transformações sem tensão (ou, em inglês, *stress-free transformation strains*, identificadas com o sobrescrito t). Formalmente, todos os tipos de deformação que aparecem em um material na ausência de tensões podem ser interpretados como autodeformações. Através da abordagem de deformações infinitesimais, as deformações totais, ε_{ij} , são a soma das deformações elásticas, $\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl}^{-1}\sigma_{kl}$, com as autodeformações: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^t$. Assim as tensões são dadas por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^t) \quad (2.1)$$

Se autodeformações diferentes de zero existem somente em uma sub-região de material homogêneo, Ω , essa região é chamada de inclusão, e o material a sua volta é chamado de matriz (Figura 2.3). É importante notar que as propriedades elásticas da inclusão e da matriz são as mesmas. Se fossem diferentes, a região Ω seria chamada de não homogeneidade.

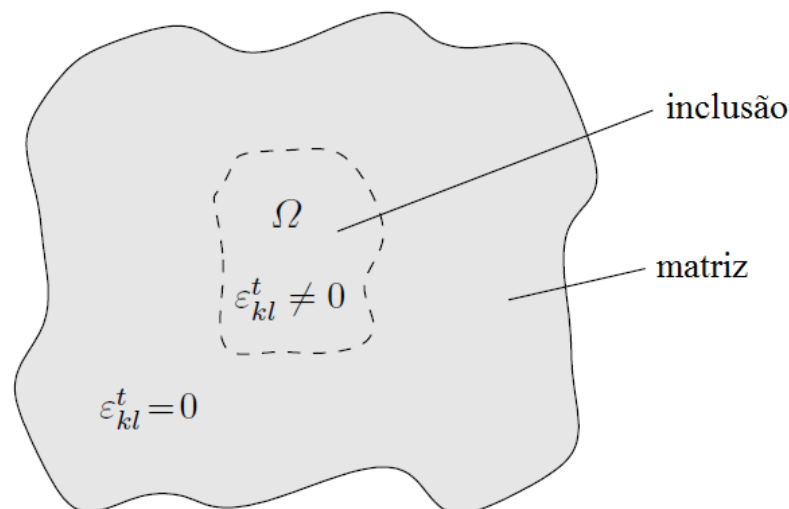


Figura 2.3 - Inclusão na matriz [adaptado de Seelig, 2006]

No caso geral de uma geometria arbitrária de inclusão e de um campo de autodeformação arbitrário, não é possível representar a distribuição de tensões, as deformações totais e o campo de deslocamentos de forma exata. Porém, alguns casos especiais serão discutidos a seguir.

2.1.1.3 Resultado de Eshelby

Provavelmente a solução analítica mais importante da micromecânica tenha sido encontrada por Eshelby (1957) apud Seelig (2006). Essa solução é válida para um domínio infinito, que contém uma inclusão elipsoidal, Ω , com eixos principais a_i (Figura 2.4).

$$(x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 + (x_3/a_3)^2 \leq 1 \quad (2.2)$$

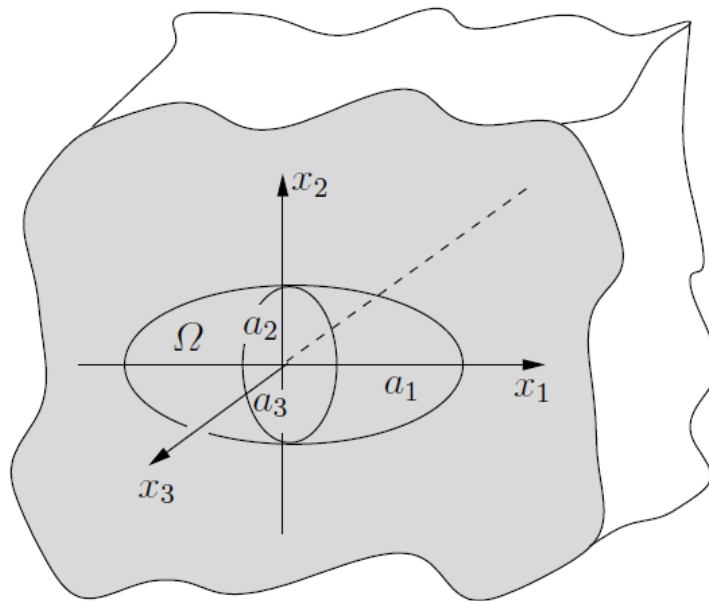


Figura 2.4 - Inclusão elipsoidal em um domínio infinito [Seelig, 2006]

Se as autodeformações na inclusão são constantes, então, as deformações totais, dentro da inclusão, também serão constantes. Através do tensor de quarta ordem de Eshelby, S_{ijkl} , essas deformações totais dependem linearmente das autodeformações.

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^t = \text{constante} \quad (2.3)$$

Usando a Equação (2.1), as tensões dentro da inclusão, que também são constantes, podem ser determinadas pela Equação (2.4).

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}(S_{mnkl} - I_{mnkl})\varepsilon_{kl}^t = \text{constante} \quad (2.4)$$

onde I_{mnkl} é o tensor simétrico unitário de quarta ordem, dado pela Equação (2.5).

$$I_{mnkl} = \frac{1}{2}(\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{nk}) \quad (2.5)$$

O tensor de Eshelby é simétrico no primeiro e segundo par de índices, mas, em geral, não é simétrico com relação à troca desses índices.

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}, \quad S_{ijkl} \neq S_{klij} \quad (2.6)$$

No caso de um material isotrópico, os seus componentes só dependem do coeficiente de Poisson, ν , das razões entre os eixos principais, a_i , e da orientação deles em relação a algum sistema cartesiano de coordenadas.

Fora da inclusão as tensões e as deformações não são constantes, e com o aumento da distância, a partir da inclusão, elas vão diminuindo de maneira assintótica. O resultado do tensor de Eshelby vale para um material anisotrópico arbitrário (Eshelby, 1957) apud Seelig (2006). Mesmo assim, somente no caso de um material isotrópico, é possível uma forma exata de representação do tensor de Eshelby e dos campos fora da inclusão. Essa solução, para inclusões elipsoidais, tem importância fundamental para técnicas analíticas de homogeneização.

A partir da forma elipsoidal, vários casos especiais podem ser derivados. Por exemplo, a solução, em duas dimensões, para um cilindro infinitamente longo, com seção transversal elipsoidal, no estado plano de tensões, é obtida fazendo $a_3 \rightarrow \infty$ (Figura 2.5).

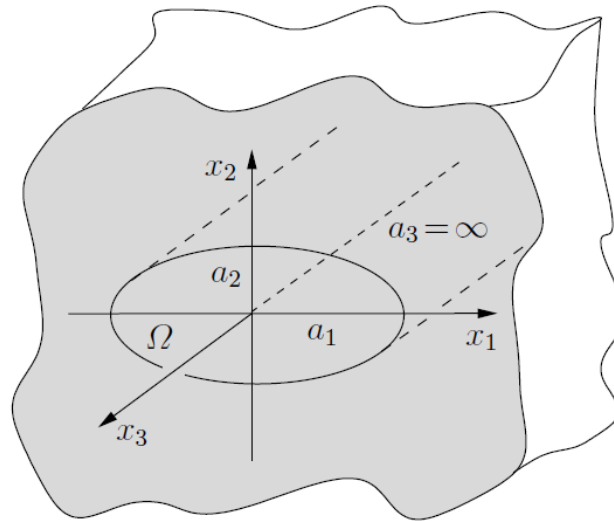


Figura 2.5 - Cilindro elíptico infinitamente longo [Seelig, 2006]

2.1.2 Não homogeneidades

2.1.2.1 Conceito da autodeformação equivalente

As não homogeneidades são a segunda classe de defeitos, as quais, em vez de autodeformações em um material homogêneo, são caracterizadas por propriedades não homogêneas no material (ou seja, propriedades que variam espacialmente). O procedimento para a análise desses defeitos consiste em descrevê-los através de uma autodeformação equivalente, em um material homogêneo de comparação (equivalente), para, assim, tornar possível a aplicação do tensor de Eshelby. Assim, considera-se um domínio, V , com o comportamento do material não homogêneo descrito pelo tensor de elasticidade, espacialmente dependente, $C_{ijkl}(x_m)$, e com deslocamentos prescritos, \hat{u}_i , no contorno, ∂V (Figura 2.6a). Se as forças de corpo são desprezadas, esse problema de valor de contorno é governado pela Equação (2.7).

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x_m)\varepsilon_{kl}, \quad u_i|_{\partial V} = \hat{u}_i \quad (2.7)$$

Adicionalmente, considera-se um domínio idêntico, sujeito às mesmas condições de contorno, porém, formado por um material homogêneo de comparação, com propriedades constantes, C_{ijkl}^0 (Figura 2.6b). Os campos de tensão, de deformação e de deslocamento, nesse problema, são indicados pelo sobrescrito 0 , e são mostrados na Equação (2.8).

$$\sigma_{ij,j}^0 = 0, \quad \sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^0, \quad u_i^0|_{\partial V} = \hat{u}_i \quad (2.8)$$

Com a diferença dos campos de deslocamento e de deformação, $\tilde{u}_i = u_i - u_i^0$ e $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0$, chegasse à diferença para o campo de tensão, $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$, que resulta na Equação (2.9).

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^0 \left[\tilde{\varepsilon}_{kl} + \underbrace{C_{klmnpq}^0 \varepsilon_{pq}}_{-\varepsilon_{kl}^*} \right] \quad (2.9)$$

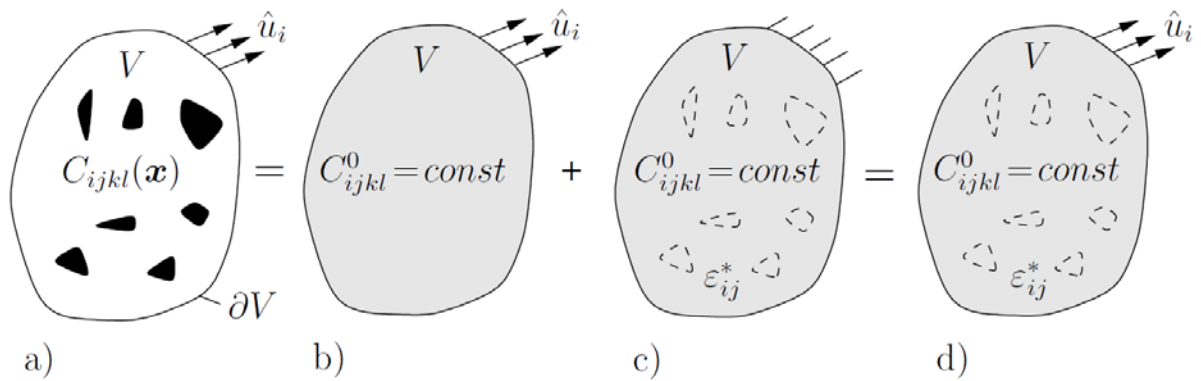


Figura 2.6 - (a) material heterogêneo; (b) material homogêneo de comparação; (c) autodeformação equivalente; (d) problema original homogeneizado [Seelig, 2006]

Dessa forma, o problema de valor de contorno para a diferença dos campos é governado pela Equação (2.10).

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^0 (\tilde{\varepsilon}_{kl} - \varepsilon_{kl}^*), \quad \tilde{u}_i|_{\partial V} = 0 \quad (2.10)$$

A Equação (2.10) descreve o problema de valor de contorno em um material homogêneo, C_{ijkl}^0 , com autodeformação, $\varepsilon_{kl}^*(x_m)$, e com deslocamentos prescritos iguais a zero no contorno ∂V (Figura 2.6c). Essa autodeformação, dada pela Equação (2.11), é chamada de autodeformação equivalente, e representa a heterogeneidade do material.

$$\varepsilon_{ij}^* = -C_{ijkl}^0 \varepsilon_{mn} \quad (2.11)$$

Usando um material de comparação homogêneo e arbitrário, o complexo problema original, mostrado na Figura 2.6a, foi transformado em um problema mais simples, mostrado na Figura 2.6d, com um material homogêneo e com autodeformações distribuídas. Esse problema mais simples ainda depende do campo de deformações do problema original, mas essa dependência é só através do desvio nas propriedades elásticas, $C_{ijkl}(x_m) - C_{ijkl}^0$.

Essa abordagem é vantajosa em vários aspectos, uma vez que, soluções fundamentais para o problema de autodeformações em um material homogêneo, como o resultado de Eshelby, são conhecidas, e agora podem ser aplicadas para o caso de não homogeneidades.

2.1.2.2 Não homogeneidades elipsoidais

Um caso especial, onde o resultado de Eshelby pode ser aplicado, é uma não homogeneidade elipsoidal, Ω , em uma matriz infinita (Figura 2.7a). As propriedades elásticas são constantes em cada região (um valor constante para cada região), e são dadas pelos tensores de elasticidade C_{ijkl}^I , dentro da não homogeneidade, e C_{ijkl}^M , na matriz. No infinito, o campo de deformação $\varepsilon_{ij}^0 = \text{constante}$ é prescrito e o material da matriz é escolhido como o material homogêneo de comparação, $C_{ijkl}^0 = C_{ijkl}^M$. Usando a diferença dos campos de deformação, $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0$, e a Equação (2.11), a autodeformação equivalente em Ω , é dada por:

$$\varepsilon_{ij}^*(x_r) = -C_{ijkl}^M{}^{-1} (C_{klmn}^I - C_{klmn}^M) (\tilde{\varepsilon}_{mn}(x_r) + \varepsilon_{mn}^0) \quad (2.12)$$

Como fora de Ω tem-se $\varepsilon_{ij}^* = 0$, a diferença de deformação, $\tilde{\varepsilon}_{mn}(x_r)$, que aparece na Equação (2.10), pode ser determinada pelo tensor de Eshelby.

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* = \text{constante} \quad (2.13)$$

Substituindo Equação (2.13) na Equação (2.12), e resolvendo para ε_{ij}^* , se percebe que a condição de autodeformação constante realmente é verdadeira, uma vez que ela irá depender da deformação prescrita, aplicada no infinito, ε_{kl}^0 (Figura 2.7b).

$$\varepsilon_{ij}^* = - \left[S_{ijkl} + (C_{ijmn}^I - C_{ijmn}^M) {}^{-1} C_{mnkl}^M \right] {}^{-1} \varepsilon_{kl}^0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.14)$$

Usando a Equação (2.13) e a Equação (2.14), a deformação total, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \tilde{\varepsilon}_{ij}$, dentro da não homogeneidade Ω , pode ser definida pela Equação (2.15).

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\left[I_{ijkl} + S_{ijmn} C_{mnpq}^M \right]^{-1}}_{A_{ijkl}^I{}^\infty} (C_{pqkl}^I - C_{pqkl}^M) \varepsilon_{kl}^0 = \text{constante} \quad (2.15)$$

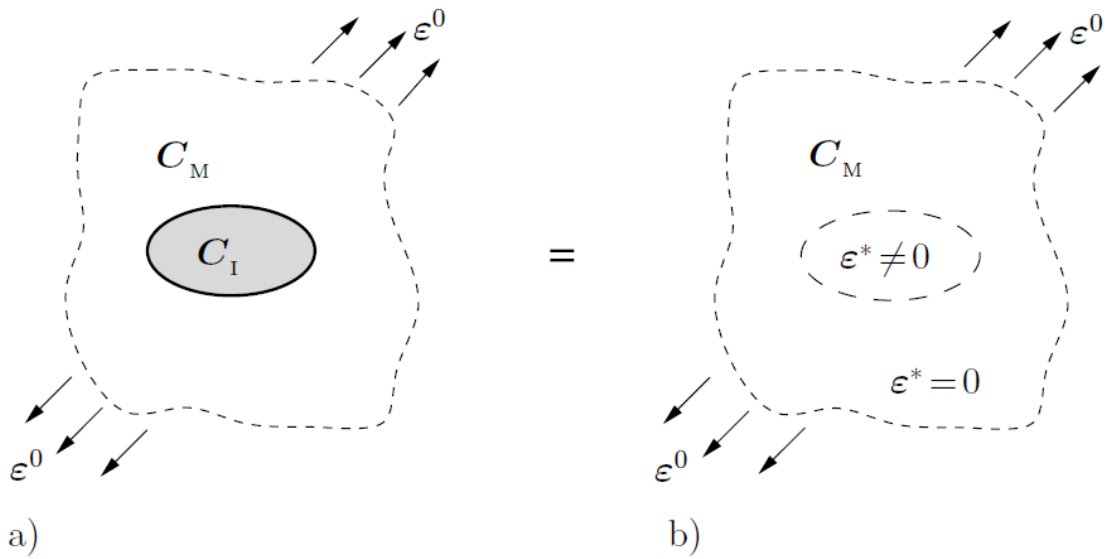


Figura 2.7 - (a) não homogeneidade elipsoidal; (b) material homogêneo com autodeformações [Seelig, 2006]

O tensor de quarta ordem, $A_{ijkl}^I{}^\infty$, que descreve a relação entre a deformação, dentro da não homogeneidade, e o carregamento externo, é chamado de tensor de influência. Usando a Equação (2.15), a tensão dentro da não homogeneidade, $\sigma_{ij} = C_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}$, que também é constante, pode ser expressada, por exemplo, como uma função da tensão $\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}^M \varepsilon_{kl}^0$, aplicada no infinito.

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}^I A_{mnpq}^I{}^\infty C_{pqkl}^M{}^{-1} \sigma_{kl}^0 \quad (2.16)$$

Fora da não homogeneidade as tensões e deformações não são constantes, e os campos de diferença de tensão, deformação e deslocamento, no problema de autodeformação equivalente, apresentam comportamento assintótico.

2.1.2.3 Trincas

Dois casos especiais de não homogeneidade são as cavidades (vazios) e as trincas, em meios homogêneos. Pode-se considerar que esses defeitos têm rigidez igual a zero, ou seja, considera-se $C_{ijkl}^I = 0$ nas relações obtidas para não homogeneidades genéricas, com o objetivo de derivar resultados para cavidades elipsoidais e para trincas (no limite de um eixo principal tendendo a zero). Somente as deformações dentro do defeito têm que ser interpretadas de forma adequada. Entretanto, é mais ilustrativo tratar diretamente o problema de valor de contorno, para esses defeitos, em um material homogêneo sujeito a um carregamento distante constante. Para essa análise, as condições de contorno na superfície da cavidade ou da trinca devem ser levadas em conta, e elas serão consideradas, nesse texto, como condições de tração igual a zero.

No caso de uma placa isotrópica infinita, em um estado plano de tensões, que contém uma trinca de comprimento $2a$ e está sujeita a um carregamento constante, σ_{ij}^0 , no infinito (Figura 2.8), o campo de deslocamentos sofre um salto igual a Δu_i . Em um sistema cartesiano de coordenadas (x_1, x_2) , esse salto pode ser representado pela Equação (2.17).

$$\Delta u_i(x_1) = \frac{4\sigma_{ij}^0}{E} \sqrt{a^2 - x_1^2} \quad (2.17)$$

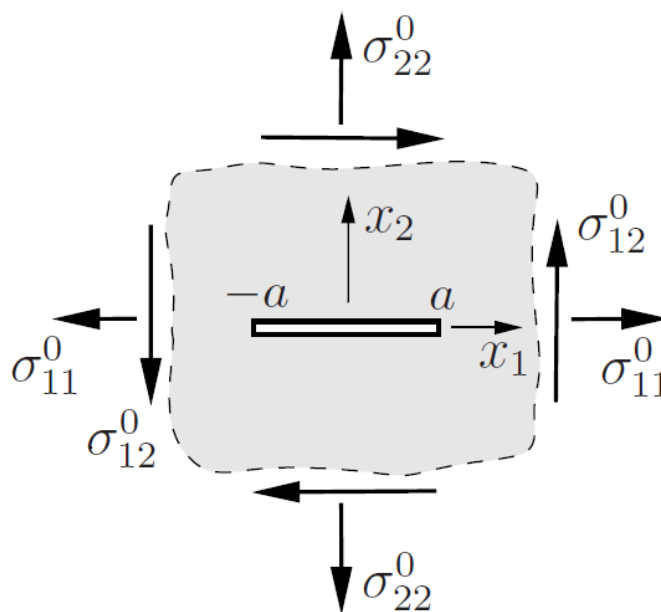


Figura 2.8 - Trinca reta [Seelig, 2006]

Assume-se que o comportamento do material na microescala é conhecido e é linear elástico. Se um sistema de coordenadas adicional é introduzido na microescala, a microestrutura pode ser descrita pela dependência do tensor constitutivo, $C_{ijkl}(x_m)$, na coordenada microescalar x_m . Análogo à medição das propriedades macroscópicas de um material a partir do ensaio de um corpo de prova representativo, considera-se, aqui, um volume V , no nível microscópico, que deve ser representativo de todo o material. Esse volume é empregado no processo de homogeneização, para atribuir propriedades macroscópicas para o material, em termos do tensor constitutivo efetivo, espacialmente constante, C_{ijkl}^* . Para assumir que esse resultado é independente do ponto analisado (x_m^{macro}), a totalidade dos detalhes microestruturais, que são descritos por $C_{ijkl}(x_m)$ e contribuem para C_{ijkl}^* , têm que ser independentes da localização, desse ponto, na escala macroscópica. Esse pré-requisito, para uma homogeneização, é também referido como uma distribuição estaticamente homogênea de defeitos através do material. Além disso, C_{ijkl}^* não deve depender no tamanho ou no formato do volume escolhido. Isso significa que, no caso de uma microestrutura irregular (distribuição de defeitos), o volume, V , tem que conter um número suficientemente grande de defeitos, e sua dimensão, d , tem que ser muito maior que o comprimento característico, l , da microestrutura. Esse último é dado, por exemplo, pelo tamanho típico de defeitos individuais (Figura 2.9). Por outro lado, o volume tem que ser suficientemente pequeno para poder ser considerado um ponto no nível macroscópico (Figura 2.9). Um comprimento característico, D , nesse nível, é dado pela geometria, pela variação espacial do carregamento, ou pelos campos de tensão e deformação resultantes no material macroscopicamente homogêneo. Dessa forma, para ser adequada para a homogeneização do material, a dimensão d do volume escolhido deve satisfazer a Equação (2.18).

$$l \ll d \ll D \quad (2.18)$$

Um volume que satisfaz a Equação (2.18) é chamado de Elemento de Volume Representativo (EVR).

Obviamente, a restrição de d , de acordo com a Equação (2.18), pode impedir a existência de um EVR e, assim, de uma homogeneização significativa. Esse tipo de situação, por exemplo, prevalece na ponta de uma trinca macroscópica, onde as deformações, em um material homogêneo, são singulares e, dessa forma, variam fortemente ao longo de uma pequena distância arbitrária D . A dimensão do EVR, d , teria que ser, de acordo com a

Equação (2.18), infinitamente pequena e iria, necessariamente, violar a distância do comprimento característico da microestrutura, l , de qualquer material real.

De acordo com Van Mier (1990), o EVR é o menor volume do material, o qual, num determinado sentido, responde como um macro-contínuo. Mais especificamente, o tamanho do EVR é determinado pela escolha dos níveis de tolerância para a diferença entre um campo (deslocamento, deformação, tensão, etc...) computado para o macro-contínuo e para o EVR.

2.1.3.2 Fundamentos: Médias

Através da consideração de duas escalas, mostrada na Figura 2.9, um ponto no material, no nível macroscópico, está relacionado com um volume V no nível microscópico, onde tensões e deformações predominam como micro-campos variantes. A macro-tensão e a macro-deformação, que caracterizam o estado mecânico do ponto no material macroscópico, são definidas como médias volumétricas dos campos microscópicos.

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x_m) dV, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x_m) dV \quad (2.19)$$

onde o símbolo $\langle \cdot \rangle$ representa uma média volumétrica. Empregando o teorema da divergência, essas quantidades macroscópicas podem ser expressas por integrais sobre o contorno ∂V , do domínio V . Essa representação é mostrada na Equação (2.20).

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} t_i x_j dA, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (u_i n_j + u_j n_i) dA \quad (2.20)$$

Essas equações são válidas independentemente do comportamento do material, e, também, no caso de microestruturas que contem cavidades ou trincas.

Frequentemente, um volume V de um material heterogêneo é formado por subdomínios V_α ($\alpha = 1, \dots, n$), com frações volumétricas $c_\alpha = V_\alpha/V$ e $\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha = 1$, onde as propriedades elásticas, C_{ijkl}^α , são constantes em cada região (um valor constante para cada região). No caso de uma microestrutura como essa, formada por fases discretas, tem-se:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} \langle \sigma_{ij} \rangle_{\alpha} , \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \sum_{\alpha=1}^n c_{\alpha} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\alpha} \quad (2.21)$$

As grandezas $\langle \sigma_{ij} \rangle_{\alpha}$ e $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\alpha}$ são as médias volumétricas, dentro de cada fase, das tensões e das deformações, respectivamente. Elas são relacionadas, dentro do volume V_{α} , pela Equação (2.22).

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{\alpha} = C_{ijkl}^{\alpha} \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\alpha} \quad (2.22)$$

No caso de microestruturas que contem somente cavidades ou trincas, é pratico representar as grandezas, mostradas na Equação (2.20), de forma diferente. Assim, considerando, primeiramente, a situação de cavidades, e aplicando o teorema da divergência na deformação média, $\langle \varepsilon \rangle_M$, da matriz de volume $V_M = c_M V$, chega-se a Equação (2.23).

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = c_M \langle \varepsilon_{ij} \rangle_M + \underbrace{\frac{1}{2V} \int_{\partial V_c} (u_i n_j + u_j n_i) dA}_{\langle \varepsilon_{ij} \rangle_c} \quad (2.23)$$

No caso de trincas, $\partial V_c \rightarrow S^+ + S^-$ (como mostrado na Figura 2.10b). Considerando a abreviação $\Delta u_i = u_i^+ - u_i^-$, chega-se a Equação (2.24).

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = c_M \langle \varepsilon_{ij} \rangle_M + \underbrace{\frac{1}{2V} \int_{\Gamma} (\Delta u_i n_j + \Delta u_j n_i) dA}_{\langle \varepsilon_{ij} \rangle_c} \quad (2.24)$$

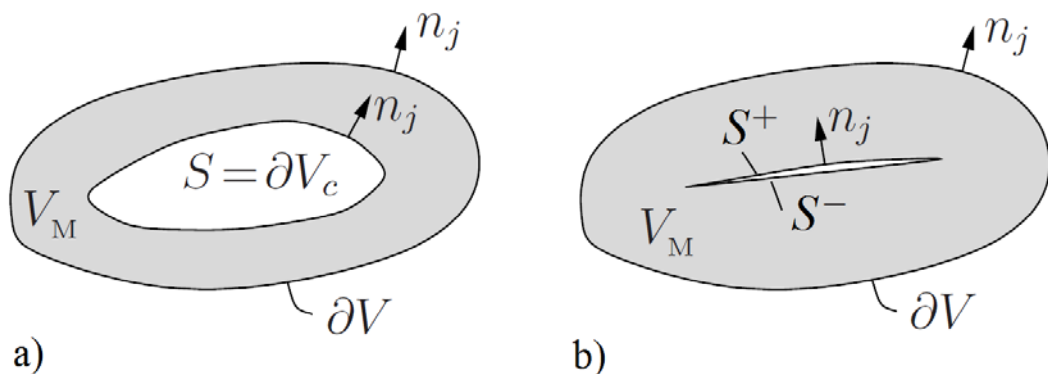


Figura 2.10 - Domínio com: (a) cavidade; (b) trinca [adaptado de Seelig, 2006]

A Equação (2.24), que será apresentada novamente ao longo desse trabalho, será a base para algumas das medidas de dano implementadas nessa dissertação.

Assim, as macro-deformações, no caso de cavidades ou trincas, consistem na média das deformações da matriz mais a quantidade $\langle \varepsilon \rangle_c$, que representa a média das deformações do defeito, ou da fase danificada (o subscrito c vem das palavras em inglês para cavidade e trinca, *cavity* e *crack*).

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = c_M \langle \varepsilon_{ij} \rangle_M + \langle \varepsilon_{ij} \rangle_c \quad (2.25)$$

Em contraste, as macro-tensões são, no caso da condição de contorno de tração igual a zero na superfície das cavidades ou das trincas, dadas pela média das tensões da matriz.

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = c_M \langle \sigma_{ij} \rangle_M \quad (2.26)$$

Em um material que só contem trincas, a fração volumétrica da matriz é igual a 1.

Se o material da matriz é homogêneo, com $C_{ijkl}^M = \text{constante}$ e $\langle \sigma_{ij} \rangle_M = C_{ijkl}^M \langle \varepsilon_{kl} \rangle_M$, usando as relações mostradas até aqui, chega-se a Equação (2.27).

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^M (\langle \varepsilon_{kl} \rangle - \langle \varepsilon_{kl} \rangle_c) \quad \text{ou} \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{M^{-1}} \langle \sigma_{kl} \rangle + \langle \varepsilon_{ij} \rangle_c \quad (2.27)$$

De acordo com essa representação, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_c$ aparece na relação entre as macro-tensões e as macro-deformações (estabelecida, aqui, através do tensor de propriedades elásticas da matriz), da mesma forma que a autodeformação aparece na Equação (2.1).

2.1.3.3 Fundamentos: Constantes elásticas efetivas

O tensor constitutivo efetivo, C_{ijkl}^* , é definido pela relação linear entre as macro-tensões e as macro-deformações, mostradas na Equação (2.19), e é dado pela Equação (2.28).

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (2.28)$$

A interpretação de C_{ijkl}^* como uma propriedade do material é sujeita a várias condições. Por exemplo, é adequado exigir a igualdade da densidade média da energia de

deformação, no volume V , quando expressada tanto por quantidades macroscópicas quanto por quantidades microscópicas.

$$\langle U \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \varepsilon_{ij} \rangle C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (2.29)$$

Usando a lei de elasticidade $\sigma_{ij}(x_m) = C_{ijkl}(x_m) \varepsilon_{kl}(x_m)$, para o nível microscópico, e a Equação (2.28), é possível escrever esse requerimento, chamado de Condição de Hill (Hill, 1963), na forma mostrada na Equação (2.30).

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (2.30)$$

Para as flutuações dos campos microscópicos, $\tilde{\sigma}_{ij}(x_m) = \sigma_{ij}(x_m) - \langle \sigma_{ij} \rangle$ e $\tilde{\varepsilon}_{ij}(x_m) = \varepsilon_{ij}(x_m) - \langle \varepsilon_{ij} \rangle$, essa condição resulta em:

$$\langle \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} \rangle = 0 \quad (2.31)$$

Isso significa que, na média, as flutuações de tensão não devem realizar trabalho sobre as flutuações de deformação. Usando o teorema da divergência e a condição de equilíbrio $\sigma_{ik,k} = 0$, isso pode ser expressado em termos das quantidades na fronteira do domínio.

$$\frac{1}{V} \int_{\partial V} (u_i - \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j) (\sigma_{ik} - \langle \sigma_{ik} \rangle) n_k dA = 0 \quad (2.32)$$

Escrita dessa forma, a Condição de Hill pode ser interpretada para afirmar que os micro-campos variantes, ao longo da fronteira de um EVR, têm que ser energeticamente equivalentes à suas médias (Figura 2.11). Isso só é válido se o domínio V é suficientemente grande com respeito às heterogeneidades.

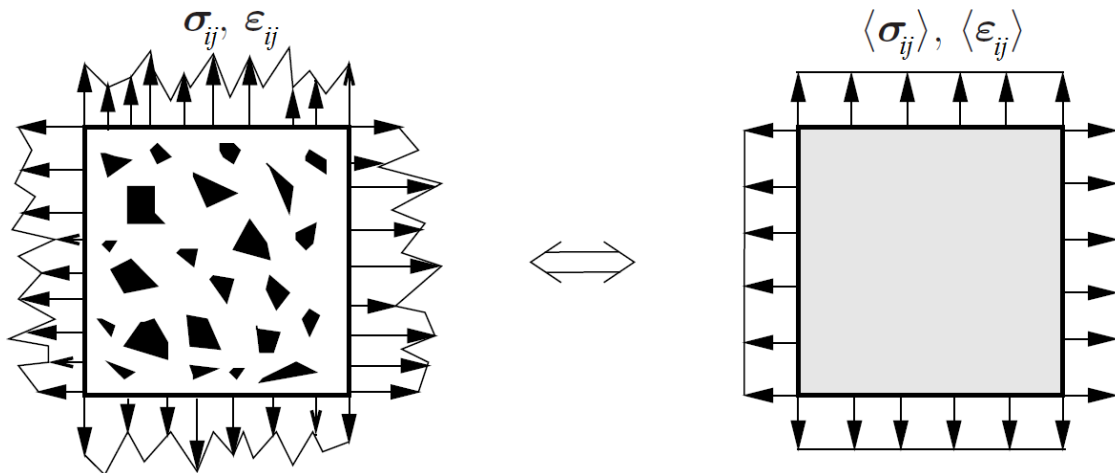


Figura 2.11 - EVR com campos microscópicos variantes e médias equivalentes [adaptada de Seelig, 2006]

Para computar os campos $\sigma_{ij}(x_m)$ e $\epsilon_{ij}(x_m)$ em algum volume V no nível microscópico, a condição de equilíbrio $\sigma_{ij,j} = 0$ e a lei da elasticidade $\sigma_{ij}(x_m) = C_{ijkl}(x_m)\epsilon_{kl}(x_m)$ têm que ser complementadas pela condição de contorno em ∂V , ou seja, um problema de valor de contorno deve ser formulado. O domínio V do material heterogêneo é considerado equivalente ao mesmo domínio de um meio homogêneo efetivo, e, ao mesmo tempo, representa um ponto no material macroscópico, o qual está sujeito somente a estados homogêneos de tensão e deformação. É adequado, então, prescrever esses estados homogêneos como condições de contorno em ∂V . Isso pode ser feito de duas formas:

a) *Deslocamentos lineares*: $u_i = \epsilon_{ij}^0 x_j$ em ∂V , onde $\epsilon_{ij}^0 = \text{constante}$

Nesse caso, a partir da Equação (2.20) e considerando $\int_{\partial V} x_i n_j dA = V \delta_{ij}$, chega-se a:

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle = \epsilon_{ij}^0 \quad (2.33)$$

b) *Trações uniformes*: $t_i = \sigma_{ij}^0 n_j$ em ∂V , onde $\sigma_{ij}^0 = \text{constante}$

Com a Equação (2.20) chega-se a:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0 \quad (2.34)$$

Deformações homogêneas prescritas na fronteira de um domínio arbitrário, de um material heterogêneo, são iguais à média volumétrica das deformações ao longo desse

domínio. Analogamente, se um estado homogêneo de tensão é prescrito na fronteira ∂V , ele é igual à média das tensões no domínio, considerando que forças de corpo não estão presentes. No caso de um material homogêneo, os dois tipos de condições de contorno são equivalentes e induzem campos homogêneos ao longo do volume. A Equação (2.33) e a Equação (2.34) são frequentemente chamadas de “teorema da deformação média” e “teorema da tensão média”, respectivamente.

Usando a Equação (2.32) é possível verificar que ambas as condições de contorno satisfazem a Condição de Hill de forma idêntica, ou seja, independentemente do domínio V . Isso era esperado, já que a consequência da Condição de Hill, de que os campos variantes na fronteira do EVR podem ser substituídos por campos homogêneos, foi antecipada nas condições de contorno (a) e (b). Além disso, quando a condição de contorno (a) ou (b) é imposta, a Condição de Hill, na forma da Equação (2.30) ou da Equação (2.32), é satisfeita independentemente de qualquer relação entre os campos σ_{ij}^0 e ε_{ij}^0 .

Os campos dentro do domínio V dependem linearmente no parâmetro de carregamento, σ_{ij}^0 ou ε_{ij}^0 , nas condições de contorno (a) ou (b). Então, esses campos podem ser representados da seguinte forma:

$$\text{a) } \quad \varepsilon_{ij}(x_m) = A_{ijkl}(x_m) \varepsilon_{kl}^0 \quad \text{para } u_i = \varepsilon_{ij}^0 x_j \quad \text{em } \partial V \quad (2.35)$$

$$\text{b) } \quad \sigma_{ij}(x_m) = B_{ijkl}(x_m) \sigma_{kl}^0 \quad \text{para } t_i = \sigma_{ij}^0 n_j \quad \text{em } \partial V \quad (2.36)$$

Aqui, $A_{ijkl}(x_m)$ e $B_{ijkl}(x_m)$ são os chamados tensores de influência. Esses tensores de quarta ordem representam a solução completa do problema de valor de contorno e dependem da microestrutura de todo o domínio V . Os dois primeiros índices de $A_{ijkl}(x_m)$ satisfazem a condição de compatibilidade, exatamente como ε_{ij} . Correspondentemente, $B_{ijkl}(x_m)$ satisfaz a condição de equilíbrio $B_{ijkl,j}(x_m) = 0$. Além disso, fazendo a média da Equação (2.35) e da Equação (2.36), sobre o volume V , e levando em conta o resultado mostrado na Equação (2.33) e na Equação (2.34), mostra-se que o valor médio dessas funções é igual ao tensor unitário de quarta ordem.

$$\langle A_{ijkl} \rangle = I_{ijkl}, \quad \langle B_{ijkl} \rangle = I_{ijkl} \quad (2.37)$$

De acordo com $\sigma_{ij}(x_m) = C_{ijkl}(x_m)\varepsilon_{kl}(x_m)$ e com a Equação (2.28), as seguintes relações são obtidas:

$$C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle = \langle C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rangle, \quad C_{ijkl}^{*-1} \langle \sigma_{kl} \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \langle C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \rangle \quad (2.38)$$

No caso da condição de contorno (a), chega-se a seguinte representação:

$$C_{ijkl}^{*(a)} = \langle C_{ijmn} A_{mnkl} \rangle \quad (2.39)$$

No caso da condição de contorno (b), tem-se:

$$C_{ijkl}^{*(b)} = \langle C_{ijmn}^{-1} B_{mnkl} \rangle^{-1} \quad (2.40)$$

Inserindo as condições de contorno (a) e (b) na Equação (2.29), chega-se em:

$$C_{ijkl}^{*(a)} = \langle A_{ijmn}^T C_{mnpq} A_{pqkl} \rangle, \quad C_{ijkl}^{*(b)} = \langle B_{ijmn}^T C_{mnpq}^{-1} B_{pqkl} \rangle^{-1} \quad (2.41)$$

onde a simetria do tensor constitutivo efetivo, com respeito ao primeiro e ao segundo índice, torna-se clara.

Os sobrescritos (a) e (b) enfatizam que essas médias, que são computadas para um volume arbitrário V , em geral, dependem do tipo de condição de contorno prescrita em ∂V . Portanto, $C_{ijkl}^{*(a)}$ e $C_{ijkl}^{*(b)}$ podem não ser considerados propriedades efetivas do material, porque, nessas expressões, o volume V não precisa, automaticamente, satisfazer os requerimento de um EVR. A diferença entre $C_{ijkl}^{*(a)}$ e $C_{ijkl}^{*(b)}$ pode ser tomada como uma medida da qualidade do domínio escolhido. Somente se o domínio V garantir que $C_{ijkl}^{*(a)} = C_{ijkl}^{*(b)} = C_{ijkl}^*$, C_{ijkl}^* pode ser interpretado como uma propriedade macroscópica única do material. Claramente, isso deve, também, ser válido para qualquer domínio maior, que contenha V .

2.1.3.4 Aproximações analíticas: Relações gerais

De acordo com a Equação (2.39) e com a Equação (2.40), as constantes elásticas efetivas, C_{ijkl}^* , podem ser representadas como as médias ponderadas das propriedades

elásticas microscópicas, $C_{ijkl}(x_m)$, onde o tensor de influencia, $A_{ijkl}(x_m)$, serve como uma função de ponderação. No caso de uma microestrutura real, entretanto, a exata função $C_{ijkl}(x_m)$ não é conhecida, nem é possível, em geral, escrever o tensor de influência correspondente de forma exata. Dessa forma, aproximações apropriadas têm que ser feitas, considerando as informações disponíveis, na modelagem da microestrutura e na representação do tensor de influência.

Pode-se considerar, primeiro, as microestruturas formadas por fases discretas com propriedades elásticas constantes em cada região (um valor constante para cada região), o que é aplicável para muitos materiais. Usando macro-deformações prescritas, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0$, ou macro-tensões prescritas, $\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0$, chega-se, através da Equação (2.35) ou da Equação (2.36), na seguinte relação para a média das fases:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_\alpha = A_{ijkl}^\alpha \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle_\alpha = B_{ijkl}^\alpha \langle \sigma_{kl} \rangle \quad (2.42)$$

onde $A_{ijkl}^\alpha = \langle A_{ijkl} \rangle_\alpha$ e $B_{ijkl}^\alpha = \langle B_{ijkl} \rangle_\alpha$.

Os tensores de influência constantes, A_{ijkl}^α e B_{ijkl}^α , representam a dependência da média (sobre o volume da fase α) de algum campo em relação às quantidades macroscópicas prescritas. Assim, a Equação (2.39) e a Equação (2.40) ficam com a seguinte forma:

$$C_{ijkl}^{* (a)} = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha C_{ijmn}^\alpha A_{mnkl}^\alpha, \quad C_{ijkl}^{* (b)} = \left(\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha C_{ijmn}^\alpha {}^{-1} B_{mnkl}^\alpha \right)^{-1} \quad (2.43)$$

onde somente os tensores de influência de $n - 1$ fases são necessários para a representação das constantes elásticas efetivas C_{ijkl}^* , pois:

$$\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha A_{ijkl}^\alpha = I_{ijkl}, \quad \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha B_{ijkl}^\alpha = I_{ijkl} \quad (2.44)$$

Considerando-se um material composto somente por duas fases, onde uma fase é chamada de matriz (M) e a outra é chamada de não homogeneidade (I – que vem do inglês *inhomogeneity*), chega-se, a partir da Equação (2.43) e da Equação (2.44), a:

$$C_{ijkl}^{*(a)} = C_{ijkl}^M + c_l (C_{ijmn}^I - C_{ijmn}^M) A_{mnkl}^I \quad (2.45)$$

$$C_{ijkl}^{*(b)} = \left(C_{ijkl}^{M^{-1}} + c_l \left(C_{ijmn}^{I^{-1}} - C_{ijmn}^{M^{-1}} \right) B_{mnkl}^I \right)^{-1} \quad (2.46)$$

Essas relações não são diretamente aplicáveis para o caso especial de uma matriz homogênea que contém, como segunda fase, cavidades ou trincas. Nesse caso, a dependência linear da média das deformações da fase danificada, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_c$, em relação às macro-quantidades prescritas, ε_{ij}^0 ou σ_{kl}^0 , é expressa pelos tensores de influência D_{ijkl} e H_{ijkl} .

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_c = D_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad \text{para} \quad \langle \varepsilon_{kl} \rangle = \varepsilon_{kl}^0, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle_c = H_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle \quad \text{para} \quad \langle \sigma_{kl} \rangle = \sigma_{kl}^0 \quad (2.47)$$

Assim, o tensor constitutivo efetivo é dado por:

$$C_{ijkl}^{*(a)} = C_{ijmn}^M (I_{mnkl} - D_{mnkl}) \quad , \quad C_{ijkl}^{*(b)} = \left[C_{ijkl}^{M^{-1}} + H_{ijkl} \right]^{-1} \quad (2.48)$$

Tendo em vista que, cavidades ou trincas causam uma redução na rigidez efetiva de um material, o tensor de influência D_{ijkl} pode ser interpretado como uma medida de dano, enquanto H_{ijkl} descreve uma flexibilidade adicional.

Esses dois tensores serão mencionados novamente nos próximos capítulos, e farão parte das ferramentas implementadas nesse trabalho.

2.1.3.5 Aproximações analíticas: Modelo de distribuição de defeitos “dilute”

Usando as soluções fundamentais apresentadas anteriormente, é possível desenvolver modelos micromecânicos que satisfazem o equilíbrio local e garantem a compatibilidade das deformações. Considerando um material com duas fases, onde a primeira é uma matriz homogênea com $C_{ijkl}^M = \text{constante}$ e a segunda é algum tipo de defeito, idêntico entre si. Considerando, então, as soluções fundamentais, essa segunda fase vai ser aproximada por não homogeneidades elipsoidais elásticas com $C_{ijkl}^I = \text{constante}$, ou por trincas (2D).

A situação mais simples acontece quando as não homogeneidades, ou os defeitos, são distribuídas de forma tão diluída na matriz homogênea, que suas interações entre si, e com a fronteira do EVR, podem ser desprezadas. Como é mostrado na Figura 2.12, pode-se

considerar que cada defeito está em um domínio infinito sujeito a um carregamento distante uniforme, $\varepsilon_{ij}^0 = \langle \varepsilon_{ij} \rangle$ ou $\sigma_{ij}^0 = \langle \sigma_{ij} \rangle$. Dessa forma, a dimensão característica dos defeitos tem que ser pequena em comparação com a distância entre defeitos ou com a distância até a fronteira do EVR. Embora as soluções obtidas, sob essas idealizações, sejam somente válidas para frações volumétricas muito pequenas ($c_I \ll 1$), elas formam a base para generalizações importantes.

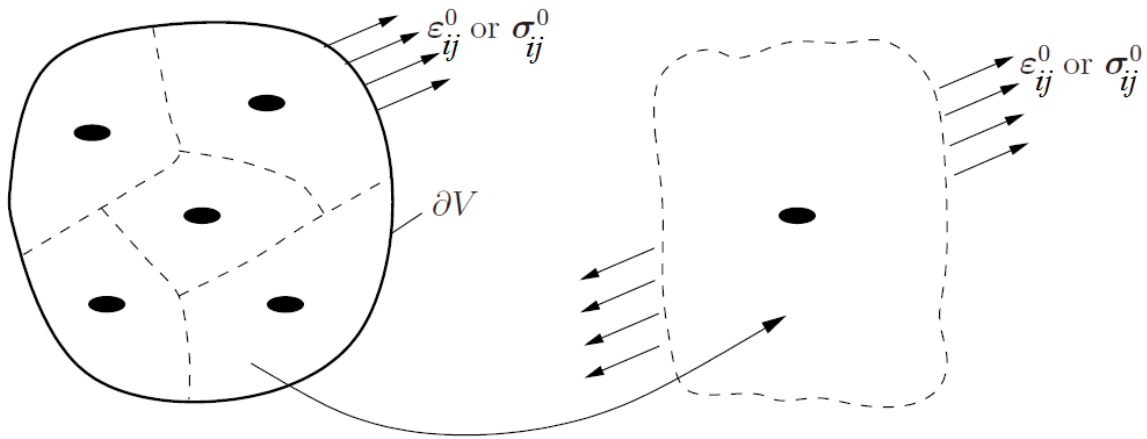


Figura 2.12 - Modelo de distribuição de defeitos *dilute* [adaptado de Seelig, 2006]

- *Não homogeneidade elipsoidal*: nesse caso, a deformação dentro da não homogeneidade é constante e é dada pelo tensor de influência, $A_{ijkl}^I{}^\infty$, apresentado na Equação (2.15). Substituindo essa equação na Equação (2.45), o tensor constitutivo efetivo do material, que contém uma distribuição *dilute* de não homogeneidades elipsoidais (ou seja, tem $c_I \ll 1$) com mesma orientação e mesmo formato, é dado por:

$$C_{ijkl}^{*(a)(DD)} = C_{ijkl}^M + c_I (C_{ijpq}^I - C_{ijpq}^M) \left[I_{pqkl} + S_{pqmn}^M C_{mnrs}^{M-1} (C_{rskl}^I - C_{rskl}^M) \right]^{-1} \quad (2.49)$$

onde o tensor de Eshelby, S_{pqmn}^M , depende do material da matriz.

No caso de diferentes não homogeneidades elipsoidais (por exemplo, com orientações diferentes), deve-se começar a partir da Equação (2.43), onde os tensores de influência individuais, $A_{ijkl}^\alpha{}^\infty$, representam as diferentes orientações, através dos respectivos tensores de Eshelby.

O sobrescrito (a) nessa equação indica que esse resultado é válido somente para o caso da condição de contorno (a), ou seja, macro-deformações prescritas. Se o modelo de

distribuição de defeitos *dilute* fosse avaliado para macro-tensões prescritas, caso (b), um tensor constitutivo efetivo $C_{ijkl}^{*(b)(DD)}$ seria obtido, o qual seria diferente de $C_{ijkl}^{*(a)(DD)}$ para valores finitos de c_I .

- *Trincas (2D)*: como uma segunda aplicação do modelo de distribuição de defeitos *dilute*, considera-se uma placa infinita, no estado plano de tensões, que contém trincas retas de comprimento $2a$. Seguindo esse modelo, a média das deformações de cada trinca, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_c$, causada por um carregamento uniforme externo σ_{ij}^0 , pode ser obtida através da Equação (2.24), usando a solução fundamental apresentada na Equação (2.17), que resulta em:

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle_c = 0 \quad (2.50)$$

$$\langle \varepsilon_{12} \rangle_c = \frac{1}{2A} \int_{-a}^a \Delta u_1(x_1) dx_1 = \frac{a^2 \pi}{A E} \sigma_{12}^0 = f \frac{\pi}{E} \sigma_{12}^0 \quad (2.51)$$

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle_c = \frac{1}{A} \int_{-a}^a \Delta u_2(x_1) dx_1 = f \frac{2\pi}{E} \sigma_{22}^0 \quad (2.52)$$

onde $f = a^2/A$ é o parâmetro densidade de fissuras e E é o módulo de elasticidade do material da matriz. O valor desse parâmetro tem que ser pequeno ($f \ll 1$) para que o modelo de distribuição de defeitos *dilute* seja válido.

Com essa configuração, as componentes, diferentes de zero, do tensor H_{ijkl}^∞ (onde o sobrescrito ∞ é usado para indicar que o tensor H_{ijkl} foi avaliado em um corpo infinito) são obtidos pela Equação (2.53).

$$H_{1212}^\infty = H_{2121}^\infty = H_{1221}^\infty = H_{2112}^\infty = f \frac{\pi}{E}, \quad H_{2222}^\infty = f \frac{2\pi}{E} \quad (2.53)$$

Como, nesse caso, as trincas são paralelas (Figura 2.13a), o comportamento global do material será anisotrópico, com redução da rigidez normal às trincas.

Os resultados da Equação (2.53) serão usados na validação de algumas das metodologias que serão apresentadas nesse trabalho.

Se, em contraste, a orientação das trincas fosse distribuída de maneira estatisticamente igual (Figura 2.13b), o tensor de flexibilidade adicional, mostrado na Equação (2.53), poderia ser obtido pela média sobre todas as orientações.

$$H_{ijkl}^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{ij'kl'}^{\infty}(\varphi) d\varphi \rightarrow H_{1111}^{\infty} = H_{1212}^{\infty} = H_{2121}^{\infty} = H_{2222}^{\infty} = f \frac{\pi}{E} \quad (2.54)$$

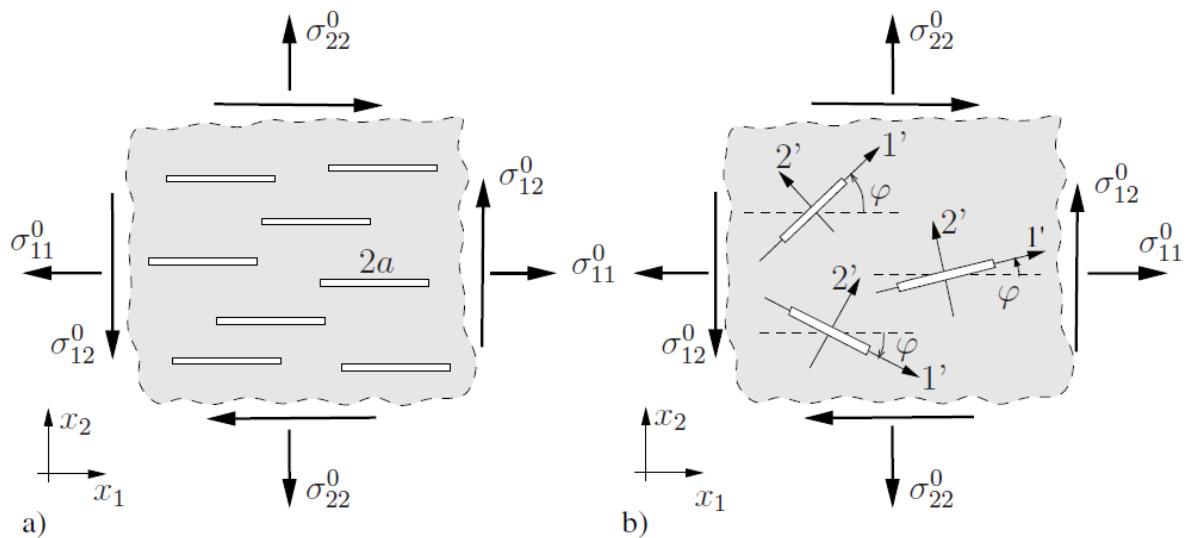


Figura 2.13 - Trincas: (a) paralelas; (b) com orientação distribuída de maneira estatisticamente igual [Seelig, 2006]

2.2 Princípios da Mecânica do Dano

De acordo com a teoria do contínuo [Seelig, 2006], os materiais não apresentam imperfeições, como trincas, vazios, etc.. Porém, essa visão teórica do material não corresponde à realidade. Materiais reais apresentam inúmeros defeitos na sua estrutura. Se a estrutura é carregada além de sua carga crítica elástica, esses defeitos crescem e coalescem, e, ao mesmo tempo, novos defeitos aparecem. Este processo é chamado de dano e causa uma mudança nas propriedades do material, o que resulta no decréscimo da sua resistência, até o ponto em que o material perde toda a sua integridade.

O comportamento de um componente com dano ainda pode ser avaliado usando mecânica do contínuo, mas as tensões e deformações macroscópicas devem ser entendidas como médias volumétricas ao longo de um elemento de volume representativo (EVR). Esta forma de estudo apresenta limitações na hora de avaliar o dano, sendo que as formulações mais simples não conseguem capturar o efeito da vizinhança. Modelos mais sofisticados

conseguem considerar este efeito, ainda que seja de forma parcial. Sobre essa metodologia de trabalho, pode-se consultar, entre outros, em Seelig (2006).

Entre outros, o dano em materiais pode ser classificado como dano dúctil ou dano frágil. No caso do dano dúctil, o fenômeno da plastificação é dominante. Em contraste, o fenômeno dominante no dano frágil é a formação e o crescimento de microtrincas, e esse tipo de dano pode ser observado, por exemplo, em materiais cerâmicos e em concreto. Como é mencionado em Herrmann (1990), materiais podem apresentar transição entre o comportamento frágil e dúctil, e essa transição frágil-dúctil pode ser encontrada aumentando-se a temperatura do material, diminuindo-se a taxa de deformação, ou através da presença de agentes corrosivos.

Existem várias maneiras de avaliar o estado de dano de um componente. A mais simples consiste numa avaliação geométrica. Considera-se uma área de seção transversal no material danificado, dA , e seu vetor normal, n_j (Figura 2.14). Com a área de defeito do elemento, dA_D , a quantidade de dano pode ser caracterizada por:

$$w(n_j) = \frac{dA_D}{dA} \quad (2.55)$$

onde w pode ir de 0 (material sem dano) até 1 (material totalmente danificado). Porém, em materiais reais, valores de $w \approx 0,2 \dots 0,5$ já são suficientes para iniciar o processo de falha total do componente [Seelig, 2006].

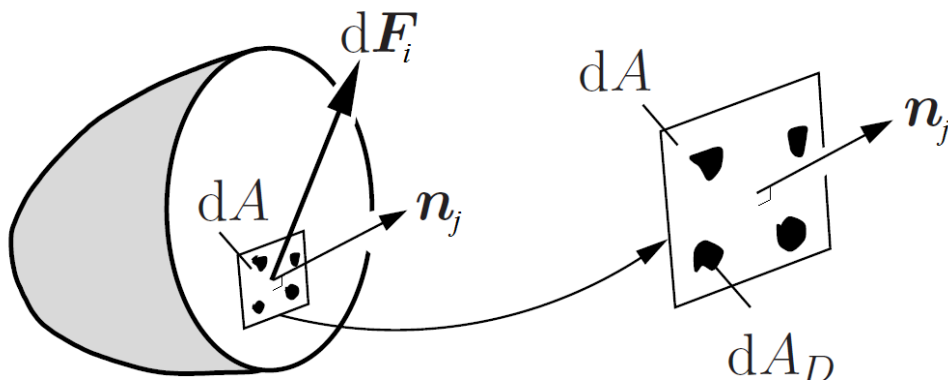


Figura 2.14 - Avaliação geométrica do dano [adaptado de Seelig, 2006]

Durante o processo de deformação os defeitos podem crescer em direções preferenciais, que são determinadas pelo estado de tensão. Nesse caso, w depende de n_j e o

dano é anisotrópico. Entretanto, se os defeitos e sua distribuição espacial não tem nenhuma orientação preferencial, o dano isotrópico prevalece e o estado de dano pode ser caracterizado por um escalar. Uma quantidade de dano significativamente pequena pode ser, geralmente, considerada isotrópica em uma primeira aproximação.

Essa ideia de avaliação geométrica pode ser expandida para avaliar a tensão efetiva do componente. Utilizando a área efetiva da estrutura ($d\tilde{A} = dA - dA_d = (1-w)dA$) na definição de tensão, para o caso de dano isotrópico (w independente de n_j), chega-se a:

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{dA}{d\tilde{A}} = \frac{\sigma}{1-w} \quad (2.56)$$

Para formular leis constitutivas normalmente é assumido que a tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ leva as mesmas deformações no material deformado que seriam introduzidas pela tensão clássica no material sem dano (princípio da deformação equivalente). Assim o comportamento tensão-deformação do material danificado pode ser descrito pela lei constitutiva do material sem dano, se as tensões são substituídas pelas tensões efetivas. No caso uniaxial de material elástico linear danificado (Figura 2.15), por exemplo, se chega a:

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-w)E} \quad (2.57)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material sem dano.

Assim, a quantidade de dano pode ser determinada pela medida do módulo de elasticidade efetivo.

$$E^* = (1-w)E \quad (2.58)$$

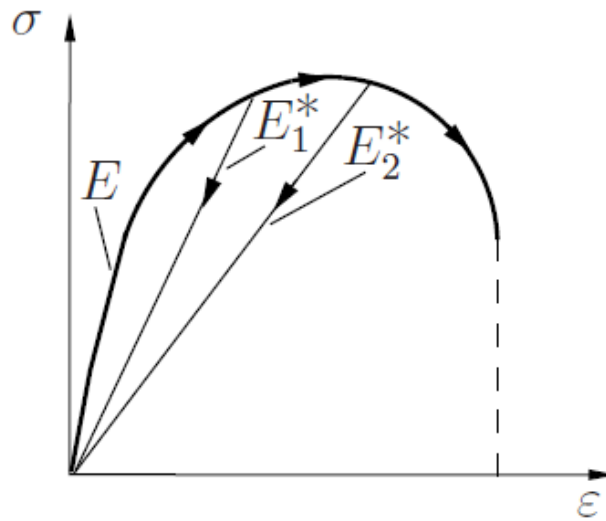


Figura 2.15 - Evolução do dano elástico [Seelig, 2006]

Generalizando essa última expressão, chega-se na Equação (2.48), apresentada na seção anterior. Essa equação é mostrada novamente aqui.

$$C_{ijkl}^* = C_{ijmn}(I_{mnkl} - D_{mnkl}) \quad (2.59)$$

onde C_{ijkl}^* e C_{ijmn} são, respectivamente, o tensor constitutivo efetivo e o tensor constitutivo do material sem dano, ambos de quarta ordem, I_{mnkl} é o tensor unitário de quarta ordem e D_{mnkl} é o tensor de influência, chamado, nesse caso, de tensor de dano de quarta ordem.

Pode-se ver que a variável de dano escalar w é o caso especial uniaxial do tensor de influência, onde esse último também leva em conta a situação do dano anisotrópico devido a orientações preferenciais de dano.

Independente do comportamento do material, geralmente o dano anisotrópico devido à presença de microfissuras pode ser descrito pelo tensor w_{ij} :

$$w_{ij} = \frac{1}{2V} \int_{A_R} (n_i \Delta u_j + n_j \Delta u_i) dA \quad (2.60)$$

onde V é volume do elemento de volume representativo, Δu_i é o salto de deslocamento e n_i é o vetor normal unitário. A integração é realizada em todo o domínio danificado, A_R , ou seja, em todas as fissuras dentro do volume V .

Apesar de ser chamado de tensor de dano [Seelig, 2006], comparando a Equação (2.60) com a Equação (2.24), verifica-se que esse tensor, na verdade, representa a média das deformações da fase danificada, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_c$, e não o próprio dano, servindo somente como um indicador indireto do dano da estrutura. Se a microfissura não fecha completamente quando acontece o descarregamento, esse tensor descreve as deformações residuais (inelásticas).

Sendo assim, como $w_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle_c$, esse tensor pode ser usado nas expressões deduzidas na seção anterior, que relacionam essa deformação com os tensores de influência de quarta ordem, D_{ijkl} e H_{ijkl} .

O índice de dano de segunda ordem, que será apresentado no capítulo 5, será definido usando o tensor w_{ij} .

2.2.1 Dano frágil

Nesse tipo de dano, o mecanismo dominante é a nucleação e o crescimento de microfissuras. Essas trincas normalmente têm uma orientação preferencial, dada pelos eixos principais do tensor de tensão. Sob carregamentos de tração, observa-se que as trincas crescem, preferencialmente, normais à máxima tensão de tração (Figura 2.16). O comprimento característico das trincas, no estágio inicial, é normalmente determinado pela microestrutura do material (ou seja, o tamanho dos grãos). Durante o carregamento, a partir de um patamar crítico, as fissuras começam a crescer e se multiplicar, o que leva a um decréscimo na rigidez da estrutura, na direção do carregamento. O comportamento de um material danificado é não linear, devido ao dano crescente. Em um primeiro estágio, se as condições de contorno induzem sobre o componente uma distribuição uniforme de deformações, o dano pode ser considerado isotrópico e apresentar uma distribuição espacial homogênea. Porém, quando os microdefeitos começam a interagir, tanto a homogeneidade como também a isotropia do dano deixam de ser válidas, acontece a localização da deformação e esses microdefeitos coalescem formando uma fissura principal.

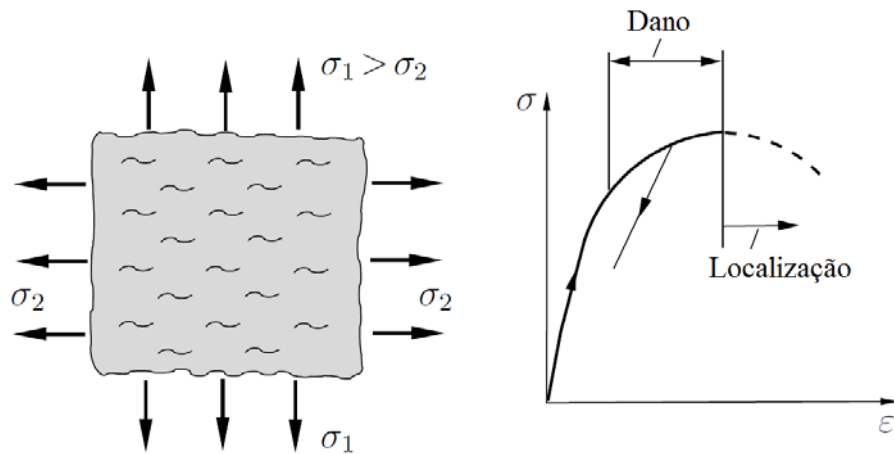


Figura 2.16 - Dano frágil sob carregamento de tração [Seelig, 2006]

No caso de carregamentos compressíveis, as trincas, normalmente, crescem na direção da máxima tensão de compressão (Figura 2.17). Elas podem ser originadas por vários mecanismos que geram campos locais de tensão de tração. Um exemplo típico são as cavidades, ou não homogeneidades, esféricas, as quais apresentam, em seus polos, tensões locais de tração, induzidas pelo carregamento compressível global. Outro mecanismo envolve trincas cisalhantes sob carregamentos que geram modo II, as quais torcem e, depois, crescem sob condições de modo I locais, na direção da compressão global. A localização, nesse caso, normalmente acontece na forma de “bandas de cisalhamento”, que se origina do crescimento e coalescência de trincas de cisalhamento que estão inclinadas, com um determinado ângulo, em relação ao carregamento compressível global.

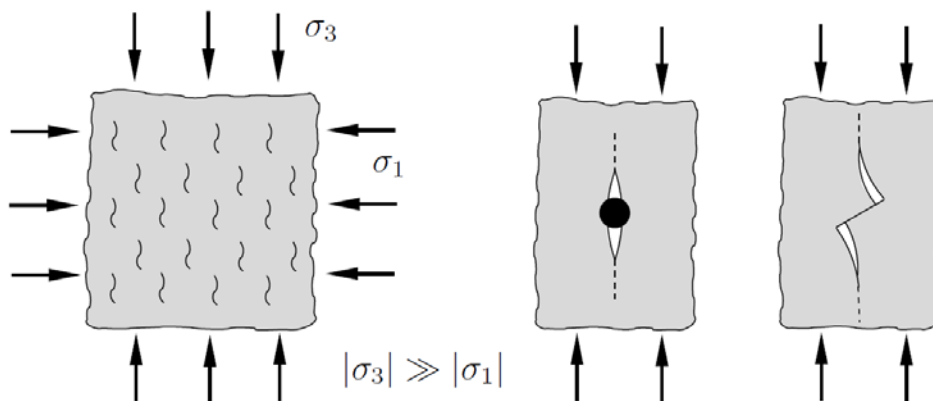


Figura 2.17 - Dano frágil sob carregamento compressível [Seelig, 2006]

2.3 Revisão do Estado da Arte

Nesta seção, as principais referências bibliográficas citadas no capítulo 1, sobre o LDEM são apresentadas, juntamente com uma breve descrição sobre os temas abordados.

Para exemplificar abordagens que seguem a mecânica do contínuo para fazer a análise do processo de dano, dois trabalhos foram citados, Ottosen (1975) e Crawford *et al.* (2012). O primeiro trabalhou com concreto, usando a abordagem da mecânica do contínuo para estudar a falha desse material. E o segundo estudou a modelagem de concreto reforçado submetido a cargas de explosão e de impacto.

Para o caso da abordagem por modelos estatísticos, os trabalhos de Li e Liu (2002) e Liu e Liu (2007) foram citados. No primeiro foi feita uma revisão de três grandes metodologias de análise com métodos de partículas sem malha: hidrodinâmica de partículas lisas (*smoothed particle hydrodynamics*), métodos de Galerkin sem malha e dinâmica molecular. O segundo trabalho é dedicado ao método da hidrodinâmica de partículas lisas, abordando a base teórica, as técnicas numéricas, as aplicações, etc...

Entre os modelos estatísticos, o LDEM não é o único modelo treliçado possível. Para exemplificar algumas outras versões de modelos de barras os seguintes trabalhos foram citados: Krajcinovic e Vujosevic (1998), Sagar e Prasad (2009), Nagy *et al.* (2010), Schlangen (1995), e Rinaldi (2011).

No primeiro, Krajcinovic e Vujosevic (1998), foi proposto um modelo que reexamina as hipóteses e simplificações de teorias de localização tradicionais.

No segundo, Sagar e Prasad (2009), foi usado um modelo treliçado em duas dimensões para fazer a análise de fratura em concreto. Algumas comparações, usando eventos de emissão acústica, são realizadas. A heterogeneidade do concreto é simulada com duas metodologias diferentes.

No terceiro, Nagy *et al.* (2010), a energia relacionada com dano e falha em corpos de prova de madeira foi avaliada. Um modelo estatístico treliçado, que incorpora aspectos morfológicos importantes da madeira, foi desenvolvido para avaliar a energia de fratura do processo de dano nesses materiais. A energia medida, através de equipamentos de emissão acústica, durante o ensaio dos corpos de prova, foi comparada com a energia medida na simulação numérica.

No quarto, Schlangen (1995), foi investigada a propagação de trincas em espécimes de arenito. Neste trabalho, os padrões de trincas, encontrados através de simulações realizadas

com um modelo treliçado simples, se mostraram de acordo com as observações experimentais.

No quinto, Rinaldi (2011), foram abordados conceitos e soluções da mecânica do dano estatística, que busca abordagens não convencionais para fratura e dano através de modelos discretos de dano.

O modelo de barras usado nesse trabalho, chamado de LDEM, foi proposto por Riera (1984). Esse autor fez um estudo sobre as diferenças conceituais entre projeteis leves e pesados, através do estudo de problemas de impacto em concreto.

Como foi citado, a metodologia do LDEM já foi usada em uma variedade de casos, por exemplo:

- *Carregamento impulsivo*: que foi estudado em Riera e Iturrioz (1995, 1998). No trabalho de 1995, o LDEM foi usado para determinar a resposta dinâmica de placas e cascas, compararam as respostas com resultados experimentais para certificar a precisão e a confiabilidade do método. No trabalho de 1998, placas de concreto armado foram analisadas com o LDEM, e tanto o efeito do escoamento do aço, quanto o efeito da fratura do concreto foram levados em conta.

- *Análise de sismos*: que aparece em Dalguer *et al.* (2001, 2003). No trabalho de 2001, um modelo de elementos discretos de duas dimensões foi usado para simular o terremoto que aconteceu em Chi-Chi, Taiwan, em 1999. No trabalho de 2003, foi simulada a geração de trincas em modo I, através da propagação de rupturas cisalhantes, em um terremoto.

- *Efeito de escala*: que foi estudado em Rios e Riera (2004), Miguel *et al.* (2008), Iturrioz *et al.* (2009), Riera *et al.* (2007), e Kostaski *et al.* (2010). No primeiro trabalho, foram incorporadas as duas maiores causas do efeito de escala nas análises do LDEM e os resultados das simulações foram comparados com observações experimentais. No segundo, foram feitas análises em espécimes de concreto e rocha, considerando o efeito de escala e o efeito da taxa de deformação. As respostas encontradas foram comparadas com resultados experimentais encontrados na literatura. No terceiro, foi feito um estudo sobre a resposta dinâmica de placas de vários tamanhos, que sofrem fratura sob a ação de carregamentos estáticos e dinâmicos. No quarto trabalho, o efeito de escala foi analisado em estruturas de concreto e rocha. No quinto trabalho, as respostas do LDEM foram avaliadas, abordando o tema do efeito de escala e da localização de tensão.

- *Cálculo dos parâmetros de fratura*: esse tema foi abordado em Kostaski *et al.* (2011, 2012a). No primeiro trabalho o autor trabalhou no desenvolvimento do LDEM, adicionando

novas funcionalidades para a análise de fratura e dano, como, por exemplo, uma lei constitutiva elasto-plástica (trilinear). No segundo trabalho, a propagação de trincas em sólidos foi estudada, através da análise de três casos, com diferentes níveis de complexidade.

- *Altas taxas de deformação*: que foi estudada por Riera *et al.* (2011), através da avaliação da resposta do LDEM para a análise de cubos de concreto, carregados com valores crescentes de taxa de deformação.

Outros trabalhos relevantes no desenvolvimento do LDEM são descritos a seguir:

- No trabalho de Nayfeh e Hefzy (1978), as propriedades mecânicas efetivas de dois modelos treliçados tridimensionais foram calculadas, obtendo-se respostas similares nos dois casos. Além disso, o módulo cúbico básico usado no LDEM foi idealizado neste trabalho.

- No trabalho de Hillerborg (1978), um modelo para analisar o comportamento em fratura dos materiais foi desenvolvido. Esse modelo é usado no LDEM.

- No trabalho de Miguel *et al.* (2010), foram analisados problemas de independência de malha, no LDEM, em simulações de fratura dinâmica em materiais frágeis.

- No trabalho de Puglia *et al.* (2010), foi proposto um esquema para simular campos aleatórios tridimensionais caracterizados por distribuições arbitrárias de probabilidade.

- No trabalho de Kostaski (2012c), foram apresentadas outras leis constitutivas, diferentes daquela proposta por Hillerborg (1978), com o objetivo de aumentar a aplicabilidade do LDEM. Além disso, neste trabalho, foi proposto um índice de dano escalar aplicável a cada barra do LDEM. Esse índice é mais explorado em outros trabalhos desse autor [Kostaski *et al.*, 2012b].

3 MODELOS NUMÉRICOS

3.1 Método dos Elementos Discretos Formado por Barras

O Método dos Elementos Discretos, empregado no presente trabalho, baseia-se na representação de um sólido por meio de um arranjo cúbico de elementos capazes de suportar apenas cargas axiais. Nesta seção, o método (com suas equações e símbolos) será descrito usando como referência o trabalho de Rieira (1984) e o trabalho de Kostaski (2011).

A representação do contínuo ortotrópico através dos elementos discretos foi adotada para resolver os problemas de dinâmica estrutural por meio da integração numérica direta explícita das equações de movimento, assumindo a massa concentrada nos nós. Cada nó tem três graus de liberdade, que correspondem aos deslocamentos nodais nas três direções das coordenadas ortogonais. A estratégia de discretização usa um módulo cúbico básico construído com vinte barras e nove nós, idealizado por Nayfeh e Hefzy (1978). Na Figura 3.1a é mostrado o arranjo básico das barras utilizado nesta abordagem.

A massa concentrada nos nós é especificada de tal forma que sua soma total é igual a massa do módulo, $m_{módulo} = \rho \cdot L^3$. Assim, metade da massa do módulo é atribuída ao nó central do módulo, $m_{central} = 0.5 \rho L^3$, enquanto a outra metade da massa é distribuída igualmente entre os oito nós dos vértices. É importante notar que, como módulos vizinhos compartilham seus nós de vértice, esses nós levam em conta a contribuição de múltiplos módulos depois da montagem completa do modelo.

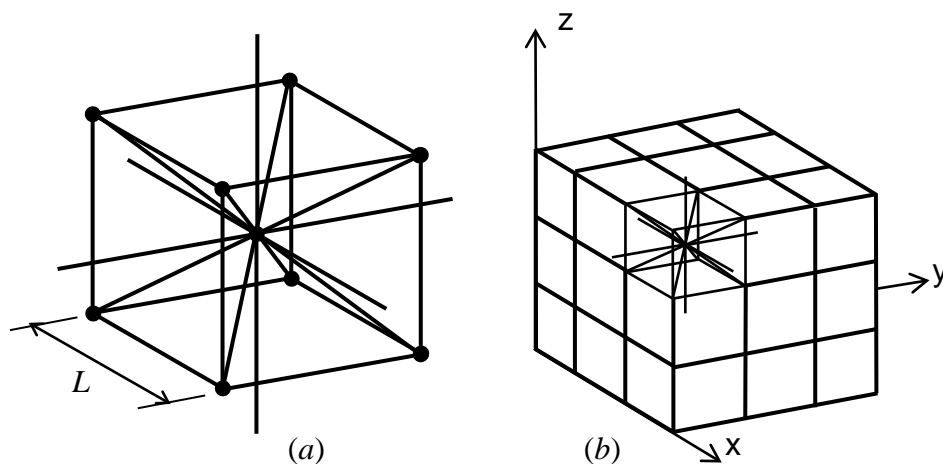


Figura 3.1 - Estratégia de discretização do LDEM: (a) módulo cúbico básico, (b) geração de um corpo prismático

No caso de um material isotrópico elástico, a rigidez axial equivalente dos elementos longitudinais (aqueles localizados ao longo das arestas do módulo e aqueles conectando os nós no centro dos módulos) é proporcional à:

$$A_l E = \phi L^2 E \quad (3.1)$$

onde A_l é a área da seção transversal do elemento longitudinal e E é o módulo de elasticidade do sólido sendo discretizado. A função $\phi = (9 + 8\delta)/(18 + 24\delta)$, onde $\delta = 9\nu/(4 - 8\nu)$, leva em conta o efeito do coeficiente de Poisson ν [Nayfeh e Hefzy, 1978; Dalguer *et al.*, 2001]. Analogamente, a rigidez axial equivalente dos elementos diagonais é proporcional à:

$$A_d E = \frac{2}{\sqrt{3}} \delta \phi L^2 E \quad (3.2)$$

onde A_d é a área da seção transversal do elemento diagonal.

É importante mencionar que para $\nu = 0.25$, a correspondência entre o sólido discretizado e o contínuo isotrópico equivalente é completa. Por outro lado, discrepâncias aparecem nos termos cisalhantes para valores de $\nu \neq 0.25$. Essas discrepâncias são pequenas e podem ser negligenciadas no intervalo $0.20 \leq \nu \leq 0.30$. Para valores fora desse intervalo, uma diferente matriz de elementos para o módulo básico deve ser usada [Nayfeh e Hefzy, 1978].

A equação de movimento resultante pode ser escrita da seguinte forma:

$$M_{ij} \ddot{x}_j + C_{ij} \dot{x}_j + F_i(t) - P_i(t) = 0 \quad (3.3)$$

onde, x_j , \dot{x}_j e \ddot{x}_j denotam os vetores contendo os deslocamentos, as velocidades e as acelerações nodais, respectivamente, M_{ij} e C_{ij} são as matrizes de massa e de amortecimento, as duas são diagonais e a matriz de amortecimento é proporcional à massa. Os vetores $F_i(t)$ e $P_i(t)$ representam, respectivamente, as forças nodais internas e externas. Obviamente, se M_{ij} e C_{ij} são diagonais, Equação (3.3) não é acoplada. Então um esquema explícito de diferenças finitas centrais pode ser usado para integrar a Equação (3.3) no domínio do tempo. Como as coordenadas nodais são atualizadas a cada passo de tempo, grandes deslocamentos podem ser contabilizados de maneira natural e eficiente.

Seguindo o critério de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [Bathe, 1996], a estabilidade do esquema de integração é assegurada limitando o incremento de tempo. Nessa versão do LDEM, os elementos críticos em relação ao incremento de tempo são os diagonais. Assim, considerando a relação entre os comprimentos dos dois tipos de barras, a limitação do incremento de tempo é:

$$\Delta t \leq \frac{0,6L}{C_p} \quad (3.4)$$

onde C_p é a velocidade de propagação da onda P no material, dada pela Equação (3.5).

$$C_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.5)$$

A convergência do LDEM para elasticidade linear e instabilidade elástica foi verificada por Hayashi (1982).

3.1.1 Lei constitutiva bilinear para dano em materiais

A lei de amolecimento para os materiais quasi-frágeis proposta por Hillerborg (1978), foi adotada para tratar o comportamento dos materiais quasi-frágeis por meio da relação constitutiva elementar triangular para as barras do LDEM, apresentada na Figura 3.2, que permite a contabilização dos efeitos irreversíveis de nucleação e propagação de trincas. A área sob a curva de força versus deformação (a área do triângulo OAB na Figura 3.2) está relacionada com a densidade de energia necessária para fraturar a área de influência do elemento. Assim, para um dado ponto P na curva força versus deformação, a área do triângulo OPC está ligada com a densidade de energia elástica reversível armazenada no elemento, enquanto que a área do triângulo OAP é proporcional à densidade de energia dissipada pelo dano. Uma vez que a densidade de energia de dano se iguale à energia de fratura, o elemento falha e perde a sua capacidade de suportar carga. Por outro lado, no caso de cargas de compressão o comportamento do material é assumido como sendo linear elástico. Assim, a falha na compressão é induzida por tensão indireta.

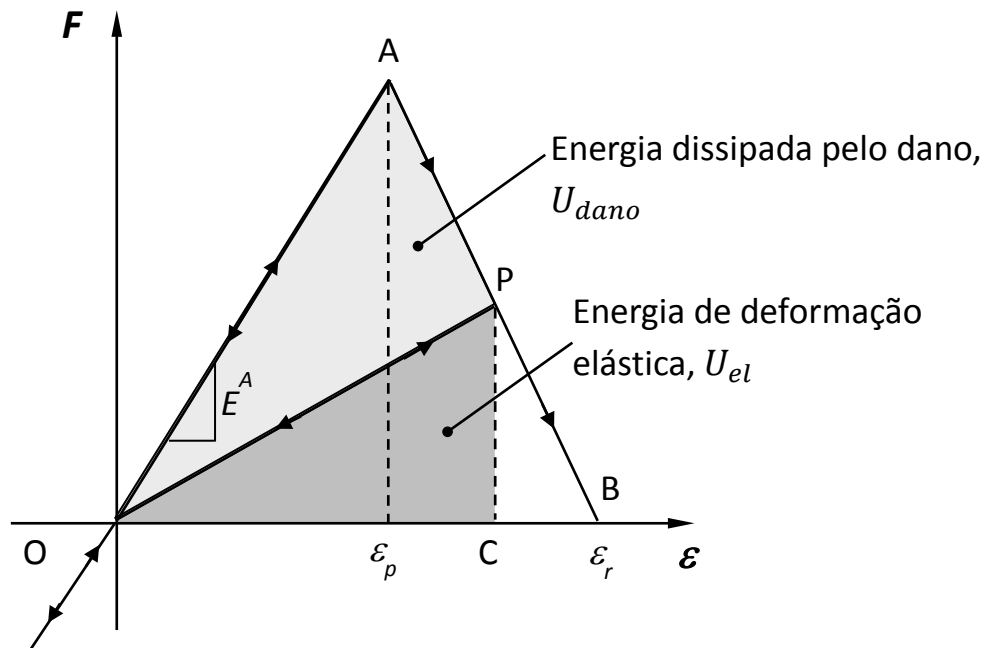


Figura 3.2 - Lei constitutiva bilinear

Os parâmetros constitutivos e geométricos relevantes no LDEM são:

- *Deformação, ϵ* : deformação axial de cada elemento;
- *Força, F* : essa é a força axial do elemento, e ela depende da deformação axial;
- *Área de seção transversal do elemento, A_i* : dependendo se o elemento considerado é longitudinal ou diagonal, é adotado A_l ou A_d , como mostra Equação (3.1) e Equação (3.2), respectivamente;
- *Comprimento, L* : comprimento do lado do módulo do LDEM;
- *Energia específica de fratura, G_f* : essa é a energia de fratura por unidade de área, a qual é coincidente com a energia de fratura do material, G_c ;
- *Área de fratura equivalente, A_i^f* : dependendo se o elemento considerado é longitudinal ou diagonal, é definido A_l^f ou A_d^f , respectivamente, de modo a satisfazer a condição de que a energia dissipada pela fratura no contínuo e na sua representação discreta são equivalentes. Com esse objetivo, a fratura de uma amostra cúbica de dimensões $L \times L \times L$ é considerada. A energia dissipada pela fratura de um cubo contínuo, devido a uma fissura paralela a uma de suas faces, é dada por:

$$U_d = G_f \Lambda = G_f L^2 \quad (3.6)$$

onde $A = L^2$ é a área de fratura real. Por outro lado, a energia dissipada quando um módulo do LDEM, de dimensões $L \times L \times L$, fratura em duas partes, é constituída pelas contribuições de cinco elementos longitudinais (quatro coincidentes com as arestas do módulo e um interno) e quatro elementos diagonais. Então, a energia dissipada por um módulo do LDEM pode ser escrita como se segue [Kosteski *et al.*, 2010]:

$$U_{dLDEM} = G_f \left(4 \left(\frac{1}{4} \right) c_A + c_A + 4c_A \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \right) L^2 \quad (3.7)$$

O primeiro termo entre parênteses leva em conta os quatro elementos das arestas, o segundo termo leva em conta o elemento longitudinal interno, enquanto o terceiro termo representa a contribuição dos quatro elementos diagonais. Nesse terceiro termo, o fator $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \delta \right)$ corresponde à razão entre a rigidez equivalente da barra diagonal e da barra longitudinal, é possível obter esse valor fazendo a razão entre Equação (3.2) e Equação (3.1). O coeficiente c_A é um parâmetro de escala usada para estabelecer a equivalência entre U_d e U_{dLDEM} . Assim:

$$G_f L^2 = G_f \left(\frac{22}{3} c_A \right) L^2 \quad (3.8)$$

Do qual resulta que o $c_A = 3/22$. Finalmente, as áreas de fratura equivalentes dos elementos longitudinais e diagonais são:

$$A_l^f = \left(\frac{3}{22} \right) L^2, \quad A_d^f = \left(\frac{4}{22} \right) L^2 \quad (3.9)$$

Esses resultados são baseados em certas relações fixas assumidas entre os modos de fratura (I, II e III) quando se considera o fator $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \delta \right)$ no terceiro termo da Equação (3.7). Outras relações entre os modos de fratura podem ser introduzidas no modelo com grande facilidade, para leva em conta características particulares do material. Mais detalhes sobre isso são apresentados em Ayatollahi *et al.* (2006).

- *Deformação de falha crítica*, ε_p : é definida como a maior deformação alcançada pelo elemento antes do início do dano (ponto A na Figura 3.2). A relação entre ε_p e a energia específica de fratura, G_f , é dada em termos da Mecânica Elástica Linear da Fratura como:

$$\varepsilon_p = R_f \sqrt{\frac{G_f}{E}} \quad (3.10)$$

onde R_f é o chamado fator de falha, que leva em conta a presença de um defeito intrínseco de tamanho a , que pode ser interpretado como o tamanho no qual uma fissura seria crítica para o material utilizado. Assim, se o tamanho da estrutura simulada for menor que o tamanho da fissura crítica, a estrutura nunca apresentaria condições para a propagação instável da fissura. Desta forma, um menor tamanho dessa fissura fictícia, implica num comportamento mais frágil para a estrutura. R_f pode ser expresso em termos de a como:

$$R_f = \frac{1}{Y\sqrt{a}} \quad (3.11)$$

onde Y é um parâmetro adimensional que depende tanto da amostra quanto da geometria da fissura.

Para facilitar o entendimento do fator de falha, é interessante utilizar o conceito de número de fragilidade estático, s , introduzido por Carpinteri (1986), e dado pela Equação (3.12).

$$s = \frac{K_{IC}}{\sigma_p \sqrt{D}} = \frac{\sqrt{G_f E}}{E \varepsilon_p \sqrt{D}} \quad (3.12)$$

onde D é um comprimento característico da estrutura e σ_p é a tensão de falha crítica.

O número de fragilidade aumenta com o incremento da ductilidade do material. Substituindo a Equação (3.10) na Equação (3.12) é possível obter uma relação entre o número de fragilidade e o fator de falha, o que ajuda a entender melhor a informação contida no parâmetro R_f .

$$s = \frac{1}{R_f \sqrt{D}} = Y \sqrt{\frac{a}{D}} \quad (3.13)$$

A variação do valor do número de fragilidade muda a forma da curva força-deformação das barras, fazendo com que o comportamento apresentado por essa curva seja

mais dúctil (com s tendendo ao infinito) ou mais frágil (com s tendendo a zero). Um estudo sobre a variação de R_f (e, conseqüentemente, sobre a variação de s), mostrado na Figura 3.3, foi realizado por Kostascki (2012c).

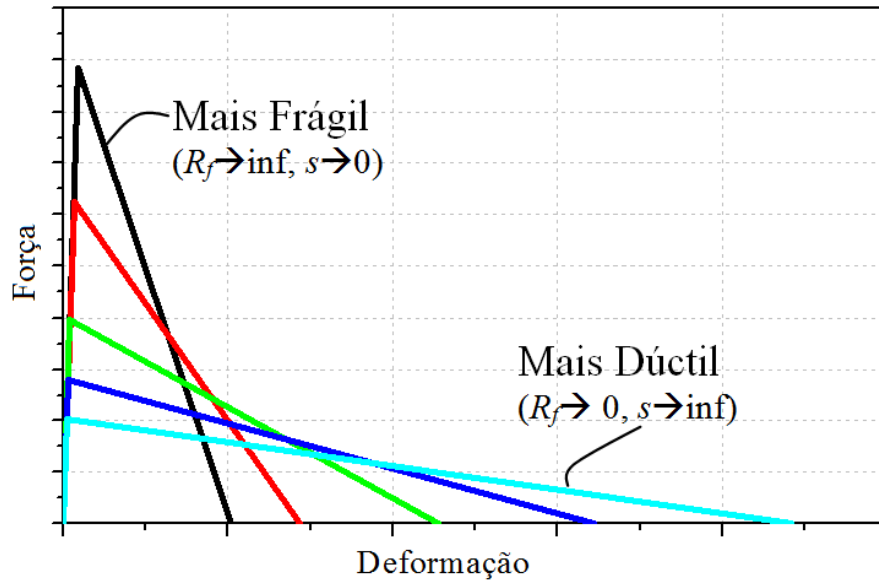


Figura 3.3 - Curvas força-deformação para vários valores de R_f [Kostascki, 2012c]

Essa influência de s também aparece na resposta global da estrutura, de forma que, se dois corpos com tamanhos diferentes (D diferente) e formados por materiais diferentes (G_f e E diferentes) apresentarem o mesmo valor para o número de fragilidade, ambos apresentaram curvas tensão-deformação com o mesmo formato.

- *Deformação limite*, ε_r : quando essa deformação é alcançada (ponto B na Figura 3.2) o elemento perde a sua capacidade de suportar cargas. Este valor deve satisfazer a condição de que, em caso de falha do elemento, a densidade de energia dissipada é igual ao produto da área de fratura do elemento, A_i^f , pela energia específica de fratura, G_f , dividido pelo comprimento do elemento. Assim:

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_f A_i^f}{L_i} = \frac{K_r \varepsilon_p^2 E A_i}{2} \quad (3.14)$$

onde o subíndice i é substituído por l ou d , dependendo se o elemento em questão é longitudinal ou diagonal. O coeficiente K_r é uma função das propriedades do material e do comprimento do elemento L_i :

$$K_r = \left(\frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left(\frac{A_i^f}{A_i} \right) \left(\frac{2}{L_i} \right) \quad (3.15)$$

A fim de garantir a estabilidade do algoritmo, a condição $K_r \geq 1$ deve ser satisfeita. Neste sentido, é interessante definir o tamanho crítico do elemento:

$$L_{cr} = 2 \left(\frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left(\frac{A_i^f}{A_i} \right) \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{A_i^f}{A_i} \right) = \frac{(3/22)}{\phi}, \quad \left(\frac{A_d^f}{A_d} \right) = \frac{(\sqrt{3}/11)}{\delta\phi} \quad (3.17)$$

No caso especial de um contínuo isotrópico com $\nu = 0,25$, os valores dos coeficientes acima são $\delta = 1,125$ e $\phi = 0,4$, o que leva a $(A_i^f / A_i) \approx (A_d^f / A_d) \approx 0,34$. Assim, para fins práticos, um único valor do comprimento crítico pode ser utilizado para os elementos longitudinais e diagonais. Portanto, a condição de estabilidade é expressa pela Equação (3.18) e a deformação limite pela Equação (3.19):

$$K_r = \left(\frac{L_{cr}}{L_i} \right) \geq 1 \Rightarrow L_i \leq L_{cr} \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_r = K_r \varepsilon_p \quad (3.19)$$

É importante notar que, embora o LDEM use uma lei de dano escalar para descrever o comportamento uniaxial dos elementos, o modelo global leva em conta dano anisotrópico, uma vez que possui elementos orientados nas diferentes direções espaciais [Riera *et al.*, 2011].

No caso da lei constitutiva bilinear, utilizada neste trabalho, deformações residuais não são levadas em conta, ou seja, quando uma barra é descarregada sua deformação volta a ser igual a zero, mesmo que ela tenha sido danificada. Essa consideração é válida para o tipo de material estudado neste trabalho, o qual não apresenta o fenômeno da plasticidade. Porém, existem formas alternativas para a lei constitutiva das barras, onde tanto a plasticidade com também outros fenômenos de dano podem ser considerados. Uma comparação entre o modelo

de Hillerborg (lei constitutiva bilinear) e outros três modelos (modelo trilinear, modelo com amolecimento exponencial e o modelo de Weibull) pode ser encontrada em Kostaski (2012c).

3.1.2 A distribuição aleatória dos parâmetros do material

Miguel *et al.* (2010) e Iturrioz *et al.* (2009) modelaram as propriedades aleatórias do material definindo a energia específica de fratura, G_f , como um campo aleatório com distribuição de valores extremos do Tipo III (Weibull), dada por:

$$F(G_f) = 1 - \exp[-(G_f/\beta)^\gamma] \quad (3.20)$$

onde β e γ são os parâmetros de escala e de forma, respectivamente. O valor médio (μ) e o desvio-padrão (s_t) de G_f são dados por:

$$\mu = \beta[\Gamma(1 + 1/\gamma)] \quad (3.21)$$

$$s_t = \beta[\Gamma(1 + 2/\gamma) - \Gamma^2(1 + 1/\gamma)]^{1/2} \quad (3.22)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (3.23)$$

onde $\Gamma(x)$ representa a função de Gama. Para simular valores pseudoaleatórios de G_f , a seguinte expressão foi utilizada:

$$G_f = \beta[-\ln(1 - u)]^{1/\gamma} \quad (3.24)$$

onde u é um número aleatório com distribuição uniforme de probabilidade no intervalo (0,1). Rotinas para a geração de amostras de u estão amplamente disponíveis. Nas versões anteriores do LDEM, tendo o tamanho de um dos elementos (L) igual ao comprimento da correlação do campo aleatório da propriedade de interesse do material, por exemplo, L_c , permitia assumir que os valores simulados não eram correlacionados, simplificando assim o esquema computacional. Esta é, contudo, uma limitação importante, inicialmente abordada por Rios e Riera (2004). Mais tarde, Miguel *et al.* (2008) adotou o método proposto por Shinozuka e

Deodatis (1996) para simular um campo aleatório gaussiano 3D para modelar a propriedade de interesse do material. Uma técnica mais simples foi usada por Puglia *et al.* (2010). Esta técnica foi usada aqui para simular o campo aleatório 3D que descreve a energia específica de fratura, G_f , que é independente da discretização adotada no LDEM. Na implementação usada aqui foi considerado o tamanho do elemento $L_c=2L$.

3.2 Análise Quasi-estática

Neste trabalho, um modelo equivalente ao analisado no contexto do LDEM também é analisado de maneira quasi-estática. Em determinados instantes durante o processo de dano, o estado do modelo é exportado para o ambiente de um software comercial de elementos finitos (ANSYS, 2013), e uma análise elástica linear é realizada. Como as barras do LDEM só sofrem dano em tração, o valor das rigidezes, em tração e em compressão, de uma mesma barra, podem ficar diferentes ao longo da simulação, sendo assim no modelo montado no ambiente do ANSYS, cada barra da estrutura do LDEM é simulada como dois elementos uniaxiais da biblioteca do software (LINK180), um deles com rigidez só em tração e o outro só em compressão.

Ao exportar o estado do modelo, os valores atualizados das rigidezes das barras (tanto em tração como em compressão), são respeitados.

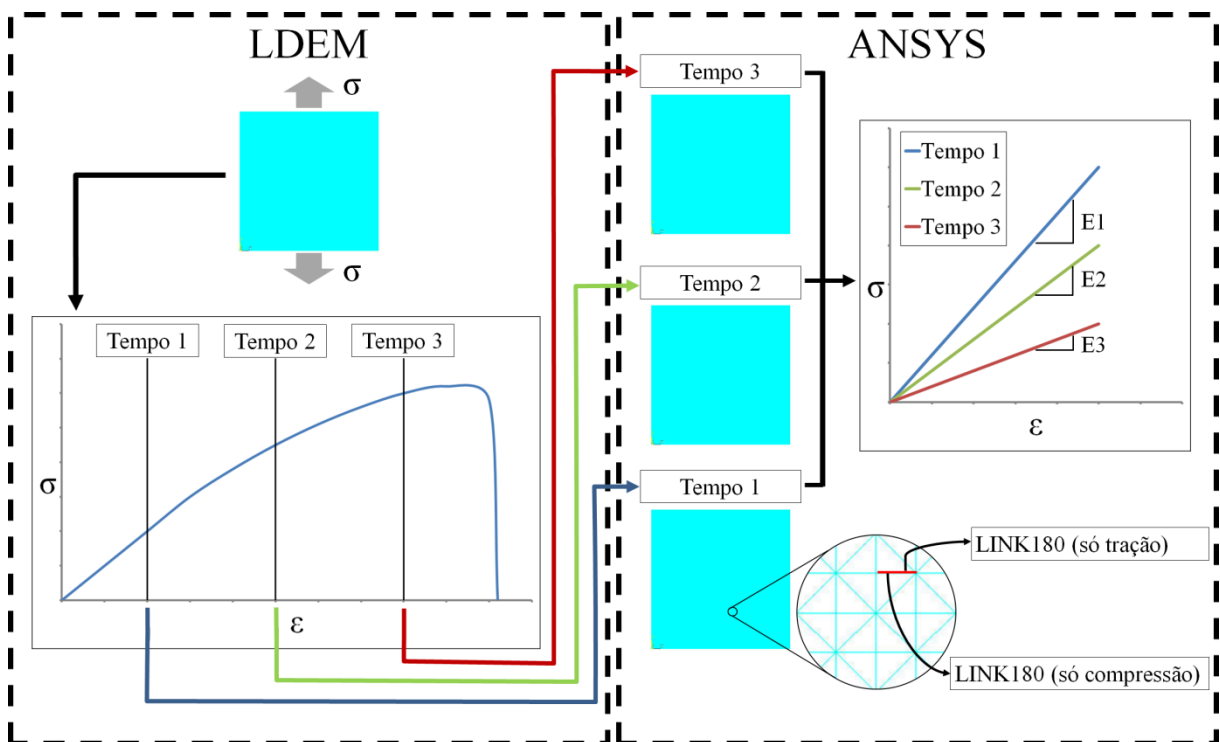


Figura 3.4 - Esquema de simulação com os dois ambientes

A informação sobre a distribuição das massas também pode ser exportada para o ANSYS, porém, como nesse trabalho esse procedimento só é usado para permitir a realização de simulações estáticas, essa informação não é relevante.

Na Figura 3.4, apresenta-se um esquema explicando como esse processo é realizado. No Apêndice A dessa dissertação, é apresentado parte do script gerado para a análise no ambiente do ANSYS.

A análise quasi-estática será usada como uma ferramenta no pós-processamento dos resultados obtidos na análise dinâmica do LDEM. Sendo assim, o estado de danificação da estrutura poderá ser salvo em vários momentos ao longo da simulação na LDEM, para ser usado em um eventual pós-processamento usando o ANSYS.

4 IMPLEMENTAÇÕES

Este capítulo apresenta os índices implementados para fazer a avaliação do dano, no contexto do Método dos Elementos Discretos Formado por Barras. Foram implementados três índices, um índice escalar, um índice tensorial de segunda ordem e um índice tensorial de quarta ordem.

4.1 Índice de Dano Escalar

Diferentes formas de medir o dano com um índice escalar já foram propostas. Neste trabalho, foi seguido à proposta de índice apresentada por Rinaldi (2011). Esse índice consiste na razão entre duas áreas numa curva tensão-deformação global (onde a tensão global é definida como o somatório das forças agindo perpendicularmente a uma superfície, dividido pela área dessa superfície e a deformação global é definida como o deslocamento do corpo na direção do carregamento dividido pelo comprimento inicial do corpo nessa direção), como é mostrado na Figura 4.1. Essas áreas são representadas pelos triângulos ABC e ABD.

A área do triângulo ABC está relacionada com a diferença da energia elástica entre o carregamento do modelo inalterado e o carregamento do modelo danificado, para um determinado nível de deformação. Já a área do triângulo ABD está relacionada com a energia elástica considerando o modelo inalterado, para o mesmo nível de deformação.

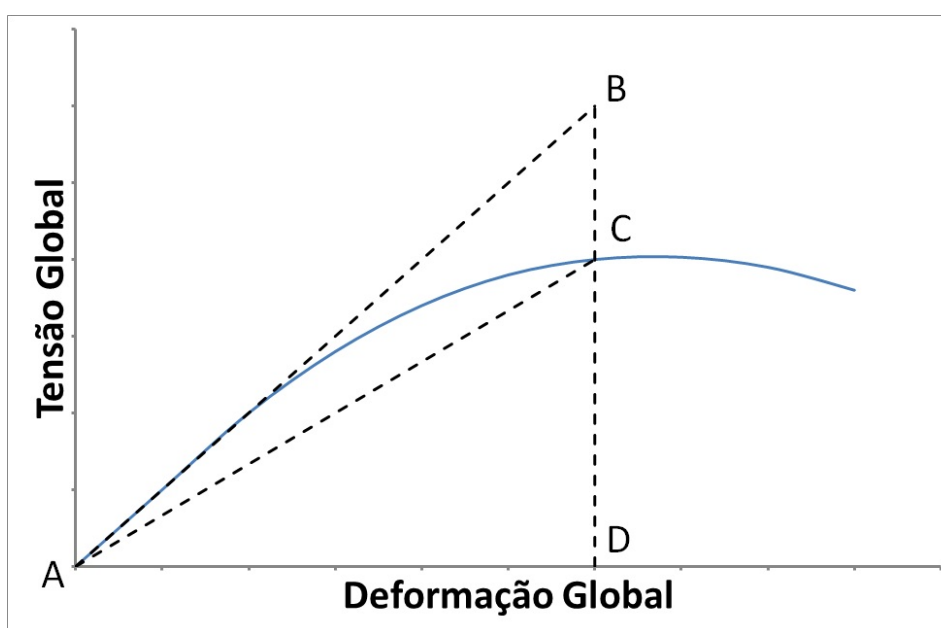


Figura 4.1 - Curva tensão-deformação em uma estrutura genérica

$$\text{Índice Escalar} = \frac{\text{Área ABD} - \text{Área ACD}}{\text{Área ABD}} = \frac{\text{Área ABC}}{\text{Área ABD}} \quad (4.1)$$

O valor desse índice varia de 0 até 1, da mesma forma que aquele mostrado na Equação (2.55), e a evolução desse valor pode ser analisada ao longo da simulação realizada. A diferença entre esse índice e a Equação (2.55) é que, como esse índice é definido a partir da razão entre as áreas indicadas (que são relacionadas com medidas de energia), ele analisa o modelo de maneira global, considerando o dano no componente todo. Porém, dessa forma, perdem-se informações sobre a distribuição do dano nas diferentes regiões do componente.

4.2 Índice de Dano Tensorial de Segunda Ordem

Mesmo não sendo uma medida real de dano [Seelig, 2006], o tensor w_{ij} , que foi descrito no capítulo 2, é usado para definir este índice. Com esse tensor, o estado de danificação de uma estrutura pode ser avaliado de maneira indireta. Além disso, usando essa definição, esse índice poderá ser usado como uma ferramenta na obtenção do tensor de dano de quarta ordem, D_{ijkl} .

Dentro do ambiente do LDEM, onde o contínuo é discretizado através de barras, a Equação (2.60) fica com a forma mostrada abaixo.

$$w_{ij} = \frac{1}{2V} \int_{A_R} (n_i \Delta u_j + n_j \Delta u_i) dA \quad \rightarrow \quad w_{ij} = \frac{1}{2V} \sum_k [(n_i \Delta u_j + n_j \Delta u_i) A_f]_k \quad (4.2)$$

onde V representa o volume de interesse, Δu_i representa o vetor com as componentes do salto de deslocamento de uma barra desse volume, n_i é um vetor unitário que representa a direção dessa mesma barra e A_f representa o quanto da área de fratura da barra já foi "consumida" pelo dano. Os índices i e j podem assumir os valores 1, 2 ou 3, dependendo do eixo que estão representando, x, y ou z, respectivamente.

Nesse ambiente, o salto de deslocamento é determinado através da diferença entre a deformação de falha crítica (deformação do ponto A na Figura 4.2) e a deformação instantânea da barra (deformação do ponto P na Figura 4.2), multiplicada pelo seu comprimento inicial. Quando a deformação instantânea for menor que a deformação de falha

crítica, esse salto assume valor igual a zero. O valor do salto de deslocamento é então decomposto nos eixos x , y e z , formando as componentes do vetor Δu_i .

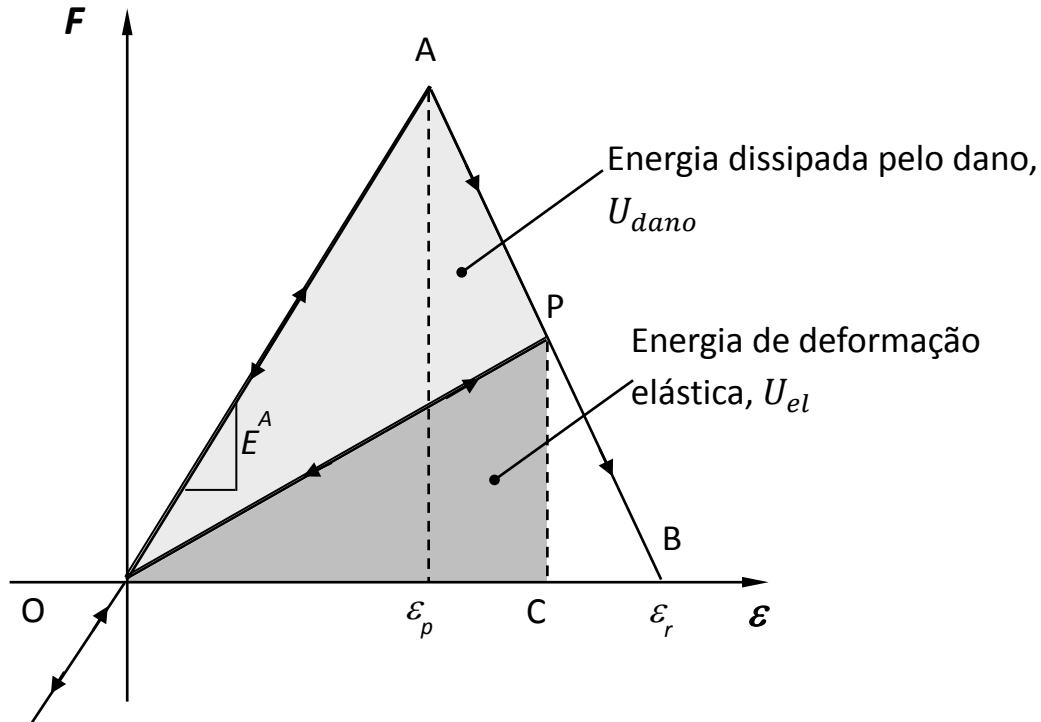


Figura 4.2 - Lei constitutiva bilinear

Para determinar A_f , a área de fratura total da barra é multiplicada por um fator que determina o quanto essa barra já foi danificada. Observando a Figura 4.2, esse fator é definido pela razão entre a área do triângulo OAP e a área do triângulo OAB, dessa forma, o fator assume valor 1 quando a barra em questão falha, fazendo com que A_f se iguale a área de fratura total.

Para esse índice, cada módulo cúbico foi selecionado como um volume de interesse. Dessa forma, a Equação (4.2) foi aplicada em cada módulo da estrutura, e, em cada aplicação, seu somatório foi realizado sobre todas as barras de um módulo. Como resultado disso, se obteve um tensor para cada módulo do componente. Com essa metodologia esse índice pode ser considerado uma medida local de dano.

Tendo esse tensor em cada módulo cúbico, é possível compara-lo com o tensor de deformação local, que também é obtido para cada módulo. Além disso, pode-se fazer, com essa ferramenta, um mapeamento da evolução da deformação da fase danificada, o que serve, indiretamente, como um mapeamento do dano.

4.3 Tensores D e H: Metodologia de Análise

Como foi demonstrado no capítulo 2, o tensor w_{ij} pode ser relacionado com o tensor de dano de quarta ordem, D_{ijkl} , e, também, com o tensor de flexibilidade adicional, H_{ijkl} , que também é um tensor de quarta ordem. Para obter esses tensores é necessário aplicar, em uma estrutura que já foi danificada, os carregamentos mostrados na Equação (4.3).

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

onde β é um parâmetro de carregamento, que deve ter um valor suficientemente pequeno para não causar nenhum novo dano à estrutura. No caso de uma análise em duas dimensões (em x e y), somente o primeiro, o segundo e o quarto carregamento são necessários.

Os estados indicados na Equação (4.3) são os tensores de deformação, ou tensão, que seriam constantes em todo o modelo se o mesmo fosse isotrópico e homogêneo. Isso implica em aplicar nos contornos do modelo carregamentos (deslocamentos prescritos ou forças) com valores vinculados ao parâmetro de carregamento, β , indicado.

No caso do tensor de flexibilidade adicional, H_{ijkl} , cada um desses carregamentos é aplicado como um tensor de tensão médio, $\langle \sigma \rangle$. E, em cada aplicação, será gerado, como resultado, um tensor w_{ij} para toda a estrutura. Aplicando cada carregamento e seu respectivo resultado na segunda parte da Equação (2.47), mostrada novamente aqui como Equação (4.4), é possível obter o tensor H_{ijkl} .

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_c = H_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle \quad \text{para} \quad \langle \sigma_{kl} \rangle = \sigma_{kl}^0 \quad (4.4)$$

onde $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_c = w_{ij}$.

Para escrever a Equação (4.4) por extenso, pode-se usar a notação de Voigt [Nemat-Nasser, 1999]. Isso é apresentado na Equação (4.5).

$$\begin{Bmatrix} w_{11} \\ w_{22} \\ w_{33} \\ 2w_{12} \\ 2w_{23} \\ 2w_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1111} & H_{1122} & H_{1133} & H_{1112} & H_{1123} & H_{1113} \\ H_{2211} & H_{2222} & H_{2233} & H_{2212} & H_{2223} & H_{2213} \\ H_{3311} & H_{3322} & H_{3333} & H_{3312} & H_{3323} & H_{3313} \\ H_{1211} & H_{1222} & H_{1233} & H_{1212} & H_{1223} & H_{1213} \\ H_{2311} & H_{2322} & H_{2333} & H_{2312} & H_{2323} & H_{2313} \\ H_{1311} & H_{1322} & H_{1333} & H_{1312} & H_{1323} & H_{1313} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Para o tensor de dano de quarta ordem, D_{ijkl} , o processo é similar. A diferença é que os carregamentos da Equação (4.3) são aplicados como tensores de deformação médios, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$, e, depois de cada simulação, eles são substituídos, com seus respectivos resultados, na primeira parte da Equação (2.47), mostrada novamente aqui como Equação (4.6).

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_c = D_{ijkl} : \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad \text{para } \langle \varepsilon_{kl} \rangle = \varepsilon_{kl}^0 \quad (4.6)$$

A Equação (4.7) apresenta a Equação (4.6) escrita por extenso.

$$\begin{Bmatrix} w_{11} \\ w_{22} \\ w_{33} \\ 2w_{12} \\ 2w_{23} \\ 2w_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1123} & D_{1113} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2223} & D_{2213} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3312} & D_{3323} & D_{3313} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1212} & D_{1223} & D_{1213} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2312} & D_{2323} & D_{2313} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1312} & D_{1323} & D_{1313} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

Vale mencionar que, para uma análise em duas dimensões, os tensores H_{ijkl} e D_{ijkl} , mostrados na Equação (4.5) e na Equação (4.7), respectivamente, são reduzidos para tensores 3x3, uma vez que todos os componentes relacionados com a direção 3 podem ser removidos.

Mais detalhes sobre esse tipo de procedimento podem ser encontrados em Zohdi (2006).

4.4 Índice de Dano Tensorial de Quarta Ordem

Diferente do índice de segunda ordem, o índice tensorial de quarta ordem é uma medida real do dano da estrutura [Seelig, 2006]. Esse índice é construído com o tensor de dano de quarta ordem, D_{ijkl} , avaliado na estrutura toda.

Com esse índice é possível fazer uma análise quantitativa da evolução do dano na estrutura. Além disso, quando combinado com as características de localização do tensor w_{ij} , esse índice permite uma avaliação completa do estado de danificação da estrutura.

Como foi mostrado na Equação (2.59), que é mostrada aqui, novamente, como Equação (4.8), esse tensor pode ser usado para a determinação do tensor constitutivo efetivo de uma estrutura danificada, o que confere a esse índice mais uma vantagem.

$$C_{ijkl}^* = C_{ijmn}(I_{mnkl} - D_{mnkl}) \quad (4.8)$$

Na Equação (4.8), o tensor C_{ijmn} é o tensor constitutivo do material sem dano. Para o caso de um material isotrópico, esse tensor fica com a forma apresentada, na notação de Voigt, pela Equação (4.9) (Timoshenko, 1970).

$$C = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé, que podem ser relacionadas com o módulo de elasticidade, E , e com o coeficiente de Poisson, ν . Isso é mostrado na Equação (4.10).

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.10)$$

Através da Equação (4.11), pode-se ver de maneira mais clara a relação entre os componentes do tensor constitutivo de quarta ordem, com a sua forma na notação de Voigt.

$$C = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1113} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2213} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3313} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1213} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2313} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1323} & C_{1313} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

5 APLICAÇÕES

Este capítulo apresenta as aplicações, nas quais a metodologia descrita neste trabalho foi empregada. Simulações para testar a compatibilidade entre os métodos numéricos, para verificar a metodologia de análise e para avaliar os índices implementados são apresentadas, assim como os resultados encontrados.

5.1 Compatibilidade

Avalia-se, nesta seção, a compatibilidade entre os resultados do modelo quasi-estático, implementado no ambiente do ANSYS, e os resultados obtidos através do modelo analisado utilizando o esquema explícito de integração no tempo, empregado na implementação original do Método dos Elementos Discretos (LDEM). Para realizar essa comparação, duas placas foram analisadas: placa A e placa B. As características destas duas placas serão apresentadas a seguir.

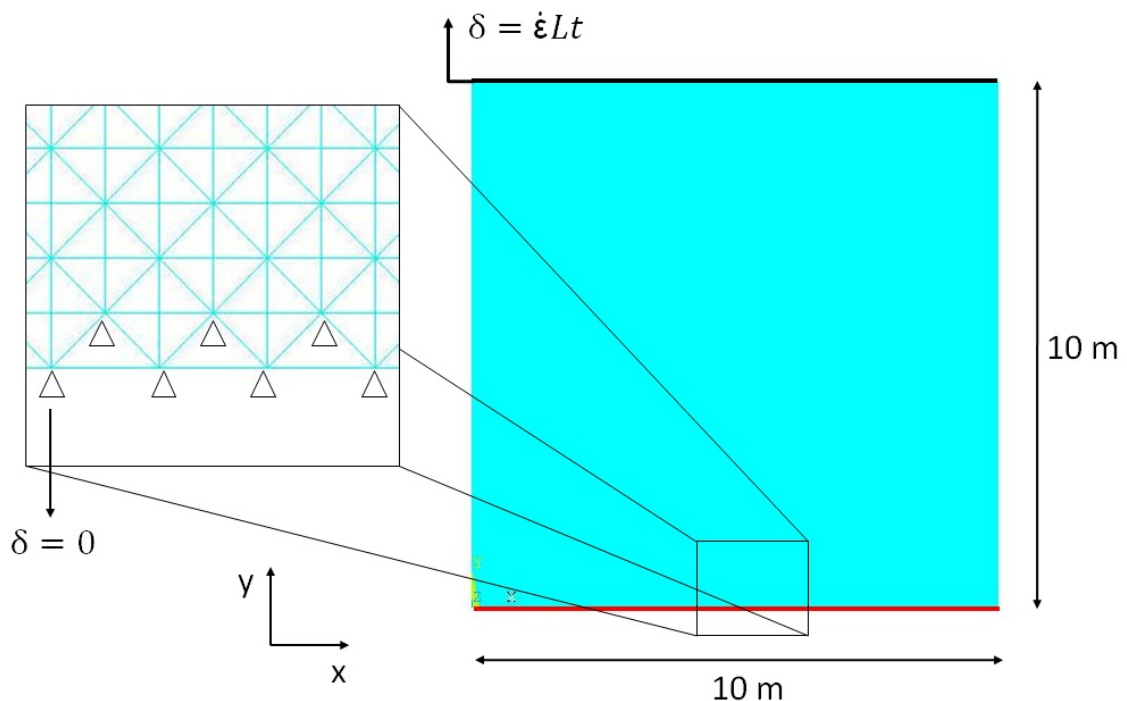


Figura 5.1 - Placa usada no teste de compatibilidade e na simulação dos índices

O modelo das placas simuladas é mostrado na Figura 5.1, onde as placas foram formadas por 200x200x1 módulos cúbicos básicos. As placas foram avaliadas no estado plano

de deformações, implementado considerando um único módulo na espessura (direção z), com o deslocamento dos nós nessa direção restringido. Além disso, as seguintes condições de contorno foram aplicadas:

- Na extremidade superior da placa (marcada em preto na Figura 5.1), foi aplicado deslocamento prescrito, de maneira suficientemente lenta, na direção y ;
- Na extremidade inferior da placa (marcada em vermelho na Figura 5.1), o deslocamento na direção y foi restringido;

As duas placas foram simuladas com o mesmo material genérico. As propriedades desse material, assim como alguns dados relevantes da simulação, são mostradas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Dados da simulação

Propriedades	Valores
E (módulo de elasticidade)	3,5E10 N/m ²
ρ (densidade)	2,4E3 kg/m ³
ν (coeficiente de Poisson)	0,25
G_f (energia específica de fratura)	100 N/m
$CV(G_f)$ (coeficiente de variação de G_f)	40%
R_f (fator de falha)	1,15 m ^{1/2}
L (tamanho do módulo cúbico básico)	5,00E-2 m

No caso da placa A, aplica-se um carregamento suficientemente pequeno, de forma a não superar nenhuma deformação crítica. Essa simulação é realizada tanto no ambiente do ANSYS (análise quasi-estática), como também, através da análise dinâmica do LDEM. No caso dessa placa, as características da estrutura discretizada no LDEM são exportadas para o ambiente do ANSYS antes do início da simulação. Como essa placa não sofre dano, a propriedade energia específica de fratura, G_f , e o seu coeficiente de variação, $CV(G_f)$, não são levados em conta nessa simulação. Como G_f é a única propriedade distribuída aleatoriamente nesse material, a placa A pode ser considerada uma placa homogênea.

No caso da placa B, a simulação foi, primeiramente, realizada no ambiente do LDEM, onde a placa foi danificada. Esse dano não quebrou a placa completamente, mas foi suficiente para mudar o seu módulo de elasticidade. Depois que a placa foi danificada, ela foi descarregada até que a deformação voltasse a zero. Nesse momento, as propriedades de todas as barras e as posições de todos os nós foram salvas e exportadas para o ANSYS. A placa foi, então, carregada nos dois modelos, usando, novamente, um valor de carga suficientemente

pequeno para não causar novos danos na estrutura. Com os resultados das simulações, o módulo de elasticidade foi medido, seguindo o mesmo procedimento descrito para a placa A.

Durante a primeira parte da simulação no LDEM a placa foi danificada, sendo assim, nessa simulação, a energia específica de fratura, e seu coeficiente de variação, foram levados em conta. Então, já que, como foi mencionado antes, a energia específica de fratura é distribuída aleatoriamente nesse material, essa placa pode ser considerada uma placa heterogênea.

A resposta de cada um dos modelos foi a tensão global, na mesma direção de aplicação do carregamento, e a deformação global que foi sofrida pela placa nessa direção, obtida dividindo o deslocamento longitudinal da extremidade superior da placa pelo seu comprimento inicial. Esses dois valores são aplicados na Equação (5.1), determinando, assim, o módulo de elasticidade longitudinal da placa.

$$E_l = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (5.1)$$

No caso da placa A, esse valor deve ser similar ao módulo de elasticidade longitudinal para o estado plano de deformações, que é calculado usando a Equação (5.2) e os dados da Tabela 5.1. O valor obtido com este cálculo é igual a 3,733E+10 Pa.

$$E_l^{EPD} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (5.2)$$

Em cada caso, o valor obtido, para o módulo de elasticidade, com o LDEM e com o ANSYS, foi comparado.

Os resultados para essa análise são mostrados na Tabela 5.2. Através desses resultados é possível observar que o erro do módulo de elasticidade longitudinal, medido no modelo através da análise quasi-estática (no ambiente do ANSYS), em relação ao resultado obtido com o LDEM, é quase inexistente para a placa A (sem dano), e menor que 4% para a placa B (danificada). Isso indica a compatibilidade entre os dois métodos de análise.

Tabela 5.2 - Resultados do teste de compatibilidade, em termos do módulo de elasticidade

	LDEM	ANSYS	Erro
<i>Placa A</i>	3,724E+10 Pa	3,720E+10 Pa	-0,117%
<i>Placa B</i>	3,226E+10 Pa	3,348E+10 Pa	3,768%

No caso da placa B, ainda é interessante observar a curva tensão-deformação, obtida para a simulação com o LDEM e mostrada na Figura 5.2. Com essa figura é possível ver até que nível de deformação a placa foi carregada. A primeira parte da simulação (quando a placa é danificada) é representada pela curva em azul, durante essa parte da simulação a placa é carregada até a deformação de $6,66E-5$. A segunda parte da simulação (quando a placa danificada é carregada sem novos danos) é representada em vermelho.

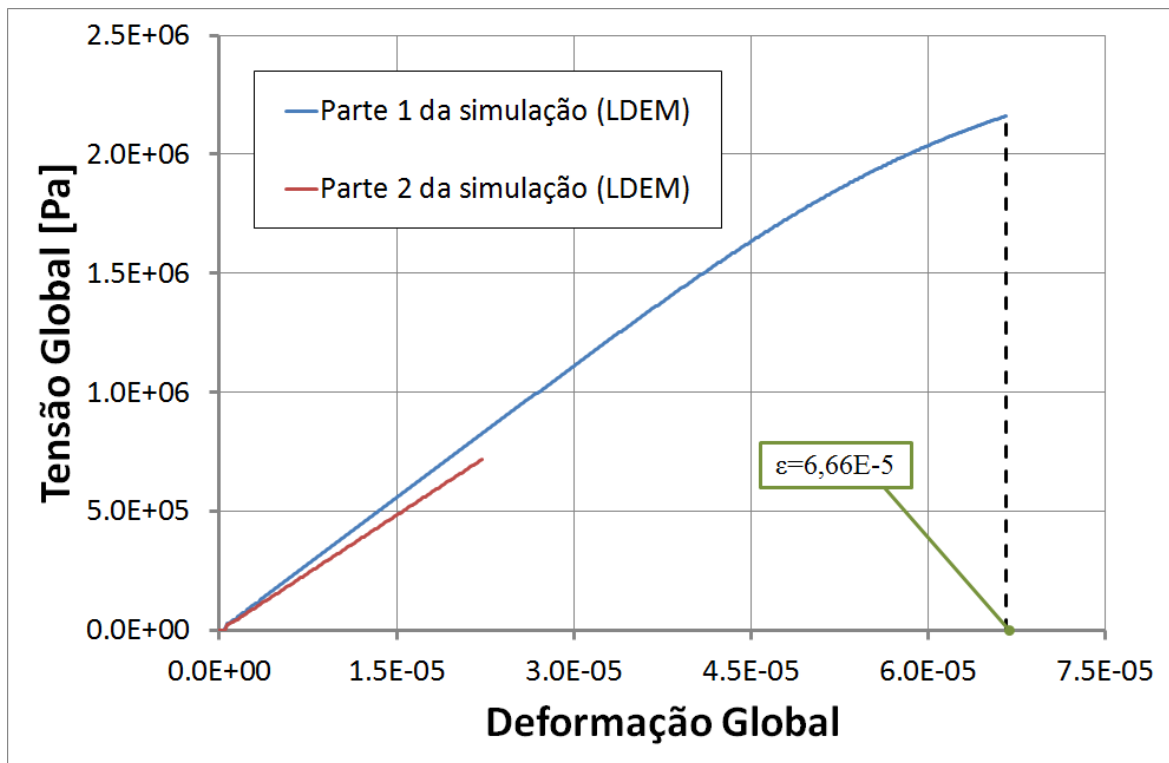


Figura 5.2 - Curva tensão-deformação da placa B na simulação com o LDEM

Para esse nível de deformação, o estado de danificação da estrutura, que foi exportado para o ambiente do ANSYS, é mostrado na Figura 5.3, onde as barras que já foram danificadas, mas ainda não quebraram, são mostradas em laranja.

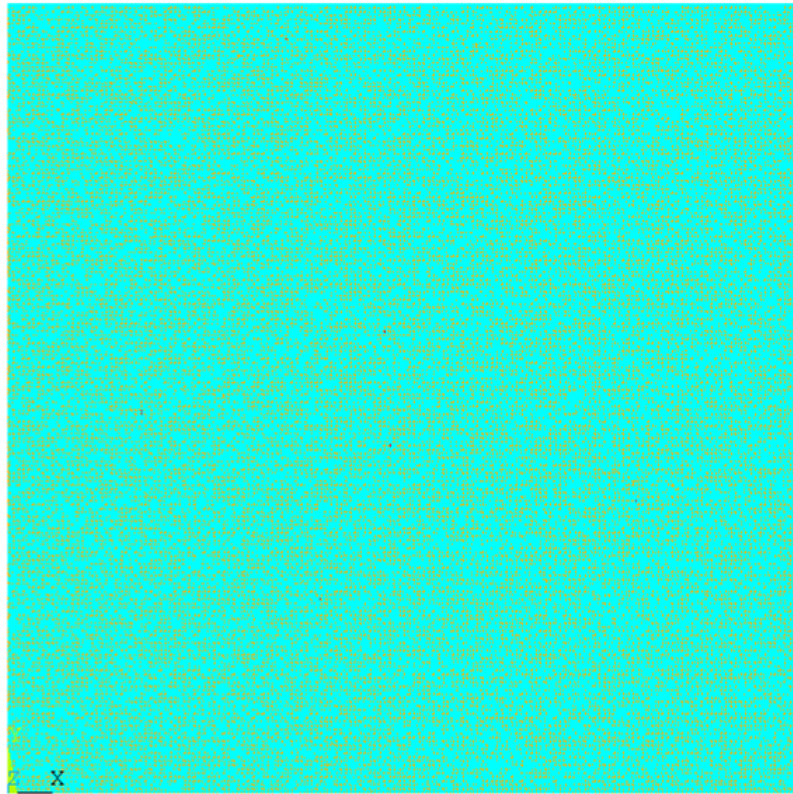


Figura 5.3 - Estado de danificação da placa B, depois da primeira parte da simulação (LDEM)

Ainda para a placa B, é possível analisar a evolução das energias da placa durante a simulação. Isso é apresentado na Figura 5.4.

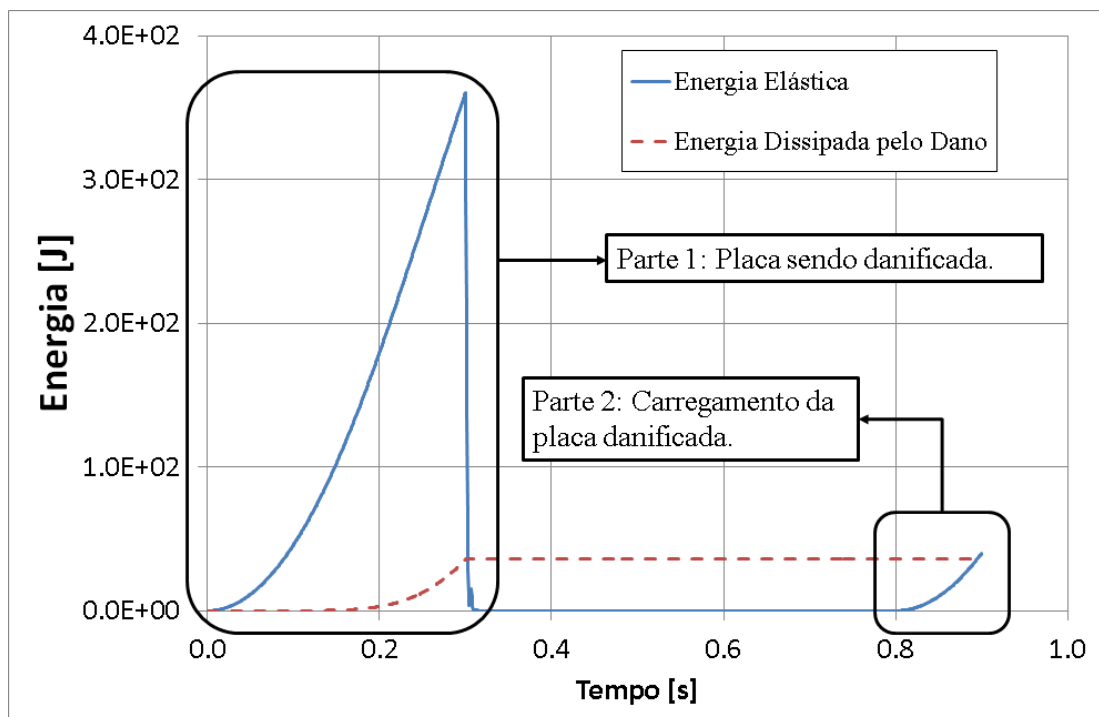


Figura 5.4 - Evolução das energias durante a simulação (LDEM), na placa B

Através dessa figura fica claro que parte da energia é dissipada por causa do dano, o que confirma que a placa foi danificada. Ainda nessa figura, observa-se que depois da primeira parte da simulação a placa B não sofre novas danificações, uma vez que a energia dissipada pelo dano permanece constante.

5.2 Verificação

Com o intuito de verificar a metodologia usada para a obtenção dos tensores de quarta ordem, descrita na seção 4.3, a placa mostrada na Figura 5.5 foi simulada. O objetivo dessa simulação é obter o tensor de flexibilidade adicional, H_{ijkl} , da estrutura, e compara-lo com respostas analíticas conhecidas, como a descrita, para trincas, na seção 2.1.3.5, que é mostrada, novamente, na Equação (5.3).

$$H_{1212}^{\infty} = H_{2121}^{\infty} = H_{1221}^{\infty} = H_{2112}^{\infty} = f \frac{\pi}{E}, \quad H_{2222}^{\infty} = f \frac{2\pi}{E} \quad (5.3)$$

onde, como mostrado anteriormente, $f = a^2/A$ é o parâmetro densidade de fissuras.

A Figura 5.5 mostra as dimensões da placa e da sua trinca central.

Essa placa foi formada por 100x100x1 módulos cúbicos, com cinco centímetros de lado cada um. Assim como no caso da placa A, descrita na seção anterior, o material dessa placa, além de ter as propriedades mostradas na Tabela 5.1, também não é danificado ao longo da simulação. Dessa forma, o material da matriz da placa pode ser considerado homogêneo, e sua única não homogeneidade é a trinca central.

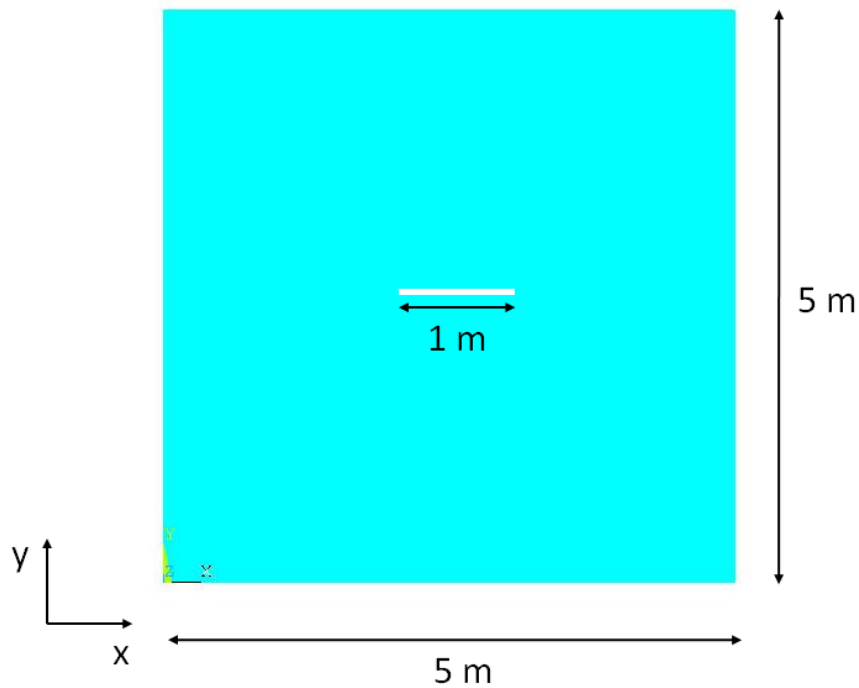


Figura 5.5 - Placa usada na simulação de verificação

Como já foi mencionado, para uma análise em duas dimensões, somente três dos estados de carregamento mostrados na Equação (4.3) são necessários. Esses estados, que são mostrados na Equação (5.4), são as condições de contorno deste tipo de teste. Porém, nessa simulação, devido à orientação da trinca, o primeiro estado não precisa ser usado, restando somente o segundo e o terceiro.

Já que o objetivo é obter o tensor H_{ijkl} , esses estados de carregamento foram considerados como estados de tensão.

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

A placa foi simulada com o LDEM e com o ANSYS, e os resultados obtidos foram comparados com a resposta analítica da estrutura.

Como pode ser visto na Equação (5.3), somente cinco componentes do tensor H_{ijkl} são diferentes de zero, e, devido às simetrias desse tensor, quatro delas apresentam o mesmo valor. O valor do parâmetro densidade de fissuras para a estrutura analisada é igual a $1,00E-02$, sendo assim, essa estrutura respeita o requisito $f \ll 1$, e pode ser avaliada pela Equação (5.3).

A Tabela 5.3 mostra o resultado desses componentes, quando eles são calculados com a Equação (5.3), com a simulação no LDEM e com a simulação no ANSYS.

Tabela 5.3 - Componentes do tensor H_{ijkl}

Componentes do tensor H_{ijkl}	Equação (6.2)	LDEM		ANSYS	
		Resultado	Erro	Resultado	Erro
H_{2222}	1,795E-12	1,775E-12	-1,12%	1,801E-12	0,33%
$H_{1212}=H_{2121}=H_{1221}=H_{2112}$	8,976E-13	8,117E-13	-9,57%	9,586E-13	6,79%

Nessa tabela, o primeiro resultado foi obtido através da simulação com o segundo carregamento da Equação (5.4). Para este caso, a simulação com o LDEM apresentou um erro em torno de 1%. Já na simulação no ambiente do ANSYS, esse erro foi menor que 0,5%. Esses valores de erro são pequenos, o que indica que os resultados obtidos, para H_{2222} , com os métodos numéricos, são compatíveis com a resposta analítica.

O segundo resultado da Tabela 5.3 foi obtido através da simulação com o terceiro carregamento da Equação (5.4). Nesse caso, o erro do modelo no LDEM ficou em torno de 10%, enquanto que o erro no modelo do ANSYS ficou em torno de 7%. Este erro é bem maior que aquele apresentado para a componente H_{2222} , porém, mesmo assim, ainda pode-se dizer que os resultados, para a componente H_{1212} , são compatíveis com a resposta analítica para essa componente.

Sendo assim, essa metodologia pode ser aplicada para obter os tensores de quarta ordem, nos dois modelos numéricos. A diferença entre os resultados numéricos e analíticos nos termos de corte pode ter sido causada pela forma como a fissura foi modelada. Uma forma mais precisa para modelar a fissura, seguindo a metodologia utilizada por Kosteski (2008), deve ser testada, como continuação desse trabalho.

5.3 Índices de dano

Para avaliar os índices de dano implementados, uma placa, com as dimensões mostradas na Figura 5.1, foi simulada com o LDEM. Nessa simulação a placa foi construída novamente com 200x200x1 módulos cúbicos básicos, cada um com cinco centímetros de lado, resultando em uma placa de 10 m x 10 m. Assim como no teste de compatibilidade, a placa foi avaliada no estado plano de deformações, então, além de usar um único módulo na espessura (direção z), o deslocamento dos nós nessa direção foi restringido.

As outras condições de contorno aplicadas nessa placa também são similares às aquelas descritas para o teste de compatibilidade:

- Na extremidade superior da placa (marcada em preto na Figura 5.1), foi aplicado deslocamento prescrito, de maneira suficientemente lenta, na direção y ;
- Na extremidade inferior da placa (marcada em vermelho na Figura 5.1), o deslocamento na direção y foi restringido.

As propriedades do material, que é o mesmo descrito anteriormente, e os dados dessa simulação, são mostrados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 - Propriedades do material e dados da simulação

Propriedades	Valores
E (módulo de elasticidade)	3,5E10 N/m ²
ρ (densidade)	2,4E3 kg/m ³
ν (coeficiente de Poisson)	0,25
G_f (energia específica de fratura)	100 N/m
CV(G_f) (coeficiente de variação de G_f)	40%
R_f (fator de falha)	1,15 m ^{1/2}
L (tamanho do módulo cúbico básico)	5,00E-2 m
$\dot{\epsilon}$ (taxa de deformação)	1,67E-4 s ⁻¹
Δt (passo de tempo)	3,0E-6 s

A Figura 5.6 apresenta a forma da lei constitutiva uniaxial para uma das barras da estrutura.

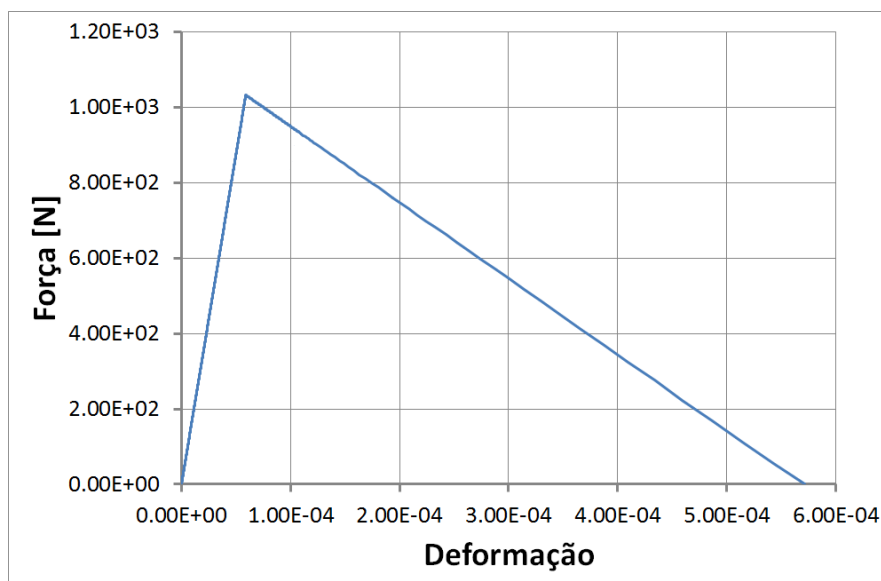


Figura 5.6 - Forma da lei constitutiva

Após a simulação da placa, o primeiro resultado avaliado foi o comportamento tensão versus deformação da estrutura, sendo que, ambas as medidas são globais. Essa relação pode ser observada na Figura 5.7, onde se percebe que o material comporta-se como esperado, de maneira quasi-frágil, apresentando falha catastrófica para uma deformação de $1,14\text{E-}4$ (com tensão de $2,63\text{E}6$ Pa). Essa deformação será chamada de deformação global de falha, e muitos dos gráficos usados nessa seção terão, no eixo das abcissas, a deformação normalizada em relação a esse valor (porcentagem da deformação global de falha).

Essa falha catastrófica poderia ser esperada, considerando-se que o tamanho de trinca crítica, a , que é igual a $0,76$ m (ver Equação (3.11)), era bem menor que a dimensão característica da estrutura analisada, D , que é igual a 10 m. Com isso, também foi possível calcular o número de fragilidade da estrutura, s , que ficou igual a $0,27$. Quando $s > 1$, não se espera uma ruptura catastrófica (Carpinteri, 1986).

A Figura 5.7 também indica seis níveis de deformação global, que serão usados, a seguir, como referência.

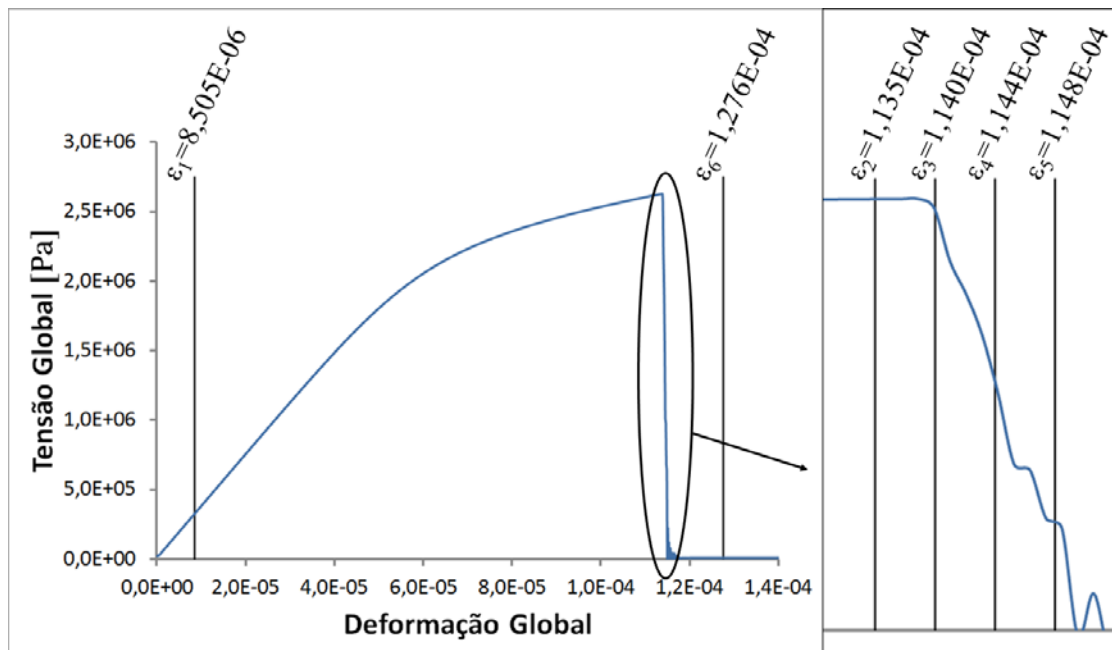


Figura 5.7 - Comportamento tensão-deformação da estrutura

Na Figura 5.8 se observa a relação entre as energias envolvidas na simulação e a deformação global da estrutura. Nessa figura, a energia cinética foi aumentada ($\times 10000$), para facilitar a sua visualização.

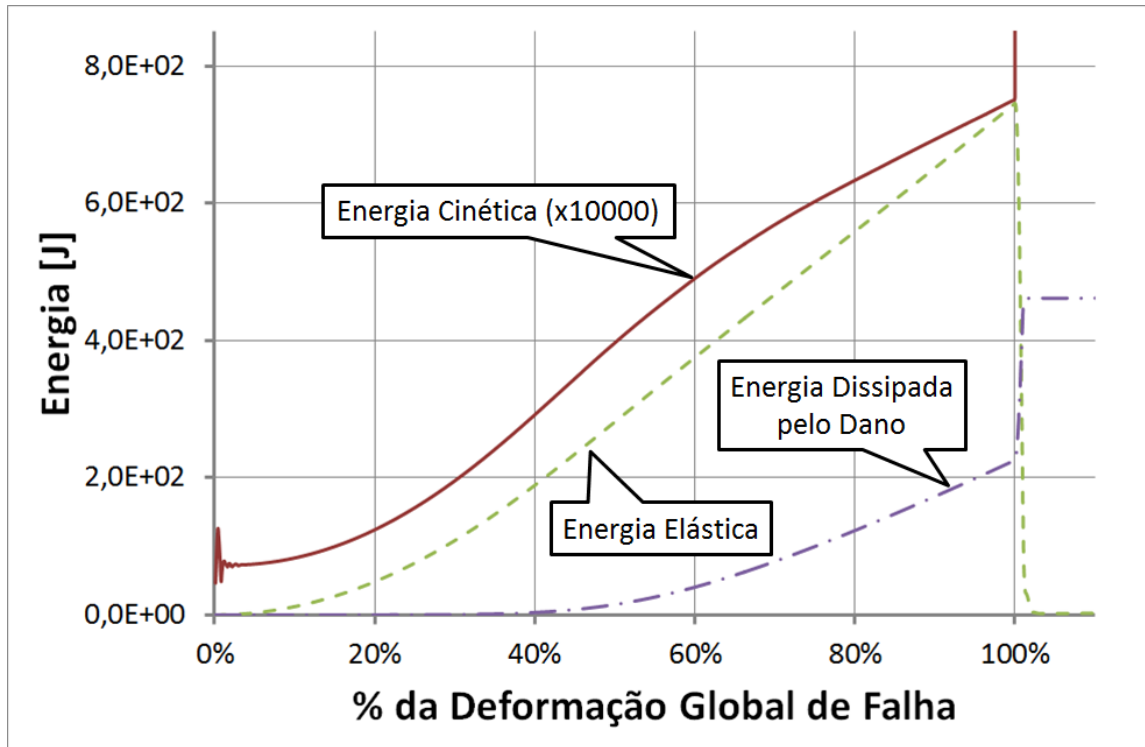


Figura 5.8 - Curva das energias em função da porcentagem da deformação global de falha

A Figura 5.9a mostra o padrão de fratura apresentado pela placa que foi simulada para fazer a avaliação dos índices. As placas na Figura 5.9b e Figura 5.9c foram simuladas para demonstrar a aleatoriedade empregada no modelo. Essas placas têm as mesmas propriedades que a placa na Figura 5.9a, porém, nos três casos, o padrão de fratura resultante foi diferente.

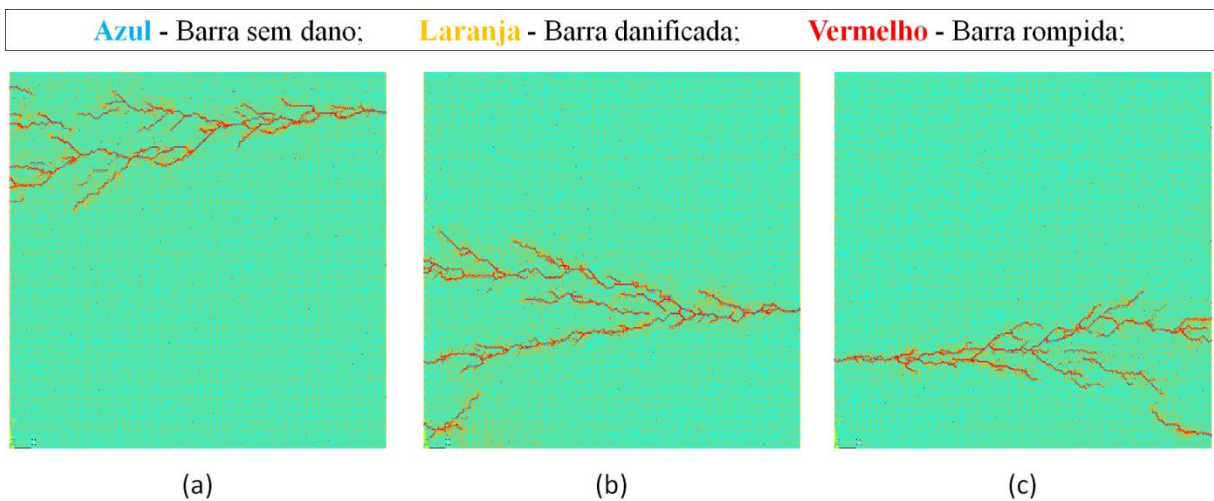


Figura 5.9 - Padrão de fratura: (a) da placa analisada nesta seção, (b) e (c) de placas com distribuição de propriedades diferente.

5.3.1 Índice de Dano Escalar

O índice de dano escalar pode ser avaliado pela Figura 5.10, onde se observa a sua evolução. Através desse gráfico é possível mostrar, novamente, o nível de deformação em que a falha acontece.

Esse índice faz uma avaliação global do dano, ou seja, ele leva em conta o dano da estrutura toda. Nessa figura, juntamente com o índice de dano escalar, a curva tensão-deformação da estrutura foi plotada, de forma normalizada, para ajudar na visualização da evolução do dano.

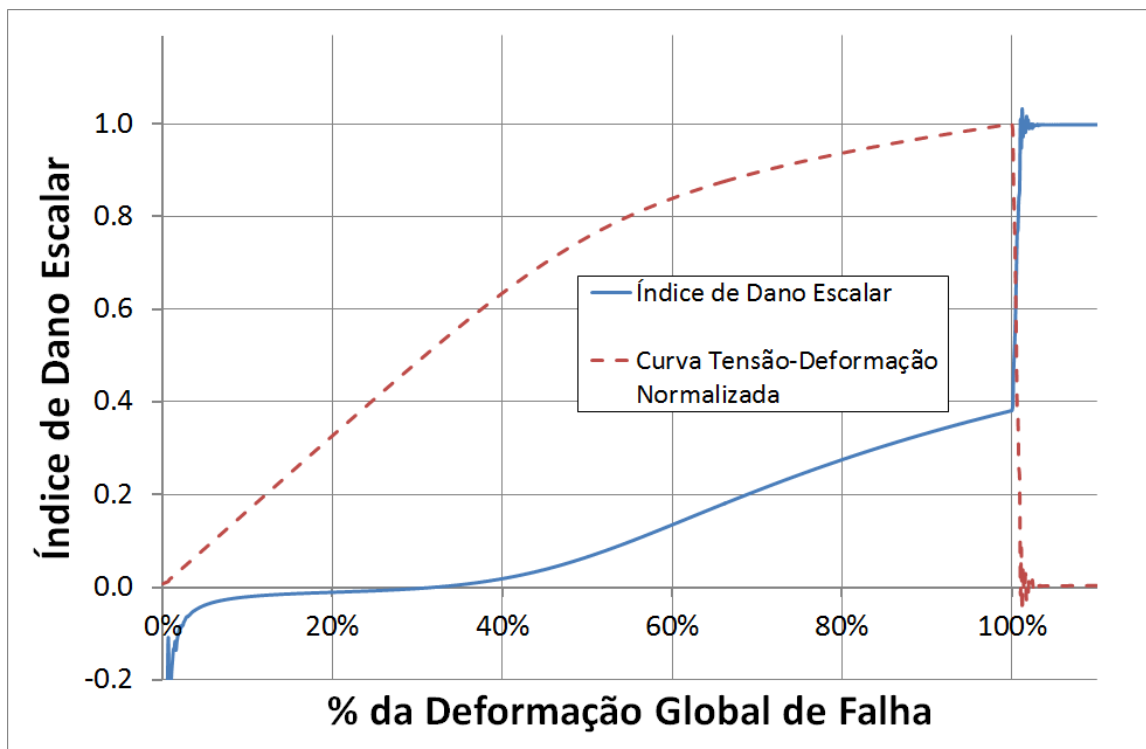


Figura 5.10 - Evolução do índice escalar

Depois da falha o valor deste índice se manteve aproximadamente igual a 1, a não ser pelos primeiros momentos após a placa ser completamente atravessada pela fissura, quando seu valor sofreu oscilações, influenciadas pela vibração causada pela falha catastrófica.

Ainda se observa, nessa figura, uma oscilação no começo da simulação, que foi causada pelo início do movimento da extremidade superior da placa. Essas duas oscilações são, também, ilustradas pela energia cinética, mostrada na Figura 5.8.

5.3.2 Índice de Dano Tensorial de Segunda Ordem

Como já foi mencionado anteriormente, este índice permite a criação, de forma indireta, de um mapa do dano da estrutura, sendo possível, através disso, observar a nucleação de microfissuras e a localização do dano. Na Figura 5.11 cria-se esse mapa, para cada nível de deformação global que foi mostrado na Figura 5.7, através da plotagem da deformação da fase fissurada de cada módulo cúbico.

Com esse mapeamento é possível perceber, novamente, o caráter espontâneo da falha, que é característico de materiais quasi-frágeis, quando solicitados por um campo de tensões uniformes. Observa-se, também, como o dano começa tendo uma distribuição volumétrica, ou seja, sendo distribuído uniformemente sobre a estrutura, e que, à medida que o nível de dano progride, a sua localização acontece.

Na Figura 5.11c, a região onde se inicia a macrotrinca está marcada com um círculo amarelo. Na Figura 5.11b, outras três regiões, que poderiam ter dado início a macrotrinca, também foram marcadas.

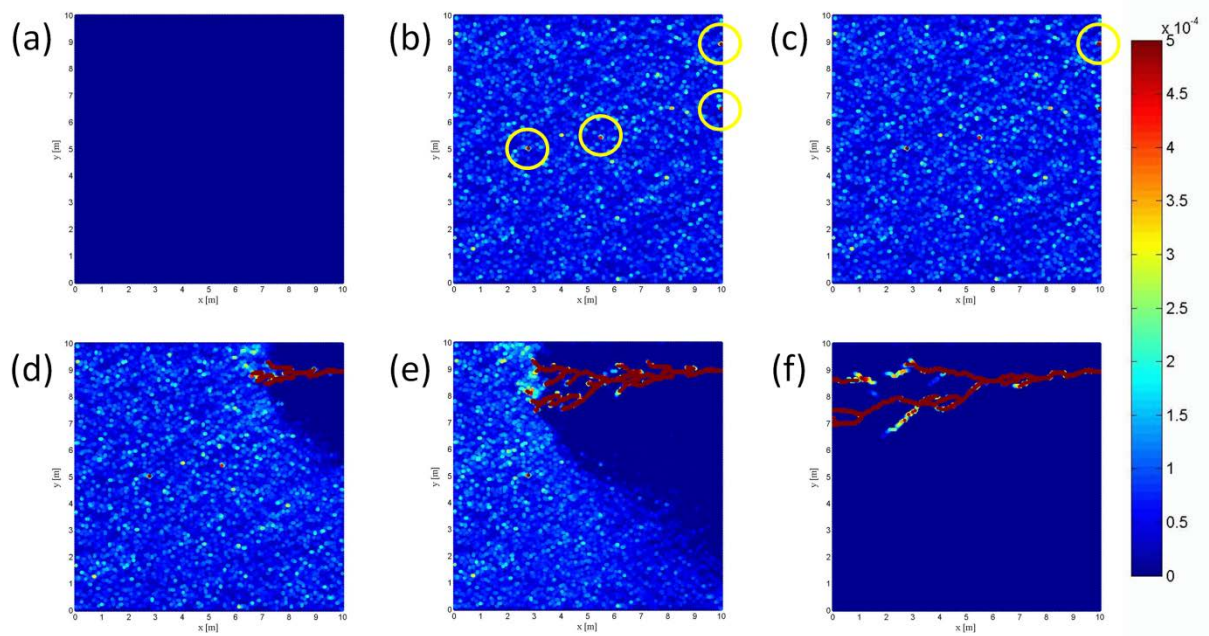


Figura 5.11 - Mapa do dano nos níveis de deformação global de referência: (a) ε_1 , (b) ε_2 , (c) ε_3 , (d) ε_4 , (e) ε_5 , (f) ε_6

Ainda é possível usar esse índice para avaliar o dano em um módulo cúbico específico da estrutura. Essa análise foi feita através da comparação de w_{22} (a componente do tensor w_{ij}

que tem a mesma direção do carregamento) com ϵ_{22} (a componente do tensor de deformação local que tem a mesma direção do carregamento), mostradas na Figura 5.12.

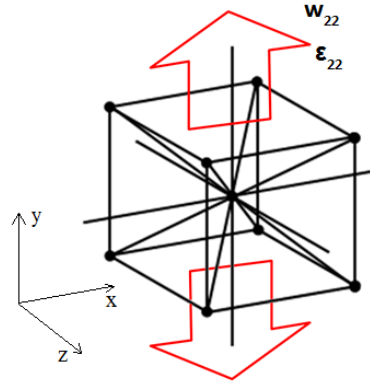


Figura 5.12 - Componentes analisadas

O primeiro caso analisado, mostrado na Figura 5.13b, foi um módulo que é atravessado pela fissura. Essa análise é feita em função da porcentagem da deformação global máxima da estrutura.

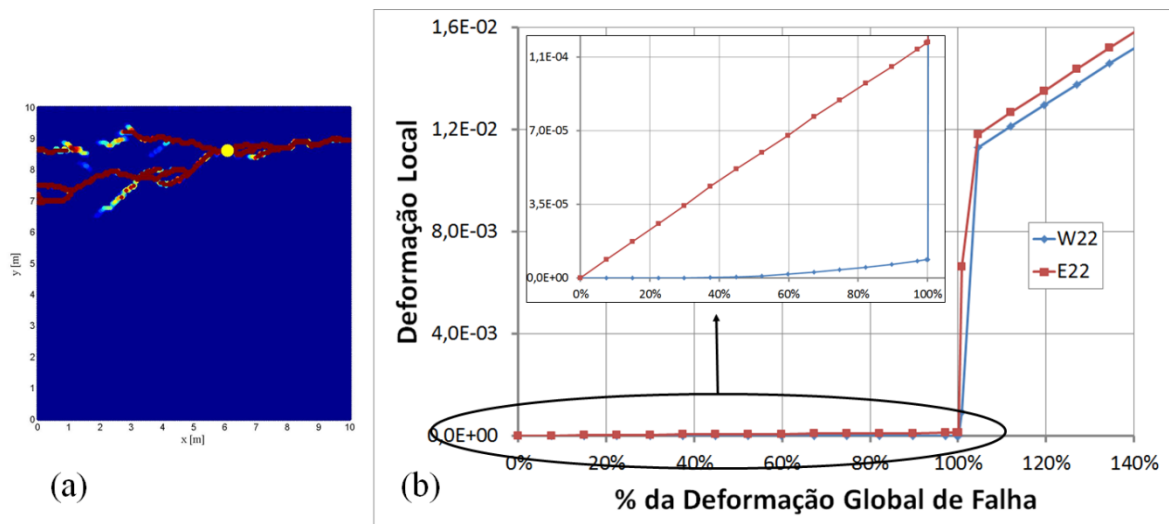


Figura 5.13 - (a) posição do módulo cúbico analisado (ponto amarelo), (b) comparação entre ϵ_{22} e w_{22} no módulo indicado

A Figura 5.13a indica a posição, através de um ponto amarelo, desse módulo cúbico na estrutura.

Observa-se o grande salto que aparece depois que a estrutura falha. Além do fato de que, depois da falha, essa componente do tensor w_{ij} cresce junto com a deformação local.

No detalhe da Figura 5.13b ainda se observa que, no início da simulação, quando a deformação ainda é elástica, o valor de w_{22} é igual a zero.

No segundo caso, a análise é feita para um módulo que está longe do caminho da fissura, e isso é apresentado na Figura 5.14b.

Como se pode observar, quando a falha acontece, a região fora da fissura é descarregada. Esse descarregamento causa uma queda, até zero, no valor da componente analisada em cada tensor (w_{22} e ϵ_{22}), isso é esperado, já que o comportamento do material não inclui deformações residuais. A queda no valor do tensor w_{ij} representa que a fissura, que estava aparecendo naquela região, foi "fechada" pelo descarregamento da estrutura, isso não significa que a placa não está mais danificada, apenas quer dizer que a deformação da fase danificada, naquela região, agora é zero.

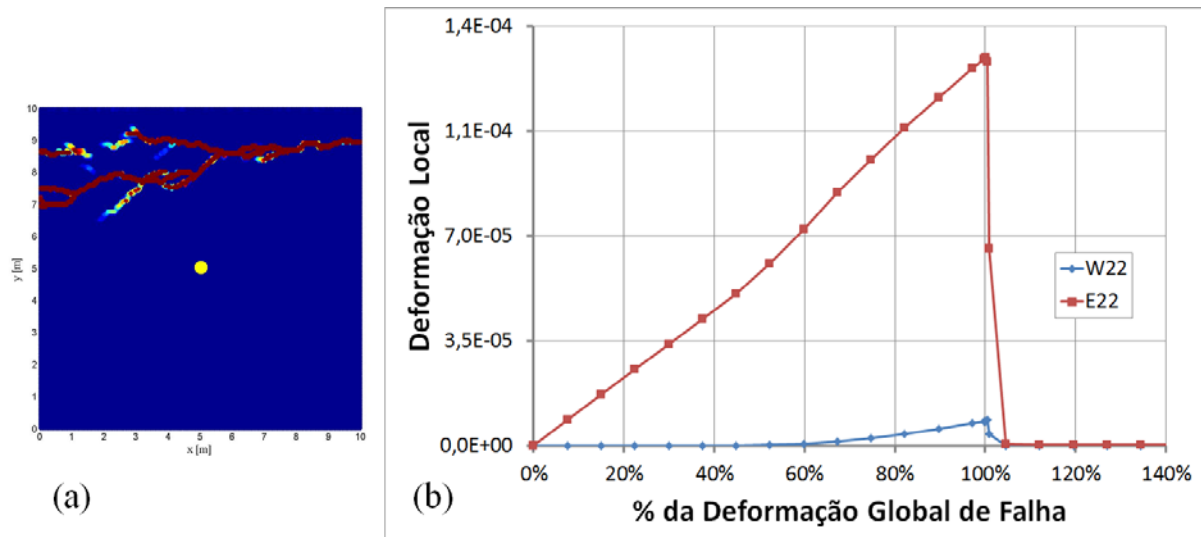


Figura 5.14 - (a) posição do módulo cúbico analisado (ponto amarelo), (b) comparação entre ϵ_{22} e w_{22} no módulo indicado

A Figura 5.14a indica a posição, através de um ponto amarelo, desse módulo cúbico na estrutura.

Para mostrar que aquela região continua danificada mesmo depois do descarregamento, pode-se observar a Figura 5.15, que mostra a curva força-deformação de uma das barras do módulo cúbico analisado na Figura 5.14.

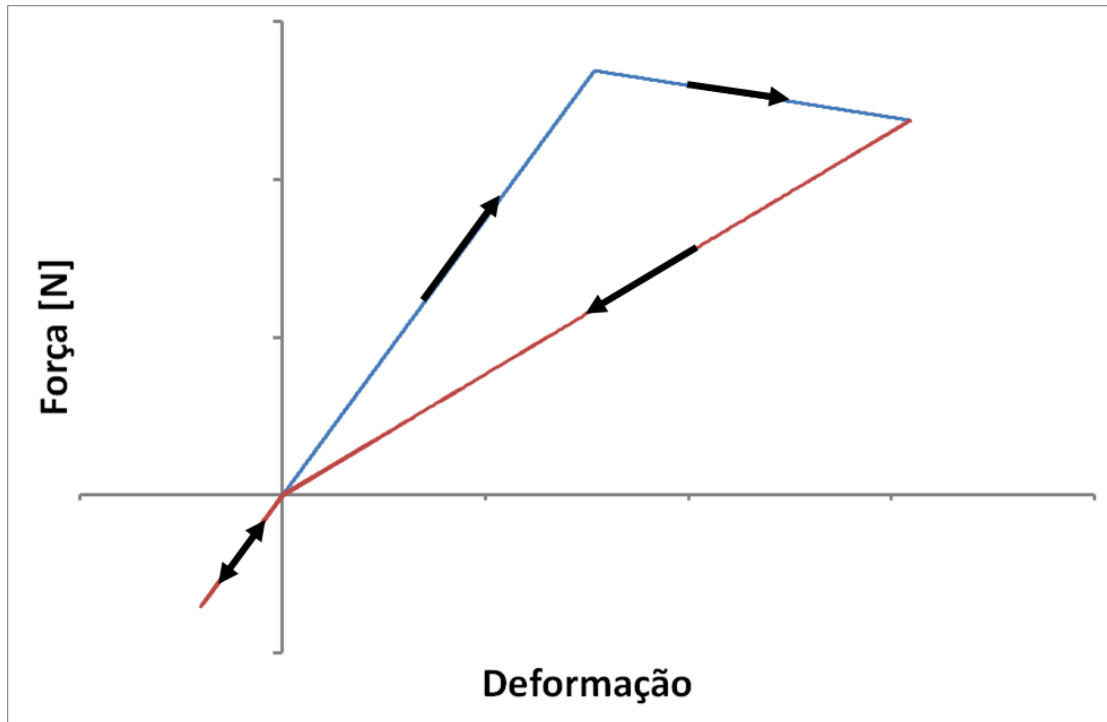


Figura 5.15 - Curva força-deformação para uma das barras do módulo cúbico analisado

Nessa figura, a curva em azul representa o carregamento da barra em questão. No momento da falha, a barra é descarregada, e isso acontece pela curva em vermelho na Figura 5.15. A diferença entre o caminho de carregamento e descarregamento mostra que a rigidez da barra, à tração, ficou menor depois do fim da simulação, isso indica que a barra está danificada. Ainda se observa na figura que, devido à vibração causada pela falha da estrutura, essa barra chega a receber solicitações de compressão, até se estabilizar e ficar totalmente descarregada.

Da forma como foi usado nesta seção, esse índice apresenta uma avaliação local do dano da estrutura. Porém, seria possível usar esse índice para avaliar a estrutura globalmente, determinando um tensor w_{ij} para o volume todo da estrutura.

Com essa metodologia, é possível ter uma medida qualitativa do comportamento do dano na estrutura.

5.3.3 Índice de Dano Tensorial de Quarta Ordem

Este índice completa as características do anterior, pois ele possibilita uma medida quantitativa do dano na estrutura.

Primeiramente, todas as componentes desse índice foram determinadas, para o estado de danificação da estrutura, em cada nível de deformação global mostrado na Figura 5.7 (ε_1 até ε_6). Esse resultado é apresentado na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 - Componentes do tensor D_{ijkl} para os níveis de deformação ε_1 e ε_2 .

D_{ijkl}	ε_1 8,505E-06	ε_2 1,135E-04	ε_3 1,140E-04	ε_4 1,144E-04	ε_5 1,148E-04	ε_6 1,276E-04
D_{1111}	0,000E-00	1,566E-04	1,622E-04	1,789E-02	6,354E-02	1,083E-01
D_{2222}	7,991E-07	4,916E-02	4,952E-02	1,419E-01	3,483E-01	5,449E-01
D_{1212}	0,000E-00	1,643E-04	1,684E-04	7,002E-03	2,416E-02	5,427E-02
D_{1122}	0,000E-00	2,202E-04	2,300E-04	2,959E-02	9,523E-02	1,528E-01
D_{2211}	0,000E-00	2,197E-04	2,323E-04	4,118E-02	1,241E-01	1,908E-01
D_{1112}	0,000E-00	8,215E-05	8,421E-05	4,577E-03	1,410E-02	3,401E-02
D_{1211}	0,000E-00	3,132E-04	3,244E-04	2,427E-02	7,734E-02	1,230E-01
D_{2212}	0,000E-00	1,682E-04	1,732E-04	1,203E-02	4,383E-02	9,855E-02
D_{1222}	0,000E-00	4,405E-04	4,600E-04	5,086E-02	1,694E-01	2,876E-01

Pelos resultados da Tabela 5.5 é possível observar que, no nível de deformação ε_1 a estrutura praticamente não apresentava dano, uma vez que o valor apresentado para D_{2222} é tão pequeno que pode ser desprezado. Ainda assim, os componentes do tensor D_{ijkl} , nesse nível de deformação, já mostram a tendência do dano se tornar anisotrópico.

Essa anisotropia já pode ser observada nas componentes do tensor para o nível de deformação ε_2 , onde componentes como, por exemplo, D_{1111} e D_{2222} já apresentam valores diferentes, indicando que o dano é maior em uma certa direção, como era esperado.

Também na Tabela 5.5, é interessante observar que, apesar dos níveis de deformação ε_3 e ε_4 serem bem próximos, todas as componentes do tensor D_{ijkl} sofreram um grande salto entre esses dois estados. Isso acontece porque, no estado ε_3 uma macrotrinca começa a aparecer na placa, e, a partir disso, ela se desenvolve rapidamente.

Ainda pela Tabela 5.5, percebe-se que as componentes do tensor D_{ijkl} não mudaram muito entre os estados ε_5 e ε_6 , isso acontece porque, nesses estados, a macrotrinca já atravessou praticamente toda a placa.

Como foi mencionado no capítulo anterior, ainda é possível usar o tensor D_{ijkl} para calcular o tensor constitutivo efetivo do material, C_{ijkl}^* . Com esse objetivo, calcula-se o tensor constitutivo do material sem dano, através da Equação (4.9) e da Equação (4.10). Considerando somente duas dimensões, esse tensor fica igual a:

$$C = \begin{bmatrix} 4,20 \times 10^{10} & 1,40 \times 10^{10} & 0 \\ 1,40 \times 10^{10} & 4,20 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1,40 \times 10^{10} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Com os resultados da Tabela 5.5, que apresenta o tensor D_{ijkl} para seis níveis de deformação global (ε_1 até ε_6), e usando a Equação (4.8), chega-se as seguintes respostas para C_{ijkl}^* :

$$\varepsilon_1 \rightarrow C^* = \begin{bmatrix} 4,20 \times 10^{10} & 1,40 \times 10^{10} & 0 \\ 1,40 \times 10^{10} & 4,20 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1,40 \times 10^{10} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_2 \rightarrow C^* = \begin{bmatrix} 4,20 \times 10^{10} & 1,33 \times 10^{10} & -5,81 \times 10^6 \\ 1,40 \times 10^{10} & 3,99 \times 10^{10} & -8,22 \times 10^6 \\ -4,38 \times 10^6 & -6,17 \times 10^6 & 1,40 \times 10^{10} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_3 \rightarrow C^* = \begin{bmatrix} 4,20 \times 10^{10} & 1,33 \times 10^{10} & -5,96 \times 10^6 \\ 1,40 \times 10^{10} & 3,99 \times 10^{10} & -8,45 \times 10^6 \\ -4,54 \times 10^6 & -6,44 \times 10^6 & 1,40 \times 10^{10} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_4 \rightarrow C^* = \begin{bmatrix} 4,07 \times 10^{10} & 1,08 \times 10^{10} & -3,61 \times 10^8 \\ 1,20 \times 10^{10} & 3,56 \times 10^{10} & -5,69 \times 10^8 \\ -3,40 \times 10^8 & -7,12 \times 10^8 & 1,39 \times 10^{10} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_5 \rightarrow C^* = \begin{bmatrix} 3,76 \times 10^{10} & 5,12 \times 10^9 & -1,21 \times 10^9 \\ 7,90 \times 10^9 & 2,60 \times 10^{10} & -2,04 \times 10^9 \\ -1,08 \times 10^9 & -2,37 \times 10^9 & 1,37 \times 10^{10} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\varepsilon_6 \rightarrow C^* = \begin{bmatrix} 3,48 \times 10^{10} & -4,41 \times 10^7 & -2,81 \times 10^9 \\ 4,47 \times 10^9 & 1,70 \times 10^{10} & -4,62 \times 10^9 \\ -1,72 \times 10^9 & -4,03 \times 10^9 & 1,32 \times 10^{10} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Esses resultados demonstram mais uma das vantagens do tensor D_{ijkl} . Eles também mostram que o dano faz com que a estrutura deixe de ser isotrópica, o que já era esperado.

A Figura 5.16 e a Figura 5.17 apresentam a evolução das componentes D_{1111} e D_{2222} , respectivamente, em relação a porcentagem da deformação global de falha da estrutura.

Na Figura 5.16 se observa que a componente D_{1111} cresce muito pouco ao longo da simulação, a não ser a partir do momento da falha da estrutura, quando essa componente sofre um grande salto. Isso era esperado, uma vez que o carregamento foi aplicado na direção perpendicular à direção que esse componente representa.

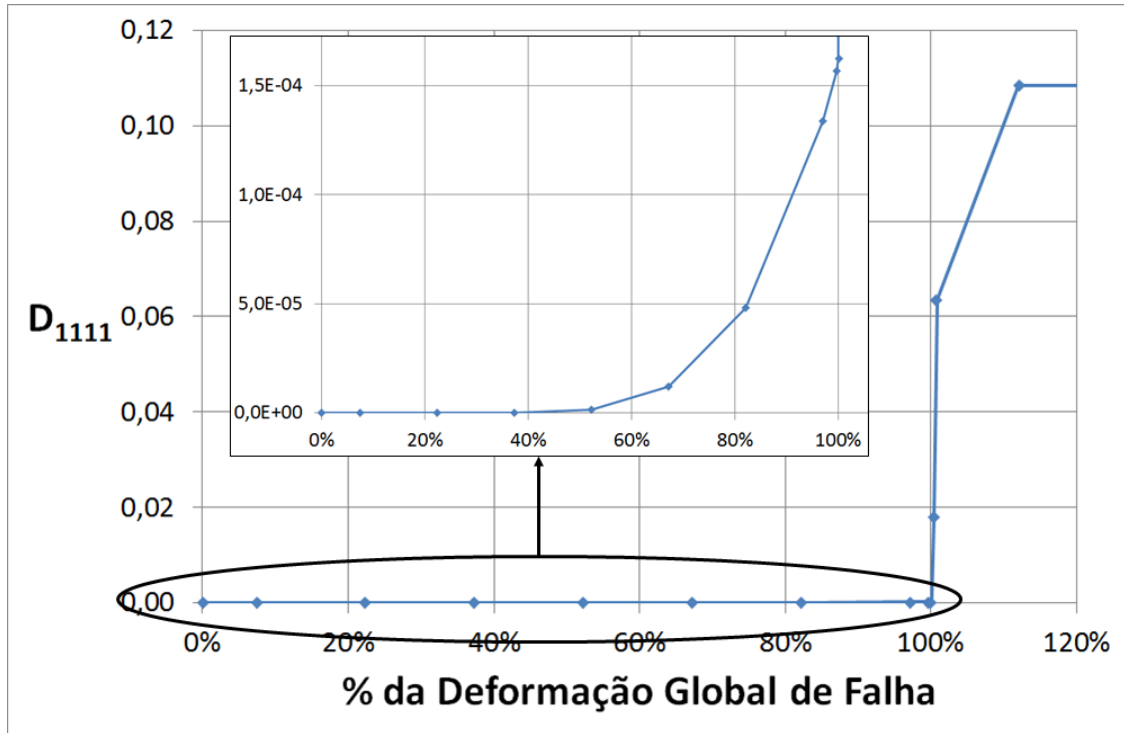


Figura 5.16 - Evolução da componente D_{1111} desse índice.

Na Figura 5.17, observa-se que o crescimento do componente D_{2222} é mais acentuado que o D_{1111} , isso acontece, como foi mencionado, porque o carregamento foi aplicado nessa direção. Depois da falha esse componente também apresenta um grande salto.

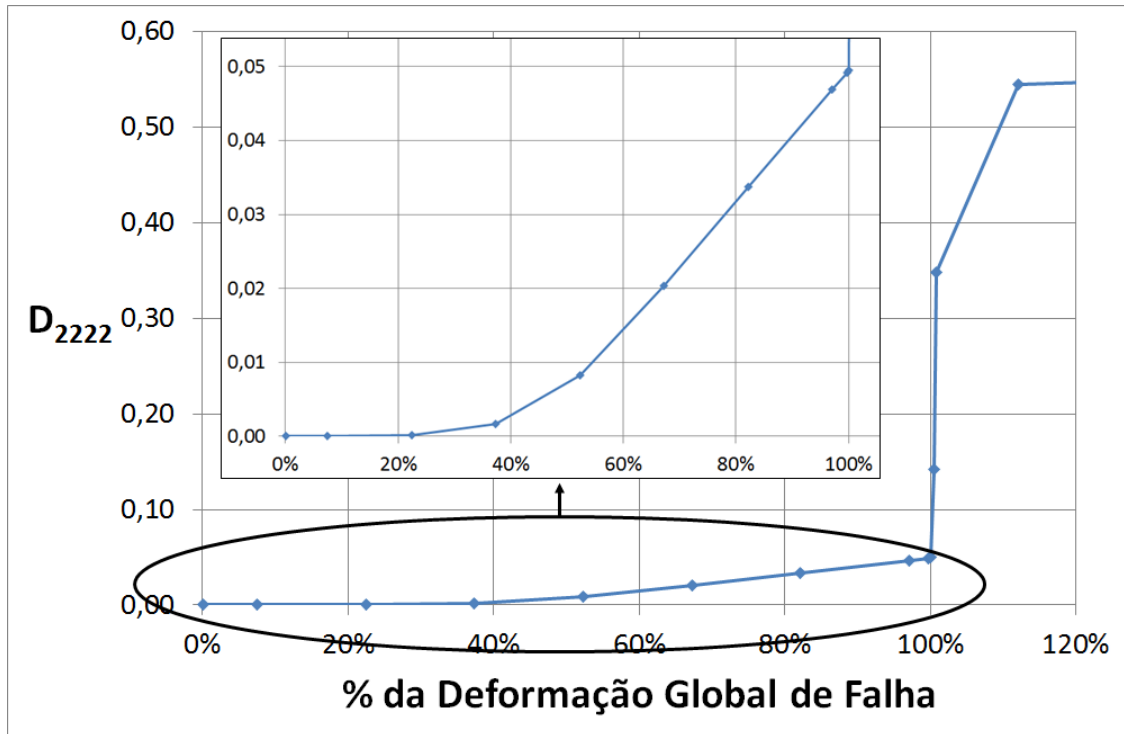


Figura 5.17 - Evolução da componente D_{2222} desse índice.

O valor final para a componente D_{2222} foi igual a 0,548, isso mostra que o dano não precisou ser máximo (igual a 1) para que a estrutura entrasse em colapso.

É interessante observar que esses dois componentes, mostrados na Figura 5.16 e na Figura 5.17, mantiveram seus valores praticamente constantes depois que a placa foi completamente atravessada pela fissura. Isso acontece porque esse tensor é uma medida real de dano, então seu valor é mantido mesmo depois da estrutura ser descarregada.

Na Figura 5.18, a evolução do valor das componentes D_{1111} e D_{2222} é mostrada novamente, porém, nessa figura, essas componentes foram normalizadas em relação a um valor comum, representado por $D^{*máx}$, onde D^* é dado pela Equação (5.12).

$$D^* = \sqrt{D_{1111}^2 + D_{2222}^2} \quad (5.12)$$

O valor de $D^{*máx}$ é 5,582E-1. Com a Figura 5.18, a diferença entre o valor de D_{1111} e D_{2222} fica mais clara, é possível perceber o crescimento mais rápido e mais acentuado do valor de D_{2222} , em relação a D_{1111} , e com isso, a anisotropia do dano fica mais evidente.

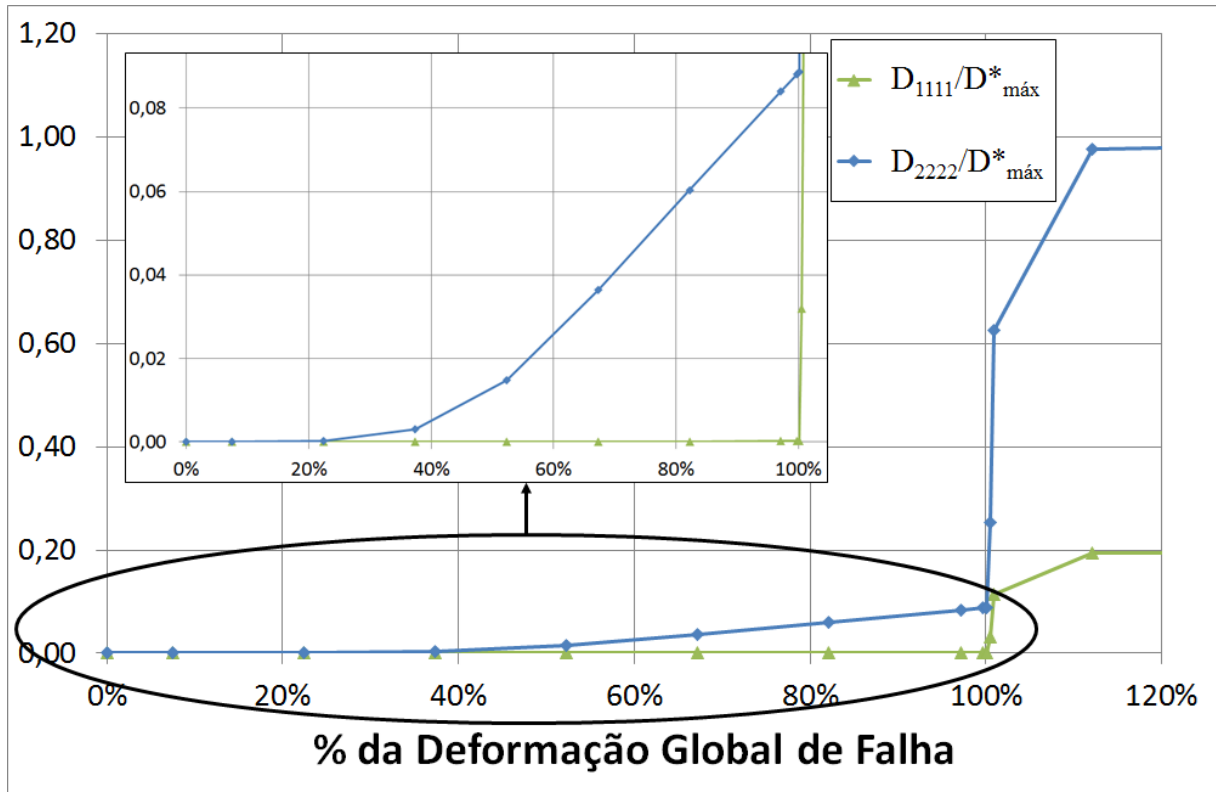


Figura 5.18 - Evolução do valor normalizado das componentes D_{1111} e D_{2222} desse índice.

Neste trabalho, esse índice avaliou o dano da estrutura como um todo, ou seja, ele foi usado como um índice global de dano. Porém, esse índice também poderia ser avaliado em subdomínios da estrutura toda, ou seja, ele poderia ser usado como um índice local de dano. Essa característica será explorada em trabalhos futuros.

6 CONCLUSÕES

Esta dissertação abordou o tema da avaliação do processo de dano em materiais que se comportam de maneira quasi-frágil. Dessa forma, foram propostos três índices para medir o dano, e esses índices foram analisados através da simulação, com Método dos Elementos Discretos Formado por Barras, de uma estrutura de geometria simples, formada por um material heterogêneo genérico. Nesse contexto foi possível concluir que:

- A escolha do método de análise foi correta, tendo em vista que esse método é especialmente útil na análise de dano, uma vez que consegue representá-lo de maneira simples e direta;
- Através dos resultados obtidos no teste de compatibilidade, observa-se que, para simulações dentro do regime elástico e com as cargas aplicadas lentamente, as respostas das simulações dinâmicas realizadas com o LDEM são equivalentes às respostas das simulações quasi-estáticas realizadas no ambiente do ANSYS;
- A metodologia definida para obtenção dos tensores de quarta ordem se mostrou válida, uma vez que a diferença entre os resultados das simulações de verificação, em relação aos resultados analíticos obtidos na literatura, foi pequena. Isso permitiu que o tensor de dano de quarta ordem, usado para definir o índice de dano de quarta ordem, fosse determinado para vários níveis de danificação da estrutura;
- O índice de dano escalar escolhido se mostrou útil para uma análise global do dano, apresentando o crescimento dele na estrutura. Permitindo uma avaliação global do dano na estrutura estudada;
- Com o índice de dano tensorial de segunda ordem, definido pelo tensor w_{ij} , foi possível mostrar tanto a evolução do dano, mesmo que de forma indireta, como também detectar o efeito de localização (discutido na seção 2.2.1). Apesar de ser chamado de índice de dano, devido às suas características, esse índice não é uma medida real de dano, como já foi mencionado anteriormente;
- O índice de dano tensorial de quarta ordem completou as características do índice de segunda ordem, apresentando uma medida real da evolução do dano. Porém, esse índice é medido na estrutura inteira (índice global), não permitindo a avaliação do efeito de localização. Assim, combinando os resultados dos índices tensoriais de segunda e quarta ordem, é possível fazer uma avaliação completa do estado de danificação de uma estrutura.

6.1 Recomendações

Percebe-se, ao fim deste trabalho, que os índices implementados aqui ainda podem ser muito explorados, especialmente os dois índices tensoriais, que ainda não tinham sido implementados antes desta pesquisa. Como exemplo de tópicos que podem ser abordados usando esses índices, pode-se citar:

- A utilização dos índices tensoriais para determinar os modos de fratura das trincas presentes em uma estrutura, que não foi abordado nesta dissertação;
- A comparação desses índices com resultados de testes usando técnicas de emissão acústica;
- Testar a possibilidade de determinar o índice de dano de quarta ordem, ou seja, o tensor D_{ijkl} , em subdomínios da estrutura, obtendo assim, resultados similares aos obtidos com o tensor w_{ij} , porém, a partir de uma medida real de dano;
- Avaliar os índices implementados para outros casos de carregamento.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS/Explicit, **Version 6.x**, Dassault Systèmes Americas Corp., 2012.

ANSYS, 2013. “www.ansys.com”.

Ayatollahi, M.R., Aliha, M.R.M., Hassani M.M., Mixed mode brittle fracture in PMMA - An experimental study using SCB specimens. **Materials Science and Engineering A**, 417:348-356, 2006.

Bathe, K.J. **Finite element procedures**, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1996.

Carpinteri, A., **Mechanical damage and crack growth in concrete: plastic collapse to brittle fracture**. Dordrecht: Martinus Nijhoff; 1986.

Crawford, J.E., Wu, Y., Magallanes, J.M., Lan, S., Modeling of concrete materials under extreme loads. Em: Hao, H., Li, Z. (Eds), **Advances in protective Structures Research**. CRC Press, London, 2012.

Dalguer, L.A., Irikura, K., Riera, J.D., Chiu H.C., The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 Chi-Chi, Taiwan, earthquake: Brief interpretation of the damage distribution on buildings. **Bulletin of the Seismological Society of America**, 91:1112-1127, 2001.

Dalguer, L.A., Irikura K., Riera, J.D., Simulation of tensile crack generation by three-dimensional dynamic shear rupture propagation during an earthquake. **Journal of Geophysical Research**, 108(B3):2144, 2003.

Eshelby, J.D., **The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems**. Proceedings of the Royal Society A 241 (1226):376-396, 1957.

Hallquist, J.O., **LS-DYNA – Keyword User’s Manual**, Version 971, Livermore Software Technology Corporation (LSTC), 2007.

Hayashi, Y., **Sobre uma representação discreta de meios contínuos em dinâmica não-linear**. Tese (Mestrado), CPGEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil, 1982.

Herrmann, H., Roux, S., **Statistical Models for the Fracture of Disordered Media**. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1990.

Hillerborg, A., A model for fracture analysis. Division of Building Materials, Lund **Institute of Technology**, TVBM-3005:1-8, 1978.

Hill, R., **Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11:357-372, 1963.

Iturrioz, I., Miguel, L.F.F., Riera, J.D., Dynamic Fracture Analysis of Concrete or Rock Plates by Means of the Discrete Element Method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, 6:229-245, 2009.

Kosteski, L. **Aplicaciones del Método de Elementos Discretos en Mecánica de Fractura Estática y Dinámica**. Tese (Mestrado) Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Facultad de Ingeniería Universidad Nacional del Nordeste, Resistencia, Argentina, 2008.

Kosteski, L.E., Riera, J.D., Iturrioz, I., Consideration of Scale Effects and Stress Localization in Response Determination Using the DEM. **Mecánica Computacional, Cilamce-Mecom 2010**, XXIX:2785-2801, 2010.

Kosteski, L.E., Iturrioz, I., Batista, R.G., Cisilino, A.P., The truss-like discrete element method in fracture and damage mechanics. **Engineering Computations**, 6:765–787, 2011.

Kosteski, L.E., Barrios, R., Iturrioz, I., Crack propagation in elastic solids using the truss-like discrete element method. **International Journal of Fracture**, 174:139–161, 2012a.

Kosteski, L.E., Iturrioz, I., Riera, J.D., **Simulation of Anisotropic Damage in Quasifragile Materials Using the Truss-Like 3D Discrete Element Method**. International Conference on Damage Mechanics, 2012b.

Kosteski, L.E., **Aplicação do método dos elementos discretos formado por barras no estudo do colapso de estruturas**. Tese (Doutorado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2012c.

Krajcinovic, D., **Damage mechanics**. Elsevier, Amsterdam, 1996.

Krajcinovic, D., Vujosevic, M., Strain localization - Short to long correlation length transition. **International Journal of Solids and Structures**, 35(31):4147–4166, 1998.

Li, S., Liu, W.K., Meshfree and particle methods and their applications. **Applied Mechanics Reviews**, 55(1):1-34, 2002.

Liu, G.B., Liu, M.B., **Smoothed particle hydrodynamics: A meshfree particle method**. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.

Miguel, L.F.F., Riera, J.D., Iturrioz, I., Influence of size on the constitutive equations of concrete or rock dowels. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 32(15):1857-1881, 2008.

Miguel, L.F.F., Iturrioz, I., Riera, J.D., Size effects and mesh independence in dynamic fracture analysis of brittle materials. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, 56:1-16, 2010.

Nagy, E., Landis, E.N., Davids, W.G., Acoustic emission measurements and lattice simulations of microfracture events in spruce. **Holzforschung**, 64:455–461, 2010.

Nayfeh, A.H., Hefzy, M.S., Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures. **AIAA Journal**, 16(8):779-787, 1978.

Nemat-Nasser, S., Hori M., **Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials**. North-Holland, 1999.

Ottosen, N.S., Failure and elasticity of concrete. **Danish Atomic Energy Commission, Research Establishment Risø, Risø-M-1801**, 1975.

Puglia, B.V., Iturrioz, I, Riera, J.D., Kostaski, L., Random field generation of the material properties in the truss-like discrete element method. **Mecánica Computacional, Cilance-Mecom 2010**, XXIX:6793-6807, 2010.

Riera, J.D., Local effects in impact problems on concrete structures. **Conference on Structural Analysis and Design of Nuclear Power Plants**, Vol. 3, 1984.

Riera, J.D., Iturrioz, I., Discrete element dynamic response of elastoplastic shells subjected to impulsive loading. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 11:417–426, 1995.

Riera, J.D., Iturrioz, I., Discrete element model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells subjected to impulsive loading. **Nuclear Engineering and Design**, 179:135-144, 1998.

Riera, J.D., Iturrioz, I., Size effects in the analysis of concrete or rock structures. **International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 19)**, Toronto, Canada, 2007.

Riera, J.D., Miguel, L.F.F., Iturrioz, I., Strength of Brittle Materials under High Strain Rates in DEM Simulations. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, 82:113-136, 2011.

Rinaldi, A., Advances in statistical damage mechanics: New modeling strategies. Em: Voyiadjis, G.Z. (Ed.), **Damage Mechanics and Micromechanics of Localized Fracture Phenomena in Inelastic Solids**. CISM Course Series, Springer, 2011.

Rios, R.D, Riera, J.D., Size effects in the analysis of reinforced concrete structures. **Engineering Structures**, 26:1115-1125, 2004.

Sagar, R.V., Raghu Prasad, B.K., Modeling heterogeneity of concrete using 2D lattice network for concrete fracture and comparison with AE study. **Sadhana**, 34(6):865-886, 2009.

Schlangen, E., van Mier, J.G.M., Crack propagation in sandstone: Combined experimental and numerical approach. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 28(2):93-110, 1995.

Seelig, T., **Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics**. Mechanical Engineering Series, Springer, 2006.

Shinozuka, M., Deodatis, G., Simulation of multidimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation”, **Applied Mechanics Reviews**, 49(1): 29-53, 1996.

Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., **Theory of Elasticity**. McGraw-Hill Classic Textbook Reissue Series, 3rd Ed., 1970

Van Mier, J., Measurement of Damage Parameters of Brittle Disordered Media Like Concrete and Rock. Em: Krajcinovic, D. (Ed.), **Damage and Fracture of Disordered Materials**. CISM Course Series, Springer, 1990.

Zohdi, T.I., **Computational modeling and design of new random microheterogeneous materials**. CISM Course Notes.

APÊNDICE A – *SCRIP*T DO AMBIENTE DO ANSYS

Nesse apêndice é apresentado um exemplo do *script* usado, no ambiente do ANSYS, para gerar o modelo de análise quasi-estática.

```
!ARQUIVO NO TEMPO = 0.000000000000000E+000
/PREP7
/TITLE, TEMPO = 0.000000000000000E+000
ET,1,180
ET,2,180
Keyopt,1,2,1
Keyopt,2,2,1
MP,EX,1, 35000000000.0000
!Propriedades de cada barra em compressão (type 1)
R, 1, 2.500000000000000E-004, ,-1
R, 2, 1.000000000000000E-020, ,-1
R, 3, 2.500000000000000E-004, ,-1
R, 4, 1.000000000000000E-020, ,-1
R, 5, 2.500000000000000E-004, ,-1
:
```

Isso é feito em todas as barras do modelo, mas, por praticidade, somente cinco barras são mostradas aqui.

```
!Propriedades de cada barra em tração (type 2)
R, 21, 2.500000000000000E-004, ,1
R, 22, 2.500000000000000E-004, ,1
R, 23, 2.500000000000000E-004, ,1
R, 24, 2.500000000000000E-004, ,1
R, 25, 2.500000000000000E-004, ,1
:
```

Aqui também, somente cinco barras são mostradas.

```
!Coordenadas nodais
N, 1, 0.0000000E+00, 0.0000000E+00, 0.0000000E+00
N, 2, 5.0000001E-02, 0.0000000E+00, 0.0000000E+00
```


N, 3, 0.000000E+00, 5.000000E-02, 0.000000E+00
 N, 4, 5.000000E-02, 5.000000E-02, 0.000000E+00
 N, 5, 0.000000E+00, 0.000000E+00, 5.000000E-02
 N, 6, 5.000000E-02, 0.000000E+00, 5.000000E-02
 N, 7, 0.000000E+00, 5.000000E-02, 5.000000E-02
 N, 8, 5.000000E-02, 5.000000E-02, 5.000000E-02
 N, 9, 2.500000E-02, 2.500000E-02, 2.500000E-02

!Conectividades dos elementos

TYPE,1

REAL, 1
 E, 1, 2, !EL 1
 REAL, 2
 E, 3, 4, !EL 2
 REAL, 3
 E, 5, 6, !EL 3
 REAL, 4
 E, 7, 8, !EL 4
 REAL, 5
 :

Novamente, somente cinco barras são mostradas.

TYPE,2

REAL, 21
 E, 1, 2, !EL 21
 REAL, 22
 E, 3, 4, !EL 22
 REAL, 23
 E, 5, 6, !EL 23
 REAL, 24
 E, 7, 8, !EL 24
 REAL, 25
 :

Somente cinco barras são mostradas.

!Condições de contorno

D, 1, UY, 0.

```
D,      1 ,UZ,0.
D,      2 ,UY,0.
D,      2 ,UZ,0.
F,      3 ,FY,0.00001
D,      3 ,UZ,0.
F,      4 ,FY,0.00001
D,      4 ,UZ,0.
D,      5 ,UY,0.
D,      6 ,UY,0.
F,      7 ,FY,0.00001
F,      8 ,FY,0.00001
/SOLU
ANTYPE, STATIC
NLGEOM,ON
SOLVE
SAVE
/POST1
etable,epelxxi,lepel,1
```